Introdução a geometria nos anos iniciais: por onde começar?

Um estudo com os diferentes significados das operações

Comprimentos, áreas... quais medidas explorar em sala de aula?

Ensino de frações com recursos digitais e manipuláveis

Se usar papel e lápis, o cálculo ainda é mental?

Diálogos sobre propostas didáticas em Matemática

Vamos programar nos anos iniciais?

Uma ferramenta para o estudo da multiplicação

Um dividido por quatro não dá... Se não dá, como a gente divide?

Construindo significado no SDN

Marilena Bittar
Katy Leão
(Orgs.)

Realização: DDMat Grupo de Estudos em Didática da Matemática

Apoio: UFMS Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

DIÁLOGOS SOBRE PROPOSTAS DIDÁTICAS EM MATEMÁTICA

Quipá
Editora

MARILENA BITTAR
KATY LEÃO
(ORGANIZADORAS)

DIÁLOGOS SOBRE PROPOSTAS DIDÁTICAS EM MATEMÁTICA

1ªEdição

Quipá Editora
2024

Capa: Asaph Ortolani Bedóia

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

D536

Diálogos sobre propostas didáticas em matemática / Organizado por Marilena Bittar e Katy Wellen Meneses Leão. — Iguatu, CE : Quipá Editora, 2024.

133 p. : il.

ISBN 978-65-5376-361-6
DOI 10.36599/qped-978-65-5376-361-6

1. Matemática – Ensino. 2. Didática. I. Bittar, Marilena. II. Leão, Katy Wellen Meneses. III. Título.

CDD 510.07

Elaborada por Rosana de Vasconcelos Sousa — CRB-3/1409

Obra publicada pela Quipá Editora em setemnbro de 2024

Quipá Editora
www.quipaeditora.com.br
@quipaeditora

AGRADECIMENTOS

Desde o início do Projeto *Oficinas on-line: diálogos sobre propostas didáticas em Matemática* passaram-se 4 anos. Ao longo deste período muitas pessoas participaram de alguma forma deste projeto, seja pontualmente, seja assiduamente, tanto ministrando oficinas, como atuando nos bastidores da organização quanto, principalmente, assistindo as oficinas e debatendo conosco nossas propostas. Queremos agradecer a todos vocês, sem distinção. O gerenciamento de uma oficina feita no modo remoto impôs muitos desafios e muitas aprendizagens. Obrigada a você que de alguma forma participou do Nosso Projeto e nos ajudou a crescer. Este texto é também uma forma de agradecimento e de retribuição a tudo que aprendemos.

Não podemos deixar de agradecer o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e tecnológico / CNPq, que financiou o projeto intitulado Estudo de decisões didáticas relativas à elaboração e realização de aulas propostas por um grupo de professores, aprovado no edital universal Nº 28/2018, coordenado por Marilena Bittar, que originou a proposta do Projeto Oficinas on-line.

APRESENTAÇÃO

Nos anos de 2021, 2022 e 2023 o Grupo de Estudos em Didática da Matemática ofereceu um total de 22 oficinas on-line no projeto intitulado "Oficinas on-line: diálogos sobre propostas didáticas em Matemática". Este projeto nasceu do desejo de oferecer à comunidade de professores do ensino fundamental e do ensino médio bem como licenciandos em Pedagogia, Matemática ou áreas afins, a oportunidade de discutir questões diretamente relacionadas à prática de sala de aula. Os temas e o desenvolvimento das oficinas foram inspirados em experiências de membros do Grupo DDMat com professores da educação básica ao longo de mais de duas décadas de trabalho. Cada oficina teve duração aproximada de duas horas, dos quais 50 minutos iniciais dedicados à apresentação por uma dupla de ministrantes e o tempo restante dedicado ao debate com os participantes. Apesar de este trabalho ter sido realizado de forma remota, nossa proposta foi de ficar o mais próximo possível do formato de oficinas no qual todos os envolvidos têm oportunidade de discutir/refletir e, principalmente, ter algo que contribua, de fato, com sua prática. Ao todo foram realizadas 22 oficinas, todas elas disponíveis no site do grupo https://grupoddmat.pro.br/ e no Youtube podendo ser visualizadas a qualquer momento.

Desde o início do projeto tínhamos a intenção de transformar as oficinas em textos a serem disponibilizados gratuitamente a toda a comunidade de educadores que se interessar pelos temas debatidos. Este desejo foi reforçado pelo grande número de visualizações que os vídeos têm atingido. Assim, nasce este primeiro volume com nove textos relativos às oficinas que foram destinadas aos anos iniciais do ensino fundamental. Acreditamos que a leitura de cada texto pode ser enriquecida caso seja possível assistir às oficinas, uma vez que nestas há mais detalhes, além do debate com os participantes. Em cada texto é disponibilizado o link para a oficina correspondente, além de algumas referências.

Desejamos que este texto contribua com a prática docente de nossos parceiros na caminhada por uma educação matemática justa e acessível a todos.

Um forte abraço e boa leitura.

Marilena Bittar

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

BRINCANDO DE VETERINÁRIO: UMA FERRAMENTA PARA O ESTUDO DA MULTIPLICAÇÃO

Oficina 1: Brincando de veterinário - YouTube

Autores:
Marilena Bittar[1] *- UFMS*
Camila de Oliveira da Silva[2] *– UFMS*
Milena da Silva Sousa Navas[3] *– UFMS*

Público-alvo: Destinada a estudantes do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental.

Objetivo: Apresentar e refletir sobre uma ferramenta didática para introduzir o estudo da multiplicação e divisão nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Habilidades da BNCC:

- (EF02MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4 e 5) com a ideia de adição de parcelas iguais por meio de estratégias e formas de registro pessoais, utilizando ou não suporte de imagens e/ou material manipulável.
- (EF03MA07) Resolver e elaborar problemas de multiplicação (por 2, 3, 4, 5 e 10) com os significados de adição de parcelas iguais e elementos apresentados em disposição retangular, utilizando diferentes estratégias de cálculo e registros.
- (EF03MA08) Resolver e elaborar problemas de divisão de um número natural por outro (até 10), com resto zero e com resto diferente de zero, com os significados de repartição equitativa e de medida, por meio de estratégias e registros pessoais.
- (EF03MA26) Resolver problemas cujos dados estão apresentados em tabela de dupla entrada, gráfico de barras ou colunas.

Materiais a serem utilizados:

- **Desenhos de cachorrinhos/ gatinhos, círculos de papel ou tampinhas de garrafa** para simbolizar os animais. O quantitativo dependerá do número e disposição de alunos por turma. Disponível no Anexo.
- **Cenários produzidos na HQ** pelo aplicativo Pixton (https://www.pixton.com/). Disponível no Anexo.

[1] Professora da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS). *e- mail:marilenabittar@gmail.com;* ORCID*: 0000-0001-9989-7871*
[2] Professora da Faculdade de Educação (FAED) na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)*; e-mail: camimatt@gmail.com ;* ORCID*: 0000-0003-3383-9235*
[3] Milena da Silva Sousa;e-mail: milenasilva27.ms@gmail.com Orcid: https://orcid.org/0000-0002-8024-8027

- **Grãos (feijão ou milho, por exemplo)** para representar o medicamento a ser dado aos animais.

Algumas escolhas didáticas:

- A situação *Brincando de Veterinário* retrata um contexto familiar e significativo às crianças desta faixa etária, promovendo um ambiente lúdico para aprender brincando;
- A situação pode permitir a participação ativa dos estudantes e a realização de trabalhos em grupos com a mediação do professor;
- Quando modificamos alguns dados desta situação obtemos diferentes atividades (oito ou mais situações, como aqui descreveremos) que podem favorecer a atribuição de sentido, pelos alunos, às operações de multiplicação e divisão;
- Realizar esse estudo com o auxílio de histórias em quadrinhos (HQ) pode viabilizar um diálogo entre diferentes áreas do conhecimento.

CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Esta proposta didática foi desenvolvida por meio da adaptação da situação *Brincando de veterinário,* apresentada inicialmente por Mandarino e Belfort (2006), e fez parte do Projeto de Iniciação Científica de Milena da Silva Sousa sob orientação de Marilena Bittar em 2020-2021. A partir das reflexões realizadas nesse estudo realizamos a primeira oficina on-line do ano de 2021, tendo como objetivo o diálogo com professores e futuros professores dos anos iniciais sobre a introdução dos conceitos de multiplicação e divisão, a partir da situação *Brincando de Veterinário.*

Com base nesse trabalho, buscamos contribuir com a elaboração de situações que possam favorecer a atribuição de sentido aos conceitos de multiplicação e divisão, de modo a proporcionar a construção desses conhecimentos pelos alunos, quando os mesmos interagem com situações que envolvem a multiplicação, a divisão ou a combinação destas operações aritméticas[4]. Além disso, ressaltamos a viabilidade desta situação para favorecer uma abordagem interdisciplinar de ensino, especialmente por meio do uso de histórias em quadrinhos.

Sobre a atividade *Brincando de Veterinário*

Brincando de Veterinário é uma situação que envolve uma clínica veterinária e que é narrada em forma de história em quadrinhos. Iniciamos com uma situação motivadora que deve ser de fácil entendimento pelas crianças (figura 1).

[4] Essa forma integrada de trabalho com as operações de multiplicação e divisão concerne a um campo multiplicativo, conforme proposta pelo psicólogo e pesquisador em Didática da Matemática, Gerárd Vergnaud.

Figura 1: Uma primeira situação motivadora

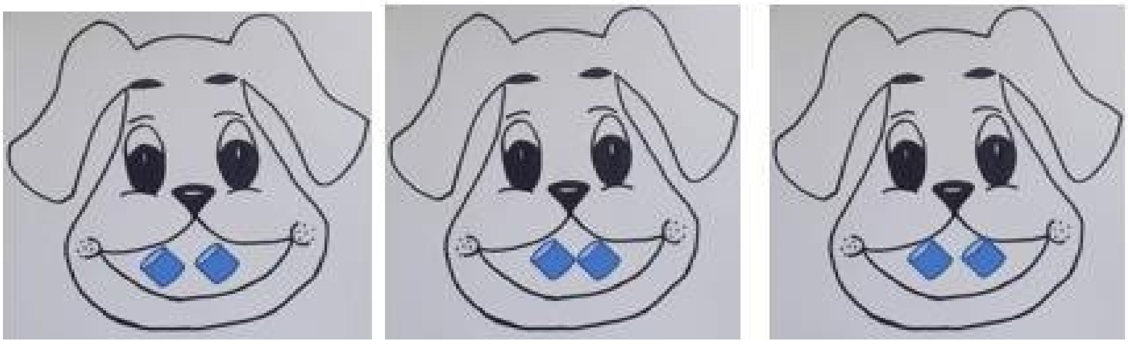
Fonte: acervo das autoras

Sugerimos a leitura coletiva da história em quadrinhos com os alunos, uma vez que sua compreensão é essencial para a interpretação e resolução do problema. Após realizar a leitura com os alunos, outros questionamentos podem ser feitos, como: quem tem animais de estimação? Ele já ficou doente? Como foi tratado?

A ideia é estimular os alunos a tentar ajudar a dona de Thor quando, ao final da HQ, ela se questiona sobre quantos comprimidos o veterinário tinha usado ao total no tratamento dos três cachorrinhos em questão. Para que a criança entre neste jogo pode-se também lhe atribuir o papel do veterinário que precisa tomar decisões e medicar corretamente os animais. Com isso, ela deverá agir sobre a situação, mobilizando algumas estratégias para solucionar o problema proposto.

Para responder à questão posta, possivelmente as crianças contarão os comprimidos de um em um, até obter a resposta de seis comprimidos no total. Como o objetivo com esta atividade é iniciar o estudo da multiplicação, sugerimos retomar o cálculo feito pelos alunos e escrever da seguinte forma: $2+2+2 = 6$. Ao sistematizar a situação em linguagem matemática é possível discutir com os alunos que outra forma de escrever esse mesmo cálculo pode ser $3 \times 2 = 6$, conforme expresso na figura a seguir:

Figura 2: Representando a primeira situação em jogo



$$2 + 2 + 2 = 6$$

$$2 + 2 + 2 = 3 \times 2 = 6$$

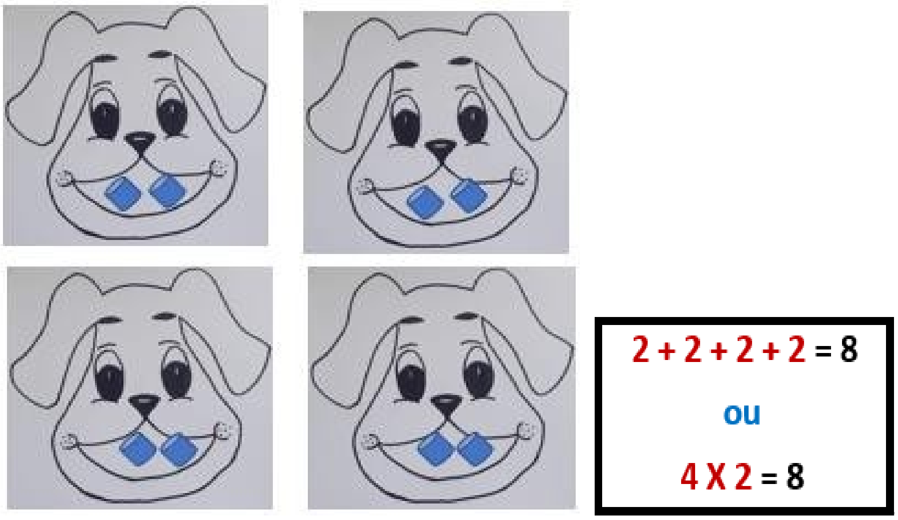
Fonte: acervo das autoras

É importante enfatizar a linguagem escrita utilizada: “Três animais que receberam dois comprimidos cada um” ou ainda que “três vezes dois comprimidos, ou seja, 3 x 2”, para que os alunos possam atribuir significado à escrita. O número “3” indica a quantidade de cachorrinhos medicados e o número “2” representa a quantidade de comprimidos que cada um receberá. Assim, são “3” cachorrinhos que irão receber “2” comprimidos cada um deles. Desse modo, queremos que o aluno perceba que ele pode reescrever a ação repetida expressa pela adição reiterada (2+2+2), em uma linguagem matemática mais econômica, fazendo uso de uma estratégia multiplicativa (3 x 2). Para isso, é fundamental que o professor realize outros questionamentos aos alunos, como: e se tivéssemos 4 cachorrinhos tomando 2 comprimidos cada? E se fossem 2 cachorrinhos que tiveram que tomar 4 comprimidos ao longo do dia? Isso nos leva a considerar que o trabalho com a linguagem em novas situações pode favorecer a transição entre a adição e a multiplicação, e para que a criança possa, aos poucos, compreender o uso do termo “vezes” associado a uma nova atividade matemática e esta adquira sentido é importante que seja reinvestida, como propomos na variação a seguir da situação inicial:

Figura 3: Segunda situação – Reinvestindo em uma situação similar

Pode-se perceber que existem duas maneiras de resolver o problema proposto. A primeira é pensar por meio da adição: ao manipular o material o aluno pode fazer a distribuição e, em seguida, registrar utilizando esta operação, a saber “2 + 2 + 2 + 2 = 8”. Tem-se, assim, 4 cachorrinhos que receberão 2 comprimidos cada um, o que pode ser expresso na linguagem matemática como sendo “4 x 2”, como representado na figura 4.

Figura 4: Representando a segunda situação



Fonte: acervo das autoras

Alguns estudos, como em Gitirana *et. al* (2014), explicitam que, quando trabalhamos com o campo multiplicativo (VERGNAUD, 1991), há certa continuidade entre a adição e a multiplicação como expressamos na possibilidade da primeira estratégia a ser mobilizada pelo aluno. No entanto, nas situações da atividade *Brincando de Veterinário* também estamos diante de uma nova operação que passa a envolver a relação entre quatro grandezas, sendo duas a duas de mesma espécie. Nelas fazemos correlação de duas espécies (cachorros e comprimidos): nesta segunda situação sabemos que um cachorro recebe dois comprimidos cada e queremos saber quantos comprimidos serão necessários para medicar 4 cachorros.

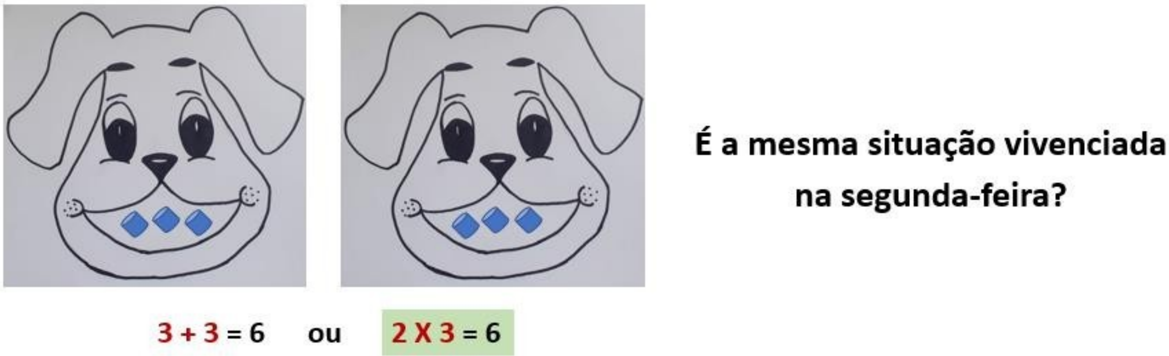
É importante ressaltar a necessidade de nós, professores, levantarmos questões a serem problematizadas com os alunos, ampliando a discussão em articulação com outros conceitos matemáticos. Por exemplo, com base no que foi exposto até aqui, é possível propor as seguintes questões aos estudantes: será que o veterinário sempre realiza o mesmo procedimento, receitando a mesma medicação, na mesma dosagem para todo animal que chega com os mesmos sintomas? O que ele precisa saber para dar a medicação correta a cada um deles? Isso não dependerá do peso e da idade de cada animal? Essas são algumas questões que permitem ao professor transitar por diferentes campos da matemática, como é o caso do estudo no campo das grandezas e medidas. A atividade a seguir (figura 5) ilustra uma destas possibilidades, em que o professor pode ampliar a discussão, além de permitir trabalhar a propriedade comutativa da multiplicação.

Figura 5: Problematizando uma terceira situação

Fonte: acervo das autoras

Nesta atividade os alunos podem retomar estratégias mobilizadas anteriormente, fazendo uso ou não da ideia aditiva, ao realizar a contagem três a três, por exemplo. No entanto, uma das potencialidades desta atividade está na comparação com a primeira atividade proposta. Por isso questionamos: trata-se da mesma situação inicial uma vez que a quantidade total de medicamentos usada é a mesma?

Figura 6: Articulando situações do *Brincando de veterinário*



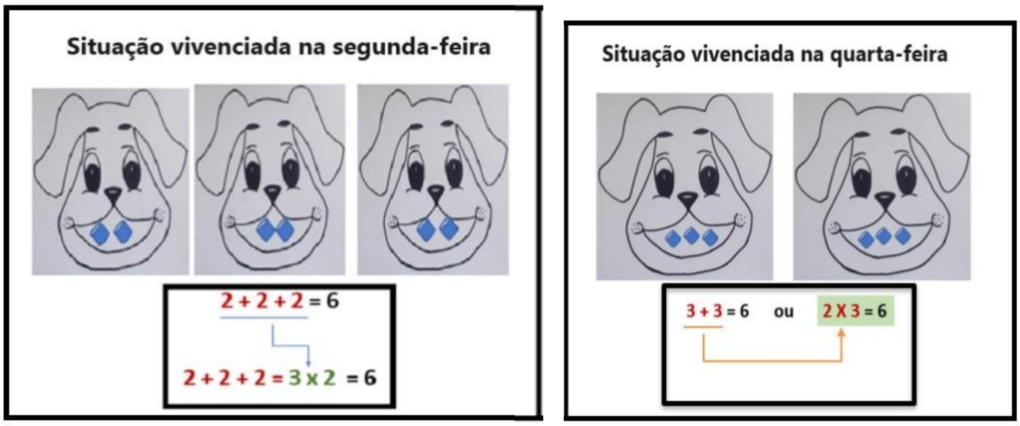
Fonte: acervo das autoras

O papel de mediador do professor é fundamental: ele pode questionar, motivar o aluno a pensar nas modificações realizadas, a reler a atividade, encenar as mesmas ou até mesmo jogar com os colegas. É nesse sentido que consideramos fundamental o *meio didático*[5] preparado pelo professor. Esse meio concerne todo um conjunto de elementos que condicionam a interação dos alunos com o saber em jogo em uma situação didática, ou seja, uma situação que o professor tem a intenção de que o aluno possa aprender algo. Assim, o meio é constantemente modificado em função das ações dos alunos. O professor age para manter o aluno na situação, estimulando-o com questões, porém sem fornecer respostas. É nesse movimento de levantar hipóteses, formular suas conjecturas, e passar a defender a sua hipótese para solucionar o problema que os alunos poderão construir seus conhecimentos. Além disso, essa situação, assim como qualquer outra do *Brincando de veterinário*, pode ser uma oportunidade para que os alunos vivenciem essas discussões também em grupos, favorecendo um ambiente de diálogo coletivo e produção de conhecimento.

Ao perceber que os alunos já debateram entre si, o professor poderá sistematizar os conceitos estudados. Isso se faz necessário, ao observar que embora os resultados das situações (segunda-feira e quarta-feira) sejam iguais, a saber, expresso pelo número 6,essas duas situações não são as mesmas. Dizemos isso, pois na primeira situação temos 3 cachorros recebendo 2 comprimidos cada e na segunda situação temos 2 cachorros recebendo 3 comprimidos cada um. Ou seja, a situação não é a mesma, pois na segunda- feira a quantidade de cachorros não é a mesma que a quantidade de cachorros que foi medicada na quarta-feira e o mesmo ocorre com a quantidade de medicamentos recebidos em cada um dos dias. Com a mediação a ser feita pelo professor, é importante que os alunos possam perceber a diferença entre as duas situações, comparando-as, o que pode ser ajudado com a representação lado a lado de ambas (figura 7).

[5] Conceito vinculado aos estudos do pesquisador e didata francês Guy Brousseau, que desenvolveu a Teoria das Situações Didáticas (TSD) como forma de compreender os fenômenos didáticos que ocorrem a partir da relação existente entre professor, aluno e o saber.

Figura 7: Comparando situações do *Brincando de veterinário*

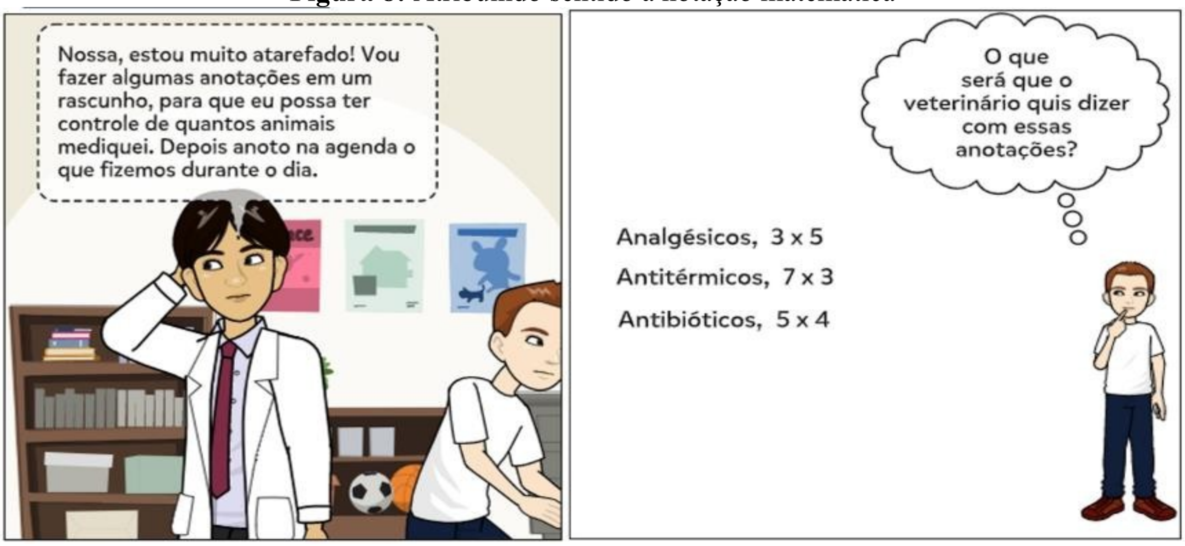


Fonte: acervo das autoras

Esta comparação é interessante para discutir a propriedade comutativa[6], pois, 3 x 2 é igual a 2 x 3, porém, nas situações retratadas não representam o mesmo fato. Desta forma, é importante que as crianças compreendam o que os números representam, pois como podemos observar, o sentido e o significado atribuídos a cada operação mobilizada nas duas situações em jogo diferem entre si. Portanto, se este tipo de situação não for bem discutido com os alunos, pode levar à troca de significado do problema, o que acaba não fazendo sentido nem na Matemática e nem para o aluno, como evidenciam Gitirana *et.al*. (2014).

Com a intenção de proporcionar aos alunos uma situação para que eles possam (re)interpretar o significado das notações que estão sendo trabalhadas no contexto da situação *Brincando de veterinário*, propomos mais uma atividade.

Figura 8: Atribuindo sentido à notação matemática



Fonte: acervo das autoras

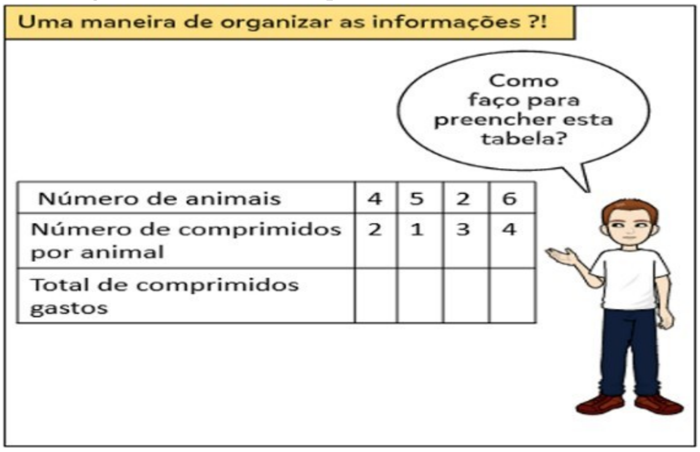
[6] Trata-se de trabalhar a ideia da propriedade comutativa por meio de uma situação pratica, sem atribuir nomes.

Podemos observar que perante esse problema o aluno pode ser levado a iniciar uma investigação e compreensão da notação matemática no campo multiplicativo, uma vez que ele tem condições de formular algumas hipóteses. Nesse caso, cabe destacar que, ao longo das situações que foram sendo aqui apresentadas, observamos que o veterinário atribui um único sentido a essa notação. No entanto, sem ter contato com as situações anteriores, a notação matemática expressa na figura 8 poderia representar diversas possibilidades.

Se pegarmos como exemplo o primeiro registro feito pelo veterinário – analgésicos, 3 x 5 – vemos que três animais foram medicados com 5 analgésicos cada, obtendo ao final o total de comprimidos utilizados. Como evidenciam Magina, Santos e Merlini (2010, p.7), "não faz sentido pensar no produto direto entre as duas grandezas [...], mas sim na relação multiplicativa que existe entre elas, duas a duas". Ainda em diálogo com as autoras, é o entendimento dessas relações que permite aos alunos compreender, em nosso caso, porque multiplicamos o número de animais medicados pela quantidade de comprimidos e o resultado é expresso em comprimidos e não em animais.

É importante também ressaltar como as atividades estabelecem um campo vasto de possibilidades de abordar um mesmo assunto, por meio de diferentes pontos de vista. Na situação a seguir, o professor pode favorecer pouco a pouco o trabalho de construção da tabuada com os alunos, elaborando vários exemplos, de modo que as crianças possam realizar seus registros com o auxílio do quadro.

Figura 9: Possibilidade para a construção da tabuada



Número de animais	4	5	2	6
Número de comprimidos por animal	2	1	3	4
Total de comprimidos gastos				

Fonte: acervo das autoras

Para preencher as lacunas os estudantes devem, primeiro, interpretar o quadro apresentado: tem-se, por exemplo, 4 animais recebendo 2 comprimidos cada um. Quantos comprimidos serão necessários para medicar os 4 animais? Ou, ainda, se 5 animais deverão receber um comprimido cada um, quantos comprimidos serão necessários para medicar os 5 animais? Nessa situação os alunos vão agindo, conforme sua familiaridade com as situações trabalhadas, podendo ou não usar o material concreto como apoio para interpretarem a situação posta e chegarem a uma solução.

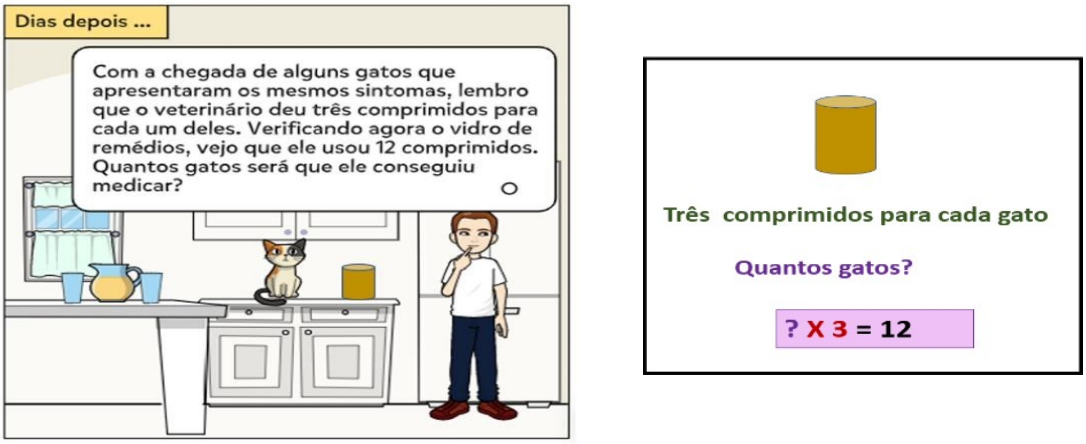
Além de os alunos refletirem sobre o que devem fazer para "preencher" as lacunas em branco, situações similares a essas podem ser propostas. Assim, o professor pode aproveitar para dialogar e explorar com os alunos algumas ideias voltadas ao tratamento de informações, como é o caso dos dados expostos no quadro da figura 9.

É interessante também refletir com os estudantes sobre as razões de certos animais receberem um comprimido enquanto outros recebem outra quantidade: será que os comprimidos são os mesmos? Os animais possuem o mesmo peso? Foram diagnosticados com uma mesma doença?

Já as próximas situações multiplicativas permitem explorar algumas ideias vinculadas ao conceito de divisão, como a ideia de medida, que será abordada na sexta situação, e a de partição em partes iguais, presente na sétima situação.

Essa opção de trabalho pode favorecer o processo de construção do conhecimento pelos alunos, sendo fundamental que o professor proponha situações-problema que os levem a mobilizar diferentes tipos de raciocínio e não somente uma série de problemas que repetem uma mesma ideia da operação em jogo, como expresso por Gitirana et al. (2014). Também concordamos com Bittar e Freitas (2005, p. 56) sobre o fato de que neste nível de escolaridade, as operações não devem "ser apresentadas de forma isolada, segundo uma hierarquia que não é efetiva do dia-a-dia da criança. Ou seja, não é preciso aprender tudo ou muito sobre a adição para depois conhecer a subtração, e então, a multiplicação, e finalmente, a divisão". De posse disto, vemos que a forma de trabalho aqui proposta é um exemplo de como estamos abordando diferentes relações matemáticas com a situação *Brincando de Veterinário*, de modo a possibilitar que os alunos tenham contato com as quatro operações aritméticas, por exemplo, sem estudá-las de forma fragmentada e sem necessidade de aprofundar conhecimentos sobre cada uma delas. O uso de material de manipulação e da história em quadrinhos favorece esta escolha.

Figura 10: Mobilizando a ideia de medida



Fonte: acervo das autoras

Nesta situação a quantidade de animais a ser medicada não é dada, no entanto, sabe-se o total de comprimidos gastos, no caso doze, e que cada gato recebeu três desses comprimidos. Esta nova situação desafia o aluno a enfrentar uma situação ainda não vivenciada e/ou familiar, o que exigirá uma mudança nas estratégias que estavam sendo utilizadas por ele. Com o desafio de encontrar o número de gatos medicados, uma possível estratégia a ser mobilizada pode ser ‘pegar’ (com material concreto ou não) os doze comprimidos que foram utilizados e, sabendo que cada animal recebeu três deles, separar os comprimidos em montinhos de três em três, associando-os a cada gato até não ter mais nenhum comprimido a ser distribuído. Ao final, observa-se que foi possível fazer quatro montinhos com três comprimidos cada, perfazendo o total de comprimidos usados (12). Essa é uma situação que mobiliza a ideia de medida, já que tínhamos como intuito descobrir quantos ‘grupos’ (aqui representados por gatos) seriam formados ao total, sabendo que cada um teria recebido exatamente três comprimidos de um total de 12 comprimidos.

Outra estratégia que pode ser mobilizada é por subtrações sucessivas: do total de comprimidos (12) vai-se retirando 3 comprimidos por vez, até não sobrar mais nenhum comprimento, observado, ao final, que esta ação foi executada 4 vezes. Esta atividade pode ser realizada no papel, desenhando o total de comprimidos e circulando grupos de três comprimidos para indicar cada grupo retirado do total (figura 11).

Figura 11: Algumas estratégias de resolução

$$\left.\begin{array}{l}12 - 3 = 9\\ 9 - 3 = 6\\ 6 - 3 = 3\\ 3 - 3 = 0\end{array}\right\}\ \textbf{4 gatinhos}$$

Fonte: elaborada pelas autoras

Neste trabalho, é importante o professor realizar a interpretação do problema com os alunos em paralelo à linguagem matemática que estava sendo trabalhada nas situações anteriores, ou seja, é importante construir com eles a notação "*? x 3 = 12*" (ou similar a esta) de modo que os alunos possam atribuir significado à situação trabalhada e,consequentemente, buscar mecanismos para encontrar o valor desconhecido da referida situação.

Já a situação que apresentamos na figura 12, traz como um dado conhecido a quantidade de animais a serem medicados. No entanto, não se sabe a quantidade de comprimidos que cada um recebeu e nem o total que foi utilizado.

Figura 12: Ampliando o estudo com a ideia de partição

4 Cachorros
De um vidro de 30 comprimidos restam 10
4 x ? = ?

Fonte: acervo das autoras

Para descobrir o total de comprimidos utilizados, a criança é levada inicialmente a mobilizar uma ideia vinculada à operação de subtração. Para isso, é possível representar os 30 comprimidos do frasco - antes do uso - por meio de grãos ou outros materiais de fácil acesso para as crianças, e, em seguida, retirar destes os 10 comprimidos que sobraram descobrindo, assim, que foram utilizados 20 comprimidos no total. Após obterem os 20 comprimidos, e sabendo que havia 4 cachorros (representados pelas imagens em papel), os alunos podem passar a distribuir os comprimidos, dando um para cada cachorro, até terminar o quantitativo de comprimidos dados, observando ao final, que cada animal ficou com 5 comprimidos. Outra estratégia que pode ser mobilizada por eles pode ser distribuir uma quantidade maior de comprimidos para cada cachorrinho, de modo que todos recebam a mesma quantidade de comprimidos.

Por mais que essa situação exija recorrer a uma ideia vinculada à operação aritmética de subtração como sendo um "novo" procedimento a ser realizado pelos alunos, a ação de distribuir em partes iguais uma quantidade dada poderá não ser um indicativo de dificuldades para os alunos no estudo do campo multiplicativo, o que lhe permite entrar neste jogo ao dispor de conhecimentos prévios para agir sobre ele. A ideia de partição em partes iguais oriunda da operação de divisão é algo mais familiar ao universo da criança, que já estava sendo trabalhada, implicitamente, desde a primeira atividade que apresentamos.

Já a situação descrita a seguir tem por objetivo realizar uma sistematização dos conceitos abordados com as situações anteriores, além de ser criada como forma de evidenciar uma combinação existente entre as ideias vinculadas às operações de multiplicação e divisão.

Figura 13: Sistematizando o estudo

Número de animais	2	3	4		5		3			2
Número de comprimidos por animal	3			1		2	3	4	3	
Total de comprimidos gastos		6	4	7	10	8		12	9	12

Fonte: acervo das autoras

Nesta situação ampliamos o nível de complexidade em comparação à quinta situação apresentada anteriormente, na qual também exploramos situações por meio de tabelas de dupla entrada, porém foram dados o total de animais e a quantidade de medicação a ser dada a cada um deles. Nesta situação que aqui esboçamos os dados fornecidos variam: ora é dada a quantidade de animais e a quantidade total de comprimidos usados e o estudante deve descobrir quantos comprimidos foram receitados para cada animal, ora tem-se a quantidade de comprimidos a ser dada para cada animal e a quantidade total de comprimidos e pede-se a quantidade animais medicados, ... Deve- se propor esta atividade como um desafio aos alunos para que possam ir aos poucos mobilizando as ideias tratadas nas situações anteriores, ou outras consideradas adequadas pelo docente, como o próprio cálculo mental. Esse reinvestimento mobilizando, agora, também estratégias multiplicativas vinculadas à operação de divisão, nos leva a crer que os alunos podem ser capazes de preencher os campos vazios da tabela, sem o uso do material concreto. No entanto, é possível que haja alunos que encontrem dificuldades no preenchimento de algumas células da tabela, o que pode ser realizado com o auxílio do material de manipulação. É também importante salientar que esta atividade permite trabalhar diferentes significados das operações em jogo, como as ideias da adição reiterada, partição e medida.

Outras situações

Para uma abertura de outras possibilidades que possam derivar do trabalho com essa proposta didática apresentamos alguns indicativos de situações que podem constituir em novas atividades que permitem trabalhar, entre outros, os diferentes significados das operações, a articulação com o campo das grandezas e medidas e com outras áreas do conhecimento, como Ciências e Língua Portuguesa.

Figura 14: Abertura para outras possibilidades

Fonte: acervo das autoras

Por fim, não podemos deixar de mencionar algumas questões que ficaram em aberto no estudo da multiplicação. Uma delas concerne ao trabalho com outros significados vinculados à multiplicação, como é o caso da organização retangular e o raciocínio combinatório, tão importantes para a compreensão de problemas do campo multiplicativo quanto os que trabalhamos aqui. Para o primeiro caso, apresentamos no primeiro quadrinho da figura 13 uma ideia de situação para fomentar uma possível exploração por professores destes anos de escolaridade.

Quanto ao raciocínio combinatório, também é possível pensarmos em uma situação, que nos permita disparar esse estudo. A título de exemplo, está a possibilidade de questionarmos sobre: "*Quantas maneiras diferentes podemos escolher dois animais para irem juntos ao banho/tosa, dentre quatro animais (Judite, Lucky, Thor e Mel) que hoje estão na clínica VetShop*?" Situações como essa permitem trabalhar a ideia de multiplicação sem formalizações excessivas, além de ser importante discutir com as crianças ideias fundamentais da combinatória, como é o caso de pontuar que, neste caso, a ordem que os animais são escolhidos não indica diferentes possibilidades para o banho, por exemplo.

Algumas considerações para sala de aula

Ao longo do texto traçamos possibilidades de trabalho, sinalizando uma variedade de situações reformuladas a partir de uma situação inicial, em diferentes níveis de complexidade, bem como das escolhas didáticas realizadas. Uma das escolhas foi a realização com as HQ e cabe destacar que, dependendo das condições dos alunos e da escola, cada criança pode receber uma folha com a HQ e o professor pode ainda projetar em slides, fazer cartazes ou até criar outras situações com os alunos, com o auxílio do aplicativo Pixton[7] ou em outras produções manuais dos quadrinhos.

É importante que o professor crie condições para que o aluno entre e continue no jogo e, para a faixa de escolaridade que propomos nesta situação, consideramos essencial o trabalho com materiais concretos como suporte para que os alunos possam simular a situação e desenvolver estratégias para resolver a situação. No caso desta atividade, por exemplo, recorremos a desenhos em folha de papel sulfite para representar o animal (cachorrinho) e grãos (milho de pipoca, feijão etc.) para representar os remédios ou outros materiais que o professor considerar adequado.

Traçamos possíveis estratégias, porém não únicas, que os estudantes podem mobilizar, até construírem novos conhecimentos com as operações de multiplicação e divisão. Contudo, esse trabalho não finaliza por aqui, uma vez que é necessária a sua realização em sala de aula. Nesse caso, é importante pontuarmos que ficará a cargo do professor a realização das devidas mediações, com questões que permitam ajudar o aluno a apreender os conceitos envolvidos. A partir dessa situação é interessante refletir sobre outras possibilidades que podem estar envolvidas ou articuladas com a abordagem do tema. Ao fazer uso de histórias em quadrinhos partindo de um contexto inicial,

[7] Informações sobre a produção de HQ no Pixton pode ser encontrada na atividade desenvolvida no Grupo Getecmat/ PPGEdumat: https://www.youtube.com/watch?v=2-KsS9Ex2NY&t=363s

notamos que é possível realizar estudos relacionados a gêneros textuais, classificação das frases, pontuação, entre outros conceitos que podem viver e dialogar em um cenário de estudo em matemática (não somente no campo de números e operações).

Entendemos que esses diálogos apontam alguns indicativos para o trabalho do professor, mas cabe a ele, sempre, realizar suas escolhas, uma vez que somente ele conhece seus alunos, sua escola, suas condições de trabalho, ou seja, o que precisa fazer e o que consegue fazer dadas as condições a que está submetido.

Finalizando, gostaríamos de enfatizar que a situação e as observações aqui realizadas tiveram como objetivo refletir sobre como é possível, a partir de uma situação relativamente simples, que pode ser "concretizada" com materiais acessíveis, trabalhar conceitos de matemática de modo a contribuir com a construção do conhecimento pelo aluno, articulando diferentes significados das operações e ao mesmo tempo propiciando um trabalho em uma perspectiva interdisciplinar.

REFERÊNCIAS

BITTAR, Marilena, SILVA, Camila de O., SOUSA, Milena. **Brincando de Veterinário.** Oficinas on-line 2021: diálogos sobre propostas em matemática. Disponível em https://www.youtube.com/live/IkWDhhsFMpk

BITTAR Marilena., FREITAS, José Luiz M. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. Campo Grande/MS: Editora UFMS, 2005

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Ática, 2008.

GITIRANA, Verônica.; CAMPOS, Tânia M.M.; MAGINA, Sandra.; SPINILLO, Alina. **Repensando multiplicação e divisão:** contribuições da teoria dos campos conceituais**.** São Paulo: Editora PROEM, 2014

MAGINA, Sandra.; SANTOS, Aparecido.; MERLINI, Vera. Quando e como devemos introduzir a divisão nas séries iniciais do ensino fundamental? Contribuição para o debate. **Em teia - Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana**, v. 1, n. 1, 2010

MANDARINO, Mônica. C. F.; BELFORT, Elizabeth. Matemática nas séries iniciais - parte I: **Números naturais - Conteúdo e forma**. Brasília, *2006*. Disponível em: http://professoresdematematica.com.br/wa_files/01Matematica_20Series_20Iniciais_Numeros_20Naturais.pdf . Acesso em julho de 2021.

SOUSA, Milena S.; BITTAR, Marilena.; SILVA, Camila de O. da.. *Brincando de veterinário*: Análise de Uma Proposta Didática Para Estudo do Campo Multiplicativo Nos Anos Iniciais. **Caminhos da Educação Matemática em Revista**, v. 1, p. 13-35, 2021.

VERGNAUD, Gérard. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, v. 10/23, p. 133-170, Grenoble, La Pensée sauvage éditions,1991.

CAPÍTULO 2

VAMOS PROGRAMAR NOS ANOS INICIAIS: RECURSOS PARA TRABALHAR A LATERALIDADE

Oficina 02: Vamos programar nos anos iniciais? - YouTube

***Autores**:*
Katiane Rocha[1] - UFMS
Cintia Melo dos Santos[2] - UFGD

Público-alvo*:* Destinado a estudantes do primeiro ao terceiro ano do Ensino Fundamental

Objetivo: introduzir a linguagem de programação nos anos iniciais

Habilidades da BNCC*:*

- *(EF01MA11):* Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás
- *(EF01MA12)*: Identificar e registrar, em linguagem verbal ou não verbal, a localização e os deslocamentos de pessoas e de objetos no espaço, considerando mais de um ponto de referência e indicar as mudanças de direção e de sentido.

Materiais a serem utilizados:

- Ficha impressa - Atividade do BOB (anexos)
- site: https://code.org

INTRODUÇÃO

Antes mesmo de iniciar o estudo da Matemática nos anos iniciais da escolarização, as crianças já observam, manuseiam ou conhecem recursos tecnológicos digitais, como celular e tablet, que, entre outros, estão presentes no cotidiano da criança. Nesse contexto, evidencia a relevância de oportunizar às crianças, desde o Ciclo de Alfabetização, se apropriar de atividades de programação como oportunidade de trabalhar os conteúdos matemáticos. Neste texto vamos expor atividades que têm por objetivo apresentar recursos que podem auxiliar no ensino da lateralidade. Estes recursos podem ser utilizados em diferentes modalidades de ensino - presencial, híbrido e remoto emergencial e na prática pedagógica dos professores que atuam nos anos iniciais. Mais detalhes sobre as atividades propostas neste artigo podem ser acessados no link abaixo do título ou no site do grupo de

[1] Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS); *e-mail:mr.katiane@gmail.com*- ORCID: *0000- 0003-3687-9101*
[2] Professora da Universidade Federal da Grande Dourados (UFGD)*; e-mail:cintiasantos@ufgd.edu.br-* ORCID*: 0000-0003-2121-3120*

estudos em didática da matemática - DDMat (grupoddmat.pro.br), na aba oficinas on-line, ano 2021.

Para a elaboração das atividades apresentadas neste texto o princípio norteador é o uso de tecnologias para o ensino de Matemática, numa perspectiva proposta por Bittar, na qual o professor deve integrar as tecnologias na sua sala de aula, com práticas pedagógicas que levem o aluno à construção do conhecimento. Essa concepção requer uma mudança didático-pedagógica dos professores de modo que busquem situações mais significativas para o aluno e, nesse viés, o computador é visto como uma máquina para ser ensinada, e não uma máquina para ensinar.

Iniciando o estudo de programação

Nossa proposta é iniciar o estudo da programação por meio de um conteúdo matemático e, para isso, escolhemos o conteúdo de lateralidade que, na Base Comum Curricular Nacional – BNCC, está presente nas seguintes habilidades:

> (EF01MA11) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço em relação à sua própria posição, utilizando termos como à direita, à esquerda, em frente, atrás. (EF01MA12) Descrever a localização de pessoas e de objetos no espaço segundo um dado ponto de referência, compreendendo que, para a utilização de termos que se referem à posição, como direita, esquerda, em cima, em baixo, é necessário explicitar-se o referencial. (BRASIL, 2018, p.279)

É importante ressaltar que estamos apresentando uma proposta, entre outras, para o ensino de lateralidade. Para iniciar o conteúdo de lateralidade, começamos apresentando o personagem das atividades, "Bob", que será o protagonista na sequência das atividades a serem desenvolvidas.

O Bob está inserido em uma malha quadriculada, com propósito inicial de explorar sua localização na malha. Nesta atividade são exploradas as ideias "para a direita, para esquerda, para cima e para baixo". É preciso, ainda, observar que o movimento na malha quadriculada é feito de um quadradinho por vez, como na imagem a seguir (Figura 1):

Figura 1: Apresentação do Bob

Fonte: acervo das autoras

O professor pode iniciar com a atividade impressa (no caso do ensino presencial) ou ainda enviar via WhatsApp (para o ensino remoto), para ser desenvolvida pelos alunos. Bob é o personagem da atividade, que se movimenta conforme o direcionamento das setas. As setas indicadas na figura 01 são os modelos de setas disponibilizadas no próprio aplicativo do WhatsApp. E ainda, o professor pode iniciar a apresentação do Bob com um contexto, contando uma historinha sobre o Bob, que pode ser inventada pelo professor, bem como, incluir outros personagens ou criar outros.

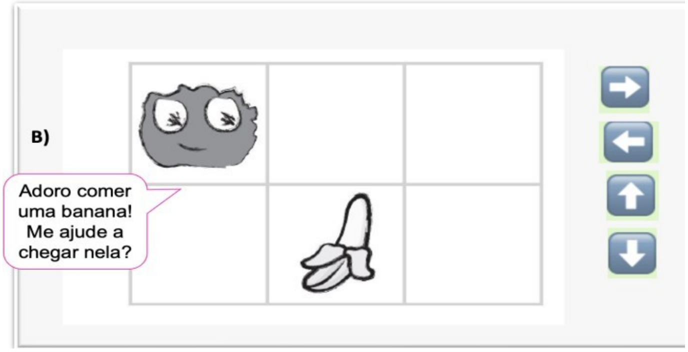
É importante mediar a atividade com alguns questionamentos: existem diferentes caminhos para o Bob chegar à fruta? Quantas possibilidades existem para o Bob chegar até a fruta? Qual é o caminho mais curto? Este caminho é único? O caminho mais curto está aliado ao menor uso das setas, que é referente a quantidade de quadrinhos que Bob passa até chegar à fruta. Esses questionamentos serão feitos ao longo de seis atividades que propomos. Na primeira atividade (letra A, Figura 2) os estudantes devem buscar o caminho para que Bob coma um morango. Nesse caso, se fizermos o caminho mais curto há apenas uma solução.

Figura 2: Atividades da letra A e B

Fonte: acervo das autoras

Na segunda atividade (letra B, Figura 2), o Bob tem duas opções para chegar à banana, o que permite mostrar para os estudantes que existem diferentes estratégias de resolução para uma mesma situação.

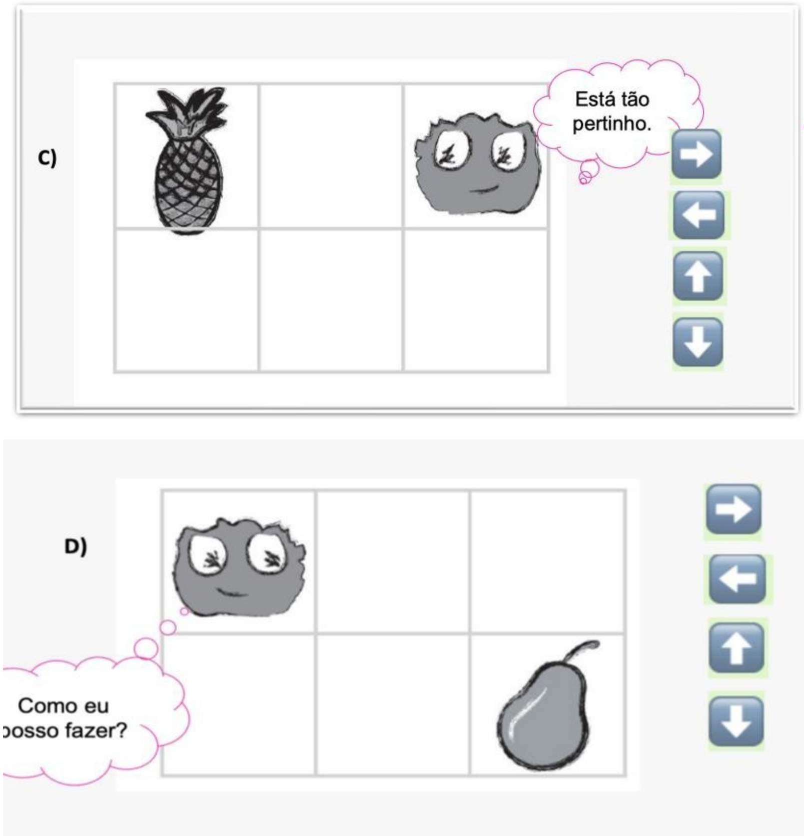
Figura 3: Atividades da letra A e B



Fonte: acervo das autoras

Na sequência propomos que o Bob consiga comer um abacaxi e uma pera.

Figura 4: Atividades da letra C e D

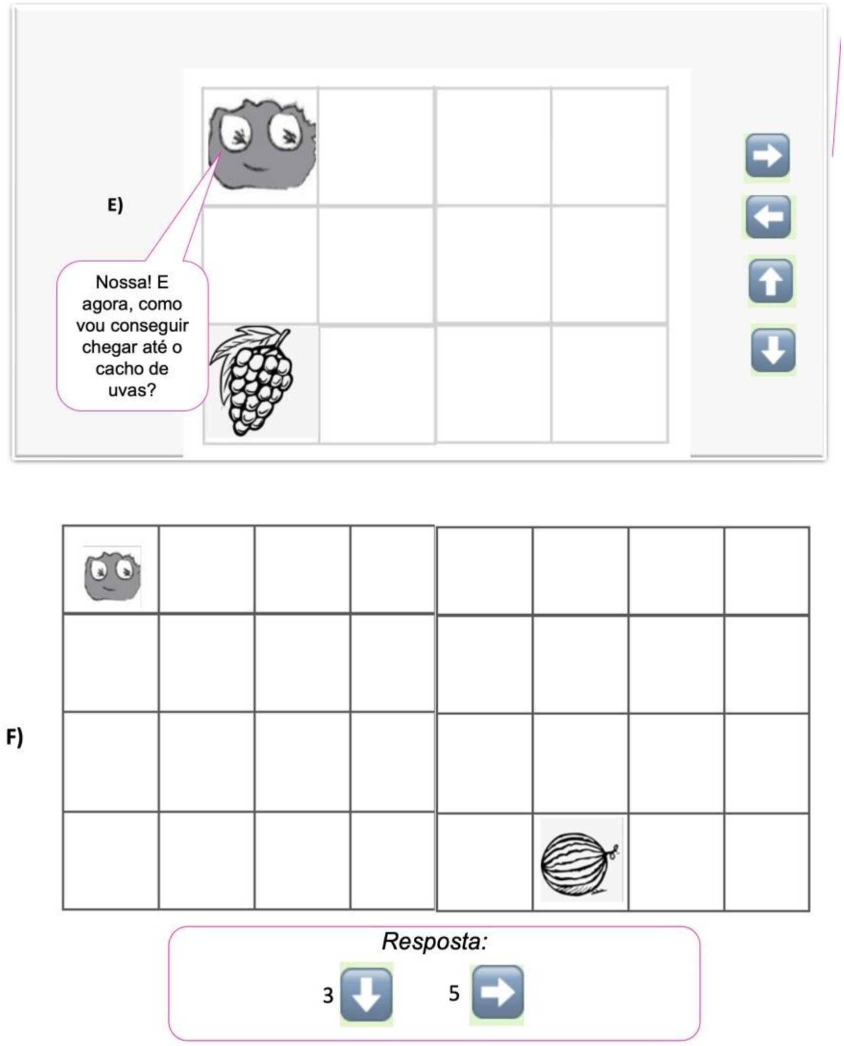


Fonte: acervo das autoras

Quando Bob vai comer o abacaxi existem três possibilidades de percursos, porém, somente uma representa o caminho mais curto. Quando Bob vai comer a pera existem mais de duas possibilidades de caminho mais curto para o Bob chegar à fruta. Esse tipo de questão é muito importante para que o estudante encontre atividades que tenham mais de uma resolução ou estratégia.

A atividade do Bob pode ser explorada de diversas maneiras. Veja duas outras possibilidades na Figura 5.

Figura 5: Atividades da letra E e F



Fonte: acervo das autoras

Na quarta atividade (letra E, Figura 5) buscamos ampliar a malha quadriculada levando o estudante a fazer mais movimentos. Nessa mesma atividade podemos colocar a fruta em outras casas para que o estudante use mais movimentos. Para ir mais além, propomos a criação de um comando que resume ações iguais, como é o caso da letra F, na qual o estudante pode colocar o número que uma seta irá aparecer para um certo sentido, neste caso, para o Bob chegar à fruta, precisa andar três vezes a seta que indica a direção para baixo e cinco vezes a seta para a direita.

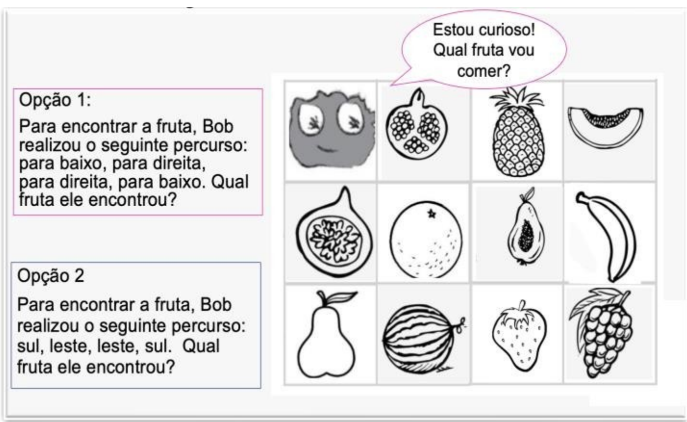
É importante pontuar, que cada ano escolar tem sua especificidade e que o professor deve adaptar estas atividades conforme a sua realidade. Dando continuidade à sequência de atividades, o professor formaliza os pontos cardeais de localização e os conceitos de lateralidade (direita e esquerda). Essa etapa é importante para que os estudantes atinjam o objetivo de aprendizagem pretendido que é desenvolver noções de lateralidade e de localização no espaço.

Figura 6: Formalizando os conceitos

Fonte: acervo das autoras

Após a formalização o professor pode propor atividades nas quais é dado o percurso realizado por Bob, e o estudante deve descobrir qual fruta ele comeu (Figura 6).

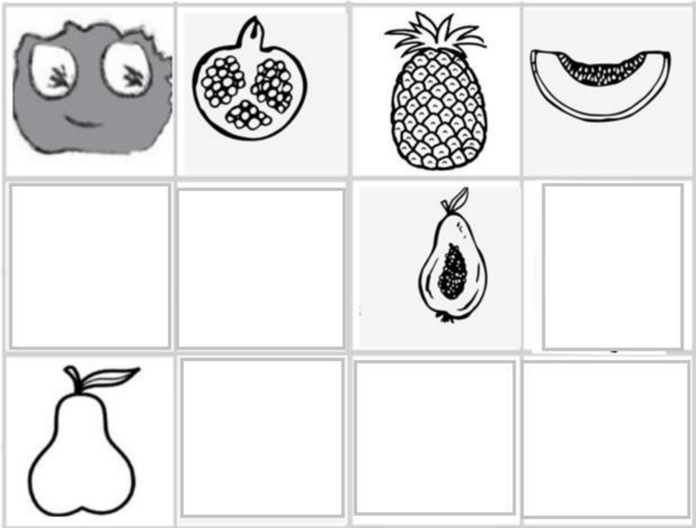
Figura 7: Procurando qual fruta o Bob comeu



Fonte: acervo das autoras

Nessa atividade, podemos verificar se os estudantes conseguem usar conceitos de lateralidade. Por fim, ressaltamos que uma outra variação nessa atividade é o professor propor alguns obstáculos, para que o aluno possa desviar, para chegar até a fruta, como podemos visualizar na figura 08, no qual o Bob precisa chegar até a fatia de mamão.

Figura 8: Bob desviando dos obstáculos



Fonte: acervo das autoras

Para além do conceito de lateralidade, nesta atividade está presente o conceito de algoritmo. Quando falamos em algoritmo, sempre vem à mente os algoritmos mais formais que conhecemos, como o algoritmo da multiplicação e o algoritmo da divisão, algoritmos que são mais estruturados, e a atividade do Bob vai ajudar a entender esse conceito de algoritmo. De modo algum, pensamos em trabalhar com a definição de algoritmo nos anos iniciais, no entanto, a definição permite relacionar a atividade Bob com a noção de algoritmo: um algoritmo é um método descrito de maneira suficientemente clara e rigorosa de forma a ser aplicado sem ambiguidades por um ser humano ou por uma máquina. Então, quando pensamos no algoritmo da divisão, temos que é um método claro, rigoroso, que não é ambíguo: se seguirmos esse método corretamente, assim como outra pessoa seguir o método corretamente, chegamos no mesmo resultado. Mais ideias sobre o conceito de algoritmo serão abordadas no tópico seguinte com a receita de cozinha.

A receita de cozinha

A partir de outras atividades, também podemos ter a noção de algoritmo, como é o caso de uma receita de cozinha. Por exemplo, quando alguém vai fazer um bolo é preciso seguir algumas instruções para que o objetivo seja atingido. Estas instruções devem, portanto, ser claras o suficiente para que quem não tem muita experiência nesta arte consiga fazer o bolo. A ideia da receita de cozinha é a inspiração das nossas atividades propostas até o momento e, para entender esse contexto, convidamos o leitor a visualizar o vídeo intitulado “desafio das instruções exatas”, disponível no link https://youtu.be/ctrr6Hij3S0.

Neste vídeo há duas irmãs. Uma delas escreve no papel as instruções de como fazer um sanduíche de manteiga com queijo, para que a outra irmã faça a receita. Ao ler a receita a irmã “mais velha” começa a reproduzir o que a “irmã mais nova” descreveu. Ao iniciar a produção da receita, com acesso ao prato, a faca e o pão, a irmã “mais velha” começa a cortar o pão. Nesse momento a “irmã mais nova” começa a rir, pois o corte no pão não foi feito como ela imaginou, no entanto, ela não descreveu as instruções de como cortar o pão. Mais detalhes deixamos para o leitor visualizar o vídeo. Nessa atividade, simples, de fazer um sanduíche, a criança fica decepcionada, pois o modo como a irmã reproduz a sua receita, não é o modo como ela desejou, isto porque as instruções da receita não estão claras.

Essa atividade pode ser reproduzida em sala de aula. O professor pode dividir a turma em dois grupos, sendo que um dos grupos escreve a receita de um sanduíche, ou de um suco, e o outro grupo deve reproduzir a receita, exatamente como descrito no papel. Será que os alunos vão descrever o passo a passo? Será que todos os procedimentos necessários para o desenvolvimento da receita estão descritos? Esse tipo de atividade também aborda a noção de algoritmo.

Até esse momento, estamos discutindo atividades para os anos iniciais que possuem a noção de algoritmo, sem fazer o uso de qualquer máquina, como, computador ou calculadora. Essas atividades são denominadas de desconectadas, que são aquelas que trabalham com a noção de algoritmo sem usar uma máquina. Por outro lado, temos as atividades conectadas que trabalham com a noção de algoritmo utilizando a máquina, e discutiremos essas atividades no tópico seguinte.

Usando um aplicativo online

Nesta seção vamos discutir algumas possibilidades de uso da tecnologia que pode complementar o trabalho com a lateralidade. Conhecemos as realidades de muitas escolas que não possuem computadores suficientes ou em bom estado, então deixamos essa seção como sugestão para aqueles professores que possam fazer o uso de alguma tecnologia.

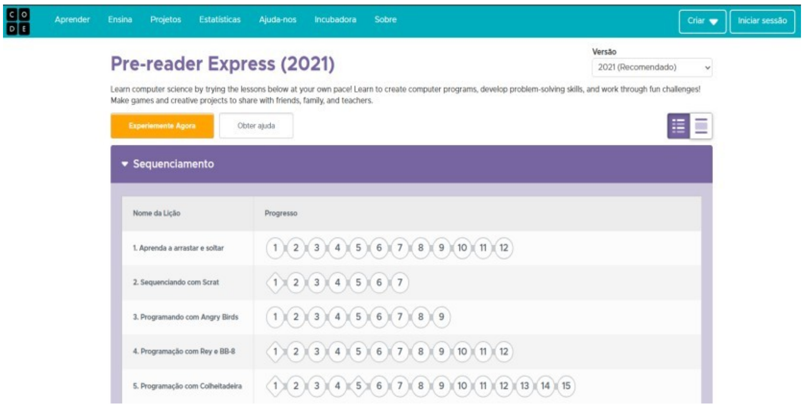
Nesse contexto, passamos a falar não somente em algoritmo, mas também em programa, pois vamos desenvolver instruções de forma que uma máquina pode executar.

Compreende-se que um programa é um algoritmo que foi traduzido em instruções compreensíveis pela máquina para que ela possa executá-lo.

Iniciando as atividades conectadas, vamos apresentar ao leitor o code.org, que é um site, uma comunidade que incentiva a utilização da programação na educação em todos os níveis de ensino, desde os Anos Iniciais até o Ensino Médio, e, dependendo do assunto a ser abordado, pode ser utilizado até mesmo no Ensino Superior. Esse site foi produzido nos Estados Unidos e tem patrocínio de várias empresas que incentivam o trabalho com a programação.

Existem duas maneiras de acessar o site https://code.org, fazendo o login realizando cadastro e fazendo o login ou sem realizar cadastro. Ao acessar o site, para continuidade das atividades propostas neste texto, acessamos "o aprender" disponível na aba superior do site que, na sequência, constará, a opção "pré-reader express (2021)", que contém várias opções de atividades (Figura 9). Estas são lições nomeadas e numeradas, com diferentes níveis para serem desenvolvidas com crianças da Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Figura 9: Interface do code.org

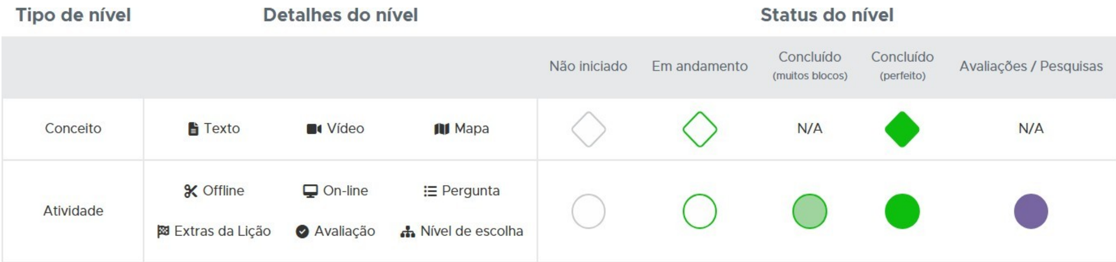


Fonte: acervo das autoras

Ao acessar o pre-express (2021), no final da listagem das lições (Figura 9), existe a possibilidade de o professor verificar se a lição foi feita ou não, por meio das "bolinhas" que indicam a qualidade da lição desenvolvida. Se toda a lição foi desenvolvida corretamente, a bolinha fica na cor verde escura, se para a resolução da lição foram usados mais procedimentos que o necessário a bolinha fica verde claro, e se a lição é começada e não terminada a bolinha fica com a borda verde e se não começa a lição a bolinha fica transparente. É interessante conhecer esta funcionalidade, pois, no code.org o professor pode criar uma sala de aula[3]. Além disso, para os estudantes que não estão alfabetizados, o professor tem a opção de criar login com imagens.

[3] Para aprender a criar uma sala de aula assista o vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=aJZ0T3rHBQo acesso em 20 de dezembro de 2023. .

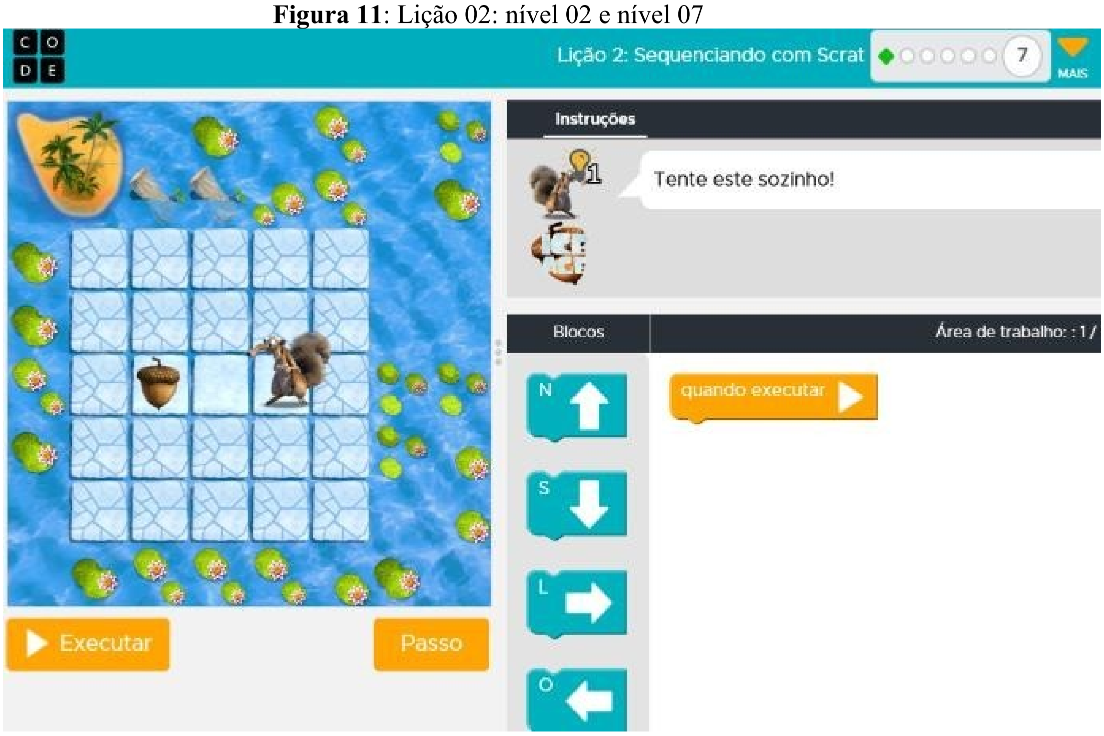
Figura 10: acompanhamento das lições desenvolvidas



Fonte: acervo das autoras

Ao analisar as lições disponíveis no pré-express (2021), verifica-se que o nível de dificuldade de cada lição vai aumentando gradativamente. No nível 1, na última lição, os alunos aprendem a encaixar os blocos que são questões técnicas que precisam ser compreendidas para continuar as atividades no code.org. Na lição 2 (Figura 10) são apresentadas atividades muito parecidas com a atividade do Bob: o aluno deve clicar no bloco (que possui as setas de direção) para que o personagem Scrat chegue até a avelã.

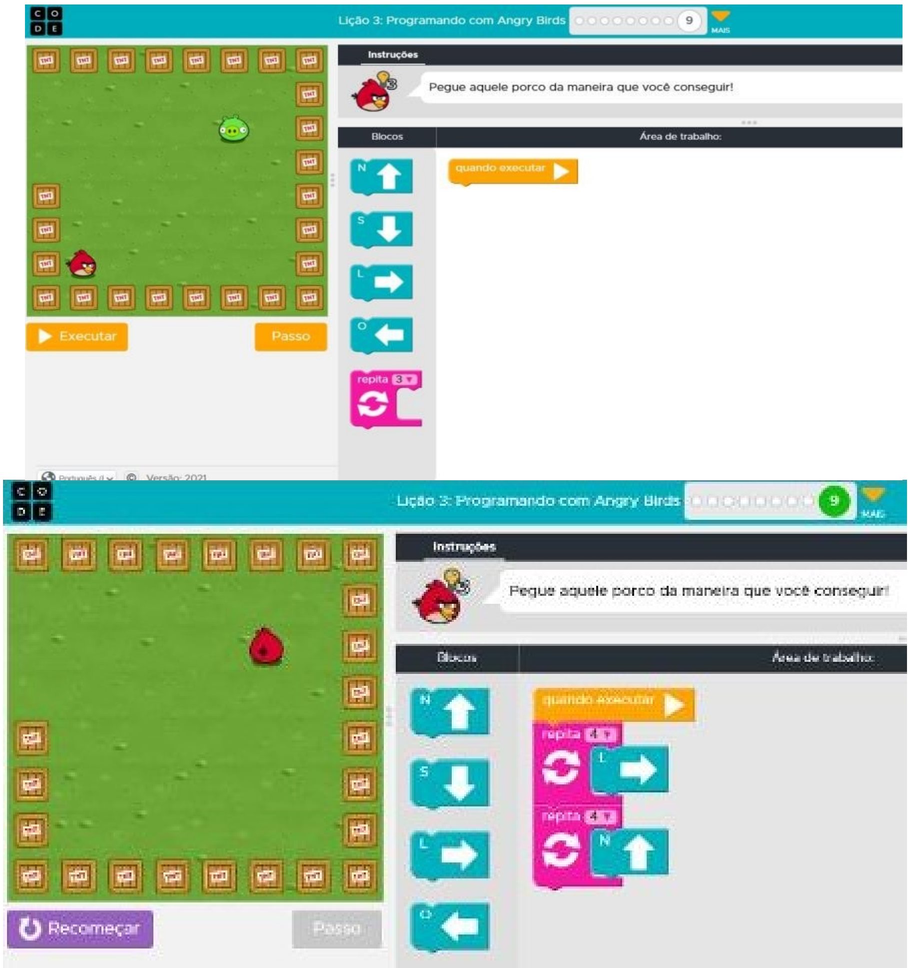
Figura 11: Lição 02: nível 02 e nível 07



Fonte: acervo das autoras

Na lição 03, temos o Angry Birds que quer chegar no porquinho verde e, na disponibilidade dos blocos, já se percebe uma mudança com a inserção do bloco repita, dando condições ao aluno de programar apenas um bloco e indicar o quantitativo que esse bloco pode repetir, ao invés de colocar várias vezes o mesmo bloco.

Figura 12: Lição 03: nível 09

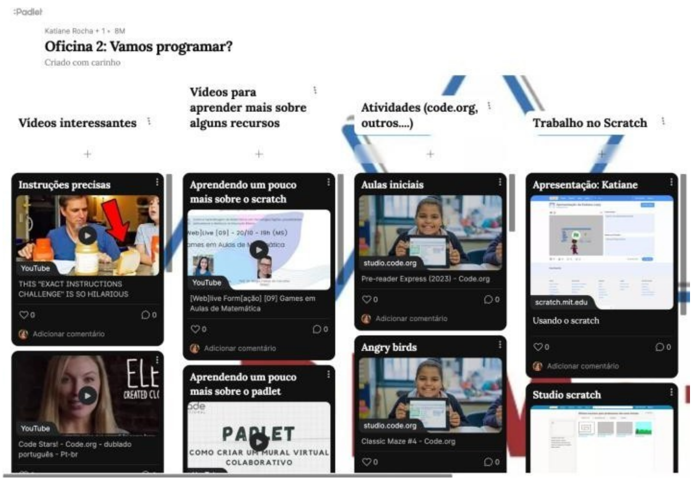


Fonte: acervo das autoras

Pelo exposto, podemos inferir o quanto o code.org apresenta atividades que dão continuidade à atividade iniciada pelo Bob, e que permitem ao aluno, desde os anos iniciais de escolarização, a construção do conhecimento sobre lateralidade, e, além disso, a aproximação com a linguagem de programação. A atividade do Bob e as atividades com o site code.org são propostas entre outras atividades, e o professor pode ou não propô-las separadamente ou uma como continuidade da outra.

Todas as atividades discutidas neste texto estão disponíveis no Padlet (Figura 13), que é um mural semelhante ao mural da escola no qual colocamos os recados importantes a serem destacados. O Padlet é a versão digital do mural da escola que pode ser utilizado como recurso para o professor. No Padlet podemos incluir os links e textos, que como na figura 12, pode-se disponibilizar textos, lista de exercícios, em uma linha do tempo, conforme as atividades forem acontecendo durante a aula, ou ainda, o professor pode utilizar diferentes modelos para o mural. Nessa proposta de criar um Padlet, este possibilita gerar um link, que o professor pode compartilhar com os seus alunos, e é um recurso que permite o professor organizar a sua aula.

Figura 13: Padlet da oficina[4]



Fonte: acervo das autoras

Algumas considerações

Cabe ressaltar, que nessa proposta o professor dos anos iniciais, pode pensar em um trabalho interdisciplinar, visto que pode abordar a importância de hábitos alimentares saudáveis, conteúdo contemplado na disciplina de Ciências. O professor pode desenhar uma malha quadriculada no chão e trabalhar com um aluno que coloca as flechas em cima da malha para ajudar o Bob a comer a fruta.

A proposta dessas atividades é de se apropriar das diversas estratégias e ferramentas disponíveis para o ensino, pois, conforme for a realidade escolar o professor pode trabalhar com atividades desconectadas ou conectadas, uma vez que para o acesso ao code.org, precisa ter internet, caso contrário, o professor pode buscar em aplicativos como o Scratch ou o SuperLogo, que podem ser baixados no computador para a execução de atividades de lateralidade.

É importante pontuar que aqui assumimos o início da programação, pois as atividades propostas para o ensino de lateralidade requerem instruções compreensíveis e precisas para serem executadas, e são atividades propostas para os primeiros anos escolares. O professor pode se apropriar do aplicativo Scratch, como possibilidade de avançar nas atividades de programação, e, além disso, o próprio code.org propõe atividades para outros níveis escolares.

REFERÊNCIAS

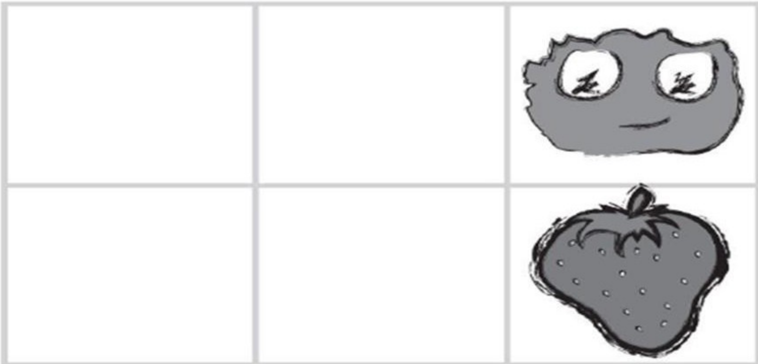
BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

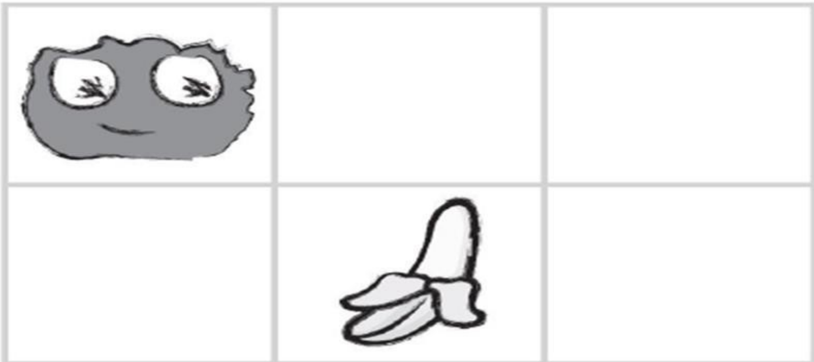
[4] https://pt-br.padlet.com/mrkatiane/oficina-2-vamos-programar-yyds25onarimampt

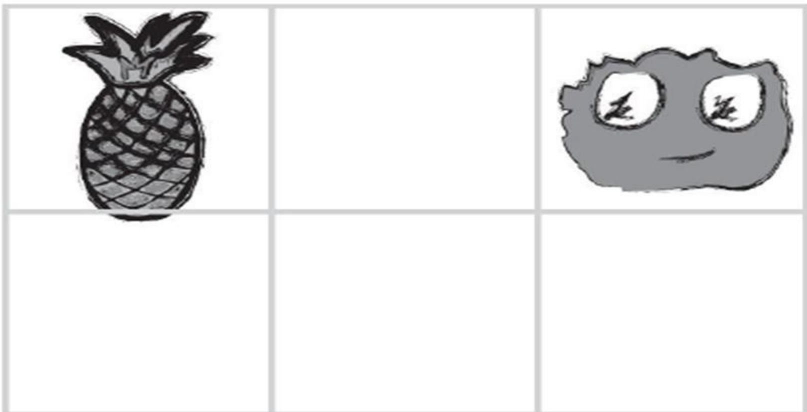
BITTAR, M. Informática nas aulas de Matemática. In: SANTOS, R. M.; VIOLA DOS SANTOS, J. R. (Orgs). Instrumentação e Prática de Ensino de Matemática IV. Campo Grande: Editora UFMS (no prelo).

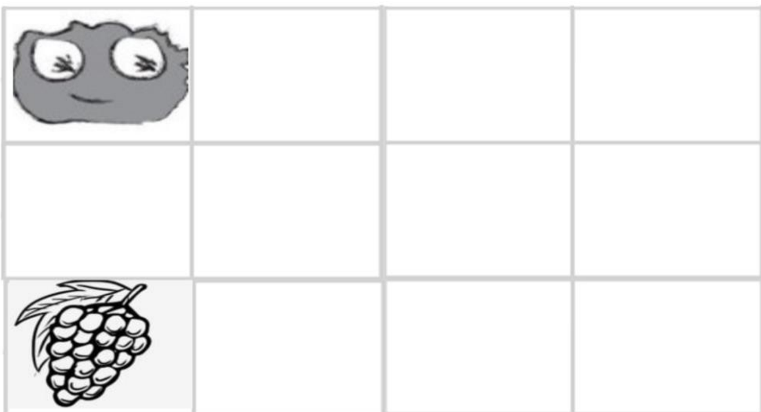
ROCHA, K., SANTOS, Cintia M. dos. **Vamos programar nos anos iniciais?** Oficinas on-line 2021: diálogos sobre propostas em matemática. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=_JRwLjqQVQU

ANEXOS







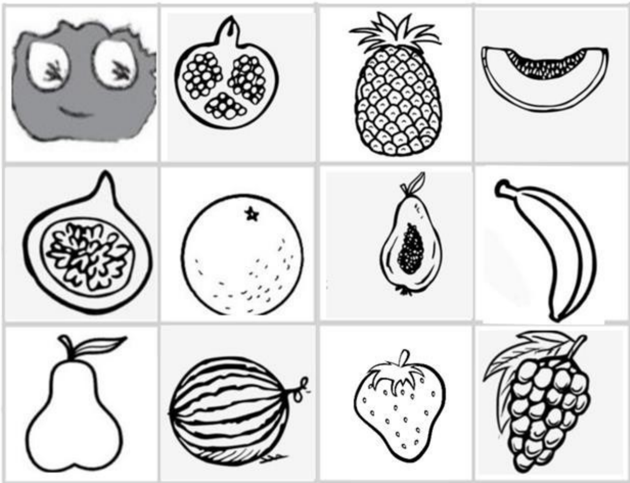


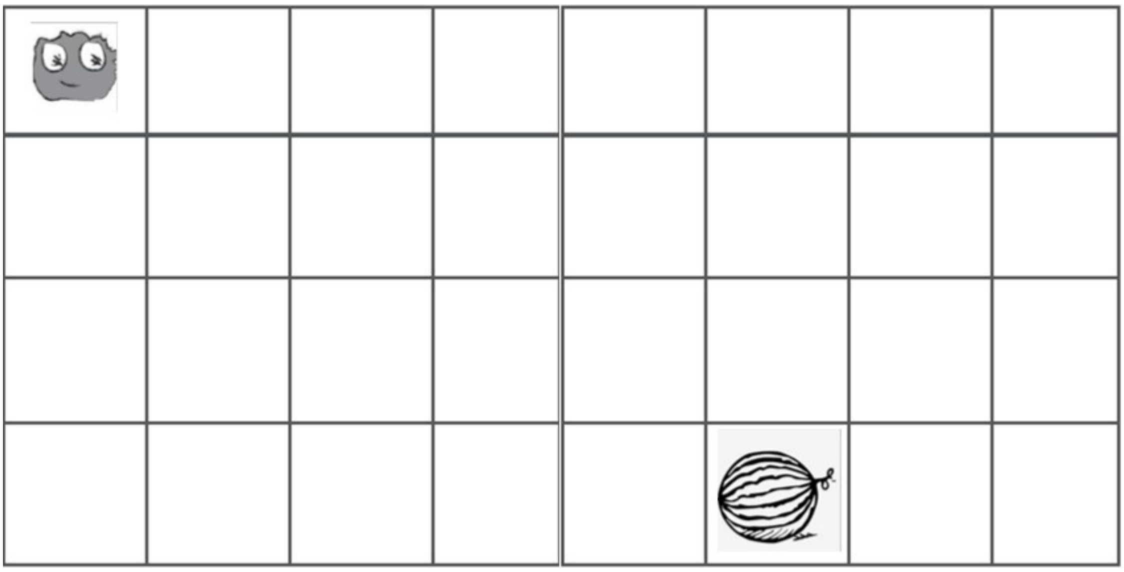
Opção 1:

Para encontrar a fruta, Bob realizou o seguinte percurso: para baixo, para direita, para direita, para baixo. Qual fruta ele encontrou?

Opção 2

Para encontrar a fruta, Bob realizou o seguinte percurso: sul, leste, leste, sul. Qual fruta ele encontrou?





CAPÍTULO 3

NUNCA 4: VAMOS JOGAR? CONSTRUINDO O SIGNIFICADO NO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Oficina 03 - Nunca 4: vamos jogar? - YouTube

Autores:
Renan Gustavo Araújo de Lima[1] – IFMS
Rosane Corsini Silva[2] – IFMS

Público-alvo: Destinada a estudantes do primeiro ao quinto ano do ensino fundamental

Objetivo: Refletir sobre uma proposta de uso de jogo e de materiais didáticos para a compreensão do Sistema de Numeração Decimal

Habilidades da BNCC

- *(EF01MA07)* Compor e decompor número de até duas ordens, por meio de diferentes adições, com o suporte de material manipulável, contribuindo para a compreensão de características do sistema de numeração decimal e o desenvolvimento de estratégias de cálculo;
- *(EF03MA02)* Identificar características do sistema de numeração decimal, utilizando a composição e a decomposição de número natural de até quatro ordens.

Materiais a serem utilizados

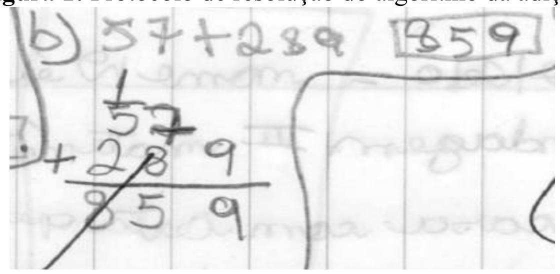
- **Tampinhas coloridas** para o jogo "Nunca 4".
- **Cartolina, copos descartáveis, fita e canudos** para a construção da sapateira, um material concreto que mobiliza a ideia do Quadro Valor de Lugar materializado;
- **Ábaco e material dourado**.

[1] Professor do Instituto Federal de Mato Grosso do Sul/Campus Coxim (IFMS); *e-mail: renan.lima@ifms.edu.br,* ORCID:*0000-0001-9931-0962.*
[2] Professora do Instituto Federal de Mato Grosso do Sul/Campus Campo Grande (IFMS); *e-mail: rosanecorsini@gmail.com* , ORCID: *0000-0001-9931-0962.*

A proposta da oficina

Existem diversas formas de realizar cálculos envolvendo as operações de adição e de subtração, mas, para que os resultados sejam compreendidos, faz-se necessário que o valor posicional dos algarismos tenha sido compreendido pelos estudantes. Quando as operações de adição e subtração são trabalhadas no ensino básico, os estudantes podem utilizar os algoritmos apresentados de maneira incorreta, como na figura 1:

Figura 1: Protocolo de resolução do algoritmo da adição



Fonte: acervo dos autores

Ao analisar a resolução apresentada, verifica-se que o aluno possui alguns conhecimentos relacionados à ideia de adição, como quando soma corretamente 7 e 8. Entretanto, para trabalhar esses cálculos com duas ou mais ordens, faz-se necessária uma nova discussão a respeito de valor posicional e do Sistema de Numeração Decimal, tendo em vista dificuldades dos estudantes na compreensão de conceitos envolvidos nas operações, ficando restritos ao uso de técnicas algorítmicas.

Esta proposta é inspirada em uma oficina que ministramos em um projeto desenvolvido pelo grupo de estudos ao qual fazemos parte, o DDMat-Cnpq[3], cujo público-alvo são professores que ensinam matemática, como os professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Ela vem ao encontro do problema supracitado, pois envolve os processos de ensino e de aprendizagem com a utilização de materiais diversos durante suas aulas. Nesse sentido, apresentamos uma sugestão de trabalho utilizando a ideia do jogo "Nunca 4" (variação do jogo do "Nunca 10"), com o uso de materiais concretos como tampinhas, canudos e o auxílio da sapateira[4], que se mostram interessantes para construir a ideia do Sistema de Numeração Decimal e para a compreensão das expressões "vai um" e "empresta um" presentes na verbalização de procedimentos utilizados na realização de cálculos que demandam a mobilização dos algoritmos da adição e da subtração.

[3] Grupo de Estudos em Didática da Matemática coordenado pelos professores Doutores Marilena Bittar e José Luiz Magalhães de Freitas da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

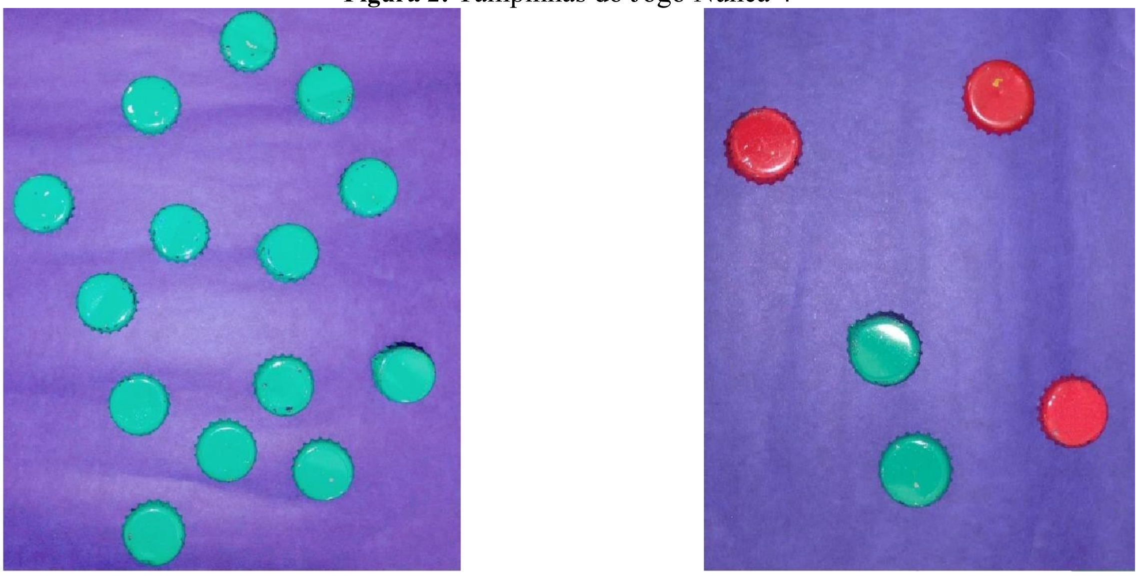
[4] A sapateira é um material concreto que mobiliza a ideia do quadro valor de lugar no trabalho das operações de adição e subtração. Além disso, a utilização desse material contribui para a passagem do material concreto para o algoritmo usual (BITTAR; FREITAS, 2005).

Assim, a proposta de atividade do Jogo "Nunca 4" (e suas variações) por meio da utilização da sapateira tem o intuito de discutir a ideia de agrupamentos, desagrupamentos, valor de cada peça, a noção de valor posicional e a compreensão do Sistema de Numeração Decimal. A utilização de materiais variados pode contribuir para a assimilação dos conceitos, com o professor mobilizando materiais disponíveis, como tampinhas de garrafas, pedrinhas, o material dourado, o quadro valor de lugar (também conhecido como sapateira) e o ábaco. Nesse sentido, a proposta de atividade apresentada pode sofrer adaptações necessárias pelo professor, tendo em vista a necessidade de provocar nos estudantes o interesse pela atividade, levando-os a atuar, refletir e evoluir na construção dos conhecimentos que estão envoltos na proposta (BROUSSEAU, 2008).

O jogo "Nunca 4"

A ideia do jogo "Nunca 4" é a realização de agrupamentos de elementos, formando grupos de no máximo três elementos. Quando chegar ao quarto elemento, é necessário trocar este grupo por uma peça que represente esses quatro elementos, como uma tampinha de outra cor, por exemplo: uma tampinha vermelha representa quatro tampinhas verdes.

Figura 2: Tampinhas do Jogo Nunca 4



Fonte: acervo dos autores

Desse modo, quando temos quatro tampinhas verdes, podemos trocar por uma tampa vermelha. Esse processo pode ser repetido diversas vezes dependendo da quantidade de tampinhas verdes disponibilizadas inicialmente. Da mesma forma, será necessário realizar a troca de quatro tampinhas vermelhas por uma tampinha de outra cor. Esse jogo tem o intuito de trabalhar os agrupamentos associadas à base 4, possibilitando a compreensão da ideia de não poder realizar agrupamento com 4 elementos ou mais, sendo necessária a realização de uma troca por outro elemento que represente o agrupamento. Para o desenvolvimento do jogo “Nunca 4”, inicia-se com a distribuição de uma quantidade de tampinhas de uma mesma cor e solicita-se que os estudantes realizem os agrupamentos a partir da regra imposta (não poder juntar mais de três tampinhas de mesma cor), tendo que realizar as trocas necessárias.

Para o desenvolvimento da atividade, os estudantes podem ser organizados em grupos de modo que possibilite o diálogo entre eles, compartilhando as estratégias realizadas e suas conclusões. O professor possui fundamental importância ao longo do processo, como na escolha das quantidades de tampinhas propostas aos estudantes, para que não fique muito fácil e nem muito difícil, além de atuar como um mediador em sala de aula, realizando questionamentos que levem os estudantes a refletir sobre suas estratégias.

O jogo “Nunca 4”: utilizando a sapateira (Quadro Valor de Lugar materializado).

O jogo do “Nunca 4” também pode ser realizado com a utilização de um material concreto chamado de sapateira. A sapateira é um material que mobiliza a ideia do Quadro Valor de Lugar (QVL) no trabalho das operações de adição e subtração (Bittar; Freitas, 2005). Além disso, a utilização desse material contribui com a passagem do material concreto para uma linguagem abstrata, por meio de registros na lousa e, posteriormente, com o registro do algoritmo usual da adição e subtração.

Figura 3: - Sapateira

Fonte: acervo dos autores

Para a construção da sapateira, utiliza-se uma cartolina (ou papel cartão), copos descartáveis e uma fita para a separação dos copos. Cada copo descartável é disposto em uma coluna, que representa uma ordem diferente. Na sapateira construída para a realização do jogo “Nunca 4”, apresentada na imagem anterior, utilizou-se três copos que representavam a primeira, a segunda e a terceira ordem. A depender da quantidade de elementos iniciais no jogo “Nunca 4”, pode-se utilizar uma quantidade maior de ordens, podendo construir uma sapateira que atenda essa necessidade.

A ideia do jogo “Nunca 4” é a realização do agrupamento de canudos na sapateira (quadro valor de lugar materializado), colocando-os no primeiro copo à direita (o que representa a 1ª ordem) formando grupos de no máximo 3 canudos. Quando chegar ao quarto canudo, amarra-se os canudos e coloca este amarradinho[5] no primeiro bolso à esquerda (o da 2ª ordem); quando houver quatro amarradinhos neste bolso, amarra-se novamente obtendo um amarradão[6] e é colocado no outro bolso (o da 3ª ordem), e assim sucessivamente.

Inicialmente apresenta-se uma quantia qualquer de canudos aos alunos e é solicitado que eles organizem essa quantidade na sapateira seguindo as regras apresentadas.

Figura 4: Canudinhos para o jogo Nunca 4

Fonte: acervo dos autores

Para a resolução da situação proposta, os estudantes podem começar a organizar grupos de quatro canudinhos, distribuindo-os nos copinhos da sapateira de acordo com a regra (cada vez que se obtém quatro, amarra-se e coloca na primeira casa imediatamente à esquerda). Ao final, verifica-se a quantidade de amarradões que há na terceira ordem, quantos amarradinhos há na segunda ordem e quantos canudinhos soltos têm na primeira ordem.

Figura 5: Utilização da sapateira no jogo Nunca 4.

Fonte: acervo dos autores

Assim, no decorrer do jogo, os estudantes necessitam identificar que, sempre que se desamarram os canudos, eles devem ser colocados na casa à direita; ação inversa à que foi realizada ao amarrar os canudinhos soltos. Cabe ressaltar que, no trabalho com a sapateira, durante sua

[5] Para registro, no texto, chamou-se de amarradinho(s) o agrupamento organizado na 2ª ordem, em que foram amarrados os elementos da 1ª ordem, de acordo com as regras do jogo, por exemplo: no Jogo "Nunca 4", cada amarradinho será composto por quatro canudos amarrados juntos.

[6] Para registro, no texto, chamou-se de amarradão(ões) o agrupamento organizado na 3ª ordem, em que foram amarrados os elementos da 2ª ordem, de acordo com as regras do jogo, por exemplo: no Jogo "Nunca 4", cada amarradão será composto por quatro amarradinhos juntos.

sua construção, as colunas são nomeadas como primeira, segunda e terceira ordem, e não unidade, dezena e centena, pois a base decimal não está sendo trabalhada.

É importante observar que o uso da sapateira permite que o estudante perceba, por exemplo, que o “2” na segunda ordem representa, na verdade 8 unidades (8 canudinhos), pois a regra é “Nunca 4”. Este é um diferencial importante com relação ao uso de tampinhas ou de outro material no qual o estudante vê uma tampinha de cor diferente, mas não percebe, de imediato, quando ela representa.

O jogo “Nunca 4” pode sofrer variações como a apresentação do jogo “Nunca 10”, que segue a mesma dinâmica. Ao começar o trabalho com o jogo “Nunca 4”, os estudantes que estão iniciando com a ideia de agrupamentos podem compreender e criar estratégias para situações que são necessárias realizar o agrupamento dos canudinhos para colocar na próxima ordem. Assim, o jogo “Nunca 4” permite manusear a sapateira e os canudos com mais tranquilidade por demandar uma quantidade menor de canudos para representar números que utilizem mais casas na sapateira.

Após a apresentação de uma primeira atividade do jogo “Nunca 4”, é possível o trabalho com variações dessa atividade, como outras quantidades nesse jogo e, em um segundo momento, trabalhar com outras bases, como no jogo “Nunca 5” e “Nunca 6”, visando o trabalho com o jogo “Nunca 10”, como veremos a seguir.

O trabalho com as variações do jogo “Nunca 4”

No decorrer do trabalho com o jogo “Nunca 4”, uma possibilidade que pode ser explorada é o avanço com jogos análogos ao proposto, como o jogo “Nunca 5”. Assim, uma possível atividade a ser explorada com os estudantes é a seguinte: *Dada a quantidade de canudinhos a seguir, como eles podem ser organizados na sapateira, seguindo as regras do jogo “Nunca 4”? E se organizarmos essa mesma quantidade de canudinhos, a partir da regra “Nunca 5”, como eles ficariam?*

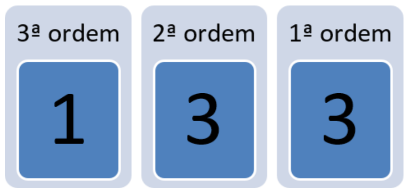
Figura 6: Canudinhos para o jogo “Nunca 4” e “Nunca 5

Fonte: acervo dos autores

Essa atividade tem como objetivo que os estudantes percebam as características envolvidas nos agrupamentos de base 4, com as regras do jogo “Nunca 4” e as características presentes na base

5, com as regras do jogo “Nunca 5”. Cabe ressaltar que, durante o trabalho com os alunos, não é necessário explicitar a definição de base 4, mas é possível a exploração das características presentes a partir das regras impostas. Dessa maneira, ao tentar organizar os canudinhos por meio de diferentes regras (“Nunca 4” e “Nunca 5”), os estudantes podem identificar que a mesma quantidade é representada de diferentes formas, considerando as regras impostas. Nessa situação apresentada, ao organizar a quantidade de canudos das regras do Jogo “Nunca 4”, os estudantes irão organizar em 1 amarradão, 3 amarradinhos e 3 canudos soltos, que podem ser representados no QVL como segue:

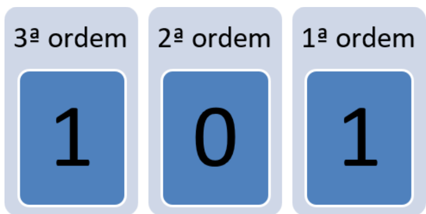
Figura 7: Representação do Jogo do "Nunca 4" no QVL



Fonte: acervo dos autores

Ao seguir as regras do jogo “Nunca 5”, os estudantes irão organizar os canudos em 1 amarradão, 1 amarradinho e 1 canudo solto, podendo ser representado no QVL da seguinte maneira:

Figura 8: Representação do Jogo do "Nunca 5" no QVL



Fonte: acervo dos autores

A partir dessas atividades com as variações do Jogo “Nunca 4”, é possível a utilização da sapateira e, em um segundo momento, o registro da resolução no Quadro Valor de Lugar, visando a passagem do concreto para o abstrato. Além disso, podem ser propostas discussões sobre a eficiência para representar uma quantidade utilizando as regras do Jogo “Nunca 5”, em detrimento do Jogo “Nunca 4”; quantos símbolos diferentes (algarismos) são necessários para representar qualquer quantidade nos Jogos “Nunca 4” e “Nunca 5”, utilizando o QVL (algarismos 0, 1, 2 e 3 no jogo “Nunca 4” e os algarismos 0, 1, 2, 3 e 4 no jogo “Nunca 5”).

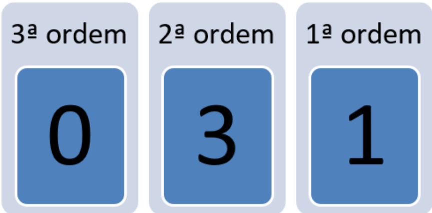
Como a proposta da atividade tem o objetivo da compreensão do Sistema de Numeração Decimal pelos estudantes, a apresentação do Jogo “Nunca 10”, contribui para o entendimento do funcionamento da base decimal, os algarismos necessários e os agrupamentos realizados. Ao retomar a situação que foi proposta para o jogo "Nunca 4" e "Nunca 5" e solicitar que os estudantes organizem na sapateira considerando as regras do "Nunca 10", tem-se a seguinte solução:

Figura 9: Canudinhos para o jogo Nunca 10

Fonte: acervo dos autores

Como os agrupamentos são organizados em grupos de dez canudinhos, a quantidade de canudos será agrupada em 3 amarradinhos e ficará um canudinho sozinho.

Figura 10: Representação do Jogo do "Nunca 5" no QVL



Fonte: acervo dos autores

Se considerar essa situação proposta, percebe-se que ao trabalhar com as características da base decimal foi necessário realizar apenas três agrupamentos, formando 3 amarradinhos, que podem ser colocados na segunda ordem da sapateira. Além disso, com a proposição de outras quantidades, os estudantes podem perceber a necessidade de outros algarismos (de 0 a 9) para representá-las no QVL.

Uma vez compreendida a dinâmica da utilização da sapateira, o uso da sapateira deve ser concomitante com registros feitos no quadro, passando assim para o abstrato com a utilização do Quadro Valor de Lugar. Isto significa que, durante a realização dos cálculos com o auxílio deste material concreto, é muito importante o registro escrito em paralelo com a realização da atividade, caso contrário, corre-se o risco de cair no esquecimento, ou até mesmo a transposição para o abstrato ficar sem sentido. Além disso, é importante que o estudante consiga construir seu conhecimento de modo significativo, visto que "Poderemos falar de conceitualização, aquisição de conhecimentos somente a partir do momento em que o aluno "transitar" naturalmente por diferentes registros" (Damm, 1999, p.142).

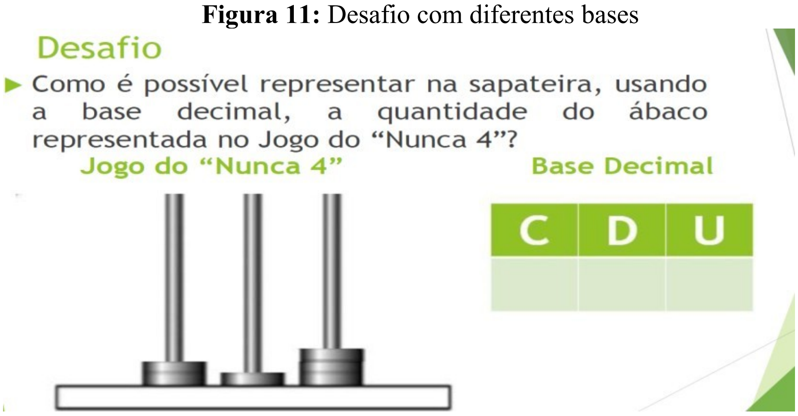
Por fim, outra característica que pode ser abordada no trabalho em sala de aula é a nomenclatura de cada ordem no QVL, quando é considerada a base decimal. Nesse caso, a 1ª ordem é chamada de unidade (que pode ser preenchida com os canudinhos soltos), a 2ª ordem é chamada de dezena (e é composta por amarradinhos de 10 unidades), a 3ª ordem é chamada de centena (sendo preenchida na sapateira pelos "amarradões", que são formados por 10 "amarradinhos"), seguindo para demais ordens.

O trabalho com diferentes bases e sistemas de numeração

Ao trabalhar com os estudantes o Sistema de Numeração Decimal e suas características, uma possibilidade de trabalho é a apresentação de atividades que envolvam outras bases e a discussão de diferentes Sistemas de Numeração, como o egípcio, o romano e o babilônico.

Em relação ao trabalho com diferentes bases, como a base 4 e a base decimal, pode-se propor situações que levem os estudantes a considerarem o valor de cada elemento em determinada base, a depender da sua posição, como na atividade a seguir:

Figura 11: Desafio com diferentes bases

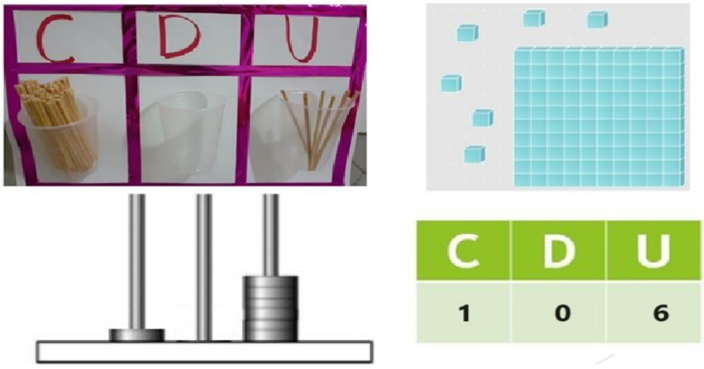


Fonte: acervo dos autores

Para a realização dessa atividade, é necessário que os estudantes compreendam a ideia do sistema posicional, considerando que cada peça do ábaco pode adotar um valor diferente dependendo da posição em que está alocada. No caso da atividade apresentada, cada peça da barra da direita equivale a uma unidade, a peça da barra central equivale a quatro unidades e cada peça da barra a esquerda equivale a 16 unidades, totalizando 39 unidades na base decimal. Cabe ressaltar que, para essa atividade, foi utilizado o ábaco para a representação da quantidade na base 4 e, apesar de ter as mesmas propriedades da sapateira (em relação ao valor posicional), esse material é mais abstrato pois o que define o valor de cada peça é apenas a sua posição (diferente da sapateira que é possível visualizar os amarradinhos e amarradões).

Nesse sentido, percebe-se que cada material utilizado para representar uma quantidade possui uma característica, sendo necessário levar em consideração no momento de sua escolha, por exemplo:

Figura 12: Diferentes formas de representação de uma mesma quantidade

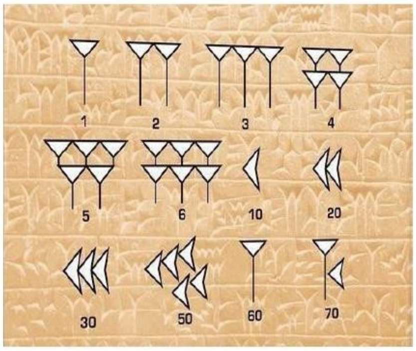


Fonte: acervo dos autores

Na figura 12 representamos 106 na sapateira, com o material dourado, no ábaco e no QVL. Ao analisar a utilização do material dourado, percebe-se que não há a necessidade de considerar a ideia de sistema posicional, para a representação da quantidade, pois, independente da organização, cada peça desse material mantém o seu valor. Já no ábaco e na sapateira, a ideia de valor posicional é considerada visto que, a depender de sua posição, o elemento possui um valor diferente. Além disso, como explanado anteriormente, o ábaco é um material com um nível de abstração maior, tendo em vista que na sapateira é possível visualizar que o conjunto das centenas contém um “amarradão” ou 100 elementos do conjunto das unidades (como no material dourado). Por fim, no QVL, a representação de qualquer quantidade pode ser realizada a partir da utilização de 10 símbolos (os algarismos de 0 a 9), considerando a ideia de valor posicional no momento do registro. Outra característica presente no QVL é a necessidade de utilizar um símbolo para representar uma ordem vazia, no caso o algarismo 0, o que não ocorre nos outros materiais.

Em relação ao trabalho com diferentes sistemas de numeração, é possível identificar em materiais didáticos a apresentação dos símbolos e o funcionamento desses sistemas de numeração, como o babilônico, o romano e o egípcio.

Figura 13: Sistemas de numeração de povos antigos



Babilônico

Número Romano	Número Arábico
I	1 (Um)
V	5 (Cinco)
X	10 (Dez)
L	50 (Cinquenta)
C	100 (Cem)
D	500 (Quinhentos)
M	1000 (Mil)

Romano

Numeração decimal	Hieróglifo	Significado
1		Traço vertical
10		Asa, semelhante a uma ferradura
100		Corda enrolada
1000		Flor de lótus
10 000		Dedo levantado, ligeiramente inclinado
100 000		Girino
1 000 000		Homem ajoelhado levantando os braços

IFRAH, Georges. *História universal dos algarismos*: a inteligência dos homens contada pelos números e pelo cálculo. Trad. Alberto Muñoz; Ana Beatriz Katinsky. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1997. v. 1

Egípcio

Fonte: acervo dos autores

Uma possibilidade de trabalhar com os sistemas de numeração de outros povos é trabalhá-los em conjunto com o sistema utilizado atualmente que é o indo-arábico. Dessa maneira, evita-se o trabalho com cada sistema individualmente, com representações de quantidades com os símbolos de cada sistema, mas discute-se as características relevantes de cada sistema, suas vantagens e desvantagens em relação a outros.

Figura 14: Formas de representação de uma quantidade com diferentes sistemas de numeração

Sistemas de Numeração			
Sistema indo-arábico	Sistema Egípcio	Sistema Romano	Sistema Babilônico
42		X L I I	
65		L X V	
131		C X X X I	

Fonte: acervo dos autores

Ao considerar a representação e a utilização dessas 3 quantidades nos quatro sistemas numéricos, evidencia-se a economia ganha com o sistema indo-arábico em que, devido a sua característica posicional, é possível representar qualquer quantidade com apenas 10 símbolos, diferentemente do sistema egípcio que só pode representar até o número 9.999.999. Além disso, há outras características que levaram o sistema indo-arábico a prevalecer no desenvolvimento da sociedade, como a precisão na sua representação, o que não ocorre no sistema babilônico, em que é necessário considerar o contexto da situação para identificação da quantidade representada.

Algumas considerações para sala de aula

No decorrer do texto, foram apresentadas uma proposta de atividade com os estudantes envolvendo o Jogo "Nunca 4" e suas variações, com o intuito de compreender a ideia de valor posicional e o Sistema de Numeração Decimal. Para o desenvolvimento das atividades, há a sugestão da utilização de materiais concretos, como tampinhas coloridas, a sapateira, o ábaco e o material dourado, que o professor pode disponibilizar aos estudantes no momento da realização do jogo visando a elaboração de estratégias de resolução das situações propostas.

Cabe ressaltar que, no decorrer das atividades, o professor pode propor variações do jogo "Nunca 4", como o "Nunca 5", "Nunca 6", até o jogo "Nunca 10", que está relacionado com o Sistema de Numeração Decimal. Dessa maneira, a partir do processo de manipulação, os alunos podem compreender a ideia de valor posicional e as relações existentes entre as ordens do Sistema de Numeração Decimal, como as unidades, dezenas e centenas.

Nesse contexto, cabe ressaltar que os jogos e discussões apresentados no texto podem oportunizar a compreensão de procedimentos realizados nas operações de adição e subtração, como as expressões "vai um" e "empresta um", tendo em vista a necessidade de considerar o valor posicional dos números e as características da base decimal. Uma possibilidade que o professor pode mobilizar é a construção de uma sapateira com três linhas, nas quais podem ser realizadas as operações de adição e subtração, com os estudantes realizando os agrupamentos e desagrupamentos seguindo as regras do jogo "Nunca 10". Nesse sentido, é necessário que o professor considere a importância de realizar o registro das manipulações realizadas na sapateira na lousa, como os algoritmos da adição e subtração, pensando na mudança do concreto para o abstrato

REFERÊNCIAS

BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz Magalhães de. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. 2. ed. Campo Grande: UFMS, 2005.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

DAMM, Regina Flemming. Registro de representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcantara et al. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 1999, p.135-153.

LIMA, Renan, G. A. De; SILVA, Rosane, C. **Nunca 4: vamos jogar?** Oficinas on-line 2021: diálogos sobre propostas em matemática. Disponível em https://www.youtube.com/live/gh2c1Qhi-yc?si=Obmy1oc6ytc2ILWU

CAPÍTULO 4

EXPLORANDO SITUAÇÕES ADITIVAS E SUBTRATIVAS: UM ESTUDO COM OS DIFERENTES SIGNIFICADOS DAS OPERAÇÕES[1]

Oficina 04 - Explorando situações aditivas e subtrativas - YouTube

Autora:
Camila de Oliveira da Silva[2] – UFMS

Público-alvo: Estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental

Objetivo: Suscitar reflexões sobre o estudo de diferentes conceitos e significados das operações aritméticas de adição e subtração, por meio da exploração de uma variedade de situações criadas a partir de um único contexto, o de *jogos com figurinhas.*

Habilidades da BNCC:

- EF01MA08) Resolver e elaborar problemas de adição e de subtração, envolvendo números de até dois algarismos, com os significados de juntar, acrescentar, separar e retirar, com o suporte de imagens e/ou material manipulável, utilizando estratégias e formas de registro pessoais.
- (EF03MA06) Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades, utilizando diferentes estratégias de cálculo exato ou aproximado, incluindo cálculo mental.

Materiais que podem ser utilizados

Figurinhas ou qualquer outro objeto concreto que possa fazer alusão à ideia de figurinhas, como:

- Tampinhas,
- Cubinhos,
- Cartões com desenhos,
- Material dourado, ...
- Régua numerada
- Celular ou computador para acesso livre ao aplicativo *Base Ten Blocks/Manipulatives*[3]

[1] Texto relativo à apresentação da quarta oficina on-line ministrada em parceria com o Prof. Dr. Antonio Sales, desenvolvida no ano de 2021.

[2] Professora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS)*; e-mail: camimatt@gmail.com-* ORCID*: 0000-0003-3383-9235*

[3] Cabe ressaltar que apenas algumas atividades propostas nesse estudo propõem a utilização desse aplicativo, cujo acesso gratuito ao aplicativo está disponível em: https://www.coolmath4kids.com/manipulatives/base-ten- blocks

INTRODUÇÃO

Esse texto apresenta uma proposta de trabalho com nove situações aditivas e subtrativas que são originadas com a simulação de um jogo com figurinhas, na qual buscamos desenvolver um estudo com diferentes conceitos e significados que envolvem as operações aritméticas de adição e subtração. Com esse intuito, será elaborada uma reflexão ao longo do texto, de modo a compreendermos algumas das dificuldades que os estudantes podem apresentar, tendo em vista um trabalho que prioriza apenas problemas considerados prototípicos nesta fase de escolaridade que, muito frequentemente, levam ao seguindo questionamento: *Professor, esse problema é de mais ou de menos?*

Para isso, apresentamos algumas ideias que podem contribuir para a mediação do professor em sala de aula, considerando um estudo com diferentes representações simbólicas e estratégias que os alunos podem mobilizar na resolução das situações propostas.

A organização desse texto se dá com algumas reflexões iniciais, seguidas da discussão de nove situações aditivas e subtrativas que envolvem os conceitos de composição, transformação e comparação de quantidades, aliadas aos diferentes significados dessas operações aritméticas e, por fim, algumas considerações para a sala de aula.

REFLEXÕES INICIAIS

Desde muito cedo as crianças se deparam com situações em contextos cotidianos ou escolares que as levam a realizar algumas operações vinculadas ao processo aditivo ou subtrativo. Isso ocorre, por exemplo, quando: buscam descobrir quantos pratos e talheres são necessários para o jantar em um determinado dia; questionam se terão dinheiro suficiente para comprar algo e com quanto ficarão após a compra ou ainda quando são interpeladas com probleminhas do tipo: tenho 5 balas e minha irmã me deu outras 4 balas. Quantas balas tenho agora? Quantos alunos estavam no início da aula? Quantos saíram e quantos ficaram agora?

Para resolverem situações como essas, as crianças podem mobilizar diferentes técnicas para a contagem, como o cálculo mental, o apoio com os dedos das mãos, bem como o uso de recursos diversos para representar o que é posto para ajudar na interpretação do problema, tais como: tampinhas, palitos de sorvetes, risquinhos feitos no papel etc. À medida que as situações matemáticas (especialmente aquelas propostas na escola) vão ficando mais complexas, o professor pode então ir mediando com formas alternativas de problematizações e usos de materiais didáticos tão necessários na mediação entre o concreto e o abstrato.

Contudo, no início do processo de escolarização também observamos um trabalho com vários probleminhas, como: *João tinha 6 figurinhas e **ganhou** 5 de seu pai. Com quantas ficou?* Ou ainda, *João tinha 9 figurinhas e **perdeu** 6 durante um jogo. Com quantas ficou?* A sequência repetida nesses dois problemas considerados prototípicos, ou seja, comumente trabalhados sobre um mesmo padrão de raciocínio e que nos evidencia duas características que chamaremos a atenção. A primeira é sobre as palavras que estão sendo usadas e sobre as quais grifamos, a saber, ganhou e perdeu. Estas são palavras-chave nesse contexto e constituem uma marca de linguagem para a criança, uma vez que elas já olham e associam *perdeu* à operação subtrativa e ganhou à operação aditiva, conduzindo-as assim a um certo procedimento de resolução dos problemas em jogo. A segunda característica, aliada à anterior, concerne ao fato de que após a apresentação dos dados, o que os alunos têm que descobrir no problema está sempre ao final do enunciado.

As considerações que aqui trazemos correspondem aos estudos desenvolvidos pelo pesquisador Gérard Vergnaud[4], bem como por Magina et. al. (2008), os quais também nos levam a questionar sobre como geralmente temos feito em nossas aulas, como os problemas são abordados nos livros didáticos e que outras possibilidades podemos explorar para tratar de situações aditivas e subtrativas com crianças do ensino fundamental I e II. Desse modo iniciamos nossa reflexão com algumas situações do campo aditivo que, como expresso por Vergnaud (1990), concernem a situações que envolvem simultaneamente diferentes conceitos que envolvem as operações de adição e subtração, sem que elas sejam trabalhadas de forma isolada e/ou fragmentada.

Cabe destacar ainda a importância de os alunos se depararem com uma variedade de situações que lhes permitam construir as ideias e significados inerentes às operações. No entanto, essas denominações dizem respeito somente ao professor, o qual preparará as situações para que os alunos as vivenciem de modo a construírem conhecimentos relativos a esse campo de estudo, ou seja, não cabe aos alunos se 'preocuparem' em saber que estão resolvendo um problema envolvendo o conceito de transformação de quantidades e com uma ideia de completamento, por exemplo. O importante é que aprendam a interpretar o problema, identificar o que é dado e o que é pedido e desenvolverem alguma estratégia de resolução sabendo que pode ter mais de uma forma de resolver o problema proposto. Entretanto, é importante para nós, professores, refletirmos sobre a variedade de situações e seus significados justamente para elaborar propostas diversificadas para nossos estudantes. Para esta reflexão nos deteremos em nove situações aditivas e subtrativas expressas a seguir, sendo as de cor azul situações que mobilizam o conceito de transformação, as de cor verde relativas à ideia de composição e as de cor vermelha que mobilizam o conceito de comparação.

[4] Esse pesquisador desenvolveu a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) e é nesse quadro teórico que os conceitos aqui tratados estão amparados. Para aprofundamento deste estudo é possível encontrar alguns de seus textos em: https://gerardvergnaud.wordpress.com/

Estudo com algumas situações do campo aditivo

1. Clara tinha 15 figurinhas. *Ela jogou e ganhou 8 figurinhas. Quantas figurinhas ela tem agora?*
2. Carla tem 15 figurinhas e Paulo tem 8 figurinhas. Quantas figurinhas os dois têm juntos?
3. Paulo e Carlos juntos têm 15 figurinhas. Sabendo que Paulo tem 8 figurinhas, quantas Carlos tem?
4. João possuía 8 figurinhas e ganhou mais algumas num jogo. Agora ele tem 15 figurinhas. Quantas figurinhas ele ganhou?
5. Paulo tinha algumas figurinhas, ganhou 8 no jogo e ficou com 15. Quantas figurinhas ele possuía no início do jogo?
6. No início de um jogo, Pedro tinha algumas figurinhas. No decorrer do jogo ele perdeu 15 e terminou o jogo com 8 figurinhas. Quantas figurinhas ele possuía no início do jogo?
7. No final de um jogo, Paulo e Carlos conferiram suas figurinhas. Paulo tinha 15 e Carlos tinha 8 a menos que Paulo. Quantas eram as figurinhas de Carlos?
8. No final de um jogo, Paulo e Carlos conferiram suas figurinhas. Paulo tinha 15 e Carlos tinha 8 a mais que Paulo. Quantas eram as figurinhas de Carlos?
9. Paulo e Carlos conferiram suas figurinhas. Paulo tem 15 e Carlos 8. Quantas figurinhas Carlos deve ganhar para ter o mesmo número que Paulo?

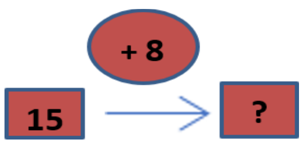
Após a leitura das situações acima convidamos você, professor, a refletir sobre cada uma delas antes de prosseguirmos: acredita que essas situações possuem os mesmos significados? Há semelhanças e/ou diferenças entre elas? Se sim, quais?

Com esse intuito passaremos a conversar sobre cada uma delas. Vamos lá?

01. Clara tinha 15 figurinhas. *Ela jogou e ganhou 8 figurinhas. Quantas figurinhas ela tem agora?*

Nessa situação observamos que Clara tinha uma quantidade inicial de figurinhas, ela jogou (e, portanto, algo aconteceu no jogo e, neste caso, sabemos que ela ganhou 8 figurinhas), e queremos saber quantas figurinhas ela possui após essa jogada. Para melhor esboçarmos o ocorrido em uma situação como essa, passaremos a mobilizar o seguinte esquema, que nos permitirá observar a variedade de situações tratadas e que estará se modificando de uma situação em relação a outra.

Figura 1: Esquema relativo à situação 01[5]

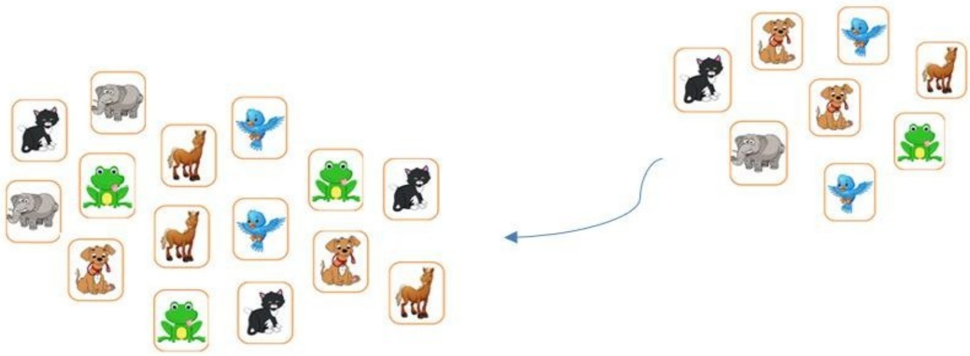


Fonte: acervo da autora

Note que podemos ir construindo esse esquema, passo a passo, no qual esboçamos um primeiro retângulo à esquerda contendo a quantidade inicial que Clara tinha antes de iniciar o jogo (estado inicial do jogo). Depois, no círculo, consideramos o fato de que ocorreu uma transformação em relação à quantidade inicial, simbolizada com o (+8) indicando o ganho de 8 figurinhas e, por fim, esboçamos o estado final do jogo, que é desconhecido. Dizemos que esse é um tipo de problema que concerne ao conceito de transformação, envolvendo uma relação temporal.

Uma estratégia que pode ser mobilizada pelos alunos está em resolver a situação elaborando uma representação do problema com uso de algum material concreto que o professor pode disponibilizar às crianças para simbolizar as figurinhas. O aluno, com a mediação do professor, pode ir realizando a simulação da situação, tomando para si 15 figurinhas e depois, ir *acrescentando* a esse grupo de figurinhas, cada uma das 8 figurinhas que Ana ganhou no jogo, ação esta que esboçamos com o auxílio da seta na figura 2. Assim, por meio da contagem a criança pode inferir que Clara ficou com 23 figurinhas no total.

Figura 2: Representação associada a ideia de *acrescentar* certa quantidade a uma outra existente

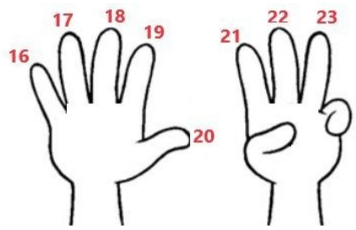


Fonte: acervo da autora

Outra estratégia corresponde a sobrecontagem, que concerne a contagem feita partindo de um número que é dado, e que pode ser realizada com o apoio dos dedos. Assim, a criança pode separar as 15 figurinhas que se tinha inicialmente e ir "juntando" à sequência mais 8 restantes, o que poderá ser feito passo a passo com o auxílio dos dedinhos, verbalizando, por exemplo, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22 e 23, parando nesse último, após ver que já teria adicionado as oito quantidades às 15 iniciais. A ideia na estratégia de sobrecontagem é a de completamento, pois parte-se da quantidade inicial e vai completando com a quantidade ganha (8 figurinhas).

[5] Cabe salientar que este esquema será usado apenas para que o leitor possa compreender as ideias apresentadas. Não se trata, de forma alguma, de ensinar tais esquemas aos estudantes.

Figura 3: Representação da ideia de *completamento* com auxílio dos dedos



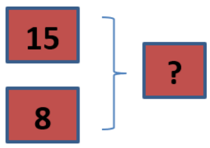
Fonte: acervo da autora

De posse destas colocações podemos aqui inferir que em uma mesma situação aditiva, como nesse caso, é possível mobilizar ideias diferentes para a sua resolução, como nessa situação que foi resolvida de duas formas diferentes, por meio da ideia de *acrescentar* e da ideia de *completar* uma quantidade a outra dada.

02. Carla tem 15 figurinhas e Paulo tem 8 figurinhas. Quantas figurinhas os dois têm juntos?

Será que a ideia desta situação é a mesma da situação anterior? O que está em 'jogo' nessa situação? Interpretando-a por meio de um esquema, podemos representar 15 figurinhas de Carla em um retângulo e em outro as 8 figurinhas de Paulo e o que queremos descobrir é o quanto eles têm juntos, conforme expresso na figura 4.

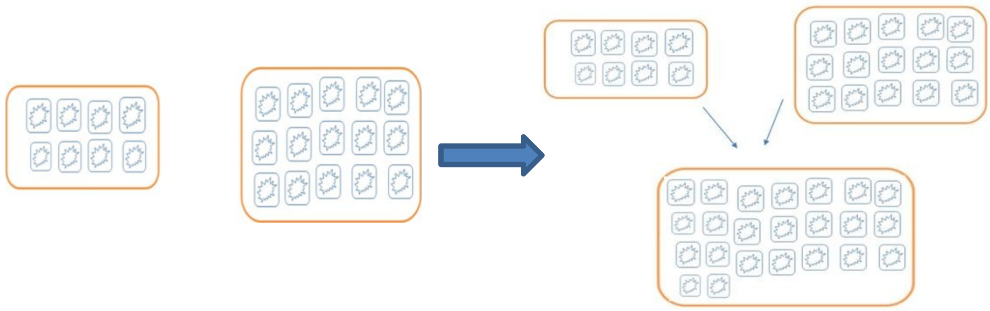
Figura 4: Esquema relativo à situação 02



Fonte: acervo da autora

Nesse caso observa-se que o problema fornece os quantitativos referentes a cada uma das partes envolvidas e o todo é desconhecido. Os alunos também podem recorrer a alguma representação da situação dada, manipulando objetos concretos ou ainda recorrendo a um desenho representando um conjunto contendo 15 figurinhas e outro com 8 figurinhas e, então, *juntar* as quantidades de cada parte envolvida em um novo conjunto totalizando 23 figurinhas.

Figura 5: Uma representação com uso de desenhos



Fonte: acervo da autora

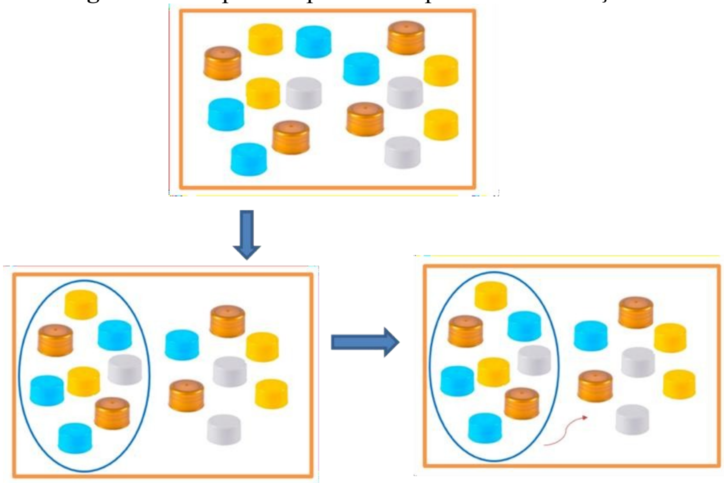
Assim, ao refletirmos sobre a ideia de *juntar ou reunir* quantidades cabe destacar que, nesse caso, embora a operação realizada também seja a de adição, mobilizamos uma ideia diferente da situação anterior, em que aí não há uma transformação em relação a uma certa quantidade dada inicialmente, por exemplo. Aqui há um conceito de partes envolvidas com um todo, ou ainda, uma relação parte-todo que é compreendida como uma situação que envolve o conceito de composição de quantidades.

Podemos ainda notar que embora as situações 01 e 02 tragam o termo desconhecido apenas ao final do enunciado, seja ele referente a um estado final desconhecido ou ao todo desconhecido, respectivamente, elas ainda abordam ideias diferentes associadas à operação aditiva em jogo. Nesse sentido, a mudança na posição do termo desconhecido poderá ser observada na situação a seguir:

03. Paulo e Carlos juntos têm 15 figurinhas. Sabendo que Paulo tem 8 figurinhas, quantas Carlos tem?

Nesse estágio de escolaridade sabemos o quanto é importante que os alunos manipulem e usem diferentes representações para ajudá-los na compreensão de uma situação-problema e, pensando nisso, uma estratégia que pode ser mobilizada pelos alunos diz respeito à representação de 15 figurinhas que Paulo e Carlos têm juntos. Uma ideia está em usar tampinhas para simbolizar um trabalho concreto, em que a criança pode formar um montinho (conjunto) com essas 15 figurinhas e, a partir disso, ela pode ir contando (separando algumas) até ter oito figurinhas relativas à quantidade de Paulo. A partir daí é possível separar essa quantidade das outras figurinhas, como sinalizamos na figura 6, e observar que a quantidade de figurinhas de Paulo é automaticamente o que restou após ter separado as de Carlos. Assim, por meio de uma nova contagem a criança descobrirá que Carlos possui 7 figurinhas ao todo, como ilustrado na figura 6.

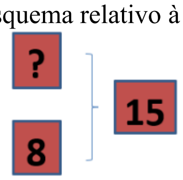
Figura 6: Um passo a passo ao representar a situação 03



Fonte: acervo da autora

Essa situação que envolve o conceito de composição de quantidades também pode ser visualizada junto ao esquema expresso na figura 7. Ao se referir a uma relação de parte-todo no contexto de figurinhas é possível observar que esse é um caso em que temos uma das partes desconhecidas e não o todo, e mobilizamos uma operação subtrativa a partir da ideia de *separar* uma certa quantidade. Por outro lado, é possível atentar-se para o fato de que os alunos também possam mobilizar a ideia de c*ompletar* quantidades, tomando o quantitativo de 8 figurinhas e questionando-se sobre quanto falta para chegar às 15 figurinhas. Essa estratégia envolve uma ideia aditiva e a criança poderá ou não recorrer ao auxílio dos dedos, como expresso na figura 3, e, assim, chegará ao quantitativo de 7 figurinhas a ser descoberto após observar passo a passo a sequência obtida, a saber: 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15.

Figura 7: Esquema relativo à situação 03

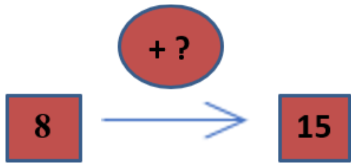


Fonte: acervo da autora

04. João possuía 8 figurinhas e ganhou mais algumas num jogo. Agora ele tem 15 figurinhas. Quantas figurinhas ele ganhou?

Essa situação mobiliza o conceito de transformação, já que João possuía 8 figurinhas (estado inicial), jogou, ocorrendo assim uma transformação em que ganhou uma certa quantidade (nesse caso, desconhecida) e obteve ao final 15 figurinhas (estado final), como expressamos no esquema desta situação na figura 8.

Figura 8: Esquema relativo à situação 04



Fonte: acervo da autora

Uma outra possibilidade de trabalho com situações aditivas e subtrativas está com o uso do aplicativo *base ten blocks* [6], um recurso didático digital que pode contribuir para o trabalho dos alunos e dos professores, especialmente quando esses fazem uso, por exemplo, da lousa digital ou computadores em suas aulas. Desta forma, os professores podem explorá-lo com seus estudantes que podem acessar o *base ten bocks* em dispositivos móveis, como os celulares. O aplicativo permite a representação com bloquinhos que simulam o material dourado e, assim, uma possibilidade de resolução pode ser pensada da seguinte forma:

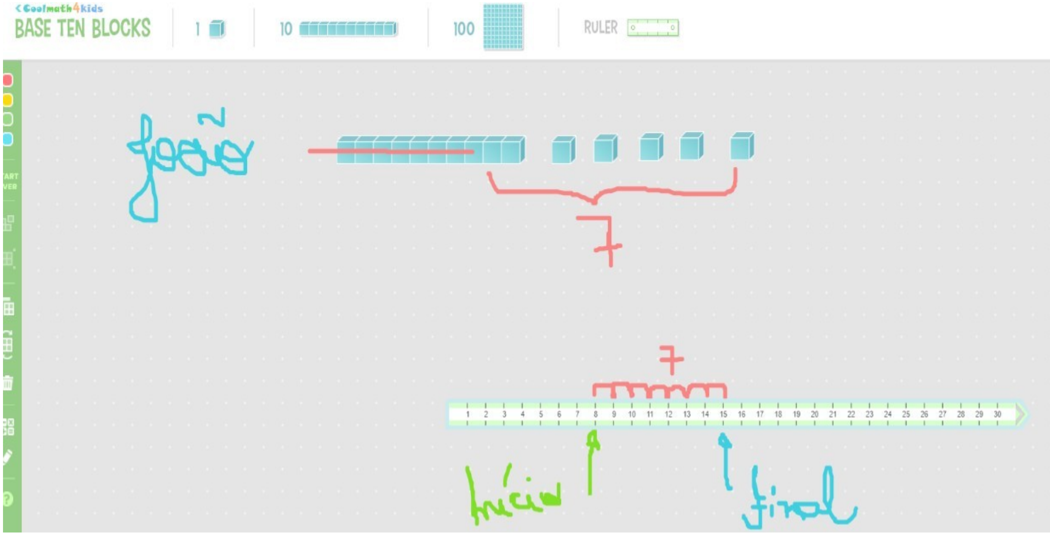
Tomando uma barrinha (equivalente a 10 cubinhos) do material concreto mais 5 cubinhos, obtemos a representação das 15 figurinhas que João tem ao final do Jogo. Cabe destacar que os alunos podem tomar 10 cubinhos soltos, ao invés da barrinha, o que não há problema algum e ainda pode permitir ao professor retomar a ideia de agrupamento em nosso sistema de numeração decimal.

Após tomar a representação de 15 figurinhas, é possível indicar nessa, as 8 figurinhas que João tinha no início do jogo. Assim, *retiramos ou separamos* essa quantidade já conhecida indicando essa ação com um risco, sobrando a quantidade que João ganhou no jogo. Essa estratégia diz respeito à operação subtrativa mobilizada e expressa por 15 – 8 = 7

Outra estratégia que pode ser mobilizada pelos alunos se refere ao uso da reta numérica. Com ela podemos indicar o estado inicial, que nesse caso será o 8, e o estado final, o 15. Assim, os alunos podem ser indagados sobre quantos passos devem ser dados, partindo de 8 para chegar ao 15, podendo adicionar um a um à quantidade inicial. Essa ação mobiliza uma ideia aditiva para resolver o problema proposto, diferentemente da estratégia anterior, como podemos observar na figura 9.

[6] https://www.coolmath4kids.com/manipulatives/base-ten-blocks

Figura 9: Algumas estratégias de resolução mobilizadas com *Base Ten Blocks*



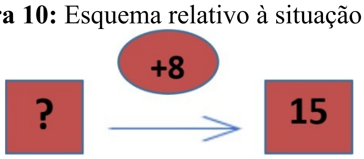
Fonte: acervo da autora

Cabe destacar que se não for possível o uso do aplicativo pelo professor, pode-se mediar as discussões dos alunos usando o material dourado "concreto" e o auxílio da própria reta numérica, entre outros.

05. Paulo tinha algumas figurinhas, ganhou 8 no jogo e ficou com 15. Quantas figurinhas ele possuía?

Com relação a essa situação, será que ela trabalha o mesmo raciocínio da anterior? Podemos ter diferentes maneiras para resolver esse problema, ou não? Questões como estas podem ser realizadas com os alunos, quando são propostas duas ou mais situações para desafiá- los a encontrar uma resolução para o problema. No caso dessa situação, os alunos podem apresentar certa dificuldade nessa resolução, uma vez que o dado que é preciso descobrir é o quantitativo de figuras que se tinha no início do jogo, isto é, o estado inicial desta situação (Figura 10). Esta não é uma situação muito comum de se encontrar no ensino.

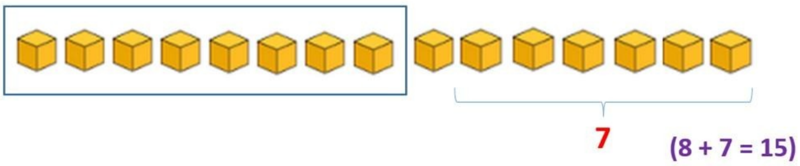
Figura 10: Esquema relativo à situação 05



Fonte: acervo da autora

Assim, uma forma de resolução que pode ser mobilizada nesse problema está em considerar primeiramente o quantitativo de figurinhas que Paulo ganhou no jogo. Ao tomarmos as 8 figurinhas e sabendo que ao final ele ficou com 15, então, uma ideia está em ir *completando*, adicionando às 8 iniciais um quantitativo de figurinhas até obtermos 15 ao total (por meio de sobrecontagem). Assim, a criança pode ir representando e procedendo com a contagem, 9, 10, 11, 12, 13, 14 e 15. Ao final, espera-se que ela possa ir percebendo que o que foi acrescentado é exatamente a quantidade inicial do jogo.

Figura 11: Resolução mobilizando a ideia de completar

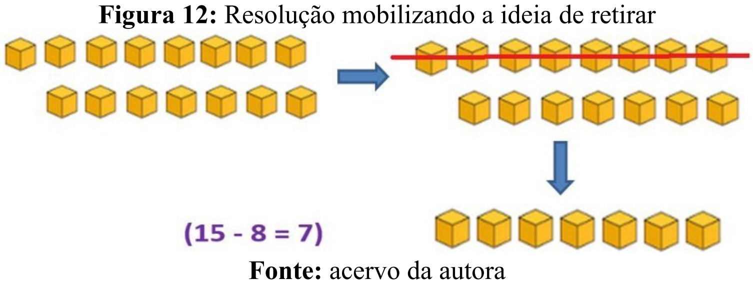


Fonte: acervo da autora

Cabe destacar que é fundamental que as crianças representem a situação por meio de algum material concreto, seja ele o material dourado, canudo ou até mesmo feijãozinhos, de modo que possam ir operacionalizando e refletindo sobre como proceder nesse desafio proposto. Além disso, com base na resolução anterior podemos inferior o quanto o raciocínio requerido nessa situação difere das apresentadas anteriormente, o que é importante, pois é por meio do contato com uma variedade de situações que as operações e conceitos envolvidos vão fazendo sentido para os alunos, favorecendo a construção das ideias campo aditivo.

Outra estratégia pode ser visualizada na figura 12, que envolve a operação de subtração e a mobilização da ideia de *retirar* uma quantidade de outra dada. Assim, a ideia é tomar inicialmente as figurinhas finais e retirar, desse total, o quantitativo que Paulo ganhou no jogo, o que permitirá obter as 7 figurinhas que correspondem ao quantitativo inicial do jogo (Figura 12).

Figura 12: Resolução mobilizando a ideia de retirar

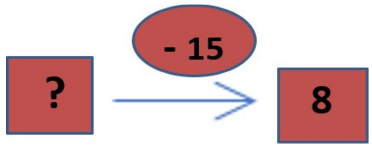


Fonte: acervo da autora

06. No início de um jogo, Pedro tinha algumas figurinhas. No decorrer do jogo ele perdeu 15 e terminou o jogo com 8 figurinhas. Quantas figurinhas ele possuía no início do jogo?

Trazemos essa situação como um último exemplo para discutirmos as situações aditivas e subtrativas mobilizando o conceito de *transformação* de quantidades. Nesse caso, mesmo sendo uma situação na qual também queremos descobrir o estado inicial do jogo, esta difere ainda da situação anterior pelo fato de Pedro ter perdido figurinhas ao longo do jogo o que, consequentemente, vai requerer um novo tipo de raciocínio pelos alunos, por não ser algo tão intuitivo e por apresentar certa complexidade.

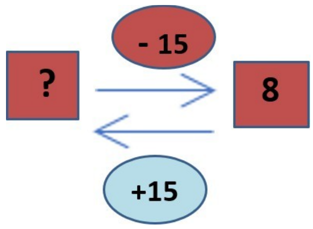
Figura 13: Esquema relativo à situação 06



Fonte: acervo da autora

Neste esquema (Figura 13) sinalizamos uma transformação negativa, denotada -15, para fazer referência à perda no jogo. No entanto, uma forma de resolução deste problema está em partir do estado final referente a 8 figurinhas e proceder com uma transformação inversa à ideia dada, como expresso no esquema a seguir (Figura 14).

Figura 14: Esquema mobilizado para resolução da situação 06

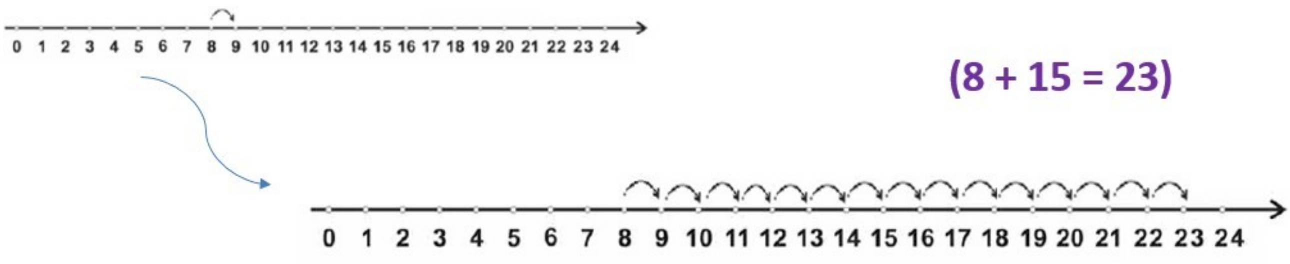


Fonte: acervo da autora

É importante considerar que essa situação demandará certa atenção pelo professor para a mediação no trabalho com os alunos, tendo em vista as dificuldades que os alunos podem ter para assimilar o sentido dessa operação.

Uma estratégia que aqui esboçamos, mas não a única possível de ser mobilizada pelos alunos, concerne ao uso da reta numérica como auxílio para a resolução dessa situação. Desse modo, é possível tomar como ponto de partida o valor referente às 8 figurinhas obtidas ao final do jogo e ir adicionando a esse, uma a uma, passo a passo, em referência ao quantitativo de 15 figurinhas em que Pedro perdeu durante o jogo. Assim, ao mobilizar a ideia de *completar* para resolver esse problema, a situação permite uma fuga da marca de linguagem usada no enunciado, com a palavra perdeu, quando a mesma não se vincula, nesse caso, a uma operação subtrativa. Portanto, vemos que, apesar de a situação proposta falar em perda em seu enunciado, usamos a operação de adição para resolvê-la, como podemos verificar na figura 15.

Figura 15: Uma estratégia a ser mobilizada para resolução da situação 06



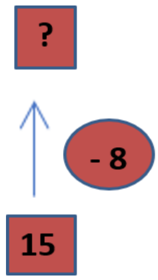
Fonte: acervo da autora

07. No final de um jogo, Paulo e Carlos conferiram suas figurinhas. Paulo tinha 15 e Carlos tinha 8 a menos que Paulo. Quantas eram as figurinhas de Carlos?

É importante ressaltar que até o momento tínhamos trabalhado com situações envolvendo os conceitos de transformação e composição de quantidades. No entanto, a partir dessa situação passaremos a explorar situações que consideram o conceito de *comparação de quantidades*, o que demandará um novo trabalho cognitivo no trato com diferentes situações que envolvem tal conceito.

Nesse sentido, podemos observar que esse problema relaciona o quantitativo de figurinhas que Paulo e Carlos possuem, sendo conhecida a quantidade de figurinhas que Paulo tem, porém, não sendo conhecida a quantidade que Carlos tem; sabe-se apenas a relação estabelecida entre suas figurinhas e as de Paulo: Carlos tem 8 a menos que a quantidade de Paulo, o que simbolizamos por (-8) no esquema que segue (Figura 16).

Figura 16: Esquema mobilizado para resolução da situação 07

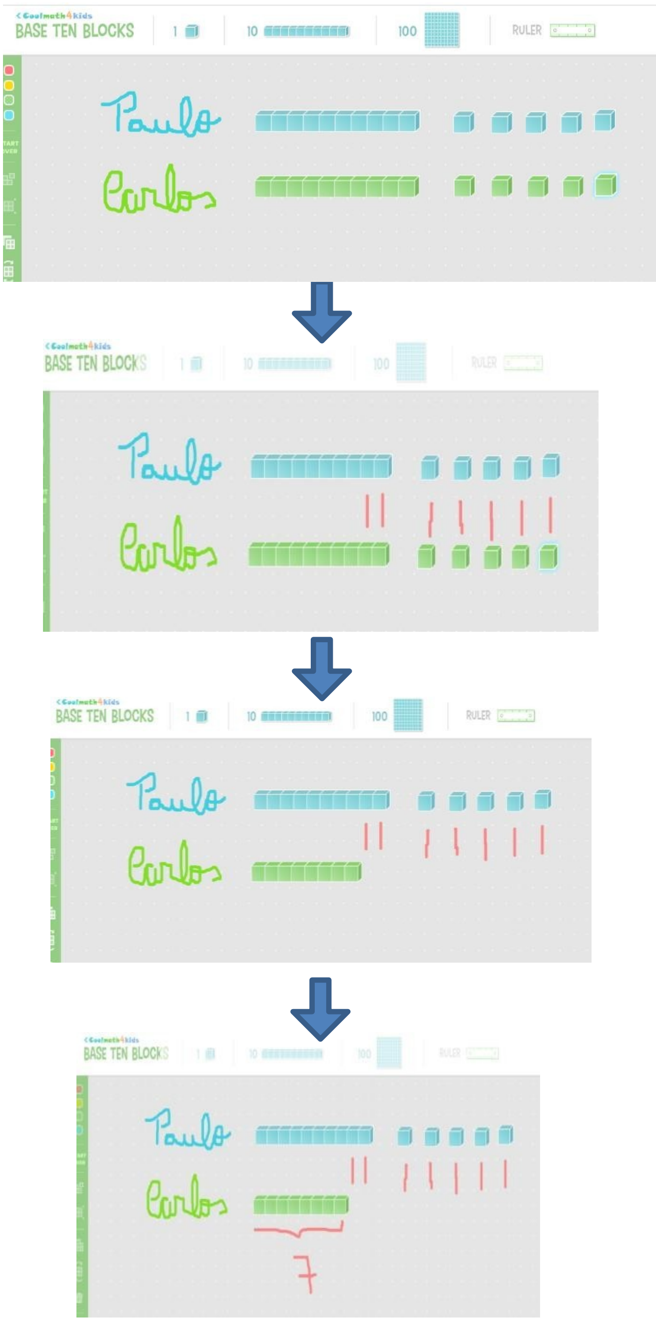


Fonte: acervo da autora

Ao trabalharmos uma situação com a ideia de *comparar* quantidades, uma técnica importante de ser considerada é a de emparelhar esses objetos de modo que possamos estabelecer uma correspondência um a um. Como expressamos na figura 17, iniciamos esboçando a quantidade de Paulo, dada no enunciado, e com vista a estabelecermos tal comparação reproduzimos inicialmente a de Carlos, ainda de modo hipotético com a mesma quantidade de Paulo, para que possamos explorá-la gradualmente com os dados oferecidos no problema. Após isso, passamos a representar o fato de que Carlos tem 8 figurinhas a menos que Paulo, riscando uma a uma no aplicativo para depois retirar essa quantidade dentre as figuras dadas a Carlos. Consequentemente, a quantidade que restou após o trabalho com a comparação estabelecida, é referente ao quantitativo de figuras de Carlos que estávamos buscando descobrir.

Destacamos ainda que se os estudantes estiverem usando material concreto, a ação de *retirar* essa quantidade pode ser feita após o emparelhamento, sem a necessidade dos risquinhos que aqui optamos em fazer para uma melhor visualização do passo a passo desta resolução.

Figura 17: Exemplo de uma estratégia mobilizado para resolução da situação 07



Fonte: acervo da autora

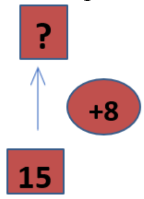
Cabe destacar que na exploração dessa e da próxima situação escolhemos trabalhar com o aplicativo *Base Ten Blocks*, mas é importante o professor considerar os materiais que podem ser utilizados dentro de suas próprias condições, de seus alunos e da escola ao qual está vinculado, e fazer as adaptações necessárias.

Reinvestindo...

08. No final de um jogo, Paulo e Carlos conferiram suas figurinhas. Paulo tinha 15 e Carlos tinha 8 a mais que Paulo. Quantas eram as figurinhas de Carlos?

Assim como trabalhado na situação anterior, a situação 08 diz respeito a uma ação de *comparar* quantidades, no entanto, a diferença tratada diz respeito a relação estabelecida entre as figurinhas de Paulo e Carlos, sendo que agora Carlos tem 8 a mais que Paulo.

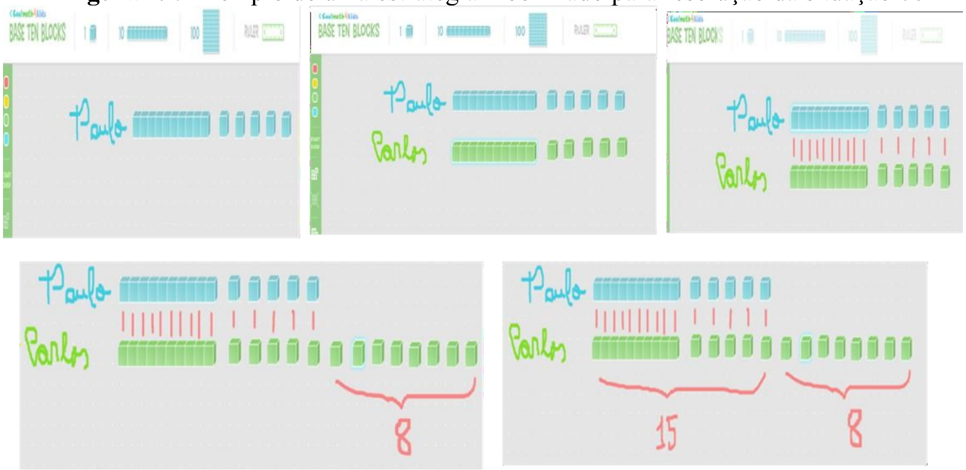
Figura 18: Esquema mobilizado para resolução da situação 08



Fonte: acervo da autora

Os alunos também podem prosseguir realizando um emparelhamento dos objetos, de modo a estabelecer uma correspondência uma a uma. Após efetuar a correspondência sinalizando com risquinhos, como podemos verificar na figura 19, será preciso *acrescentar* 8 figurinhas à quantidade inicial representada à quantidade de Carlos. Portanto, para descobrir a quantidade exata de figurinhas de Carlos, os alunos podem adicionar 8 figurinhas às 15 iniciais, realizando uma operação de adição entre esses valores dados, obtendo o total de 23 figurinhas que Carlos possuía no início do jogo.

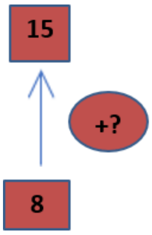
Figura 19: Exemplo de uma estratégia mobilizado para resolução da situação 08



Fonte: acervo da autora

Finalizando essa série de situações que mobilizam a ação de comparar quantidades, apresentamos uma nova variação com relação às situações anteriores, visto que nesse caso a relação existente entre as duas partes envolvidas é desconhecida (Figura 19).

Figura 20: Esquema mobilizado para resolução da situação 09

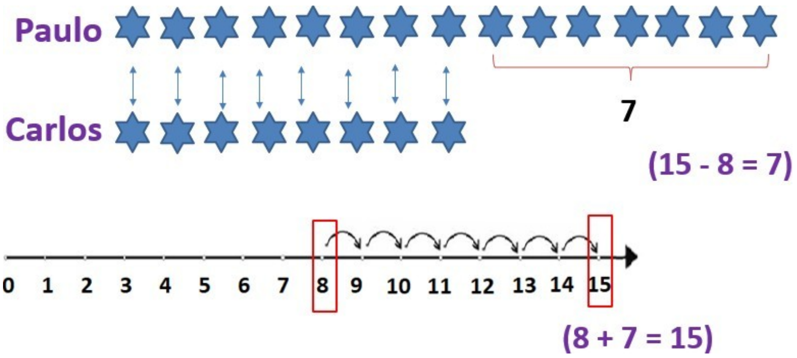


Fonte: acervo da autora

Para refletirmos sobre essa situação, abordaremos duas estratégias que acreditamos serem possíveis de os alunos fazerem uso em suas resoluções, as quais trazemos na figura 20. Na primeira procedemos com a ideia de emparelhamento dos objetos, para realizar a comparação entre as quantidades de cada jogador, tomando os próprios dados do problema. Assim, fazendo uso da ideia de *comparar* vemos que para obter o resultado esperado, o aluno realiza uma *operação subtrativa*, esboçada como sendo (15 – 8 = 7).

Já a segunda estratégia passa a mobilizar uma *ideia aditiva*, pois podemos realizá-la por meio de uma ação de *completa*r quantidades, já que nesse exemplo, é possível tomar como ponto de parte o quantitativo de 8 figuras e o final, a quantidade de 15 figurinhas de Paulo. O professor pode indagar aos alunos quanto falta para chegar a 15, partindo de 8.

Figura 21: Exemplo de estratégias que podem ser mobilizadas na resolução da situação 09

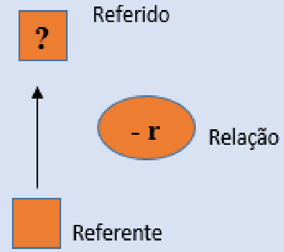
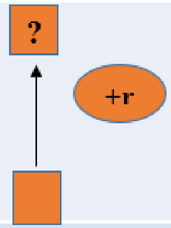
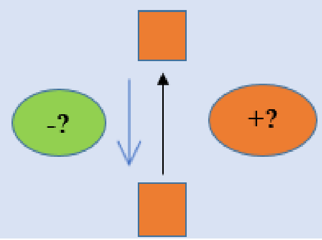


Fonte: acervo da autora

Portanto, essa é uma situação como outras aqui apresentadas que evidencia um trabalho que, a depender do raciocínio empregado na resolução, pode mobilizar tanto a operação aditiva quanto a subtrativa. Para concluir resumimos as ideias relativas aos tipos de situações exploradas nesse texto, como forma de representá-las a partir da ideia de esquema desenvolvida por Gérard Vergnaud:

Quadro 1: Síntese dos conceitos envolvidos nas situações aditivas e subtrativas

Situações-problema	Composição	Transformação	Comparação
01. Clara tinha 15 figurinhas. *Ela jogou e ganhou 8 figurinhas. Quantas figurinhas ela tem agora?*		$\boxed{I} \xrightarrow{+T} \boxed{?}$	
02. Carla tem 15 figurinhas e Paulo tem 8 figurinhas. Quantas figurinhas os dois têm juntos?	Parte $\boxed{}$ Parte $\boxed{}$ $\boxed{?}$ Todo		
03. Paulo e Carlos juntos têm 15 figurinhas. Sabendo que Paulo tem 8 figurinhas, quantas Carlos tem?	Parte $\boxed{?}$ Parte $\boxed{}$ $\boxed{}$ Todo		
04. João possuía 8 figurinhas e ganhou mais algumas num jogo. Agora ele tem 15 figurinhas. Quantas figurinhas ele ganhou?		$\boxed{I} \xrightarrow{+?} \boxed{F}$	
05. Paulo tinha algumas figurinhas, ganhou 8 no jogo e ficou com 15. Quantas figurinhas ele possuía?		$\boxed{?} \underset{-T}{\overset{+T}{\rightleftarrows}} \boxed{F}$	
06. No início de um jogo, Pedro tinha algumas figurinhas. No decorrer do jogo ele perdeu 15 e terminou o jogo com 8 figurinhas. Quantas figurinhas ele possuía no início do jogo?		$\boxed{?} \underset{+T}{\overset{-T}{\rightleftarrows}} \boxed{F}$	

Situações-problema	Composição	Transformação	Comparação
. No final de um jogo, Paulo e Carlos conferiram suas urinhas. Paulo tinha 15 e Carlos tinha 8 a menos que ulo. Quantas eram as figurinhas de Carlos?			
. No final de um jogo, Paulo e Carlos conferiram suas urinhas. Paulo tinha 15 e Carlos tinha 8 a mais que ulo. Quantas eram as figurinhas de Carlos?			
. Paulo e Carlos conferiram suas figurinhas. Paulo tem e Carlos 8. Quantas figurinhas Carlos deve ganhar ra ter o mesmo número que Paulo?			

Fonte (adaptado): Vergnaud (1990) e Magina et. al (2008)

Algumas considerações para a sala de aula:

Ao longo desse texto buscamos provocar reflexões a partir de uma variedade de situações criadas, tomando como referência o jogo com figurinhas. Assim, desenvolvemos um estudo com as diferentes ideias que perpassam o trabalho com situações aditivas e subtrativas e a escolha por trabalharmos com tais situações que, embora sejam muito parecidas na linguagem empregada, permitiu levar à reflexão sobre o trabalho cognitivo que cada uma das situações exige do aluno, nas quais fomos aos poucos identificando suas complexidades, bem como as diferenças entre elas. Contudo, cabe destacar que não é somente com uma ou duas situações que envolvem cada conceito aqui apresentado que os alunos terão condições de apreender tais conceitos e utilizá-los em outras situações. É fundamental que eles pratiquem a arte de resolver diversas situações como as nove aqui trabalhadas, assim como na exploração de outras situações em diferentes contextos.

Apesar de nesse texto não termos explorado situações em outros contextos, o professor pode organizar seu planejamento para que as crianças se deparem com uma diversidade de questões que envolvam diferentes raciocínios e favoreça a mobilização de diferentes ideias. Assim, recomendamos o vídeo da oficina 4[7], no qual há alguns indicativos de propostas com problemas que vão além das marcas de linguagem e que, como as atividades trabalhadas neste texto, provocam um trabalho em que os alunos possam atribuir sentido aos conceitos abordados. Outro ponto a considerar está no uso dos recursos didáticos, uma vez que é de extrema importância que os alunos dessa faixa etária possam manusear uma variedade de objetos, permitindo-lhes levantar suas próprias conjecturas e traçar suas estratégias de resolução.

Por fim, esperamos que a abordagem dessas situações possa estimular um trabalho didático que favoreça um ambiente que instigue cada vez mais a criança no estudo com as situações aditivas e subtrativas.

REFERÊNCIAS

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES, T.; GITIRANA, V. **Repensando a Adição e a Subtração: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais**. 3ª edição. Editora PROEM, São Paulo, 2008.

SILVA, Camila de O. **Explorando situações aditivas e subtrativas: um estudo com diferentes significados das operações.** Oficinas on-line 2021: diálogos sobre propostas em matemática. Disponível em https://www.youtube.com/live/DxHQdCz2S-E

[7] Disponível em: https://www.youtube.com/watch? =DxHQdCz2S-E&list=PLJWAm9SPEsqvziY0Q5gY9xuI9TfJy_bI3&index=4&t=435s

VERGNAUD, G. 1990. **Développement et fonctionnement cognitifs dans le champ conceptuel des structures additives**. In: Développement et fonctionnement cognitifs. Gaby Netchine-Grynberg, Paris, PUF, pp. 261-277 Disponível em: https://gerardvergnaud.files.wordpress.com/2021/09/gvergnaud_1990_champ- conceptuel-structures-additives_developpement-fonctionnement-cognitif.pdf Acesso: 21/05/2023

CAPÍTULO 5

INTRODUÇÃO À GEOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Oficina 05: Introdução à Geometria na Educação Básica - YouTube

Autores:
José Luiz Magalhães de Freitas[1] - UFMS
Sonia Maria Monteiro da Silva Burigato[2] - UFMS

Público-alvo: Estudantes do primeiro ao quinto ano do Ensino Fundamental

Objetivo: Apresentar e refletir sobre propostas para introdução da geometria nos anos iniciais.

Habilidades da BNCC:

- *(EF02MA14)* Reconhecer, nomear e comparar figuras geométricas espaciais (cubo, bloco retangular, pirâmide, cone, cilindro e esfera), relacionando-as com objetos do mundo físico.
- *(EF02MA15)* Reconhecer, comparar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo), por meio de características comuns, em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em sólidos geométricos.
- *(EF04MA17)* Associar prismas e pirâmides a suas planificações e analisar, nomear e comparar seus atributos, estabelecendo relações entre as representações planas e espaciais.
- *(EF04MA18)* Reconhecer ângulos retos e não retos em figuras poligonais com o uso de dobraduras, esquadros ou softwares de geometria.
- *(EF05MA16)* Associar figuras espaciais a suas planificações (prismas, pirâmides, cilindros e cones) e analisar, nomear e comparar seus atributos.
- *(EF05MA17)* Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.

Materiais a serem utilizados:

- Embalagens e objetos diversos (objetos da sala de aula e embalagens de produtos, como: chocolate, pasta de dente, pizza, achocolatado etc.) para exemplificar os diversos tipos de sólidos.
- Sólidos geométricos diversos (de madeira, de acrílico ou de outro material disponível na escola) para exemplificar os diversos tipos de sólidos e explorar suas planificações.
- Computador com internet para o acesso a softwares e outros recursos digitais.

[1] Professor da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS); *e-mail*: *joseluizufms2@gmail.com*; ORCID: 0000-0001-5536-837X.
[2] Professora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS); *e-mail*: *soniaburigato@gmail.com*; ORCID: *0000-0001-8403-6032*

Considerações iniciais

Esta proposta didática foi desenvolvida pensando em oferecer algumas sugestões para o professor iniciar o estudo de geometria nos primeiros anos do Ensino Fundamental. Inicialmente trazemos algumas questões para reflexão e que serão os tópicos que iremos discutir ao longo deste texto buscando traçar possibilidade de trabalho. São elas:

- O que de geometria é essencial nos anos iniciais do Ensino Fundamental?
- Quais recursos, atividades e situações-problema são mais adequados?
- Como diversificar e articular a abordagem desse tema no Ensino Fundamental?

Tópicos de geometria para os anos iniciais

Um ponto importante que devemos refletir é sobre o que é essencial ensinar nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Acreditamos que é possível iniciar pela exploração de objetos do espaço tridimensional, tanto os encontrados naturalmente no cotidiano como caixas, blocos, bolas, mesa, porta etc., como os confeccionados com cartolina, madeira ou folhas de papel. A exploração de figuras geométricas tridimensionais, bidimensionais e unidimensionais por meio da observação e de questionamentos deve possibilitar a identificação de figuras básicas, bem como de alguns de seus conceitos e propriedades. O percurso de estudos deve ocorrer por meio de retomadas e aprofundamentos, diversificando atividades, situações-problema, representações, recursos didáticos, contextos etc. É importante o ir e vir entre conceitos conhecidos e desconhecidos, linguagem natural e representações simbólicas, recursos didáticos convencionais e não convencionais, individual e coletivo, concreto e abstrato, informal e formal etc.

Outro aspecto que devemos tomar cuidado é em evitar a abordagem precoce de definições matemáticas formais de: polígono, trapézio, prisma, pirâmide, poliedro regular. É também recomendado evitar detalhes sobre diferenças entre quadrado, retângulo, losango e trapézio; paralelepípedo e prisma; circunferência e círculo; esfera e bola; entre outras. Ao iniciar o estudo de geometria nos anos iniciais, não é errado aceitar que os alunos:

- Chamem o cubo de dado, a esfera de bola, o vértice de “bico” ou “ponta”, a aresta de “quina”, etc.
- Confundam o quadrado com o cubo;
- Achem que para ser pirâmide a base precisa ser quadrada;
- Pensem que a base da pirâmide não pode ser uma das faces etc.

Uma certeza que temos é que não podemos ter pressa em apresentar a formalização, pois isso pode atrapalhar a compreensão, ou pior, assustar as crianças!

Alguns recursos, atividades e situações-problema

Podemos explorar as figuras geométricas inicialmente utilizando representações do tipo: cartões recortados, palitos, desenhos, caixinhas, representações de sólidos construídas com cartolina, "esqueletos" com palitos, figuras do ambiente, figuras no celular ou computador, software como o Poly, Geogebra 3D etc. Uma atividade simples é pedir para os alunos trazerem de casa embalagens vazias, e iniciar uma discussão com eles utilizando esses materiais e os que estão em sala de aula, como da Figura 1.

Figura 1: Uso de materiais variados

Fonte: acervo dos autores

Com base nesta situação é possível ir questionando os alunos sobre os conceitos geométricos, por exemplo, pedir para que eles observem as embalagens e façam agrupamentos. É interessante estimular que tentem diferentes formas de agrupas as embalagens. Em seguida, pedir para que expliquem quais características (semelhanças e diferenças) eles escolheram para separar os objetos em grupos diferentes.

Outra atividade interessante é disponibilizar diversos sólidos geométricos, que podem ser construídos com cartolina ou outro material, como na Figura 2, e solicitar que eles separem os objetos em dois grupos: os que rolam facilmente e os que não rolam facilmente.

Figura 2: Sólidos geométricos variados

Fonte: acervo dos autores

Essas atividades podem ser realizadas utilizando apenas imagens dos objetos em papel.

Diversificar e articular a abordagem da geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental

Um aspecto importante é diversificar a linguagem e as representações, buscando trabalhar com sólidos prontos como também com figuras, ou com *softwares* (como o *Poly*, por exemplo) o que pode, inclusive, atrair a atenção dos estudantes, além de oferecer uma possibilidade a mais.

A identificação de propriedades e a classificação de figuras (planas e espaciais) devem ser introduzidas gradativamente. E, sempre que possível, esse trabalho deve ser realizado por meio de diálogos, questionamentos, exploração individual e coletiva de objetos uni, bi e tridimensionais (1D, 2D e 3D). Por exemplo:

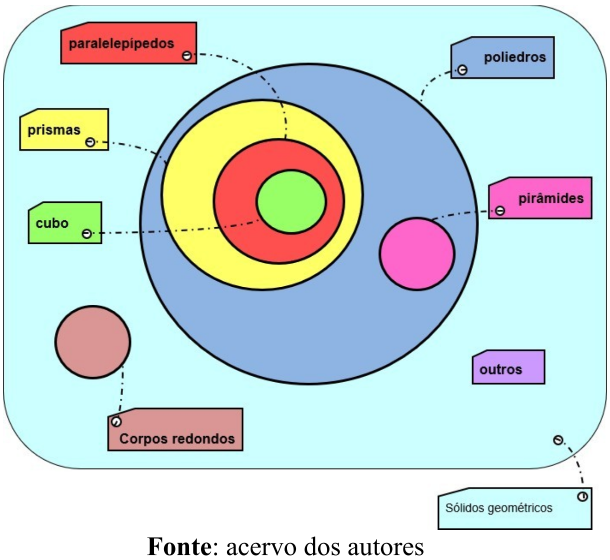
- Dispor um conjunto de figuras 3D, representando sólidos geométricos, e fazer perguntas do tipo:
    - Quais são parecidas?
    - Quais rolam e quais não rolam?
    - Quais podem ficar com uma única "ponta" ou "bico" apontando para cima?
    - Há alguma figura que possui todas as faces triangulares?
    - Qual sólido possui todas as faces quadradas?
    - Em quais figuras todas as faces são retangulares?
    - Há figuras que possuem duas faces iguais, situadas em planos paralelos e todas as faces laterais são paralelogramos? Como se chama essa classe de figuras?

Questões desse tipo devem permear a exploração das figuras constituídas por sólidos geométricos de manipulação. Acreditamos que é por meio de exploração, questionamentos, diálogos e diversidade de representações que deve ser introduzida a abordagem de conceitos e propriedades básicas, sendo que, esses últimos sempre devem ser apresentados paulatinamente. Por exemplo, informar que as “pontas” ou “bicos” dos sólidos geométricos são chamados de vértices e que as superfícies “lisas” e planas são as faces.

Além de identificarem vértices, faces e arestas de poliedros eles devem aprender a identificar alguns corpos redondos clássicos, como o cilindro, a esfera e o cone. Também devem observar que as figuras que ficam com uma única ponta apontando para cima são as pirâmides e os cones. Observar que as pirâmides possuem todas as faces laterais triangulares, enquanto os cones possuem face lateral arredondada e sua base é um círculo. Os estudantes também devem observar que há uma única figura que possui todas as faces quadradas, que é o cubo. Deve ainda ser informado a elas que as figuras que possuem todas as faces retangulares é um paralelepípedo retângulo, também conhecido como bloco retangular. Por fim, dependendo dos conhecimentos que já possuem, pode ser apresentado o conceito de prisma, observando que ele sempre possui duas faces iguais, paralelas entre si e, consequentemente, suas faces laterais são todas paralelogramos.

É importante que, por meio de observações e questionamentos, os estudantes consigam identificar alguns casos particulares de prismas. Por exemplo, os blocos retangulares, incluindo o cubo, pelo fato de que eles possuem duas faces iguais e paralelas e as demais faces são paralelogramos. Os debates entre eles, por meio de questionamentos propostos pelo professor, envolvendo definições e propriedades, podem favorecer a identificação e a construção de diagramas com inclusão de classes, podendo culminar com a construção de um diagrama como o apresentado na Figura 3.

Figura 3 - Classificação de sólidos geométricos



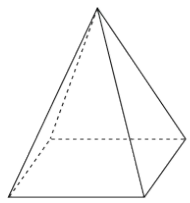
Fonte: acervo dos autores

Diante da diversidade de possibilidades, é fundamental a exploração do dinamismo de movimentos com as figuras por meio de deslocamentos, sobreposições, decomposições e recomposições, bem como idas e vindas entre figuras dos espaços uni, bi e tridimensional (1D, 2D e 3D).

Nesse momento para familiarização eles podem ser convidados a identificar o número de vértices e faces de alguns poliedros mais comuns como o cubo, paralelepípedos, pirâmides e prismas, como no exemplo da Figura 4.

Figura 4: Exemplo de atividade

Agora, seu grupo deve pegar na caixa o poliedro correspondente à figura abaixo.



Observem que, além das faces e das arestas, ele tem vários "bicos" ou pontas. Essas pontas são chamadas de **vértices**.

Façam uma marca com tinta em todos os vértices do poliedro.

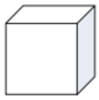
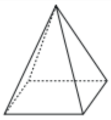
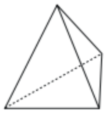
Quantos vértices esse poliedro possui? ______ vértices.

Fonte: GESTAR I – Vol. AAA4 (pág. 46)

Durante o desenvolvimento dessa atividade em sala de aula, se algum aluno encontrar dificuldade em identificar os vértices, uma alternativa é sugerir que ele retome a manipulação de um modelo concreto, que poderia ser tanto construído com cartolina ou o "esqueleto", construído com palitos (ou outro material). Pode-se também pedir a algum aluno para explicar para os colegas como resolveu a atividade proposta, o que fez para identificar os vértices.

Após isso, ou ao mesmo tempo, pode ser apresentada uma caracterização de aresta, que para alguns eram chamadas de "quinas" ou "cantos". A aresta é o segmento comum entre duas faces. Novamente os alunos podem ser convidados a identificar o número de faces para familiarizar-se com esse conceito. Depois disso, podem ser propostas atividades, por exemplo, em que eles preencham um quadro com as figuras em uma coluna, seguida de outras colunas nas quais devem inserir o número de vértices, de faces e de arestas, como pode ser visto na Figura 5.

Figura 5: Exemplo de atividade

FIGURA	FACES	ARESTAS	VÉRTICES
			
			
			
			

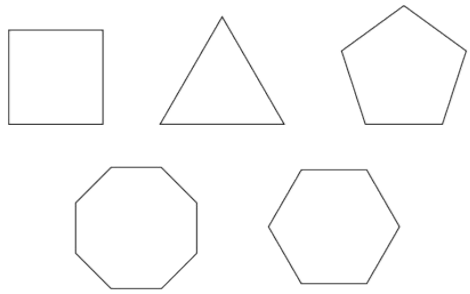
Fonte: GESTAR I – Vol. AAA4 (pág. 48)

Na resolução dessa atividade, alguns alunos podem encontrar dificuldades para identificar elementos de algumas figuras, pelo fato de o desenho "esconder" alguns dos elementos (vértice, face ou aresta). Nesse caso, o professor pode retomar e melhorar a apresentação dos desenhos das figuras, ou ainda pedir para algum aluno que conseguiu resolver a atividade, explicar para os demais como pensou para identificar e contar os elementos. Se perceber muitos estudantes estão com essa dificuldade, pode ser que o mais adequado seja fornecer modelos concretos a eles e pedir que tentem resolver por meio da manipulação das figuras, talvez trabalhando em duplas ou pequenos grupos. Pode-se ainda utilizar o data show e propor questões com outros sólidos e com o auxílio de algum software etc.

Outro tipo de atividade que pode ser proposta aos estudantes dos anos iniciais para ser desenvolvida por meio de manipulação concreta ou com desenhos é relacionada à quantidade de vértices e diagonais de um polígono (Figura 6). São dados alguns polígonos regulares (ângulos internos de mesma medida e lados congruentes) e pede-se que sejam traçadas suas diagonais. Em seguida deve-se preencher um quadro com estes dados além da quantidade de vértices de cada figura.

Figura 6: Exemplo de atividade

- Trace as diagonais dos polígonos abaixo e complete a tabela.



POLÍGONO	NÚMERO DE DIAGONAIS	NÚMERO DE VÉRTICES

Fonte: GESTAR I – Vol. AAA4 (pág. 33)

Nessa atividade é esperado que eles tentem resolver experimentalmente. Pode ser que inicialmente alguns alunos só consigam encontrar o número de diagonais do quadrado e talvez do pentágono. Nesse caso, essa tarefa pode ser deixada para ser explorada por eles em trabalho extraclasse, tanto individual como em duplas ou em pequenos grupos. Dependendo do conhecimento que possuem, eles podem ser desafiados a responder perguntas do tipo: O que é diagonal de um polígono? De cada vértice partem quantas diagonais? Há algum polígono que não possui diagonal? Seria possível encontrar uma estratégia que possa facilitar o cálculo do número de diagonais de um polígono qualquer?

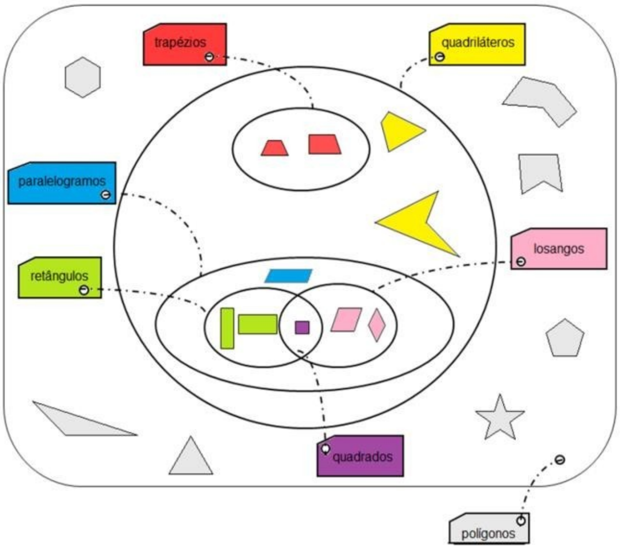
O professor pode preparar um conjunto de figuras “planas” confeccionadas em cartolina, papelão ou EVA, composto de diversos triângulos, retângulos, quadrados, pentágonos, …, bem como círculos, elipses, lúnulas etc. Em seguida, por meio da manipulação dessas figuras, deve propor questões para os estudantes, sobre estas figuras, tais como:

- Quais figuras são polígonos?
- Quais figuras têm três lados, quatro, cinco etc.?
- Dentre os quadriláteros quais têm os lados opostos paralelos?
- Dentre os quadriláteros quais têm os lados com a mesma medida?
- Quais quadriláteros possuem todos os ângulos internos iguais, ou seja, ângulos retos?

- Quais são paralelogramos?
- Quais são losangos? E retângulos? E quadrados?

Ao observar e manipular essas figuras e serem convidados a responder questões desse tipo eles terão que fazer algumas classificações básicas, por exemplo, a classe dos polígonos e dos não polígonos. Em seguida, na classe dos polígonos eles poderão identificar a classe dos que possuem apenas três lados, que são os triângulos, em seguida os que possuem quatro lados, quadriláteros, e assim com os demais. É natural que entre os triângulos há os que possuem todos os lados com a mesma medida, os que possuem dois lados com a mesma medida e os que possuem todos os lados com medidas diferentes. Nos quadriláteros eles poderão identificar os que possuem os lados opostos paralelos, que são os paralelogramos. Isso deve conduzir a observar que dentro do conjunto dos paralelogramos estão os losangos, os retângulos, os quadrados e outros.

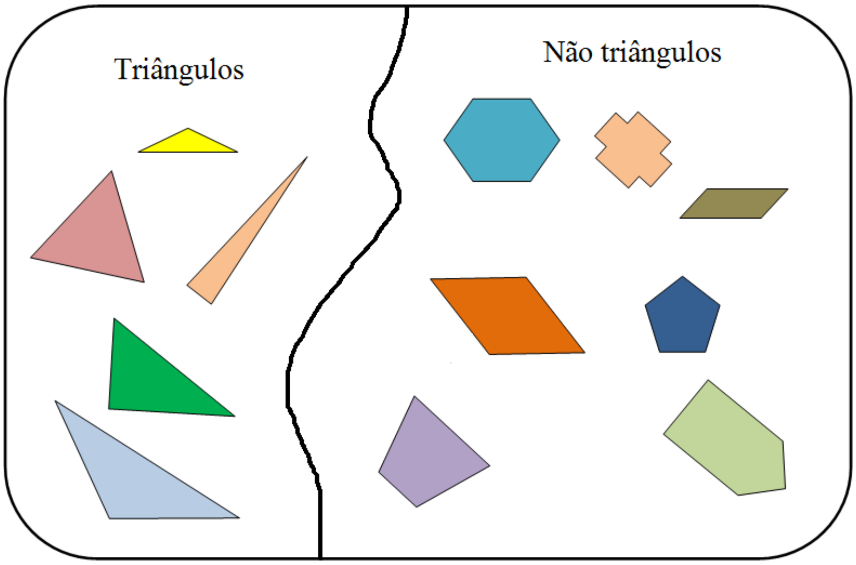
Figura 7: Classificação de polígonos



Fonte: acervo dos autores

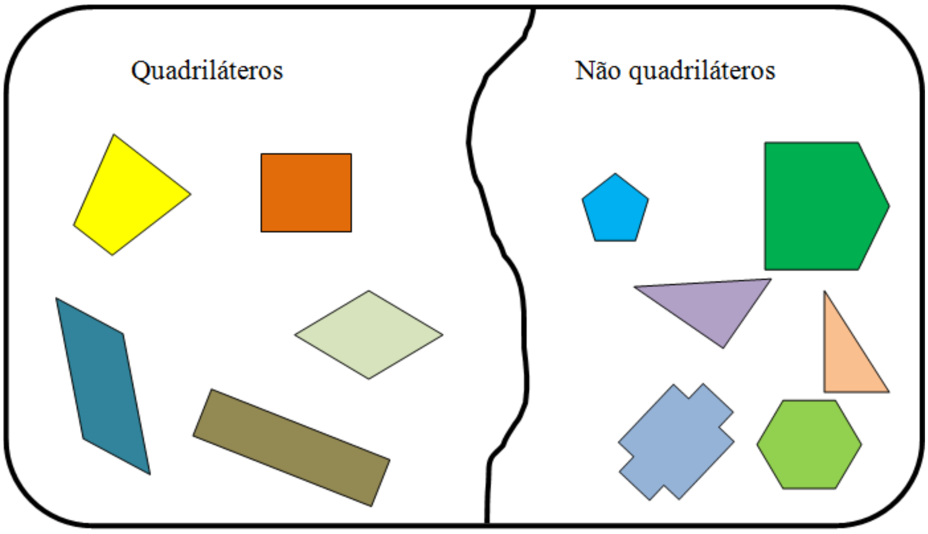
A construção de um diagrama, como o da Figura 7, deve ser feita por pequenos passos, provavelmente a construção de um diagrama com a classificação geral das figuras planas só será compreendida pelos estudantes, nos anos finais do Ensino Fundamental ou mesmo no Ensino Médio. No entanto, como foi observado anteriormente, pode-se explorar subclassificações, inicialmente separar em duas classes, por exemplo, os que são triângulos e os que não são triângulos, os que são quadriláteros e os que não são quadriláteros; depois em três classes, a dos triângulos, a dos quadriláteros e outros polígonos que não são nem triângulos e nem quadriláteros. Vejamos alguns exemplos.

Figura 8: Classificação das figuras em triângulos e não triângulos



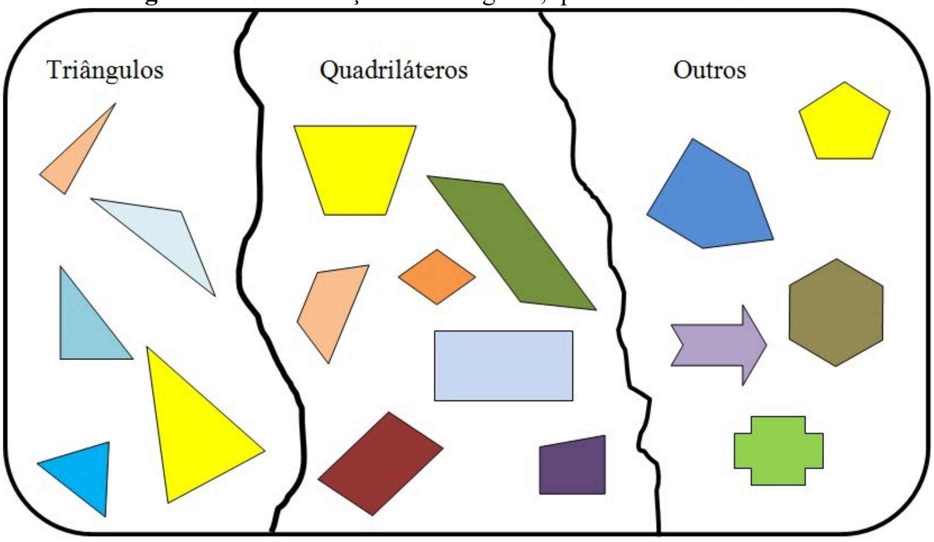
Fonte: acervo dos autores

Figura 9: Classificação em quadriláteros e não quadriláteros



Fonte: acervo dos autores

Figura 10: Classificação em triângulos, quadriláteros e outros



Fonte: acervo dos autores

Essas classificações podem ser ampliadas para outras como: as classes dos triângulos quanto às medidas dos seus lados, ou quanto às medidas dos ângulos, bem como a classificação dos paralelogramos em quadrados, retângulos, losangos e outros e assim ampliar para a classificação dos quadriláteros, incluindo o trapézio e por fim dos polígonos.

O avanço na identificação de classes vai depender da progressão dos conhecimentos sobre conceitos e propriedades que possibilitem a ampliação da identificação e classificação dos polígonos e das figuras geométricas planas.

REFERÊNCIAS

BRASIL, BNCC – **Base Nacional Comum Curricular**, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

BRASIL, **Secretaria de Educação Fundamental, Parâmetros Curriculares Nacionais, Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf

BRASIL, **Programa Gestão da Aprendizagem Escolar – Gestar I**. Matemática. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília, 2008. Disponível em: https://mariotticg.wordpress.com/2016/10/14/gestar-i-matematica/

BRASIL, Secretaria de Educação Básica. **Guia do Programa Nacional dos Livros Didáticos para o Ensino Fundamental - Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 2019. Disponível em: http://pnld.nees.com.br/assets-pnld/guias/Guia_PNLD_2019_matematica.pdf

BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Pacto nacional pela alfabetização na idade certa**: **Apresentação** /, MEC, SEB, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: disponível em:http://www.matematicando.net.br/cadernos-de-alfabetizacao-matematica/

FREITAS, José Luiz, M. de; BURIGATO, Sonia, M. M. da S.. **Introdução à Geometria na Educação Básica**. Oficinas on-line 2021: diálogos sobre propostas em matemática. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=hbTPexJo7kI&list=PLJWAm9SPEsqvziY0Q5gY9xuI9TfJy_bI3&index=6

BITTAR, M. e FREITAS, J.L.M. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental** – 2ª ed. Campo Grande-MS: Ed. da UFMS, 2005.

SÃO PAULO (Estado). **Por um ensino melhor: Treinamento de professores de 1o. Grau por multimeios, módulo 5 – Geometria**; coordenação de Gilda de Lima. São Paulo, MEC/SE/CENP/DRHU/FPA, 1978.

CAPÍTULO 6

UM DIVIDIDO POR QUATRO NÃO DÁ...

"Se não dá, como a gente divide?"

Oficina 06: Um dividido por quatro não dá... - YouTube

Autores:
Marilena Bittar[1] - UFMS
Susilene Garcia Oliveira[2] - UFMS

Público-alvo: Destinado a estudantes do terceiro ao quinto ano do Ensino Fundamental

Objetivos: Discutir o significado de divisão e a atribuição de sentido ao algoritmo.

Habilidades da BNCC:

- *(F05MA08)* Resolver e elaborar problemas de multiplicação e divisão com números naturais e com números racionais cuja representação decimal é finita (com multiplicador natural e divisor natural e diferente de zero), utilizando estratégias diversas, como cálculo por estimativa, cálculo mental e algoritmos.

Materiais a serem utilizados:

- **Moedas de 1 real e de 50, 25 e 10 centavos** – em geral este material vem na parte dos livros didáticos que pode ser recortada. Caso contrário, pode ser confeccionado em folhas de sulfite e recortados ou impressos de material da internet (em anexo um modelo).
- **Material dourado** que pode ser em madeira, mas, caso este não esteja disponível na escola, é possível também trabalhar com recortes em papel deste material. A quantidade de material a ser produzido para a realização das atividades depende de como estas serão desenvolvidas: em grupo ou individual.

Considerações iniciais

O algoritmo da divisão, para adultos e, principalmente, para professores licenciados, parece não colocar dúvidas: sabemos dividir um número *a* por um número *b* diferente de zero. Conhecemos as regras (o algoritmo) e efetuamos a divisão sem dificuldades, como a divisão de 1 por 4, representada a seguir:

[1] Professora da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS). *e-mail:marilenabittar@gmail.com;* ORCID: *0000-0001-9989-7871*
[2] Professora da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul/ Campus Aquidauana (UFMS). *e-mail: susilene.oliveira@ufms.br*; ORCID: *0000-0003-1020-2493*

Figura 1: divisão de 1 por 4

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \underline{-8} & 0,25 \\ 20 & \\ \underline{-20} & \\ 0 & \end{array}$$

Fonte: acervo das autoras

Ao efetuar esta divisão um discurso provável que fazemos é o seguinte:

> *Um dividido por 4, não dá. Acrescentamos zero à direita de 1, que se transforma em 10, e ao mesmo tempo colocamos um zero e a vírgula no quociente da divisão. Agora dividimos dez por 4, cujo quociente é dois e resto também é dois. Para continuar a divisão, acrescentamos um zero à direita do 2 e então dividimos vinte por 4, obtendo, assim, 5 e resto zero. Fim da divisão.*

Em geral esta é a explicação dada aos estudantes quando perguntam sobre o funcionamento do algoritmo. Porém, imaginemos uma criança que tenha a seguinte dúvida:

"*Por que quando tentamos dividir 1 por 4 e não dava, acrescentamos zero ao 1 e um zero acompanhado de uma vírgula ao quociente, e depois, quando dividimos 2 por 4, que também não dava, a gente acrescentou zero ao 2, que virou 20, mas não colocou outro zero no quociente?*"

E não somente crianças têm dúvidas com relação a este procedimento. De fato, em um processo seletivo do qual participavam professores de matemática, foi proposta esta atividade com esta questão e a grande maioria não conseguiu explicar o procedimento realizado. Então não é uma dificuldade apenas das crianças ou de quem fez Pedagogia ou de professores em formação ou de professores que ensinam matemática? Não, não é. E sempre que propomos esta discussão com professores, este tipo de dúvida, entre outras, aparece. Por isso propusemos esta Oficina: para discutir o algoritmo de forma a favorecer a compreensão de professores e futuros professores, pois, consequentemente, os estudantes serão beneficiados.

É este o objetivo deste texto: apresentar algumas questões relativas ao processo de divisão, buscando contribuir com o processo de aprendizagem de questões relativas à divisão.

CARACTERIZAÇÃO DA PROPOSTA

As atividades e discussões propostas nesta oficina tiveram por objetivo refletir sobre ideias relacionadas ao conceito de divisão, especialmente, o algoritmo da divisão quando esta envolve números decimais. Para a atribuição de significados é fundamental o trabalho baseado no sistema de numeração decimal, o que sempre traz muitas dificuldades para a compreensão dos algoritmos quando não bem compreendido. Recomendamos caso seja necessário, assistir a oficina: Nunca 4: Vamos jogar? Construindo significado do SND[3], e ler o texto publicado também neste e-book.

Divisão significa, sempre, dividir em partes iguais?

Para começar nossa reflexão, vamos pensar um pouco sobre o que significa divisão em contexto não-matemático, fora da escola. Será que divisão significa sempre dividir em partes iguais, mesmo em situações do cotidiano?

> Usamos a palavra divisão para dizer, por exemplo, que os seres humanos se dividem em homens e mulheres, porém sabemos perfeitamente que o número de homens não é igual ao número de mulheres. Assim, dividir pode significar, na linguagem comum, classificar, separar, marcar limites e repartir em partes iguais (o que nem sempre é possível). Na matemática, essa operação traz, não somente essa última ideia como também a ideia de medir. (Bittar e Freitas, 2005, p.74)

De fato, nem sempre "divisão" significa dividir em partes iguais, como é o caso da operação de divisão. Este é um fato importante do qual nós, professores, precisamos estar cientes quando trabalhamos com os estudantes.

Grandezas discretas e contínuas

Para começar a explorar a ideia de divisão, é importante relembrar o conceito de grandezas discretas e contínuas. Discretas são as grandezas que podem ser colocadas em correspondência biunívoca (correspondência um a um) com os números naturais. Por exemplo, bolas, canudos e cadernos. Contínuas são aquelas grandezas em que não é possível estabelecer correspondência biunívoca com os números naturais. Por exemplo, o tempo e líquidos.

Se pensarmos em bonecas ou barras de chocolates, ambas são grandezas discretas. Podemos dividir, igualmente, cinco bonecas entre duas crianças deixando resto zero? A resposta é não, pois não tem sentido quebrar uma boneca ao meio. Entretanto, podemos dividir igualmente cinco barras de chocolate entre duas crianças deixando resto igual a zero. Neste caso cada criança receberá duas barras e meia de chocolate. Neste exemplo saímos do conjunto dos números naturais, o que não é o

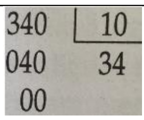
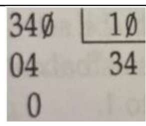
[3] Oficina 03 - Nunca 4: vamos jogar? - YouTube

caso quando se trabalha com crianças de cerca de 8 anos de idade. Porém, trazemos esta discussão para contribuir com a reflexão sobre divisão de quantidades discretas e contínuas.

Técnicas ensinadas, "aprendidas" e usadas sem reflexão

Muitas vezes os estudantes "aprendem" técnicas ensinadas como regras a respeitar e repetir o que os leva a usar tais técnicas sem refletir sobre o que estão fazendo. Para ilustrar esta argumentação, vamos propor um exercício: imaginemos que foi proposto um problema aos estudantes, cuja solução demanda a divisão de 310 por 10. Vamos, ainda, supor que foram encontradas, entre outras, as duas estratégias a seguir (figura 2) mobilizadas por estudantes diferentes.

Figura 2: Divisão de 310 por 10

Janete	Pedro
 Janete divide, inicialmente, 34 por 10, obtendo 3 como quociente e resto 4. Abaixa o zero e tem 40. Dividindo 40 por 10, obtém quociente 4 e resto zero. Resultado da divisão: 34.	 Pedro inicia cancelando um zero do dividendo e um do divisor, obtendo 34 dividido por 1. Divide 3 por 1, obtém quociente 3 e resto 0. Abaixa o quatro e divide 4 por 1 obtendo quociente 4 e resto zero. Resultado da divisão: 34.

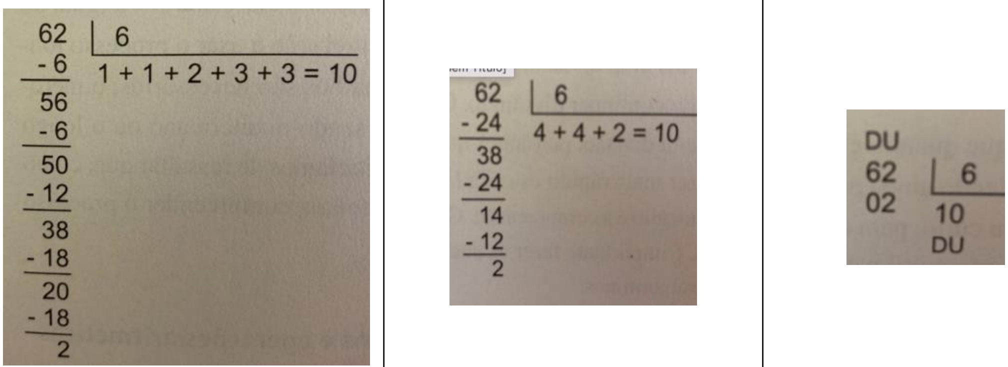
Fonte: acervo das autoras

Tanto Janete quanto Pedro chegaram ao resultado correto, porém, vamos refletir um pouco sobre cada estratégia. Janete parece não conhecer ainda a regra "ao "cortar zeros" do dividendo e divisor o resultado da divisão permanece o mesmo", então ela usa o algoritmo e faz a divisão seguindo a técnica aprendida. Pedro, por sua vez, demonstra conhecer a regra, mas ao cancelar o zero de dividendo e divisor, chega a 34 dividido por 1 e usa o algoritmo... para descobrir que o resultado é igual a 34. A estratégia adotada por Pedro é um exemplo de uso do algoritmo de modo mecânico. A estratégia adotada por Janete pode ser mobilizada justamente para levar os estudantes a conjecturarem a regra "cortar zeros do dividendo e do divisor não altera o resultado da divisão". Porém, como não é objeto deste texto não entraremos em mais detalhes sobre este tipo de trabalho.

Importância do trabalho constante com o significado do SND

Para a apresentação e sistematização do algoritmo da divisão sugerimos partir da experiência da criança, usar material concreto para, por exemplo, representar a divisão de um pacote com 10 balas entre 2 crianças. Como elas fazem esta conta? De modo geral, acreditamos que elas distribuem uma bala para cada uma, observam que ainda restam balas, repetem a distribuição sucessivamente até que não haja mais balas no pacote ou que não seja mais possível dar uma bala para cada criança. Após algumas experiências deste tipo, começamos a passar para a formalização justificando que precisamos encontrar alguma forma de fazer esta conta sem precisar ter os materiais, pois isso pode ficar pesado. Por exemplo, para efetuar uma divisão de 62 por 6, este procedimento começa a ficar cansativo. Então, pode-se tentar fazer este procedimento com material, o dourado, por exemplo, pegando 62 cubinhos para dividir entre 6 estudantes. Seguindo o raciocínio anterior, será dado um cubinho para cada criança e, como restam cubinhos, estes serão novamente distribuídos e assim por diante até não ser mais possível dar um cubinho para cada criança. Neste processo, após as primeiras distribuições pode-se estimular as crianças perguntando se não é possível dar dois cubinhos de uma vez para cada um ou três cubinhos. Observando quantos cubinhos ainda restam, provavelmente dirão que sim. Este procedimento manual é, em seguida, refeito e cada etapa deve ser escrita no quadro. Na figura 3 representamos este procedimento iniciando com o processo mais longo, seguido de um processo mais rápido e finalizando com o algoritmo da divisão.

Figura 3: Alguns processos para dividir



Fonte: Bittar e Freitas, p. 79.

Como dividir 1 real entre 4 crianças?

Esta é uma situação com a qual muitas crianças, mesmo pequenas, estão familiarizadas. Por isso, é uma boa situação para trabalhar a ideia de troca para poder efetuar a divisão. Para dividir um real entre quatro crianças, é preciso trocar esta moeda. Algumas possibilidades para esta troca estão representadas na figura 4. No primeiro caso troca-se um real por quatro moedas de vinte e cinco centavos, o que vai dar uma moeda de vinte e cinco centavos para cada criança. No segundo caso, troca-se a moeda de um real por dez moedas de dez centavos (o que se assemelha ao que fazemos no SND). Neste caso, cada criança recebe duas moedas de dez centavos e sobram duas moedas de dez centavos. Para continuar a distribuir, basta trocar estas duas moedas por quatro moedas de cinco centavos, dando uma moeda de cinco centavos para cada criança, o que significa que cada um recebera vinte e cinco centavos.

Figura 4: Divisão usando o sistema monetário

Fonte: acervo das autoras

Esta é uma forma de realizar a divisão de 1 por 4 que acreditamos que seja menos difícil de a criança entender. Além disso, esta situação pode ser mobilizada para ensinar o algoritmo da divisão de 1 por 4. Os estudantes “verão” os décimos, centésimos, ...

Sistema de numeração decimal

É importante observar que as mesmas regras válidas para o sistema de numeração decimal quando consideramos apenas números naturais, valem para números decimais. Assim sendo, estes também têm valor posicional e a base é dez, inclusive por se tratar do mesmo sistema de numeração. Cada número em uma casa vale dez vezes o número imediatamente à sua esquerda e a décima parte do número à sua direita, o que é facilitado pelo uso do Quadro Valor de Lugar (QVL). Para auxiliar este trabalho, é importante realizar, simultaneamente, o trabalho com o material dourado (ou outro) e no QVL, pois este trabalho contribui com a passagem do concreto ao abstrato. Assim, por exemplo, é importante representar 25 centésimos, resultado da divisão de 1 por 4, no QVL (Figura 4)

Figura 5: QVL para a parte decimal

D *dezena*	Um dividido por quatro não dá... *unidade*	d *décimo*	c *centésimo*	m *milésimo*
	0	2	5	

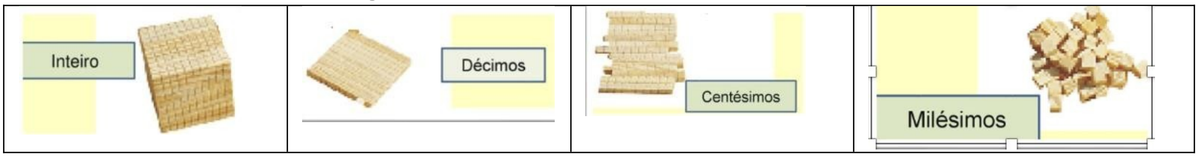
Fonte: acervo das autoras

Um dividido por quatro não dá…

Agora estamos prontos para pensar na divisão de 1 por 4 e tentar compreender todas a etapas do seu desenvolvimento. Sabemos que a falta de controle sobre o algoritmo provoca uma grande dúvida nos cálculos intermediários, nos estudantes, o que acaba gerando erros. Vamos, então, pensar um pouco sobre como podemos trabalhar esta divisão com os estudantes.

Queremos dividir uma unidade por 4. Vamos usar, como apoio, o material dourado e considerar o cubo grande como sendo a unidade; consequentemente, as placas são os décimos, as barras são os centésimos e os cubos pequenos representam os milésimos.

Figura 6: O material Dourado e os decimais



Fonte: acervo das autoras

Assim, para dividir uma unidade (ou um cubo) entre 4 crianças será preciso efetuar uma troca, desmembrando o cubo em dez placas, pois uma unidade corresponde a dez décimos. Para descrever, no quadro, o que foi realizado até o momento é preciso indicar que agora temos dez décimos, por isso é acrescentado o zero à direita do número 1. E para indicar que dez décimos divididos por 2 resulta em dois décimos, é preciso colocar zero seguido de vírgula no quociente, pois 0,2 significa exatamente dois décimos. Feito este cálculo restam dois décimos (duas placas) que não dá para dividir por 4, então é efetuada novamente a troca: cada placa (um décimo) é trocada por dez barrinhas, que representam centésimos. E por que não é necessário acrescentar zero ao quociente? Não acrescentamos zero ao quociente porque estamos na casa dos centésimos e dividindo 20 centésimos por 4, obtém-se 5 centésimos e resto zero, conforme a representação:

Figura 7: Divisão de 1 por 4

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \cline{2-2} \underline{-8} & 0,25 \\ 20 & \\ \underline{-20} & \\ 0 & \end{array}$$

Fonte: acervo das autoras

Sugerimos realizar vários cálculos dessa forma, com o apoio do material concreto, para que a criança consiga, efetivamente, atribuir significado aos cálculos realizados, contribuindo para que o algoritmo não seja uma técnica sem sentido, mobilizada de forma mecânica.

Algumas situações para pensar um pouco mais...

Vamos propor duas situações para discutir um pouco mais sobre o algoritmo da divisão e a atribuição de significados a esta ideia.

1. Um padeiro coloca os pães no forno em tabuleiros de 24 pães cada um. Hoje ele fez 293 pães. Quantos tabuleiros precisará para colocá-los todos no forno?

Um procedimento usualmente empregado pelos estudantes é dividir 293 por 24 (figura 8) obtendo quociente 12 e resto 5 e fornecendo como resposta ao problema 12 tabuleiros, o que é incorreto, pois são necessários 13 tabuleiros para assar todos os 293 pães. Assim, apesar de o algoritmo ser aplicado corretamente, a resposta ao problema não é correta, pois é preciso refletir sobre o resultado e o problema proposto para encontrar a resposta. Com efeito, uma resolução mecânica do problema, correta do ponto de vista do algoritmo, não é suficiente para fornecer a resposta ao problema proposto.

Figura 8: Divisão

$$\begin{array}{r|l} 293 & 24 \\ \cline{2-2} -53 & 12 \\ \hline 5 & \end{array}$$

Fonte: acervo das autoras

2. Um fio de 8,70m de comprimento foi cortado em 6 pedaços de mesmo comprimento. Qual é esse comprimento?

Para resolver este problema é preciso dividir 8,70 por 6. Como efetuar esta divisão "com vírgula"? Não podemos iniciar a divisão sem igualar a quantidade de casas decimais, certo? Mas porque precisamos fazer isso? De onde surge esta regra? É preciso voltar ao sistema de numeração decimal. Em classe sugerimos usar materiais, como o dourado, para trabalhar com os estudantes, por exemplo, como indicado na figura 9.

Figura 9: O algoritmo

$\begin{array}{r\|l} 8,70 & 6 \\ \cline{2-2} \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 8,70 & 6,00 \\ \cline{2-2} \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} 8\cancel{,}70 & 6\cancel{,}00 \\ \cline{2-2} -600 & 1,45 \\ \hline 2700 & \\ -2400 & \\ \hline 3000 & \\ -3000 & \\ \hline 0 & \end{array}$

Fonte: acervo das autoras

Uma oficina, várias possibilidades

Neste texto tratamos algumas ideias relacionadas ao algoritmo da divisão, ideias estas que podem contribuir com o trabalho docente. Buscamos apresentar atividades que podem ser realizadas com os estudantes desde os primeiros anos do ensino fundamental, tendo sempre em mente a importância de se trabalhar também o sistema de numeração decimal e seus significados, em particular o agrupamento de dez em dez.

As atividades aqui apresentadas podem ser trabalhadas tanto no estudo introdutório da divisão como em momentos que sejam necessários retomar as ideias trabalhadas.

Algumas ideias abordadas na Oficina on-line não foram discutidas neste texto, como as ideias de divisão exata e não exata, relação entre divisão e fração. Porém, quem se interessar poderá assistir a oficina que tem acesso livre e cujo endereço encontra-se nas referências.

REFERÊNCIAS

BITTAR, M., OLIVEIRA, S. **Um dividido por quatro não dá...** Oficinas on-line 2021: diálogos sobre propostas em matemática. Disponível em https://grupoddmat.pro.br/index.php/oficina-on-line-v/

BITTAR, M., FREITAS, J.L.M. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. Campo Grande/MS: Editora UFMS, 2005

SAIZ, I. Dividir com dificuldade ou a dificuldade de dividir. In: PARRA, C. at ali (org.) **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas.** Porto Alegre: Artes médicas, 1996.

ANEXO: MOEDAS BRASILEIRAS

https://ledsonaldrovandidotcom.files.wordpress.com/2022/10/cedulas-de-dinheiro-de- brincadeira.pdf

CAPÍTULO 7

COMPRIMENTOS, ÁREAS, ...
QUAIS MEDIDAS EXPLORAR EM SALA DE AULA?

Oficina 07: Comprimentos, áreas, ... Quais medidas explorar em sala de aula? - YouTube

Autores:
Cleide Ribeiro Mota Arinos[1] - UFMS
José Luiz Magalhães de Freitas[2] - UFMS

Público-alvo: Destinado a estudantes do quarto ao nono ano do Ensino Fundamental

Objetivo: Compreender o conceito de área e de perímetro por meio de atividades mobilizando materiais manipuláveis.

Habilidades da BNCC:

- *(EF03MA21)* Comparar, visualmente ou por superposição, áreas de faces de objetos, de figuras planas ou de desenhos.
- *(EF04MA21)* Medir, comparar e estimar área de figuras planas desenhadas em malha quadriculada, pela contagem dos quadradinhos ou de metades de quadradinho, reconhecendo que duas figuras com formatos diferentes podem ter a mesma medida de área.
- *(EF05MA19)* Resolver e elaborar problemas envolvendo medidas das grandezas comprimento, área, massa, tempo, temperatura e capacidade, recorrendo a transformações entre as unidades mais usuais em contextos socioculturais.
- *(EF05MA20)* Concluir, por meio de investigações, que figuras de perímetros iguais podem ter áreas diferentes e que, também, figuras que têm a mesma área podem ter perímetros diferentes.
- *(EF06MA24)* Resolver e elaborar problemas que envolvam as grandezas comprimento, massa, tempo, temperatura, área (triângulos e retângulos), capacidade e volume (sólidos formados por blocos retangulares), sem uso de fórmulas, inseridos, sempre que possível, em contextos oriundos de situações reais e/ou relacionadas às outras áreas do conhecimento.
- *(EF06MA29)* Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.

---

[1]Professora da prefeitura Municipal de Campo Grande (SEMED-MS); *e-mail:* cleide.arinos@ufms.br, ORCID: 0000-0001-9510-5590

[2] Professor da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS); *e-mail: joseluizufms2@gmail.com*; ORCID: 0000-0001-5536-837X

- Sólidos geométricos diversos (de madeira, de acrílico, ou de outro material disponível na escola) para exemplificar os diversos tipos de sólidos e explorar suas planificações
- Computador com internet para o acesso a softwares, em particular ao Geoplano Virtual (aplicativo)[3], e outros recursos digitais
- Embalagens que representam sólidos geométricos como paralelepípedo ou bloco retangular (caixa de creme dental), prisma triangular, prisma pentagonal, prisma hexagonal, prisma octogonal, cubo, pirâmide triangular, cilindro, entre outros
- Material dourado
- Tangram
- Papel pardo

Algumas escolhas didáticas:

- As embalagens que representam sólidos geométricos nos permitem observar e identificar vários tipos de figuras geométricas ;
- A geometria plana pode ser desenvolvida a partir de sólidos geométricos, observando suas faces (superfícies bidimensionais) e as arestas (unidimensional);
- Nos polígonos obtidos ao decompor um sólido ($3D \rightarrow 2D \rightarrow 1D$) podemos calcular sua área que corresponde a um número e uma grandeza utilizados para medir a superfície de um polígono. E, a soma das medidas dos seus lados corresponde ao seu perímetro ;
- As explorações com diferentes materiais manipuláveis podem contribuir para estabelecer algumas relações entre áreas e perímetros de figuras planas;
- Essas observações e sugestões de materiais de manipulação são direcionadas ao professor, visando contribuir com seu trabalho de identificação e classificação de polígonos e algumas das suas propriedades.

Considerações iniciais

Esta proposta didática sobre área e perímetro é fruto de uma das oficinas ministradas no ano de 2021 para professores do Ensino Fundamental, realizadas pelo Grupo de Estudos em Didática da Matemática – DDMat. Este estudo considerou algumas pesquisas sobre área e perímetro, a pesquisa de mestrado de Arinos (2018) e a pesquisa de doutorado em andamento de Cleide Ribeiro Mota Arinos, orientada por José Luiz Magalhães de Freitas.

Esses estudos buscaram contribuir para a compreensão do conceito de área e de perímetro, para estabelecer algumas relações e diferenças e, para delinearmos possibilidades de atividades que podem ser trabalhadas em sala de aula visando a superação de algumas dificuldades decorrentes desses conteúdos.

[3] https://toytheater.com/geoboard-shape

A geometria

A geometria está presente no nosso cotidiano, nos movimentos, no reconhecimento de objetos do espaço, na localização de pessoas e objetos do espaço, no estabelecimento de pontos de referência, entre outros. Além disso, a geometria abrange o estudo de diversos conceitos e procedimentos que servem para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento (Brasil, 2018). Sendo assim, neste texto trazemos alguns recursos didáticos e materiais, como o *tangram* e um aplicativo de geometria dinâmica, como possibilidades de articular o físico (concreto) com o abstrato, despertando o interesse dos estudantes.

Nas atividades desenvolvidas buscamos proporcionar um ambiente de reflexão de modo a contribuir com a sistematização e a formalização do conceito de área e de perímetro, pois, um dos objetivos do ensino e da aprendizagem da geometria no Ensino Fundamental é a passagem do físico (concreto) para o abstrato (Bellemain; Lima, 2010). A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) preconiza que o desenvolvimento do pensamento geométrico nos estudantes "[...] é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes" (Brasil, 2018, p. 271).

Área e perímetro

Neste texto trabalhamos apenas com área de superfícies planas, mais especificamente de polígonos[4]. São exemplos de polígonos: triângulos, quadrados, pentágonos, hexágonos etc., no entanto essas denominações não devem ser memorizadas, elas devem ser aprendidas na prática. Os estudantes devem ir aos poucos incorporando essas palavras em sua fala de modo autônomo e espontâneo.

Bellemain e Lima (2010, p. 159) lembram que "Em geometria, utiliza-se a mesma palavra 'polígono' tanto para denominar a figura constituída apenas por seus lados, quanto para designar a reunião desses lados com a região interior por eles determinada no plano". O perímetro se refere à medida do comprimento total de seus lados. Dito de outro modo, o perímetro de um polígono é a soma das medidas dos lados desse polígono. Para determinar este comprimento o espaço associado à figura é o unidimensional, pois se trata de uma medida linear. A unidade padrão de comprimento é o metro, com seus múltiplos e submúltiplos. Cada superfície plana possui um número correspondente à sua medida, que denominamos área. Para determinar comprimentos e áreas é necessário comparar grandezas de uma mesma natureza (Bittar; Freitas, 2005). Geralmente "a unidade de área é um

[4] Estamos considerando a seguinte definição de polígono: "Uma linha poligonal simples e fechada juntamente com a região do plano interior a essa linha". (Bellemain; Lima, 2010, p. 161). (Polígono: Palavra de origem grega/poli: muitos e gonos: ângulos). A classificação mais comum dos polígonos é a que os separa pelo número de lados (triângulo (três lados), quadrilátero (quatro lados), ...)." (Bellemain; Lima, 2010, p. 159). Polígonos são superfícies planas bidimensionais, pois possuem duas dimensões, largura e comprimento.

quadrado e a área da superfície é um número que corresponde à quantidade de vezes que esse quadrado “cabe” na superfície” (Bittar; Freitas, 2005, p. 128). Dito de outro modo, a medida de uma superfície plana é a sua área. Para medir superfícies utilizamos como unidade de medida uma outra superfície considerada como padrão. Normalmente, a unidade padrão de área é o metro quadrado (m^2), com seus múltiplos e submúltiplos. Porém, outras unidades de medida podem ser utilizadas, por exemplo, se for medir a superfície de um terreno de uma cidade é conveniente usar o m^2, se for a superfície de um estado brasileiro o km^2 e a de uma folha de papel o cm^2.

Possibilidades de atividades

O professor pode iniciar o conteúdo explorando as medidas que podem ser aferidas na sala de aula, como: comprimentos, alturas, distâncias e larguras. Os estudantes também podem manusear embalagens, explorando as regiões tridimensionais, bidimensionais e unidimensionais de um objeto. Essas noções contribuem para identificar o espaço associado à figura para o cálculo de volume[5], da área e fo perímetro.

Primeira Situação:

Admitindo que a peça quadrada do tangram[6] possui 2 unidades de área $(2ua)$, *determine a área das outras peças.*

A partir da área do quadrado que possui $2ua$ os estudantes poderão calcular as medidas das áreas das outras peças. Utilizamos como unidade de medida para área "ua".

Diferentes estratégias de resolução podem ser exploradas pelo professor em sala de aula, os estudantes podem sobrepor as figuras do *tangram* comparando suas superfícies. Podem também usar procedimentos de composição e decomposição de figuras para calcular as outras medidas de áreas. No procedimento de sobrepor as peças do *tangram* o estudante está usando a ideia de “caber” e a partir da medida da área do quadrado o estudante está comparando grandezas de uma mesma natureza. Esse raciocínio contribui para a aprendizagem do conceito de área.

O triângulo pequeno (verificando que ele é metade do quadrado), configurar os dois triângulos pequenos no quadrado ou decompor o quadrado em dois triângulos pequenos pode-se verificar que o triângulo pequeno possui $1ua$. E, em seguida, que o paralelogramo e o triângulo médio possuem $2ua$ cada um e, o triângulo grande $4ua$.

---

[5] Não iremos abordar volume neste texto.

[6] Link para construir o tangram com dobraduras: https://www.youtube.com/watch?v=dEbGEBwPNAs, Acesso em outubro de 2023.

O professor pode indagar os estudantes se existem peças do *tangram* que possuem a mesma medida de área. O quadrado, o triângulo médio e o paralelogramo possuem a mesma medida de área. Essa habilidade é importante, pois muitos estudantes não associam que figuras diferentes podem ter áreas iguais[7]. A partir dessa situação o professor pode solicitar que os estudantes construam, com as peças do $tangram$, figuras com outras medidas de áreas, como por exemplo: $3ua$, $4ua$, $5ua$, $9ua$. Pode-se ampliar gradativamente essa atividade com outras do tipo: Construa paralelogramos diferentes com $4ua$. É possível construir dois quadrados de modo que a medida da área de um seja o dobro da medida da área do outro? É possível construir um quadrado, um triângulo e um paralelogramo com $8ua$ cada um?

Além do conceito de área é possível explorar no *tangram* o conceito de perímetro. O professor pode questionar se é possível determinar o perímetro de cada peça. Quais procedimentos? Os estudantes podem contornar as peças com barbantes e comparar os comprimentos obtidos; outra estratégia possível de mobilizar é comparar os lados das peças por justaposição. Nessas explorações o professor pode indagar: Existem peças que possuem o mesmo perímetro? Existem peças com o mesmo perímetro e mesma área? Esses encaminhamentos contribuem para perceber que existem figuras com a mesma área e perímetros diferentes. Nesse caminhar, outras situações podem ser trabalhadas em sala de aula, tais como: Existem figuras com a mesma área e mesmo perímetro? Existem figuras com o mesmo perímetro e áreas diferentes?

Segunda Situação:

Admitindo que a peça quadrada do tangram[8] tem como medida de lado 1cm, determine a medida da área das outras peças.

A partir da medida do lado do quadrado (unidimensional) o estudante precisa identificar que a medida da superfície do quadrado possui $1\ cm^2$de área (bidimensional). Assim, a peça quadrada do *tangram* possui $1\ cm^2$ de medida de área. A medida do lado contribui para o estudante perceber que a medida da área de cada peça do *tangram* está associada a um par (número e unidade de medida). O professor pode comentar com os estudantes que a unidade de medida é importante no cotidiano. Por exemplo para construir uma casa é necessário saber a quantidade de pisos ou azulejos necessários, para isso é preciso conhecer a medida da superfície a ser revestida. Para saber quantos metros de fio ou de rodapé serão necessários é preciso conhecer o comprimento e nesse caso o perímetro. Para saber a quantidade de pedras ou areia necessários para a construção é necessário ter conhecimento de volume.

[7] Reconhecer que duas figuras diferentes podem ter a mesma área é uma das habilidades prevista na BNCC (Brasil, 2018).

Para medir a largura e o comprimento de uma mesa poderiam ser utilizados: palmos, régua, pedaço de barbante, entre outros. Para medir a medida da superfície da mesa poderia ser utilizado: uma borracha, um caderno etc., de modo a verificar quantas unidades de uma mesma grandeza seriam necessárias para recobrir toda a superfície.

Nessa situação os estudantes podem mobilizar procedimentos de superposição, decomposição ou reconfiguração e, concluir que a peça quadrada possui $1\ cm^2$ de medida de área. Assim, pela atividade anterior podem concluir que o triângulo médio e o paralelogramo possuem essa mesma medida de área; o triângulo pequeno ^{1} cm^2 ou $0{,}5\ cm^2$; e, que o triângulo grande possui $2\ cm^2$ de medida de área. O professor pode questionar: Qual peça possui maior medida de área? E qual possui o maior perímetro? Existem peças com a mesma medida de área? Existem peças com o mesmo perímetro? A partir dessa situação se pode indagar quando utilizamos cm ou cm^2, diferenciando-as. Nesse caminhar, é importante observar o que mudou da primeira situação para a segunda situação.

Ao constatarem que o quadrado, o triângulo médio e o paralelogramo possuem mesma área devem concluir que existem figuras diferentes que possuem a mesma medida de área. Isso contribui para perceber, por exemplo, que não é somente um quadrado com $1\ m$ de lado que possui $1\ m^2$ de medida de área.

Essa segunda situação permite explorar a seguinte atividade:

Com quatro peças do tangram, considerando que a peça quadrada tem 1 cm de medida de lado, construa as figuras abaixo e calcule sua área.

a) Um paralelogramo.
b) Um triângulo.
c) Um quadrado.

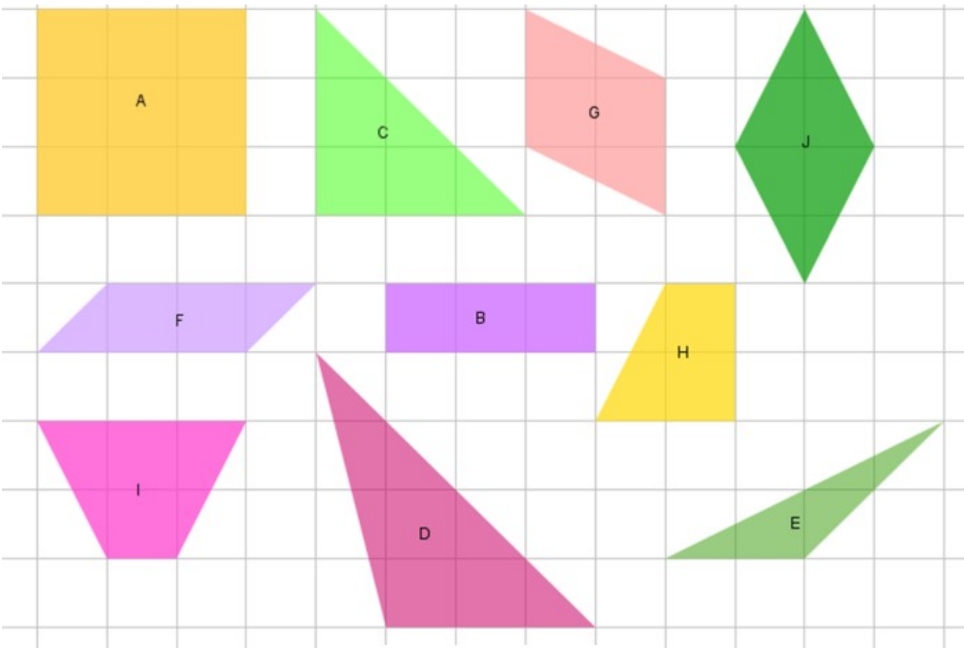
Como a finalidade é ir retomando e ampliando o conceito de área e de perímetro, na próxima atividade buscamos estimular o cálculo de áreas de figuras planas sem o uso de fórmulas.

Terceira Situação:

Calcule a área dos triângulos e quadriláteros abaixo de dois modos diferentes, um fazendo uso de fórmulas e outro sem utilizá-las.

[8] Link de um aplicativo on line: https://toytheater.com/tangram/ acesso em outubro de 2023.

Figura 1: Área de triângulos e quadriláteros



Fonte: Arinos (2018, p. 194)

Essa atividade possui processos mais elaborados de abstração e de reflexão, e isso contribui para a ampliação da autonomia intelectual do estudante. O estudante pode validar sua resposta ao obter o mesmo resultado calculando a área de modos diferentes, sem o uso de fórmulas e com o uso de fórmulas.

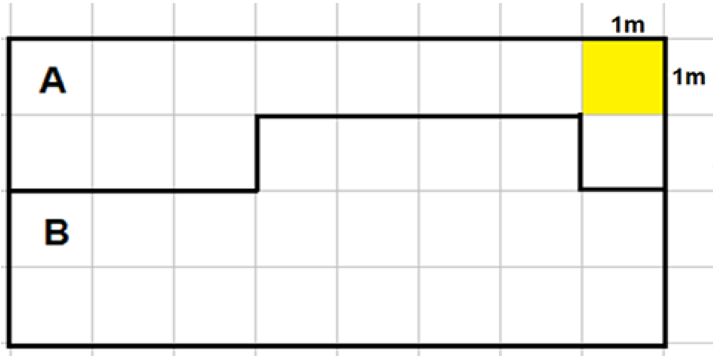
A área pode ser calculada mobilizando as seguintes estratégias: composição, decomposição, reconfiguração e pode ser calculada por fora, enquadrando a figura inicial em outra que a contenha e que permita o cálculo de sua área. Neste caso se procede à retirada da(s) área(s) da(s) subfigura(s) que excede(m) a área da figura inicial (obtidas por procedimentos de decomposição), restando a área da figura solicitada.

Nessa atividade os estudantes podem compreender a razão de ser das fórmulas algébricas para as áreas dos triângulos e quadriláteros. Os procedimentos de decomposição para calcular a área permitem que os estudantes decomponham as áreas de outros polígonos em áreas que saibam calcular, além de que essa atividade também colabora no raciocínio que todo polígono pode ser decomposto em triângulos.

Quarta Situação:

A figura mostra a planta baixa de um terreno. *A figura B* representa a parte calçada e a *figura A* a área verde.

Figura 2: Planta baixa de um quintal



Fonte: acervo dos autores

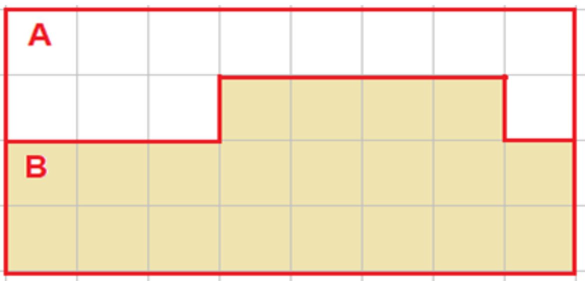
Quanto mede o contorno desse terreno? Qual a medida da área das figuras A e B?[9]

Observe que esta atividade mobiliza o conceito de área e de perímetro, porém sem enunciá-los. Esses conceitos podem ser trabalhados juntos em sala de aula. O professor pode questionar quais estratégias podem ser mobilizadas para resolver a atividade. Quando usar m ou m^2? É outro questionamento interessante de fazer nessa atividade, diferenciando-as. Isso é importante no ensino, pois muitos estudos mostram a confusão existente entre os conceitos de área e de perímetro.

Essa atividade pode ser retomada e ampliada como segue:

A área verde (figura A) possui $48m^2$, calcule a área e o perímetro da área calçada (figura B).

Figura 3: Planta baixa de um quintal



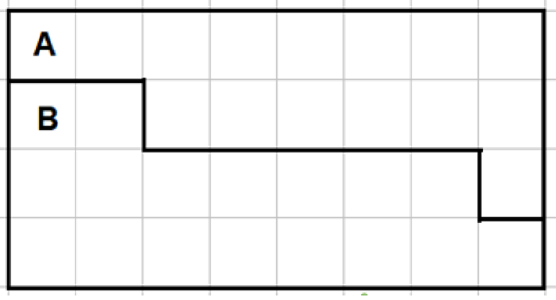
Fonte: acervo dos autores

Esta atividade pode ser realizada com malha quadriculada ou utilizando o Geoplano[10]. Ela também permite abordar outras possibilidades, como a do exemplo a seguir.

O perímetro da área calçada (figura B) é $22m$*.*

[9] Para resolver essa atividade sugerimos o aplicativo: < https://toytheater.com/area-perimeter-explorer/> Acesso: outubro de 2023.

Figura 4: Planta baixa de um quintal



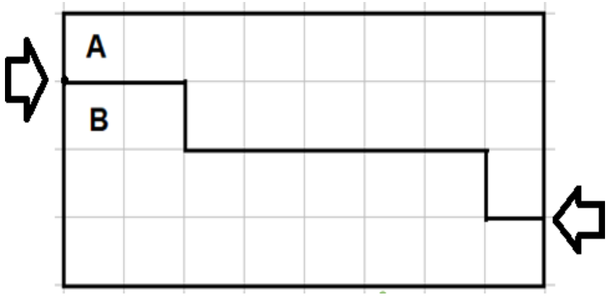
Fonte: acervo dos autores

a) Qual a medida da área e do perímetro da figura A?

b) Qual é a medida da área do terreno?

Pode-se solicitar que os estudantes elaborem outras possibilidades para a área verde e a área calçada, mantendo as extremidades, conforme as setas.

Figura 5: Planta baixa de um quintal



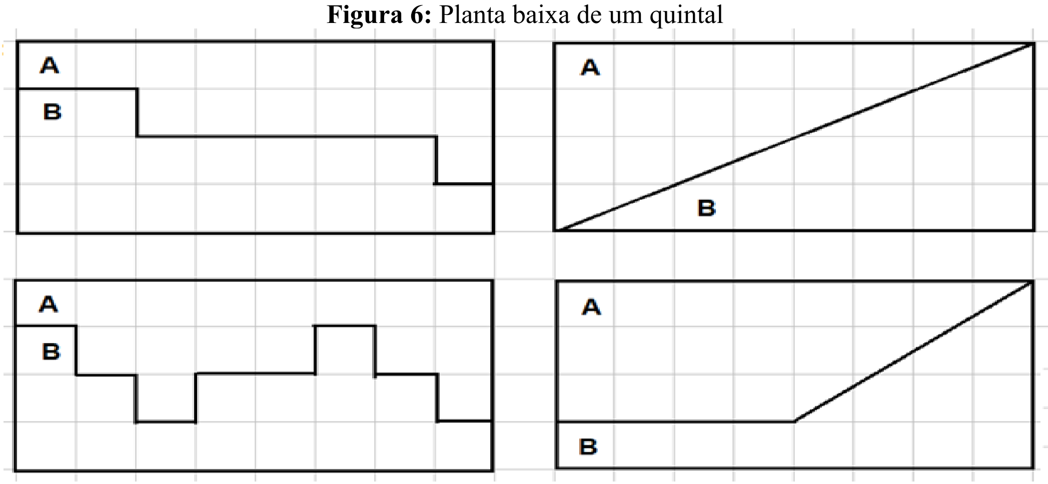
Fonte: acervo dos autores

É conveniente que após o cálculo das medidas da área e do perímetro das figuras, os estudantes sejam estimulados a comparar o que varia e o que permanece invariante, com o objetivo de perceber que figuras diferentes podem ter áreas diferentes e perímetros iguais. Assim como, também devem perceber a razão de os perímetros serem iguais.

Pode-se, ainda, explorar os seguintes exemplos:

[10] É uma prancha de madeira ou plástico normalmente quadrangular com pregos ou metais dispostos na sua superfície em quadrados que permite a construção de polígonos com elásticos do tipo daqueles de amarrar dinheiro e o aprofundamento de conceitos geométricos como o de áreas de figuras planas.

Figura 6: Planta baixa de um quintal



Fonte: acervo dos autores

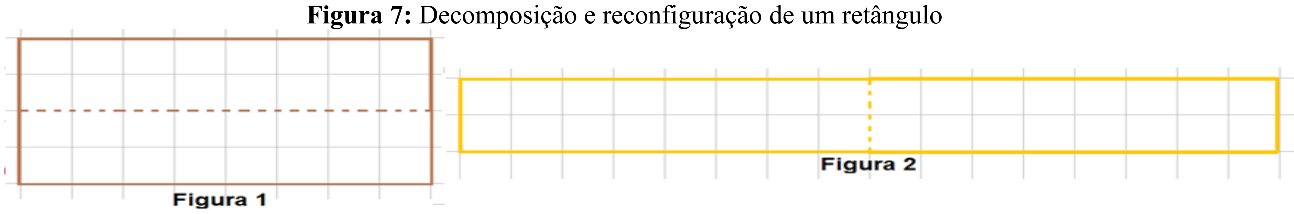
Uma indagação pertinente é: Todas essas possibilidades são viáveis? Justifique.

Quinta Situação:

Esta atividade pode ser feita utilizando papel pardo.

As figuras (1) e (2) são retangulares. A figura (2) foi obtida justapondo dois retângulos recortados da figura (1) por meio de um corte paralelo a dois de seus lados e que passa pelos pontos médios dos outros dois (figura 7, abaixo). De acordo com essa figura responda: Essas figuras possuem a mesma área? Elas possuem o mesmo perímetro?

Figura 7: Decomposição e reconfiguração de um retângulo



Fonte: acervo dos autores

O objetivo desta atividade é perceber que o perímetro aumenta, porém, a área não se altera. O professor pode construir um retângulo com papel pardo, cortar no segmento que passa pelos pontos médios dos lados paralelos, justapondo os retângulos obtidos, observando quais medidas variam e quais permanecem invariantes. Essa situação permite outros questionamentos, como: O que acontecerá com as medidas do perímetro e da área se continuarmos com esse procedimento? Se contornássemos as figuras obtidas por um barbante, o que aconteceria? Esse procedimento trabalha a ideia do infinito e o raciocínio dedutivo matemático.

Sexta Situação:

Como podemos calcular a medida da área da sala de aula?

Os estudantes podem realizar estimativas utilizando instrumentos como: trena e régua ou utilizar outras estratégias, como por exemplo estimar a medida de área de uma lajota que recobre o piso e verificar quantas lajotas recobrem o chão da sala de aula.

O professor pode ampliar esses conhecimentos calculando a medida da área das paredes, a medida da área e do perímetro da superfície da mesa e do quadro. Essas experiências colaboram para identificar quais múltiplos e submúltiplos do metro e do metro quadrado devem ser utilizados. Nesse caminhar, o professor pode indagar quais outras medições podemos realizar.

Sétima Situação:

Pedro mediu com a régua a medida da borda de um azulejo do chão da sala de aula e verificou que cada azulejo possui 30cm de largura por 30cm de comprimento. Sabendo que a sala de aula tem 30 azulejos em seu comprimento e 20 azulejos em sua largura, quais as dimensões desta sala? Qual a medida da superfície dessa sala de aula? E qual é a medida do perímetro?

Nessa situação o professor pode realizar questionamentos do tipo: Como resolver? Quais estratégias podemos mobilizar? É possível resolver de modos distintos? Considerando as situações anteriores, acreditamos que nesta atividade os estudantes podem mobilizar raciocínios mais elaborados.

Comparando áreas... Sétima Situação:

Dobrando o perímetro de um quadrado o que acontece com a medida de sua área?

Esta atividade pode ser feita no geoplano, na malha quadriculada, no material dourado[11] (considerando a superfície do cubo que representa a unidade) ou no geoplano virtual (https://toytheater.com/geoboard-shape). Ao analisar o que ocorre com a medida da área do quadrado quando duplicamos as medidas dos seus lados os estudantes devem compreender que, nesse caso, a medida do perímetro duplica e a medida da área quadruplica.

Oitava Situação:

Uma quadra quadrada possui $100m$ *de medida do lado. Qual a medida da área e do perímetro dessa quadra?*

Nesta atividade os estudantes precisam abstrair os conceitos de área e de perímetro, no entanto, podem mobilizar as ideias elaboradas por meio dos materiais manipuláveis. Utilizando a ideia de quantos metros quadrados "cabem" em um quadrado de lado $100m$, podem concluir que a medida de sua área é de $10.000\ m^2$ e a de seu perímetro é de $400\ m.$

A placa do material dourado, que representa a centena, pode ser usada para contribuir com esse raciocínio. Para isso, deve-se enfatizar que a face do cubo possui $1cm$ de aresta e sua medida de área é $1\ cm^2$. No caso, nessa atividade a superfície do cubo, que representa a unidade, possui $1\ m$ de lado. Estamos mobilizando a ideia de "cobrir" para calcular a medida da área. Essa situação permite explorar as seguintes questões: Um hectare corresponde a qual medida de superfície? Onde é utilizada normalmente essa unidade de medida?

Nona Situação:

Quantos dm^2 cabem no m^2?

A superfície da placa do material dourado, que representa a centena, pode ser utilizada nesta atividade. O lado dessa placa possui 10cm de medida, o que corresponde a 1dm, logo a medida da área da superfície dessa placa é $100\ cm^2$ ou $1\ dm^2$ (10cm×10cm=$100cm^2$=$1dm^2$=1dm × 1dm). Com isso, estamos trabalhando as transformações das unidades de medida de comprimento e de superfície sem a memorização de fórmulas.

O professor pode construir com papel pardo um quadrado de 1m de lado e recobri-lo com as placas das centenas do material dourado. Essa manipulação contribui para que o estudante perceba que cabem $100dm^2$no m^2. Outro questionamento possível nessa atividade é: Quantos cm^2 cabem no m^2 ? Essa constatação contribui para trabalhar a noção de transformação de unidades de medidas de superfícies.

Algumas considerações para sala de aula

Esperamos que a partir das atividades propostas neste texto, surjam mais ideias para consolidar, ampliar e aprofundar os conceitos de área e de perímetro em sala de aula. Os professores podem elaborar novas situações de aprendizagem para os conceitos de área e de perímetro considerando seu contexto e sua realidade.

[11] A superfície do material dourado é uma malha centimetrada.

A integração dos recursos didáticos, das atividades e dos questionamentos que o professor pode fazer em sala de aula podem propiciar um ambiente motivador para a aprendizagem dos conceitos envolvidos. Com isso, os estudantes podem ir aos poucos diferenciando esses conceitos. Essa diferenciação favorece distinguir m de m^2, por exemplo.

Por meio de articulações entre concreto e abstrato os estudantes podem desenvolver a percepção das medidas mais adequadas a serem utilizadas na resolução das atividades.

Ao explorar a grandeza área com procedimentos de composição, decomposição e reconfiguração, estamos valorizando as ideias e a autonomia intelectual dos estudantes, sem a memorização precoce de fórmulas algébricas. Em suma, ao caminharmos entre avanços e retomadas, com idas e vindas entre o teórico e o prático, o abstrato e o teórico, o particular e o geral, o empírico e o formal, acreditamos que estamos construindo um caminho viável para a aprendizagem dos conceitos de área e de perímetro e, também, de possíveis aplicações em contextos reais.

REFERÊNCIAS

ARINOS, Cleide R. M; FREITAS, José Luiz M. de. **Comprimentos, áreas, ... Quais medidas explorar em sala de aula?** Oficinas on-line 2021: diálogos sobre propostas em matemática. Disponível em https://www.youtube.com/watch?v=hdIAU9TG_XU

ARINOS, C. R. M.. **Um estudo de potencialidades das representações semióticas na aprendizagem de áreas de triângulos e quadriláteros por alunos do quinto e sexto anos do Ensino Fundamental** [Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul], 2018. https://posgraduacao.ufms.br/portal/trabalho- arquivos/download/5448.

BELLEMAIN, P. M. B.; LIMA, P. F. **Coleção Explorando o Ensino de Matemática**. Brasília: Ministério da Educação, Secretária de Educação básica, 2010.

BRASIL, MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF: MEC, 2018. Disponível em http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz, M. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. 2ª ed. Campo Grande, MS. UFMS, 2005.

SILVEIRA, Ênio. **Matemática: compreensão e prática**/ Ênio Silveira, Cláudio Marques. – 6. ed. – São Paulo: Moderna, 2019.

CAPÍTULO 8

POSSIBILIDADES PARA O ENSINO DE FRAÇÕES: RECURSOS DIGITAIS E MANIPULÁVEIS

Oficina 08 - Possibilidades para o ensino de frações - YouTube

Autores:
Katiane Rocha[1] - UFMS
Renan Gustavo Araújo de Lima[2] – IFMS/Campus Coxim

Público-alvo: Destinada a estudantes do quarto e quinto ano do ensino fundamental

Objetivo: Apresentar e refletir sobre propostas para o ensino de frações por meio de recursos digitais e materiais manipuláveis.

Habilidades da BNCC*:*

- *(EF05MA03)* Identificar e representar frações (menores e maiores que a unidade), associando-as ao resultado de uma divisão ou à ideia de parte de um todo, utilizando a reta numérica como recurso;
- *(EF05MA04)* Identificar frações equivalentes;
- *(EF05MA05)* Comparar e ordenar números racionais positivos (representações fracionária e decimal), relacionando-os a pontos na reta numérica.

Materiais a serem utilizados:

- Escala cuisenaire;
- Régua de frações – modelo de impressão disponibilizado ao final do texto;
- Barbante, prendedores e folhas de papel para a construção do varal de frações;
- Computador **com internet** para o acesso aos recursos digitais.

A proposta da oficina

Nesse texto vamos apresentar alguns recursos e atividades que podem auxiliar no ensino de frações, que tem se mostrado desafiador no ensino fundamental. Há fatores que implicam nessa característica do ensino desse tema, como o fato de esse conceito exigir mobilização de diferentes representações para sua compreensão e os seus diferentes significados. Além disso, para trabalhar

[1] Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS); *e-mail*:mr.katiane@gmail.com , ORCID:*0000- 0003-3687-9101*
[2] Professor do Instituto Federal de Mato Grosso do Sul/Campus Coxim (IFMS)*; e-mail: renan.lima@ifms.edu.br*, ORCID: *0000-0001-9931-0962.*

com esse conceito é necessário que os estudantes tenham conhecimentos prévios das quatro operações.

Nesse contexto, esse artigo busca discutir algumas possibilidades metodológicas para trabalhar com frações no ensino fundamental. Propomos a discussão em três partes:(1) algumas atividades usando a escala cuisenaire para trabalhar a ideia de parte-todo mudando o todo; (2) uma atividade usando a régua de frações trabalhando a ideia parte- todo usando uma unidade fixa e comparando as frações; (3) por último trazemos o varal de frações para trabalhar a ordenação de frações.

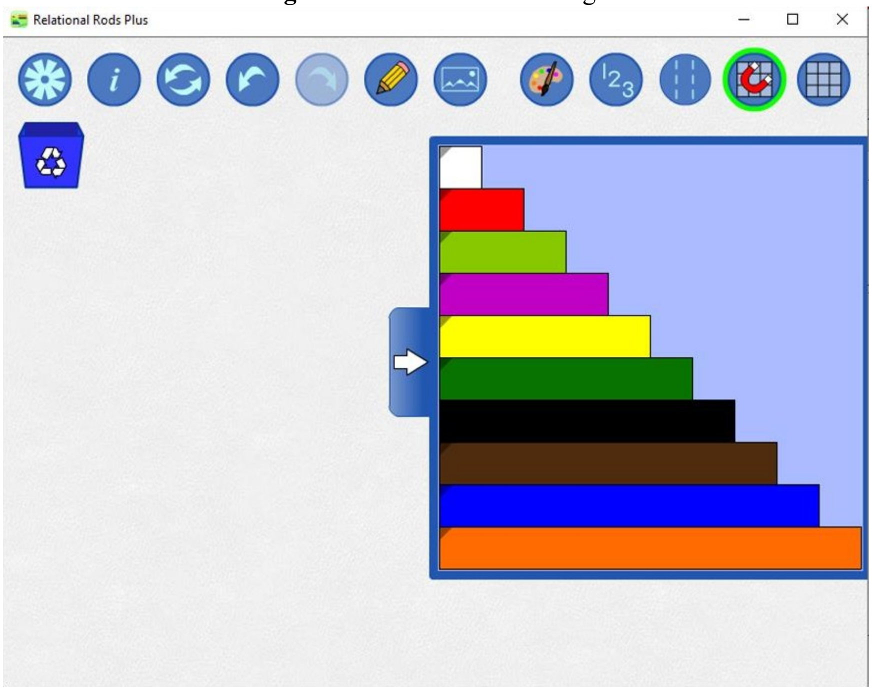
Exemplo francês de uma metodologia de ensino aplicado em uma atividade de fração

Plolti e Roubin (2010), com o intuito de dar mais dinâmica às aulas de Matemática, decidiram usar os primeiros 15 minutos da aula para propor uma atividade ritual para os estudantes. As atividades rituais funcionam como um aquecimento para que os estudantes iniciem a aula. Na prática, o professor entra em sala e coloca a atividade no quadro ou entrega para os estudantes, sem precisar de grandes introduções e explicações sobre o conteúdo trabalhado e, na sequência, os estudantes começam a resolver a atividade. Essas atividades podem ser pontuais, mas também podem ser conectadas e levar os estudantes a desenvolver um conceito. Além disso, os estudantes refletem e pesquisam como podem resolvê-las sem saber o conteúdo em jogo. Enquanto isso, o professor pode fazer a chamada, receber os estudantes atrasados e preparar o material para a sequência da aula. Após os estudantes pensarem na situação proposta, o professor discute algumas soluções e começa a aula.

Nessa proposta de organização, o tempo de trabalho com as atividades rituais deve ser relativamente curto, não excedendo 20 min, pois a mudança de atividade permite aos estudantes a sensação de dinamismo nas aulas. Além disso, como as atividades rituais não necessitam estar diretamente relacionadas com o conteúdo programático que está sendo desenvolvido no momento com a turma, é possível a utilização de um espaço separado no caderno (ou outro caderno) para guardar os registros dessas atividades.

Apresentaremos a seguir seis atividades rituais que podem ser utilizadas nesta metodologia, podendo ser trabalhados ao longo de seis aulas. Para tanto propomos o uso da escala cuisenaire. Essa escala pode ser usada pelo professor dos anos iniciais e finais do ensino fundamental para trabalhar diversos conceitos matemáticos como: contagem, comparação de números, volume, números pares ímpares, padrões matemáticos e frações. No caso dessa oficina, mobilizamos esse material concreto visando o trabalho com o conceito de fração. Esse material pode ser utilizado pelo professor na versão tridimensional, bidimensional (barras retangulares impressas) ou ainda a versão digital[3]. Para todas as atividades deste texto, considere a escala cuisenaire abaixo:

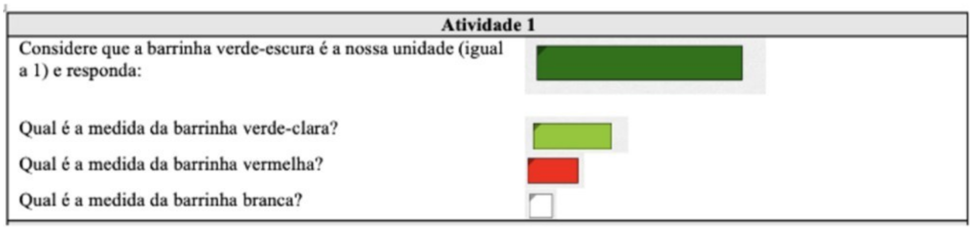
Figura 1: Escala cuisenaire digital



Fonte: acervo dos autores

Esta atividade pode ser mobilizada para iniciar o estudo de fração, para que os estudantes sintam a necessidade desse novo conceito. A atividade 1 (Figura 2) pede que os estudantes tomem como base a barra verde-escura e determinem a medida das barrinhas verde-clara, vermelha e branca.

Figura 2: Atividade ritual 1



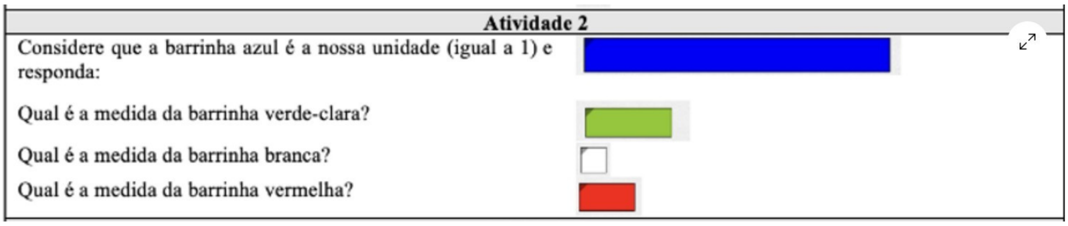
Fonte: acervo dos autores

Nesse momento os estudantes podem argumentar que precisam de duas barras verde-claras para ter uma verde-escura. Nesse sentido a verde clara é uma parte de duas da escura, a vermelha uma parte de três e a branca uma parte de seis. Ao final, o professor pode apresentar essas soluções de forma escrita articulando a representação numérica deste novo número.

[3]Disponível em: https://support.mathies.ca/en/mainSpace/RelationalRodsPlusTool.php. Data de acesso 21/11/2023.

Na próxima aula o professor pode propor uma nova atividade tendo agora como unidade de medida a barra azul e questionando novamente o tamanho das barras de cores verde-clara, vermelha e branca.

Figura 3: Atividade ritual 2



Fonte: acervo dos autores

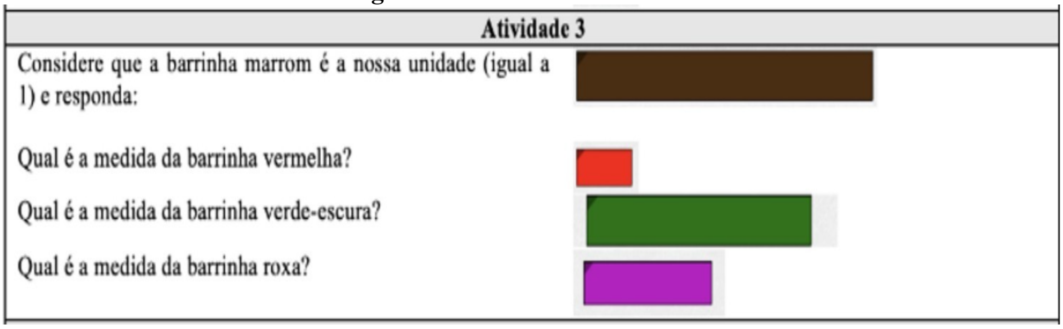
Nessa atividade temos que a barra verde é uma parte de três (um terço) da barra azul e que a barra branca é uma parte de nove da azul. Em relação a barra vermelha, o estudante terá que usar a barra branca como intermediária para medir quantas vermelhas cabem na azul. O conceito de fração equivalente pode ser mobilizado para realizar a atividade, de modo que o estudante poderá perceber que a barra vermelha equivale a duas brancas. Assim, a vermelha é $\frac{2}{9}$ da azul. Ao final dessa atividade o professor pode formalizar e comparar as atividades 1 e 2.

Cabe ressaltar a diferenciação da unidade padrão no início de cada exercício, tendo em vista as mudanças nas comparações realizadas. Apesar de mobilizar barras iguais nos dois exercícios, como é o caso da barra verde-clara, no primeiro exercício ela representava metade da verde-escura. Já no segundo exercício, representava um terço da azul. Nesse sentido, o professor pode abordar com os estudantes a ideia de comparação em relação à unidade estabelecida, pois uma barra pode ser representada por diferentes frações, caso a unidade seja diferente.

Outra possibilidade de discussão que pode ser considerada em sala de aula é o fato de obter quantidades equivalentes utilizando barras diferentes quando comparamos com a mesma unidade, como foi o caso da barra vermelha, em que foi necessário utilizar a barra branca para compará-la com a barra azul.

Na aula seguinte, sugerimos propor a atividade 3 que vai também mobilizar o conceito de fração equivalente, visto que a barra marrom é a unidade base e que a verde não cabe uma quantidade inteira de vezes na barra marrom.

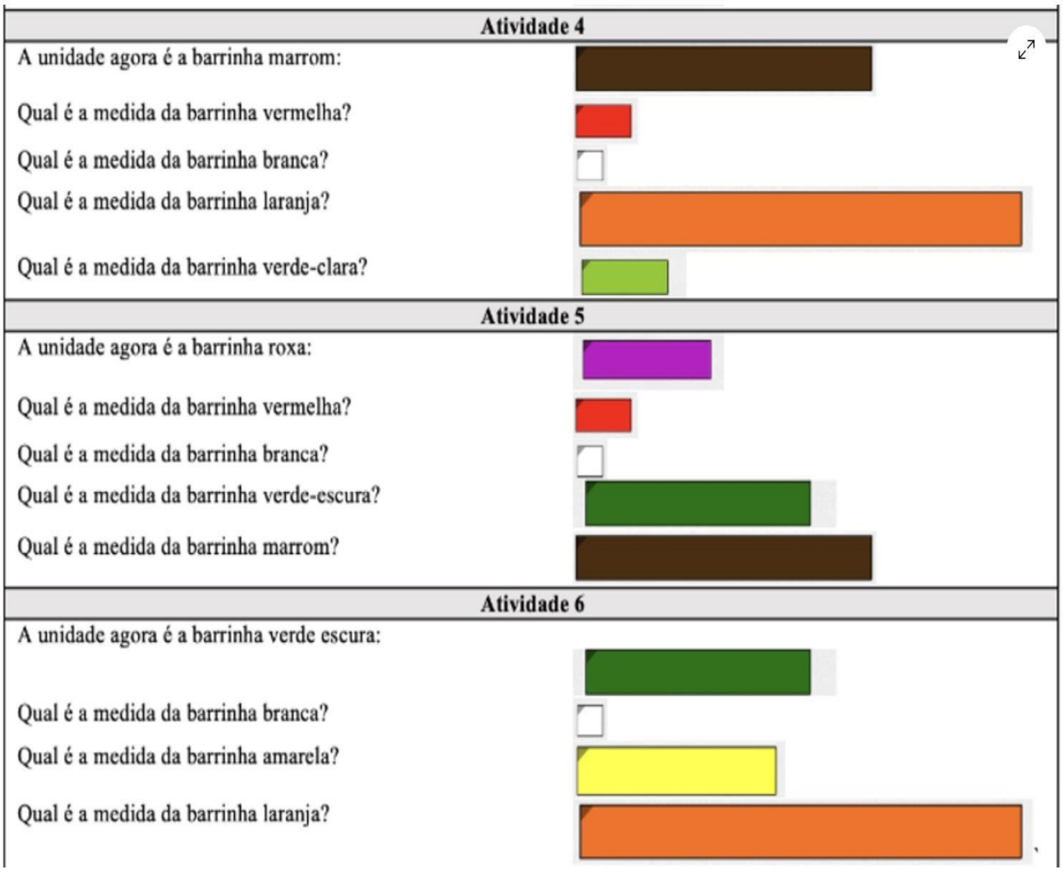
Figura 4: Atividade ritual 3



Fonte: acervo dos autores

No momento de formalizar o professor pode concluir que a vermelha é $1/5$ da marrom, a verde é $3/5$ da marrom e a lilás $1/2$. Na sequência o professor pode aplicar as atividades 4, 5 e 6 nas próximas aulas.

Figura 5: Atividades rituais 4, 5 e 6



Fonte: produzida pelos autores

Nessas atividades o professor pode trabalhar a noção de número misto, pois a unidade base é comparada com barras maiores, por exemplo: comparar a barra verde escura à barra laranja. Ao final da sequência o professor pode retornar às frações trabalhadas e discutir as comparações.

Estudando as frações unitárias com a régua de frações

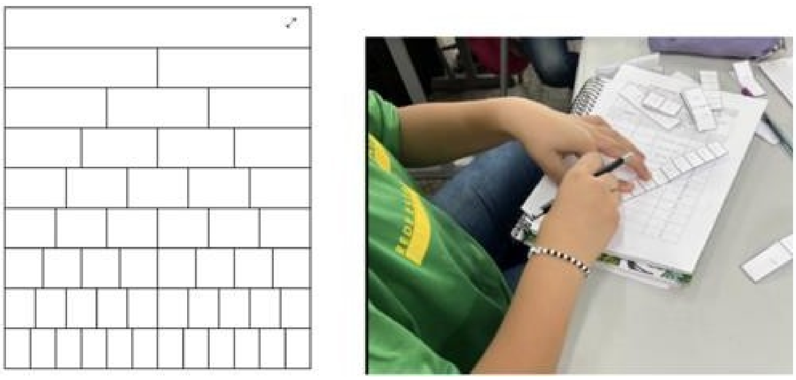
Após esse trabalho inicial com a escala cuisenaire e a comparação entre diferentes unidades, nessa seção apresentamos atividades que envolvem uma unidade fixa, utilizando a régua de frações:

Figura 6: Régua de frações

Fonte: acervo dos autores

A régua de frações é um material manipulável que permite estabelecer uma unidade. Após estabelecida a unidade, a mesma pode ser reapresentada com subdivisões em partes iguais, por exemplo: é possível dividir a unidade em duas partes iguais, três partes iguais, quatro partes iguais, nove partes iguais, entre outros. Esta régua pode ser confeccionada, em sala de aula, com os estudantes, com eles preenchendo e dobrando cada régua. Na Figura a seguir podemos encontrar um modelo utilizado em aulas do ensino fundamental.

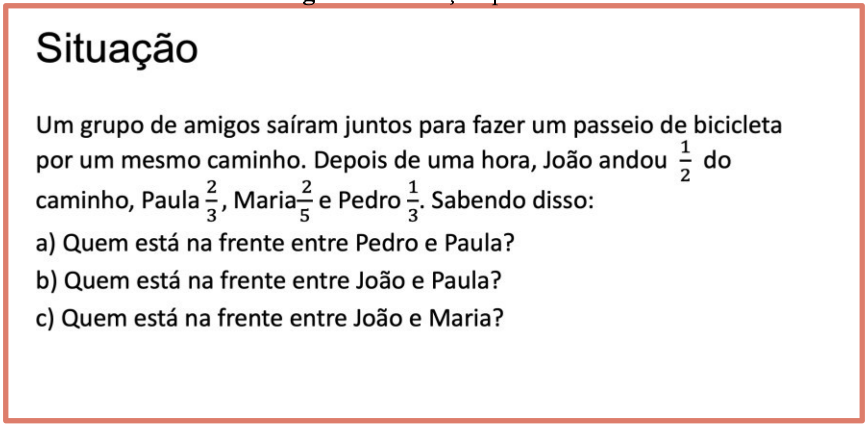
Figura 7: Construção da régua de frações



Fonte: acervo dos autores

Aqui propomos discutir a comparação de frações, utilizando a régua de frações, a partir de uma atividade que envolve distâncias percorridas por um grupo de amigos.

Figura 8: Situação-problema 1



Situação

Um grupo de amigos saíram juntos para fazer um passeio de bicicleta por um mesmo caminho. Depois de uma hora, João andou $\frac{1}{2}$ do caminho, Paula $\frac{2}{3}$, Maria $\frac{2}{5}$ e Pedro $\frac{1}{3}$. Sabendo disso:

a) Quem está na frente entre Pedro e Paula?

b) Quem está na frente entre João e Paula?

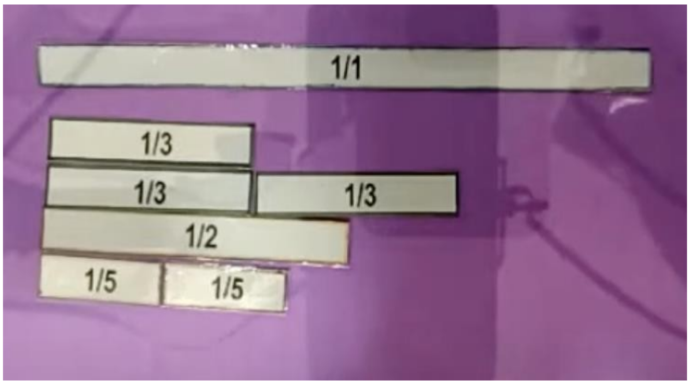
c) Quem está na frente entre João e Maria?

Fonte: acervo dos autores

Para essa situação temos que comparar os percursos percorridos por quatro amigos usando as réguas de frações. Assim, o professor pode entregar as réguas para que em dupla os estudantes possam comparar e analisar cada alternativa. Após um tempo o professor discute as resoluções dos estudantes.

Para a resolução da atividade, os estudantes devem mobilizar as peças da régua de frações relacionada com a distância percorrida de cada amigo. O trajeto percorrido por Pedro pode ser representado por uma peça de ½’ , enquanto para representar o trajeto percorrido por Paula, utiliza-se 2 peças de ⅓’ . Como Maria percorreu 2/5’ do caminho, utiliza-se duas peças de 1/5’ e, por fim, o caminho de Pedro pode ser representado por uma peça de ⅓’ .

Figura 9: Representação da situação-problema 1 na régua de frações



Fonte: acervo dos autores

Durante a resolução os estudantes podem comparar as distâncias percorridas entre os amigos, obtendo algumas conclusões: verificar que Paula andou mais que Pedro; que Paula andou mais que João e que João andou mais que Maria. Essa atividade tem o objetivo de iniciar o trabalho com a comparação de frações a partir da unidade, além de possibilitar a elaboração de estratégias de comparação entre diferentes frações. Assim, o professor pode inserir novas pessoas no problema, com as suas respectivas frações do caminho percorrido, para que os estudantes busquem realizar a comparação entre as distâncias percorridas.

Com o desenvolvimento do trabalho, uma discussão que pode ser realizada com os estudantes é a comparação das frações em diferentes situações, como quando possuem denominadores iguais ou diferentes. Na atividade apresentada, no caso de Pedro e de Paula, bastava observar o numerador para comparar as distâncias percorridas, tendo em vista que representam partes iguais do inteiro. Já no caso de João e Maria essa estratégia não é válida, pois por se tratar de partes diferentes do inteiro, a análise apenas dos numeradores, pode levar à conclusão que Maria percorreu o maior trajeto, o que não é correto.

Varal de frações

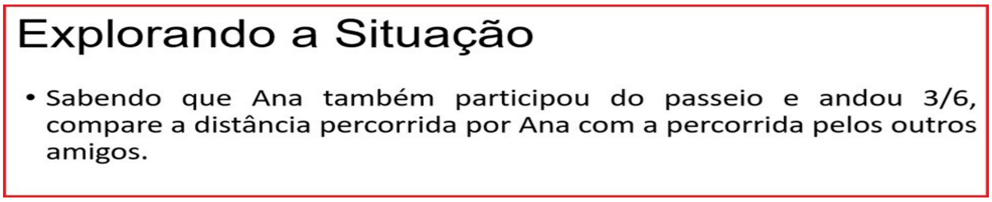
Uma possibilidade para o trabalho de comparação de fração em sala de aula é a utilização do varal de frações. Para a realização dessa atividade são necessários um barbante, prendedores e as frações escritas em papel. Após amarrar o barbante, formando um varal, fixa-se os papéis referentes ao 0 e ao 1, que servirão como orientadores para o posicionamento dos papéis que representarão as demais frações. Uma dinâmica que o professor pode adotar em sala, é o trabalho em conjunto dos estudantes no posicionamento adequado das frações no varal. Dessa maneira, um aluno (ou grupo de estudantes) irá até o varal e posicionará a fração de acordo com o seu valor. Em seguida, outro estudante se dirige até o varal e posiciona uma nova fração, levando em consideração as frações já posicionadas no varal. Com o desenvolvimento dessa atividade, espera-se que os estudantes realizem a comparação entre as frações, por exemplo: como a fração $2/5$’ é maior que a fração ⅓, o seu papel deve ficar à direita da fração ⅓’ ; ao identificar que a fração $2/5$’ é a maior de todas as frações trabalhadas na atividade dos amigos, ela deve ser posicionada à direita de todos (mas à esquerda do 1, pois é menor que esse valor). No caso da atividade dos amigos no passeio de bicicleta, a representação da situação por meio do varal de frações ficaria do seguinte modo:

Figura 10: Representação da situação-problema 1 no varal de frações

Fonte: acervo dos autores

A partir da atividade apresentada, o professor pode explorar essa situação com a inclusão de novos integrantes no grupo de amigos, apresentando suas respectivas frações do trajeto percorrido. Um exemplo que poderia ser explorado é o seguinte:

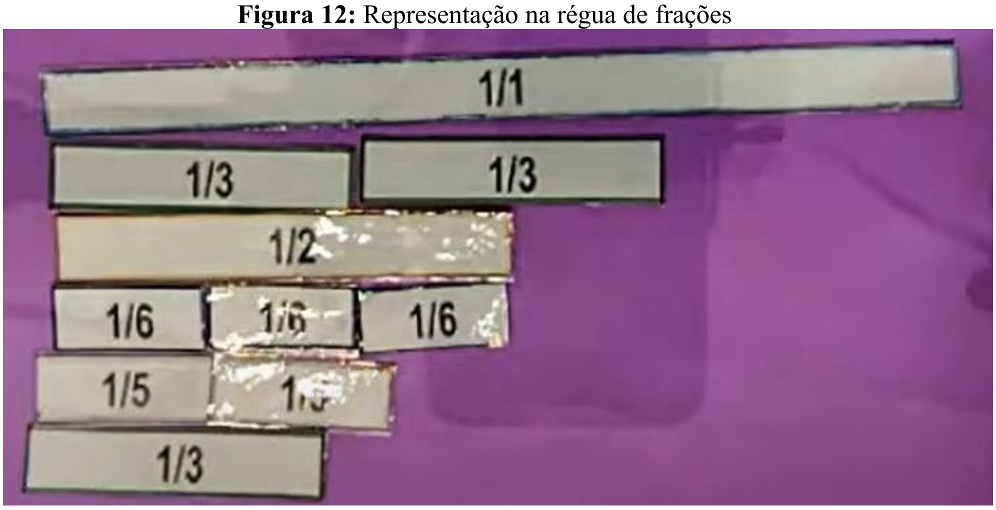
Figura 11: Exploração da situação-problema 1



Fonte: acervo dos autores

Ao utilizar a régua de frações para realizar a comparação da distância percorrida por Ana com a distância dos demais amigos, observa-se que a fração percorrida por Ana representa a mesma distância percorrida por João.

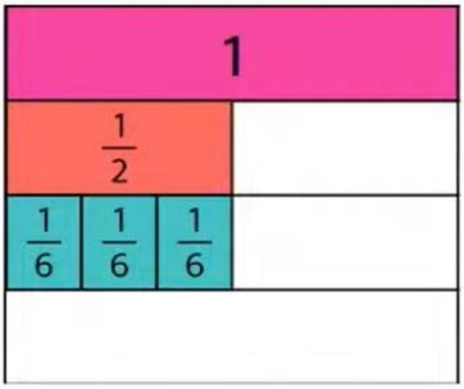
Figura 12: Representação na régua de frações



Fonte: acervo dos autores

Nesse momento, pode-se realizar a discussão em sala de aula sobre o fato de duas frações, ½′ e 3/6′ , representarem a mesma distância percorrida, apesar de estarem escritas de forma diferente. forma diferente. Percebe-se que essa situação possibilita o trabalho com o conceito de frações equivalentes, tendo em vista que essas frações representam a mesma quantidade, apesar de escritas de maneiras diferentes. Além disso, por meio da exploração da régua de frações, o professor pode solicitar que os estudantes identifiquem novas frações equivalentes, como as frações **como as fra**ções 2/4′ , 4/8′ e 5/10′ , que são equivalentes às frações 1/2 e 3/6.

Figura 13: Representação de frações equivalentes



$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{5}{10}=\frac{9}{18}=\ldots$$

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\frac{12}{36}=\frac{5}{15}=\frac{4}{12}=\ldots$$

Fonte: acervo dos autores

Outra retomada possível é a utilização do varal de frações para posicionar essas frações equivalentes. No caso da situação do caminho percorrido por Ana, ao ao posicionar a fração 3/6′ no varal, os estudantes devem perceber que essa fração não pode ficar nem à direita e nem à esquerda da fração ½′ . Para posicioná-la no varal, por representarem o mesmo valor, a fração 3/6′ deve ser posicionada exatamente na mesma posição da fração ½′ (podendo ser prendida com o mesmo prendedor).

Algumas considerações para sala de aula

No decorrer do texto discutimos possibilidades para o ensino de frações por meio do uso de recursos digitais e materiais manipuláveis, como a régua de frações, a escala cuisenaire e o varal de frações. Uma das propostas apresentadas é a realização das atividades rituais, que podem ser propostas no início de cada aula. Cabe ressaltar que para a organização e gerenciamento dessas atividades rituais, é importante que o professor possa considerar a realidade do seu ambiente escolar e seus estudantes, podendo organizá- los em duplas ou trios para o trabalho coletivo.

Por meio das atividades apresentadas, os estudantes podem trabalhar a ideia da fração de uma quantidade, identificando a importância de considerar o inteiro para a identificação da fração correspondente. Além disso, é possível construir o conceito de frações equivalentes, com diferentes formas de representar uma quantidade, como na situação do trajeto percorrido pelos amigos. Outro aspecto que requer a atenção em sala de aula é a realização do registro da representação numérica na lousa, em conjunto com o trabalho dos materiais manipuláveis. Por meio dessas diferentes representações, é possível que o professor trabalhe, gradativamente, a passagem do concreto para o abstrato.

Nesse sentido, um exemplo da passagem do concreto para o abstrato é a utilização da régua de frações para a construção do conceito de frações equivalentes e dos procedimentos necessários para encontrar uma fração equivalente. Ao articularem a régua de frações às representações escritas das frações, os estudantes podem identificar que para obter uma fração equivalente basta multiplicar (ou dividir) o numerador e denominador da fração original por um mesmo número, diferente de zero.

Por fim, apesar de não abordarmos nesse texto é possível a mobilização desses materiais em outras situações no ensino de frações, como nas operações de adição e subtração de fração[4]. Assim, a utilização desses materiais pode contribuir para a compreensão de algoritmos usuais na realização dessas operações, por exemplo: a conservação do denominador comum para frações que já possuem essa característica e a realização do procedimento do mínimo múltiplo comum quando trabalhada com frações com denominadores diferentes.

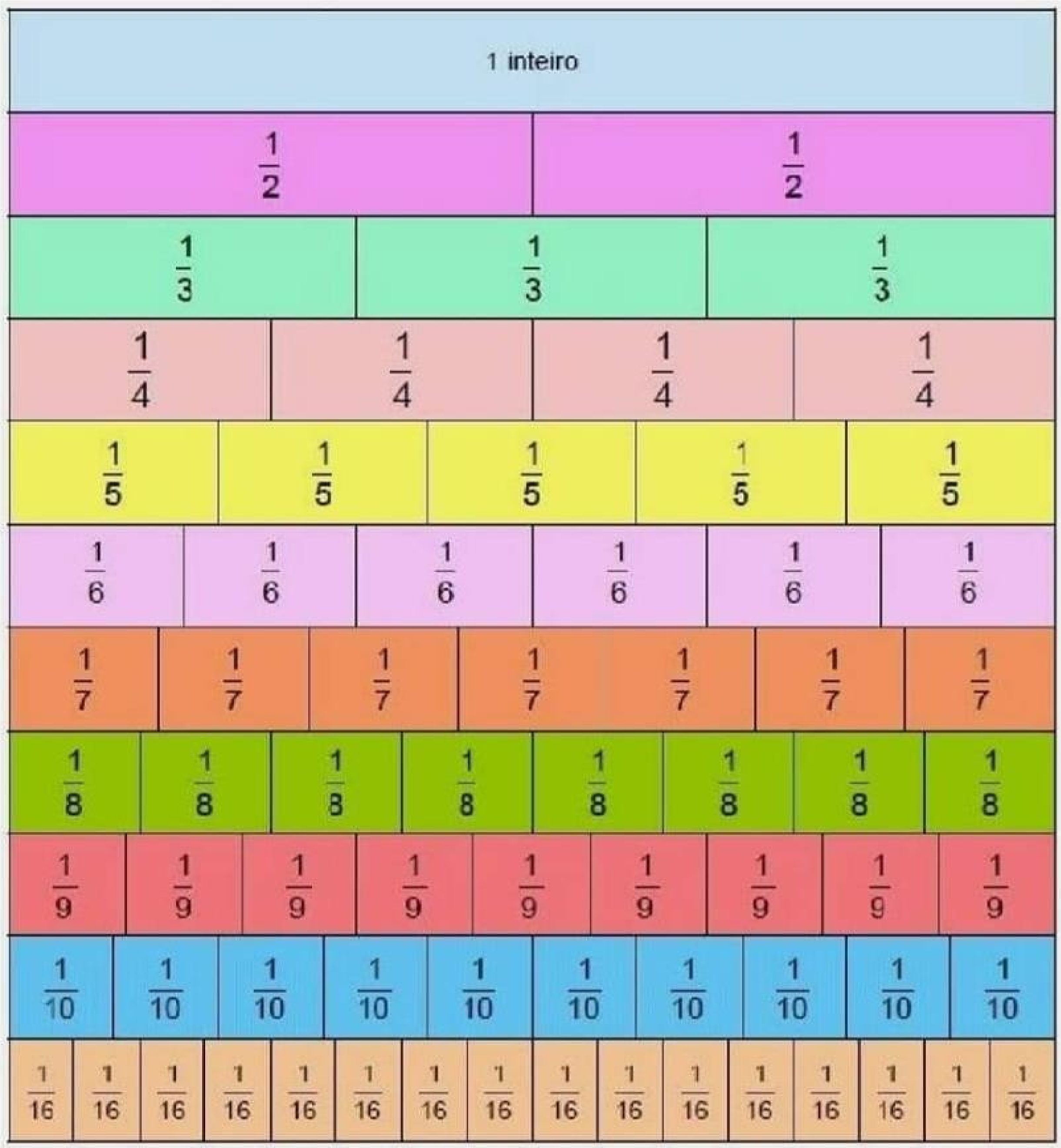
REFERÊNCIAS

LAMORTHE, Claire Piolti; ROUBIN, Sophie. *Le calcul réfléchi : entre sens et technique.* Le Bulletin Vert = Bulletin de l'APMEP, 2010. ⟨hal-02314670⟩

LIMA, Renan, G. A. de; ROCHA, Katiane de M. **Algumas possibilidades para o ensino de frações: recursos digitais e manipuláveis**. Oficinas on-line 2021: diálogos sobre propostas em matemática. Disponível em: https://www.youtube.com/live/Qp4W9BfsBzo?si=oeVPihhwr-OJFlNy, Acesso em 29 de novembro de 2023.

[4] Essas situações foram exploradas na oficina do DDMAT: *Algumas possibilidades para o ensino de frações: recursos digitais e manipuláveis*, disponível em https://www.youtube.com/live/Qp4W9BfsBzo?si=oeVPihhwr-OJFlNy

ANEXOS[5]



[5] Régua de frações disponível em: ttps://www.facebook.com/jogosnoatendimentoeducacionalespecializado/photos/a.1290000511057682/2 331529026904820/ . Acesso em 05 de dezembro de 2023.

CAPÍTULO 9

PENSANDO SOBRE ESTRATÉGIAS DE CÁLCULO MENTAL

"Se usar papel e lápis, o cálculo ainda é mental?" Oficina 09:

Pensando sobre estratégias de cálculo mental - YouTube

Autores:
Jéssica Serra Corrêa da Costa[1] - SED-MS José Luiz Magalhães de Freitas [2] - UFMS

Público-alvo: Estudantes do primeiro ao quinto ano do ensino fundamental

Objetivo: Refletir sobre atividades que podem contribuir com o desenvolvimento do cálculo mental.

Habilidades da BNCC*:*

- *(EF03MA03):* Construir e utilizar fatos básicos da adição e da multiplicação para o cálculo mental ou escrito.
- *(EF03MA06):* Resolver e elaborar problemas de adição e subtração com os significados de juntar, acrescentar, separar, retirar, comparar e completar quantidades, utilizando diferentes estratégias de cálculo exato ou aproximado, incluindo cálculo mental.

INTRODUÇÃO

O emprego do cálculo mental ocorre em diversas situações cotidianas, especialmente aquelas relacionadas a transações financeiras. Embora a percepção desse cálculo muitas vezes esteja vinculada a cálculos rápidos, os benefícios decorrentes do desenvolvimento do cálculo mental são variados. Um aspecto resultante dessa prática é a aquisição de autonomia e confiança. Essas qualidades são fundamentalmente fortalecidas por meio do trabalho dedicado ao aprimoramento das habilidades de cálculo mental. Dessa maneira, propor atividades que possam contribuir com o desenvolvimento desta habilidade é fundamental para lidar com diversas situações com as quais nos deparamos diariamente, e, que exigem raciocínio lógico e respostas para tomadas de decisão.

Professora da Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso do Sul, SED-MS, Brasi (SEMED-MS) *e-mail:* jessica.correa@ufms.br, ORCID: *0000-0002-3501-8724*
[2] Professor da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS); *e-mail: j*oseluizufms2@gmail.com, ORCID: *0000-0001-5536-837X*

Neste sentido, apresentamos neste texto algumas estratégias que possibilitam o desenvolvimento do cálculo mental a partir de atividades que podem ser propostas ao longo dos anos iniciais do ensino fundamental. Para tanto, organizamos este trabalho iniciando com a discussão sobre o termo cálculo mental presente em documentos curriculares oficiais e em investigações em educação matemática. Na sequência, discutimos algumas atividades propostas para estudantes do quarto e do quinto ano, com base na pesquisa de Guimarães (2009), com o intuito de compor um repertório de estratégias para a realização do cálculo mental por meio da mobilização de propriedades do Sistema de Numeração Decimal, *campo aditivo* e o *campo multiplicativo*.

Posteriormente, apontamos para algumas possibilidades de *tarefas e técnicas* que permitem contribuir com o desenvolvimento do cálculo mental e, consequentemente, preparar o estudante para lidar com as situações que requerem tal habilidade. Estas são apontadas nos estudos de Corrêa da Costa (2018), que analisou situações que fomentam a construção da habilidade de calcular mentalmente em atividades propostas numa coleção de livros didáticos dos anos iniciais. Nas considerações finais, trazemos alguns apontamentos que reiteram a necessidade de se trabalhar esta habilidade.

Cálculo mental

De acordo com Corrêa da Costa (2018), a realização de cálculos integra a formação intelectual do indivíduo, uma vez que desde cedo ele se depara com situações que demandam a realização de operações como repartir, retirar e acrescentar. Essas experiências, vivenciadas antes e durante sua jornada escolar, constituem a base de conhecimento dos alunos, servindo como ponto de partida para abordar atividades matemáticas relacionadas às operações fundamentais de matemática.

Sobre o cálculo mental, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018, p. 268) - documento brasileiro que normatiza as competências e habilidades essenciais que devem ser desenvolvidas ao longo das etapas da Educação Básica - aponta que "no tocante aos cálculos, espera-se que os alunos desenvolvam diferentes estratégias para a obtenção dos resultados, sobretudo por estimativa e cálculo mental, além de algoritmos e uso de calculadoras". Entretanto, menciona apenas doze vezes o termo "cálculo mental" nas habilidades a serem desenvolvidas, sendo a maior parte nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

> Nesta etapa o cálculo é desenvolvido com base nas regularidades e propriedades do sistema de numeração decimal, e com o passar dos anos, a ampliação deste repertório reflete na compreensão das operações matemáticas. Se o indivíduo não compreende regularidades do sistema de numeração decimal, ele terá dificuldades em realizar as operações elementares. Por exemplo, ao enunciar uma sequência

> numérica progressiva de 1 em 1 ele está, de forma consciente ou não, somando 1 ao número anterior para descobrir o próximo, e a cada 10 unidades mudando a ordem. (CORRÊA DA COSTA, 2018, p.10)

Para além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997) apontavam a necessidade do desenvolvimento do cálculo mental como uma habilidade, uma vez que se trata de uma modalidade de cálculo que perpassa outros tipos de cálculo como o escrito, o aproximado e o estimado.

Olhando para outros países, como França e Argentina, é interessante observar que possuem documentos específicos que orientam os professores sobre o desenvolvimento do cálculo mental. Na França, ele é considerado uma competência que deve ser trabalhada desde o ciclo 2, o que corresponde ao quarto, quinto e sexto anos no Brasil, ocupando também um espaço central do ensino de matemática que se orienta por meio do documento intitulado *Le Calcul Mental* (França, 2002). Na Argentina, em Buenos Aires, há um documento orientativo intitulado *Matemática: Cálculo mental con números naturales: apuntes para la enseñanza* (Buenos Aires, 2006), elaborado pela Secretaria de Educação; tal documento é específico de cálculo mental e apresenta várias estratégias em diferentes níveis de escolaridade. Em certa medida, os documentos brasileiros, como PCN (1997), BNCC (2018) e Guia do Programa Nacional do Livro Didático (2015), corroboram com as propostas enunciadas nos materiais de apoio da França e da Argentina no que diz respeito à prática do cálculo mental, que faz com que os procedimentos de cálculo evoluam e que os conceitos numéricos sejam enriquecidos.

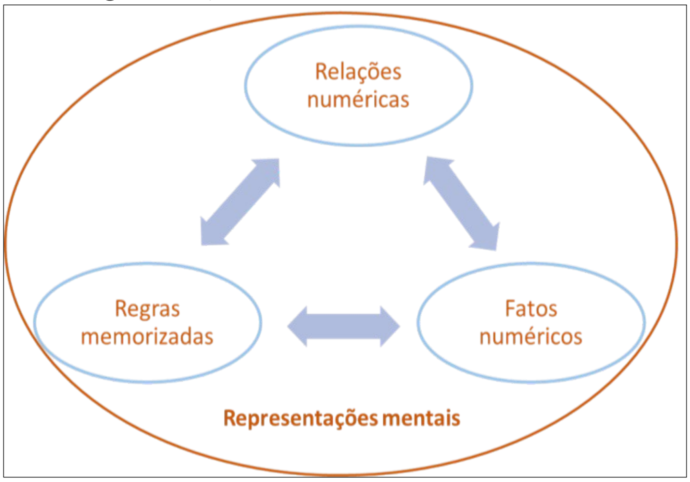
Para quem ainda se questiona a *razão de ser do cálculo mental*, apontamos que a habilidade é fundamental para o desenvolvimento da: atenção, concentração, memorização, compreensão de modalidades de cálculo, autonomia e segurança para enfrentar situações inesperadas (Corrêa da Costa, 2018; Guimarães, 2009).

Mas, afinal, que concepção de cálculo mental estamos considerando? Pode ou não fazer uso de registro?

Em nosso trabalho, consideramos a perspectiva adotada por Parra (1996, p.195), que entende a modalidade como "o conjunto de procedimentos em que, uma vez analisados os dados a serem tratados, estes se articulam, sem recorrer a um algoritmo preestabelecido para obter resultados exatos ou aproximados". Vale destacar que o cálculo mental não se contrapõe ao cálculo escrito. O emprego de registros durante o procedimento não o descaracteriza, uma vez que a utilização de lápis e papel pode ser uma ferramenta auxiliar para cálculos intermediários, que, por sua vez, integram um processo intrinsecamente mental (Parra, 1996). Portanto, a concepção de cálculo mental está ancorada na ideia de cálculo reflexivo, exigindo o emprego de estratégias não puramente algorítmicas, permitindo a manipulação de números de forma exata ou aproximada. Nessa visão, Parra (1996) argumenta que a memorização facilita a resolução de problemas, pois auxilia o indivíduo a identificar o procedimento adequado diante de um desafio, considerando os números envolvidos e a operação necessária

Com relação ao algoritmo, este entra em cena quando se demanda precisão nos cálculos, podendo ser mobilizado por meio de registros escritos ou realizados mentalmente. Embora o uso do algoritmo possa se tornar automatizado, a aplicação mecânica não garante uma compreensão profunda do processo, pois o sujeito pode simplesmente utilizar o algoritmo sem uma reflexão sobre a melhor maneira de executar o cálculo. Não desconsideramos, no entanto, a importância do algoritmo e dos cálculos escritos; pelo contrário, reconhecemos que são tão essenciais quanto o cálculo mental. No entanto, o cálculo mental pode servir como uma via de acesso para a compreensão mais profunda do algoritmo (Parra, 1996). Cabe observar, também, um quadro conceitual elaborado por Carvalho e Ponte (2017) que mostra como as representações mentais se compõem a partir do encadeamento entre as relações numéricas, os fatos numéricos e as regras memorizadas.

Figura 1: Quadro conceitual sobre cálculo mental



Fonte: Carvalho e Ponte, 2017

Pensar a adição 8 + 7 como 10 + 5, que é igual a 15, é um exemplo de fato numérico, pois ela é pensada a partir da decomposição e da composição numérica e que, com o passar do tempo, torna-se uma regra memorizada. Posteriormente, pode ser incorporada a outras situações, aprimorando estratégias para resolver outros cálculos mais complexos.

Figura 2: Exemplo de fato numérico

$$\begin{array}{ccccc} (5+3)+7 & & & & 8+(2+5) \\ 5+(3+7) & \longleftrightarrow & 8+7 & \longleftrightarrow & (8+2)+5 \\ 5+10 & & & & 10+5 \\ & & 15 & & \end{array}$$

Fonte: acervo dos autores

A seguir, nos dedicamos a apresentar algumas atividades que contribuem para ampliação e construção de procedimentos de cálculo.

Quais tipos de atividades podem fazer parte do cálculo mental?

A tese de Guimarães (2009) teve como objetivo identificar as contribuições do desenvolvimento do cálculo mental, entre estratégias e atividades que permitem que este seja de fato realizado nos anos iniciais do ensino fundamental. Para tanto, a pesquisadora realizou uma pesquisa desenvolvendo sequências didáticas com alunos dos quarto e quinto anos, trabalhando atividades que estão relacionadas com o cálculo mental, desde as propriedades básicas do Sistema de Numeração Decimal até os campos aditivo e multiplicativo. Assim, apresentamos a seguir algumas das atividades que foram abordadas em cada bloco, juntamente com as relações estabelecidas com o cálculo mental.

O primeiro bloco propõe o desenvolvimento de atividades que envolvem o Sistema de Numeração Decimal, que é fundamental para o desenvolvimento do cálculo mental, como: Que número corresponde ao valor de 50 dezenas? Quantas centenas existem em 1880? Quantas dezenas existem em 991? Este tipo de atividades permite compreender o processo de decomposição dos números em centenas, dezenas, unidades e ordens de outras classes, e assim, perceber que o agrupamento de ordens forma números de outras ordens e até outras classes.

O segundo bloco traz uma sequência de situações referentes à adição, como somar números de dezenas inteiras. De acordo com Corrêa da Costa (2018, p. 39) "neste tipo de tarefa as parcelas são números em que a primeira ordem, das unidades, corresponde ao número zero, pois, como dito anteriormente, dezenas inteiras são números formados por uma quantidade exata de dezenas. Dessa forma, pertencem a este grupo, tarefas como 230 + 370, 150 + 80 e 430 + 570". Note que, para resolver estas somas, os estudantes já incorporam outras estratégias trabalhadas anteriormente, como a composição e a decomposição.

Já no terceiro bloco, são apresentadas atividades do campo multiplicativo; como:

- Multiplicar dois números: $11 \times 11 \; ou \; 14 \times 11$
- Identificar números presentes na tabuada: 48 está na tabuada do 6?

O objetivo aqui, além da memorização da tabuada para tornar o cálculo automatizado, é também explorar estratégias que resolvem as contas de multiplicação. Consequentemente, as respostas e os processos desenvolvidos nessas atividades tornam- se automatizados e que podem contribuir para a resolução de outras situações mais complexas. Com relação à tabuada, ressaltamos que seu estudo e uso é válido desde que se tenha a compreensão de como ela é construída e as situações em que são empregadas.

Algumas conclusões da pesquisa de Guimarães (2009) dizem respeito:

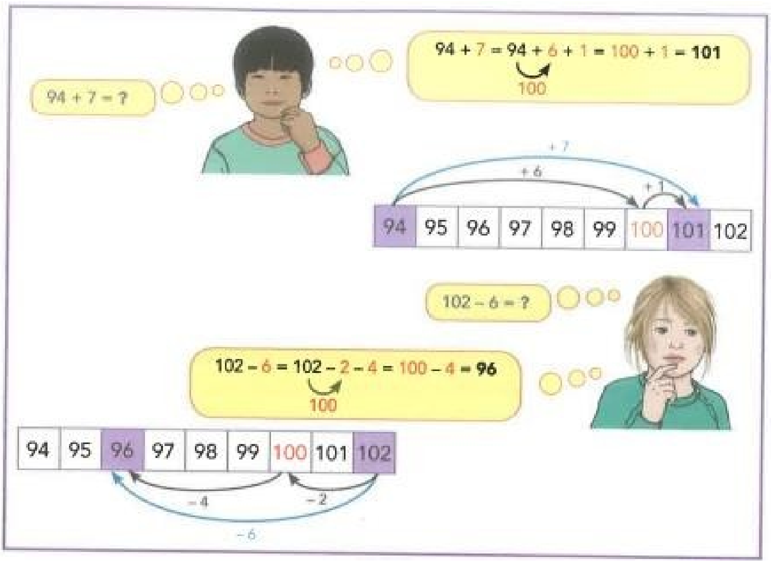
- à oralidade: a verbalização é essencial para favorecer a troca de informações, conhecimentos e estratégias;
- à argumentação: ao ouvir, raciocinar e falar sobre cálculo mental efetuado, os alunos incorporam novas estratégias ao repertório;
- às propriedades mobilizadas, que são adicionadas gradativamente ao repertório de cálculo dos alunos;
- à postura docente: a dinâmica da pesquisa poderia ser incorporada à prática dos professores, pois favorece a apropriação de propriedades numéricas, estratégias de cálculo e a concentração.

Inferimos ainda que, com a proposta de atividades como essas, os alunos podem optar por abandonar algumas estratégias para adotar novas, mais eficientes, possibilitando a construção de novos conhecimentos matemáticos. A seguir apresentamos algumas possibilidades de estratégias para a mobilização do cálculo mental.

Possibilidades de estratégias de cálculo mental

As possibilidades que apresentamos inicialmente foram extraídas do livro *Calcul Mental CP* - Les Petits Devoirs (FONTAINE, 2019). A obra aborda 28 atividades propostas para serem feitas em 15 minutos, pois na França o Cálculo Mental é um conteúdo que faz parte da matriz curricular escolar. Selecionamos três dessas propostas a serem discutidas a seguir.

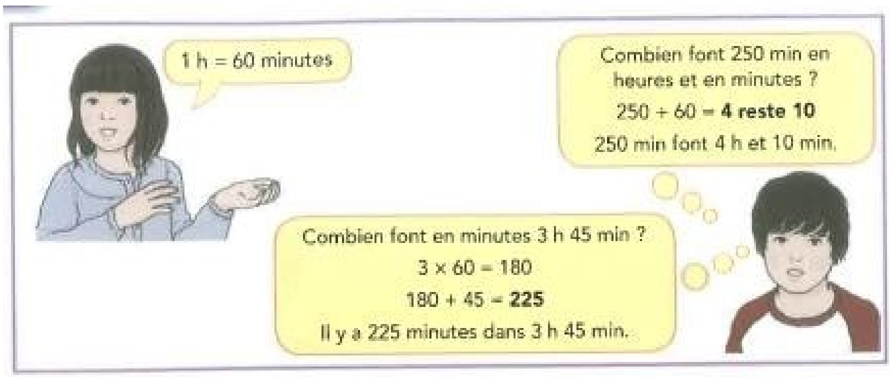
Figura 3: A passagem por 100



Fonte: Fontaine, 2019, p. 40

A passagem por 100 faz parte da compreensão do Sistema de Numeração Decimal, que é referida por Guimarães (2009) como *nós*. Os *nós* são pontos onde ocorrem as mudanças de ordem, pois se não se sabe identificar os momentos de mudança e quais são as regularidades em torno delas, será difícil realizar algum cálculo. Por exemplo: pensar nos números que vêm após o 99, o 199, o 299, e assim por diante. Observe que, para resolver a adição 94 + 7, utiliza-se a decomposição do 7 com objetivo de compor uma centena exata e assim facilitar o cálculo; da mesma forma, para a subtração de 102 – 6, decompõe-se o 6 com o mesmo objetivo.

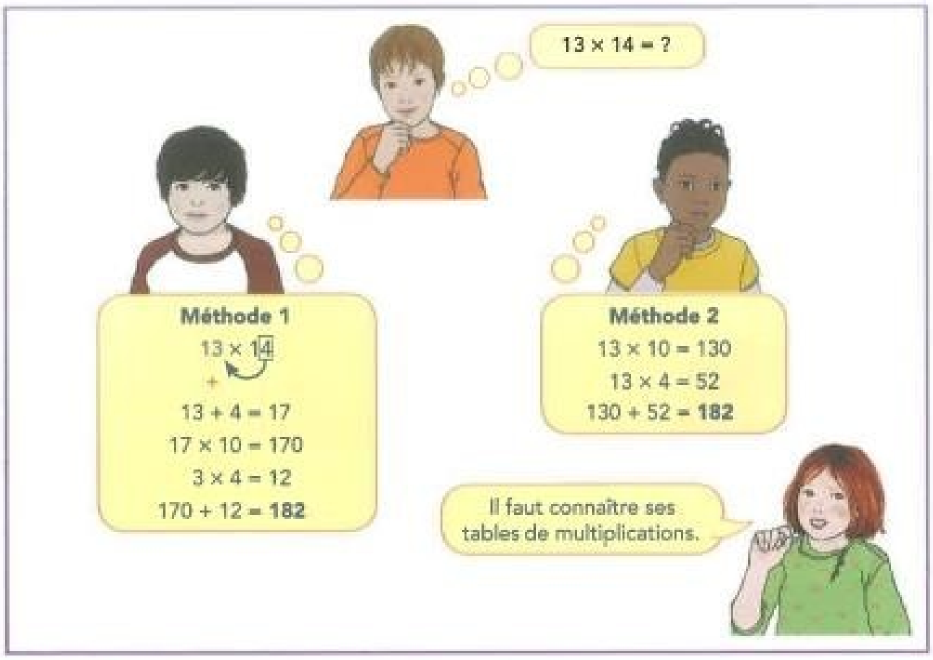
Figura 4: A hora e a sua equivalência em minutos



Fonte: Fontaine, 2019, p. 50

Na figura 4, a proposta é o estudo da equivalência entre horas e minutos e o processo da conversão. Ao abordar essa relação, é possível favorecer não apenas a leitura do tempo, mas também a resolução rápida de problemas cotidianos relacionados ao tempo. Por exemplo, sabemos que uma hora é composta por 60 minutos, ao internalizar essa equivalência é possível realizar cálculos mentais para converter horas em minutos e vice-versa. Essa destreza simplifica a interpretação de horários, por exemplo, no caso de identificar que 250 minutos equivalem a 4 horas e 10 minutos, e pode se revelar valiosa em situações que demandam estimativas rápidas. Neste contexto, o cálculo mental torna- se uma ferramenta prática para lidar com questões temporais, proporcionando uma abordagem ágil e intuitiva para a manipulação de unidades de tempo.

Figura 5: Multiplicar até 20×20



Fonte: Fontaine, 2019, p. 34

Multiplicar até 20×20 é como uma tabuada até o 20. Então, aqui englobam a multiplicação como a apresentada na figura 5.

Chamamos atenção para a primeira estratégia (apresentada no *Méthode 1* da figura 5): para resolver 13×14, decompõe-se o 14 em 1 dezenas e 4 unidades e se soma as unidades ao 13. Assim, podemos enunciar que:

$$13 \times 14 \rightarrow (13 + 4) \times 10 \rightarrow 17 \times 10$$

$$13x14 \rightarrow (10 + 3)x(10 + 4) \rightarrow 10x10 + 3x10 + 10x4 + 3x4 \rightarrow (10 + 3 + 4)x10 + 3x4 \rightarrow 17x10 + 3x4$$

Já a segunda estratégia (apresentada no *Méthode 2* da figura 5), utiliza-se a decomposição e propriedade distributiva para resolução:

$$13 \times (10 + 4) \rightarrow 13 \times 10 + 4 \times 10$$

Como vimos nos exemplos, a decomposição emerge como uma das estratégias frequentemente empregadas e integrantes do repertório do cálculo mental. Essa abordagem, que envolve a "quebra" de números em partes mais gerenciáveis, possibilita a simplificação de operações, facilitando a manipulação mental de valores complexos.

A seguir, exploramos algumas possibilidades de estratégias explicitadas por Corrêa da Costa (2018) ao analisar como o cálculo mental é proposto em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental em situações envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão.

Figura 6: Decomposição

Decomposição

$$18 + 3 =$$
$$18 + (2 + 1) =$$
$$20 + 1 = 21$$

Fonte: acervo dos autores

Ao desdobrar um número em suas unidades fundamentais ou em termos mais familiares, como exemplificado na figura 6, os praticantes do cálculo mental podem realizar operações de forma mais assertiva. Essa técnica não apenas agiliza os cálculos, mas também fortalece a compreensão numérica, proporcionando uma visão mais clara da estrutura dos números envolvidos.

A estratégia da compensação no cálculo mental opera mediante o ajuste estratégico dos números envolvidos em uma operação, com o intuito de simplificar o processo de cálculo, como no caso da figura 7:

Figura 7: Compensação

Compensação

$$18 - 3 =$$
$$(18 + 2) - 3 =$$
$$20 - 3 = 17$$
$$17 - 2 = 15$$

Fonte: acervo dos autores

A compensação em $18 - 3$ consiste em adicionar duas unidades ao minuendo formando 20, que corresponde a uma dezena exata. Assim, após operar $20 - 3$, subtraímos 2 do resultado final. Dessa forma, compensamos subtraindo o número que antes fora adicionado, por isso o nome compensação. Essa técnica também funcionará para as operações de adição.

Na figura 8, apresentamos a Decomposição como estratégia para trabalhar com centenas:

Figura 8: Decomposição com centenas exatas

Decomposição trabalhando com centenas exatas

$$767 - 300 =$$

$$\underbrace{(700 + 67)}_{} - 300 =$$

$$(700 - 300) + 67 =$$

$$400 + 67 = 567$$

Fonte: acervo dos autores

As centenas exatas correspondem aos grupos de 100 unidades que foram subtraídos, como 100, 200, 300, e assim por diante. Então, na figura 8 vemos novamente a decomposição, funcionando como uma estratégia parte do processo de compor uma centena exata para depois efetuar todo cálculo. Observamos que, ao lidar com centenas exatas, os praticantes do cálculo mental desenvolvem a capacidade de dividir e combinar valores rapidamente e, para isso, podem também trabalhar com a compensação e a aproximação. Por exemplo, ao somar ou subtrair números que possuem centenas, há a possibilidade de quebrar esses valores em partes menores e, posteriormente, recompô-los, como vimos na figura 8.

Vejamos agora cinco formas de resolução da operação $65 + 27$, que podem compor o repertório de possibilidades para calcular mentalmente:

- Possibilidade 1: à primeira parcela é adicionado ou subtraído um múltiplo de 10.

$$65 + 27 =$$

$$65 + (20 + 7) =$$

$$(65 + 20) + 7 =$$

$$85 + 7 = 92$$

- Possibilidade 2: à primeira parcela é adicionado ou subtraído um número aproximado da segunda parcela, correspondente a um múltiplo de 10, de modo a facilitar o cálculo.

$$65 + 27 =$$

$$65 + (30 - 3) =$$

$$(65 + 30) - 3 =$$

$$95 - 3 = 92$$

- Possibilidade 3: à primeira parcela é adicionado ou subtraído um número correspondente a uma parte da segunda parcela, de modo a que seja obtido um múltiplo de 10.

$$65 + 27 =$$

$$65 + (22 + 5) = 65 + (5 + 22)$$

$$(65 + 5) + 22 =$$

$$70 + 22 = 92$$

- Possibilidade 4: os números são decompostos em suas ordens e as unidades são somadas ou subtraídas.

$$65 + 27 =$$

$$(60 + 5) + (20 + 7) =$$

$$(60 + 20) + (5 + 7) =$$

$$80 + 12 = 92$$

- Possibilidade 5: os números são inicialmente divididos nas suas ordens para a adição ou subtração, que são adicionadas ou subtraídas sequencialmente.

$$65 + 27 =$$

$$(60 + 5) + (20 + 7) =$$

$$60 + 20 + 5 + 7 = (60 + 20 + 5) + 7$$

$$85 + 7 = 92$$

Reiteramos a relevância de estimular os estudantes em sala de aula a realizarem o cálculo mental e, para os estudantes que costumam colocar somente os resultados das contas, sugere-se uma descrição do processo. Vale a pena investir em questionamentos para que descrevam o raciocínio utilizado. Dessa forma, será possível investigar se houve a apropriação de estratégias mentais, algoritmos, bem como compartilhar e descobrir novas formas de calcular mentalmente.

Visando contribuir com a ampliação do repertório do campo multiplicativo, apresentamos agora algumas estratégias para a realização de cálculos de multiplicação ou de divisão entre dois números. Em algumas situações os fatores possuem características específicas, que oportunizam pensar em estratégias específicas. Vejamos o exemplo da figura 9:

Figura 9: Multiplicar por potência de 10

Multiplicar por uma potência de 10 (10, 100 ou 1000) e dividir o resultado por 2:

$$\mathbf{50} \times 24 =$$

$$\mathbf{100} \times 24 = 2400$$

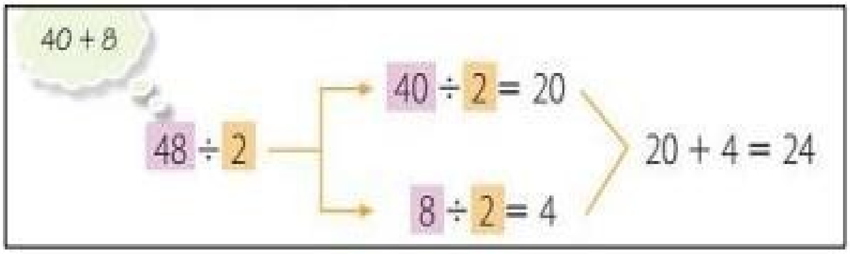
$$2400 \div \mathbf{2} = 1200$$

Fonte: Corrêa da Costa, 2018, p. 41

Observe que 50 é a metade de 100, assim como 5 e 500 são as respectivas metades de 10 e 1000. Assim, para resolver expressões como 50×24, pode-se multiplicar por uma potência de 10 (10, 100 ou 1000) e dividir o resultado por 2.

As atividades que propõem a divisão de dois números de forma que o dividendo seja um número formado por 2 algarismos e o divisor um número de 1 algarismo oportunizam não só a exploração de técnicas já vistas como a decomposição, mas também a observação de algumas regularidades que elas compreendem, como nos "ensaios sucessivos" (Guimarães, 2009, p.169), quando é possível identificar o quociente por tentativa com base na multiplicação.

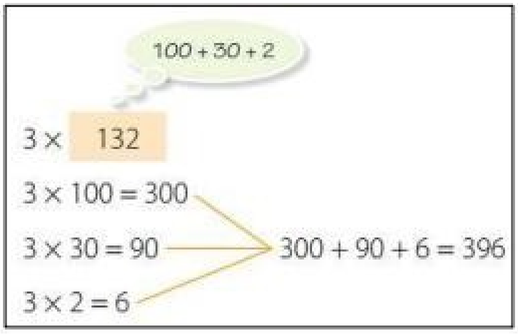
Figura 10: Decompor o dividendo de acordo com suas ordens e aplicar a propriedade distributiva



Fonte: Bordeaux et al, 2014c, p. 238

Na figura 10, vemos que a decomposição do dividendo está relacionada à aplicação da propriedade distributiva, sendo esta a base que fundamenta a eficácia da técnica em foco. Essa abordagem envolve a decomposição do dividendo 48 como $40 + 8$, de acordo com suas ordens e, posteriormente, a aplicação da propriedade distributiva. Neste sentido, a mesma ideia de estratégia pode ser utilizada na multiplicação entre dois números, em que um dos fatores é formado por 1 algarismo e o outro por 2 ou 3 algarismos:

Figura 11: Decompor um dos fatores e aplicar a propriedade distributiva da multiplicação



Fonte: Bordeaux et al, 2014c, p. 218

Assim, buscando uma solução, a estratégia apresentada na figura 11 envolve a decomposição de um dos fatores, seguida da aplicação da propriedade distributiva da multiplicação.

Ainda no campo multiplicativo, apresentamos mais uma técnica que pode contribuir para o desenvolvimento do cálculo mental quando nos deparamos com expressões do tipo $1500 \div 10$, $6000 \div 150$, $9000 \div 1500$. Essas divisões possuem uma característica específica: a divisão de múltiplos de 10, 100 e 1000 por 10 e múltiplos de 10 e 100. Observe na figura 12, como podemos resolver questões desse tipo:

Figura 12: Divisão entre múltiplos de 10

Fonte: Bordeaux et al, 2014c, p. 92

A estratégia utilizada para resolver a divisão $4500 \div 500$ consiste em escrever o divisor (500), que é um múltiplo de potência de 10, como uma nova divisão. Nesta abordagem, um novo divisor é uma potência de 10, enquanto o dividendo permanece como o múltiplo.

As possibilidades mencionadas até o momento também fomentam o estudo de estratégias para resolver cálculos com frações. Calcular a fração de um número faz parte de situações que buscam a representação da parte de um todo, cálculo de porcentagem e medições e proporções. Dessa forma, atribuir modos de resolver expressões com esta característica se faz necessário no repertório que contribui para a realização do cálculo mental. Por exemplo, para calcular ¾' de 100, podemos realizar a divisão desse número pelo denominador da fração e, em seguida, multiplicar o resultado pelo numerador:

$$\frac{3}{4} \times 100 =$$

$$(100 \div 4) \times 3 =$$

$$25 \times 3 = 75$$

Essa sequência de operações proporciona uma maneira direta de determinar a fração de um número, permitindo uma representação precisa da parte fracionária em relação ao todo. Ressaltamos que, para que essa estratégia seja considerada como parte do cálculo mental, é necessário que seja executada compreendendo seus passos e, com o passar do tempo e a mobilização de várias estratégias, a sistematização acontecerá de forma automatizada.

Finalmente, quando se trata de operações envolvendo números pertencentes ao conjunto dos números racionais, especialmente os números decimais, uma estratégia potente é a prática manipulativa de representações do nosso sistema monetário. O envolvimento com o sistema monetário desempenha um papel significativo no aprimoramento do cálculo mental, pois possibilita que os estudantes compreendam e memorizem diversos aspectos relacionados ao sistema de numeração. A manipulação de representações do sistema monetário brasileiro não apenas facilita a compreensão da composição do sistema numérico, mas também auxilia na assimilação da sequência numérica e na identificação de padrões presentes em operações matemáticas. Esse tipo de abordagem, utilizando o contexto financeiro, possibilita a mobilização de conceitos matemáticos que podem favorecer a construção de aprendizagem significativa .

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo apresentamos uma discussão sobre estratégias relacionadas ao desenvolvimento da habilidade de cálculo mental que podem fazer parte de cenários cotidianos, dentro e fora do entorno escolar. Em especial, ressaltamos o caso de utilização de cálculos mentais em transações financeiras, destacando sua associação com cálculos rápidos … Os benefícios do desenvolvimento dessa habilidade são diversos, culminando na conquista de autonomia e confiança, fundamentais para enfrentar os desafios diários que demandam raciocínio lógico e decisões fundamentadas.

Foram exploradas atividades voltadas aos anos iniciais do ensino fundamental, visando explicitar e compor estratégias para a realização de cálculos mentais. Inicialmente, discutimos o conceito de cálculo mental e sua abordagem em documentos oficiais, pautando-nos em indicações apresentadas na BNCC, nos PCN e em documentos curriculares oficiais francês e argentino. Em seguida, fundamentados na pesquisa de Guimarães (2009), apresentamos algumas atividades destinadas a estudantes do quarto e quinto ano, com ênfase na compreensão do Sistema de Numeração Decimal, abarcando os campos aditivo e multiplicativo.

Posteriormente, delineamos possibilidades de tarefas e técnicas que contribuem para o desenvolvimento do cálculo mental, baseados na investigação de Corrêa da Costa (2018), que explorou a construção dessa habilidade por meio de uma análise de livros didáticos dos anos iniciais.

Ademais, destacamos que das estratégias que são relevantes para calcular mentalmente a composição e decomposição numérica, bem como as propriedades comutativa e distributiva fundamentam os modos de resolver as expressões numéricas, que por sua vez também contribuem para o desenvolvimento do cálculo mental. Ao abordarmos operações com números pertencentes ao conjunto dos números racionais, notadamente os decimais, destaca-se a manipulação de representações do nosso sistema monetário como estratégia prática. O engajamento com este sistema desempenha um papel relevante no aprimoramento do cálculo mental, proporcionando aos estudantes a compreensão e memorização de diversos aspectos relacionados ao sistema de numeração; assim como a *sobrecontagem* utilizando os dedos das mãos para as operações de adição e subtração com números naturais de 1 a 10.

Por fim, reiteramos a importância de cultivar e aprimorar o cálculo mental, ressaltando que essa habilidade não apenas enriquece o repertório matemático dos estudantes, mas também os prepara para enfrentar as variadas situações que demandam tal destreza.

REFERÊNCIAS

BORDEAUX, A.L.; RUBINSTEIN, C.; FRANÇA, E.; OGLIARI, E.; MIGUEL, V. Novo bem-me-quer: alfabetização matemática: ensino fundamental: anos iniciais. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2014a.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. [Brasília: MEC], 2017. 153

___________. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos, PNLD/2016**. Brasília: MEC/SEF, 2015.

___________. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BUENOS AIRES. Secretaría de Educación - Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. **Cálculo mental con números racionales: apuntes para la enseñanza**. Coordinado por Susana Wolman – 1ª ed. Buenos Aires: 2006.

CARVALHO, R. A; PONTE, J. P. Cálculo mental com frações: evolução das estratégias dos alunos numa experiência de ensino. **Revista Educação Matemática em Foco**, v. 6, n. 2, 2018.

CARVALHO, R. Cálculo mental com números racionais: **Um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade** (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa, Portugal. (disponível em http://hdl.handle. net/10451/23646), 2016.

CORRÊA DA COSTA, J. S. **O cálculo mental em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais.** 2018. 172 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. 2018.

COSTA, Jéssica, Correa da; FREITAS, José Luiz, M. de. Oficinas on-line 2021: diálogos sobre propostas em matemática. **Pensando sobre estratégias de cálculo mental.** Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=VQpqyPqKeWE&list=PLJWAm9SPEsqvziY0Q5g Y9xuI9TfJy_bI3&index=9. Acesso em 15 nov. 2023.

FONTAINE, V. **Calcul Mental CP**. Les Petits Devoirs. France: La librairie des école, 2019.

______. **Calcul Mental CE1**. Les Petits Devoirs. France: La librairie des école, 2019.

______. **Calcul Mental CE2**. Les Petits Devoirs. France: La librairie des école, 2019.

FRANÇA. Ministère de l'éducation nationale. **Les nouveaux programmes de l'école primaire-Mathématiques**. Document d'accompagnement des programmes de l'école primaire, Le calcul mental, Cycle des apprentissages fondamentaux, Cycle des approfondissements, 2002.

GUIMARÃES, S. D. **A prática regular de cálculo mental para ampliação e construção de novas estratégias de cálculo por alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental.** 2009. 261 f. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande. 2009.

PARRA, C. **Cálculo mental na escola primária**. In: PARRA C. & SAIZ, I. (org.) Didática da Matemática. Porto Alegre: Artes Médicas,2001, p.186-235.

Diálogos sobre propostas didáticas em matemática

ISBN 978-655376361-6

9 786553 763616

Realização:

DDMat Grupo de Estudos em Didática da Matemática

Apoio:

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
UFMS

CNPq
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico