OFICINA 2 - 11/05/2023

GEOMETRIA ANALÍTICA BÁSICA

Por quê? O que? Como?

José Luiz Magalhães de Freitas
joseluizufms2@gmail.com

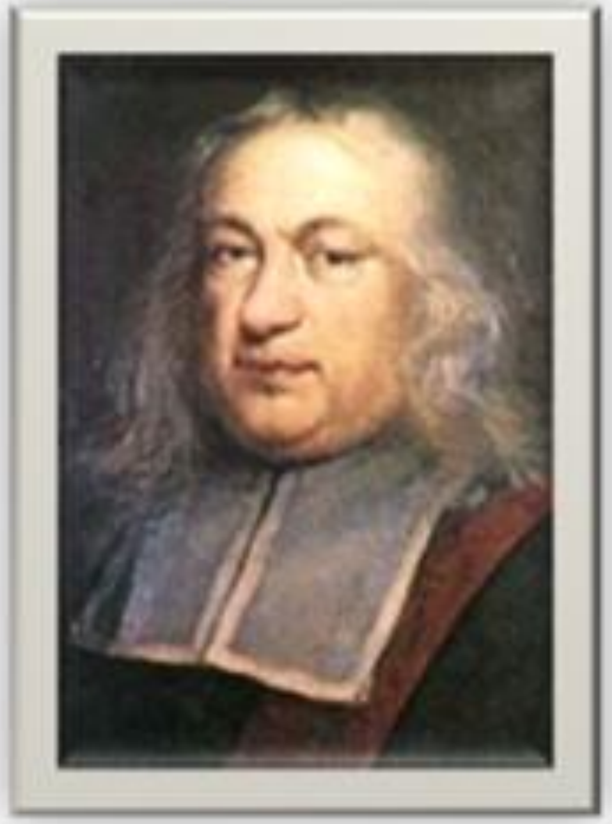
Vitoria Lourenço Luges da Silva
vitoria.luges@ufms.br

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
UFMS
CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
CAPES
EduMat
INSTITUTO FEDERAL Mato Grosso do Sul Campus Coxim
UFGD Universidade Federal da Grande Dourados
Realização:
DDMat Grupo de Estudos em Didática da Matemática

CRIADORES DA GEOMETRIA ANALÍTICA

Filósofo e Matemático Francês que introduziu a noção de Coordenadas no plano.

René Descartes
(1596-1650)



Pierre de Fermat
(1601-1665)

Possui um mérito maior na Geometria Analítica, era advogado e considerava a Matemática como lazer

APLICAÇÕES DA GEOMETRIA ANALÍTICA

- Matemática
  Construção de gráficos, conecta geometria e álgebra;
- Engenharia
  Locação de alicerces;
  Localização via satélite (gps);
- Física
  Distância entre dois objetos;
- Informática
  Modelos matemáticos com geometria analítica na produção de imagens em telas;

O QUE A BNCC FALA?

(EF06MA16) Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.

(EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades da igualdade.

(EF08MA07) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano.

(EM13MAT301) Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

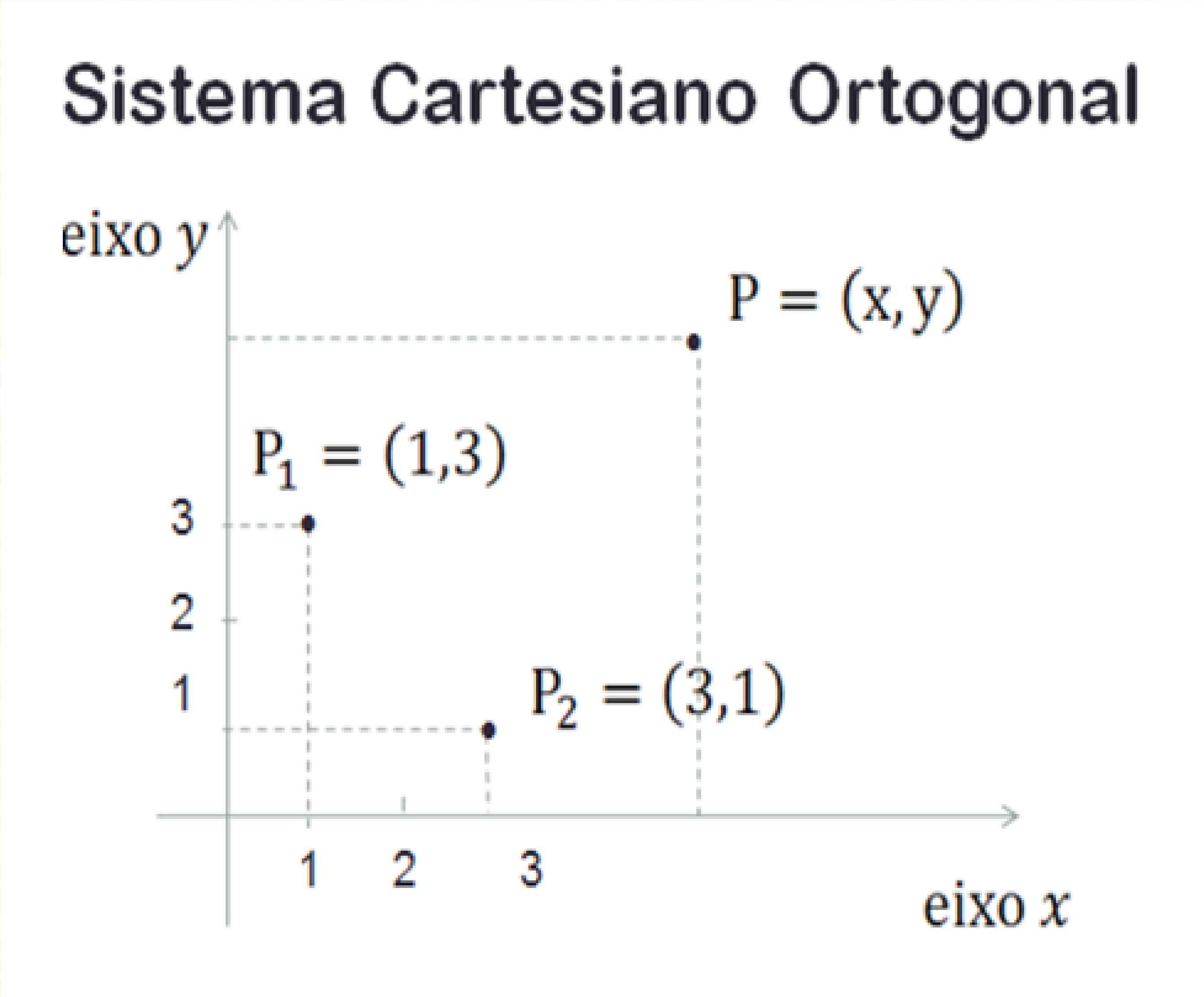
(BRASIL, 2018)

O QUE?

- Marcar pontos;
- Deslocamento, ampliação e redução de figuras;
- Equação da reta;
- Distância de dois pontos;
- Equação da circunferência.

PLANO CARTESIANO

- Correspondência biunívoca entre os pontos do plano P e os pares de números reais (x, y);
- Os números x e y são chamados coordenadas do ponto P.

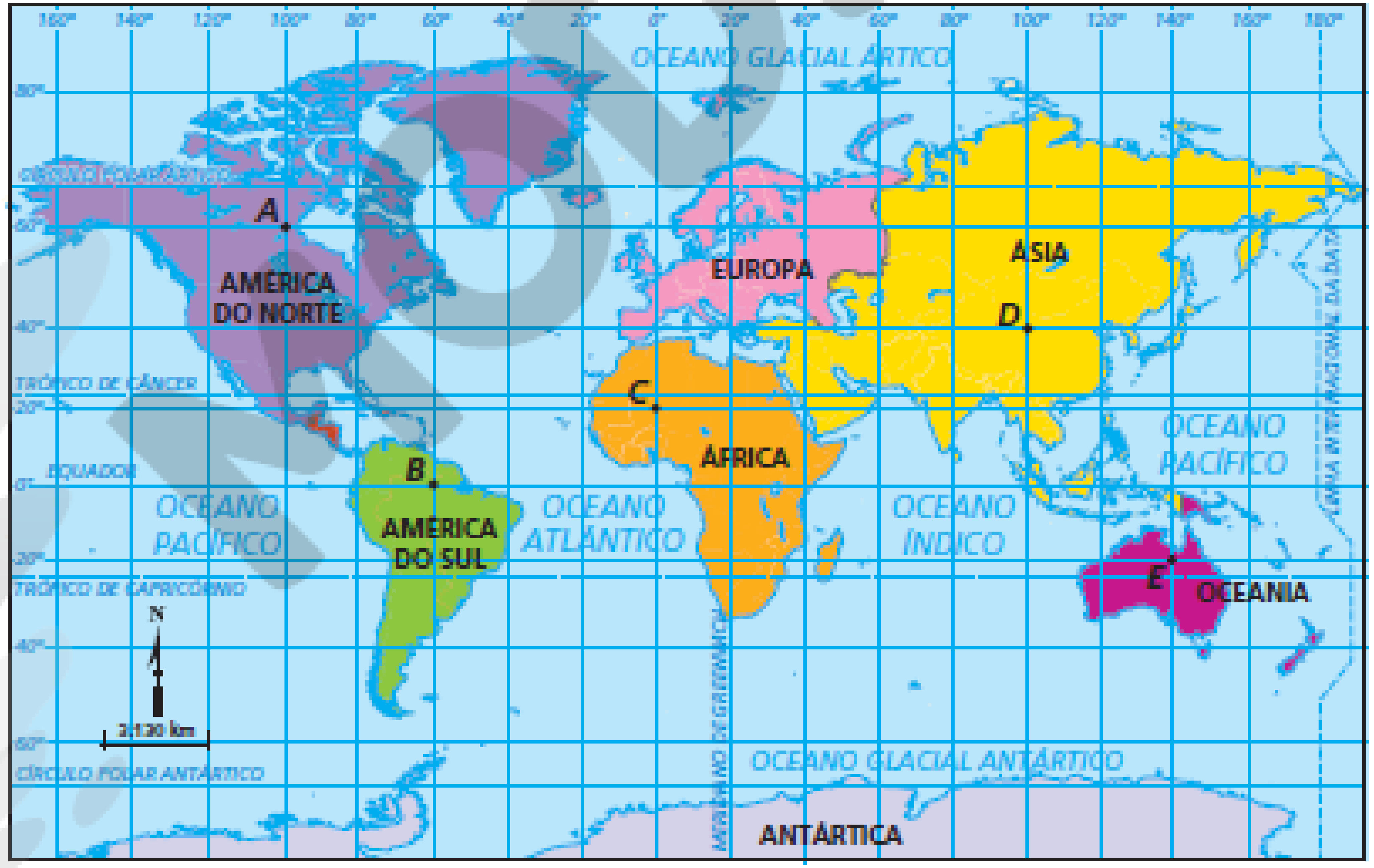


- Obs.: $P_1 = (1, 3) \neq P_2 = (3, 1)$

MARCAR PONTOS

3 Determine as coordenadas geográficas dos pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*, indicados no mapa abaixo.

Coordenadas geográficas no planisfério

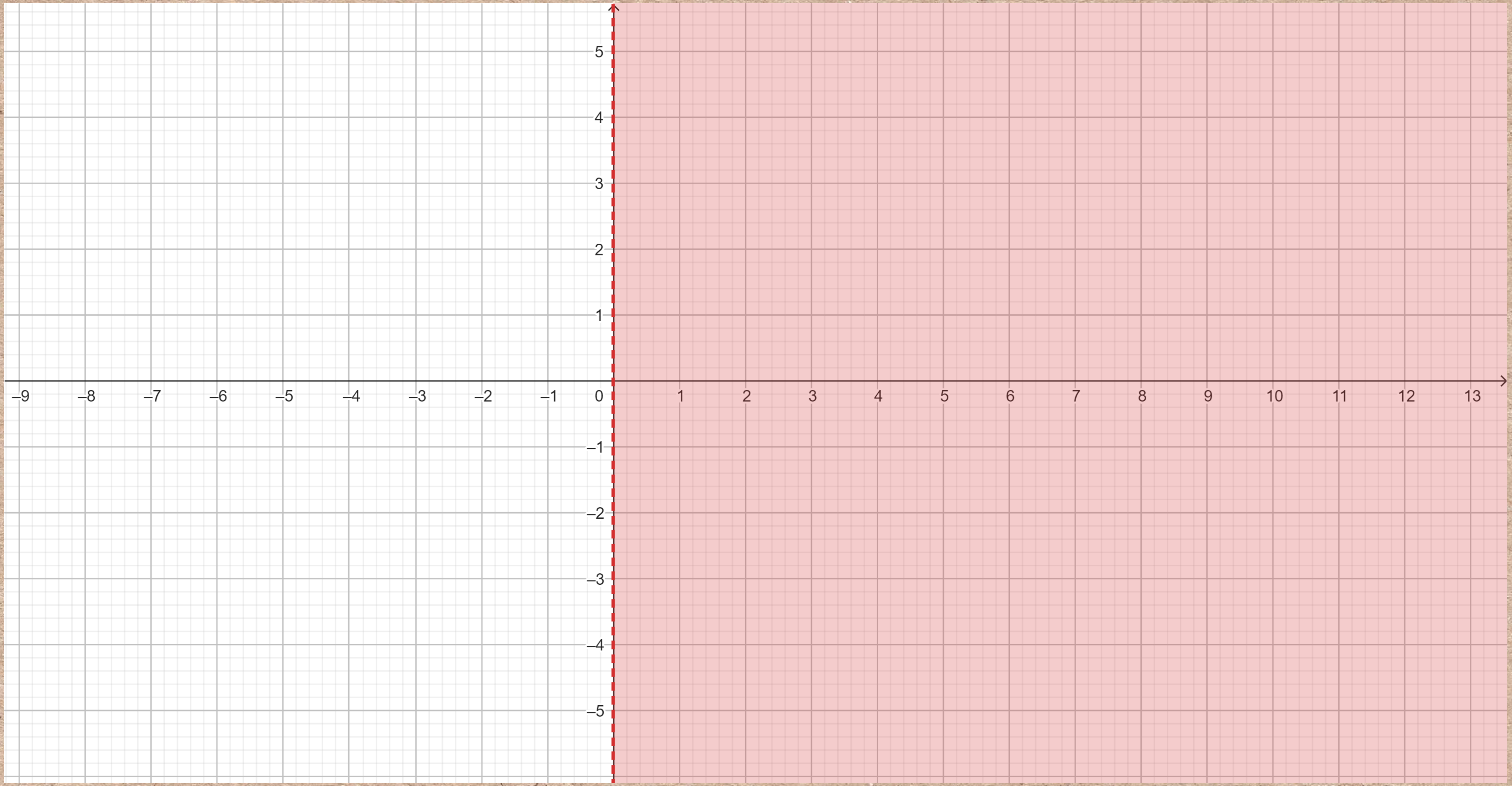


SONIA VAZ

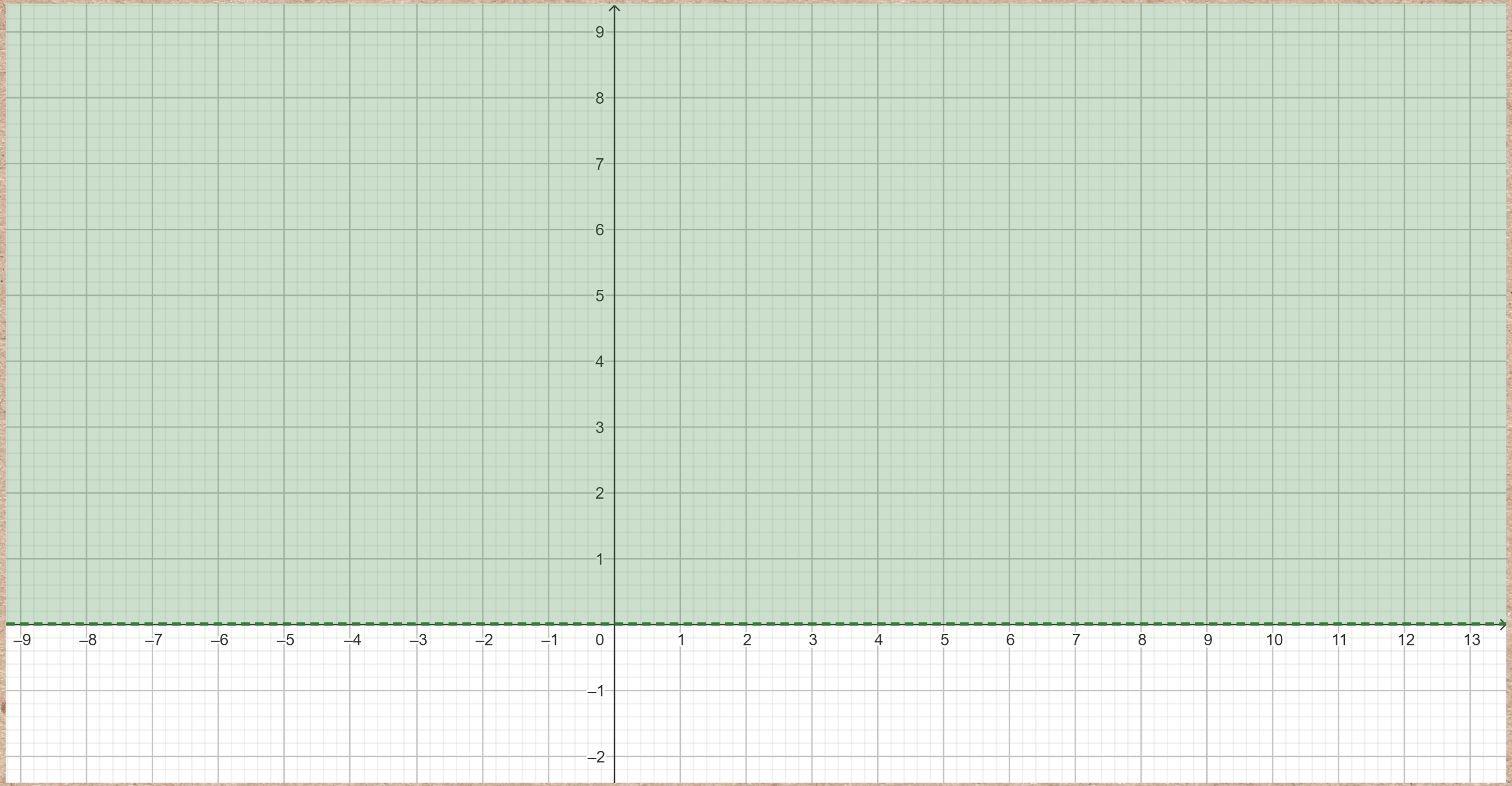
Fonte: FERREIRA, G. M. L. *Atlas geográfico*: Espaço mundial. 5. ed. São Paulo: Moderna, 2019. p. 8-9.

(PAIVA, 2020)

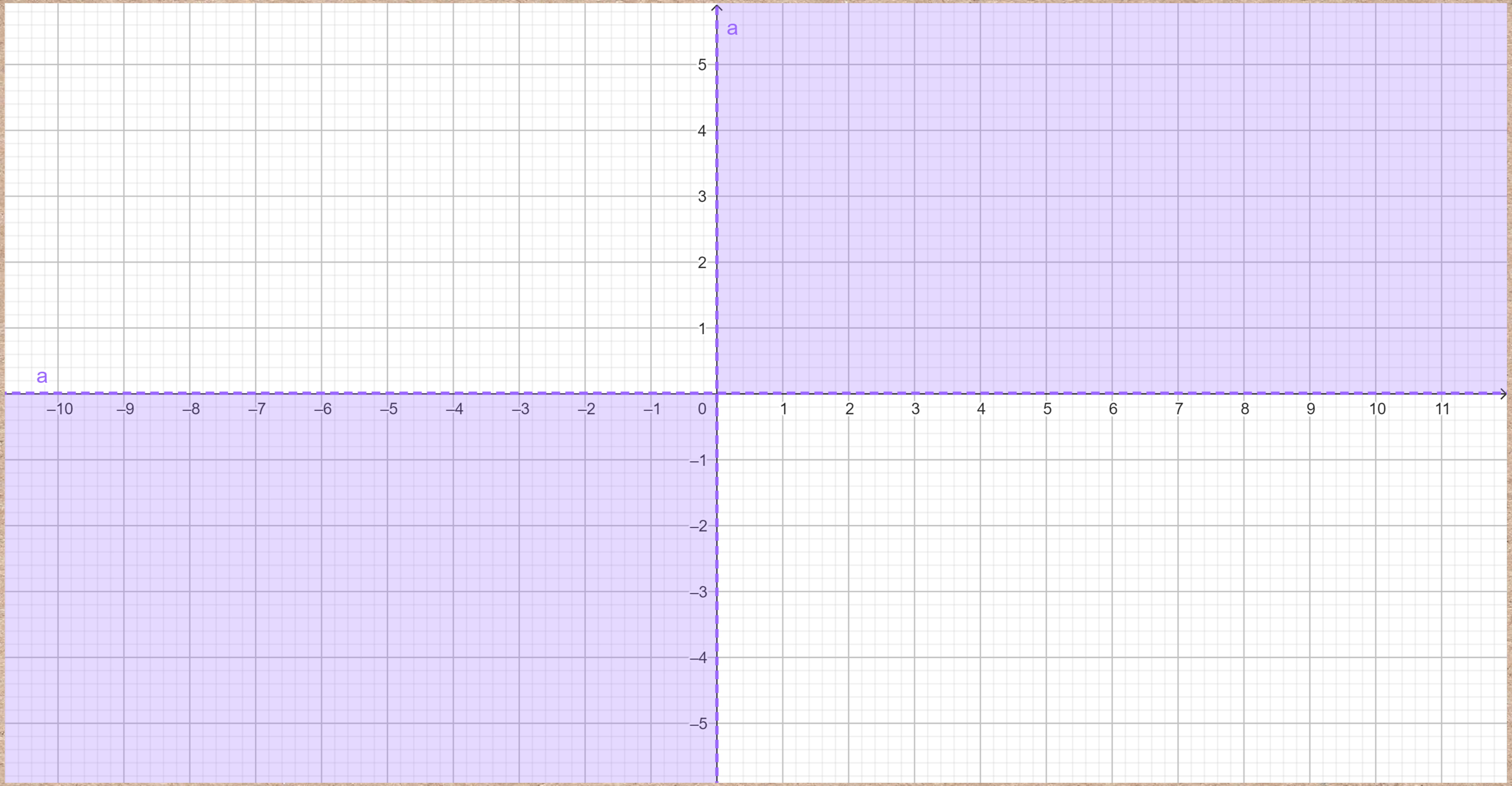
MARCAR PONTOS



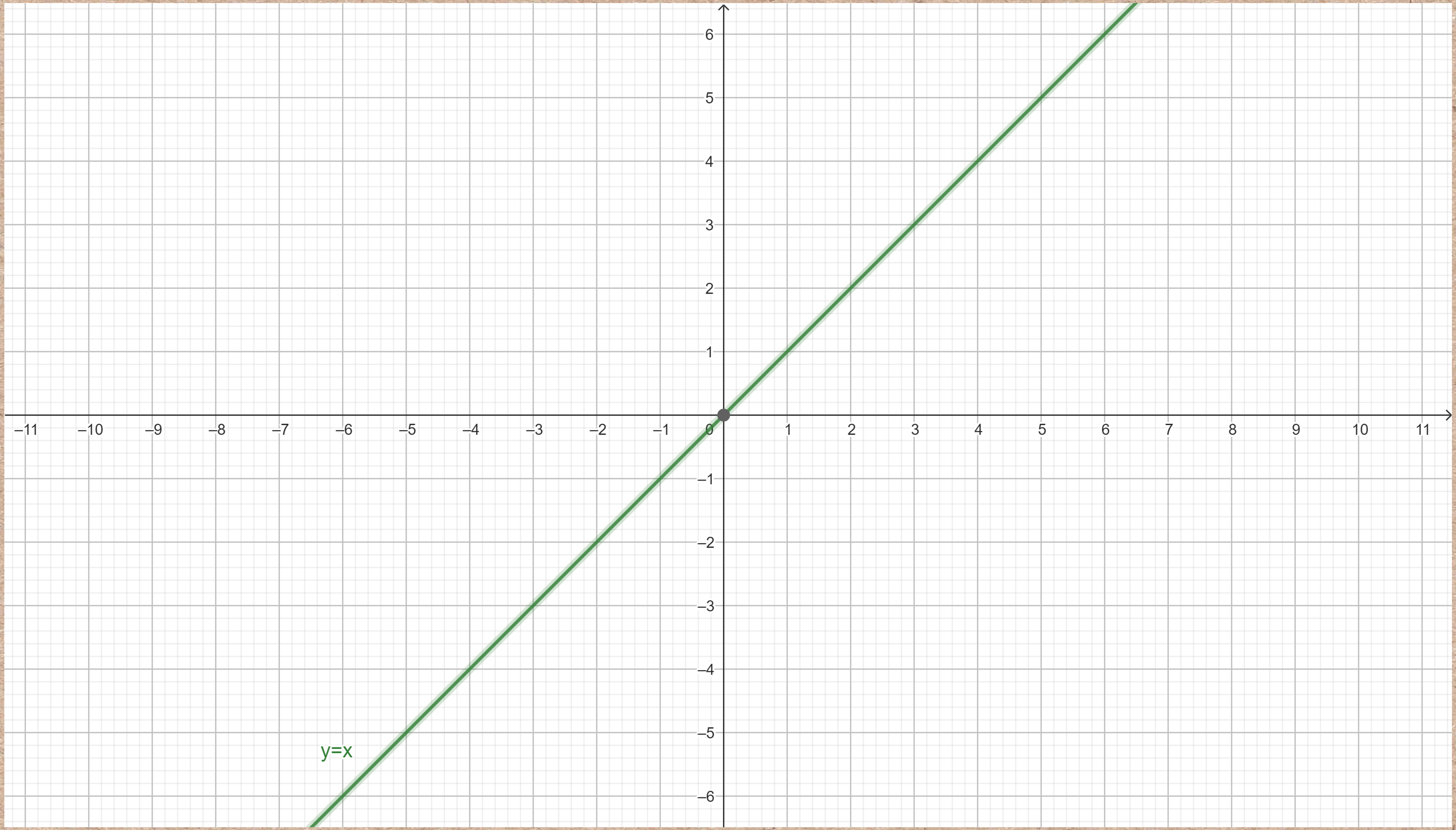
MARCAR PONTOS



MARCAR PONTOS



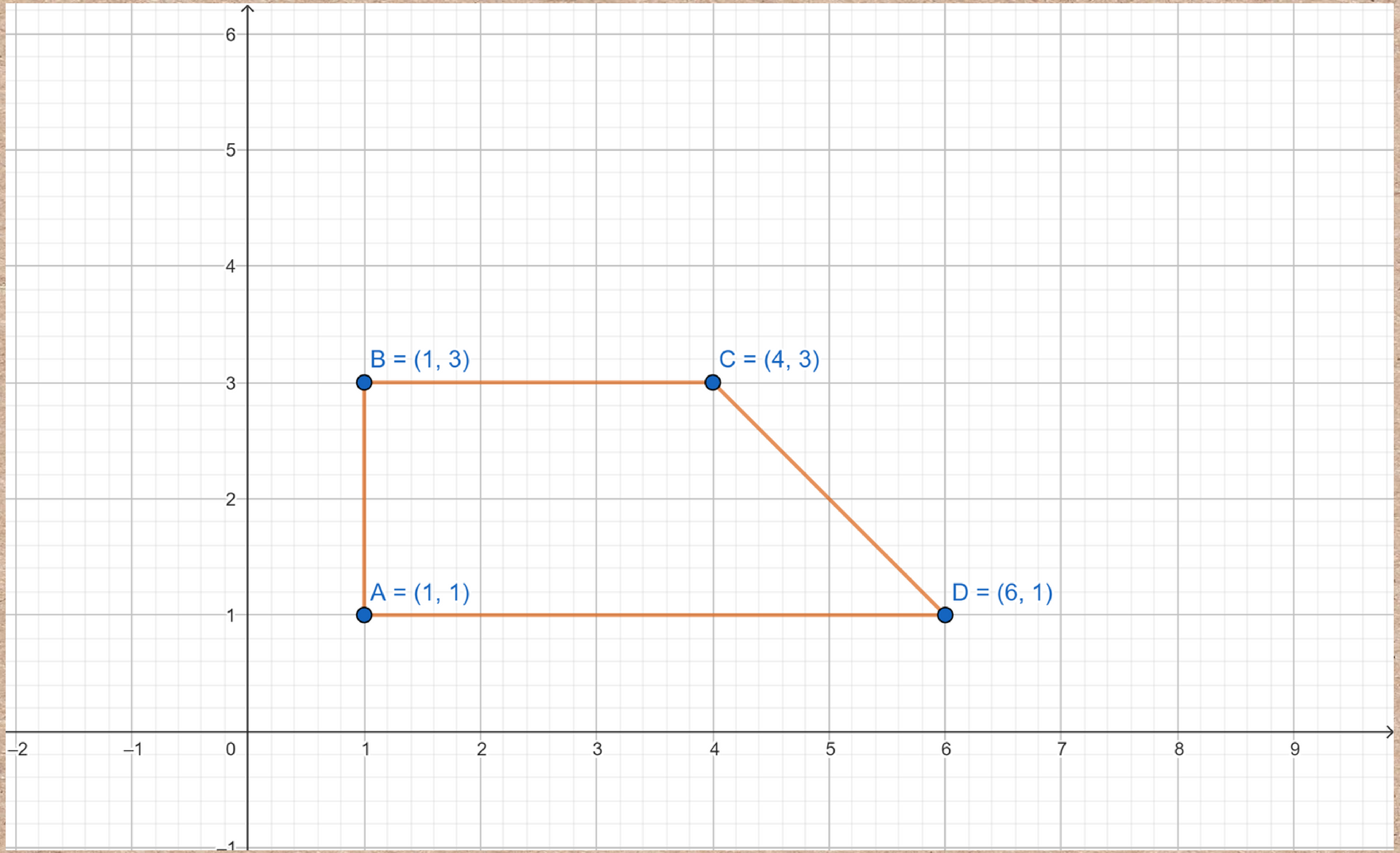
MARCAR PONTOS



MARCAR PONTOS

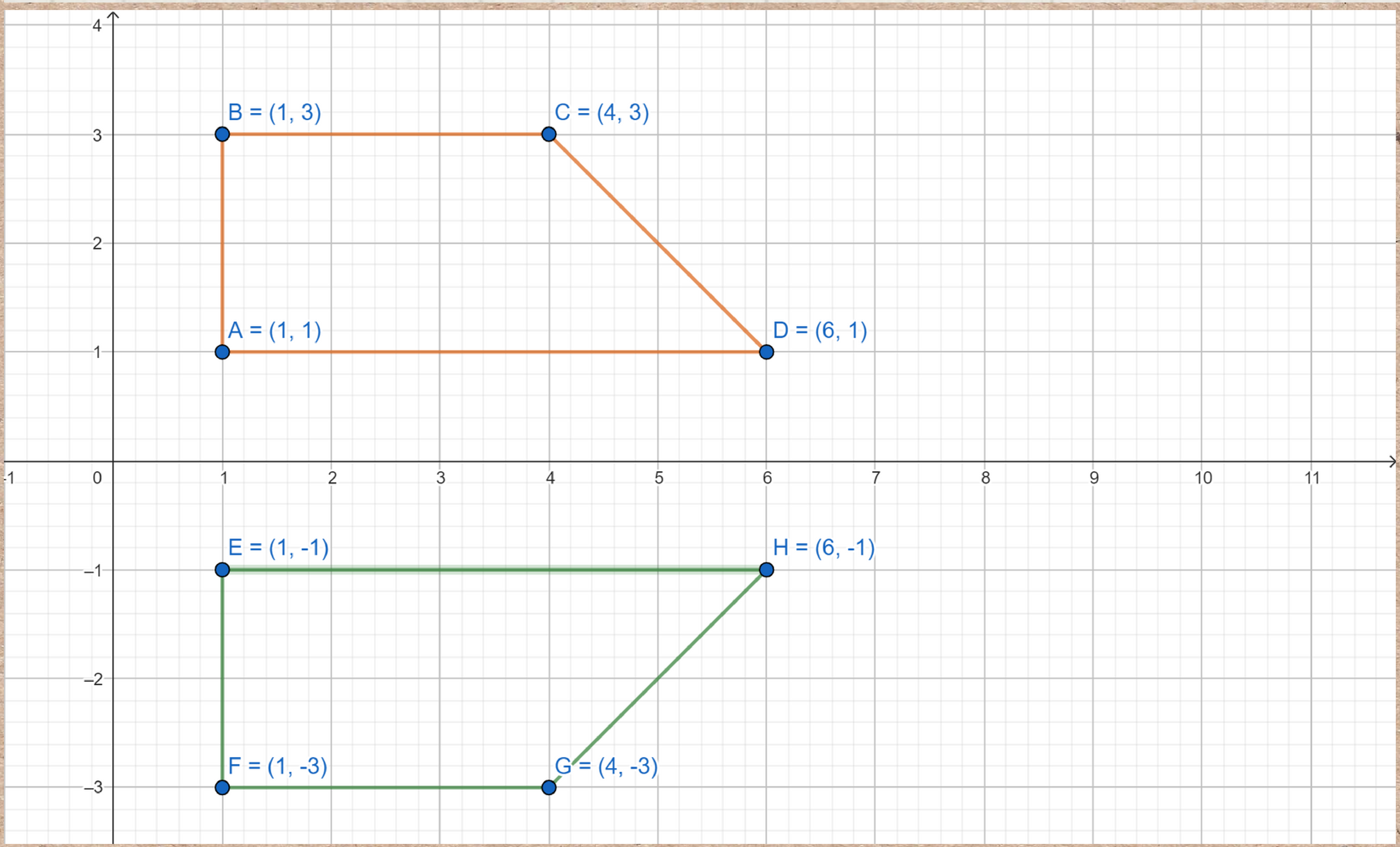
Deslocamento de figuras

Qual é o simétrico da figura em relação ao eixo x?



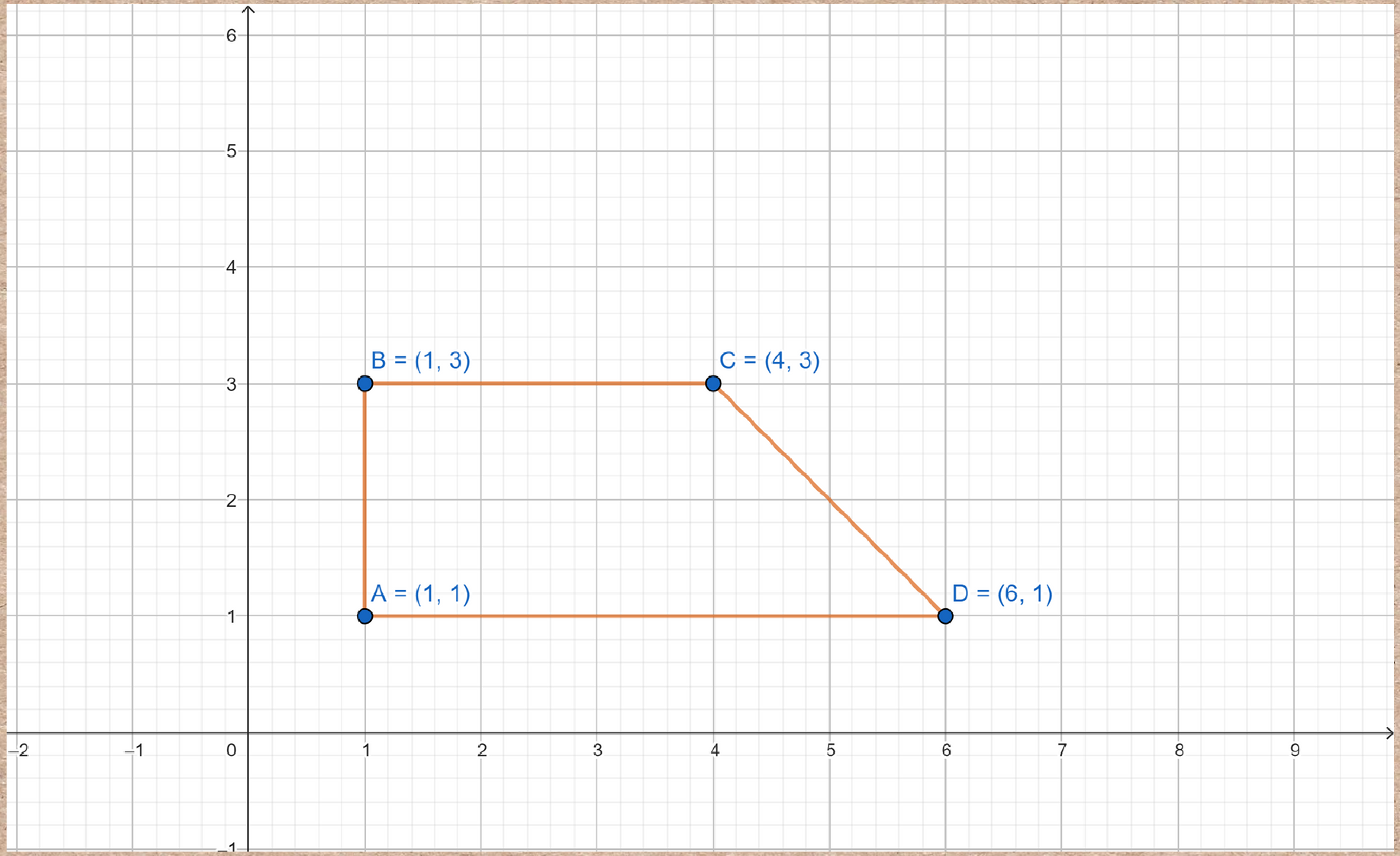
MARCAR PONTOS

Simétrico em relação ao eixo x

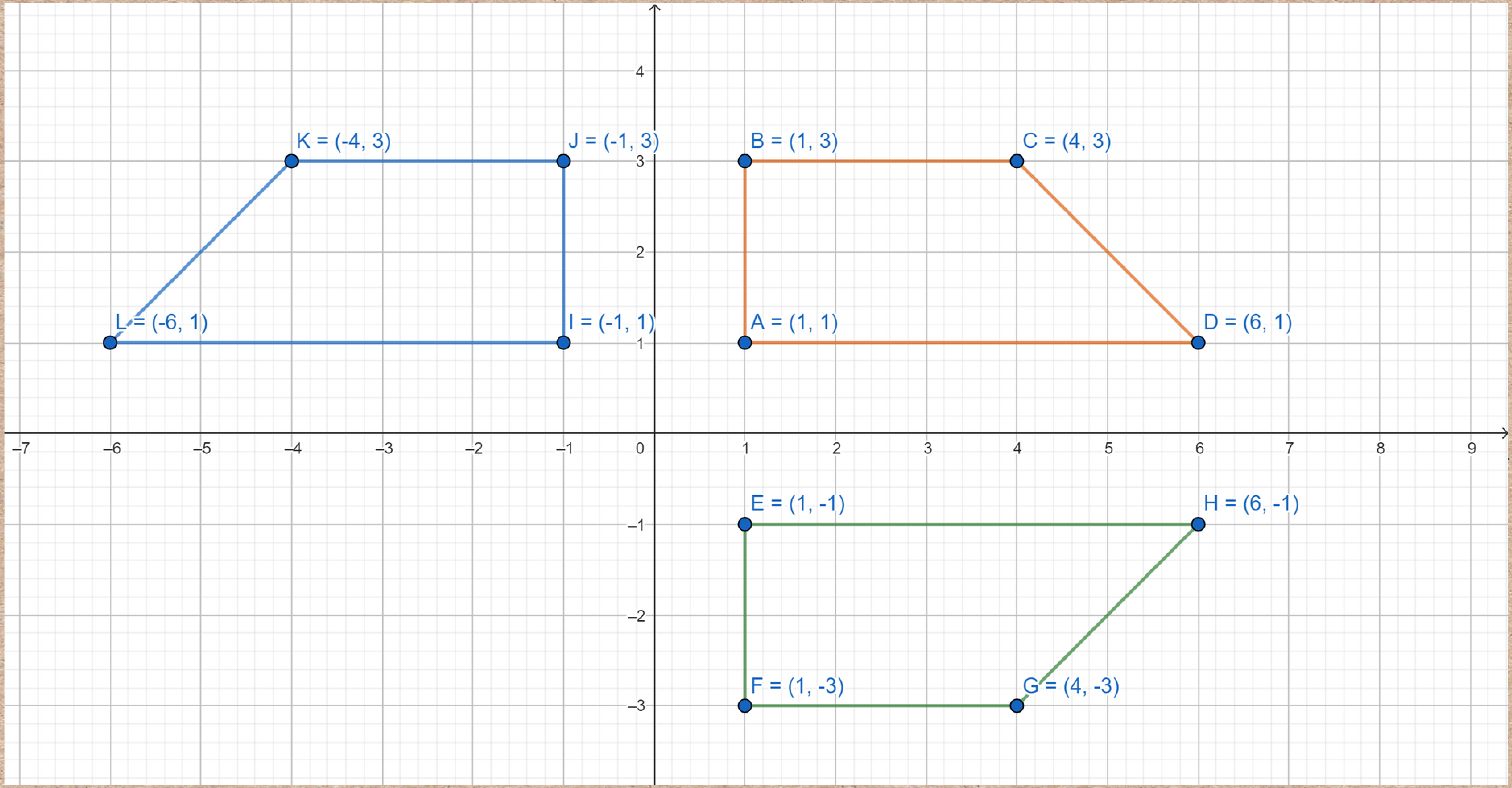


MARCAR PONTOS

Qual é o simétrico da figura em relação ao eixo y?

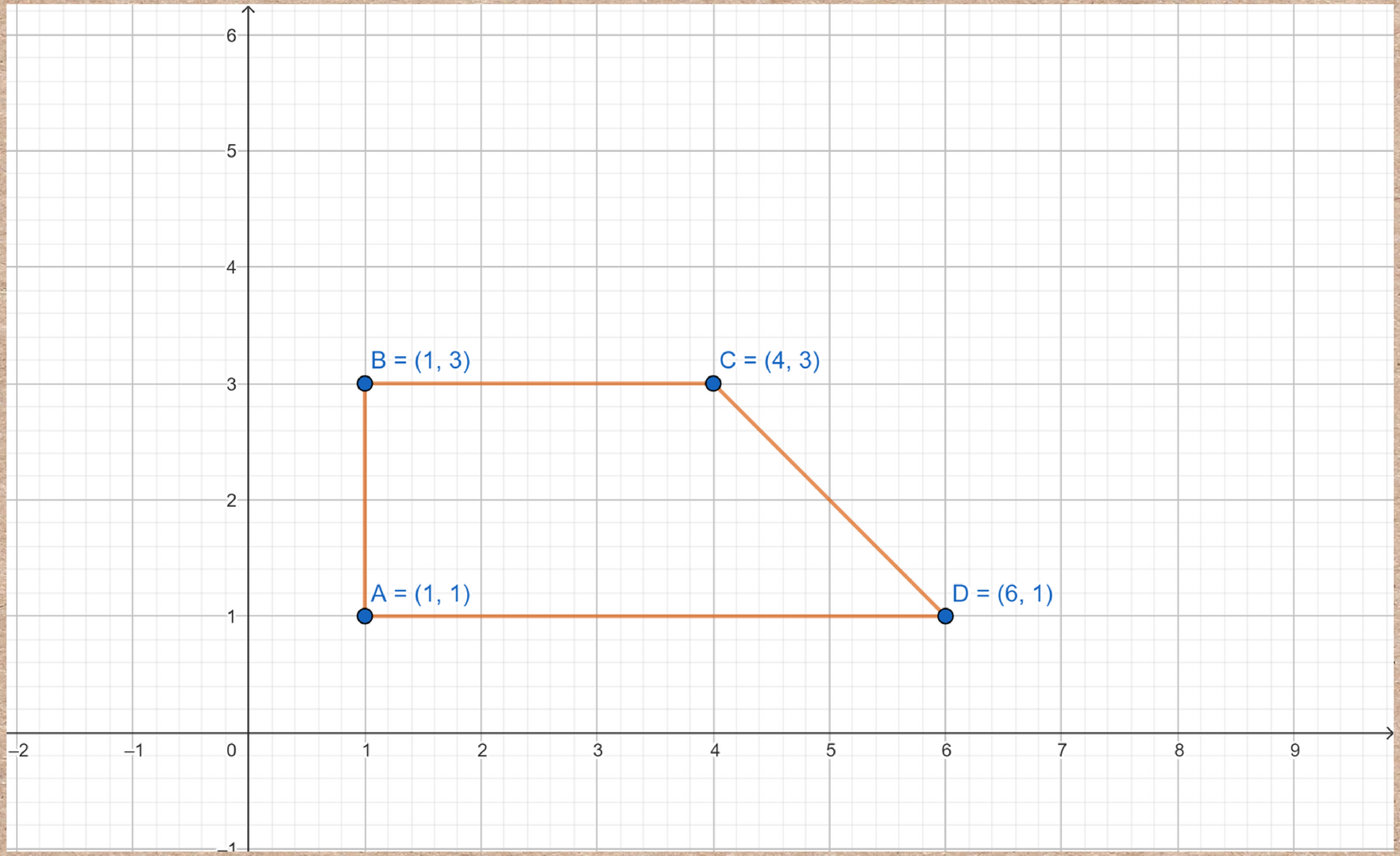


MARCAR PONTOS

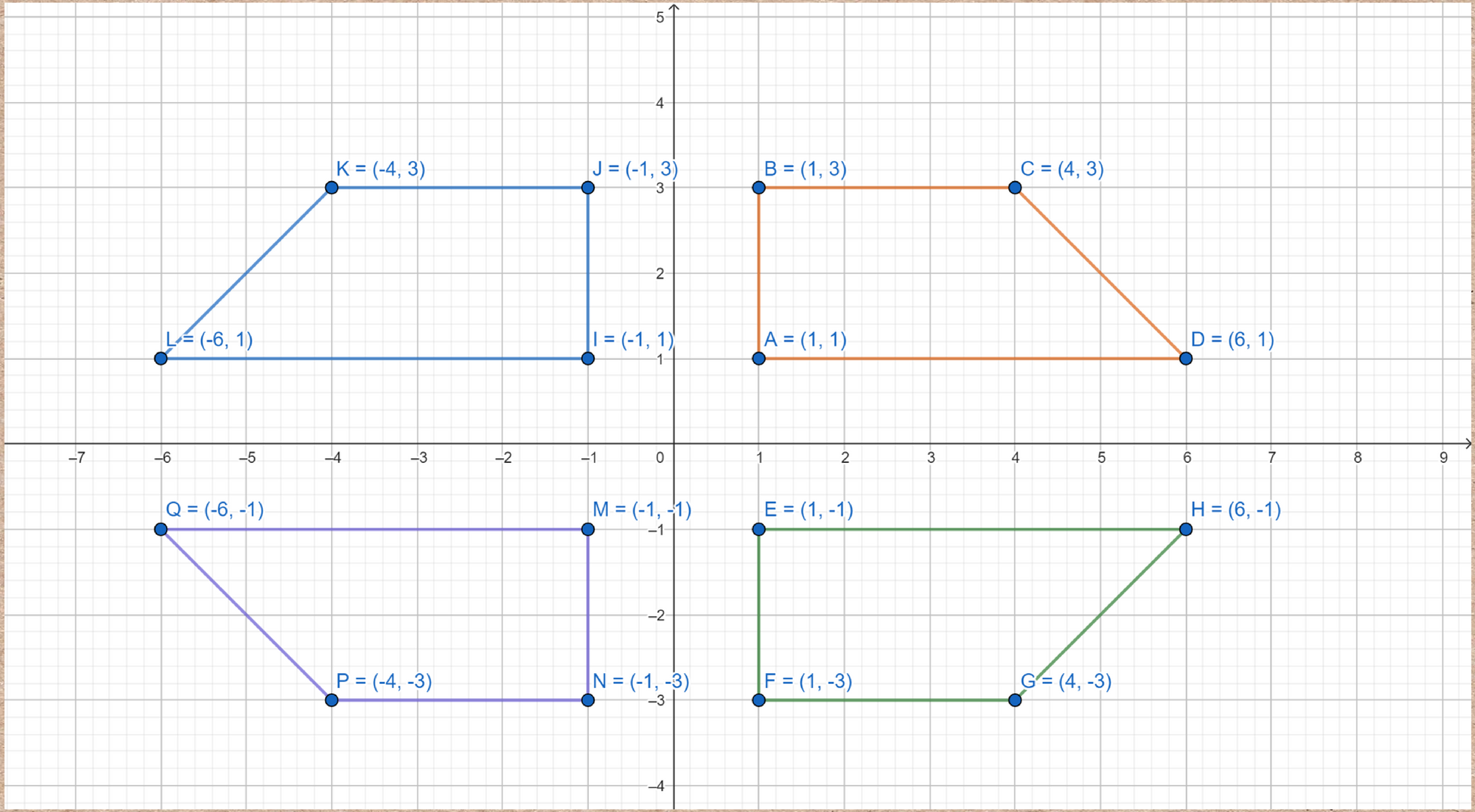


MARCAR PONTOS

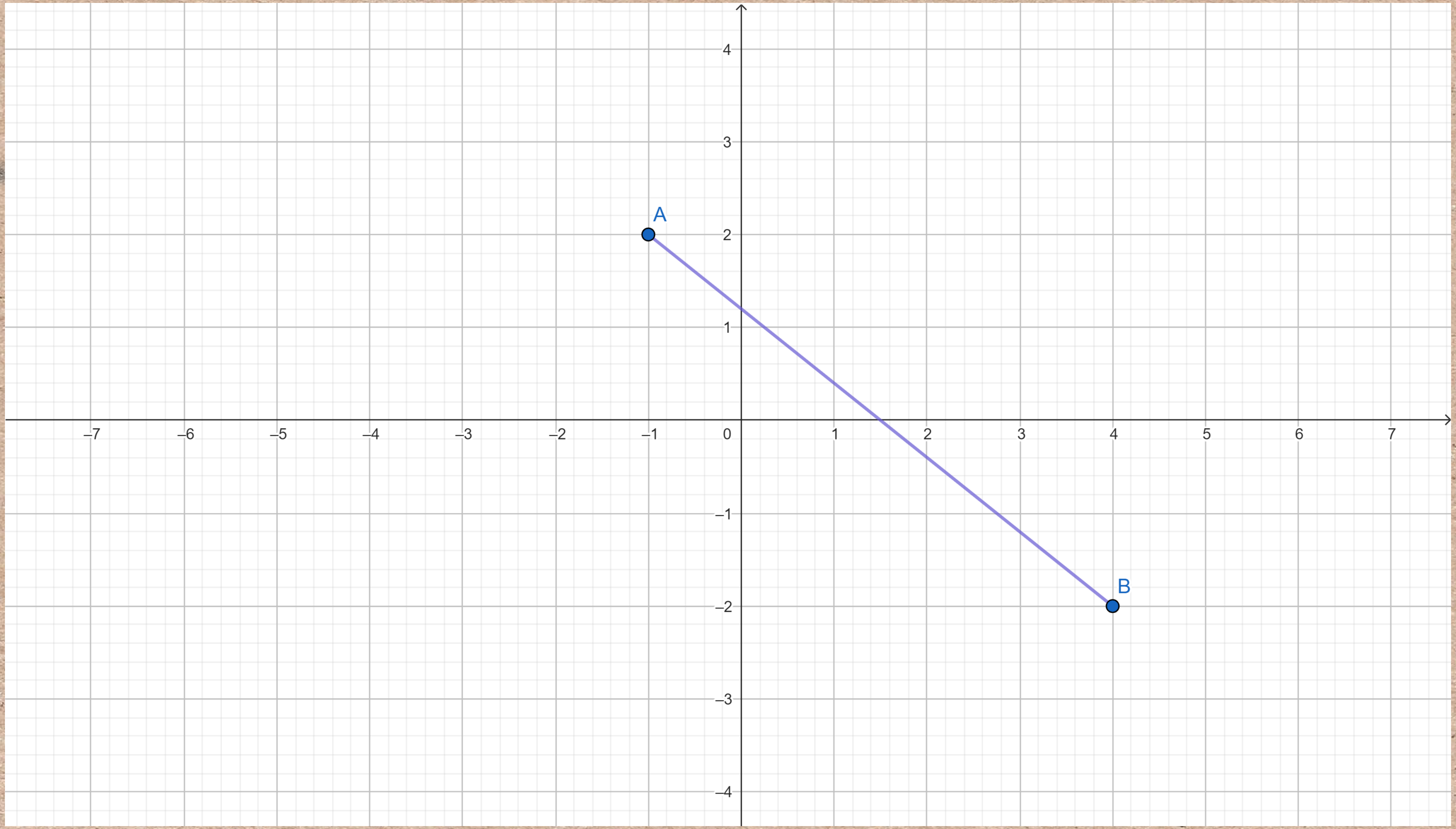
Qual é o simétrico da figura em relação à origem $(0, 0)$?



MARCAR PONTOS

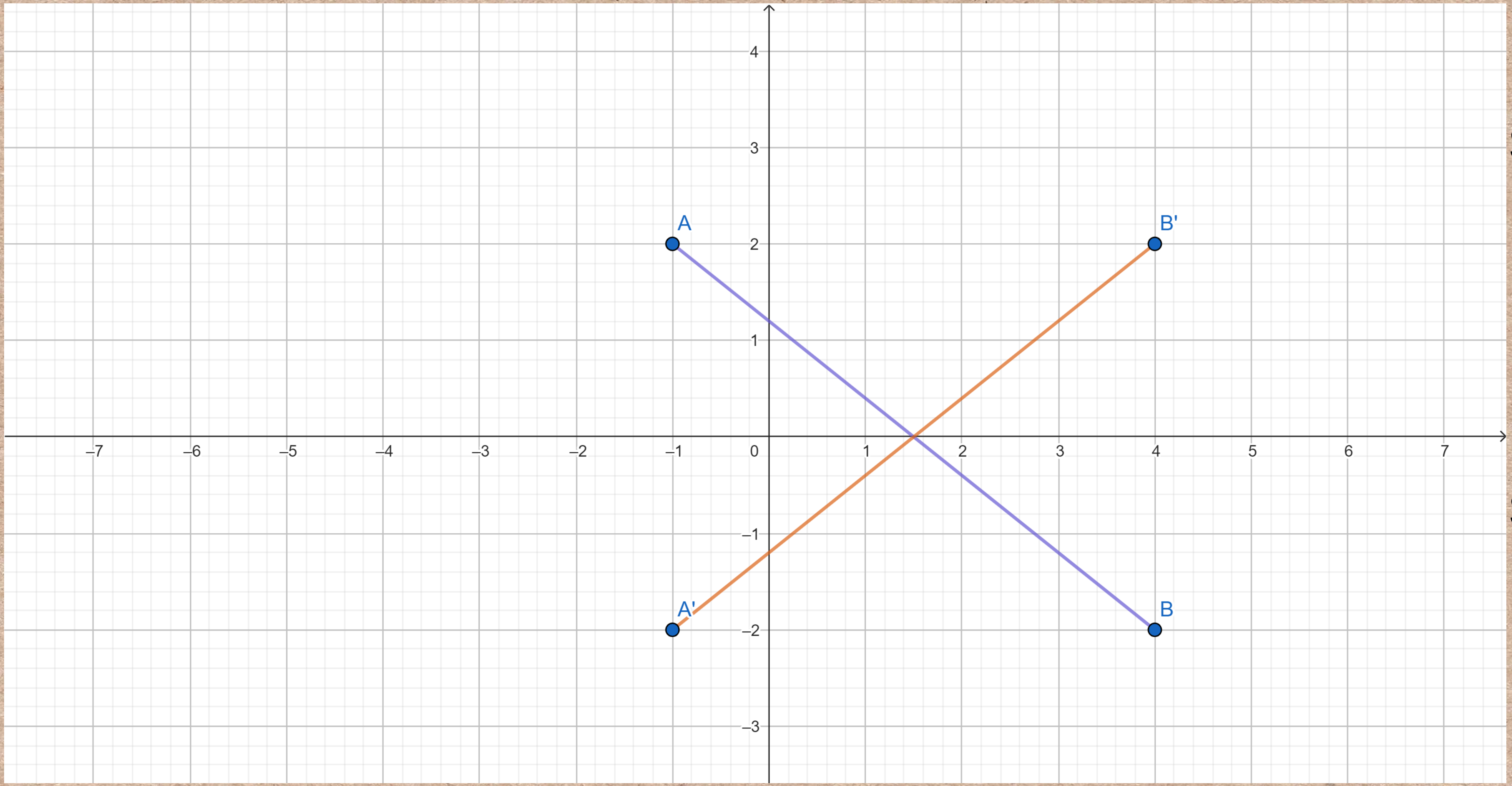


MARCAR PONTOS SIMÉTRICOS



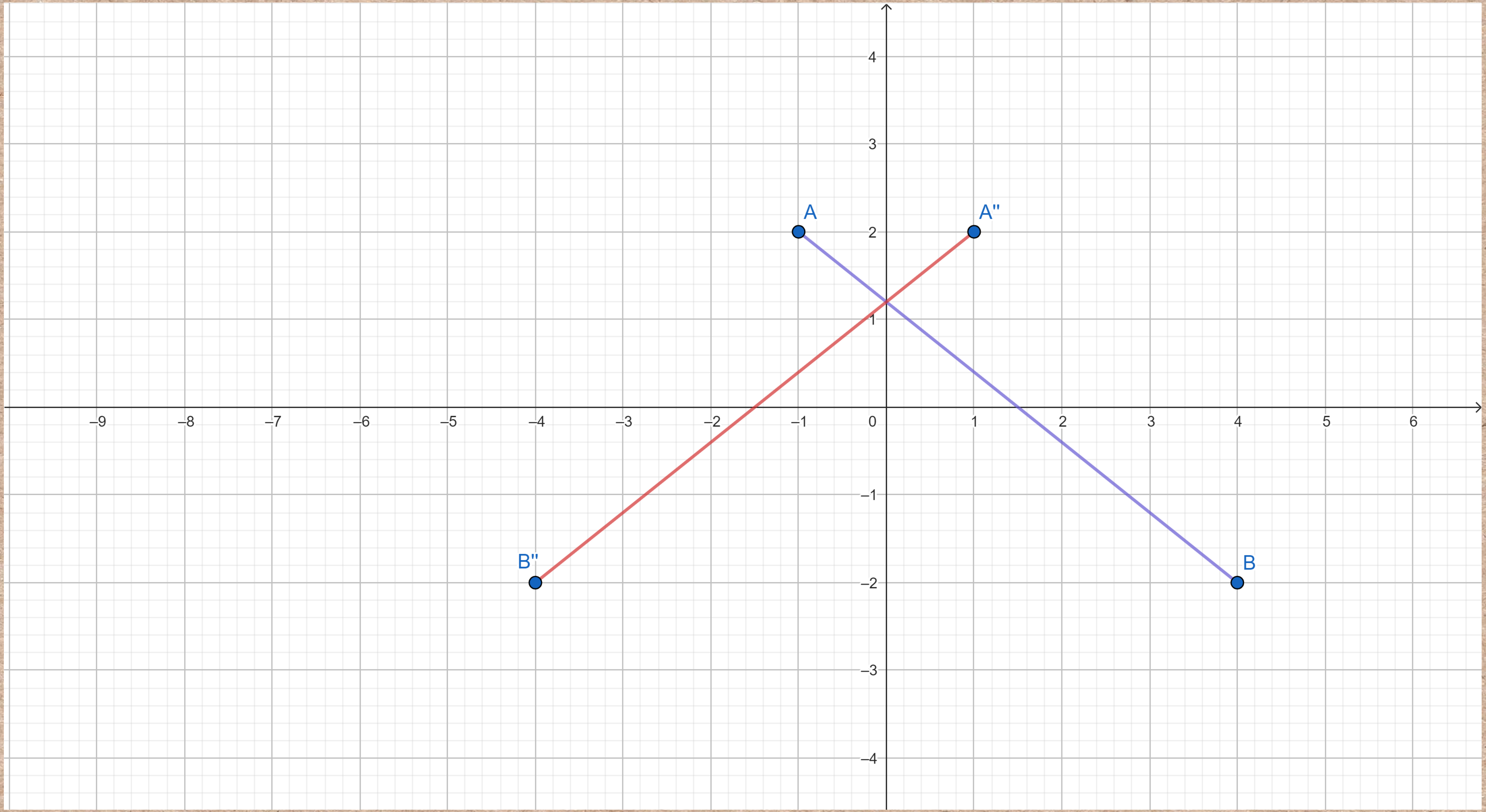
O que devemos fazer para encontrar o simétrico do segmento de reta AB em relação ao eixo x? E em relação ao eixo y?

MARCAR PONTOS



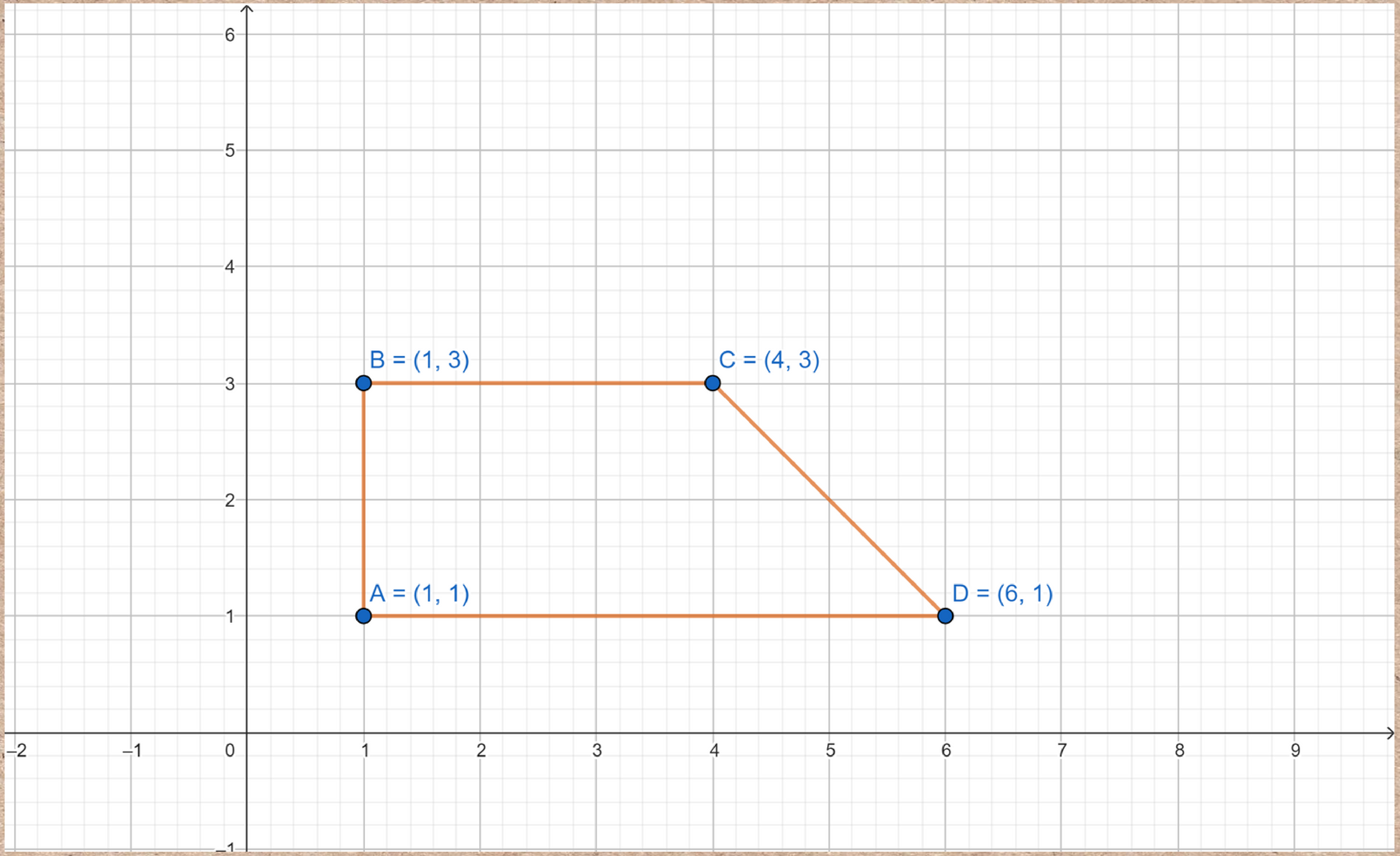
O simétrico do segmento de reta AB em relação ao eixo x seria o segmento A'B'.

MARCAR PONTOS



O simétrico do segmento de reta AB em relação ao eixo y seria o segmento A”B”.

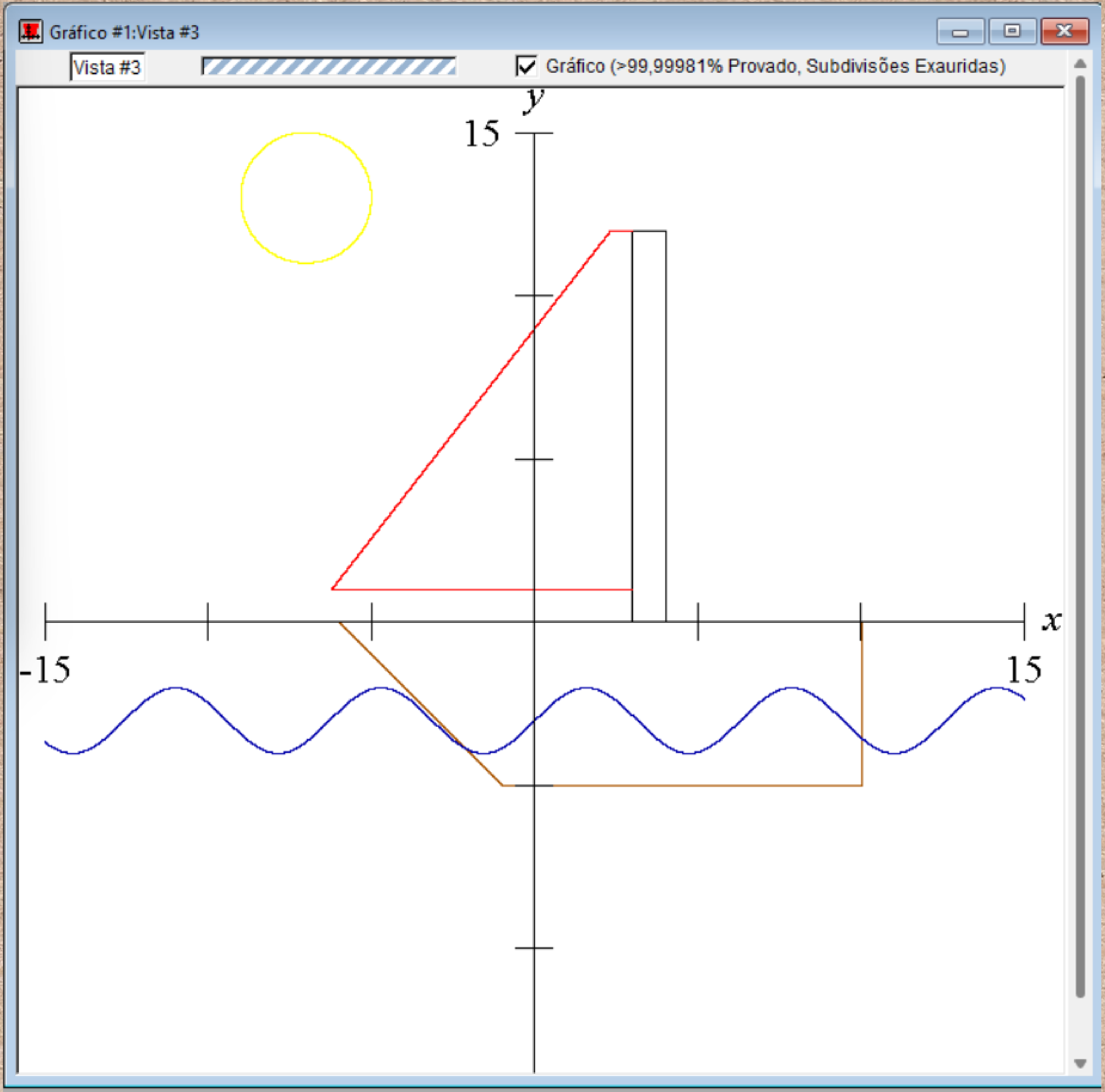
MARCAR PONTOS POR HOMOTETIA



Se multiplicarmos por 1/2 todas as coordenadas dos pontos A, B, C e D, o que acontecerá com o trapézio da figura? E se multiplicarmos por 3?

MARCAR PONTOS

UMA PROPOSTA (utilizando o GrafEq)



Relação #1

$-1<x<10$

$y=-5$

Relação #3

$x=-y-6$

$-5<y<0$

$-6<x<10$

Relação #4

$x=10$

$-5<y<0$

Relação #6

$x=3$

$0<y<12$

Relação #7

$x=4$

$0<y<12$

Relação #5

$y=0$

$-6<x<10$

Relação #2

$(x+7)^2+(y-13)^2=4$

Relação #12

$y=1$

$\frac{-56}{9}<x<3$

Relação #8

$y=12$

$3<x<4$

Relação #10

$y=\frac{9}{7}\cdot x+9$

$1<y<12$

$-7<x<3$

Relação #11

$y=12$

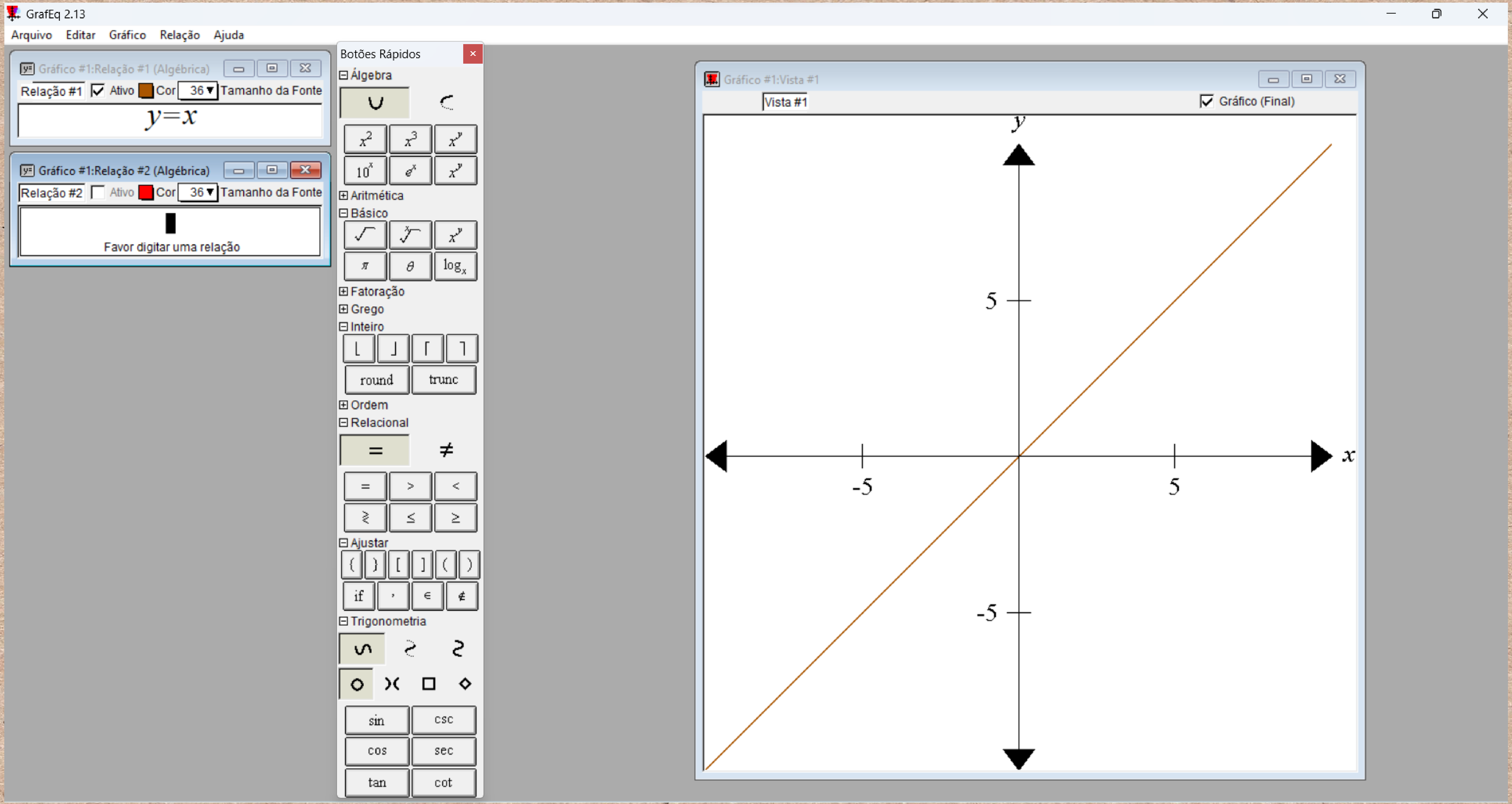
$\frac{7}{3}<x<3$

Relação #9

$\sin x-3=y$

(DE PAULA, 2011)

INTERFACE DO GRAFEQ



UMA PROPOSTA
(utilizando o GrafEq)

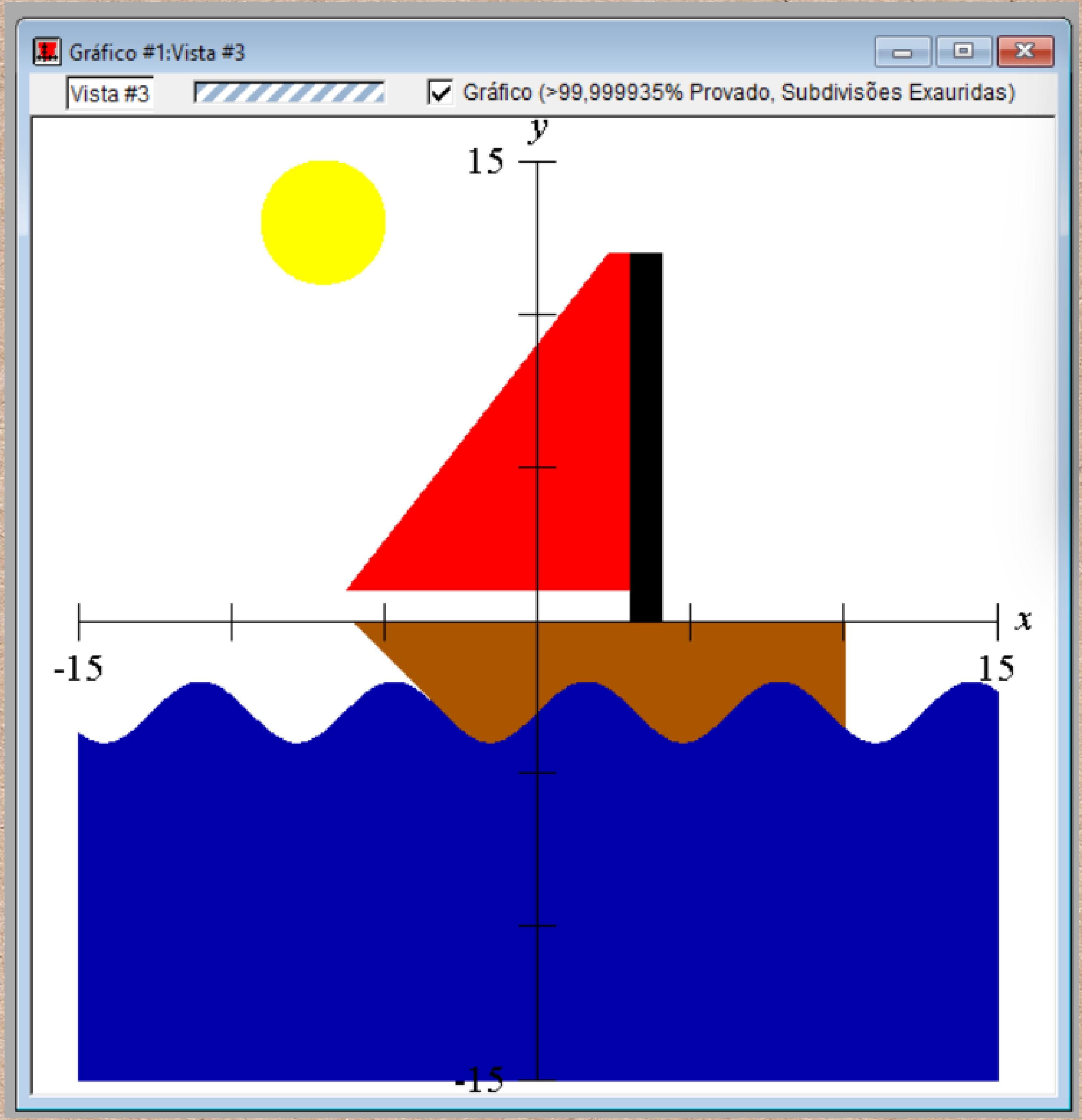


Gráfico #1:Relação #1 (Algébrica)

Relação #1 Ativo Cor 36 Tamanho da Fonte

$-1<x<10$

$y=-5$

Gráfico #1:Relação #2 (Algébrica)

Relação #2 Ativo Cor 36 Tamanho da Fonte

$y<\frac{9}{7}\cdot x+9$

$1<y<12$

$-7<x<3$

Gráfico #1:Relação #3 (Algébrica)

Relação #3 Ativo Cor 36 Tamanho da Fonte

$x>-y-6$

$-5<y<0$

$-6<x<10$

Gráfico #1:Relação #4 (Algébrica)

Relação #4 Ativo Cor 36 Tamanho da Fonte

$0<y<12$

$3<x<4$

Gráfico #1:Relação #5 (Algébrica)

Relação #5 Ativo Cor 36 Tamanho da Fonte

$(x+7)^2+(y-13)^2<4$

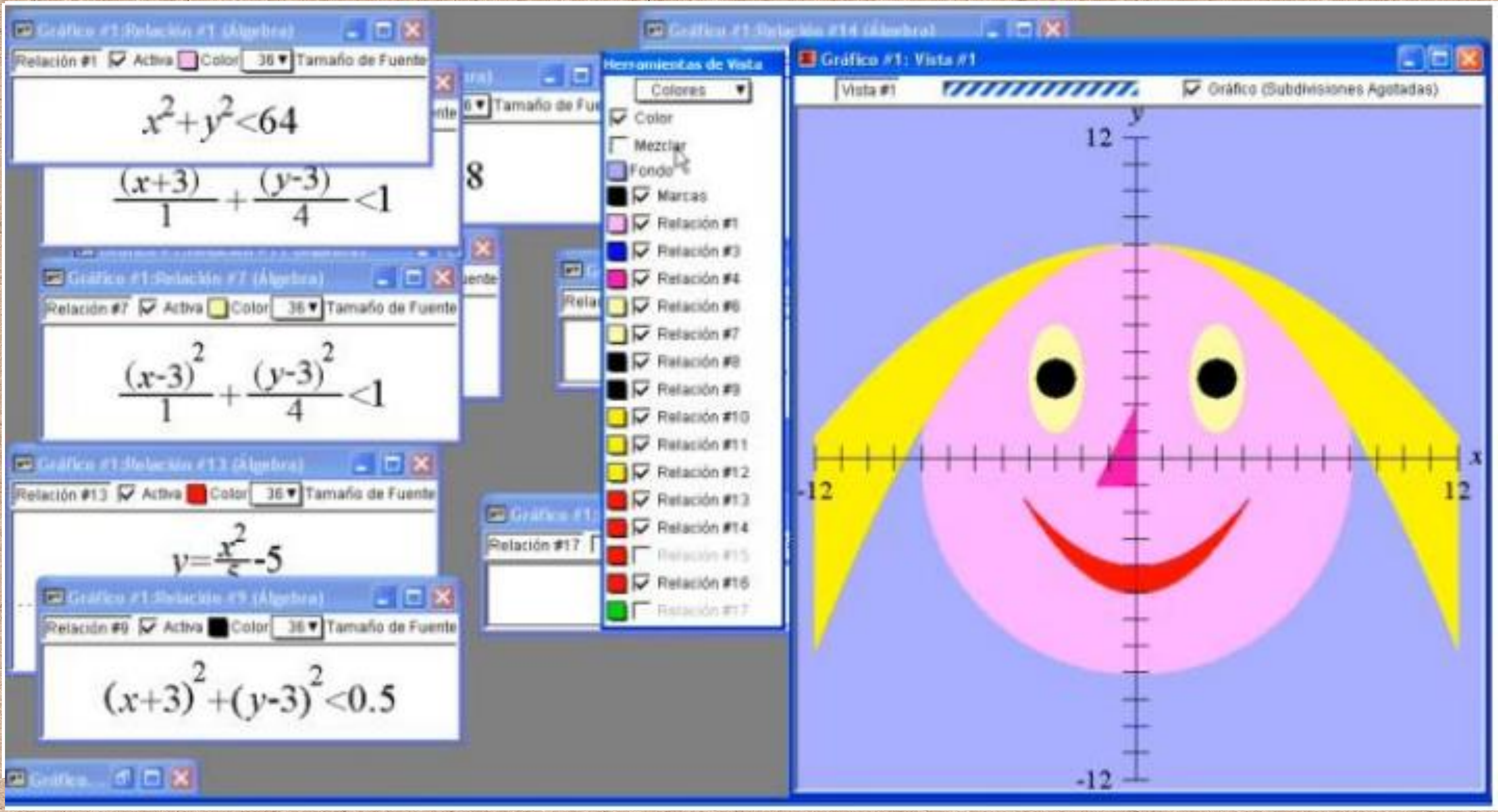
Gráfico #1:Relação #6 (Algébrica)

Relação #6 Ativo Cor 36 Tamanho da Fonte

$\sin x-3>y$

(DE PAULA, 2011)

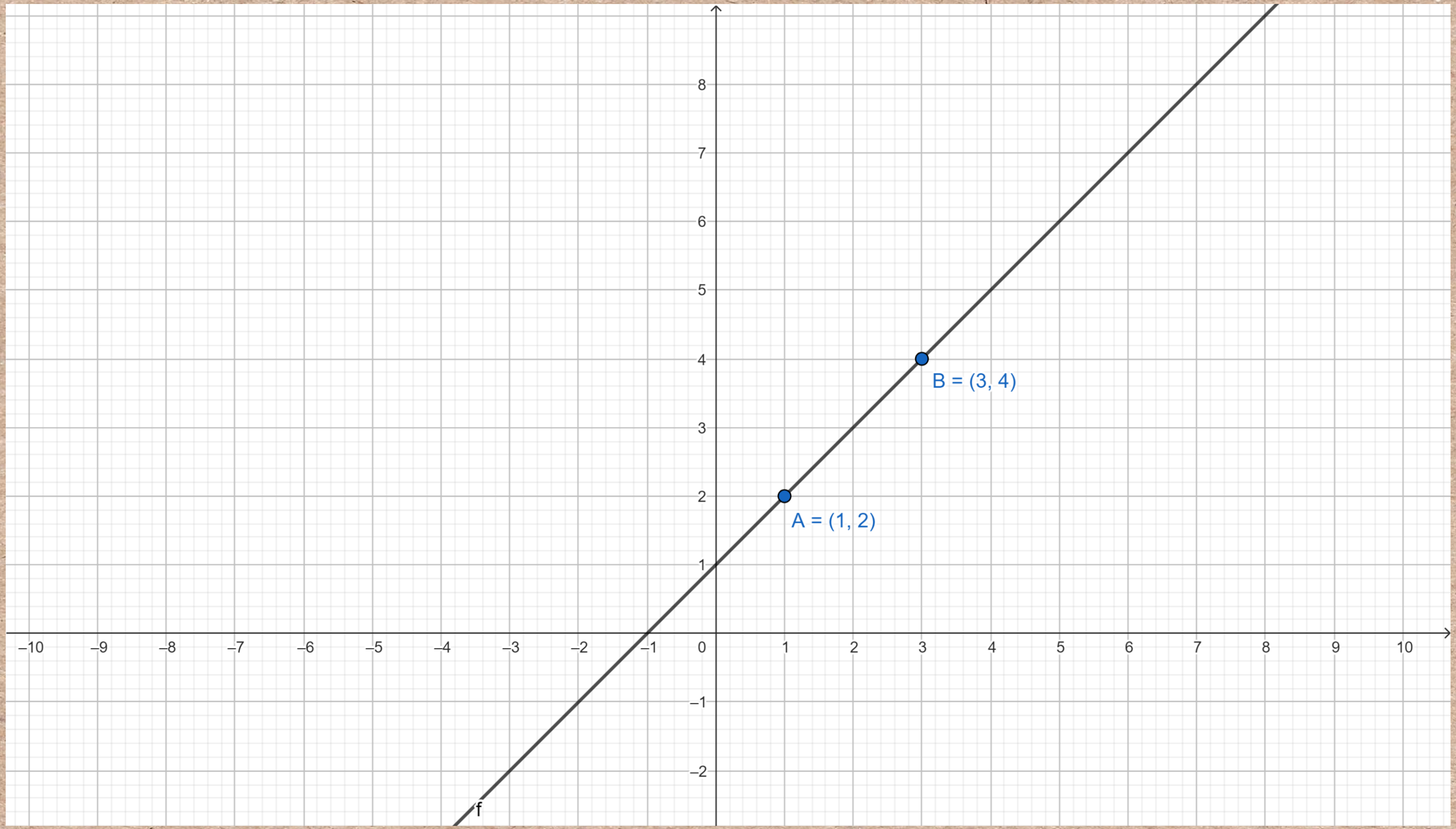
POSSIBILIDADES



(DE PAULA, 2011)

EQUAÇÃO DA RETA

Como podemos determinar a equação da reta que passa pelos pontos A (1, 2) e B (3, 4)?



EQUAÇÃO DA RETA

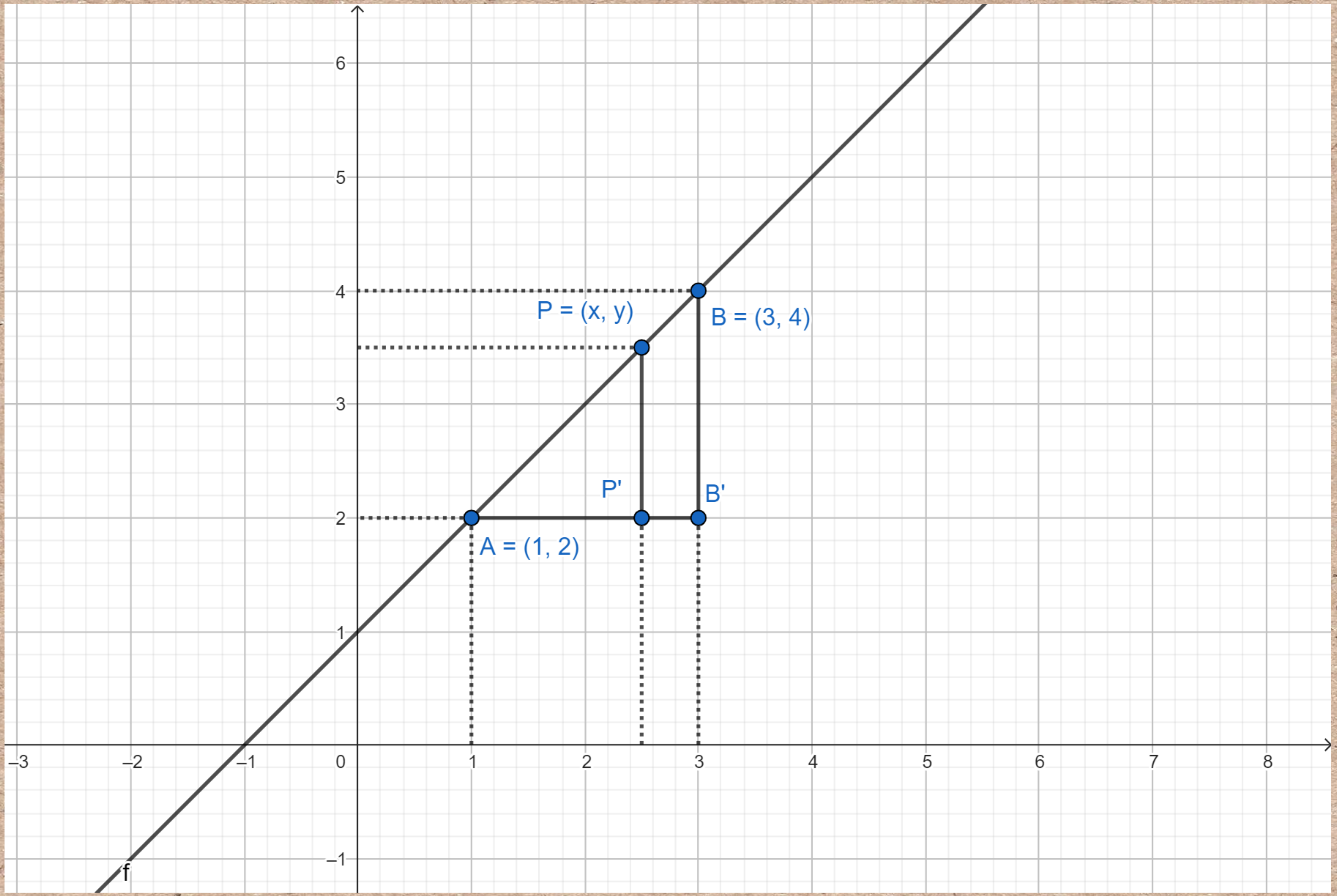
Na figura, se P(x,y) é um da reta que passa pelos pontos A e B, temos:

$$\triangle APP' \approx \triangle ABB'$$

(caso AA)

Logo,

$$\frac{PP'}{BB'} = \frac{AP'}{AB'}$$



EQUAÇÃO DA RETA

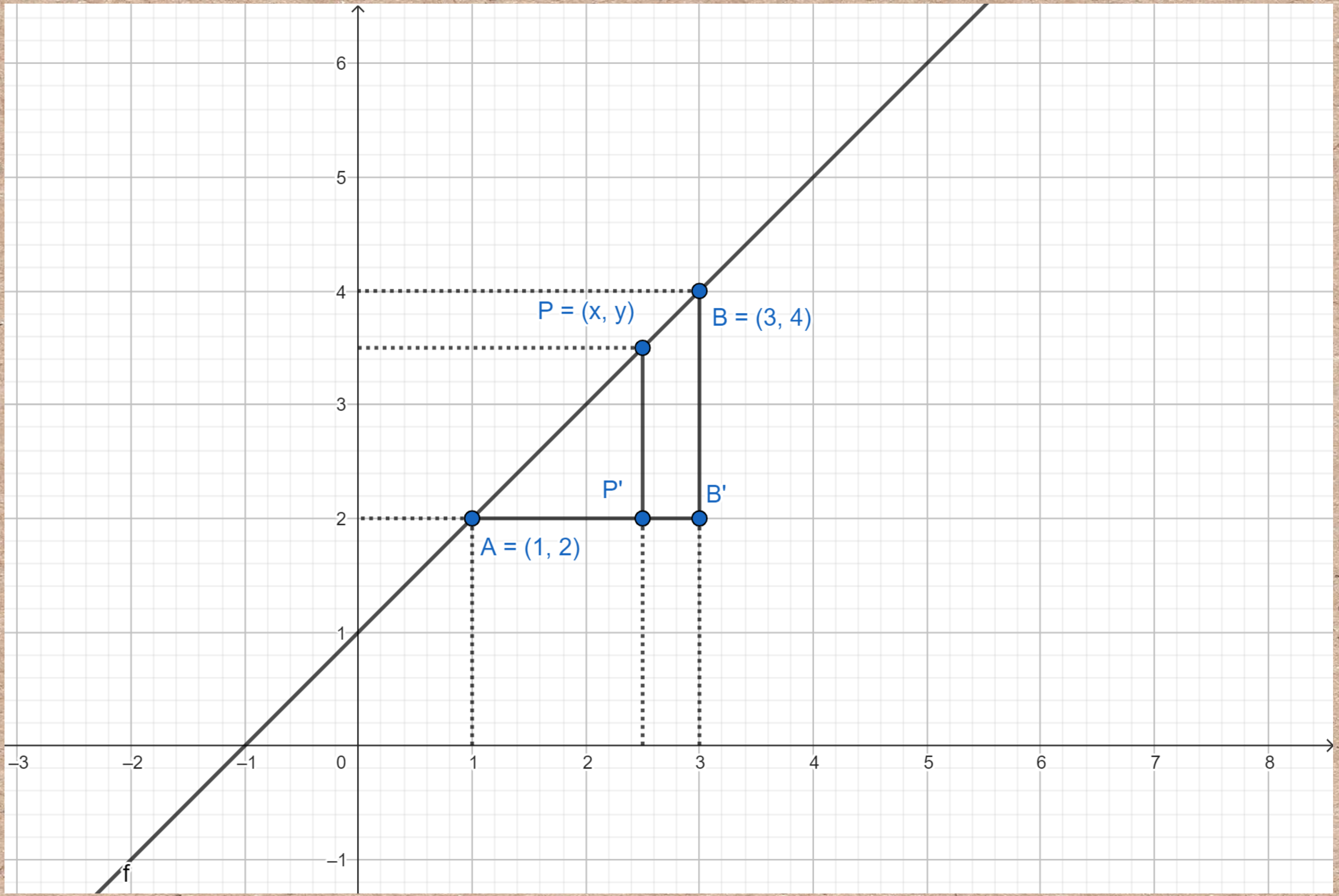
Ou seja,

$$\frac{y-2}{4-2} = \frac{x-1}{3-1}$$

$$\frac{y-2}{2} = \frac{x-1}{2}$$

Logo,

$$y - 2 = x - 1$$



EQUAÇÃO DA RETA

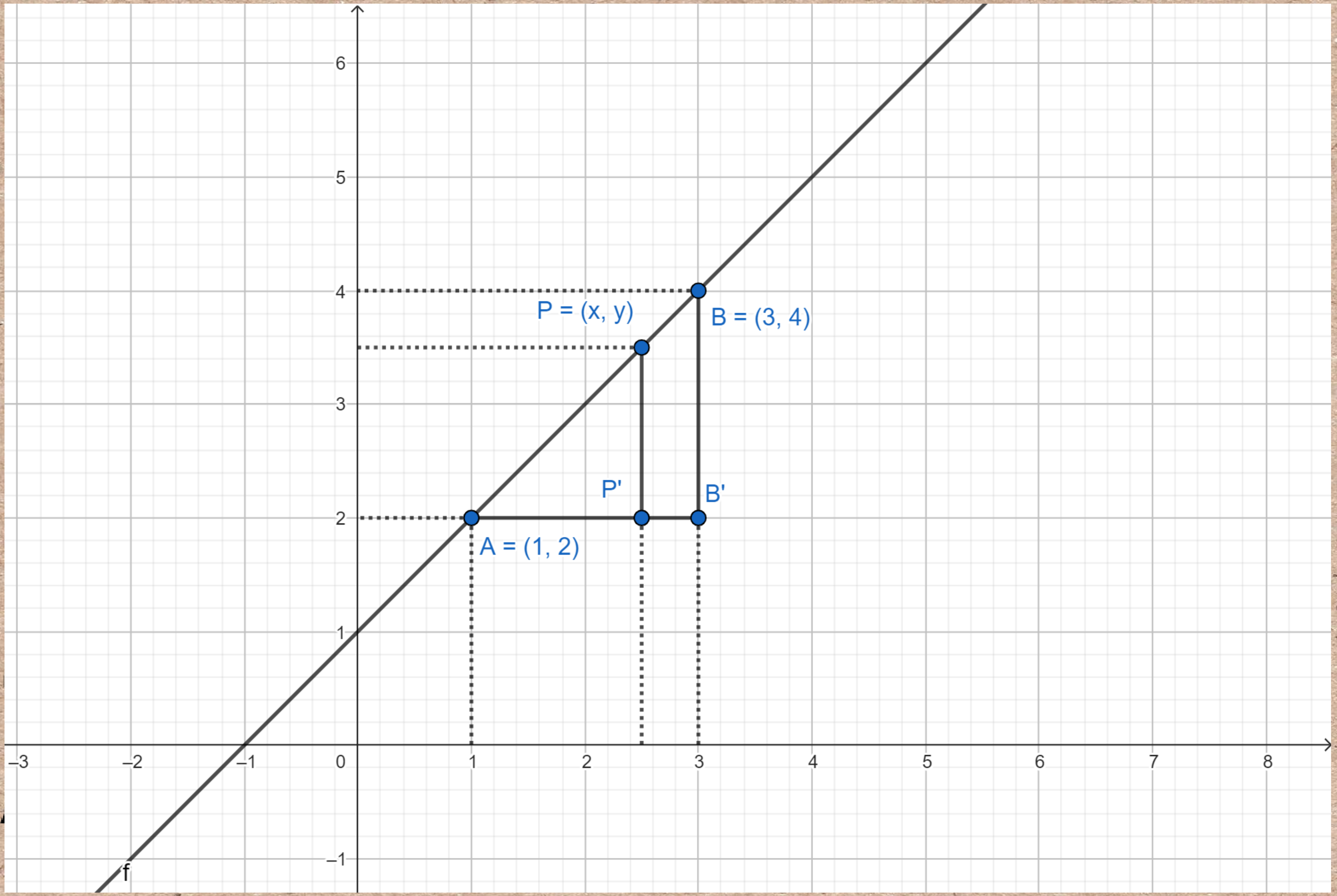
$$y = x - 1 + 2$$

$$y = x + 1$$

Portanto,

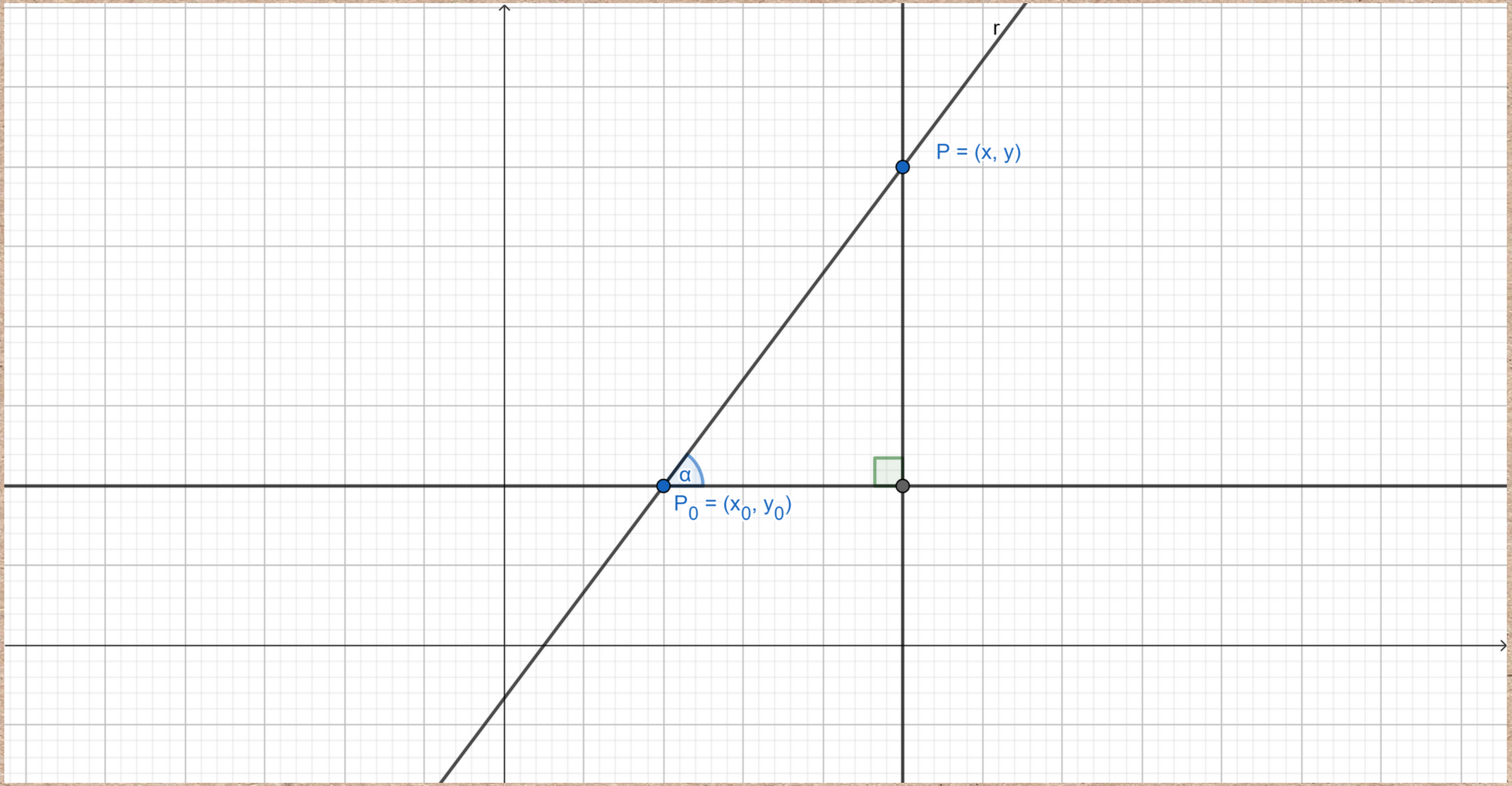
$$y = x + 1$$

é a equação da reta que passa por A (1, 2) e B (3, 4).

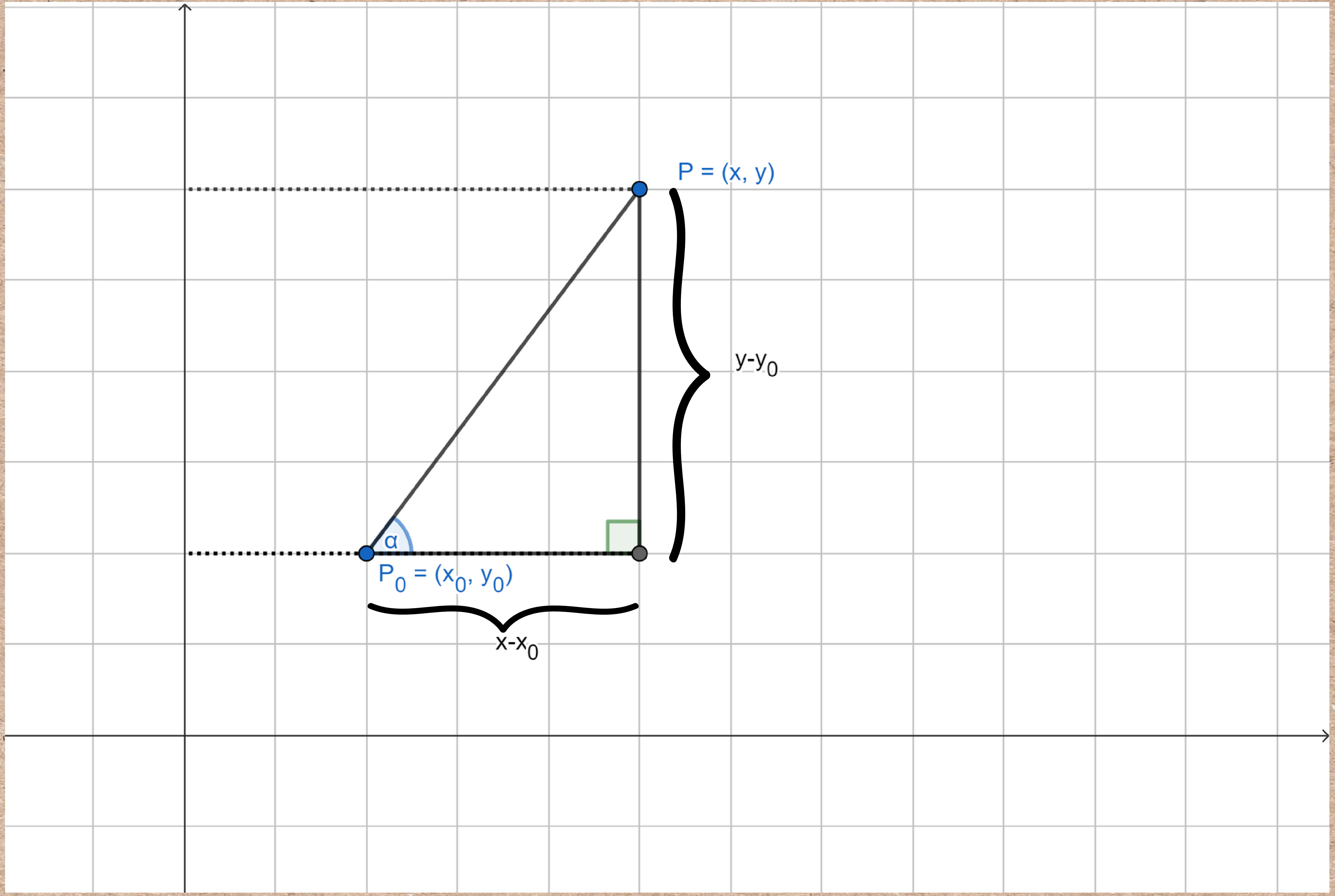


EQUAÇÃO DA RETA

Como podemos determinar a equação da reta que passa por um $P_0(x_0,y_0)$ e forma um ângulo α com o eixo x?



EQUAÇÃO DA RETA



$$\frac{cateto\ oposto}{cateto\ adjacente} = a$$

$$a = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

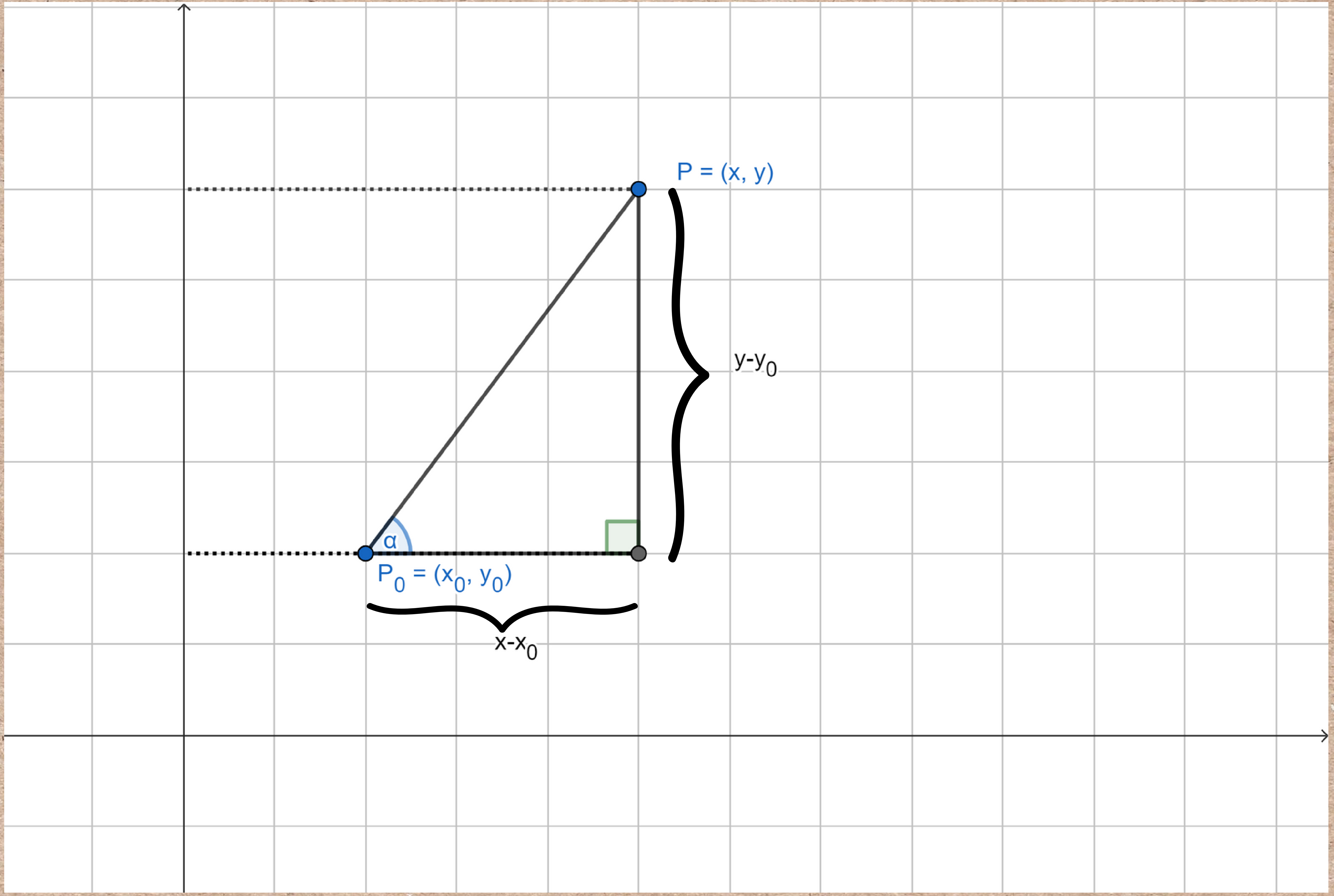
$$a(x - x_0) = y - y_0$$

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

$$y = ax \underbrace{- ax_0 + y_0}_{b}$$

$$y = ax + b$$

EQUAÇÃO DA RETA



$$y = ax + b$$

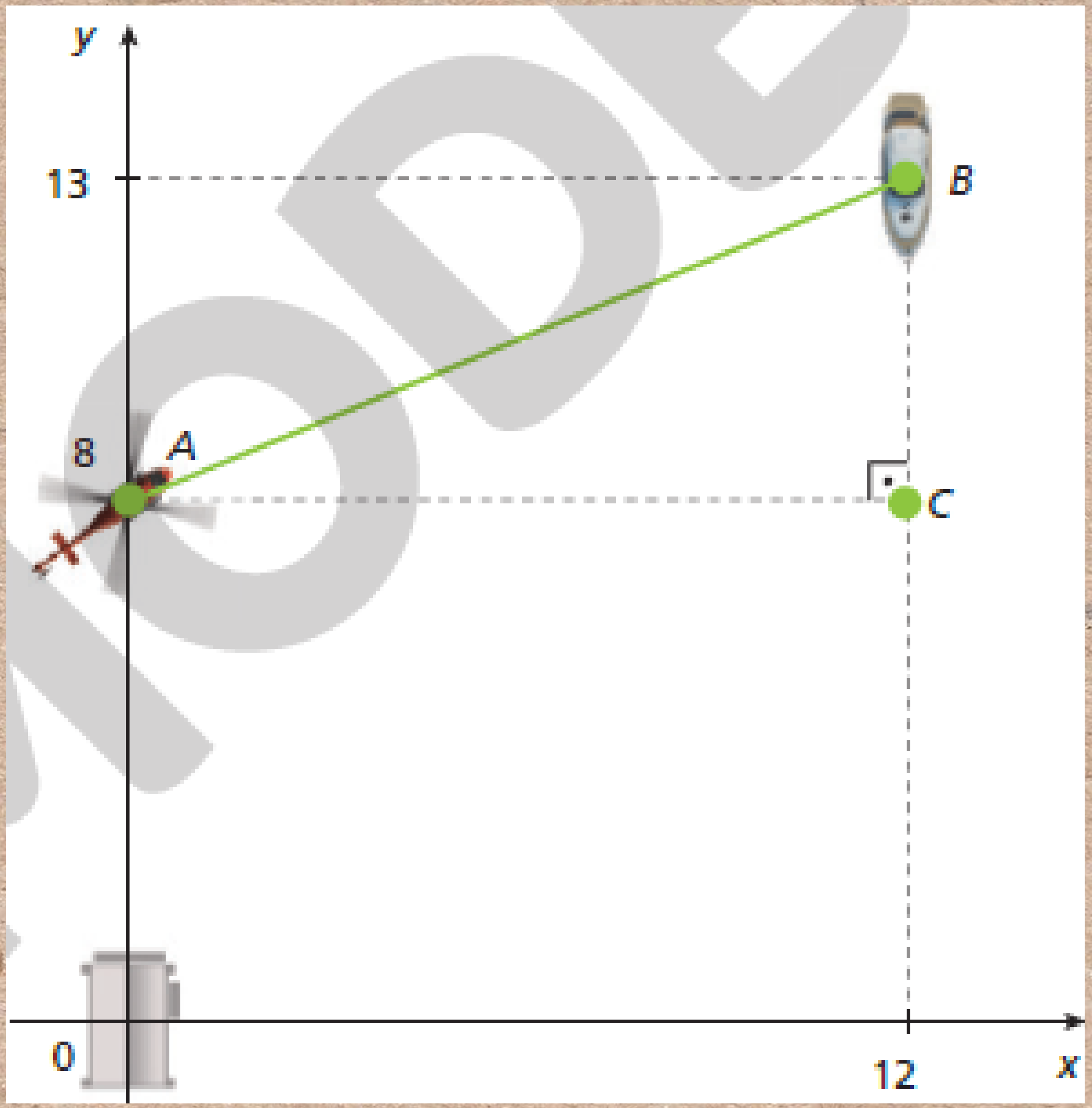
Sendo:

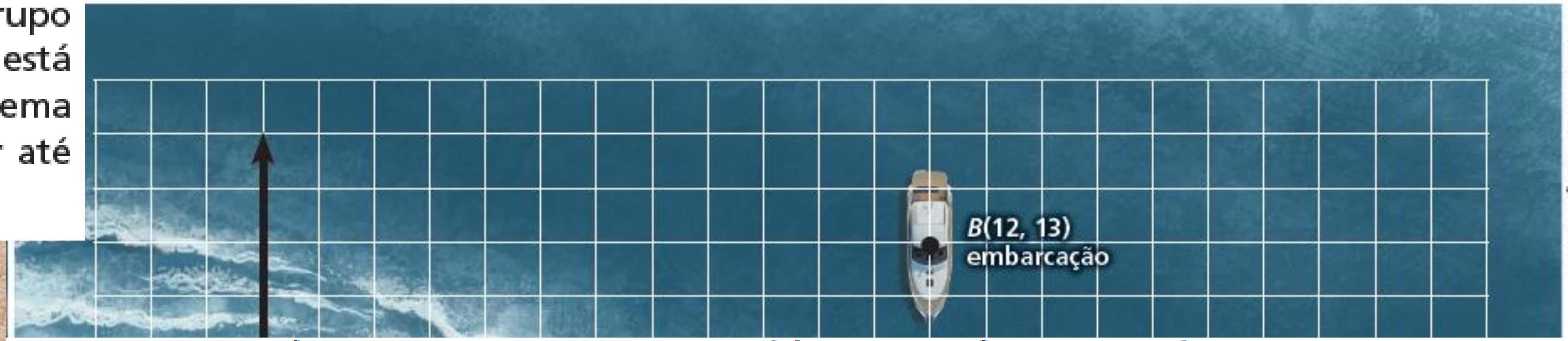
a - coeficiente angular da reta = tg α;

b - coeficiente linear da reta.

DISTÂNCIA DE DOIS PONTOS

O corpo de bombeiros de certa cidade litorânea recebeu o chamado de um grupo de pessoas em uma embarcação avariada. Para o resgate, há um helicóptero, que está posicionado a 8 km ao norte do posto de bombeiros local, conforme indica o esquema da página ao lado. Qual é a menor distância que o helicóptero deve percorrer até encontrar a embarcação?





Para responder à questão, vamos considerar no plano cartesiano o ponto auxiliar $C(12, 8)$. Assim:

- a distância do ponto A ao ponto $C(d_{A,\,C})$ é 12 km;
- a distância do ponto B ao ponto $C(d_{B,\,C})$ é 5 km;
- a distância do ponto A ao ponto $B(d_{A,\,B})$ é d km.

Os pontos A, B e C são os vértices de um triângulo retângulo. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(d_{A,\,B})^2 = (d_{A,\,C})^2 + (d_{B,\,C})^2 \Rightarrow d^2 = 12^2 + 5^2 \Rightarrow d^2 = 169 \Rightarrow d = 13 \text{ ou } d = -13$$

Como a distância entre dois pontos é, por definição, um número não negativo, temos $d = 13$ km.

Logo, o helicóptero está a 13 km de distância da embarcação.

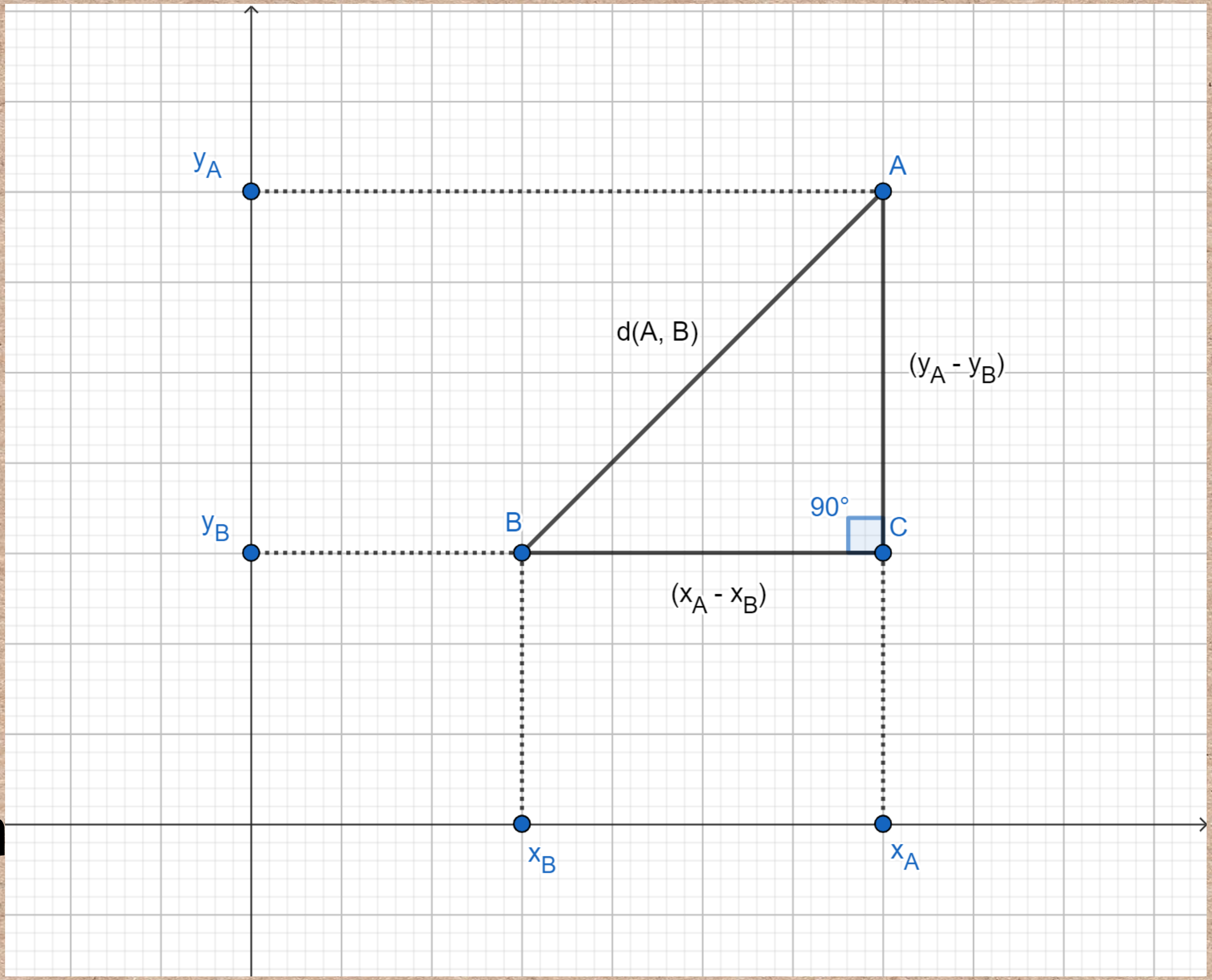
(LEONARDO, 2020)

DISTÂNCIA DE DOIS PONTOS

Como deduzir uma fórmula para calcular a distância entre os A e B? no plano cartesiano?

d(A, B) é a distância entre A e B.

No gráfico, o $\triangle ABC$ é retângulo e $\hat{C} = 90°$ e $\overline{AB}$ é a hipotenusa e d(A, B) é a medida de $\overline{AB}$.



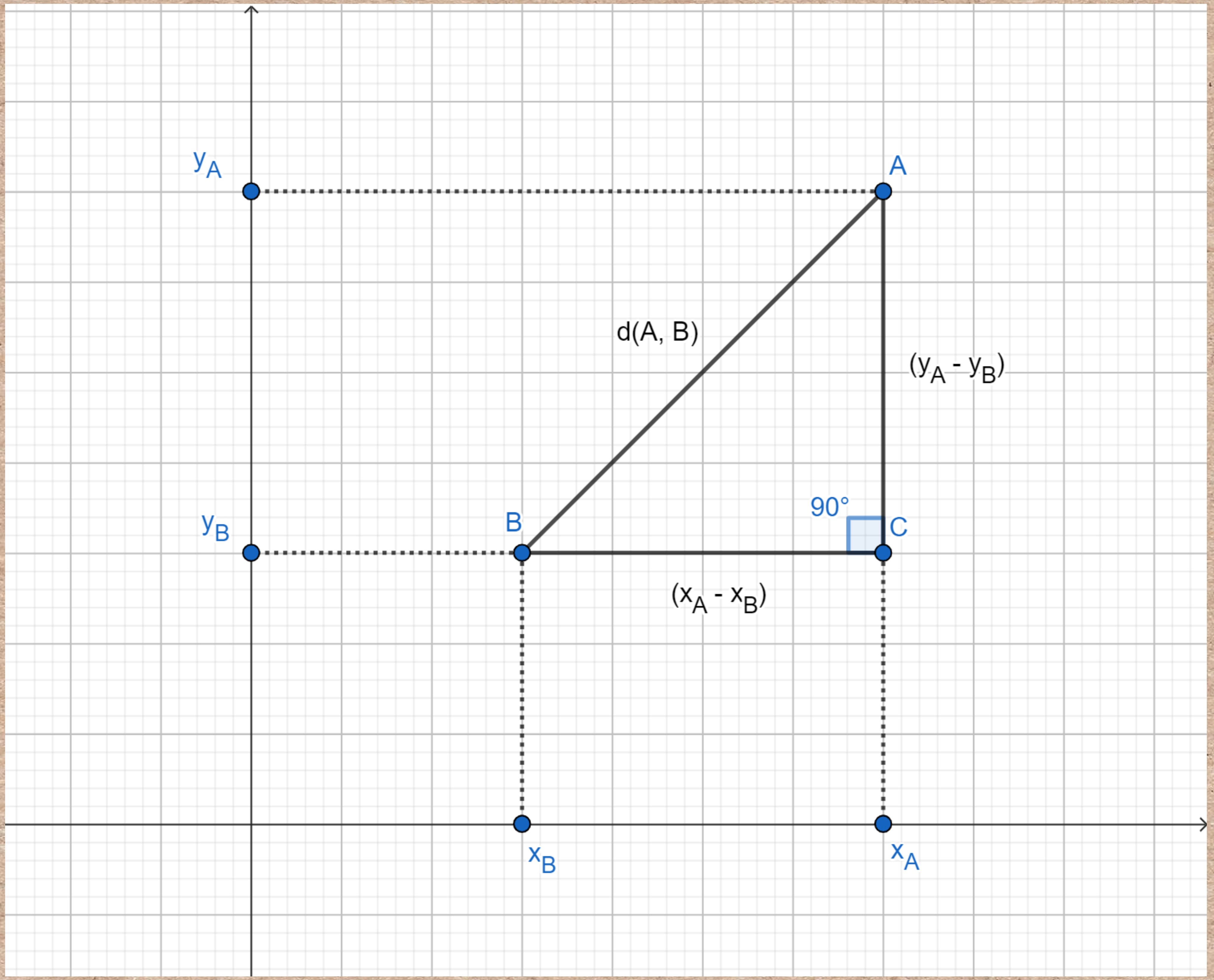
DISTÂNCIA DE DOIS PONTOS

Pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$[d(A,B)]^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2$$

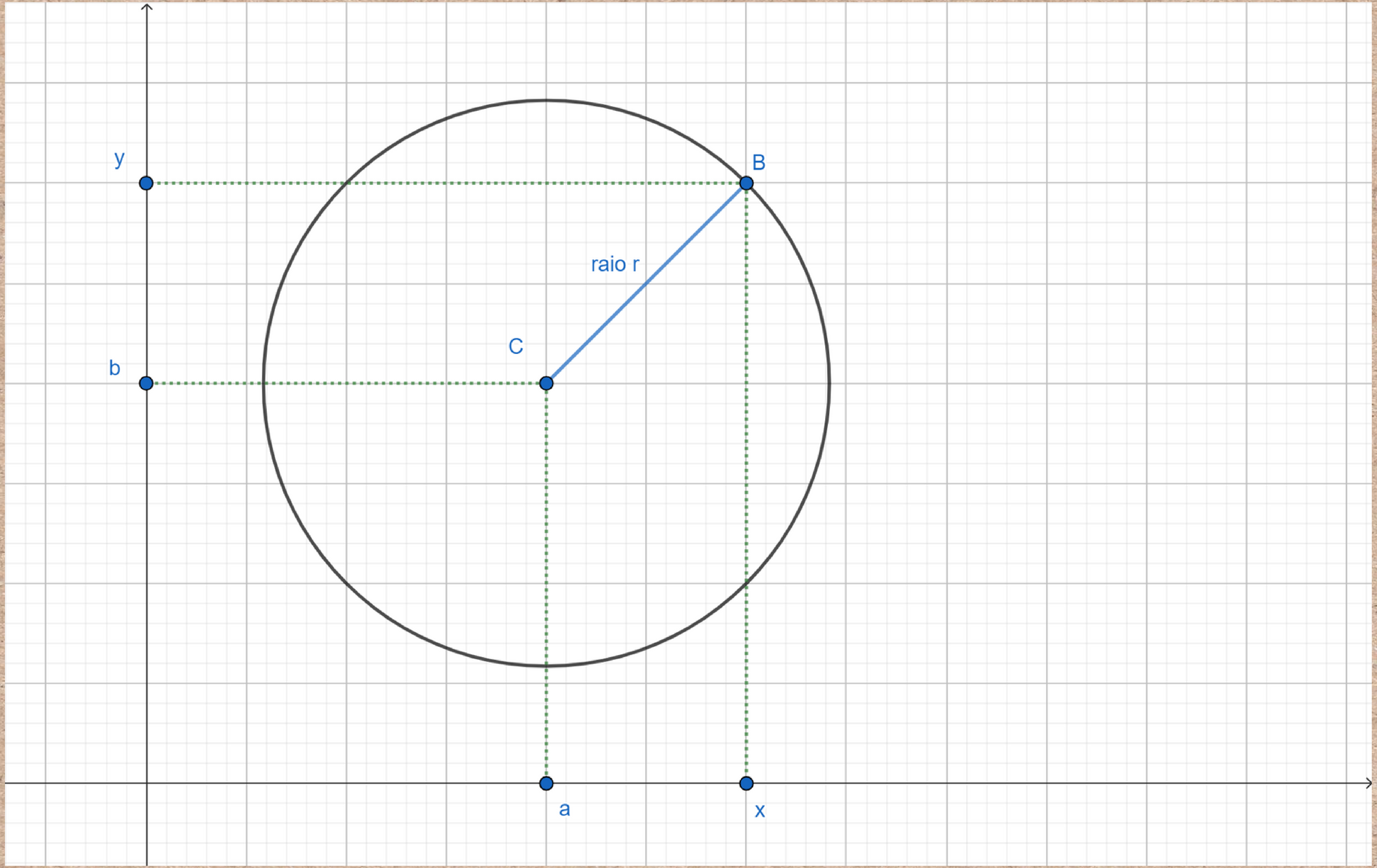
Logo,

$$d(A,B)^2 = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$



EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Como podemos determinar uma equação da circunferência de centro C (a, b) e raio r?



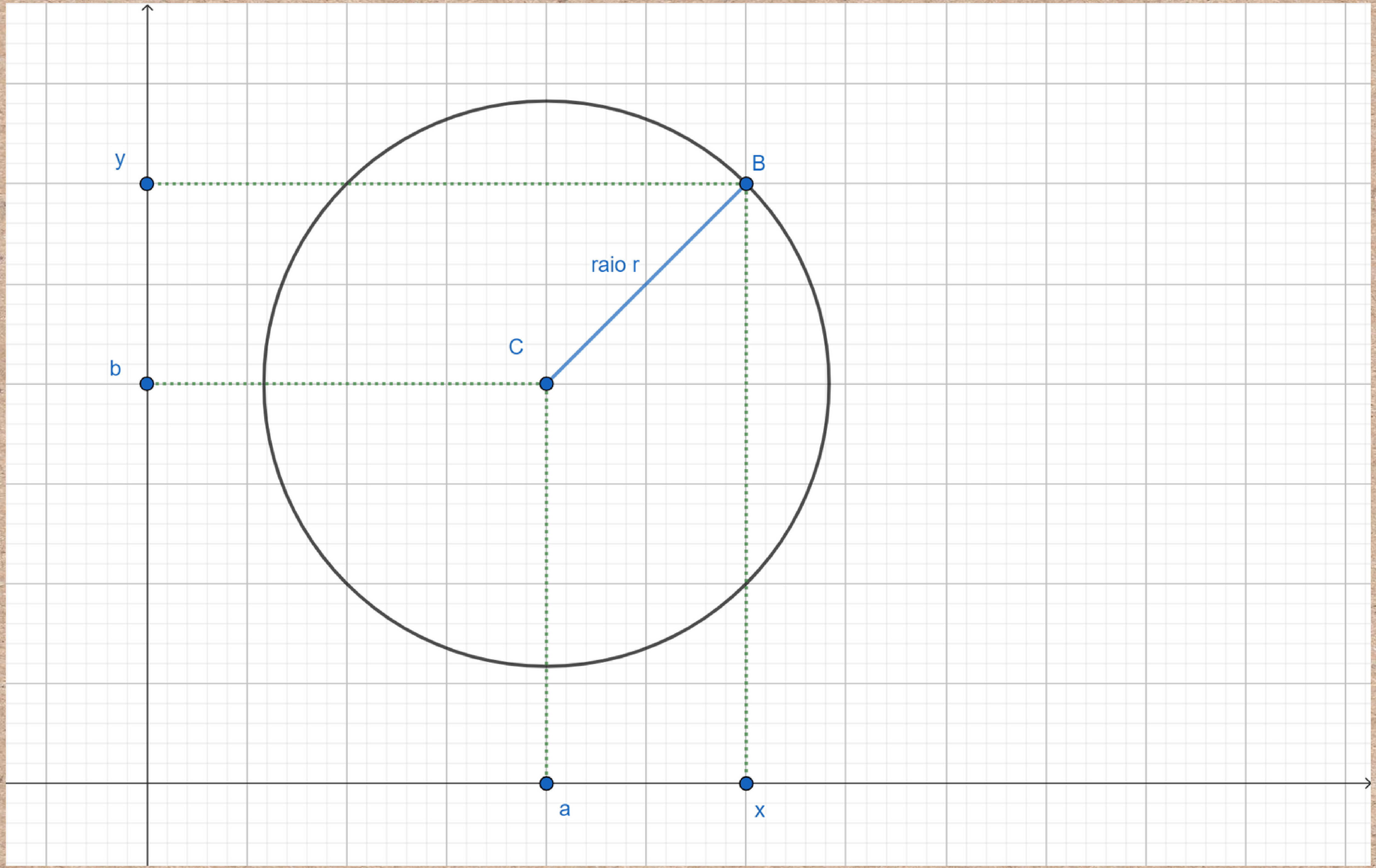
EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

O raio r é a distância de C até B: $d(C, B) = r$, ou seja,

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Equação reduzida da circunferência de centro C (a, b) e raio r.



EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Como conseguimos encontrar a equação geral da circunferência?

Temos a equação reduzida: $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

Desenvolvendo os cálculos da equação reduzida:

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by-b^2=r^2$$

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by-b^2-r^2=0$$

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by-b^2-r^2=0$$

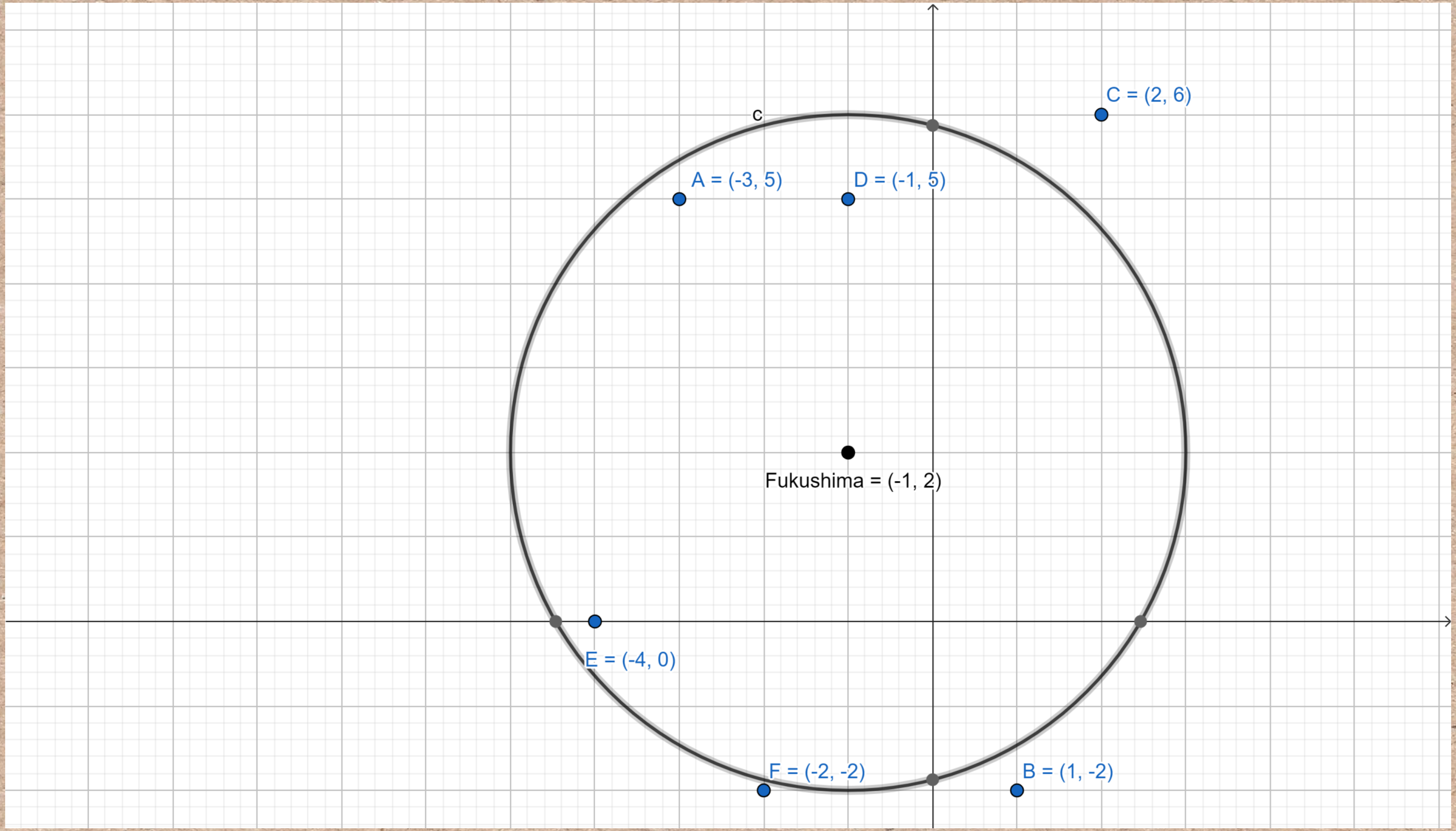
$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$$

Que é chamada de *equação geral da circunferência*.

CIRCUNFERÊNCIA

11. No ano 2011, no mês de março, parte do Japão foi devastada por um terremoto com magnitude 8,9 na escala Richter, seguido por um tsunâmi. Esse terremoto provocou muita destruição, incluindo danos na usina nuclear de Fukushima, fato que elevou os níveis de radiação além do limite de segurança. Isso fez com que algumas providências fossem tomadas, forçando a evacuação da população de uma área de 20 km de raio ao redor da usina. Considerando cada unidade do plano cartesiano com 5 km e supondo a usina nuclear de Fukushima localizada no ponto $(-1, 2)$, quais residências, situadas nos pontos indicados nos itens a seguir, receberam ordens de evacuação? *A, D, E*

$A(-3, 5)$	$C(2, 6)$	$E(-4, 0)$
$B(1, -2)$	$D(-1, 5)$	$F(-2, -2)$



(ANDRADE, 2020)

CIRCUNFERÊNCIA

16. Imagine a construção do símbolo olímpico conforme a figura:

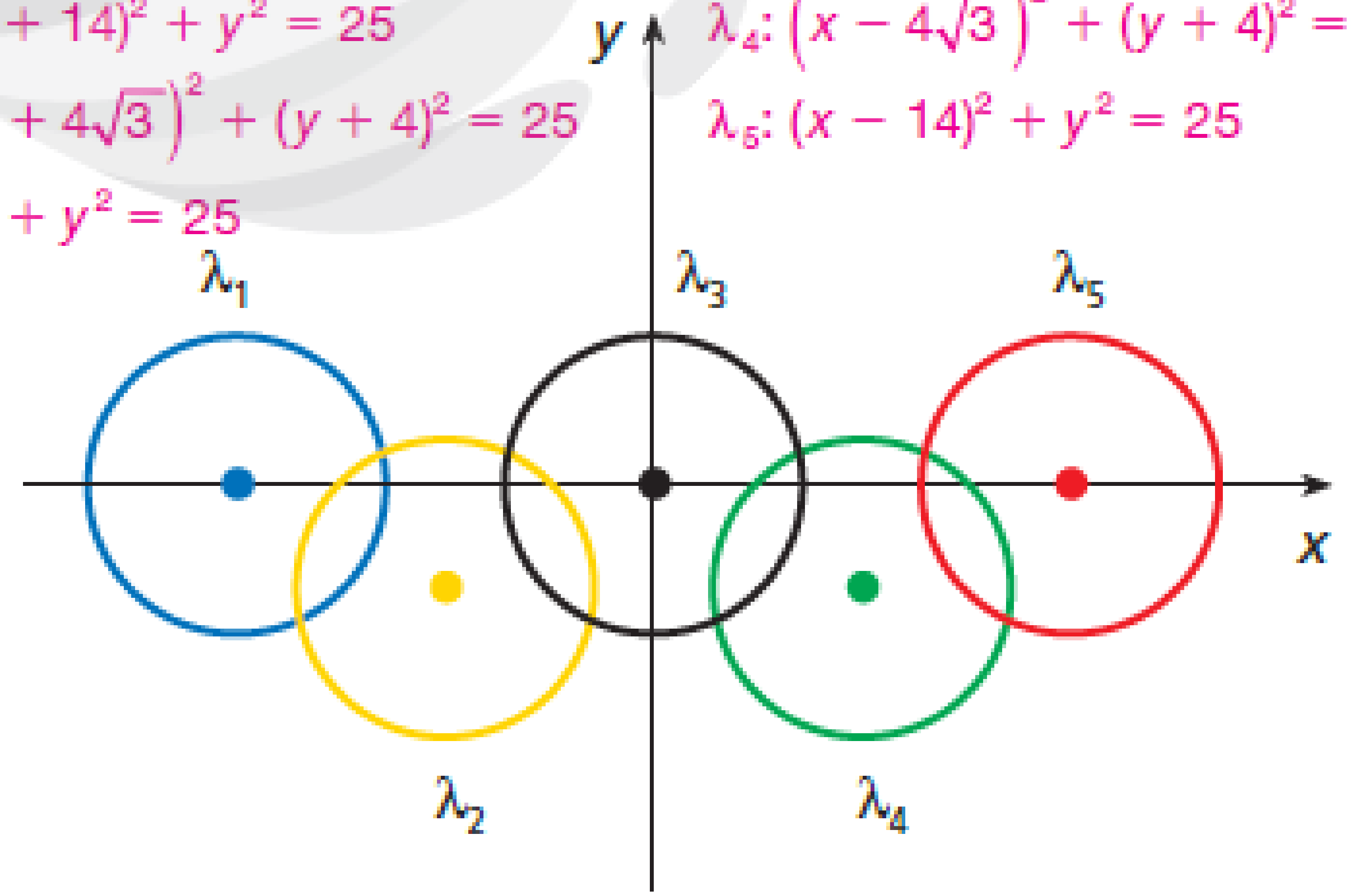
$\lambda_1: (x + 14)^2 + y^2 = 25$

$\lambda_2: \left(x + 4\sqrt{3}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$

$\lambda_3: x^2 + y^2 = 25$

$\lambda_4: \left(x - 4\sqrt{3}\right)^2 + (y + 4)^2 = 25$

$\lambda_5: (x - 14)^2 + y^2 = 25$

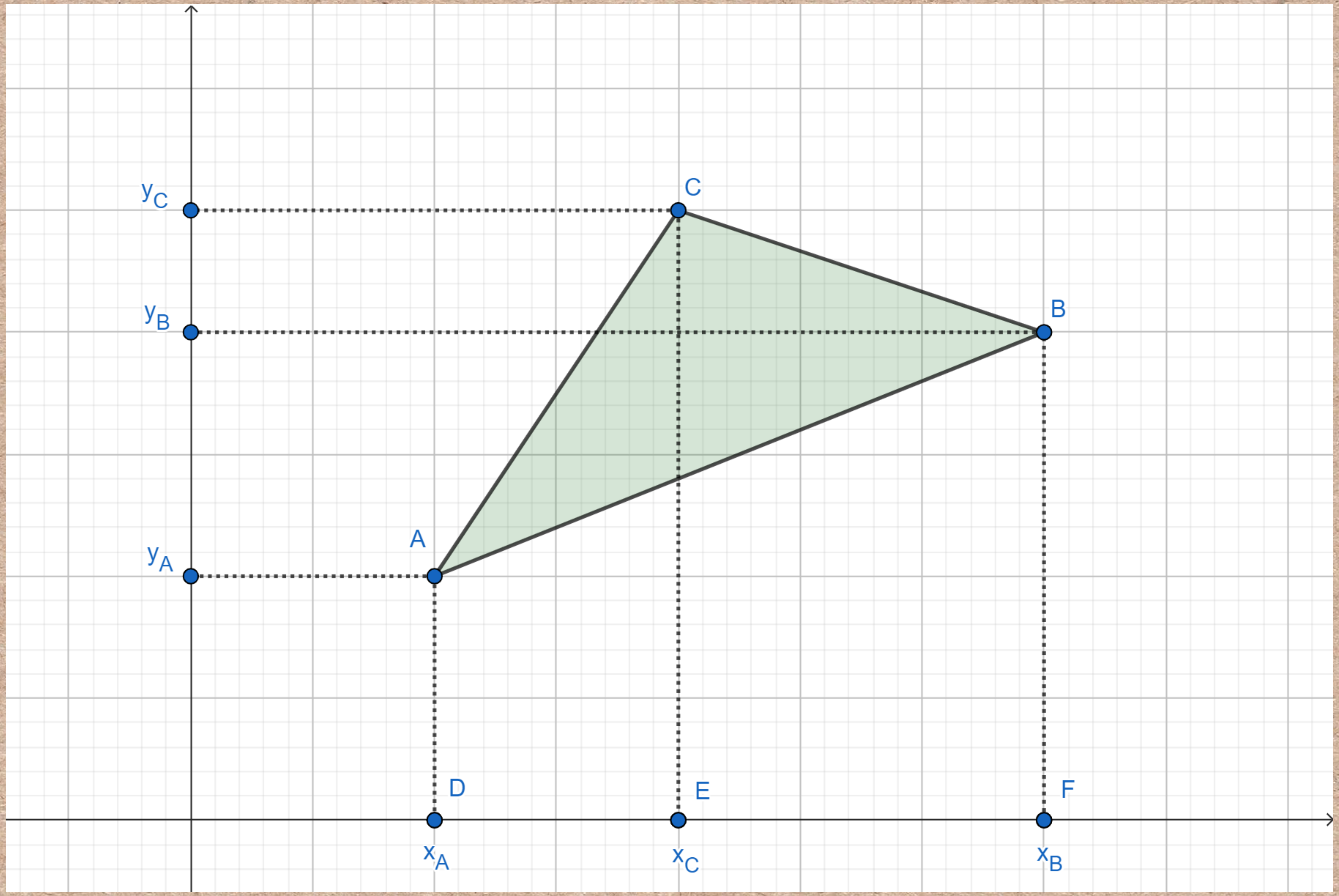


A circunferência λ_3 com centro na origem tem raio igual a 5 cm. As circunferências λ_1 e λ_5 têm seus centros a 14 cm do centro de λ_3. Os centros de λ_2 e λ_4 estão a $\sqrt{64}$ cm do centro de λ_3 e têm ordenada igual a -4.

Determine a equação das cinco circunferências que representam o símbolo olímpico.

(PAIVA, 2020)

ÁREA DO TRIÂNGULO

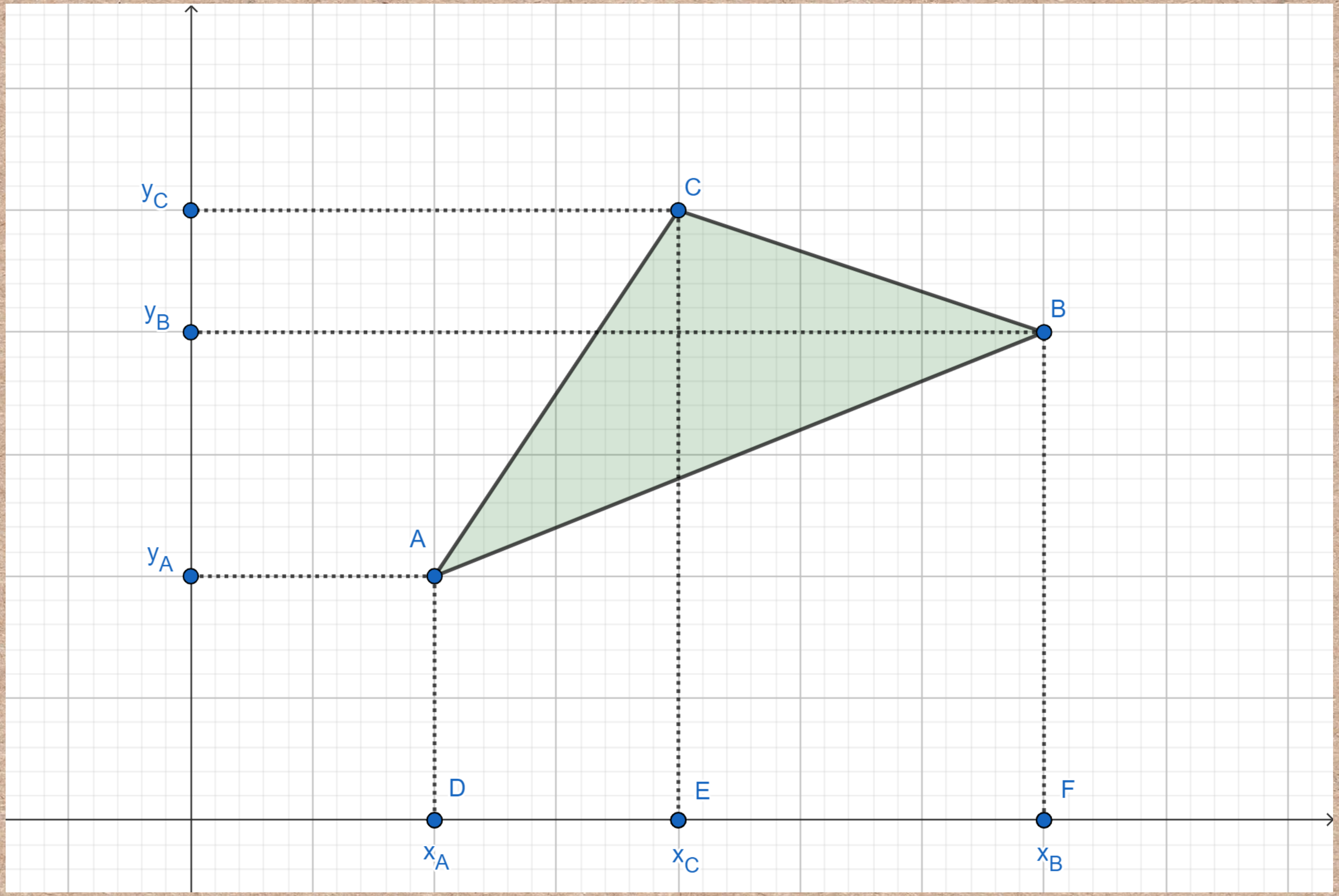


Encontre a área do triângulo de vértices A, B e C.

$$A_{ABC} = A_{ADEC} + A_{CEFB} - A_{ADFB}$$

A área do triângulo ABC é igual à soma das áreas dos trapézios ADEC e CEFB menos a área do trapézio ADFB.

ÁREA DO TRIÂNGULO



$$A_{ABC} = \frac{1}{2}(x_A y_B + x_B y_C + x_C y_A - x_C y_B - x_B y_A - x_A y_C)$$

Temos que:

$$\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix} = D$$

Portanto,

$$A_{ABC} = \frac{|D|}{2}$$

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

Conexões: matemática e suas tecnologias: manual do professor / organizadora Editora Moderna; obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna; editor responsável Fabio Martins de Leonardo. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

Matemática interligada: matrizes, sistemas lineares e geometria analítica / obra coletiva; editora responsável Thais Marcelle de Andrade. 1. ed. São Paulo: Scipione, 2020.

DE PAULA, A. F. **Mobilização e articulação de conceitos de geometria plana e de álgebra em estudos da geometria analítica**. 2011. 175 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2011.

PRÓXIMA OFICINA

Combinação, arranjo ou permutação? Uma discussão de atividades de análise combinatória

18/05/2023

Profª Dra. Cintia Melo dos Santos

Profº Dr. Renan Lima