Oficinas on-line: diálogos sobre propostas didáticas em Matemática

regularidade
representação
igualdade
generalização
...

Oficina 04

A introdução do pensamento algébrico no Ensino Fundamental

Prof. Dr. José Luiz M. Freitas

Dia 06/10/2022
18 horas (horário de MS)

Profa. Me. Rosane Corsini

Transmissão ao vivo: https://rb.gy/m9ezri
Mais informações: https://linktr.ee/ddmat

SCAN ME

Realização:

DDMat Grupo de Estudos em Didática da Matemática

Apoio:

UFMS UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CNPq Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico

Concepções de álgebra e pensamento algébrico

- Álgebra se limita às ***equações e expressões*** e seu estudo consiste, essencialmente, em realizar ***transformismos algébricos***. (PONTE et al, 2009)

- Álgebra se caracteriza pelo estudo de ***relações***, ***funções*** e ***estruturas algébricas de conjuntos***. (PONTE et al, 2009);

- O pensamento algébrico consiste em ***identificar e compreender padrões e relações***, em diferentes contextos. PNAIC (2014)

O Pensamento algébrico

Construção do pensamento algébrico:

"compreender padrões e relações, a partir de diferentes contextos", ou seja, possibilitar à criança:

- estabelecer critérios para agrupar, classificar e ordenar objetos, considerando diferentes atributos;

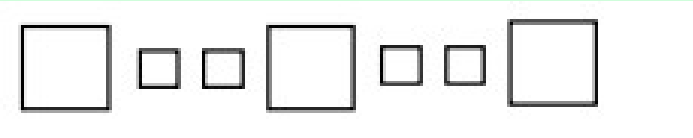
- reconhecer padrões de uma sequência para identificação dos próximos elementos, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples;

- produzir padrões em faixas decorativas, em sequências de sons e formas ou padrões numéricos simples.

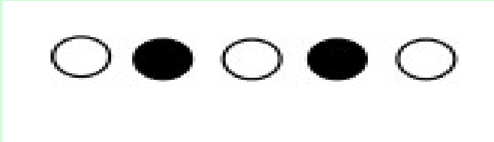
PNAIC (2014)

Nas sequências a seguir, que tipo de padrões você pode encontrar?

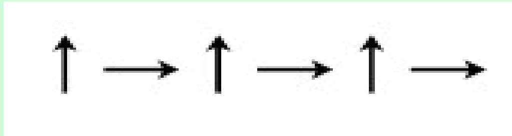
Tamanho



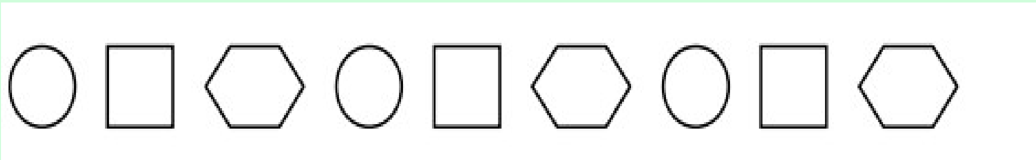
cor



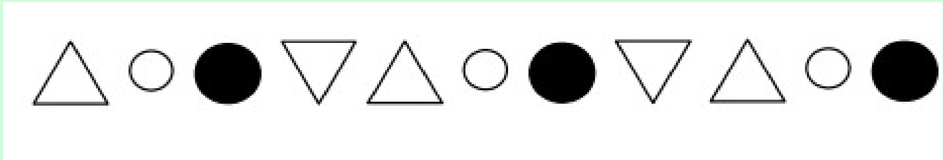
Orientação



Formas



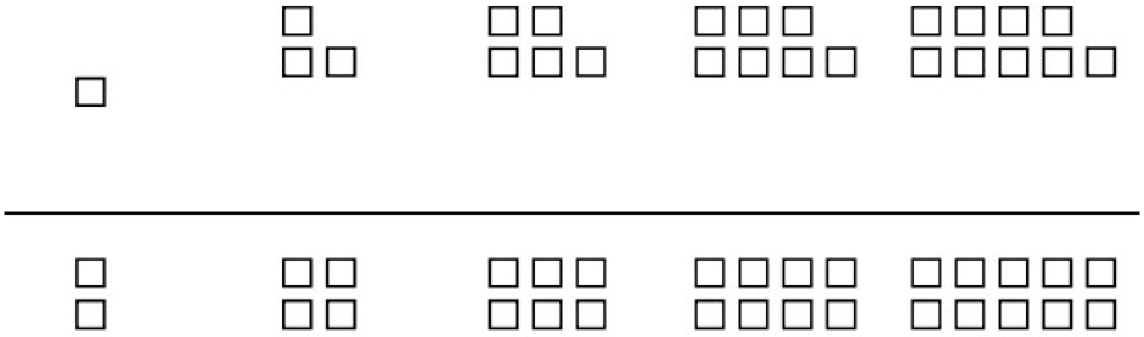
Mista

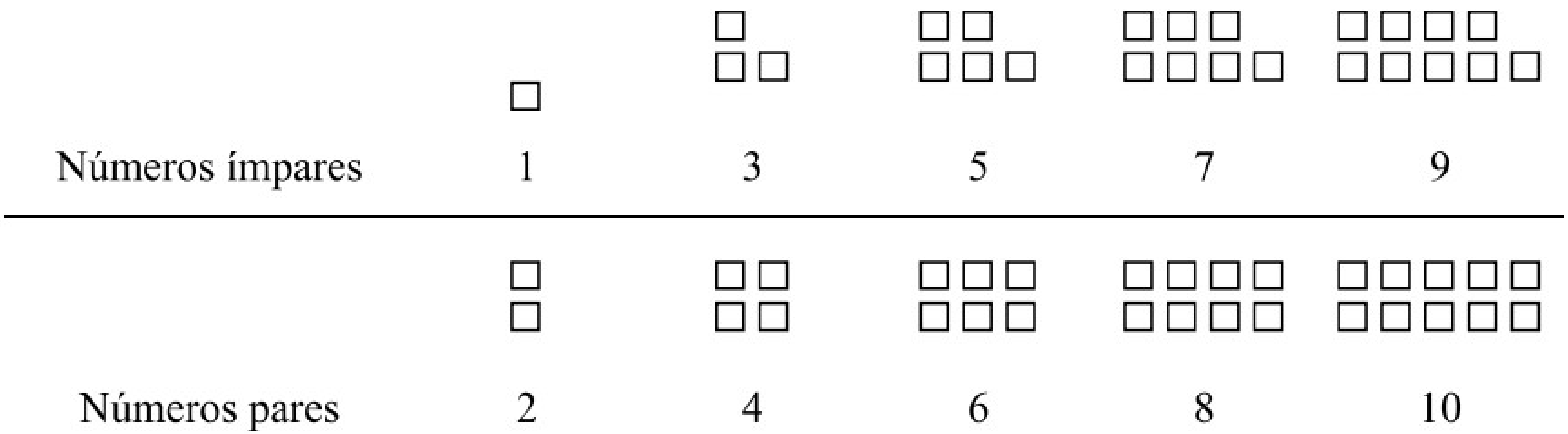


Numéricas

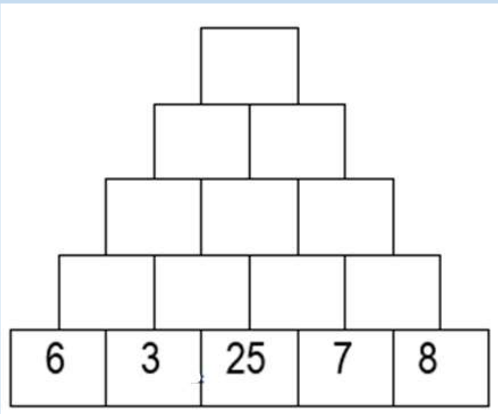
0, 2, 4, 6, 8,...   0, 5, 10, 15, 20, ...

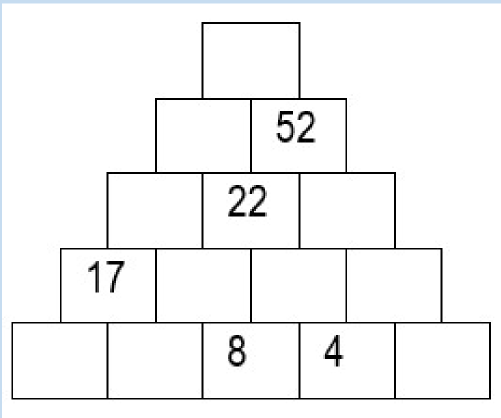
Também podemos trabalhar com outras regularidades...



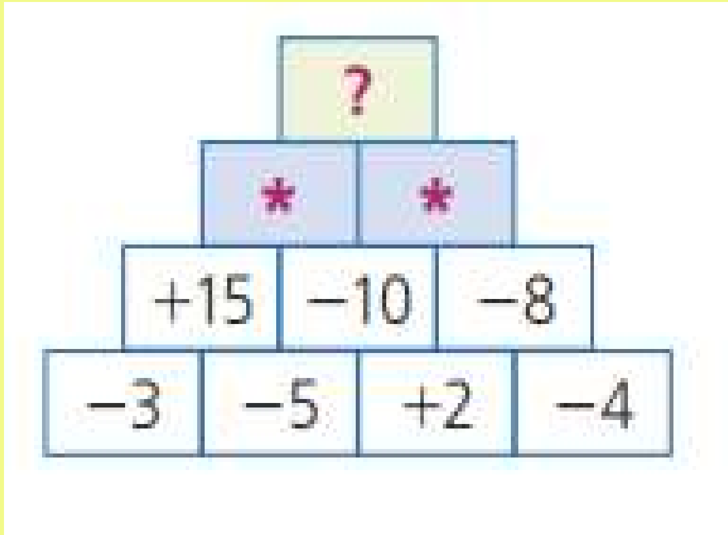

Números ímpares
1
3
5
7
9
Números pares
2
4
6
8
10

O número em cada casa é a soma dos dois números inscritos nas duas casas imediatamente inferiores.

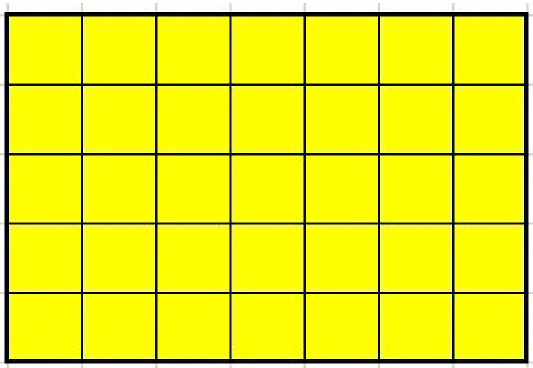




Descubra o segredo da figura e dê o número inteiro que deve estar o quadradinho que se encontra no topo, o qual possui o sinal de ?

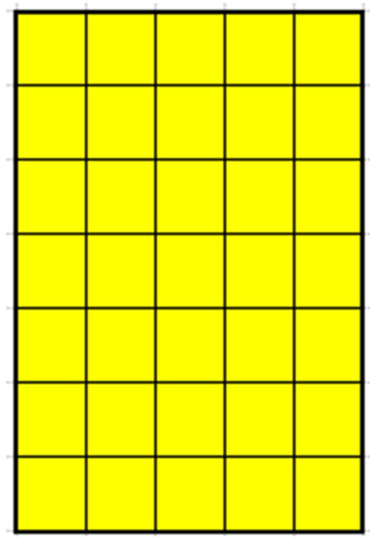


Regularidade na multiplicação



5 x 7

=



7 x 5

Tanto faz contar cinco linhas com sete quadradinhos ou sete colunas com cinco quadradinhos

O estatuto da letra na Álgebra

No que concerne ao uso de letras em álgebra, há quatro estatutos que são mais frequentes:

Rótulo (etiqueta)

Usar a letra inicial para representar algo, por exemplo, 3 metros ou 3 ***m***.

Incógnita

Encontrar o valor de x numa equação, por exemplo, $3x + 2 = 17$, ou seja, que $x = 3$.

Número indeterminado:

Quando aparece em expressões onde não importa os valores e nem o conjunto numérico aos quais pertença, em geral em cálculo algébrico, por exemplo, nos produtos notáveis como $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Variável

Quando expressa relações entre duas ou mais grandezas, com variação em domínios definidos. Por exemplo, Na função real de variável real definida por $y = f(x) = 2x – 3$.

Fases da evolução da linguagem algébrica

Retórica ou verbal

- que se estende desde os babilônios (1700 a.C) até o matemático grego Diofanto (250 d.C);

Sincopada

- do pensamento algébrico teria surgido com Diofanto de Alexandria que introduziu pela primeira vez um símbolo para a incógnita - a letra *sigma* do alfabeto grego – e utilizou uma forma mais abreviada para expressar suas equações.

Simbólica

- François Viète (1540 – 1603) teve uma grande importância nesta fase, pois embora utilizasse um estilo sincopado, foi responsável pela introdução de novos símbolos na Álgebra. Além de utilizar os sinais "+" e "-", introduziu as vogais para representar quantidades constantes e as consoantes para incógnitas.

Notação simbólica

- René Descartes (1596 –1650), que consolidou o uso da linguagem simbólica, em 1637, com a publicação de La Géomètrie (a Geometria), um dos apêndices de sua obra filosófica Discours de la Méthode (Discurso do Método), em que utiliza as últimas letras do alfabeto (x, y, z,...) como incógnitas (e, implicitamente, como variáveis) e as primeiras letras do alfabeto (a, b, c, d, ...) como quantidades fixas.

Um exemplo de investigação

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
...	...	...	...

Observando os números ao lado, identificar regularidades que podem ser encontradas?

Temos várias regularidades a serem observadas, vejamos algumas.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
...	...	...	...
4n	4n+1	4n+2	4n+3

Cor	Característica
	Inicia com 2 e soma 5 para o próximo termo
	Inicia com 1 e soma 5 para o próximo termo
	Múltiplos de cinco
	Inicia com 4 e soma 5 para o próximo termo
	Inicia com 8 e soma 5 para o próximo termo
	Inicia com 12 e soma 5 para o próximo termo
	Inicia com 16 e soma 5 para o próximo termo
...	...

Também temos...

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
...	...	...	...
4n	4n+1	4n+2	4n+3

Cor	Característica
	Inicia com 1 e soma 3 para o próximo termo
	Inicia com 2 e soma 3 para o próximo termo
	Múltiplos de 3
	Inicia com 7 e soma 3 para o próximo termo
	Inicia com 11 e soma 3 para o próximo termo
	Inicia com 15 e soma 3 para o próximo termo
	Inicia com 19 e soma 3 para o próximo termo
...	...

A soma de dois elementos de uma mesma linha que pertençam à terceira e quarta colunas encontra-se na segunda coluna.

1ª	2ª	3ª	4ª
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
...	...	...	...

A soma de um elemento da primeira coluna com um da terceira, resulta em um elemento da terceira coluna.

1ª	2ª	3ª	4ª
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
...	...	...	...

A soma de um elemento da segunda coluna com um da quarta aparece na primeira coluna

1ª	2ª	3ª	4ª
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
...	...	...	...

Somando os números de uma mesma linha o resultado está sempre na terceira coluna.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
...	...	...	...

$$0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

De fato, o 6 está na terceira coluna.

Somando os números de uma mesma linha o resultado está sempre na terceira coluna.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
...	...	...	...

$$4 + 5 + 6 + 7 = 22$$

Novamente, o 22 está na terceira coluna.

Somando todos os números de uma mesma linha o resultado está sempre na terceira coluna.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
...	...	...	...

Como seriam os termos na linha "n"?

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
...	...	...	...
4n	4n+1	4n+2	4n+3

Se somarmos os termos desta linha, o que acontece?

1ª	2ª	3ª	4ª
0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
20	21	22	23
...	...	...	...
4n	4n+1	4n+2	4n+3

$4n+(4n+1)+(4n+2)+(4n+3) =$

$4n+4n+1+4n+2+4n+3 =$

$4.4n+4+2=$

$4.(4n+1)+2$

$$\mathbf{4.}\boxed{?}\mathbf{+2}$$

Mas, isto significa que temos ***quatro vezes “algum valor” mais dois***! Característica de um elemento da terceira coluna!

Quando a letra representa um conjunto de valores, dizemos que ela possui o estatuto de variável.

Ao estudarmos sequências, utilizamos, em geral, a letra **n** para indicar a posição de um termo qualquer da sequência, por meio do termo geral. Esta notação é a lei de formação da sequência em questão.

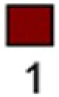
Vamos analisar e pensar um pouco sobre a sequência a seguir:

$$1, 4, 16, 25, 36, \ldots$$

Se indicarmos por T_n o termo geral desta sequência, podemos notar que:

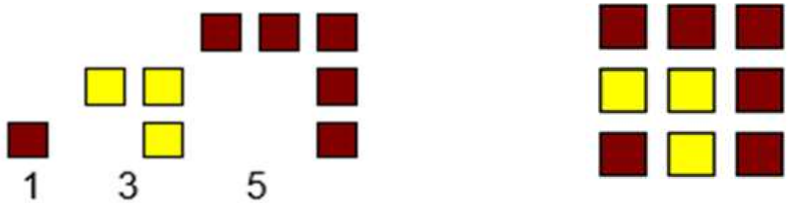
1, 4, 16, 25, 36, ...

$T_1 = 1 = 2.1 - 1$

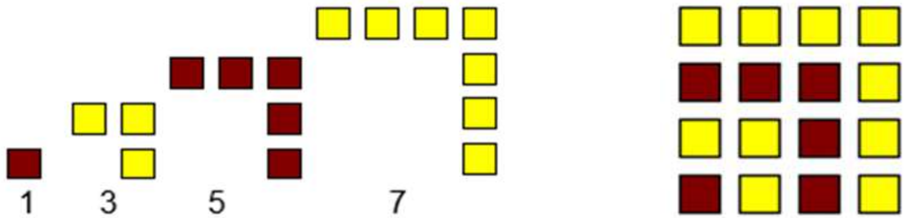


$T_2 = 4 = 1 + 3 = 1 + (2.2 - 1)$

$T_3 = 9 = 1 + 3 + 5 = 1 + 3 + (2.3 - 1)$



$T_4 = 16 = 1 + 3 + 5 + 7 = 1 + 3 + 5 + (2.4 - 1)$



.

.

.

$T_n = \boldsymbol{n}^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2.\boldsymbol{n} - 1)$

Propriedades da igualdade

Reflexiva

$2 = 2$

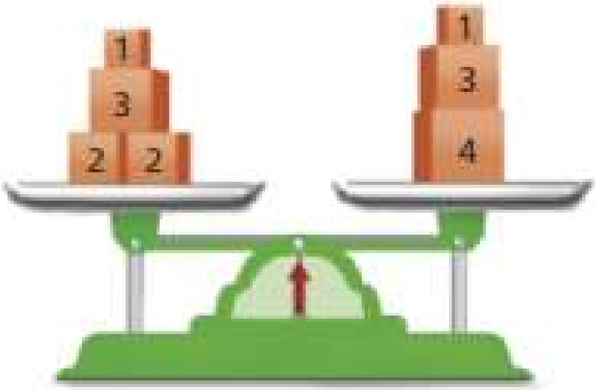
Simétrica

$2 + 5 = 7 \Leftrightarrow 7 = 2 + 5$

Transitiva

$2 + 5 = 7$ e $7 = 8 - 1$ $\Rightarrow$ $2 + 5 = 8 - 1$

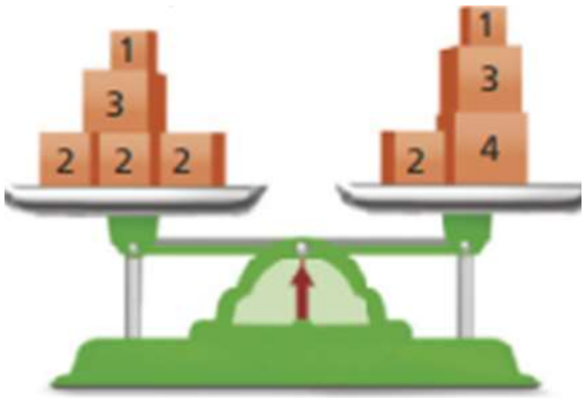
Princípios da equivalência

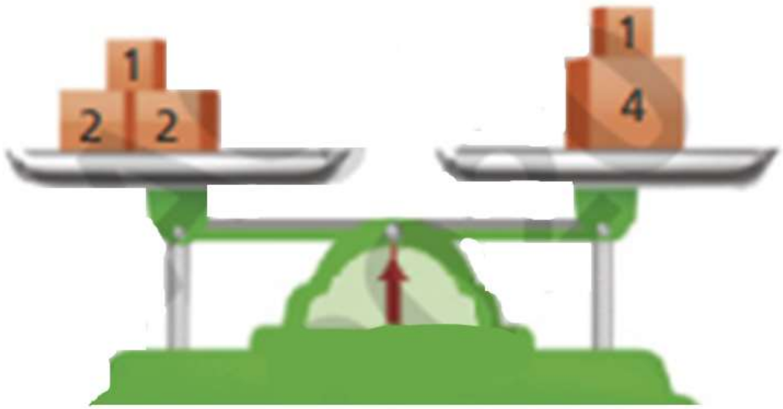


$$\underbrace{2 + 2 + 1 + 3}_{8} = \underbrace{4 + 1 + 3}_{8}$$

Continuação

Princípio aditivo

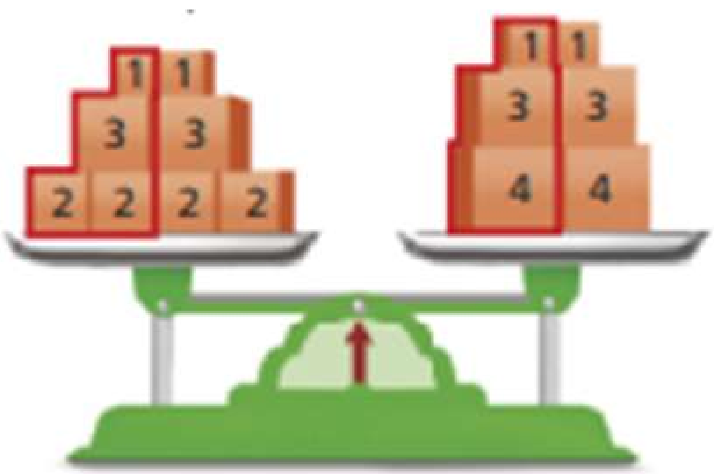




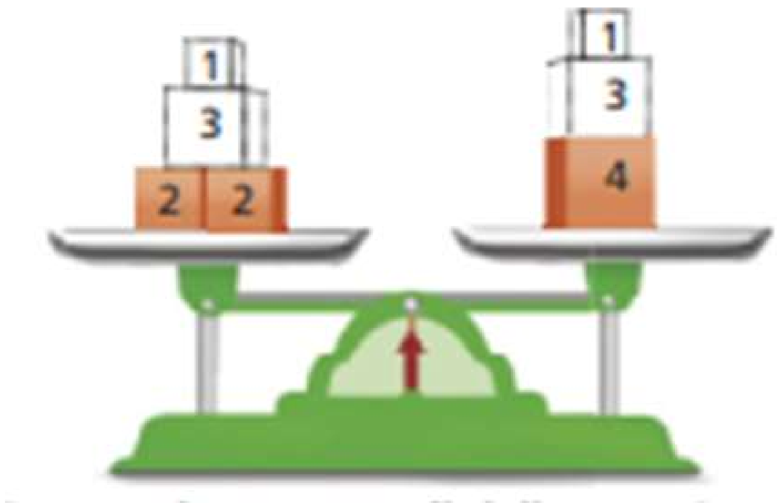
$$\underbrace{(2+2+1+3)+2}_{10} = \underbrace{(4+1+3)+2}_{10}$$

$$\underbrace{(2+2+1+3)-3}_{5} = \underbrace{(4+1+3)-3}_{5}$$

Princípio multiplicativo

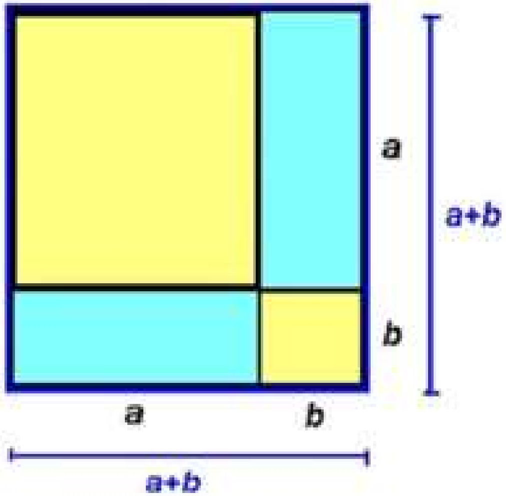


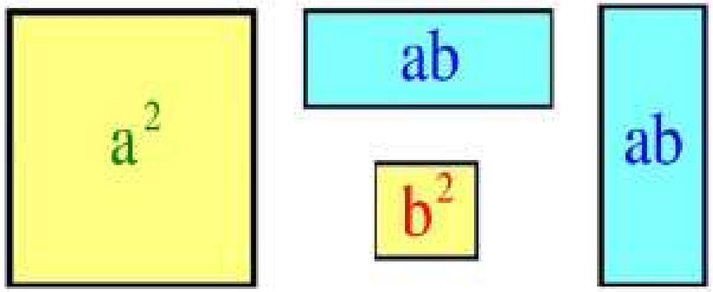
$$\underbrace{(2+2+1+3).2}_{16} = \underbrace{(4+1+3).2}_{16}$$



$$\underbrace{(2+2+1+3):2}_{4} = \underbrace{(4+1+3):2}_{4}$$

Para compreender o *quadrado da soma de dois termos*!



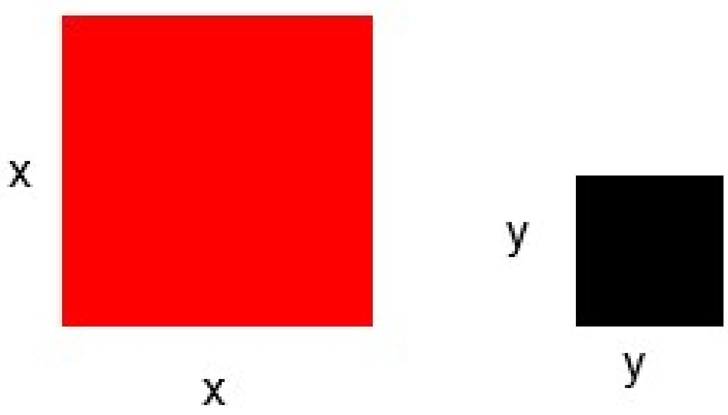


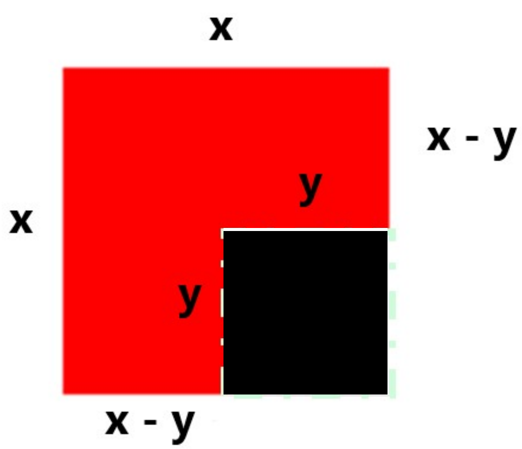
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Para compreender diferença de quadrados!

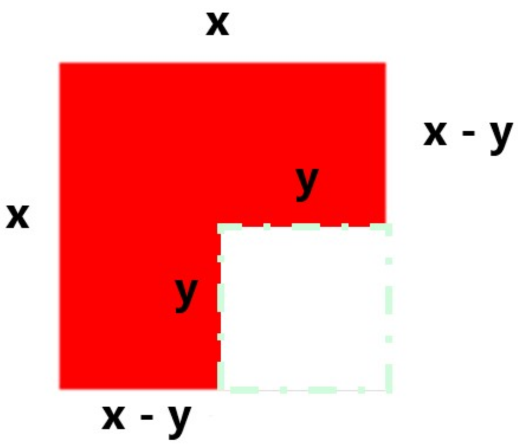
$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$

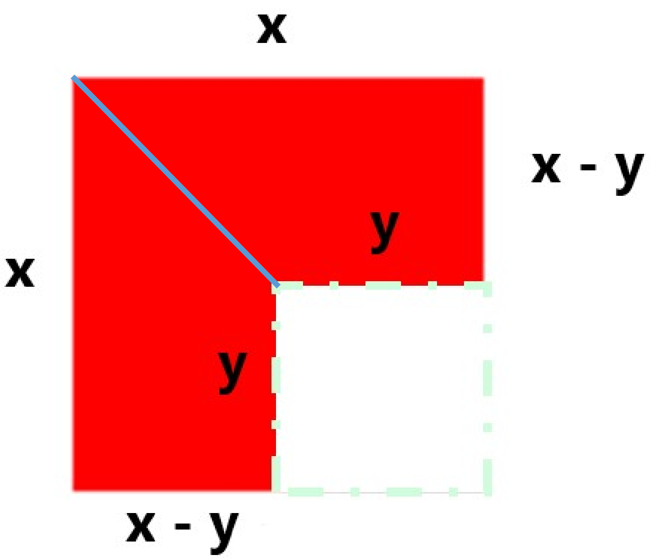


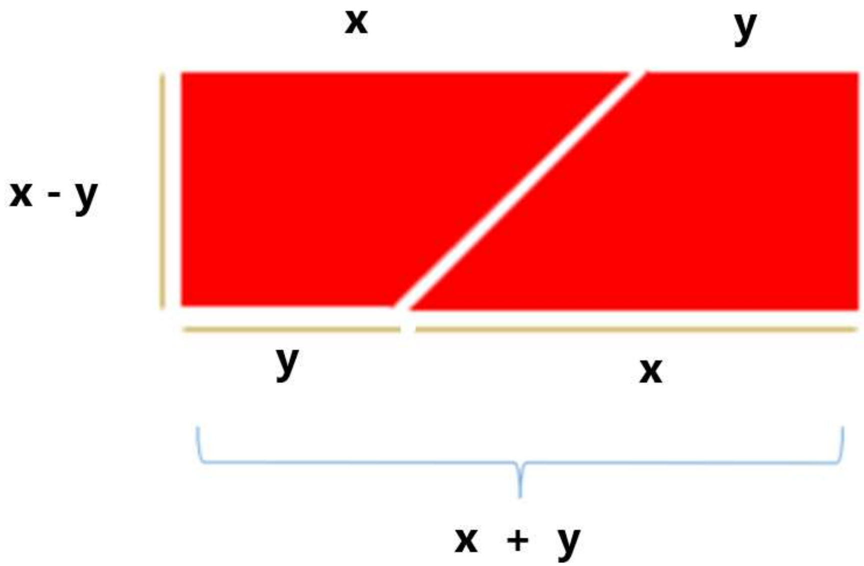


Para compreender diferença de quadrados!

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$$







$$A_{retângulo} = b \; X \; h$$

(x+y).(x-y)

É algébrico ou aritmético?

- Se diante da atividade $\frac{5+5+5}{3}$, alguém diz que o resultado é 5

- Se continuarmos com raciocínio e propusermos $\frac{5+5+5+5}{4}$

- Se déssemos continuidade de modo que uma coisa compensasse a outra do seguinte modo $\frac{a+a+\cdots+a}{n}$ (de modo que tivéssemos o a somado a ele mesmo n vezes)

Sobre a introdução da Álgebra

Segundo Lins e Gimenez:

> Se a pessoa for um aluno de 4ª série [atual 5º ano], certamente iremos querer que ela explicite sua consciência do fato de que a ideia é geral, mas se for um matemático, é provável que basta falar dos quatro cincos para que nos convençamos que ali sempre esteve em jogo o algébrico (por mais elementar que seja).(LINS e GIMENEZ, 1997, p.99)

Pensei em um número, multipliquei-o por 3, ao resultado adicionei 5, obtive 17. Que número é esse?

Para um aluno do 4º ou 5º ano que não conhece técnicas algébricas...

- ✓ O número obtido ao final das operações foi 17, e a ele foi adicionado 5, então subtrai-se 5 do 17;

$$\boxed{\begin{array}{r} 17 \\ -5 \\ \hline 12 \end{array}}$$

Pensei em um número, multipliquei-o por 3, ao resultado adicionei 5, obtive 17. Que número é esse?

continuação...

- ✓ Para chegar ao 12, multiplicou-se o número pensado por 3, então divide-se 12 por 3:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 3 \\ \cline{2-2} 0 & 4 \end{array}$$

Logo, o valor desconhecido é 4.

Pensei em um número, multipliquei-o por 3, ao resultado adicionei 5, obtive 17. Que número é esse?

Mesmo exercício com uma roupagem algébrica com resolução aritmética

$$3n + 5 = 17$$

Tradução simbólica de "o triplo de um número somado com 5 é igual a 17";

$$3n = 17 - 5$$

$$3n = 12$$

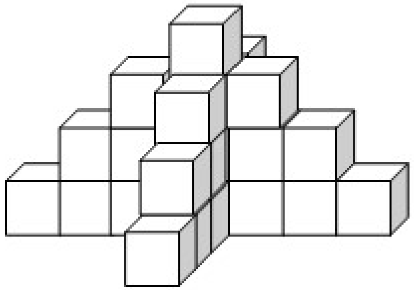
Então o triplo desse número deve ser igual a 17 – 5; ou seja o triplo do número que eu estou procurando é 12.

$$n = 4$$

Se o triplo do número é 12, então o número é 4.

Entretanto, mesmo se, aparentemente, fosse utilizada a linguagem algébrica não poderíamos afirmar que o raciocínio utilizado na solução teria sido algébrico. Queremos dizer com isso que a Álgebra não se reduz a uma linguagem.

Observe a torre de cubinhos abaixo e responda as questões a seguir:

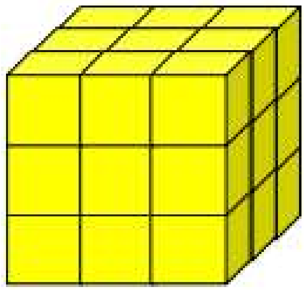


- Quantos cubinhos foram usados para construir essa torre?
- Quantos cubinhos serão necessários para construir uma torre semelhante a esta, mas de 8 cubinhos de altura? Explique como encontrou o resultado.

Identificação do número de faces pintadas num cubo decomposto em cubinhos

Imagine que um cubo de madeira foi pintado de amarelo e depois subdivido em cubinhos de mesmo tamanho, como os cubinhos do **material dourado.** Em seguida vamos imaginar que todos os cubinhos foram agrupados para formar novamente um cubo (figura abaixo), de modo que a quantidade de cubinhos em cada aresta seja a mesma. A partir da análise dessa figura particular, responda as questões apresentadas.

a) Imagine que o cubo, pintado de amarelo, foi subdividido em cubinhos iguais de modo que a quantidade de cubinhos em cada aresta seja igual a 3. Quantos cubinhos ficaram com uma única face pintada? E com duas? E com três? ... E com nenhuma?



b) Se houver 10 cubinhos em cada aresta quantos cubinhos terão 3 faces pintadas, quantos terão 2 faces pintadas, quantos terão uma face pintada e quantos não terão face alguma pintada? E se houver **n** cubinhos em cada aresta?

Referências

BITTAR, M., FREITAS, J.M. ***Fundamentos e metodologia de Matemática para os Ciclos Iniciais do Ensino Fundamental*. Campo Grande**. Editora UFMS, 2004

DANTE. L. R. **Projeto Teláris: matemática**: ensino fundamental 2. 2ed. São Paulo, Editora Ática, 2015.

FREITAS, J. L. M. **Algumas questões sobre Pesquisa em Educação Algébrica**. Revista Educação Matemática Pesquisa. Disponível no link: https://www.pucsp.br/IIIpesquisaedmat/download/resumos/GD8-texto-Jose-Luiz-Freitas-2015_05_27.pdf

GIOVANNI, J. R., CASTRUCCI, B. **A conquista da Matemática**: 7º ano: ensino fundamental: anos finais. São Paulo, FTD, 2018.

LINS, Rômulo C.; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

NOGUEIRA, R. C. S. **A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental : uma análise praxeológica**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2008.

BRASIL. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Apresentação** / Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. – Brasília: MEC, SEB, 2014.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.