I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática
01 a 06 de novembro de 2016 Bonito - Mato Grosso do Sul - Brasil

AS FRAÇÕES NA SALA DE AULA: UM ESTUDO DE CASO À LUZ DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Antonio Sales
Prof. Dr. da Universidade para o Desenvolvimento do Estado e da Região do Pantanal-UNIDERP e da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul/UEMS, Brasil
profesales@hotmail.com

Danise Regina Rodrigues da Silva
Mestranda da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul/UEMS
daniseregina@yahoo.com.br

Sérgio Freitas de Carvalho
Doutorando em Educação Matemática pela Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/UFMS
Professor temporário da UEMS, Unidade de Nova Andradina
sergiofdcarvalho2012@gmail.com

Resumo:
Este trabalho é resultado parcial de uma pesquisa em andamento sobre um caso de ensino de frações na educação básica. Tem como referência a Teoria da Transposição Didática embora se concentre mais na etapa final do processo, que é a sala de aula. No entanto, percorre o caminho da fração desde os seus primórdios até o seu ponto final que é o saber escolar. Discute também os diversos subconstrutos que compõem esse saber e, como resultado, tem-se que que o subconstruto que predomina na sala de aula é a relação parte-todo e que a abordagem do professor está centrada nas particularidades do sujeito que ensina. Dessa forma, a fração como saber escolar, guarda certa distância do saber acadêmico e não mostra sua vinculação com o desenvolvimento histórico.

Palavras-chave: Subconstrutos da Fração, Saber Acadêmico, Saber Escolar

Introdução

O conceito de fração apresenta certo de grau de dificuldade, tanto para ser ensinado quanto para quem precisa apreendê-lo. Em geral, após ter estudado e resolvido várias tarefas envovlendo números naturais, os alunos se deparam com situações envolvendo números fracionários quer na forma decimal ou na forma de fração. Entram em contato com as frações de uso mais comum como 1/2 e 1/4. São ainda, informados de que existem diferentes representações numéricas para esses números que representam parte de um inteiro e se deparam com problemas envolvendo os diferentes significados de fração, além da aprendizagem das operações básicas. (CAMPO GRANDE-MS, 2008).

Pesquisas desenvolvidas por Damico (2007), Sá (2011) e Silva M.(2013) sinalizam que o conceito de números racionais em sua forma fracionária é um dos mais difíceis de ser ensinado e aprendido no ensino fundamental. Atribuem essa dificuldade à gama de símbolos que são usados para representar esse conceito, aos diferentes sentidos dado às frações, bem como ao déficit conceitual dos professores que ensinam matemática, sejam eles especialistas ou não. Ademais, consideram que os sentidos parte-todo, razão, operador, quociente, e medidas são ensinados na maioria das vezes desconectados. Posto isso, parece não ser difícil explicar as dificuldades que aparacem em torno do ensino e da aprendizagem do conceito de números racionais em sua forma fracionária. No entanto, mesmo sabendo que já existem pesquisas relevantes e em quantidade considerável em torno do tema, a curiosidade, ou, mais do que isso, a inquietude intelectual provocou a busca de mais informações sobre o percurso desse conteúdo matemático e como está presente na escola, além disso, compreender o porquê provoca tanta insatisfação, em termos de resultados, nos professores. Uma ansiedade que pode ser traduzida por meio dos questionamentos: o que é uma fração e por que inquieta tanto? Como foi construído esse conceito e como é trabalhado na Educação Básica?

Diante do exposto, entendemos que estudar como a fração se constituiu ao longo do tempo, como é estudada na universidade e, finalmente, como chega e, é trabalhada na escola. Considera-se ser uma questão relevante neste contexto, tendo em vista ser de extrema importância o conhecimento histórico de um conceito para Educação Matemática. É em virtude dessa relevância que nos propusemos a abordar essa trajetória nestas páginas.

Pais (2000, p.13), por exemplo, destaca que “estudar o processo evolutivo porque passa a formação do seu objeto de ensino” é importante no Movimento da Educação Matemática. A justificativa apresentada por ele é que estudar essa evolução permite identificar os múltiplos fatores que influenciam na determinação do saber a ser ensinado. Esses fatores podem ser externos ou internos ao ambiente escolar ou até mesmo ao próprio conceito. No entanto, neste estudo levaremos em conta, principalmente, os fatores relacionados ao ambiente escolar.

Para analisar e buscar entender essa trajetória recorremos ao conceito de Transposição Didática (TD) que, segundo Errobidart (2010), foi introduzido por Yves Chevallard, na década de 1980 com o objetivo de caracterizar a rede de influências pelas quais passa um saber científico ou acadêmico até se transformar em Saber Escolar. A discussão dessa trajetória leva em conta o fato de que um saber acadêmico é descontextualizado como destacou Pais (2000, p. 14-15), ao afirmar que “na linguagem usada no meio científico, o *saber* é quase sempre caracterizado por ser relativamente descontextualizado, despersonalizado e mais associado a um contexto científico histórico e cultural”. Dessa forma, saber e conhecimento se distinguem pelo fato deste último ter caráter experimental e aspectos utilitários.

Um saber acadêmico, pela própria característica do conceito, perde o contato com a origem, com a motivação para o seu surgimento, com o contexto social ou econômico que despertou no homem, ao longo de certo tempo, a idealização e a apresentação das primeiras formas. Enfim, o saber científico é um conhecimento que foi validado pela comunidade científica.

Pais (2000, p.13-14) entende a Transposição Didática como um caso particular da transposição dos saberes ou "evolução das ideias". Esse autor admite que falar em transposição só faz sentido quando a relacionamos a um saber específico e que admitir um determinado saber implica em "pensar na existência de um movimento de transposição".

Essa ideia é reforçada por Lopes ao afirmar que:

> o conhecimento científico rompe com os princípios e formas de pensar cotidianos, com os quais o conhecimento escolar precisa dialogar, o que nos exige compreender como essas inter-relações entre diferentes saberes sociais podem acontecer, de forma a favorecer a socialização. (LOPES, 1999, p. 20).

O saber escolar tem configurações próprias, criadas pela própria escola e, portanto, guarda características distintas do saber acadêmico ou científico. Essas configurações criadas pela escola não o tornam, necessariamente, menos importante ou menos complexo do que o outro, apenas o adapta aos seus objetivos de constituir novas estruturas cognitivas nos estudantes. Estruturas necessárias para a constituição de outras estruturas que comporão o amplo campo de conhecimento que a sociedade espera que o aluno domine. Portanto, ao criar as próprias configurações do saber que transmite a escola não tem o objetivo de deturpar o saber de referência, mas torná-lo acessível. A escola não ensina saberes puros, salienta Lopes (1999, p.215), mas "sim conteúdos de ensino que resultam de cruzamentos complexos, um projeto de formação e exigências didáticas".

Lopes afirma que:

> Portanto, há uma diferença, não necessariamente indesejável,entre saber ensinado e saber de referência: as novas configurações cognitivas, construídas pela escola ao reconstruir o saber de referência, podem trabalhar no sentido de formar *habitus* desejáveis no educando, *habitus* esses que não seriam produzidos pela simples transmissão do saber de referência. (LOPES, 1999, p.19).

Essa fala de Lopes é coerente com a perspectiva de Chervel (1990) que contesta o caminho unidirecional como se apenas o saber acadêmico ditasse a performance do saber escolar. Este tem também um componente do ambiente escolar que o transforma em algo mais do que mera cópia modificada do anterior. Chervel vê a possibilidade de uma construção própria da escola dos saberes que ensina, cuja origem nem sempre seja a academia, embora ela o institucionalize.

Errobidart (2010,p.23) esclarece que o saber acadêmico sofre "descontextualização", isto é, desvincula-se do problema que motivou a pesquisa. A própria necessidade de teorizar e modelizar os saberes força a "decontextualização" e, dessa forma, se distancia dos problemas ou saberes do cotidiano tornando-se "distorcidos" em relação a estes. O saber matemático, ao ser modelado, ganha um alto nível de generalização que o despersonaliza ocultando as influências pessoais e sociais, bem como "as ideologias dos produtores do conhecimento científico".

O conhecimento científico é caracterizado por Astolfi e Develay (1991, p.116) como um saber "construído", que conseguiu se desprender da "experiência imediata". Um saber "coerente" porque permite organizar os dados e fazer previsões pela demarcação do "fluxo irreversível dos fenômenos" e, ao mesmo tempo, em deslocamento constante em decorrência das retomadas que faz toda vez que se depara com uma "exceção".

O processo de transposição didática, portanto, inclui o processo de fragmentação, dessincretização, programabilidade e publicidade afirma (ERROBIDART, 2010). A modelização pela qual passa o saber para se tornar científico torna-o sincrético uma vez que "constituído de conceitos que podem ser apreendidos em diferentes níveis de formulação e que não se organizam de maneira linear, mas de acordo com redes e tramas conceituais" (ASTOLFI; DEVELAY, 1991,p.117) e a fragmentação torna-se um fator importante para reaproxima-lo do objeto de origem, do seu ponto de partida. Para trazê-lo próximo ao seu estado primitivo de modo a permitir uma nova reorganização e que sejam programáveis as atividades ou organizações didáticas que proporcionam a manipulação das ideias implícitas através de objetos explícitos e manipuláveis. O objetivo da transposição didática de um saber acadêmico em saber escolar é refazer rupturas, preenchendo as lacunas que a descontextualização e generalização provocaram. Uma aproximação da "experiência primeira" que antecede a crítica. Despojá-lo um pouco das suas "construções metafóricas". (BACHELARD, 2005, p. 5-29).

Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p.136) destacam as características que diferenciam e aproximam a matemática escolar da matemática acadêmica ou "obras matemáticas originais" focalizando a necessidade de "reconstrução" destas para poderem ser ensinadas na escola. Veem uma aproximação tamanha que fica difícil imaginar que o saber científico tenha chegado à escola por acaso. Essa "recriação" escolar é tão semelhante à obra original que pressupõe intencionalidade e múltiplos fatores não acidentais, sendo que nesse conjunto o professor é uma peça, porém, não a única e nem a mais importante. No entanto, as diferenças entre os dois saberes também são dignas de nota uma vez que fatores acidentais também parecem ser incorporados dando nova roupagem, novos sentidos e estimulando novas abordagens.

Os autores citados afirmam também que "essa reconstrução escolar da matemática é absolutamente imprescindível" e intencional porque muitos elementos que se fizeram presentes na "origem da obra matemática" não são adequados ao uso no contexto escolar. A primeira etapa da TD acontece, segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 136) na "própria comunidade matemática". A própria escolha dos elementos que serão trabalhados na construção da "obra matemática" e depois reconstruídos para uso na escola, acontece nessa comunidade.

Existem, portanto, diferentes instituições pela qual o saber matemático percorre até o seu ensino em sala de aula. O saber científico sofre transformações adaptativas até torna-se um objeto ensinável, essas modificações são chamadas por Chevallard (1998) de transposições didáticas. Entretanto, quando se trata do ensino das frações parece haver novas configurações na noosfera[I] que envolve o ensino dos números racionais na forma fracionaria. Fato esse que confirma a perspectiva de Chervel de que o caminho não é unidirecional.

Moreira e David (2010), pensando na matemática a ser ensinada na escola, sinalizam alguns pontos que possibilitam refletir sobre essa matemática. De acordo com os autores, as concepções de matemática que têm sido desenvolvidas se diferenciam, usualmente, entre a matemática acadêmica (ou científica) e a matemática escolar, sendo essa última a matemática a ser ensinada na escola.

A matemática escolar, por sua vez, tem sido tratada sob duas perspectivas distintas, uma norteada pelas ideias de Chevallard (1991) e outra pelas ideias de Chervel (1990). A primeira perspectiva, que Chevallard chamou de transposição didática, enxerga a matemática escolar como uma matemática científica didatizada, ou seja, uma visão limitada da matemática científica, passível de ser ensinada a alunos de Educação Básica. Essa perspectiva ficou conhecida como didática francesa e trata dos problemas relacionados aos processos que fazem de um saber a ensinar, um objeto de ensino. Em contrapartida, as ideias de Chervel apontam para a matemática escolar como sendo independente da matemática científica, constituída a partir das práticas e culturas escolares.

Moreira e David (2010) colocam-se numa intermediária entre as ideias de Chevallard e de Chervel para discutir a matemática a ser ensinada na escola. Entendem que é necessário pensar um caminho que não reduza a matemática escolar a uma versão elementar da matemática científica, mas que também não a coloque como algo independente da mesma. Que não a limite às práticas que se desenvolvem no interior da escola. A matemática a ser ensinada na escola, conforme defendem esses autores, engloba diferentes saberes da prática docente, das ações pedagógicas do professor, bem como discussões oriundas de pesquisas que tratam do ensino e da aprendizagem dessa ciência.

No entanto, se nos apegarmos ao conceito de TD conforme definido por Chevallard, dizemos que a fração, como abordada na educação básica se parece pouco com a forma acadêmica e se aproxima da forma como surgiu, nos primórdios da matemática, como um conhecimento de caráter experimental e aspectos utilitários.

Neste trabalho, a proposta é analisar a TD do conceito de fração a partir do saber acadêmico até o saber escolar atual.

Frações: do saber acadêmico ao saber escolar

Ao analisar a TD do conceito de fração desde o conhecimento individual, e utilitário,

[I] Noosfera compreende os parâmetros curriculares, referenciais de ensino, livros texto. É a noosfera que se encarrega de realizar a interface entre a sociedade e as esferas da produção dos saberes. (LEITE, 2004, p.60) fundamentado na experiência, até o saber científico e deste ao saber escolar procuraremos acompanhar a sua evolução interna sem discutir os fatores externos que a motivaram.

Na academia o número racional consiste na divisão em Q, por meio da seguinte definição: "sejam a, b $\in$ Z. b $\neq$ 0. Sc a é múltiplo de b, então existe um único c $\in$ Z de maneira que a = bc. Este elemento é chamado de quociente de a por b”. (DOMINGUES, 1991, p. 180). Representado também, da seguinte forma:

$$c = a/b \text{ ou } c = a \div b$$

Observa-se que a definição não retrata todos os sentidos atribuídos as frações. Segundo Kieren (1980), essa definição formal não revela a amplitude do conceito de números racionais, pois para esse autor o conhecimento dos racionais é algo subjetivo, uma vez que pode significar uma variedade de coisas. Daí a necessidade de transformar esse saber em algo ensinável.

Dessa forma, Kieren (1980), ao analisar os números racionais e fracionários sugeriu sete interpretações: frações, decimais, classes de equivalência, medidas, quociente, operadores e razão. Pois, para o autor são elementos importantes de um conjunto conceitual, necessários para a construção de estruturas cognitivas. Assim a partir da relação entre os elementos surgiram as cinco ideias de números fracionários, denominados por subconstrutos, a saber: parte-todo, quociente, medida, razão e operadores.

Outra definição dos números racionais se refere à partição de classes de equivalência. Expresso da seguinte maneira: “seja Z* = {m e Z / m $\neq$ 0} e consideremos sobre Z x Z* = { (m, n)/ m e Z, n e Z *} a relação(~) é definida por (m, n) ~ (p. q) se, e somente se, mq = np”. (Ibid, p. 181). Tal definição vem seguida das propriedades que caracterizam uma relação de equivalência.

Para Moreira e David (2010) essa definição corresponde a definição de Q “como o conjunto de classes de equivalência da relação (~) , isto é, Q é um conjunto (Z x Z* /~.” (2010, p. 63). Os autores advertem ainda que nesta leitura os números racionais se materializam por meio das frações aritméticas ensinadas no ensino fundamental. Além disso, o ensino das operações configuram a constatação das propriedades da adição e multiplicação.

A mesma linha de raciocínio é seguida por Ayres Jr. (1979) que, em seu livro da “coleção Schaum”, voltado exclusivamente para o ensino superior, aborda o assunto a partir da ideia de que os conjuntos dos números naturais e inteiros deixaram “espaços” sem serem preenchidos na construção da estrutura da matemática. Os conjuntos citados não permitem a definição da operação de divisão, sendo imperioso que os números racionais fossem organizados. Toda discussão se desenvolve em torno das propriedades operatórias, densidade, relações de ordem, representação decimal e periodicidade. Um tratamento estritamente algébrico.

Para uma discussão sobre como a fração deveria chegar à escola buscamos nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para ensino fundamental (PCN) (BRASIL 1998) as orientações emanadas desse documento:

> O estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, merecem especial atenção no terceiro ciclo, partindo da exploração de seus significados, tais como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador. (BRASIL, 1998, p. 66).

O mesmo documento orienta que o estudo dos números racionais deve ser estudado levando em conta “suas diferentes formas de expressão como fracionária decimal e percentual”. (BRASIL, 1998, p. 76).

No entanto, essa abordagem deve levar em contar a ideia de fração como parte, pedaço, de um objeto através da relação parte/todo, como medida de um número por outro ou divisão de certa quantidade em partes iguais (quociente), como comparação entre duas grandezas de naturezas diferentes (razão) e como fator de acréscimo ou diminuição de um número a partir de um dado referencial, e proporcional ao número a ser alterado (fração como operador). É o caso de usar a fração como fator de aumento (ou diminuição) percentual ou ainda reduzir um número a uma de suas partes como, por exemplo, reduzir um número a seus 3/4.

Entretanto, na escola, a predominância é a ideia de fração como relação parte/todo, a ideia de pedaço de um inteiro exatamente como foi o seu surgimento na antiguidade, segundo assinala Mainville Jr. (1992, p. 54) ao afirmar que “A palavra árabe que designa fração, *al- kasr,* é derivada do verbo cujo significado é “quebrar”. As forma latinas *fractio* e *minutun ruptus* eram traduzidas por antigos autores da língua inglesa como *broken numbers* (*números quebrados*). (Destaques do autor).

Na educação básica a fração, como ocorria nos tempos antigos (IFRAH, 2001), não é estudada como número. Segundo Boyer (1999, p. 36) nos primórdios da Matemática na Grécia “uma fração não era considerada como um ente único, mas como uma razão ou relação entre inteiros”. É com essa visão que o assunto é tratado na Educação Básica.

A fração na Sala de aula

Para saber como a fração chega à sala de aula ouvimos um professor (P1), dos anos iniciais, e um (P2) dos anos finais do ensino fundamental. O primeiro professor afirmou que *Primeiro eu procuro identificar os conhecimentos prévios dos alunos. Quais são suas perspectivas, primeiro o que é uma fração e para que eles utilizam isso no meio social, no cotidiano.(P1)*

Logo mais esse mesmo professor afirmou que:

Depois que eu analiso isso, eu passo a mexer com o conceito de fração, eu trabalho o conceito. O que é o conceito? O que é fração e para que a gente utiliza. Primeiro trabalho as [frações] próprias e depois as [frações] improprias. (P1)

Como se percebe não há muita semelhança com a abordagem acadêmica uma vez que naquela os aspectos estruturais são prioritários. Mas o conceito, a que se refere P1, aparece na fala seguinte:

Eu começo a trabalhar o quê? É a fração realmente nula. Começo a trabalhar a situação problema. Tenho uma pizza comi 6 pedaços ou falo de frações, num total de 8 pedaços comi 2/3 dessa pizza. Quanto comi dessa pizza? E também trabalho na prática, pego uma pizza coloco lá, aonde eu pego e mostro para eles o conceito mínimo, do que é uma fração, para que eu utilizo [...].(P1.)

Fração, nessa perspectiva, não é elemento integrante de uma estrutura, é um pedaço de alguma coisa, de um inteiro. Normalmente um inteiro familiar e, implicitamente, dividido em partes iguais. Essa ideia é reforçada por P2.

A exposição do assunto, aparentemente não se dá através de uma discussão com o aluno, mas apenas com exemplificações, como se vê nesta fala de P2.

Bom, primeiro a ideia de que (pausa), que não exite [...], eles começam o problema de contagem sempre com o número natural, certo? Ele acha que tudo é número natural, então a necessidade de usar a metade, a gente não compra um pedaço de chocolate!? É sempre bom fazer com comida, coisas que eles gostam, chocolate, pizza. Então você comeu metade, você come a pizza inteira? [...]. Eles acham por que aumentou o número em cima, aumentou embaixo, aumentou o pedaço. (P2)

A relação parte/todo é forma como o assunto chega na Educação Básica, pois é o subconstruto que possibilita ao professor dar um caráter utilitário para os números racionais na forma fracionária. Esse aspecto também se estende ao ensino da operação de adição. Na tentativa de tornar ensinável, o professor recorre incialmente a adição de pedaços de inteiros, fácil de visualizar com recursos gráficos e o conceito de equivalência, como aparece na fala de P2,

Então tem primeiro que introduzir o conceito de frações equivalentes. O que vem a ser? A gente fala na pizza de novo. Comi metade da pizza, João comeu 2/4 da pizza, quem comeu mais? [...] Começo a ensinar adições de frações. Desenho 1/3 e depois V2, para os alunos perceberem que não se pode somar pedaços que não são iguais. Por isso, é importante utilizar a equivalência [...]. (P2)

Nesta parte da transcrição, reforça o que Moreira e David (2010) situa como sendo o ensino das operações de adição e multiplicação dos números racionais na instituição escolar, oriundo do saber acadêmico, porém sem formalidades, o que se percebe é uma tentativa de P2 tornar esse objeto matemático ensinável recorrendo assim ao caráter utilitário por meio da ideia de parte-todo.

Considerações Finais

Estes são os caminhos da fração e este é o fazer de um professor, de um saber institucionalizado onde é vista como um elemento de um conjunto específico com propriedades operatórias iguais aos números inteiros permitindo que nesse conjunto se defina também a divisão, a fração volta ao passado anterior à formalização e consequente institucionalização. De um conjunto onde se pode definir as relações, de equivalência ou de ordem e retorna à ideia de pedaço com uma abordagem empírica. Vê-se também a presença do que vários autores classificam como dificuldades decorrentes da gama de simbologias que se fazem necessárias para a apreensão desse conceito numérico, dos diferentes sentidos dado as frações, de forma bem presente da limitação dos professores ao abordar o assunto. Essa limitação abrange o déficit conceitual inclusive dos que são especialistas.

Por outro lado, temos um professor que ignora as orientações de documentos oficiais como os PCN, Referencial Curricular do Município e, até mesmo, do livro didático adotado na escola, o professor percorre o seu próprio caminho. Elabora o seu roteiro de trabalho a partir daquilo que considera importante e mais fácil para o aluno.

Este estudo mostra, portanto, que o tema foi ditado pela academia, a ideia focalizada foi extraída da experiência e o enfoque metodológico é criado pelo professor. O retorno à sua ideia original de fração como parte de um inteiro é a etapa final desse processo que denominados Transposição Didática, mas também é a única forma encontrada pelos professores para apresentar o assunto aos alunos. É a forma, como no entender deles, fração, se torna ensinável.

Uma etapa importante para um trabalho dessa natureza consiste em analisar como ou se os subconstrutos de que fala Kieren (quociente, medida, razão e operadores) são trabalhados.

Referências

ASTOLFI, Jean-Pierre; DEVELAY, Michel. **A didática das Ciências**. 2.ed. Campinas, SP: Papirus, 1991.

AYRES JR, Frank. **Álgebra Moderna**. Barueri, SP: McGRAW-HILL do Brasil, 1979.

BACHELARD, Gastón. **A formação do espírito científico**. 5. Reimpressão. Rio de Janeiro Contraponto, 2005.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**.2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1999.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática. Brasília: MEC /SEF, 1998.

CAMPO GRANDE, MS. **Referencial Curricular da Rede Municipal de Ensino:** 3° ao 9° ano do Ensino Fundamental. Campo Grande-MS, 2008.

CHERVEL, André. **História das disciplinas escolares**: reflexões sobre um campo de pesquisa.

Teoria & Educação, n° 2, 1990.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber ensenado**. Psicologia Cognitiva y Educación. AIQUE Grupo Editor. 3ª edição. 1998. Disponível em < http://www.uruguayeduca.edu.uy/Userfiles/P0001%5CFile%5Cchevallard.pdf > . Acesso em: 04 de abril de 2016.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Marianna; GASCÓN, Josep. **Estudar Matemáticas**: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

DAMICO, Alecio. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental.** (Tese de doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC, 2007. Disponível em: < http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do7select action=&co obra=85776> . Acesso em: 22 de out de 2014.

DOMINGUES, Hygino H. **Fundamentos de Aritmética**. São Paulo: Atual 1991.

ERROBIDART, Nádia Cristina Guimarães. **O estudo qualitativo das transformações pelas quais passam os saberes até chegarem à sala de aula no conteúdo de Física** Ondulatória. Campo Grande, MS: PPGEDU/UFMS, 2010. (Tese de Doutorado em Educação)

IFRAH, Georges. **Os números**: a história de uma grande invenção. 2. ed. Rio de Janeiro: Globo, 2001.

KIEREN, T. E. **The Rational Number Construct - Its Elements and Mechanisms**. In: Recent Research on Number Learning. University of Alberta, 1980. Columbus, Ohio: Eric/Smeac, p- 128-152.

LEITE, Mirian Soares. Yves Chevallard e o conceito de transposição didática. In: **_____ Contribuições de Basil Bernstein e Yves Chevallard para a discussão do conhecimento escolar.** Rio de Janeiro, 2004. 131p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Educação - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Cap. 3. p. 45-73. Disponível em: < https://moodle.ufsc.br/mod/resource/view.php?id=761281>. Acesso em: 03 jun de 2015.

LOPES, Alice Ribeiro Casimiro. **Conhecimento Escolar**: ciência e cotidiano. Rio de Janeiro. EdUERJ, 1999.

MAINVILLE JR, Waldek E. Frações. In: DAVIS, Harold T. **História da Computação**. São Paulo: Atual 1992.(Tópicos da História da Matemática para Uso em Sala de Aula, v.2).

MOREIRA, Plínio Cavalcante; DAVID, Maria Manuela M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

PAIS, Luiz Carlos. **Transposição Didática**. In:MACHADO, Silvia Alcântara (org). Educação Matemática: uma introdução. 2.ed. São Paulo: EDUC, 2000.

SÁ, Fernanda Bartz de. **Aprendizagem de Frações no Ensino Fundamental.** (Monografia de conclusão de curso). Universidade Federal do Rio Grande do Sul-UFRGS. 2011. Disponível em: < http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/31633/000784031.pdf > . Acesso em: 05 de julho de 2015.

SILVA, Mª. do Socorro Lucinio da Cruz. **Concepções e práticas de professores do ensino fundamental sobre o ensino de frações: um estudo em escolas de Cuiabá**. (Dissertação de Mestrado). Instituto de Educação Programa de Pós-Graduação em Educação - Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Cuiabá, 2013. Disponível em: < www.ie.ufmt.br/ppge/dissertacoes/index.php?op=download&id=436 >. Acesso em: 22 de out de 2014.