ANÁLISE DA TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA DO CONCEITO DE DIVISIBILIDADE EM UMA TURMA DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Maria Auxiliadora Vilela Paiva
Ifes-Instituto Federal do Espírito Santo- Brasil
vilelapaiva@gmail.com

Rúbia Carla Pereira
SEDU-Secretaria Estadual de Educação -Brasil
profrubiacarla@gmail.com

Resumo: O presente artigo, a partir de resultados de pesquisas que tratam da ressignificação da disciplina Teoria dos Números na formação do professor de matemática na licenciatura, das relações didáticas e da relação do saber científico e escolar analisou o processo de transposição didática da construção do conceito de divisibilidade no ensino fundamental. Os objetivos propostos desencadearam o estudo desse fenômeno na relação professor-aluno-saber na turma de 6° ano do ensino fundamental de uma escola de Vitória -ES. Para o embasamento teórico, a pesquisa recorreu às teorias da Didática da Matemática Francesa, principalmente à Teoria da Transposição Didática de Chevallard e a algumas bibliografias específicas sobre Teoria dos Números. A pesquisa é de natureza qualitativa e parte de uma pesquisa maior que relaciona o saber científico ao saber escolar,considerando conceitos abordados em Teoria do Números. A análise dos dados produzidos ocorreu em múltiplos momentos com foco no saber matemático e permitiu identificar os processos de transposição didática na construção do conceito de divisibilidade na turma de 6° ano do ensino fundamental, enfatizando o desenvolvimento das noções matemáticas, a "análise do regime didático". Além disso, pontuaram-se alguns problemas no tratamento didático e conceitual, resultado de distorções no processo de *didatização* da Matemática escolar, indicando assim a necessidade da vigilância epistemológica.

Palavras-chave: Divisibilidade.Transposição Didática. Didatização do Saber

Introdução

O presente trabalho tem seu enfoque na Didática da Matemática, especialmente na formação de conceitos construídos na transposição didática do conteúdo de divisibilidade em uma turma de 6° ano do ensino fundamental.

Para situar a abordagem didática sobre Teoria dos Números e a relação dos saberes, nos apoiamos na pesquisa de Resende (2007), que em sua tese de doutoramento tratou o (re)significado da disciplina Teoria dos Números na formação do professor de matemática na licenciatura; discute o saber na instituição responsável pela formação de professores que atuam diretamente com os alunos do ensino básico; mostrou que os conteúdos relativos aos números inteiros recebem nos cursos de licenciatura uma abordagem axiomática, numa linguagem predominantemente simbólico-formal, com ênfase nas demonstrações e discute ainda as dificuldades na transposição deste saber entre a instituição acadêmica e a de ensino básico.

Já a pesquisa de Menezes (2006) orientou quanto às relações didáticas e analisa as inter-relações entre os fenômenos didáticos, entre esses, a transposição didática, no ensino de álgebra elementar no 6° ano do Ensino Fundamental. Segundo a autora, os fenômenos didáticos são aqueles que se instituem numa sala de aula, envolvendo a tríade professor-aluno-saber, quando é estabelecida uma relação didática, sendo que esses fenômenos só são consolidados ao considerarmos, além do polo professor e aluno, o polo saber.

Também nos embasamos na pesquisa de Moreira (2004), no se refere ao estudo da relação do saber científico e escolar, mais especificamente no que se refere a prática da dedução matemática. Tal estudo é feito à luz de algumas teorias, entre elas a da Transposição Didática.

No presente trabalho apresentamos, inicialmente, uma revisão da teoria da Transposição Didática de Chevallard(1991) e uma breve discussão sobre o conceito formal de divisibilidade em teoria de Teoria dos Números e no contexto da educação básica. Por fim, trazemos uma análise de processos da transposição didática na prática da sala de aula de uma turma de 6° ano do ensino fundamental.

A Teoria da Transposição Didática

A Teoria da Transposição Didática está estruturada sobre o sistema de ensino, composto pela comunidade científica, pelos pais, sistemas de gestão da educação etc., e sobre o sistema didático, composto pelo professor, o aluno e o saber, enfatizando este último e expondo a necessária distância entre o saber científico e o saber ensinado. Ela propõe analisar o sistema didático a partir dessa dimensão com base na epistemologia do saber ensinado (CHEVALLARD, 1991, p.16). Essa proposta não deteriora o saber escolar frente ao saber sábio, mas favorece o reconhecimento de especificidades do saber matemático escolar, situando-o dentro de um contexto próprio, com demandas e tratamentos específicos.

Frente ao objeto principal da sua teoria – o saber – Chevallard (1991) define a Transposição Didática:

> Um conteúdo de saber que foi designado como saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão torna-lo apto para ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. O "trabalho" que transforma um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado *Transposição Didática*. (CHEVALLARD, 1991, p.45. Tradução nossa. Grifos do autor).

Assim, a Transposição Didática é um conjunto de processos adaptativos que torna o objeto de saber (saber sábio) em objeto de ensino (saber a ensinar). Esses processos são: a epistemologia do regime didático do saber (noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas), a noosfera, as criações didáticas, a *vigilância epistemológica*, a *desincretização* do saber, a *despersonalização* do saber, a *programabilidade* do saber, a publicidade do saber, o controle social das aprendizagens, a dialética antigo/novo, a obsolescência externa e interna, a cronogênese e a topogênese.

Para Chevallard (1991), a separação em noções é uma estratégia de análise do funcionamento didático do saber: portanto, é um processo importante da Transposição Didática.As noções matemática, paramatemáticas e protomatemáticas dizem respeito ao saber matemático. As noções matemáticas são os conteúdos de saber. Já as noções paramatemáticas são ferramentas auxiliares da atividade matemática, como noções de parametrização, demonstração, etc. E as noções protomatemáticas são as capacidades desenvolvidas, como criar e testar hipóteses, analisar dados e outras.

> Noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas constituem estratos cada vez mais profundos do funcionamento didático do saber. *É necessária considerar suas diferenças para a análise didática*: porque analisar a Transposição Didática de qualquer noção matemática, supõe considerações de noções paramatemáticas, que por sua vez devem ser consideradas a luz de certas noções protomatemáticas. (CHEVALLARD, 1991, p. 65. Grifos do autor. Tradução nossa.).

Nessa perspectiva, reconhecer as noções do saber matemático no processo de construção do objeto, mais especificamente o conteúdo de divisibilidade, torna-se elemento da

Transposição Didática, pois esboça a análise epistemológica das situações didáticas para a construção do saber.

De fato, analisar a construção do saber escolar, explorando todas as noções propostas pela teoria da Transposição Didática, permite ao professor trabalhar todas as ramificações do desenvolvimento do conhecimento, pois trabalha a dimensão conceitual, as técnicas e as capacidades.

Outro elemento citado na teoria de Chevallard (1991) é a noosfera, que é onde ocorre a interação entre o sistema de ensino (professor-aluno-saber) e a sociedade, por exemplo, as discussões sobre os objetos de saber que se tornam escolarizáveis.

Já as criações didáticas são "conteúdos" criados motivados pelas necessidades do ensino para atuarem como recursos para outras aprendizagens. Esses conteúdos são úteis apenas no contexto escolar (PAIS, 2015, p.17).

O processo de adaptação do saber sábio para ensinável pode causar distorções conceituais no objeto ensinado. Cabe então aos agentes do sistema de ensino, professores e comunidade científica, exercer a *vigilância epistemológica* para que essas distorções não ocorram. Assim, esse processo preserva a distância necessária entre o saber sábio e o saber escolar, ao mesmo tempo em que garante que tal separação não cause erros conceituais ao objeto de saber.

> O conceito de Transposição Didática, enquanto se refere à trajetória do saber sábio para o saber ensinado, e, portanto, à eventual distância obrigatória que os separa, testemunha o questionamento necessário, ao mesmo tempo em que se torna a sua primeira ferramenta. Para didática, é uma ferramenta que permite reconsiderar, examinar as evidências, colocar em cheque as ideias simples, se livrar de familiaridade enganosa de seu objeto de estudo. Em uma palavra, que lhe permite exercer sua vigilância epistemológica. (CHEVALLARD, 1991, p.16. Tradução nossa.).

O professor exerce, no decorrer do seu trabalho, a *vigilância epistemológica* quando questiona sobre a natureza do objeto, como se concebe esse objeto no ensino e qual a relação entre a construção desse objeto e sua abordagem didática.

Da academia à escola básica, o saber passa por várias transformações que o distancia cada vez mais do saber sábio. O processo de vigilância epistemológica é uma grande contribuição da teoria da Transposição Didática, pois diante do inevitável distanciamento entre o saber científico e escolar, ele traz a reflexão sobre o quê e como ensinar de forma que seja possível manter a fidelidade ao conceito matemático.

A *desincretização*, *despersonalização*, *programabilidade* e publicidade do saber são processos da transposição didática associados à construção textual de um determinado conteúdo ou teoria matemática. A *desincretização* diz respeito à separação e organização da teoria em áreas. A despersonalização é o processo que torna um determinado saber desvinculado do seu autor, assim como a *descontextualização* desvincula o saber do contexto histórico o qual foi desenvolvido.

Visto que um determinado objeto de saber já se encontra descontextualizado, despersonalizado e *desincretizado* em áreas, ocorre o processo de *programabilidade*, que consiste em estabelecer uma programação segundo uma sequência didática progressiva e racional. Por fim, acontece o processo da publicidade do saber, que é a definição explicita do saber que deverá ser ensinado (PAIS, 2015, p.33). Isso, por sua vez, possibilita o controle social da aprendizagem, que se expressa nas práticas de avaliação para certificações oficiais.

Sobre a dialética Antigo/Novo, Chevallard (1991) e outros teóricos da linha da didática francesa, consideram que a construção do saber matemático é motivada por uma problemática que deve ser tratada por conhecimentos matemáticos antigos e novos. Antigo, porque o problema proposto deve abordar conhecimentos prévios, de forma que estes já não são suficientes para responder a situação proposta, mas motivam a expansão do conhecimento e motivam o saber novo que, por sua vez, é aquele que impulsiona e justifica a relação didática. Depois de passado o tempo de ensino, esse saber se classificará em antigo, em um ciclo de superação dessa dialética e de aprendizagem contínua.

> Na *relação didática* (que une professor, alunos e saber) o professor está a serviço da máquina didática cujo *motor* é a contradição entre o antigo e o novo: alimenta seu funcionamento introduzindo objetos transicionais que são os objetos de saber convenientemente convertidos em objetos de ensino. (CHEVALLARD, 1991, p.81. Grifos do autor. Tradução nossa.).

Na relação didática há de se considerar também o tempo didático que se traduz nos processos de obsolescência externa e interna, a cronogênese e a topogênese.

A obsolescência interna refere-se ao saber escolar em relação à duração de um ciclo de ensino, isto é, o objeto de saber superou a contradição antigo/novo e se tornou “antigo” para continuar. Já a obsolescência externa é um processo que ocorre em relação à sociedade, ou seja, é um desgaste histórico e cultural do saber, que já não é mais útil para a economia do sistema de ensino.

Chevallard (1991) evidencia diferenças temporais entre o professor e o aluno em relação ao saber. A cronogênese figura no fato de o professor saber mais conteúdos matemáticos, nas diversas áreas e suas inter-relações, o que o instrumentaliza para programar o tempo de ensino e o de aprendizagem. Por outro lado, a topogênese diz respeito à dimensão e ao domínio do objeto de saber que o professor detém e que o aluno ainda não. Além disso, o professor tem conhecimento de técnicas para ensinar que contribuem para que o aluno desenvolva não só a dimensão conceitual do objeto de saber, mas as competências e as capacidades críticas necessárias à sua aprendizagem.

Em particular, o conceito de divisibilidade permeia tanto a matemática científica, quanto a matemática escolar. Faz-se, pois, necessário um trabalho de transposição didática desse saber, de forma que o processo de ensino e aprendizagem seja eficiente para desenvolver as noções matemática e não crie distorções conceituais no conteúdo.

A divisibilidade no contexto da Teoria dos Números e na Educação Básica

O estudo dos conceitos matemáticos fica mais evidente quando considera a questão de sua especificidade científica e educacional. Segundo Pais (2011), a "natureza e o estatuto científico de cada disciplina, moldada pela sua trajetória histórica, determina uma forma particular de valorizar a dimensão educacional de cada saber" (PAIS, 2011, p.29).

Ao conceito de divisibilidade, foco deste estudo, será dado tanto o enfoque científico ao trabalhá-lo na ótica da Teoria dos Números quanto o da matemática escolar.

Para a área de Teoria dos Números define-se por divisibilidade quando um número natural a divide um número natural b, e escreve-se $a|b$, se existe um número natural c, tal que $b = a.c$. Assim, pode-se compreender que o conceito de divisibilidade é uma relação entre dois ou mais números naturais (ou inteiros), associado à operação de multiplicação (HEFEZ, 1993, p.66).

Na definição de divisibilidade, não existe restrição para os números a e b, exceto que se a for nulo, então b também deve ser nulo, e neste caso, o número c não é único, o que não fere a definição. Daí, uma das propriedades de divisibilidade abordada em teoria dos Números é que $n|n$, para todo n inteiro, ou seja, para o caso de $n = 0$, tem-se que $0|0$, pois $0 = 0 \cdot c$, para todo c inteiro.

Já na matemática básica, a divisibilidade é trabalhada nas relações de múltiplo, ser divisível e divisor, e no contexto escolar, o conceito dessas relações estão associadas à divisão exata. Ou seja, dizemos que a é múltiplo de ou divisível por b se existe c, tal que $a = b \cdot c$ e também se $a \cdot b = c$ e o resto dessa divisão é nulo. Ou ainda, dizemos que b é divisor de a.

Dessa forma, fica evidente que a operação de divisão exata para conceituar a relação de divisibilidade pode ser vista como uma criação didática, pois difere da forma que a divisibilidade é tratada na matemática científica e vem no sentido de facilitar o funcionamento didático desse conteúdo na matemática escolar.

Assim, para exercer a *vigilância epistemológica* neste caso, é importante que o professor trabalhe a adaptação do conteúdo científico para o escolar no que se refere ao número zero. Pois é necessária a construção significativa do fato de o zero ser múltiplo de todos os números naturais e, no entanto, não é divisor de nenhum deles.

O Caminho Metodológico da Pesquisa

Esta pesquisa é parte de uma pesquisa maior e retrata um estudo de caso em uma turma de 6° ano do ensino fundamental, para analisar como acontece a transposição didática do conceito de divisibilidade. Para isso, foram observadas dez aulas deste conteúdo em uma turma de 6° ano de uma escola particular da região metropolitana de Vitória, Espírito Santo. As aulas observadas foram gravadas em áudios e os dados coletados foram analisados a luz da teoria da Transposição Didática.

Os dados construídos a partir das aulas observadas são diálogos entre professora e alunos sobre o conteúdo de divisibilidade. Esses diálogos estão cheios de conceitos e neles identificamos os processos da transposição didática, principalmente a construção das noções matemática, paramatemática, protomatemática e vigilância epistemológica.

Enfatiza-se que o conceito de Transposição Didática é o conjunto de transformações que tornam um objeto de saber a ensinar em objeto de ensino (CHEVALLARD, 1991, p.46), e que tal conjunto de transformações é composto por elementos processuais da transposição didática que ocorrem no sistema de ensino e, mais especificamente, no sistema didático.

Assim, analisar a transposição didática requer reconhecer nas situações de ensino e aprendizagem os elementos da teoria proposta por Chevallard (1991).

Os processos de Transposição Didática inerentes ao sistema didático que ocorrem na relação saber-professor-aluno, são segundo Chevallard(1991), a análise epistemológica do regime didático do saber (a diferenciação do saber em noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas), vigilância epistemológica, dialética antigo/novo, obsolescência interna, topogêneses e cronogêneses.

Esse estudo se resume em analisar os processos de análise epistemológica do regime didático do saber (a diferenciação do saber em noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas) e de vigilância epistemológica, visto que os outros elementos pertencentes ao sistema didático faz referência ao tempo didático e esta pesquisa não acompanhou a construção do conteúdo de divisibilidade até o esgotamento.

O quadro a seguir, ilustra a proposta de análise, ressaltando que as categorias utilizadas são oriundas da teoria que embasa a pesquisa.

Categorias de análise dos dados

1. Análise epistemológica do regime didático do saber – reconhecer as noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas nos áudios das aulas observadas na turma de 6° ano do ensino fundamental da escola particular sobre o conteúdo de divisibilidade. Em particular, analisamos a ocorrência da noção de prova matemática, que são noção paramatemática e protomatemática. **2. Vigilância epistemológica** – análise das distorções do conceito de divisibilidade ocorridas na didatização do saber nos áudios das aulas observadas na turma de 6° ano do ensino fundamental da escola particular.

Fonte: Elaborado pelas autoras, 2016.

Análise da epistemologia do regime didático do saber

A análise da epistemologia do regime didático do saber é um importante processo da Transposição Didática, uma vez que identifica e diferencia as noções de saber descritas por Chevallard (1991) em sua teoria.

> Noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas constituem estratos cada vez mais profundos do funcionamento didático do saber. *É necessária considerar suas diferenças para a análise didática*: porque analisar a Transposição Didática de qualquer noção matemática, supõe considerações de noções paramatemáticas, que por sua vez devem ser consideradas a luz de certas noções protomatemáticas. (CHEVALLARD, 1991, p. 65. Grifos do autor. Tradução nossa).

Assim, nesta seção identificaremos as noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas, propostas por Chevallard (1991) nas aulas observadas, mostrando como o conceito de divisibilidade é distribuído segundo essas três noções.

Para iniciar a construção do conceito de divisibilidade, a professora da turma associou a definição de múltiplo à definição de multiplicar, seguindo a proposta do livro didático. Nesse contexto, o conceito de múltiplo é o que Chevallard (1991) classifica de objeto de saber, isso é, a noção matemática.

> Em geral, as noções matemáticas são construídas. Sua construção adota a forma:
>
> - seja de uma definição, no sentido estrito.
> - seja de uma "*construção*", seguida de uma operação.
>
> (CHEVALLARD, 1991, p. 58-59. Grifos do autor. Tradução nossa).

Para ensinar o conceito de múltiplo, a professora trabalha a proposta do livro didático, que introduz o objeto a partir da sequência dos múltiplos de 7.

O livro didático apresenta o seguinte enunciado: "Em outras palavras, múltiplo de 7 é todo número que resulta da multiplicação de um número natural por 7" (IMENES & LELLIS, 2010, p. 107). Define um objeto – o múltiplo de 7, e sobre ele é associada a noção: n é múltiplo de 7 se existe um natural q tal que n = 7q, isto é, precisa ser feito uma verificação da existência do número q para confirmar a relação, caracterizando a noção matemática. Para fortalecer a definição, os autores expõem na página 108 (Figura 7b) um exemplo quando afirmam que "25 não é múltiplo de 7, porque não existe número que multiplicado por 7 dê 25".

Nesse contexto, podemos perceber que a noção matemática de divisibilidade foi adaptada a uma situação didática escolar, relacionada à linguagem (de científica para escolar) e à exemplificação, objetivando criar significado para a aprendizagem. Nesse sentido, a

Transposição Didática contribui para a estruturação de uma educação matemática mais significativa.

Para Chevallard (1991) "somente os objetos de saber são estritamente objetos de ensino" (CHEVALLARD, 1991, p. 59). É possível observar que, pelo enunciado o aluno pode ser capaz de associar o conceito de múltiplo (objeto de saber) com o seu significado matemático (objeto de ensino), estabelecendo a relação de divisibilidade entre todos os números naturais e o número 7, que foi generalizado, pela professora, para todos os outros números além desse, como se pode observar no recorte da aula do dia 6/5/2015[1]:

> P – Por exemplo, 28 é múltiplo de 7, isso é verdade?
> A1 – Sim.
> P – Por quê?
> A1 – Porque 7 x 4 é 28.
> P – Mas, se 28 é múltiplo de 7, 28 também é múltiplo de quem?
> A – De 4.
> P – Então, 28 é múltiplo de 4 e de 7. 101 é múltiplo de 2?
> A1 – Eu acho que não.
> P – Por quê?
> A1 – Porque nada vezes 2 dá 101, eu acho! É isso sim! Porque 2 vezes 50 dá 100, o próximo é 102, passou o 101, então não é múltiplo.
> A2 – Também 101 é um número ímpar e 2 é par, e se você for somando um par nunca pode dar um ímpar.
> P – Entendi, mas vou falar o que você falou com outras palavras, tá?! Os múltiplos de 2 aumentam de 2 em 2, e aí sempre vai dar um número par. E o 100 é múltiplo de 2?
> A2 – 100 é.
> P – Por quê?
> A2 – Porque 2 x 50 é 100.
> A3 – Mas, professora, não se pode falar que nada vezes dois vai dar 101. O 50,5 vai dar.
> P – Mas a gente está trabalhando no conjunto dos números naturais e 50,5 não é natural.
> A3 – Mais aí 101 vai ser par?
> P – Oi? Não entendi o que você falou.
> A3 – Nem eu...
> P – A gente está trabalhando no conjunto dos números naturais não vale os decimais.

Percebemos, nesse recorte, o raciocínio matemático na resposta do aluno A1, quando explicita "Porque nada vezes 2 dá 101, eu acho! É isso sim! Porque 2 vezes 50 dá 100, o próximo é 102, passou o 101, então não é múltiplo". Assim, esse aluno construiu seu raciocínio de forma a buscar um número que multiplicado por 2 resultasse em 101, utilizando a definição de múltiplo para resolver o problema, ao fazer isso, observou que 50 x 2 resultava em um natural aproximado de 101, portanto não poderia ser 50 o número que se encaixaria na

---

[1] Usamos a simplificação P para Professor(a) e A(número) para Aluno. Já Als, significa que mais de um aluno respondeu.

definição. Conhecendo o padrão dos múltiplos de 2, ele percebeu que o próximo número da sequência é o 102 e que, portanto, o 101 não seria múltiplo de 2. A conclusão, nesse contexto, acontece pelo desenvolvimento de uma cadeia de raciocínios matemáticos que “não foram ensinados”, uma vez que a professora não os trabalhou durante as discussões das atividades propostas. Tal sequência decorre do fluxo da aprendizagem própria do aluno, que descreve uma “demonstração não formal” de validação da relação de não-divisibilidade. No contexto acima, entendemos que o aluno aplicou todas as noções, visto que opera da dimensão conceitual da relação de divisibilidade (noção matemática), constrói uma sequência de raciocínio de validação da relação, mostrando uma cadeia de raciocínio lógico de demonstração não-formal (noção paramatemática), adentrando num campo de percepção didática (CHEVALLARD, 1991, p.60). Por fim, o recorte também mostra que o aluno lança mão de habilidades de “utilizar seus conhecimentos de base aplicada à matemática” (CHEVALLARD, 1991, p.62).

> Junto das “noções matemáticas” se localizam noções que podemos chamar de “*paramatemáticas*”: por exemplo, a noção de parâmetro, a noção de equação, a noção de demonstração (CHEVALLARD, 1991, p. 58. Tradução nossa. Grifos do autor).

A mesma noção foi alcançada pelo aluno A2, quando diz “Também 101 é um número ímpar e 2 é par, e se você for somando um par nunca pode dar um ímpar.” Aqui podemos perceber que o aluno utiliza a propriedade *‘a soma de números pares resulta em um número par’* para justificar a resposta ao problema lançado na situação didática. Essa propriedade foi utilizada como saber auxiliar e “não trabalhada” pela professora. A ideia de argumentação construída pelo aluno para verificação da relação de divisibilidade é também caracterizado, na nossa concepção, como noção paramatemática, uma vez que utiliza de um conteúdo (definição de número par) que no contexto, tornou-se um saber auxiliar para justificar a verificação da relação de divisibilidade.

> Somente os objetos de saber são no sentido estrito (candidatos para ser) *objetos de ensino*. As noções paramatemáticas, por exemplo, *não constituem objetos de ensino: são objetos de saber “auxiliares”* necessários para o ensino (e aprendizagem) dos objetos matemáticos propriamente ditos. Devem ser “aprendidos” (ou melhor“conhecidos”), mas não são “ensinados” (seguem o plano de ensino das noções matemáticas).(CHEVALLARD, 1991, p.59. Aspas e grifos do autor).

A aula continuou seguindo a proposta do livro didático que, na página 108 (Figura 07b), completa a construção do conceito a partir do algoritmo da divisão como pode ser observado no trecho: “Para saber se um número é múltiplo de outro, além de multiplicações, podemos usar a operação inversa, ou fazer uma divisão” (IMENES et al.., 2010, p.108)

(Figura 07b). Desse modo, os autores do livro didático procuram formar outra *representação* da definição de Múltiplo baseada na operação inversa da multiplicação, a divisão.

> A representação é então a *Forma sob* a qual uma informação pode ser descrita e levada m conta em um sistema de tratamento. Isso não tem, pois, mais nada a ver com uma "ideia/crença", com uma "evocação de objetos ausentes", os quais enviam de novo para a consciência vivamente de um sujeito. Trata-se ao contrário de uma "ação de codificar as informações". (DUVAL, 1995, p.2. Tradução nossa. Aspas e grifos do autor).

Assim, definiram-se duas representações para verificar a relação 'múltiplo' entre dois números naturais: a|b, então, existe um natural c tal que b = ac, ou, equivalentemente, se a divisão de b por a for exata.

A associação da relação de divisibilidade entre números naturais e a divisão exata é restrita ao saber escolar, o que configura uma adaptação do objeto matemático. Essa associação assume a característica conceitual do conteúdo matemático para a relação múltiplo, logo é uma noção matemática agregada para dar significação à aprendizagem.

Diante desta análise, é possível afirmar que as noções matemáticas no contexto escolar diferem do contexto do saber sábio, no entanto, não se contradizem, pois mantêm a base conceitual. O que ocorre é uma adaptação do conceito, configurando a definição de Transposição Didática.

No recorte da aula abaixo (de 06/052015), ocorre uma situação trabalhada pela professora para reafirmar a aprendizagem dos alunos e complementar o que foi proposto pelo livro.

> P – Quero saber se 1559 é múltiplo de 7. Como eu faço para descobrir?
> A1 – Faz a operação inversa.
> P – E como é a operação inversa
> A1 – 1559 dividido por 7.
> P – Por que você pensou nisso?
> A1 – Porque se for de 7 em 7, teremos um monte de conta para descobrir.
> A2 – É mais fácil, mais rápido.
> P – Eu entendi o que você falou, eu só vou falar em outras palavras: para eu afirmar que 1559 é múltiplo de 7, eu tenho que ter um número que vezes 7 dá 1559, para eu saber se isso é verdade eu tenho que saber qual é esse número. Então, para descobrir eu tenho que fazer o quê?
> Als – Dividir
> P – Isso, a operação inversa.
> (A professora faz a operação)
> P – Se a divisão não é exata, o que eu concluo? Que não existe um número que multiplicado por 7 dá 1559. Porque a divisão não é exata.

Neste recorte, percebe-se que o objetivo é desenvolver a verificação da relação 'múltiplo' por meio da divisão exata.

Na fala do aluno A1, quando diz: "Porque se for de 7 em 7, teremos um monte de conta para descobrir", evidencia-se que que ele analisou as ferramentas conceituais (noções matemáticas) e escolheu a que julgou mais prática para resolver o problema. O que é confirmado pelo aluno A2, que estabeleceu a mesma relação ao afirmar "É mais fácil, mais rápido". Essa capacidade de escolher ferramentas, analisar e aplicar em uma determinada situação problema é um saber mais implícito, que Chevallard (1991) chama de noção protomatemática, relacionada com o desenvolvimento de capacidades.

> Anterior ao *ato de ensino* está o ponto de vista da *organização do ato de ensino* (...). Responsável por definir as "capacidades" que o aluno deve aplicar extensivamente na relação com o este ou aquele ensino. (CHEVALLARD, 1991, p. 62. Tradução nossa. Grifos do autor).

Segundo Chevallard (1991), as noções paramatemáticas são passíveis de se trabalhar na sala de aula, mas não são ensináveis, apenas aprendidas. No recorte da aula 2, a seguir, a professora da turma trabalha a noção matemática de verificação da relação múltiplo entre os números 343 e 7 pelo método da divisão exata, utilizando o fato de que no quadro da sala estava escrito o conjunto dos múltiplos de 7.

Após a correção da professora, uma aluna se levantou e apontou os números 49 e 63 no conjunto M(7). Questionada porque ela apontou os números no conjunto M(7) na verificação se 343 era divisível por 7, a referida aluna explicou:

> Eu fiz diferente da professora. Eu comecei a dividir, aí eu vi que dava 4, que é 40, e sobrava 63. Quando olhei para o quadro tinha 63 nos múltiplos de 7, então vi que era divisível, e que não precisava terminar a divisão para saber que era múltiplo. (Explicação da aluna pós-aula, em 6/5/2015)

Percebemos na explicação da aluna o desenvolvimento autônomo da propriedade de divisibilidade quando explica o processo que utilizou para verificar se 343 era múltiplo de 7. Na fala dela observa-se que seu raciocínio foi que $343 = 40 \times 7 + 63$, isto é, uma soma de duas parcelas múltiplas de 7. A aluna aplicou a proposição 'se $a|b$ e $a|c$, então $a|(bx + cy)$' de forma criativa e autônoma, desenvolvido com base no raciocínio de criação, verificação, teste e validação.

Aqui figura a noção paramatemática e protomatemáica. Paramatemática porque foi desenvolvido o raciocínio lógico, "não ensinado" pela professora (não de forma direta), mas foi uma argumentação própria da aluna, baseada na definição de múltiplos e de conhecimentos/habilidades prévios. Protomatemática por se tratar do desenvolvimento da capacidade de formular, testar e justificar estratégias para solucionar o problema.

Vigilância Epistemológica

A professora construiu o conceito de divisibilidade explicando a relação de múltiplo e de divisível com base nas operações de multiplicação e de divisão, e nesse sentido, a *didatização*, no que se refere à associação do conceito de divisibilidade com a divisão exata, não feriu o saber sábio. Para Pais (2015) a Transposição Didática deve ser praticada de tal forma que concilie o trabalho dos matemáticos e o do professor, e assim, facilite o exercício da vigilância epistemológica.

> É preciso ainda relacionar o trabalho do professor de matemática com o trabalho do matemático, não excluindo, evidentemente, a possibilidade de conciliação dessas duas atividades. Porém, é importante lembrar que o tipo de trabalho desenvolvido pelo matemático acaba determinando uma influência considerável na prática pedagógica. (PAIS, 2015, p.30).

Outra prática da vigilância epistemológica ocorre sobre o enunciado no livro didático que descreve: “Um detalhe: o número zero é múltiplo dele mesmo. Entretanto, zero não é divisor de si, porque não é possível dividir por zero!” (IMENES; LELLIS, 2010, p.115).

Nesse enunciado, observa-se a preocupação dos autores com a *vigilância epistemológica* do saber em todos os detalhes. Pode ocorrer, para algum aluno de 6° ano do ensino fundamental, a confusão entre múltiplo/divisível e divisor. No enunciado, o autor afirma que “zero é múltiplo de si mesmo”, pois a relação de múltiplo tem sua definição na operação de multiplicação, definida para o número zero. Mas a relação divisor, no contexto do saber escolar, não é equivalente à relação de múltiplo ou divisível, pois sua definição está associada à operação de divisão, não definida para o zero.

No entanto, a abordagem com o zero, sugerida pelo livro didático, sofreu distorção, como se pode observar no recorte da aula a seguir. Neste diálogo, adotou-se a legenda P para professora e An para os alunos.

> A1 – É verdade que zero dividido por zero dá 1?
> P – É, é verdade!
> A2 – O quê? Como assim, zero dividido por zero dá um?
> P – Vamos discutir? Tem uma afirmação aí no livro, página 115, depois do exemplo 1 que ele colocou assim: ”Um detalhe, o zero é múltiplo dele mesmo, entretanto, o zero não é divisor de si” (Figura 14).
> A1 – Mas zero dividido por zero dá um.
> P – Mas zero dividido por zero dá dois, e daí?

> A2 – Eu não entendi.
> A1 – Você que disse que zero dividido por zero dá um.
> P – Mas zero dividido por zero dá dois. Porque se você pegar zero igual a duas vezes zero (0 = 2 x zero), não vale?
> A1 – Ah, tá! Zero dividido por zero dá dois.
> P – Vamos fazer a tabuada do zero?
> Ans – 0 x 0 = 0, 0 x 1 = 0, 0 x 2 = 0, 0 x 3 = 0, 0 x 4 = 0, 0 x 5 = 0.
> P – Todo número multiplicado por zero dá zero, né?!
> A3 – Então, zero vezes qualquer coisa é zero, aí zero dividido por zero pode dar qualquer coisa?
> A4 – Porque tipo assim, eu tenho 15 unidades. 15 para dividir para zero. Eu não vou dividir para nada, então, não vai ter nada para nada, sacou?
> P – Saquei não. Olha só, vamos lembrar da operação inversa? Esse meu elemento aqui, quatro vezes oito é igual a trinta e dois (4 x 8 = 32), então trinta e dois divididos por quatro dá oito. Vamos fazer a mesma coisa com o zero? Se zero vezes zero é zero, se eu dividir zero por zero dá zero. Mas se zero vezes um é zero, se eu dividir zero por zero dá um.
> A5 – Mas como a gente vai saber qual vai dar.
> P – Uai, a operação inversa. Olha aqui! Trinta e dois divididos por quatro dá oito, porque oito vezes quatro é igual a trinta e dois.
> A5 – Eu entendi isso, mas só tem um jeito de fazer isso?
> P – Você pode fazer isso com qualquer número. Qualquer tabuada. Eu estou fazendo com o zero. Só que a tabuada do zero é uma tabuada especial.
> A1 – É na tabuada do zero, zero dividido por zero vai dar quatro.
> P – Calma! A tabuada do zero é especial, porque ela sempre dá de resultado o mesmo número, né?! Então, se eu fizer a operação inversa para todo mundo e vou achar quantos resultados?
> A2 – Muitos.
> A4 – Infinitos. Mas não entendo que eu divido zero, que é uma quantidade, vamos supor que é nada, por zero que também é nada, como que dá um?
> P – Pela operação inversa da tabuada do zero.
> A1 – Matemática é muito doida.
> A4 – Tipo assim, eu não tenho nada, para dividir com nada, como que vai dar um?
> P – Pois é, a tabuada do zero é diferente das outras tabuadas, todos os resultados dão zero.
> A4 – Tá, isso eu entendi, como que faz isso?
> P – Como que acontece?
> A5 – Como é que alguém consegue dividir zero por zero e dar um.
> P – É meio abstrato mesmo. Todo número multiplicado por zero dá zero por definição. Porque senão a sequência aqui vai dar errada.
> A4 – É mais ou menos assim: o cara decidiu lá que dá zero, e vai ser zero e acabou? É tipo isso?
> P – Mais ou menos. Não foi exatamente dessa forma.
> A4 – Porque não tem sentido isso. Você não vai colocar esse trem de zero na prova não, né?! Por favor, não coloca.

Nesse recorte da aula, a professora tenta justificar a divisão de zero por zero. Para isso, ela aborda a operação de multiplicação, pois a definição de divisibilidade tem sua base nessa operação. No entanto, conceitualmente zero não é divisor de nenhum número, pois a relação divisor entre naturais, para essa etapa, associa-se ao algoritmo de divisão, cuja representação é *repartir* ou *quantas vezes cabe*, não se construindo o sentido para a divisão por zero. Isso se confirma na fala da aluna, quando diz: “Tipo assim, eu não tenho nada, para dividir com nada, como que vai dar um?", ou seja, sua estrutura mental está baseada no questionamento: nenhuma quantidade repartida por nenhuma quantidade pode resultar em um de quantidade?

Para essa questão, a professora, justifica que zero é divisor de zero e tem como resultados infinitos números, argumentando para isso o fato de a tabuada do zero ser uma "tabuada especial". Se pensarmos, no entanto, pelo Algoritmo da Divisão Euclidiana, que fundamentou a construção do conceito de múltiplo e divisível, portanto de divisibilidade, concluímos que $0 = 0 \div q + 0$ para todo número natural q. Mas pelo teorema de Euclides, existe a unicidade do quociente, q, e do resto, r. Logo, pelo algoritmo, a afirmação zero ser divisor de zero também não pode ser verdadeiro, por isso o enunciado do teorema exclui o elemento nulo como divisor.

Assim, nesse recorte, percebemos uma ruptura com o conceito de divisibilidade, pois configura um erro conceitual no processo de *didatização* do saber.

Outro fator de distorção conceitual do conteúdo foi a explicação de que a tabuada de zero tem uma relação especial baseada em uma definição: "É meio abstrato mesmo. Todo número multiplicado por zero dá zero por definição. Por que senão a sequência vai dar errada". Nesta fala, há uma ruptura com o conceito de multiplicação, pois zero vezes um n qualquer é igual a zero ($0 \times n = 0$, para todo $n \in N$), porque, pelo conceito de multiplicação, $0 \times n = 0 + 0 + ... + 0$ (soma de n zeros é igual a zero). Assim, a explicação da professora não apresentou rigor científico ao tratar este conteúdo, visto que não existe uma definição de multiplicação por zero.

Nesse contexto, uma das alunas expressa uma síntese do que supõe compreender: "É mais ou menos assim: o cara decidiu lá que dá zero, e vai ser zero e acabou? É tipo isso?". Analisando essa fala percebe-se a falta de significação do saber e a caracterização do ensino por autoridade, supondo ser suficiente que o saber seja posto por uma questão de hierarquia ou experiência.

Assim, nessa circunstância, a ruptura ocorre devido à concepção da professora, sujeito da pesquisa, sobre um determinado conceito, isto é, a epistemologia do professor. Tal concepção está distorcida e isso afeta a aprendizagem o aluno, como podemos perceber na fala da aluna: "Porque não tem sentido isso. Você não vai colocar esse trem de zero na prova não, né? Por favor, não coloca.".

> (...) entendemos a epistemologia do professor como sendo as concepções referentes à disciplina com que conduzem uma parte essencial de sua postura pedagógica, em relação ao entendimento dos conceitos ensinados. (PAIS, 2011, p.34).

Constatamos, então, que o processo adaptação do saber sábio para o saber ensinável é influenciado pelo saber do professor, principalmente no que se refere aos conteúdos matemáticos que nesse contexto, estão diretamente atrelados à disciplina de Teoria dos Números na formação inicial.

Conclusão

O trabalho centrou-se no conceito de divisibilidade, com o intuito de mostrar por meio desta pesquisa a distância que existe entre o saber científico e o saber escolar. O conceito de ditatização do saber tratado por Chevallard (1991) embasou a pesquisa e os processos daanálise epistemológica do regime didático do saber e da vigilância epistemológica, foram o foco de análise.

Percebemos que o processo de construção didática de um conteúdo matemático é parte do fenômeno de Transposição Didática, e os processos desse fenômeno explicam como ocorre a adaptação do saber sábio em saber a ensinar e suas inter-relações. Retiramos dessa teoria as categorias de análise dos dados construídos, identificando os elementos de Transposição Didática referentes aos sistemas didáticos aqui estudados.

No que se refere à análise epistemológica do regime didático do saber, identificamos na construção do conceito de divisibilidade, em uma turma de 6° ano do ensino fundamental, as noções matemáticas, paramatemáticas e protomatemáticas, conforme caracterizou Chevallard (1991).

Ao analisarmoso processo de transposição do conceito de divisibilidade nessa turma de 6° ano do ensino fundamental, concluímos que o processo de *didatização* pode, por vezes, causar rupturas conceituais desse conteúdo na educação básica.

Houve uma distorção no tratamento da relação da divisibilidade no que se refere ao número zero. Isto é consequência de uma vigilância epistemológica distorcida e de um regime didático mal estabelecido. Por isso a importância do professor se relacionar com o saber científico e escolar, em um esforço de aproximar a matemática escolar da científica ao desenvolver um trabalho didático em sua sala de aula.

Nesse caso, o processo adaptação do saber sábio para saber ensinável foi fortemente influenciado pelo saber do professor, ou seja, é importante que pontos sensíveis, como vistos neste estudo sobre a divisibilidade por zero, sejam trabalhados na formação e o conceito deixe de ser uma "crença" do professor, pois isso pode acarretar distorções conceituais na construção de um saber matemático na educação básica.

Esta pesquisa conduz a reflexões sobre a formação inicial do professor e da importância de se trabalhar, nas disciplinas matemáticas da licenciatura, os conceitos com profundidade, além da importância de aproximar a matemática escolar da científica. O futuro professor precisa refletir durante a sua formação sobre a *didatização* do saber, pois este é um conhecimento necessário à construção de sua base de saberes para o ensino. Nesse contexto, é essencial que os formadores de professores reflitam sobre a licenciatura em matemática e na criação de espaços de discussão de conceitos e de sua transposição didática para a sala de aula e, também, na necessidade de materiais e ações que auxiliem na tarefa de formar professores.

7 - Referências

CHEVALLARD, Yves. **La tranposicióndidáctica**: Del saber sábio al saber enseñado. Traduzida por Claudia Gilman. Editora Aique: Buenos Aires. 1991.

DOMINGUES, Higino H. **Fundamentos da Aritmética**. São Paulo: Atual. 1991.

DOMINGUES, Higino. H.; IEZZI, Gelson. **Álgebra moderna**. São Paulo: Atual, 2003.

HEFEZ, Abramo. **Curso de Álgebra.** Vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 1993.

IMENES, Luis Márcio. LELLIS, Marcelo. **Matemática** -6º Ano / 5ª Série -1ª Ed. São Paulo: Moderna. 2010.

IEZZI, Gelson & MURAKAMI, Carlos. **Matemática e Realidade** - Vol. 1. São Paulo: Atual, 2013. 320p.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Coleção Explorando o Ensino:** Matemática - Ensino Fundamental. Brasília: MEC/SEB, 2010.

MENEZES, Ana Paula de Avelar Brito. **Contrato Didático e Transposição Didática**: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª Série do Ensino Fundamental. Tese (Doutorado em Educação). EFP, Recife, 2006. 410 p.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti. **O Conhecimento Matemático do Professor**: Formação na Licenciatura e Prática Docente na Escola Básica. Tese (Doutorado em Educação). UFMG, Belo Horizonte, 2004. 195 p.

PAIS, Luiz Carlos. **Transposição Didática**. MACHADO, S. D. A. (Org.) Educação Matemática Uma (nova) introdução. 3 ed. revisada, 3 reimp. – São Paulo: EDUC, 2015. p. 11-48. 2015.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**; uma análise da influência francesa. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora. 2011.

PEREIRA, Rúbia Carla. **Transposição Didática**: interações entre o sexto ano do Ensino Médio e a disciplina de Teoria dos Números em Licenciatura Matemática sobre o conteúdo de divisibilidade. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). IFES, Vitória. 2016. 145p.

REZENDE, Marilene Ribeiro. **Re-Significando a Disciplina Teoria dos Números na Formação do Professor de Matemática na Licenciatura**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). PUC. São Paulo, 2007. 240 p.

SAVIANI, Dermeval. **Pedagogia histórico-crítica**: primeiras aproximações. 4.ed. São Paulo: Autores Associados, 1994.