ASPECTOS DA CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTOS DE COMBINATÓRIA DE ALUNOS DE UM CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Renan Gustavo Araújo de Lima
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil
rrenan_19@hotmail.com

José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Brasil
joseluizufms2@gmail.com

Resumo: O presente texto é um recorte da pesquisa de mestrado e tem como objetivo apresentar conhecimentos de combinatória de alunos ingressantes em um curso de licenciatura em Matemática. Para o desenvolvimento da pesquisa, utilizamos como referenciais teóricos a Teoria dos Campos Conceituais e a Teoria das Situações Didáticas, e como aporte metodológico para o desenvolvimento e análise nos pautamos na Engenharia Didática. Assim, foi elaborada uma sequência didática desenvolvida com 30 alunos ingressantes em um curso de Licenciatura em Matemática sendo que, neste texto, apresentamos a resolução de um grupo de alunos em dois problemas da sequência didática. Destacamos a importância da estratégia da listagem de possibilidades, e o conhecimento relacionado a essa estratégia, durante a resolução dos problemas pelos alunos, pois além de ser uma estratégia de resolução, também atua como meio de controle e validação de outras estratégias. Por fim, verificamos a necessidade de se trabalhar aspectos conceituais de combinatória com os alunos, tendo em vista a dificuldade que eles apresentaram no momento de verificar as propriedades e classificar os problemas de combinatória.

Palavras-chave: Combinatória. Conhecimentos. Sequência didática. Licenciandos.

Algumas pesquisas que abordam a aprendizagem de combinatória

A combinatória é um conteúdo da Matemática Discreta que está presente ao longo do ensino básico e que professores e alunos apresentam dificuldades quando trabalham com o tema (PESSOA, 2009; BATANERO; GODINO; NAVARRO – PELAYO, 1996). Morgado, Pitombeira de Carvalho, Pinto Carvalho e Fernandez (1991) definem a combinatória como o ramo da matemática que analisa as estruturas e relações discretas, podendo destacar dois tipos de situações: demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições; contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito que satisfazem certas condições dadas (MORGADO *et. al*. 1991, p. 2). Assim, verificamos que o estudo da combinatória não é composto somente pelo estudo de problemas de permutação, combinação e arranjo, que contemplam as situações do segundo tipo citado anteriormente. Porém, uma das justificativas de focar o trabalho com esses problemas é o fato deles serem mais simples e amplos, possibilitando resolver uma grande quantidade de situações combinatórias (MORGADO et. al., 1991).

Consonante ao apresentado por Morgado e seus colaboradores, os documentos oficiais sugerem que o estudo da combinatória ocorra ao longo do ensino básico com problemas e situações intuitivas, sem a necessidade de esperar até o 2º ano do ensino médio, quando o mesmo é formalizado. Os Parâmetros Curriculares Nacionais e as Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio (BRASIL, 1997; BRASIL 1998; BRASIL, 2006) destacam que a importância do estudo da combinatória vai além de possibilitar ao aluno a compreensão de informações do cotidiano, como os dados estatísticos e a probabilidade. Ela também contribui para o desenvolvimento de diversas competências necessárias como a organização, criatividade e a autonomia na resolução de problemas, entre outros.

Outra questão importante abordada pelos documentos oficiais é que "no momento de desenvolver tal conteúdo, não se deve ficar preso à utilização de regras e fórmulas definidas" (BRASIL, 2006, p. 79), tendo em vista que as fórmulas combinatórias têm como função agilizar os cálculos, sendo consequência do raciocínio combinatório[1] que deve ser trabalhado com os alunos. Assim, problemas de combinatória podem ser resolvidos utilizando diversas estratégias com o objetivo de realizar a contagem. As estratégias de resolução, como a listagem ou utilização de fórmulas, são utilizadas baseadas no raciocínio multiplicativo, o qual deve ser o foco no trabalho com os alunos. Além disso, ao desenvolver um estudo das diferentes situações combinatórias[2] em módulos, o aluno pode adotar uma postura de identificar e aplicar técnicas para cada tipo de situação (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013).

Diante desse cenário, Miguel e Magina (2003) realizaram uma investigação das estratégias de resolução de problemas de combinatória por alunos de um curso de Licenciatura. Para isso, utilizaram os problemas, com algumas adaptações, da pesquisa de Batanero *et. al.* (1997 apud MIGUEL; MAGINA, 2003) com 12 alunos, dos quais apenas um aluno havia estudado combinatória no ensino médio. Verificou-se que a estratégia de listagem de

---

[1] Entendemos o raciocínio combinatório na perspectiva apresentada por Pessoa e Borba (2010) quando se referem que é um tipo de pensamento que vai além de uma enumeração de elementos. Assim, pautado no raciocínio multiplicativo, realiza-se uma contagem sistemática, seja por listagem, utilização de fórmulas ou outra estratégia que consiga atender as condições do problema a ser resolvido.

[2] Adotamos a classificação apresentada por Pessoa e Borba (2010) que identificaram duas propriedades, que em conjunto, distinguem as situações combinatórias.

possibilidades foi a mais utilizada, resultado consonante com Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996). Também percebeu que nenhum dos alunos, desse nível de escolaridade, recorreu ao diagrama de árvore, resultado semelhante à de outras pesquisas (ROA *et. al.* 1997). Dessa maneira, salientamos a importância do professor na condução do conteúdo com os alunos, pois essa estratégia pode contribuir para a superação de dificuldades, como a listagem não sistemática, além de levar os alunos a novas estratégias, como a utilização do Princípio Fundamental da Contagem.

A pesquisa de Roa *et. al.* (1997) buscou investigar as estratégias utilizadas por alunos da Licenciatura na resolução de problemas de combinatória. Assim, os pesquisadores aplicaram um questionário contendo 13 problemas de combinatória para 29 licenciandos de Matemática, e desses, selecionou dois alunos que apresentaram os melhores índices e dois alunos com os piores índices no teste, para a realização de entrevistas individuais com os mesmos. Concluiu-se que os alunos pouco mobilizaram o diagrama de árvores, optando por outras estratégias, dentre elas: identificação da operação combinatória e aplicação da fórmula adequada, fixação de variáveis, redução do tamanho do problema, generalização de soluções. Também constatou que a principal causa dos erros dos alunos ao tentarem realizar a contagem, foi a listagem não sistemática. Além disso, os alunos apresentaram dificuldades na identificação da operação combinatória dos problemas propostos.

Santos-Wagner, Bortoloti, Ferreira (2013) realizaram um estudo com 198 estudantes do 3º e 8º semestre de quatro Universidades do estado da Bahia, a partir das resoluções de problemas de arranjo e combinação apresentadas pelos alunos. Em relação aos conhecimentos mobilizados pelos estudantes no momento da resolução, verificou-se a utilização de três estratégias: a listagem de possibilidades, a utilização de fórmulas e o princípio multiplicativo. Destacamos a necessidade da compreensão dos alunos em relação aos conceitos estudados, pois mesmo quando recorriam à utilização de fórmulas, apresentavam dificuldades, assim, "identificar uma fórmula não é o suficiente para resolver a questão. Infelizmente alguns alunos já foram condicionados a utilizar essa estratégia ou acreditam que basta identificá-la que o problema será resolvido." (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013, p. 618-619).

Esse estudo mostrou que os alunos tinham dificuldades na interpretação dos problemas de contagem, na diferenciação dos conceitos envolvidos como combinação e arranjo, e na utilização das fórmulas. Dessa maneira, os autores apontam que o ensino desse conteúdo deve ser realizado de modo que haja compreensão conceitual e dos significados de cada tipo de classe de problema combinatório (arranjo, permutação, combinação), diferentemente do que tem sido trabalhado, cujo foco nos procedimentos, regras e fórmulas prontas para a resolução dos problemas.

Rocha (2007) tinha como objetivo analisar a construção de conhecimento dos alunos da licenciatura, submetidos a uma prática de ensino tradicional[3]. A pesquisa envolveu 17 alunos, sendo que 10 deles participaram de todo o processo de pesquisa. Para isso, o pesquisador realizou um pré-teste com cinco questões que envolviam combinação, arranjo, permutação, que estariam presentes em qualquer curso de combinatória simples. Então, os alunos eram submetidos à prática tradicional de ensino e por fim era aplicado outro teste com seis questões, sendo cinco iguais às aplicadas no pré-teste, para analisar a evolução dos alunos.

No pré-teste verificou-se um baixo índice de acerto dos alunos nas questões, apesar das inúmeras tentativas. Após esse pré-teste, os alunos foram submetidos a uma prática tradicional e foi aplicado o pós-teste que mostrou pouca evolução dos alunos. Assim, concluiu-se que apesar de o pós-teste possuir cinco questões idênticas a do pré-teste, a evolução dos alunos foi baixa em quatro delas. Dessa maneira, o pesquisador destaca que a prática tradicional aplicada com esses alunos se mostrou ineficiente para a aprendizagem do conteúdo de combinatória.

Pautados nas pesquisas apresentadas anteriormente, apresentamos dois quadros que sintetizam as principais estratégias e dificuldades que os alunos nesse nível de ensino de combinatória enfrentam quando resolvem problemas do tema.

Quadro 1 - Principais estratégias mobilizadas pelos alunos.

Estratégia	**Descrição da Estratégia**
Listagem de Possibilidades	O aluno realiza uma listagem, escrevendo todos os casos possíveis que atendem o problema proposto.
Fórmulas	O aluno tenta identificar o tipo de problema proposto, entre arranjo, permutação e combinação. Após isso, seleciona os valores presentes no problema e aplica a fórmula correspondente.
Princípio Fundamental da Contagem	O aluno divide o problema em etapas de escolha, verifica as possibilidades de cada etapa e utiliza o princípio multiplicativo.
Busca de Generalidades	O aluno inicia a listagem de possibilidades, geralmente fixando algum elemento, em busca de regularidades. Ao perceber alguma regularidade, realiza alguma operação que lhe fornece a resposta do problema sem que tenha que listar as demais possibilidades.
Diagrama de Árvores[4]	Uma espécie de grafo, é uma estrutura que possibilita organizar as possibilidades em cada etapa de escolha. A sua utilização, além da quantidade de possíveis casos também fornece listagem de todas as possibilidades.

Fonte: Lima (2015)

[3]O autor considera metodologia tradicional uma metodologia estruturada em definições, exemplos e exercícios de aplicação, nessa ordem.

[4]Conforme apontado em diversas pesquisas (ROA *et. al.* 1997, MIGUEL; MAGINA, 2003) a estratégia da árvore de possibilidades quase não é mobilizada por alunos que já tiveram um ensino de combinatória. Porém, decidimos colocá-la no quadro das estratégias, devido a sua importância já citada.

Dentre as estratégias apresentadas, a listagem de possibilidades foi a estratégia mais mobilizada pelos alunos, seguidos da utilização de fórmulas e do Princípio Fundamental da Contagem. Apesar de destacarmos essas estratégias, em alguns casos os alunos mobilizam outras, como o desenho ou algum conhecimento de outro conteúdo matemático. O quadro seguinte apresenta as dificuldades que os alunos apresentam no momento de resolver os problemas.

Quadro 2 - Principais dificuldades apresentadas pelos alunos

Dificuldade	Descrição da Dificuldade
Listagem não sistemática	Os alunos realizam a listagem sem nenhum tipo de organização. Dessa maneira, a listagem de possibilidades pode ficar faltando elementos, ou com elementos em excesso.
Ordem dos Elementos	Os alunos não percebem a característica do problema em relação à ordem dos elementos, considerando a ordem relevante em problemas que não é, e desconsiderando-a quando é necessário levá-la em conta. Um dos erros que pode surgir é classificar um problema de combinação como um problema de arranjo.
Repetição dos Elementos	Os alunos não percebem a característica do problema em relação à possibilidade de repetição de elementos. Então, desconsideram a repetição dos elementos quando o problema permite, assim como o inverso.
Diferenciação dos problemas combinatórios	Os alunos possuem dificuldades nos conceitos de cada tipo de problema de combinatória, classificando os problemas de maneira errônea.
Utilização das Fórmulas	Além da dificuldade de lembrar as fórmulas de cada problema, os alunos apresentam dificuldades na substituição dos valores do problema na fórmula e resolvê-la.
Utilização do Diagrama de árvores	Os alunos montam o diagrama de árvores com uma estrutura errônea.

Fonte: Lima (2015)

Aportes teóricos e metodológicos

Cientes da importância da combinatória na aprendizagem dos alunos, buscamos em nossa pesquisa de *investigar aspectos da construção do conceito de combinatória de alunos de licenciatura em Matemática, quando resolvem problemas do tema.* Um dos motivos dessa escolha deve-se ao fato dos alunos saírem do Ensino Médio com dificuldades no tema, como mostram as pesquisas, e ingressarem em um curso de Licenciatura em Matemática, no qual se formarão professores e irão ministrar tal conteúdo. Nesse texto, em específico, temos como objetivo *apresentar conhecimentos de combinatória de alunos ingressantes em um curso de licenciatura em Matemática.* Para isso, selecionamos duas situações-problema, em duas sessões diferentes da sequência didática que elaboramos, cujo explicitamos no decorrer do artigo.

Para a investigação, nos baseamos na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), desenvolvida por Vergnaud (1996, 2009) e na Teoria das Situações Didáticas (TSD), modelada por Brousseau (2008). Além desses referenciais teóricos, nos pautamos na Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) como referencial metodológico da pesquisa.

Consonante à TCC, entendemos o conceito não como uma simples definição, mas sendo composto por três conjuntos (S, I, L), sendo eles:

- Situação (S): é o conjunto das diferentes situações que dão sentido ao conceito;
- Invariantes (I): o conjunto dos invariantes operatórios, os teoremas-em-ação, conceitos-em-ação, que interferem nos esquemas ou nos significados do conceito;
- Linguagem (L): são as representações, sejam elas linguísticas ou não linguísticas, que representam o conceito, seus tratamentos, entre outros.

Assim, a aprendizagem de um conceito não ocorre de um momento para o outro, tendo em vista que a mesma se trata de um processo. Nessa perspectiva, o professor deve apresentar aos alunos diferentes situações que compõem um conceito, além das diferentes representações. O conjunto dos Invariantes é composto pelos invariantes operatórios, como os teoremas-em-ação que podem ser verdadeiros ou não, e os conceitos-em-ação que podem ou não serem pertinentes em uma determinada situação. Portanto, essa estrutura de conceito, atribuída por Vergnaud, nos permite analisar os conhecimentos dos alunos, a apropriação de novas estratégias e a superação de possíveis dificuldades, por meio dos invariantes mobilizados pelos mesmos.

Para elaborar e gerenciar a sequência didática nos pautamos na Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008). Nessa, considera-se uma situação didática as interações entre professor, alunos e saber, em um determinado meio. No momento de elaboração e gerenciamento da sequência didática, buscamos realizar nos moldes de uma situação *adidática*, caracterizada pela não interferência do professor sobre a construção do saber e a postura investigativa do aluno sobre um problema matemático que elaborado pelo professor, em busca da resposta. Para isso, o aluno deve assumir o problema tomar o problema para si e ter interesse em resolvê-lo, tendo a postura de pesquisador, o que caracteriza a devolução por parte do aluno. Após a devolução inicia-se a situação *adidática*, composta por três momentos: ação, formulação e validação.

No momento *adidático* de ação, o aluno tenta buscar uma solução para o problema, por vezes de maneira empírica, na sua interação com o meio que está inserido, tentando encontrar a solução. O momento de formulação é um momento no qual o aluno elabora conjecturas e hipóteses que possam levá-los a resolver o problema. Por fim, no momento *adidático* de validação, o aluno tentará validar a conjectura elaborada ou perceber a invalidade da mesma. Salientamos que na busca pela solução, o aluno transita por situações adidáticas de ação, formulação e validação, sem que haja a necessidade de seguir a ordem dessas etapas e podendo começar novos ciclos, dando continuidade ao processo.

Como dito, nos três momentos que compõem as situações *adidáticas* o professor não interfere diretamente na construção do saber. Porém, o professor tem um papel de mediador, realizando questionamentos e gerenciando o andamento da sequência para que os alunos continuem vivenciando esses tipos de situações. Freitas (2008, p. 86) afirma que "*as situações adidáticas* representam os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso do aluno nelas significa que ele, por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar algum conhecimento". Por fim, o professor volta à cena para a realização da institucionalização do saber, no qual explicita o conhecimento envolvido, caso não tenha aparecido anteriormente, no problema proposto e discute os resultados e estratégias encontradas. Desse modo, a institucionalização deixa de ser um momento *adidático*, pois nele o professor age diretamente sobre o saber.

Nessa perspectiva, adotamos como referencial metodológico a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), que nos possibilitou elaborar e analisar as situações *adidáticas* que propusemos. A primeira fase dessa metodologia é a *análise preliminar,* no qual é pesquisada as orientações propostas nos documentos oficiais sobre o tema, a evolução histórica e epistemológica desse conteúdo, pesquisas tratam do ensino, da aprendizagem e dificuldades do tema, entre outras. Referente a essa etapa, apresentamos no início de texto alguns resultados, como as principais estratégias e dificuldades que os alunos têm quando resolvem problemas de combinatória. Com isso, tivemos condições de elaborar hipóteses do que poderia aparecer na nossa sequência, e criar situações que possibilitassem a superação de possíveis dificuldades.

A segunda etapa dessa metodologia é a *elaboração e análise à priori* da sequência, na qual, pautados dos resultados encontrados na etapa anterior, elaboramos a sequência didática e hipóteses de possíveis estratégias e dificuldades que poderiam aparecer nas atividades propostas. Esse procedimento nos possibilitou compreender o que poderia aparecer no momento da *experimentação*, o terceiro momento dessa metodologia. Por fim, foi realizada a *análise a posteriori e validação,* no qual foram analisados dados obtidos na experimentação e confrontados com as hipóteses levantadas na análise à *priori.* Ressaltamos que a Engenharia Didática, apesar de apresentada em etapas, não é rígida. O pesquisador tem liberdade de retornar e transitar entre as etapas caso sinta necessidade.

Nessa perspectiva, para ilustrar nossas escolhas teórica e metodológica, apresentaremos e discorreremos a seguir um recorte da engenharia didática desenvolvida.

Escolhas metodológicas

A presente investigação teve como sujeitos de pesquisa 30 alunos ingressantes de um curso de Licenciatura em Matemática, da cidade de Campo Grande – MS que se dispuseram a participar. A escolha por esses sujeitos e não por outros, de outros níveis de escolaridade, deve-se à nossa inquietação diante do resultado de pesquisas (SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013; ROA *et. al.,* 1997; MIGUEL; MAGINA, 2003), que apresentaram dificuldades que futuros professores de Matemática enfrentam quando estão trabalhando com problemas de combinatória. Os licenciandos foram organizados em nove grupos, que continham três ou quatro alunos. Adotamos essa organização, pois os alunos teriam a possibilidade de realizar interações entre eles, o que favoreceria as fases de uma situação *adidática*. Nesse texto apresentamos resoluções de um grupo composto por três alunos, que vivenciaram momentos *adidáticos,* de modo que pudemos discutir alguns resultados obtidos ao longo da pesquisa. Assim, analisamos a resolução de duas situações-problema, presentes na segunda e quarta sessão da sequência didática, pois é possível compreender as discussões que realizamos sem depender dos outros problemas da sequência didática.

Pautados nos resultados encontrados na análise preliminar e tendo em vista o objetivo da pesquisa, elaboramos uma sequência didática com foco em situações-problema de combinatória consonante à perspectiva apresentada por Vergnaud (1996), na qual para que um aluno tenha condições de aprender um determinado conceito não basta simplesmente apresentarmos uma definição do mesmo. O sujeito deve percorrer um processo no qual tenha vivenciado diferentes tipos de situações que dão sentido a ele.

Para elaboração e escolha desses problemas, tendo em vista que os alunos pudessem vivenciar situações *adidáticas*, baseamo-nos na classificação apresentada por Pessoa e Borba (2010), quando distinguem os problemas de contagem em quatro tipos, a partir de suas propriedades, sendo eles: produto cartesiano, combinação, arranjo e permutação. Diante do cenário apresentado, elaboramos uma sequência didática com 13 situações-problema, sendo que esses diferentes tipos de problemas estavam embaralhados ao longo da mesma, evitando assim o trabalho dos diferentes tipos de situações em blocos distintos, como orientam os documentos oficiais (BRASIL, 2006).

Além disso, a partir dos tópicos abordados na análise preliminar, como os documentos oficiais e resultados de pesquisas que investigam o processo de ensino e o de aprendizagem de combinatória, foi possível identificar alguns conhecimentos e dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo do tema. Desse modo, na perspectiva apresentada na Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1996), modelamos seis possíveis teoremas em ação que os alunos podem mobilizar quando estão diante de problemas de combinatória, que nos subsidiaram para o momento da análise dos conhecimentos e das dificuldades que os alunos apresentaram na nossa sequência didática. Dentre os teoremas em ação possíveis, modelamos:

$T_{1.1}$*: Dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades*

$T_{1.2}$*: Existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis.*

$T_{1.3}$*: Se o problema é generalizável, então ao fazer uma listagem sistemática é possível encontrar tal generalidade.*

T_2*: Se um problema é de combinatória então existe uma fórmula que o resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução.*

T_3*: Se uma decisão* d_1 *pode ser tomada de* a *maneiras e se, uma vez tomada a decisão* d_1*, a decisão* d_2 *puder sempre ser tomada de* b *maneiras então o número de maneiras de se tomarem as decisões* d_1 *e* d_2 *é* $a \ x \ b$*. (Princípio Fundamental da Contagem)*

$T_{4.1}$*: A ordem dos elementos sempre resulta em novas possibilidades.*

$T_{4.2}$: *A ordem dos elementos não interfere na quantidade de possibilidades.*

A seguir, apresentamos algumas resoluções de um grupo de três alunos, nomeados como Aluno A, Aluno B e Aluno C, que participaram da sequência didática e ilustram o desenvolvimento da mesma.

Desenvolvimento da sequência didática

Na segunda sessão da sequência didática propusemos um problema de combinação que estava relacionado com o campo da geometria, sendo ele:

Dada uma circunferência c, são indicados 4 pontos distintos sobre ela[5]*.*

a) *Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados?*

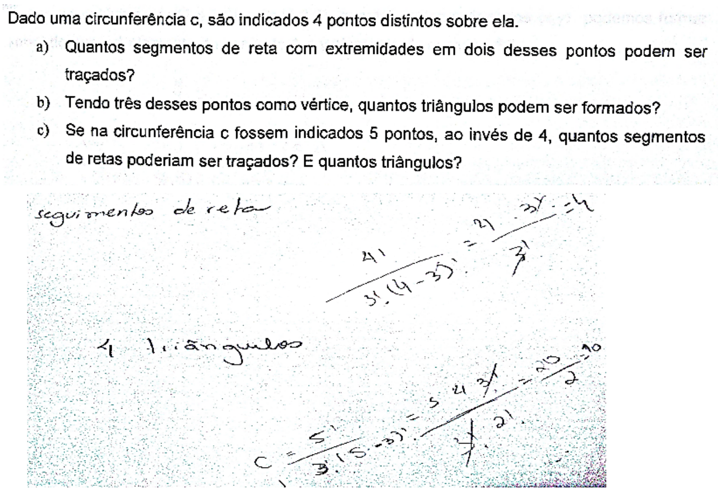
[5] Fonte (adaptado): Souza, J. (2010)

b) *Tendo três desses pontos como vértices, quantos triângulos podem ser formados?*

c) *Se na circunferência c fossem indicados 5 pontos, ao invés de 4, quantos segmentos de reta poderiam ser traçados? E quantos triângulos?*

Inicialmente, os alunos buscaram a resposta utilizando a listagem de possibilidades, encontrando a quantidade exata para os itens a e b, e no item c chegaram a nove triângulos possíveis a partir dos cinco pontos da circunferência. Em um segundo momento, durante a sessão, eles apresentaram vestígios do teorema em ação T_2 (*se um problema é de combinatória, então existe uma fórmula combinatória que resolve e basta utilizá-la para encontrar a solução*) ao buscarem alguma fórmula que fornecesse a resposta do problema, como na resolução apresentada pelo Aluno C:

Figura 1 - Protocolo do Aluno C, Sessão 2.


Dado uma circunferência c, são indicados 4 pontos distintos sobre ela.

a) Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados?

b) Tendo três desses pontos como vértice, quantos triângulos podem ser formados?

c) Se na circunferência c fossem indicados 5 pontos, ao invés de 4, quantos segmentos de retas poderiam ser traçados? E quantos triângulos?

seguimentos de reta

$\frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 4$

4 triângulos

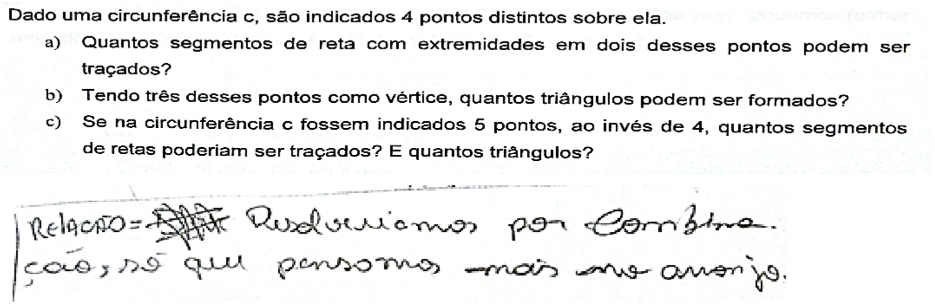
$C = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!} \cdot 2!} = \frac{20}{2} = 10$

Fonte: Lima (2015)

Em conjunto, os licenciandos testaram as fórmulas de combinatória que conheciam, como a de arranjo e de combinação, e as compararam com a listagem efetuada. Ao perceberem que nesse problema, a fórmula de combinação estava resultando no mesmo resultado encontrado por meio da listagem, a utilizaram para encontrar a quantidade de triângulos que podem ser formados utilizando os cinco pontos da circunferência, mobilizando a fórmula de C_2^5.

Percebemos então a força do teorema em ação $T_{1.1}$ nesses alunos, as quais acreditam que sempre é possível listar todas as possibilidades e utilizam essa listagem como meio de validar ou refutar outras estratégias, como as fórmulas. Além disso, eles passaram a utilizar a fórmula de combinação a partir do momento que verificaram a igualdade com a listagem realizada, mesmo sem levar em consideração as propriedades do problema. Vemos esse fato, quando o Aluno B, exibe a seguinte relação:

Figura 2 - Protocolo do Aluno B, Sessão 2.


Dado uma circunferência c, são indicados 4 pontos distintos sobre ela.

a) Quantos segmentos de reta com extremidades em dois desses pontos podem ser traçados?
b) Tendo três desses pontos como vértice, quantos triângulos podem ser formados?
c) Se na circunferência c fossem indicados 5 pontos, ao invés de 4, quantos segmentos de retas poderiam ser traçados? E quantos triângulos?

RELAÇÃO = Resolveríamos por Combina-
ção, só que pensamos mais no arranjo.

Fonte: Lima (2015)

Esses eventos estão consonantes ao apresentado na pesquisa de Santos-Wagner, Bortoloti e Ferreira (2013) que destacam que, em muitos momentos, os alunos estão condicionados a utilizar procedimentos, como as fórmulas, e não levam em consideração os aspectos conceituais do problema.

Na quarta sessão, propusemos um problema de contagem que continha algumas restrições, como ter algarismos distintos e não poder posicionar o algarismo 0 na ordem das centenas e na segunda parte do problema existe a necessidade de os números terem que ser pares. O problema segue abaixo:

Quantos são os números de três algarismos distintos? E se for somente números pares, quantos são ao todo?[6]

Pautadas nas informações fornecidas pelo problema e nos diálogos que realizaram, que compõem a formação do meio *adidático*, os Alunos A e B perceberam a restrição do algarismo 0 do problema, como no seguinte diálogo:

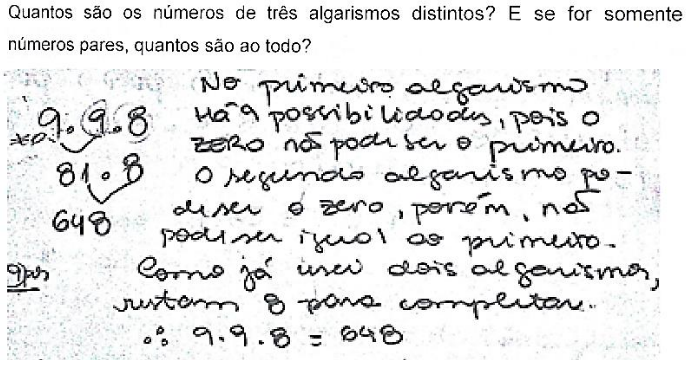
> Aluno A: Pode começar com o 0?
> Aluno B: Pode.
> Aluno A: Não, senão ele não tem três algarismos. Então aqui eu tenho quantas opções? De 1 a 9. Eu não posso começar com o 0.
> [...]
> Aluno A: E se formos por partes?
> Aluno B: Aqui não pode ser 0 (ordem das centenas), aqui pode (ordem das dezenas), aqui pode (ordem das unidades).

[6] Fonte (adaptado): Lima *et. al.* (2006)

Aluno A: Mas aí são distintos, né?!

Destacamos que ao lerem e interpretarem o problema, os alunos perceberam as duas restrições que a primeira parte do problema tem: a distinção dos algarismos e não poder iniciar o número com o algarismo 0. Além disso, o Aluno A fez a sugestão de analisarem o problema por partes, dividindo-o em etapas, fato que possibilitou a utilização do Princípio Fundamental da Contagem.

Figura 3 - Protocolo do Aluno A, Sessão 4


Quantos são os números de três algarismos distintos? E se for somente números pares, quantos são ao todo?

9.9.8
81.8
648

No primeiro algarismo há 9 possibilidades, pois o zero não pode ser o primeiro.
O segundo algarismo pode ser o zero, porém, não pode ser igual ao primeiro.
Como já usei dois algarismos, restam 8 para completar.
∴ 9.9.8 = 648

Fonte: Lima (2015)

Ao realizarem a divisão em três etapas, os licenciandos consideraram corretamente a possibilidade de utilizar nove algarismos na ordem das centenas. Para a ordem das dezenas, eles teriam também nove possibilidades, como justificaram na resolução apresentada, e por fim, teriam oito possibilidades na ordem das unidades, totalizando $9\ x\ 9\ x\ 8 = \ 648$ números de três algarismos distintos.

Apesar de o Aluno A ter expressado na sessão anterior sua dificuldade acerca do conteúdo de combinatória, nesse problema, os Alunos A e B resolveram o problema e apresentaram vestígios do teorema em ação T_3, o *Princípio Fundamental da Contagem*, ao separarem a situação em etapas distintas, e considerarem as possibilidades de cada etapa. Além disso, o Aluno A não ficou preocupado em classificar o problema como sendo uma combinação, arranjo ou permutação para utilizar a fórmula correspondente, sendo outra dificuldade que havia expressado. Eles se colocaram em uma postura ativa na busca da solução do problema, percorrendo momentos *adidáticos* (BROUSSEAU, 2008).

Apesar de terem realizado corretamente o primeiro item, no item b os estudantes avaliaram de maneira incorreta as possibilidades das etapas, dificuldade semelhante à prevista na análise *a priori*. Dessa maneira, consideraram que haviam cinco opções para o algarismo das unidades, pois o número tinha que ser par. Porém, não perceberam que para a ordem das centenas a quantidade de opções depende do algarismo utilizado na primeira etapa, e colocaram que sempre teriam nove opções de números. Por fim, o grupo considerou que havia oito possibilidades para a ordem das dezenas, totalizando 360 números pares.

Alguns resultados e considerações

Ao realizarmos a análise *a posteriori*, identificamos alguns resultados em relação aos conhecimentos desses alunos. Destacamos a força do teorema em ação $T_{1.1}$ (*é possível realizar a listagem de todas as possibilidades)* nas produções dos alunos pois, de modo geral, em algum momento durante a resolução dos problemas, os mesmos realizavam a listagem das possibilidades em busca da resposta. Além disso, ao optarem pela utilização dessa estratégia, destacamos que a realizavam sob uma organização sistemática, apresentando vestígios do teorema em ação $T_{1.2}$ *(existe uma maneira sistemática de listar que garante esgotar todos os casos possíveis).* Também verificamos que a listagem das possibilidades, além de uma estratégia para resolver o problema, também foi utilizada como um meio de controle durante a resolução dos problemas de combinatória, sendo utilizada para a conjectura de novas estratégias, além da validação de outras.

Esse resultado foi verificado em outros alunos que participaram da investigação, pois com frequência os alunos realizavam a listagem e utilizavam seu resultado na busca de regularidades ou em comparações com os resultados de outras estratégias, como as fórmulas e o Princípio Fundamental da Contagem. Portanto, diante do exposto, evidenciamos o quão forte é o conhecimento relativo ao teorema em ação $T_{1.1}$ (*é possível realizar a listagem de todas as possibilidades),* que foi utilizado pelos alunos tanto na realização da estratégia da listagem de possibilidades, quanto como ferramenta de controle e validação de outras estratégias.

Em contrapartida, os alunos apresentaram dificuldades na classificação dos problemas combinatórios, como o Aluno A relatou em diversos momentos durante a sequência didática. Dessa maneira, esses estudantes quando utilizavam o teorema em ação T_2, faziam uso de outros conhecimentos para validar sua resolução, apresentando também vestígios do teorema em ação $T_{1.1}$ *(dado um problema de contagem, sempre é possível listar todas as possibilidades).*

Com o desenvolvimento da investigação foi possível observar que com o decorrer da sequência didática diminuiu a frequência da utilização do teorema em ação $T_{1.1}$ e $T_{1.2}$ durante a resolução dos problemas. A partir da quarta sessão, na qual passamos a selecionar problemas com uma quantidade grande de elementos, os estudantes privilegiaram outras estratégias em detrimento da listagem de possibilidades, como o Princípio Fundamental da Contagem e a utilização de fórmula, relacionadas aos teoremas em ação T_3 *e* T_2, respectivamente. Além disso, conforme encontramos no desenvolvimento da análise preliminar, verificamos em pesquisas do tema (BATANERO, GODINO, NAVARRO-PELAYO, 1996; MIGUEL; MAGINA, 2003) que uma das dificuldades que os alunos apresentam ao realizarem a listagem é o fato de a realizarem sem uma organização sistemática. Porém, ressaltamos que esse fato pouco ocorreu dentre os licenciandos, pois os mesmos quase sempre realizaram a listagem de possibilidades de maneira sistemática, apresentando em conjunto vestígios dos teoremas em ação $T_{1.1}$ e $T_{1.2}$.

Por fim, verificamos que os alunos da licenciatura apresentaram dificuldades em relação a questões conceituais da combinatória. Em diversos momentos que os alunos tentaram classificar os problemas, o fizeram de maneira errônea, pois desconheciam as propriedades de cada situação combinatória. Assim, presenciamos os estudantes mobilizarem fórmulas inadequadas, semelhante ao encontrado em outras pesquisas (ROA *et. al.*, 1997; SANTOS-WAGNER; BORTOLOTI; FERREIRA, 2013). Apesar de previsto essa dificuldade em relação aos aspectos conceituais na análise a *priori*, verificamos o quão forte é essa dificuldade pois, mesmo pensando em situações que pudessem desestabilizar os alunos, isso não ocorreu completamente com o desenvolvimento da sequência didática.

Então, consoante à perspectiva apresentada por Vergnaud (1996, 2009), entendemos que a aprendizagem de um conceito se trata de um processo e não uma etapa que o sujeito simplesmente atinge. Dessa forma, acreditamos que é necessário que os alunos da licenciatura vivenciem novas situações, perpassando momentos de reflexão, para que os mesmos tenham condições de superar tais dificuldades.

Referências

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan Diaz; NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento combinatorio**. Madri: Ed. Sintesis, 1996.

BRASIL, Ministério da Educação: Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

_______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Brasília: MEC, 2006.

_______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª a 8ª. séries - Matemática**. Brasília: MEC/SEF, 1998

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

LIMA, Renan Gustavo Araújo de. **Problemas de combinatória: um estudo de conhecimentos mobilizados por licenciandos em Matemática.** 2015. 198 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

MIGUEL, Maria Inez; MAGINA, Sandra. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. **In: Anais do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática,** Santos, 2003.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; PITOMBEIRA DE CARVALHO, João Bosco; PINTO CARVALHO, Paulo Cezar; FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

NAVARRO-PELAYO, Virginia; BATANERO, Carmen; GODINO, Juan Diaz. Razionamiento Combinatório em Alunos de Secundaria. **In.: Educación Matemática**, n. 8(1), p. 26-39, 1996.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio.** 2009. 267 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Pernambuco, Recife, 2009.

PESSOA, Cristiane Azevedo dos Santos; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **In: EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, vol. 1, n. 1, 2010.

ROA, Rafael; BATANERO, Carmen; GODINO, Juan Diaz; CAÑIZALES, Maria Jesús. Estrategias de resolución de problemas combinatorios por estudiantes con preparación matemática avanzada. **In.: Epsilon**, n. 36, p. 433-446, 1997.

ROCHA, José de Arimatéa. Investigando a aprendizagem de análise combinatória simples em uma turma de licenciandos em Matemática submetida a uma prática de ensino tradicional**.** In: **IX Encontro Nacional De Educação Matemática,** Belo Horizonte, 2007.

SANTOS-WAGNER, Vânia Maria Pereira dos; BORTOLOTI, Roberta D'Angela Menduni; FERREIRA, Juliana. Rodrigues. Análise das resoluções corretas e erradas de combinatória de futuros professores de Matemática**. In: Educação Matemática Pesquisa**, v.15, n.3, pp.692-629, 2013.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceituais. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano. (Orgs). **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais**. Curitiba: Editora CRV, 2009. p.13-35.