UM DOCUMENTO PARA O ENSINO DO CONCEITO DE LIMITE DE SEQUÊNCIA REAL

Sonia Barbosa Camargo Igliori
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil
soniaigliori@pucsp.br

Marcio Vieira de Almeida
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil
marcioalmeidasp@gmail.com

Resumo: Este artigo é resultante de uma pesquisa em andamento que se insere no âmbito das pesquisas que têm por orientação a Gênese Documental, formulada por Gueudet e Trouche. E tem por objetivo apresentar um documento, recursos e esquema de utilização, elaborado para o ensino de limite de sequência de números reais. Os recursos foram escolhidos em conformidade à intenção do professor de explorar a interferência da intuição no entendimento de uma definição matemática formal, às situações didáticas estipuladas e ao conceito matemático envolvido. Como recursos foram utilizados, uma atividade elaborada com o auxílio do GeoGebra, informações extraídas de livro didático e de dois artigos científicos, além de discussão do professor com os estudantes. No que se refere ao esquema de utilização observamos as seguintes regras de ação: utilizar a aplicação do s*oftware* para cada um dos exemplos de sequências selecionados e o procedimento de jogo, competição, entre os estudantes. E os invariantes consistiram no conhecimento implícito construído por meio de vários contextos em que o conteúdo matemático tinha sido trabalhado pelo professor, quais sejam: 'definir o tamanho de uma faixa plana em torno do limite L, de largura ϵ, para explorar a relação funcional $N(\epsilon)$ da definição de limite'; 'utilizar exemplos de sequências em que o limite poder ser atingido' e em que 'a sequências não fossem monotônica, mas convergentes'.

Palavras-chave: Gênese Documental. Limite de sequência de números reais, GeoGebra

Introdução

Este artigo insere-se no âmbito de pesquisas da Educação Matemática no Ensino Superior, mais especificamente do ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral[1], que têm por orientação a Gênese Documental formulada por Gueudet e Trouche.

Ele apresenta um documento elaborado para o ensino de limite de sequência de números reais. Nessa concepção um documento expressa o trabalho de um professor na gestão das ferramentas didáticas para o ensino de conceitos matemáticos.

[1] Ao longo deste texto, poderemos nos referir ao "Cálculo Diferencial e Integral" por apenas "Cálculo".

Esse documento foi elaborado para um trabalho com uma turma de cinco alunos de um curso de pós-graduação em uma instituição particular da cidade de São Paulo, com vistas a aprofundar o conceito de limite de sequências de números reais. Esse aprofundamento significava tratar com os estudantes obstáculos causados pela definição formal vis a vis a intuição.

A Gênese Documental

Para Gueudet e Trouche, um trabalho de documentação está no cerne das atividades de um professor, tanto no que se refere à preparação de uma aula quanto de seu desenvolvimento profissional. Esse trabalho de documentação constitui-se em: buscar por novos recursos, selecionar e criar tarefas matemáticas, planejar sequências nas quais as atividades serão desenvolvidas, gerenciar o tempo e a administração dos artefatos disponíveis.

O processo de Gênese Documental produz 'documentos' os quais podem ser representados pela expressão:

Documentos = Recursos + Esquema de utilização

O termo recurso é utilizado para descrever uma variedade de artefatos e outros elementos que podem ser utilizados por um professor. Um recurso pode ser, por exemplo, um livro texto, uma aplicação produzida num *software*, uma lista de exercícios que será resolvida pelos alunos, uma discussão com outros professores, etc... Um recurso nunca é isolado, mas sim um conjunto de recursos, e o professor esboça num conjunto de recursos seu trabalho de documentação.

Isto é,

> [...] um recurso pode ser um artefato, ou seja, o resultado da atividade humana elaborada por uma atividade humana, com um objetivo preciso. Mas os recursos superam artefatos: a reação de um estudante, uma vara de madeira no chão, também podem se constituir como recursos por um professor que os adote em sua atividade (GUEUDET; TROUCHE, 2012, p. 204, tradução nossa).

O esquema de utilização é um componente psicológico definido por Vergnaud "como uma organização invariante do comportamento do sujeito para uma classe de situações" (VERGNAUD, 1998, p. 229). Num esquema estão compreendidas metas e submetas, antecipações, regras de ação, para coletar informações e exercer controle, e possíveis inferências. Esse esquema é estruturado por invariantes operatórios, que consistem em conhecimento implícito construído por meio de vários contextos nos quais um documento foi utilizado, sendo que esses invariantes podem ser tanto de natureza didática quanto matemática.

Para exemplificar considere o caso (apresentado em Gueudet e Trouche (2009)) de Frédéric. Nesse caso foi relatada uma tarefa para a introdução da raiz quadrada e destacados os seguintes invariantes operatórios:

> [...] ‘uma nova noção deve ser introduzida por meio de uma atividade matemática que produza o significado dessa noção’; e invariantes relacionados ao conteúdo matemático: ‘procurar a medida do lado de um quadrado para uma determinada área evidencia o significado da raiz quadrada’; ‘a raiz quadrada é o processo inverso de elevar ao quadrado’; ‘a tecla raiz quadrada da calculadora auxilia a introdução do símbolo’ (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 206, tradução nossa).

Outro exemplo é está na proposição de uma tarefa de casa para a adição de números positivos e negativos

> [...] uma dada professora reúne os seguintes recursos: livros textos de seu próprio curso, uma folha de exercícios dada em anos anteriores. Ela seleciona entre esses recursos os dados para constituir uma lista de exercícios, para uma determinada classe. Essa lista pode ser modificada, de acordo com o que acontece com os estudantes antes de utilizá-la com outra classe no mesmo ano, ou no próximo ano, ou mesmo mais tarde. O documento se desenvolve ao longo dessa variedade de contextos. Os invariantes operatórios podem ser gerais, como “a lição de casa deve ser extraída do livro" ou relacionados ao conteúdo matemático como: “as adições propostas devem incluir os casos em que são misturados números positivos e negativos, e de casos com apenas números negativos ", etc. Esses invariantes operatórios podem ser inferidos a partir da observação de comportamentos invariantes do professor para a mesma classe de situações em diferentes contextos (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 205, tradução nossa).

O processo de Gênese Documental se expressa na Figura 1:

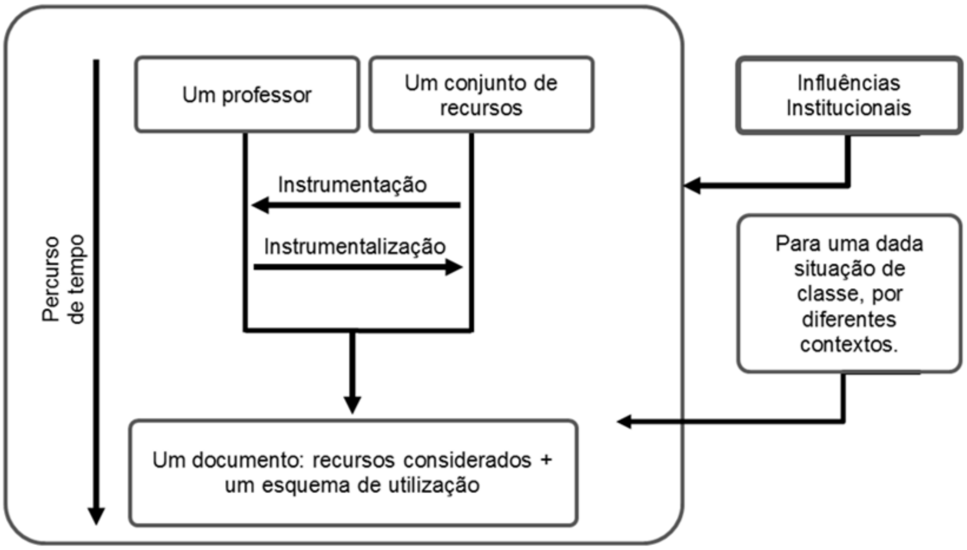

Figura 1 – Representação esquemática da Gênese Documental.
Fonte: GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 206, tradução nossa.

A dimensão da instrumentação e da instrumentalização expressa na Figura 1 é diferente daquela conceituada por Rabardel (1995), pois:

> A dimensão da instrumentalização conceitua os processos de apropriação e moldagem, bem conhecidos por pesquisadores que estudam o desenvolvimento e difusão de sequências de ensino: "uma sequência de ensino desenvolvida por um grupo é necessariamente moldada e transformada enquanto outros a utilizam" (COBB *et al*., 2008, p. 117). A dimensão da instrumentação conceitua a influência sobre a atividade do professor dos recursos que ele desenvolve (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 205, tradução nossa).

Durante o processo de Gênese Documental devem ser levados em consideração três componentes, que são entrelaçadas: material; matemática e didática.

A componente material é composta por materiais como, papel, computador, fichários, etc.

A componente matemática envolve noções matemáticas, tarefas e técnicas relativas a essa noção.

Na componente didática devem ser levados em consideração aspectos institucionais que influenciam o trabalho do professor em sala de aula, como "elementos organizacionais, que vão desde o mapeamento do ano ao planejamento de uma única sessão de uma hora"[2] (GUEUDET; TROUCHE, 2009, p. 207, tradução nossa).

A descrição do documento

O documento apresentado neste artigo é resultante da observação do trabalho de um professor na preparação de aulas para uma disciplina de um curso de pós-graduação em Educação Matemática. Essas aulas destinaram-se a uma turma de cinco alunos, e tinham por objetivo aprofundar o estudo da definição formal de limite de uma sequência real. As atividades para as aulas tinham por propósito levar os estudantes a refletir sobre essa definição enfocando elementos da mesma considerados conflituosos com a intuição, assim como obstáculos epistemológicos.

Um dos recursos foi as indicações de Fischbein (1994), segundo o qual a aprendizagem da Matemática ocorre no relacionamento de três componentes essenciais: o intuitivo, o

[2] "organizational elements, ranging from mapping over the whole year to planning a single one-hour session"

algorítmico e o formal. Nesse artigo Fischbein apresenta vários exemplos para evidenciar a relação entre esses componentes. Para a relação intuição/formalidade esse autor apresenta, como exemplo, a definição formal de limite de sequência real.

Na primeira aula, o professor utilizou os resultados desse artigo, como recurso e seu esquema de utilização foi a observação das reações dos estudantes frente à relação entre a definição de limite e os possíveis conflitos com a intuição. Para isso o professor recolheu dados sobre as concepções dos estudantes as quais eram assemelhadas às apontadas na análise de Fischbein, ou seja, esses estudantes tomavam como base de análise a própria intuição, de que quando n cresce ao infinito os termos se aproximam do limite L, com clara interferência da intuição na compreensão da definição formal de limite. Ficou expresso em falas que, para os cinco estudantes o que estava em jogo na definição de limite de uma dada sequência $(a_n)_{n \in N}$, era a variação do n aumentando ao infinito, e não a variação do ε que estipulava a variação das vizinhanças de L. Ficou também constatado que as ações do professor tornavam explícitos os invariantes do esquema de utilização quando o professor explorou nas atividades os obstáculos epistemológicos de que 'uma sequência convergente deve ser monotônica' e que o limite é entendido como uma barreira ou 'algo que não é atingido'.

Na segunda aula novos recursos foram agregados gerando um novo esquema de utilização e um documento, o que é apresentado neste artigo.

A Figura 2 é uma adaptação do processo da Gênese Documental para o caso apresentado neste artigo.

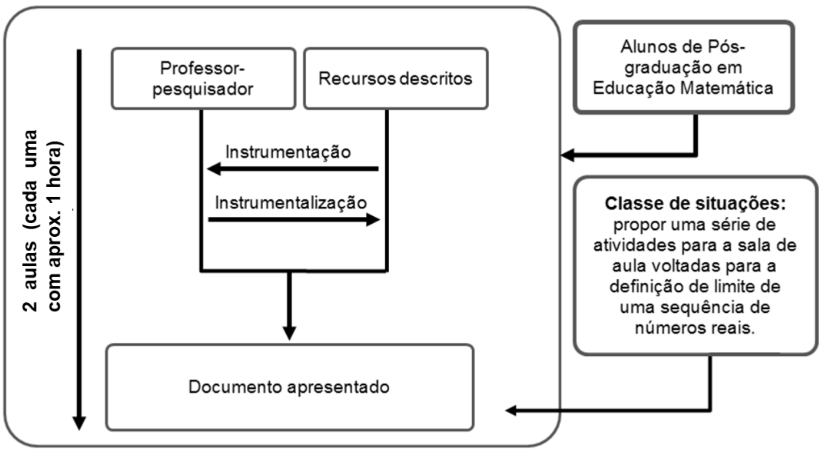

Figura 2 – Representação esquemática da Gênese Documental no caso apresentado neste artigo.
Fonte: Produção nossa.

Configuramos como *Classe de situações*: duas aulas que compõem uma atividade objetivando o estudo da definição formal de limite de uma sequência de números reais visando a exploração de conflito intuição/formalidade matemática na perspectiva de Fischbein e obstáculos epistemológicos.

Os recursos foram caracterizados em conformidade com a classificação nas três componentes: matemática, didática e material.

Componente matemática: definição formal de limite de sequência:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, N(\varepsilon) > 0 : n > N \Rightarrow \left| a_n - a \right| < \varepsilon .$$

Componente didática: exploração da definição de limite tendo por alvo a análise da interferência da intuição na compreensão da definição formal de limite de uma sequência, ou seja, que possibilite ao estudante uma experiência que o leve a perceber que sua intuição no caso não corresponde ao que a definição informal informa.

As atividades tinham por norte os resultados do artigo de Fischbein (1994) que ao considerar a Matemática como uma atividade humana, considera que em seu entendimento são mobilizados três componentes essenciais: o formal, o algorítmico e o intuitivo. A definição de limite de sequências reais é um exemplo apresentado por Fischbein (1994) para revelar conflitos entre os componentes formal e intuitivo.

Fischbein revela que a relação entre os componentes intuitivo e formal pode provocar dificuldades na aprendizagem. De acordo com esse pesquisador,

> [...] nós não podemos ir diretamente da representação intuitiva para a definição formal e rigorosa. A definição formal reverte à ordem das ideias, contradiz a representação natural e dinâmica do processo. E isso faz com que a definição de limite, como uma questão de fato, contraditória, difícil de entender. Nós não iniciamos pela descrição do processo de aproximação de a pela sequência de termos a_n. Nós iniciamos mencionando, curiosamente, um número positivo ε "não importando o qual pequeno ele seja", e *depois* nós introduzimos N e $n \geq N$. Isto é, não é ε que depende de N (como acontece na realidade) – o intervalo $|a_n - a|$ transforma-se pequeno à medida que aumentamos N (respectivamente n) – mas, na definição formal, fazemos N "dependente de ε". Revertemos à ordem natural do processo de pensamento (FISCHBEIN, 1994, p. 238, tradução nossa, grifo do autor).

Levando-se em consideração as discussões com os estudantes e as ideias de Fischbein o professor considerou também o que diz Vinner (1991) quando ele relata obstáculos epistemológicos advindos da noção de limite de sequência. Esses obstáculos apareceram em um estudo realizado por Vinner, com 15 estudantes, em que foi solicitado que definissem o conceito de limite de uma sequência. O pesquisador relata que apenas um dos estudantes deu uma formulação que pode ser aceita, embora incompleta. Os outros 14 estudantes apresentaram os seguintes equívocos: uma sequência não deve alcançar o seu limite (para eles a sequência constante {1, 1, 1, ...} não tem um limite); a sequência convergente deve ser monotonicamente crescente ou monotonicamente decrescente (para eles a sequência s_n dada pela sentença $s_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ não é convergente);

O professor apoiou-se também em Courant e Robbins (2000) quando sugerem uma situação para ilustrar a definição de limite *a* de uma sequência $(a_n)_{n \in N}$.

> A definição sugere uma competição entre duas pessoas, *A* e *B*. *A* faz uma exigência de que a quantidade fixa *a* deve ser aproximada por a_n com um grau de precisão melhor do que uma margem escolhida $\varepsilon = \varepsilon_1$; *B* atende à exigência demostrando que existe um certo inteiro $N = N_1$ tal que todos os a_n após o elemento a_{N_1}, satisfazem a exigência ε_1. Então *A* pode se tornar mais exigente e fixar uma nova margem, menor, $\varepsilon = \varepsilon_2$. *B* mais uma vez atende encontrando um inteiro maior (talvez maior) $N = N_2$. *Se B poder atender à exigência de A por menor que seja a margem estipulada por A, então a situação expressa por* $a_n \to a$ (COURANT; ROBBINS, 2000, p. 336, grifo do autor).

A componente material do documento foi o *software* GeoGebra. Com esse *software* foi elaborada a atividade explorando-se as ideias de jogo de Courant utilizando os elementos que compõem a definição formal de limite, a saber, ε e *N*., evidenciando elementos que permitam ao sujeito potencializar a compreensão da definição formal.

Na Figura 3 é apresentado aplicação do GeoGebra para a exploração da definição do conceito de limite.

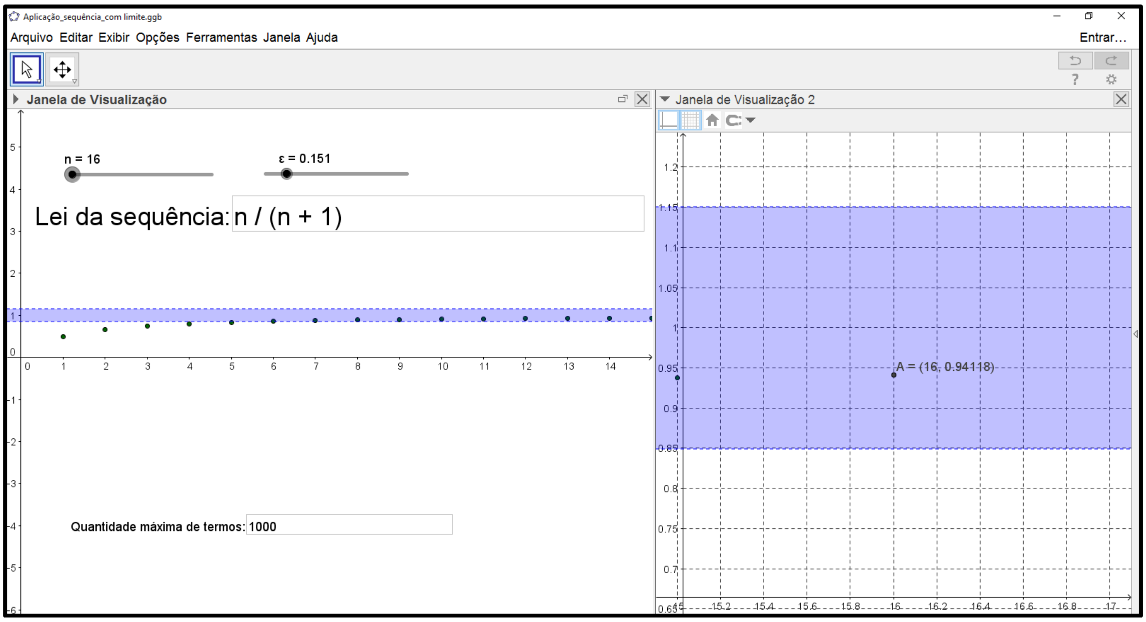

Figura 3 – Aplicação do GeoGebra utilizada para a apresentação do conceito de limite de sequência.
Fonte: Produção nossa.

A aplicação é composta por duas Janelas de Visualização. Na Janela de Visualização da esquerda é esboçado o gráfico da sequência, cuja sentença é dada pelo usuário, e uma faixa, na cor azul, que representa o seguinte conjunto do plano $\{(x, y) \mid L - \varepsilon < y < L + \varepsilon\}$, sendo que *L* é o limite da sequência considerada[3], nomeado por faixa ε. Outros elementos que compõem essa janela são: dois controles deslizantes, nomeados por n e ε. No controle deslizante n é controlado a quantidade de termos que estão esboçados no gráfico da sequência e no outro é controlado o tamanho da faixa ε. Além disso, nessa janela estão dois campos de entrada de texto, nos quais podem ser digitados os seguintes elementos: no campo, localizado na parte superior da janela, deve ser digitado a sentença da sequência que será estudada e no outro, localizado na parte inferior da janela, altera o valor máximo do controle deslizante n, que vai variar de 1 até o valor fixado nesse campo.

Na Janela de Visualização 2 é apresentada a mesma faixa ε e o n-ésimo elemento da sequência, ambos definidos com os mesmos dados inseridos na primeira Janela de Visualização. Ela é representada uma ampliação do gráfico da sequência no n-ésimo termo. Essa janela não permite que o usuário possa utilizar a ferramenta “Mover Janela de Visualização”[4] para observar outros termos da sequência, ela sempre é fixada no n-ésimo termo da sequência. O nível de ampliação varia de acordo com o valor de ε fixado pelo usuário. Quanto menor for o valor de ε mais ampliada será a vizinhança do ponto (n, x_n).

A concepção da Janela de Visualização 2, por parte do professor observado, se deu em razão do seguinte motivo: em determinadas sequências, dependo do valor de ε, apenas a visualização do gráfico de uma sequência na Janela de Visualização pode não ser possível determinar se um dado elemento do gráfico da sequência está no interior da faixa ε fixada ou não. Para ilustra isso observe a Figura 4, nela está representada a sequência $(s_n)_{n\in N}$ dada pela sentença $s_n = \dfrac{n}{n+1}$, para $n = 80$ e $\varepsilon = 0{,}01$. Não é possível distinguir se $(80, s_{80})$ pertence à faixa ε fixada, contudo, essa conclusão pode ser obtida por meio da visualização da representação ampliada da Janela de Visualização 2.

[3] Note que nesta aplicação não é solicitado ao usuário que calcule o limite L. Esse é calculado pelo próprio GeoGebra, por meio do comando Limite[<Função>, <Número>], sendo que <Função> é substituído pela sentença da sequência estudada e <Número> é substituído por ∞.

[4] Ícone da ferramenta é o seguinte .

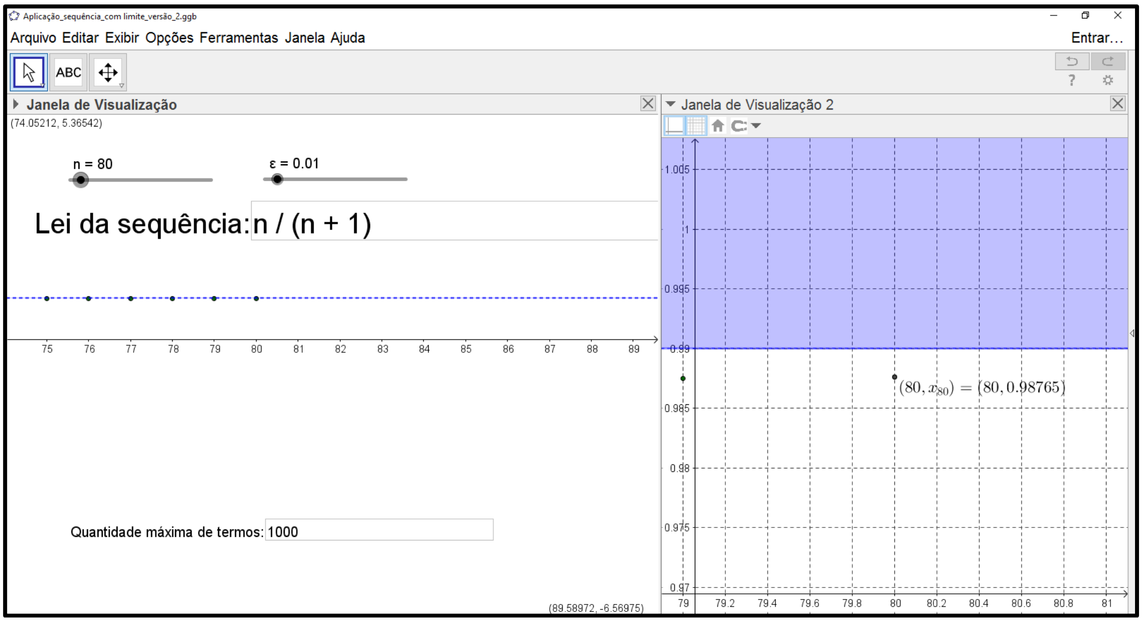

Figura 4 – Representação da sequência para n = 80 e ε = 0,01.
Fonte: Produção nossa.

Para a utilização dessa aplicação, foram selecionadas três sequências. $(a_n)_{n\in N}$ com $a_n = \dfrac{sen(n)}{n}$; $(b_n)_{n\in N}$ com $b_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n}$ e $(c_n)_{n\in N}$ com $c_n = 1$ para todo n . Essas sequências foram escolhidas para explorar os equívocos detectados por Vinner (1991) e entre os estudantes que estavam estudando com o professor.

A componente material do documento inclui também os artigos de Fischbein (1994) e Vinner (1991) e um capítulo do livro do Courant e Robbins (2000). Em Fischbein (1994) são apresentados três componentes que são levados em consideração quando a Matemática é vista como uma atividade humana: o formal, o algorítmico e o intuitivo e é revelado que determinadas relações entre os componentes intuitivo e formal podem provocar conflitos na aprendizagem, como é o caso da definição formal do conceito de limite de sequência. Em Vinner (1991) é considerado o papel das definições no ensino e aprendizagem da Matemática que na introdução de uma definição o professor "deve ter consciência dos efeitos que tal introdução deve ter na maneira de pensar do estudante" (VINNER, 1991, p. 80). E o capítulo "VI Funções e Limites" do livro de Courant e Robbins (2000), na seção "Limites" é apresentada a definição formal de limite de uma sequência, e a proposição que auxilia a compreensão dessa definição, a qual se constituiu em recurso do documento.

No que se refere ao esquema de utilização dos recursos foram observadas as seguintes regras de ação: utilizar a aplicação do GeoGebra para cada um dos exemplos de sequências selecionados; com base na ideia de jogo, proposta por Courant e Robins (2000), conduzindo-se da seguinte forma: fixa-se um valor para *ε* e solicita-se que um estudante procure o valor de *N* que satisfaça a seguinte relação: para $n > N$ os termos da sequência a_n pertencem ao interior da faixa de largura ε construída em torno do limite.

E forma também observados os seguintes invariantes operacionais: ‘fomentar uma discussão sobre os elementos da definição do conceito de sequência pode auxiliar o sujeito no desenvolvimento do conceito formal de limite de sequência’; ‘trazer exemplos de sequências que contradizem elementos intuitivos, como a ideia de limite como uma barreira’; ‘definir o tamanho da faixa plana em torno do limite para evidenciar a relação funcional $N(\varepsilon)$ da definição de limite’; ‘o fato do limite poder ser atingido e a possibilidade de sequências não monotônicas serem convergentes’.

Considerações finais

Neste trabalho foi apresentado um documento elaborado por um professor universitário para ministrar duas aulas em um curso de pós-graduação em educação Matemática, na perspectiva de Gueudet e Trouche. Esse documento foi composto por recursos e esquema de utilização preparados para o estudo da definição formal do conceito de limite de sequência real tendo como componentes uma aplicação desenvolvida no GeoGebra, resultados de um artigo de Fischbein (1994), elementos teóricos de Vinner (1991) Courant e Robins (2000), a definição de limite de uma sequência, discussões com os estudantes.

Foi possível observar os dois componentes do documento, os recursos e o esquema de utilização durante a ação do professor desde a preparação das aulas até sua execução, além das conversas efetuadas com ele quando ficou indicado o conhecimento implícito que tinha de outras ações realizadas para a mesma finalidade. Ou seja a de manipular a relação funcional do N dependendo do ε iniciando seu trabalho a partir da escolha do ε, numa ação de jogo em que era escolhido o ε para encontrar o N.

O processo de Gênese Documental em um processo contínuo, em longo prazo, cujo desenvolvimento ocorre durante a utilização de determinado documento em uma relação dialética entre os recursos, e não apenas uma transformação na qual um conjunto de recursos é dado como entrada e um documento como saída.

Este trabalho insere-se em uma pesquisa mais ampla, que tem por objetivos a análise de documentos para o ensino de Cálculo, cuja construção seja embasada na Gênese Documental, proposta por Gueudet e Trouche, visando trazer novos subsídios para a relação teoria e prática.

Agradecimentos

Agradecemos a CAPES pelo auxílio financeiro para o desenvolvimento da pesquisa.

Referências

COURANT, R.; ROBBINS, H. **O que é matemática: uma abordagem elementar de métodos e conceitos**. Ciência Moderna, 2000.

FISCHBEIN, E. The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In. BIEHLER, R. et al, (Ed.) **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**, Dordrecht Netherlands: Kluwer Academic Publisher, p. 231 – 261, 1994.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Teachers' Work with Resources: Documentational Geneses and Professional Geneses. In: GUEDET, G; PEPIN, B.; TROUCHE, L. **From Text to 'Lived' Resources**: Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development. Dordrecht: Springer Netherlands, 2012. p. 23 – 41. (Mathematics Teacher Education). Disponível em: <http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-1966-8_2>. Acesso em: 08 jun. 2015.

GUEUDET, G.; TROUCHE, L. Towards new documentation systems for mathematics teachers?. **Educational Studies in Mathematics**, v. 71, n. 3, p. 199 – 218, 2009.

VERGNAUD, G. Toward a cognitive theory of practice. In. SIERPISKA, A; KILPATRICK, J. (Eds.), **Mathematics education as a research domain: A search of identity**. Dordrecht: Kluwer, p. 227 – 241, 1998.

RABARDEL, P. (1995). Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains, Armand Colin.

VINNER, S. The Role of Definitions in the Teaching and Learning Mathematics. In: TALL, D. (Ed.). **Advanced Mathematical Thinking**. Dordrecht: Kluwer, p. 65 – 81, 1991.