



I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática

01 a 06 de novembro de 2016

Bonito - Mato Grosso do Sul - Brasil

A EXPLORAÇÃO COMPUTACIONAL E O ENSINO DE TRIGONOMETRIA

Claudete Carginin

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Brasil

carginin@utfpr.edu.br

Resumo: Nesse artigo apresento os resultados obtidos em sala de aula no ensino de trigonometria para uma turma de segundo ano do Curso Técnico Integrado em Informática, no primeiro semestre de 2015. Apoiada nos pressupostos da Teoria das Situações Didáticas e de Registro de Representação Semiótica foram elaborados roteiros de aula baseados na exploração computacional. Com o roteiro, previamente, antes da aula, os alunos montavam uma simulação computacional e refletiam sobre aspectos que seriam debatidos em aula. A metodologia mostrou-se eficiente para a aprendizagem da trigonometria, tendo destaque a profundidade e amplitude obtida nos temas estudados. Apesar dos benefícios, notou-se que em períodos de acúmulo de atividades acadêmicas, como a época de provas, os alunos deixam de lado a simulação, devido ao tempo gasto em sua criação e exploração. Sugere-se que, para estes períodos, os roteiros computacionais já sejam dados criados.

Palavras-chave: Trigonometria. Tecnologias. Teoria das Situações Didáticas. Teoria de Registro de Representação Semiótica.

Introdução

O estudo da trigonometria faz parte da grade curricular do Ensino Médio e é requerido em vários momentos de disciplinas do Ensino Superior, como o Cálculo Diferencial e Integral e Física. Entretanto, em sala de aula, tenho observado que para muitos alunos, a trigonometria continua sendo um tabu.

Na tentativa de mudar esse panorama, ao lecionar trigonometria para o segundo ano do Ensino Médio de um curso Técnico Integrado, durante o primeiro semestre do ano letivo de 2015, resolvi basear-me na Teoria das Situações Didáticas e na Teoria de Registro de Representação Semiótica para elaborar tarefas de investigação, especialmente envolvendo tecnologias, sobre o tema e, assim, (tentar) favorecer a aprendizagem. Meu objetivo com esse artigo é apresentar e discutir essa metodologia de ensino para a trigonometria.

Da Teoria das Situações Didáticas (TSD) foram usadas as tipologias das situações. Brousseau (2008) tipifica as situações didáticas em: i) situações de ação – aquelas nas quais os estudantes agem diretamente sobre o que lhe é proposto; ii) situações de formulação – aquelas nas quais, a partir das investigações, o aluno “cria uma teoria” própria, e conjectura “verdades” sobre o assunto em estudo. Nessa etapa, é imprescindível a interlocução com outras pessoas, ou, ao menos, a redação de um texto explicativo; iii) situações de validação – nessa etapa, as conjecturas e percepções acarretadas pela fase anterior são postas à prova, são testadas; iv) situação de institucionalização – momento no qual é apresentada a sistematização do conteúdo em estudo e feito o confronto com o que foi percebido pelos alunos durante a investigação.

Para efetivar o vínculo com a TSD, optou-se por elaborar roteiros de aula na qual detalhava-se todos os procedimentos computacionais a serem utilizados na investigação. Era tarefa do aluno construir o objeto de aprendizagem no GeoGebra, seguindo os passos do roteiro. No decorrer das análises serão apresentados exemplos que esclarecem essa etapa. Para melhor organização, a turma de 30 alunos foi dividida em grupos de no máximo 4 pessoas.

Após feita a construção no software, o roteiro orientava questões a serem investigadas e, com isso, o tema da aula era previamente estudado. Para o momento de institucionalização, partia-se das observações dos alunos para se chegar à sistematização do conteúdo.

Além dessa atuação discente, na elaboração das atividades buscou-se diversificar os tipos de representação semiótica usados pelos alunos nas respostas às questões propostas. Isso porque, segundo Duval (2009) é o uso de ao menos duas representações semióticas no ensino que favorece o acesso ao objeto matemático, propiciando a aprendizagem.

Minha hipótese inicial era de que se o estudante fizesse uma investigação orientada sobre a trigonometria, inclusive redigindo sobre suas observações, tanto em língua natural quanto em linguagem algébrica, atribuiria maior sentido às representações apresentadas ao longo do estudo trigonométrico. Nesse artigo vou restringir minhas análises às reduções ao primeiro quadrante e a visualização das razões trigonométricas no círculo trigonométrico.

Metodologia utilizada

A metodologia foi aplicada a uma turma de 30 alunos, do segundo ano de um curso Técnico Integrado em Informática, que se subdividiu, por afinidade, em grupos de até quatro pessoas.

Para cada tema de estudo (razões trigonométricas no triângulo retângulo, razões trigonométricas no círculo trigonométrico, funções circulares, operações com arcos, equações

trigonométricas e inequações trigonométricas), foi organizado um roteiro de aula que prescrevia os passos para a construção no software GeoGebra, a qual era usada para as investigações propostas. Nesse roteiro, havia questões que exigiam uma resposta em língua natural ou em linguagem algébrica, embasadas na percepção dos alunos em relação à representação figural. O roteiro deveria ser previamente respondido. Sempre que um novo tópico seria iniciado, os alunos tinham um roteiro a explorar. O relatório das tarefas era inserido em arquivo word ou pdf na plataforma MOODLE institucional.

Em sala de aula, havia o debate e confronto das respostas dos alunos a cada uma das questões. Finalizava-se a discussão com a institucionalização do conteúdo referente à questão.

Apresentação e discussão dos resultados

Vou iniciar essa discussão pela visualização das razões trigonométricas seno e cosseno de um ângulo no círculo trigonométrico. Cabe salientar que antes da exploração das razões trigonométricas no ciclo trigonométrico, os estudantes trabalharam com as razões trigonométricas no triângulo retângulo, com exploração computacional e material manipulável.

Seguindo os passos dados no roteiro, os alunos deveriam chegar à uma construção no GeoGebra como mostrada na Figura 1. Nela, o ponto C poderia ser deslocado sobre a circunferência para que os alunos pudessem perceber as alterações nas razões trigonométricas.

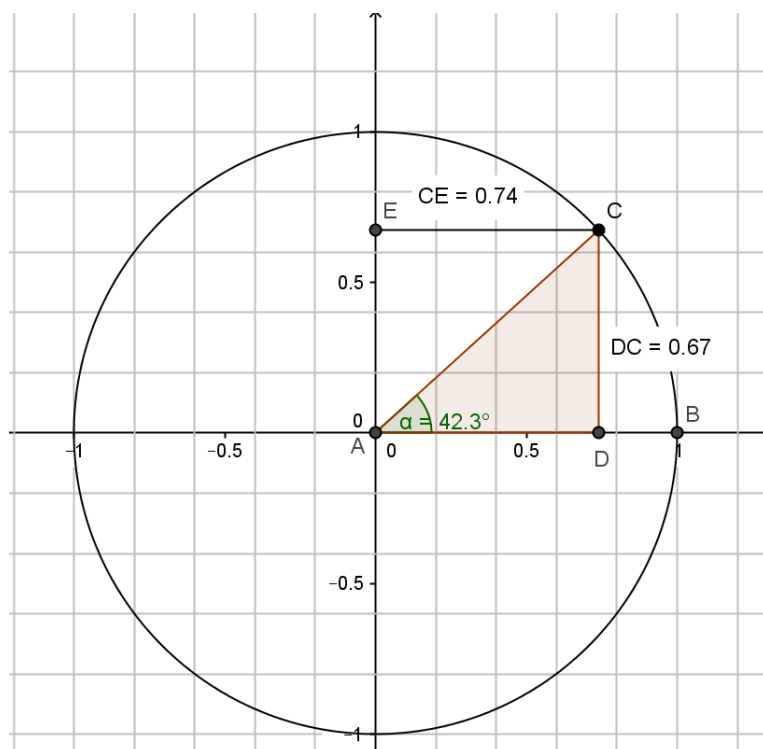


Figura 1: Construção no GeoGebra para exploração de razões trigonométricas no Círculo Trigonométrico.

Nessa fase de construção, considero estar em cena a situação de ação, pois o aluno é defrontado com elementos como círculo, ângulos, retas paralelas e perpendiculares, entre outros, importantes para a aprendizagem da trigonometria, e tem a oportunidade de rever seus conceitos e dificuldades.

A representação gráfica proporcionada pela construção favorece o processo de significação para os estudantes, uma vez que eles podem “visualizar” as alterações acarretadas por modificações como a mudança de quadrante de um arco sobre as razões trigonométricas. A respeito disso, cabe destacar o que diz Flores e Moretti (2005, p.11):

[...] o simples fato de mudar de tarefa para o mesmo tipo de representação gráfica pode provocar mudanças de apreensão e, portanto, nos passos de leitura. Esta estratégia implica na elaboração cognitiva, associando pensamento e registro de representação, fato este importante para a aprendizagem matemática.

Terminada a construção, os alunos tinham algumas questões a analisar, veja na Figura 2 alguns exemplos.

13. Observe sua construção e responda:

- Em relação às razões trigonométricas, considerando o triângulo retângulo ADC, se você levar em conta o ângulo DAC, a qual delas corresponde a razão $\frac{AD}{AC}$?
- Em relação às razões trigonométricas, considerando o triângulo retângulo ADC, se você levar em conta o ângulo DAC, a qual delas corresponde a razão $\frac{DC}{AC}$?
- Restringindo a análise ao primeiro quadrante, seja $B\hat{A}C = \alpha$, como podemos visualizar os valores de $sen(\alpha)$ e $cos(\alpha)$? Explique.
- Ainda restritos ao primeiro quadrante, na sua opinião, utilizar o raio unitário para o círculo trigonométrico contribui para a visualização dos valores de $sen(\alpha)$ e $cos(\alpha)$? Explique.

Figura 2: algumas questões de um roteiro sobre as razões trigonométricas no círculo trigonométrico.

Nessa parte da tarefa, considero estar defronte a uma situação de formulação, pois cada grupo observa sua construção, analisa, faz modificações e estabelece uma “teoria” acerca dos significados das razões mencionadas. Importante destacar que as conclusões tiradas são frutos dessa investigação e da discussão coletiva. Para Freitas (2010, p.97), nas situações de formulação “Trata-se do caso em que o aluno faz determinadas afirmações relativas à sua interação com o problema, mas sem a intenção de julgamento sobre a validade, embora contenham implicitamente intenções de validação”.

Na tarefa apresentada na Figura 2, os alunos não tiveram dificuldades em perceber que a razão $\frac{AD}{AC}$ corresponde ao $\cos(\alpha)$ e que $\frac{DC}{AC}$ corresponde ao $\sin(\alpha)$. Em relação à visualização de tais razões no ciclo trigonométrico, observe algumas respostas nas Figura 3, 4 e 5.

C). Por se tratar de uma circunferência de raio unitário, o valor do seno equivale ao valor do próprio cateto oposto ($DC=0.72$), e o valor do cosseno, por sua vez, corresponde a medida do cateto adjacente ($AD=0.7$). Isso só ocorre devido ao valor da hipotenusa ($AC=1$).

Figura 3: Análise do grupo A sobre a questão 13-c do roteiro para razões no ciclo trigonométrico.

13.c) Considerando o raio unitário (hipotenusa igual a 1 cm), o valor do seno será o mesmo valor do cateto oposto projetado sobre o eixo "y", pelo fato de não fazer diferença dividir cateto oposto por hipotenusa pois ela vale 1. O valor do cosseno também não será afetado pela divisão da hipotenusa, então seu valor será o mesmo dele projetado no eixo "x".

Figura 4: Análise do grupo B sobre a questão 13-c do roteiro para razões no ciclo trigonométrico.

Podemos visualizar o valor de seno olhando para o segmento DC, pois o de seno de um ângulo é igual ao seu cateto oposto dividido pela hipotenusa e, o valor da hipotenusa no ciclo trigonométrico é igual a medida do raio, no caso 1. Assim, $\sin(\alpha) = \frac{DC}{1} \rightarrow \sin(\alpha) = DC$.

Podemos visualizar o valor de cosseno olhando para o segmento AD, pois o de cosseno de um ângulo é igual ao seu cateto adjacente dividido pela hipotenusa e, o valor da hipotenusa no ciclo trigonométrico é igual a medida do raio, no caso 1. Assim, $\cos(\alpha) = \frac{AD}{1} \rightarrow \cos(\alpha) = AD$.

Deste modo, devemos considerar os segmentos DC e AD como projeções das extremidades do arco sobre o eixo das abscissas(x) e o eixo das ordenadas(y) para visualizar os valores de cosseno e seno respectivamente.

Figura 5: Análise do grupo C sobre a questão 13-c do roteiro para razões no ciclo trigonométrico.

A situação de validação, nesses casos, ocorreu quando os alunos utilizaram a calculadora científica para "comprovar" os valores encontrados para as razões trigonométricas nos diversos quadrantes, a partir das conjecturas elaboradas durante a experimentação.

Considero que a utilização desse roteiro faz parte de uma situação a-didática, na qual as situações de ação, formulação e validação estão presentes; a importância desse tipo de situação no ensino é abordada por D'Amore (2007, p. 234), que, ao explicar sobre situação a-didática, escreve:

O estudante faz tentativas (sozinho ou em grupo), verifica que elas não funcionam ou são ineficazes; que a prova deve ser refeita várias vezes; interagindo com os elementos do ambiente, o estudante modifica o seu sistema de conhecimentos por causa das adaptações que realiza ao utilizar diferentes estratégias.

Voltando ao relato, vale observar que os alunos, até aquele momento, tinham estudado apenas as razões trigonométricas no triângulo retângulo, momento no qual elas foram definidas como razões entre os lados de um triângulo e que variam conforme o ângulo de referência. Observe pelas respostas apresentadas nas Figuras 3, 4 e 5, que, apesar disso, os grupos conseguiram expandir a noção de razão trigonométrica em um triângulo para o círculo, inclusive percebendo a importância de definir o raio unitário para o círculo trigonométrico. Observe, na Figura 6, a resposta do grupo C à questão 13-d, que investiga o assunto.

Sim, pois assim podemos saber os valores destas razões de um ângulo apenas olhando as projeções dos segmentos (catetos) presentes no plano cartesiano. Onde o cateto oposto representa o seno e o cateto adjacente representa o cosseno de um ângulo.

Figura 6: Resposta do Grupo C sobre a visualização das razões $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$ a partir do raio unitário do círculo.

Considero que a possibilidade de exploração do tema (razões trigonométricas) a partir de uma tecnologia computacional, aliada ao fato de discutir as modificações coletivamente, foi preponderante para o sucesso da atividade.

Mais adiante no roteiro, essa questão do raio do círculo era retomada. Os estudantes deveriam inferir sobre as modificações sobre as razões trigonométricas se o raio do círculo não fosse unitário. Observe uma argumentação sobre o assunto na Figura 7.

5) caso o círculo não fosse unitário, a variação de seno e cosseno não seria de 0 a 1, mas de 0 até o valor estabelecido para o raio. Além disso, nos primeiros exercícios estabelecemos que o valor de seno e cosseno eram os próprios valores de cateto oposto e adjacente devido a divisão por 1. Porém, a partir de uma circunferência de raio não unitário, esta propriedade não é válida e os cálculos das razões devem ser realizados de forma padrão.

Figura 7: resposta do Grupo A

15) Caso o raio não seja unitário, para encontrar o valor de seno e cosseno basta usar os valores das projeções nos eixos "y" e "x", respectivamente, e multiplicar pelo inverso do raio.

Figura 7: resposta do grupo B

Os valores de seno e do cosseno não seriam mais idênticos aos catetos oposto e adjacente de α respectivamente, pois o valor da hipotenusa seria diferente de 1. Para achar os valores destas razões no ciclo seria necessário efetuar seus respectivos cálculos.

Figura 7: resposta do grupo C

Vale ressaltar, mais uma vez, que os grupos de estudantes chegaram à essas conclusões pela discussão entre seus membros, sem que o conteúdo tivesse sido exposto pelo professor.

Isso reforça a importância de situações de ação, formulação e validação preconizadas por Brousseau, no ambiente de ensino.

Com essa metodologia de ensino, os momentos de institucionalização (segundo a TSD) tornaram-se momentos de expor dúvidas e conflitos surgidos durante a investigação. A institucionalização ocorreu após os grupos concluírem suas discussões, e partiu das dificuldades apontadas pelos discentes ao investigar o que era proposto na tarefa. Devido à limitação de páginas, esse momento não será abordado nesse artigo.

Embora as questões iniciais do roteiro se centrassem em arcos do primeiro quadrante, os estudantes afirmaram terem investigado os demais quadrantes para corroborar a afirmação que haviam feito. Isso também favoreceu a análise para saber como encontrar os valores das razões trigonométricas para arcos de outros quadrantes, inclusive arcos com mais de uma volta.

O roteiro em questão também estimulava a investigação sobre a redução ao primeiro quadrante. Esse ponto foi mais polêmico, pois exigia, além da explicação em língua natural, uma representação algébrica para as observações. A Figura 8 apresenta a questão proposta. As Figuras 9, 10 e 11 apresentam as respostas dos grupos A, B e C, respectivamente.

g) Agora, suponha que você disponha apenas de uma tabela trigonométrica, na qual estão dispostos os valores para $\text{sen}(\alpha)$ e $\text{cos}(\alpha)$ para $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Explique como você determinaria os valores de $\text{sen}(\alpha)$ e $\text{cos}(\alpha)$ para os casos em que:

g.1) $\frac{\pi}{2} \text{rad} < \alpha < \pi \text{rad}$:

g.2) $\pi \text{rad} < \alpha < \frac{3\pi}{2} \text{rad}$:

g.3) $\frac{3\pi}{2} \text{rad} < \alpha < 2\pi \text{rad}$

g.4) $\alpha > 2\pi \text{rad}$.

Figura 8: Questão proposta no roteiro de investigação.

G1= Podemos observar que o ângulo está no segundo quadrante, logo o seno será positivo, enquanto o cosseno assumirá o sinal negativo. Logo, para descobrir o valor dessas razões utilizamos o ângulo já conhecido no primeiro quadrante.

G2= Podemos observar que o ângulo está no terceiro quadrante, logo o seno será negativo, e o cosseno, também assumirá o sinal negativo. Logo, para descobrir o valor dessas razões utilizamos o ângulo já conhecido no primeiro quadrante.

G3= Podemos observar que o ângulo está no quarto quadrante, logo o seno será negativo, enquanto o cosseno assumirá o sinal positivo. Logo, para descobrir o valor dessas razões utilizamos o ângulo já conhecido no primeiro quadrante.

G4= Para determinar o valor destas razões quando o ângulo em questão for maior que 2π , deve-se dividir o valor fornecido por 2π , o número inteiro encontrado, corresponde ao número de voltas completas, e o resto, por sua vez, corresponde ao próprio ângulo. Tendo em mãos o valor deste ângulo, já é possível descobrir o sinal que acompanhará o valor a partir do quadrante em que se encontra e, finalmente, para determinar o

seno e cosseno, volta-se ao ângulo já conhecido que se encontra no primeiro quadrante e equivale a este outro, obtido pelo resto da divisão.

(a)

Arco	Quadrante	Relação entre $\text{sen}(\alpha)$ e $\text{sen}(\beta)$	Relação entre $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{cos}(\beta)$
$\beta = (\pi - \alpha)\text{rad}$	2	$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta)$	$\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(\beta) $
$\beta = (\pi + \alpha)\text{rad}$	3	$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta) $	$\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(\beta) $
$\beta = (2\pi - \alpha)\text{rad}$	4	$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta) $	$\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(\beta)$

(b)

Figura 9: Explicação em língua natural (a) e representação algébrica (b) para a redução ao primeiro quadrante do grupo A.

13.g.1) Como esse ângulo pertence ao segundo quadrante, basta subtrair de π rad seu valor e a diferença será o valor do ângulo para comparar na tabela trigonométrica, isso vale para o seno. Já para o cosseno vale a mesma regra, basta apenas mudar o sinal para negativo.

13.g.2) Como esse ângulo pertence ao terceiro quadrante, basta subtrair de seu valor π rad e a diferença será o valor do ângulo para comparar na tabela trigonométrica e alterar o valor, para o seno. Já para o cosseno vale a mesma regra, basta apenas mudar o sinal para negativo.

13.g.3) Como esse ângulo pertence ao quarto quadrante, basta subtrair de 2π rad seu valor e a diferença será o valor do ângulo para comparar na tabela trigonométrica. Já para o cosseno vale a mesma regra, sem mudar o sinal.

13.g.4) Basta subtrair de seu valor 2π rad até que a diferença seja menor que 2π rad, e então o valor final será comparado na tabela trigonométrica. Já para o cosseno vale a mesma regra, sem mudar o sinal.

(a)

Arco	Quadrante	Relação entre $\text{sen}(\alpha)$ e $\text{sen}(\beta)$	Relação entre $\text{cos}(\alpha)$ e $\text{cos}(\beta)$
$\beta = (\pi - \alpha)\text{rad}$	2	$\text{sen}(\alpha) = \text{sen}(\beta)$	$\text{cos}(\alpha) = -(\text{cos}(\beta))$
$\beta = (\pi + \alpha)\text{rad}$	3	$\text{sen}(\alpha) = -(\text{sen}(\beta))$	$\text{cos}(\alpha) = -(\text{cos}(\beta))$
$\beta = (2\pi - \alpha)\text{rad}$	4	$\text{sen}(\alpha) = -(\text{sen}(\beta))$	$\text{cos}(\alpha) = \text{cos}(\beta)$

(b)

Figura 10: Explicação em língua natural (a) e representação algébrica (b) para a redução ao primeiro quadrante do grupo B.

g.1) $\frac{\pi}{2} rad < \alpha < \pi rad$:

Subtraia α de πrad , e então encontraria o valor do ângulo no 1º quadrante que é simétrico à α , no 2º quadrante, cuja o módulo das razões trigonométricas de ambos são os mesmos. E no final multiplicaria o valor do cosseno encontrado por -1, e valor do seno permaneceria o mesmo.

g.2) $\pi rad < \alpha < \frac{3\pi}{2} rad$:

Para achar o cosseno: Subtraia πrad de α , e então encontraria o valor do ângulo no 1º quadrante que é simétrico à α , no 3º quadrante, cuja o módulo das razões trigonométricas de ambos são os mesmos. E no final multiplicaria o valor do cosseno e do seno encontrado por -1.

g.3) $\frac{3\pi}{2} rad < \alpha < 2\pi rad$

Para achar o cosseno: Subtrairia α de $2\pi rad$, e então encontraria a medida do ângulo no 1º quadrante que é simétrico a α , no 4º quadrante, cuja o módulo das razões trigonométricas de ambos são os mesmos. E no final multiplicaria o valor do seno encontrado por -1, e o valor do cosseno permaneceria o mesmo.

g.4) $\alpha > 2\pi rad$.

Calcularia a 1ª determinação positiva do ângulo no ciclo, e em seguida analise o quadrante no qual esta determinação esta, e em seguida aplique os itens acima.

(a)

- Se α é um arco do segundo quadrante, então:

$$\cos \alpha = -\cos((\pi - \alpha)rad)$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen}((\pi - \alpha)rad)$$

- Se α é um arco do terceiro quadrante, então:

$$\cos \alpha = -\cos((\alpha - \pi)rad)$$

$$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen}((\alpha - \pi)rad)$$

- Se α é um arco do quarto quadrante, então:

$$\cos \alpha = \cos((2\pi - \alpha)rad)$$

$$\operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen}((2\pi - \alpha)rad)$$

- Se α é um arco maior que $2\pi rad$, então:

Devemos calcular quantas voltas completas α deu no círculo. Para isto, devemos decompor α de modo que se ache uma fração de resultado inteiro divisível por 2, na qual o resultado da fração por 2 representa o número de voltas completas dadas pelo arco. O resto desta decomposição representa a primeira volta positiva do arco. Após isto, devemos

analisar em qual quadrante este arco cômputo de α (1ª determinação positiva) está e então aplicar o “teorema” acima em que este se encaixa.

(b)

Figura 11: Explicação em língua natural (a) e representação algébrica (b) para a redução ao primeiro quadrante do grupo C.

Perceba que o grupo C (Figura 11), foi além do esperado, uma vez que na sua resposta há informações que até aquele momento não haviam sido explanadas em sala, como “arcos cômputos” e “1ª determinação positiva”. Antes de cada roteiro, os alunos eram informados que ele serviria apenas como uma estratégia para estudar o conteúdo, que se houvesse uma resposta

“errada”, isso não os prejudicaria, ao contrário, seria usada para esclarecer o conteúdo em questão, bem como sua forma de representar algebricamente.

Ainda sobre essa questão de redução ao primeiro quadrante, o grupo B elaborou uma síntese para calcular os valores para seno e cosseno de α , apresentado na Figura 12.

Quadrante	$\text{sen}(\alpha)$	$\text{cos}(\alpha)$
2	$\text{sen}(180^\circ - \alpha)$	$-\text{cos}(180 - \alpha)$
3	$\text{sen}(\alpha - 180^\circ)$	$-\text{cos}(\alpha - 180^\circ)$
4	$\text{sen}(360^\circ - \alpha)$	$\text{cos}(360 - \alpha)$
Maior que 360°	Enquanto $\alpha > 360^\circ \rightarrow \alpha - 360^\circ$ Quando $\alpha < 360^\circ \rightarrow \text{sen}(\alpha)$ de acordo com o quadrante que está.	Enquanto $\alpha > 360^\circ \rightarrow \alpha - 360^\circ$ Quando $\alpha < 360^\circ \rightarrow \text{cos}(\alpha)$ de acordo com o quadrante que está.

Figura 12: síntese para calcular os valores para seno e cosseno de α , elaborado pelo grupo B.

Além das representações em língua natural e algébrica, para esse caso específico, os estudantes validaram numericamente suas afirmações, com a utilização de uma calculadora científica. Dessa forma, considero que ao investigar as questões propostas, os alunos estavam diante de uma situação de ação; quando eles começavam a discutir e elaborar estratégias para sua resolução, era uma situação de formulação; ao usar a calculadora científica para testar a veracidade das estratégias estavam diante de uma situação de validação. Quando a calculadora científica mostrava valores que não corroboravam as estratégias elaboradas, o grupo voltava a discutir; isso indica que, ao nível do Ensino Médio, pelo menos, as situações de formulação e validação acontecem simultaneamente.

As respostas dos alunos às questões propostas apresentadas nesse artigo indicam o quanto os alunos podem aprender se forem devidamente estimulados. Com uma mesma construção vários conceitos foram institucionalizados: seno e cosseno de um arco no círculo trigonométrico; redução ao primeiro quadrante; relação trigonométrica fundamental.

A discussão ocorrida nos grupos durante a elaboração do relatório, etapa que pode ser comparada à situação de formulação proposta por Brousseau, mostrou a importância da argumentação em aulas de matemática. Reginaldo (2012) discute as formas de argumentação em aulas de matemática e apresenta contraexemplos, demonstrações e provas sem uso de recursos discursivos como maneiras utilizadas pelos alunos para argumentar sobre algo.

No experimento apresentado nesse artigo, segundo os alunos, para que uma proposta fosse aceita pelo grupo como resposta à questão, o proponente deveria mostrar, por fórmulas ou cálculos numéricos (incluindo aí a calculadora científica), a veracidade da sua afirmação.

São as formas de argumentação entrando em cena. Isso proporcionou uma aprendizagem mais profícua, além de abrir espaço para que todos pudessem manifestar seu conhecimento acerca das análises que estavam sendo realizadas.

Nesse aspecto, o fato de os alunos terem que escrever, em língua natural e algebricamente, sobre um conteúdo que não havia sido formalmente apresentado a eles, os fez pensar melhor sobre o significado de cada símbolo usado na matemática, bem como na relação existente entre a língua natural e a linguagem matemática.

Considerações finais

Esse trabalho teve início a partir da inquietação por ouvir dos alunos do ensino superior que nunca haviam entendido trigonometria, que nela apenas existiam “um monte de fórmulas”. O desafio de elaborar um curso de trigonometria, no qual a exploração computacional viesse antes dos momentos de apresentação formal do conteúdo, foi proposto (e aceito) às pesquisadoras do Grupo de Estudos e Pesquisa em Ensino de Matemática, da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus de Campo Mourão. Cada pesquisadora incumbiu-se de preparar um tópico relacionado à trigonometria, elaborando roteiros de estudos exploratórios para embasar o tratamento formal em sala de aula. Parte de um deles foi tratado aqui.

Observei, como professora regente da turma, maior envolvimento dos alunos nas aulas, devido, em última instância, ao fato de quererem saber como representar algebricamente algo que foi observado graficamente por eles, que eles sabiam explicar, mas não sabiam como algebrizar.

Trabalhar o conteúdo a partir das observações dos alunos foi gratificante e enriquecedor, para mim e para a toda a turma, entretanto, há de se ressaltar que o tempo usado para a explanação do conteúdo (sistematização / institucionalização) foi maior do que o previsto no planejamento, devido às inúmeras intervenções discentes. Por outro lado, essas intervenções possibilitaram que fossem tratados conteúdos que estavam fora da sequência planejada, devido ao interesse dos alunos; e isso, a meu ver, proporcionou um estudo mais integrado da trigonometria.

Um fator de melhoria para a metodologia está relacionado aos exercícios e práticas relacionadas aos conteúdos da trigonometria. Os alunos interessaram-se pela exploração computacional, mas desestimularam-se pela resolução dos exercícios do livro didático utilizado, por serem menos exploratórios e mais mecânicos.

I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática

01 a 06 de novembro de 2016

Bonito - Mato Grosso do Sul - Brasil

A partir da metodologia utilizada, os alunos foram desafiados a investigar a trigonometria na cidade. Novamente os alunos foram divididos em equipes, por afinidade. Cada equipe investigou um tema. Os resultados foram publicados em um livro (CARGNIN et al, 2015) e divulgado às escolas da região como uma forma de incentivar outros professores a desafiarem seus alunos em prol da aprendizagem matemática.

Referências

BROUSSEAU, G. **Introdução à Teoria das Situações Didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

CARGNIN, C. *et al.* **Um olhar para a trigonometria**: da escola para as ruas. Maringá: Massoni, 2015.

D' AMORE, B. **Elementos de Didática da Matemática**. (Trad. Maria Cristina Bonomi). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.

DUVAL, R. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros Semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

FLORES, C. R.; MORETTI, M.T. **O Funcionamento Cognitivo e Semiótico das Representações Gráficas**: Ponto de Análise para a Aprendizagem Matemática, 2005. Disponível em <http://28reuniao.anped.org.br/textos/gt19/gt19736int.pdf>. Acesso em 10 nov. 2016.

FREITAS, J.L.M. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S.D.A. **Educação matemática**: Uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010, pp.77-112.

REGINALDO, B.K.S. **Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática**. (Dissertação de mestrado). Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2012.