AS ORGANIZAÇÕES MATEMÁTICAS PONTUAIS PARA O ENSINO DAS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

Fernando Emílio Leite Almeida[1]
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco, Brasil
fernandoemilioleite@yahoo.com.br

Anna Paula Avelar de Brito Lima[2]
Universidade Federal Rural de Pernambuco, Brasil
apbrito@gmail.com

Resumo: Esse artigo parte de uma tese de doutorado e tem como objetivo reconstruir as organizações matemáticas pontuais (tipos de tarefa, técnicas, tecnologias e teorias) para o ensino das equações do segundo grau. Para tornar possível essa investigação, elegemos como campo teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), especialmente as organizações matemáticas (OM). Essas organizações estão relacionadas à toda a atividade matemática que é construída na sala de aula a partir de uma organização didática. Os documentos que possibilitaram a reconstrução das organizações foram quatro livros didáticos antigos (compêndios) de matemática. Os resultados da análise apontam para quatro tipos de tarefas diferentes (T_1: $ax^2 + bx + c = 0$; T_2: $ax^2 + c = 0$; T_3: $ax^2 + bx = 0$; T_4: $ax^2 = 0$), que, por sua vez, podem ser executadas por, ao menos, uma técnica, legitimada por uma tecnologia.

Palavras-chave: Equação do Segundo Grau, Teoria Antropológica do Didático, Organização Matemática.

Introdução

Este artigo tem por objetivo[3] reconstruir as organizações matemáticas pontuais (tipos de tarefa, técnicas, tecnologias e teorias) para o ensino das equações do segundo grau. Nesse sentido, optamos por selecionar livros didáticos antigos (compêndios) de matemática, por entendermos que os saberes associados a eles estão mais próximos da sua gênese, mostram a realidade matemática com uma riqueza maior de detalhes. Para tornar possível essa investigação, elegemos como campo teórico e metodológico a Didática da Matemática de influência francesa. Essa área de investigação surgiu na França, no final dos anos 60 e início

[1] Professor do Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de Pernambuco – IFPE / Campus Pesqueira. Doutor pelo Programa de Pós-graduação no Ensino das Ciências e Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE.
[2] Professora do Programa de Pós-Graduação no Ensino das Ciências na Universidade Federal Rural de Pernambuco – UFRPE.
[3] O objetivo desse artigo corresponde a uma das etapas da nossa pesquisa de doutorado.

dos anos 70 do século passado, quando foram fundados os Institutos de Pesquisa sobre o Ensino da Matemática (IREM) (ALMEIDA, 2009).

Desde do surgimento, esse campo de pesquisa vem crescendo de forma significativa e na última década tem despertando interesse em muitos pesquisadores no Brasil, como por exemplo, Bittar (2015); Câmara dos Santos (2011); Bellemain (2009); Araújo (2009); Bessa de Menezes (2010), Brito Menezes (2006), entre outros. Por outro lado, nomes internacionais como, Guy Brousseau (1996, 2007) e Yves Chevallard (1996, 1999, 2003), tiveram um papel essencial na definição dela como ciência e, na atualidade, pesquisadores espanhóis, como Bosch e Gascón (2007), entre outros.

Dentre o conjunto de noções teóricas que marcam a didática da matemática como campo de pesquisa, particularmente, chamamos atenção para a Teoria Antropológica do Didático – TAD e, especialmente, para as organizações matemáticas e didáticas, por se tratar do nosso campo particular de investigação.

Com relação às organizações matemáticas (OM) e organizações didáticas (OD), podemos dizer que são ferramentas que permitem analisar as transformações que são feitas nos objetos de saberes a ensinar no interior do sistema didático, ou de outra determinada instituição (BOSCH; GASCÓN, 2007).

Após a escolha das organizações matemáticas e didáticas como campo de investigação, é fundamental a definição do campo de saber, particularmente o que nos interessa é o campo algébrico, em especial, as equações do segundo grau.

Escolhemos a álgebra, dentre outras questões, porque, considerando as avaliações em larga escala, o índice de acertos dos estudantes nesse campo fica em torno de 55% em muitas regiões do Brasil (SAEB, 2011). Além desse fato, em Pernambuco, o Sistema de Avaliação da Educação Básica de Pernambuco (SAEPE), constatou que apenas 21,4% dos alunos do 9º ano do ensino fundamental, conseguem, por exemplo, identificar uma equação do 2º grau expressa em um problema (CÂMARA DOS SANTOS e RAMOS DE ALMEIDA, 2014).

A seguir, faremos uma breve explanação teórica dos campos contemplados por nossa pesquisa e tratados nesse artigo, a saber: a teoria antropológica do didático; as organizações matemáticas e didáticas; as equações do segundo grau; abordagem metodológica e análise dos dados.

A Teoria Antropológica do Didático

Após aproximadamente duas décadas de contribuições para as pesquisas em didática da matemática, a Transposição Didática (TD) acaba se integrando em um âmbito de investigação próprio desenvolvido por Chevallard: a "teoria antropológica do didático - TAD" (BOSCH e GASCÓN, 2007, p. 389).

O postulado de base da TAD admite que toda atividade humana, regularmente realizada, pode ser descrita e analisada a partir de um modelo "único", chamado de "praxeologia" (BOSCH; GASCÓN, 2007). Essa noção, para os pesquisadores, é formada a partir da união dos termos gregos *práxis*, considerada a parte prática, e *logos*, que faz referência ao pensamento, ao raciocínio.

Chevallard (1996) apresenta sua teoria quase de forma axiomática. Assenta a TAD nos conceitos primitivos de *objetos, pessoas, instituições, relação (pessoal)* de um indivíduo com o objeto e *relação (institucional)* de uma instituição com o objeto. Esses são considerados os elementos iniciais da sua teorização.

Dos conceitos apresentados, Chevallard (1999) chama atenção, primeiramente, para o conceito de *objeto O*. Por entender que este tem uma posição privilegiada, considera-o a base de toda a sua construção teórica. Assim, entende que um *"objeto é toda entidade, material ou não, que existe para ao menos um indivíduo"* (CHEVALLARD, 2003, p. 81). Complementando essa ideia, esse autor explica que *"todas as coisas são objetos, as pessoas X e as instituições I também são objetos, assim como outras entidades que irei introduzir, são objetos de um tipo particular"* (CHEVALLARD, 1996, p. 127). O pesquisador se refere como tipo particular às pessoas e às instituições.

Na construção teórica da TAD, outros conceitos vão surgindo, como o de "relação pessoal de um indivíduo X com um objeto O". Esse conceito diz respeito a todas as interações que o indivíduo X pode ter com o objeto O. A expressão que pode denotar esse sistema é R (X, O). Vale destacar que um objeto O existe para uma pessoa X se a relação pessoal de X com O é não vazia, ou seja, se $R(X, O) \neq \emptyset$ (CHEVALLARD, 2003, p. 81).

Essa teoria faz referência ao conceito de pessoa como sendo o par formado pelo indivíduo X e pelo sistema de relações pessoais R (X, O) em algum momento da história de X (CHEVALLARD, 2003, p. 81).

Outro conceito central a essa teorização é o de *"Instituições"*. Destacamos que esse conceito, inadvertidamente, pode ser confundido com o sentido usual da palavra "instituição", o que pode comprometer a conceituação desse termo na teoria em enfoque. Usualmente, podemos dizer que uma escola é uma instituição, tal como uma sala de aula; mas existe igualmente a instituição "trabalhos orientados", a instituição "curso", a instituição "família". Por fim, a vida cotidiana é uma instituição (sendo ela compreendida em dado momento social), etc. (CHEVALLARD, 2003).

Chevallard acrescenta que os indivíduos X, ao ocuparem determinadas posições nas instituições I, estão se tornando sujeitos dessas instituições. O fato de se sujeitar às instituições de maneira ativa vai contribuir para sua vida. De uma maneira geral, é por suas sujeições, pelo fato de que ele é o sujeito de uma multiplicidade de instituições, que o indivíduo X se constitui como uma pessoa (CHEVALLARD, 2003).

A partir dessas reflexões, pretendemos discutir o conceito de *relação institucional* de uma instituição I com o objeto O, aqui representado por $R_I(O)$. Comecemos, então, por entender que, de forma semelhante ao que acontece para um indivíduo X, podemos dizer que um objeto O existe para uma instituição I, isto é, I conhece O quando $R_I(O) \neq \varnothing$. Nesse caso, dizemos que O é um objeto institucional (ARAÚJO, 2009).

De acordo com Chevallard (2003, p. 82), uma relação institucional com um objeto O é considerada ideal quando ela se assemelha à relação pessoal dos "bons sujeitos" de I, isto é, quando $R_I(O) \cong R(X, O)$. Nessa linha de discussão, para Araújo (2009) é possível dizer-se que existe uma *conformidade* entre a relação pessoal de X e a relação institucional de I.

Para Chevallard (2003) o postulado de base da TAD, ao contrário de uma visão particular de mundo, admite que toda atividade humana pode ser descrita como um modelo *único*, que pode ser resumido com a palavra *praxeologia*.

Organização Praxeológica

A praxeologia se constitui a partir de noções chaves, como *tipos de tarefas* (T) a serem cumpridas por meio de, pelo menos, de certa maneira de executá-las, chamada *técnica* (τ) que, por sua vez, é explicada e legitimada por elementos *tecnológicos* (θ), justificados e esclarecidos por uma *teoria* (Θ).

A praxeologia $[T/\tau/\theta/\Theta]$ é formada pela união de quatro componentes que se articulam, compondo um bloco prático-técnico $\Pi = [T,\tau]$, designado na linguagem corrente como *saber-fazer (práxis)*. Consiste na associação entre certo tipo de tarefa e uma determinada técnica, e um bloco tecnológico-teórico $\Lambda = [\theta,\Theta]$, designando o *saber (logos),* resultado da articulação entre a tecnologia e a teoria (CHEVALLARD, 2003).

O pesquisador aponta ainda que a existência de um tipo de tarefa matemática em um sistema de ensino está condicionada à existência de, no mínimo, uma técnica de estudo desse tipo de tarefa e uma tecnologia relativa a esta técnica, mesmo que a teoria que justifique essa tecnologia seja negligenciada.

Sobre o tipo de tarefa (T), Chevallard (1999, p. 223) aponta que, na maioria dos casos, a associação de uma tarefa a um tipo de tarefa é expressa por um verbo, como "desenvolver" a expressão literal dada, "subir" uma escada etc. Acrescenta, ainda, que a noção de *tarefa*, ou melhor, de *tipo de tarefa*, diz respeito a um objeto relativamente preciso. Assim, quando dizemos *subir uma escada*, estamos diante de um tipo de tarefa. Mas, se dizemos apenas *subir*, não haveria tarefa. Por outro lado, quando dizemos *calcular o valor de uma função no ponto*, temos um tipo de tarefa. Todavia *calcular*, simplesmente, é o que chamamos de um de gênero de tarefa (CHEVALLARD, 1999).

Uma técnica τ diz respeito à *maneira de fazer* ou *realizar as tarefas* t Є T. Uma praxeologia relativa a T contém, em princípio, uma técnica τ relativa a T. Para Chevallard (1999, p. 223), se estabelece, então, *"um bloco designado [T/τ], que se denomina um bloco prático-técnico, em que se identifica, de forma genérica, como saber-fazer; este implica um determinado tipo de tarefa T e uma determinada maneira técnica τ de realizar as tarefas desse tipo".*

A definição de tecnologia (θ) baseia-se em um *discurso racional* (logos) sobre uma técnica τ, e tem como primeiro objetivo justificá-la "racionalmente". Dessa forma, assegura que a técnica permita que se cumpra bem a tarefa T. Ou seja, a primeira função da tecnologia é *descrever e justificar* a técnica utilizada como uma *maneira de cumprir* corretamente uma tarefa, ou mesmo permitir engendrar (ou a reconstruir, quando ela é "dada") (CHEVALLARD, 1999).

O papel da teoria (Θ) em relação à tecnologia é semelhante ao da tecnologia em relação à técnica, ou seja, a teoria (Θ) tem como objetivo justificar e esclarecer a tecnologia (CHEVALLARD, 1999).

Já a Organização Matemática (OM) está relacionada a toda a atividade matemática que é construída na sala de aula a partir de uma organização didática. Assim, são construídas em torno de tipos de tarefas (T) matemáticas realizadas, de técnicas (τ) matemáticas explicadas, de tecnologias (θ) justificadas e de teorias (Θ) que são, em tese, os objetos matemáticos a serem estudados ou construídos em momentos de estudo.

A Organização Didática (OD) surge a partir do momento em que existe uma Organização Matemática sendo colocada em prática. Queremos dizer que a sua atividade está voltada para a maneira da execução da OM, da realidade matemática.

Relacionado às OD, Chevallard (1999) distingue seis momentos de estudo ou didáticos, que levam em conta fatores básicos da dimensão e do desenvolvimento da atividade matemática, bem como permitem a descrição da organização didática: (1) o primeiro encontro com a organização matemática; (2) a exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica; (3) a constituição do ambiente tecnológico-teórico; (4) o trabalho com a técnica; (5) a institucionalização; (6) a avaliação[4].

Equações do Segundo Grau a uma incógnita: do ponto de vista da matemática

Os textos encontrados referentes ao ensino da matemática no Brasil, por razões da própria história da matemática, foram também influenciados pela produção matemática Portuguesa (PONTE, 2004; ARAUJO, 2009, p. 58). Em artigo publicado por Ponte (2007) sobre alguns livros de matemática publicados entre o fim do século XIX e o início do século XXI, em que se analisa quatro compêndios do ensino da matemática, apresenta-se uma discussão sobre equações do segundo grau com ênfase na análise da dedução das fórmulas resolutivas e das tarefas propostas aos alunos, os exercícios.

Entendemos que os compêndios[5], conforme mencionado anteriormente, têm uma riqueza maior de informações conceituais, por se tratar de livros que sofreram o mínimo de transformações do saber (transposição didática), ou seja, os conceitos utilizados nesses livros estão próximo da sua gênese; diferentemente dos livros didáticos atuais.

Uma primeira discussão que chamamos atenção é apontada por Cunha (1914) no livro III, no segundo capítulo, intitulado "Equação do segundo grau a uma incógnita", onde trata no "Resolução de Equação". Esse autor define uma equação do segundo grau a uma incógnita (§ 246 - §247),

> "quando é 2 o mais elevado expoente da incógnita, não estando este em denominador, nem debaixo do sinal $\sqrt{}$ é manifesto que uma tal equação só pode conter três espécies de termos: termos em que entre a incógnita elevada ao quadrado, termos envolvam a incógnita no primeiro grau, e termos conhecidos. Representando a incógnita por x^2, fazendo passar para o primeiro termos todos os termos, e somando todos os que contém x^2, todos os que contém x, e todos os conhecidos (...) (CUNHA, 1914, p. 207).

Para Trajano (1943), equação do segundo grau é uma equação que tem na quantidade desconhecida no maior grau, elevada ao quadrado, isto é, com o expoente 2. As equações podem ser incompletas ou completas. Sendo as completas aquelas que, reduzidos os termos

[4] Essa avaliação não caracteriza-se como as que utilizamos de forma usual.

[5] A análise desses livros didáticos antigos (compêndios) de matemática permitem reconstruir as praxeologias pontuais (tipos de tarefa, técnicas, tecnologias e teorias) para o ensino das equações do segundo grau a uma incógnita. Por outro lado, essas informações vão contribuir na formulação dos critérios para a análise das organizações matemáticas de nossa Tese.

semelhantes, contêm termos do 2º grau, do 1ª grau e do grau zero (termo independente) em relação à incógnita.

A definição anterior é semelhante a outras definições que encontramos em Calado (1956), Menezes (1969) e Cunha (1914). As diferenças são maiores na opção dos conceitos envolvidos na resolução das equações completas e incompletas. Nesse contexto, Cunha (1914) alerta para a conveniência em deduzir a fórmula $ax^2 + bx + c = 0$ para que se permita encontrar as raízes da equação (§ 250).

Quadro 1: Dedução da Fórmula Geral da Equação do Segundo Grau

$ax^2 + bx + c = 0$
$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$
$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$
$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Fonte: (CUNHA, 1914)

Segundo Menezes (1969), a natureza dos sinais das raízes da equação do segundo grau, depende do radicando $b^2 - 4ac$, denominado discriminante da equação ou raízes da equação e designado por Δ; e os sinais das duas raízes dependem dos sinais dos coeficientes b e c. Quando $\Delta > 0$ (duas raízes reais e desiguais), quando $\Delta = 0$ (nulo, duas raízes e iguais) e quando $\Delta < 0$ (não temos raízes reais).

A equação do segundo grau a uma incógnita, pode apresentar-se como incompleta quando falta o termo do primeiro grau *bx*, ou quando falta o termo independente de *x*. Assim, supondo a falta do termo do primeiro grau, a equação passa a ter a forma $ax^2 + c = 0$ ($b = 0$). Por outro lado, se a equação não tem o termo conhecido *c*, então a forma será $ax^2 + bx = 0$ ($c = 0$). Segue as deduções segundo Cunha (1914):

Quadro 2: Dedução das Fórmulas Incompletas

$ax^2 + c = 0$	**$ax^2 + bx = 0$**
Passando (transpondo) *c* para segundo membro e dividindo por *a* resulta: $x^2 = -\frac{c}{a}$	Colocando x em evidencia, temos: $x(ax + b) = 0$
Extraindo a raiz quadrada: $x^2 = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$	Para o produto de dois fatores seja zero, é suficiente que um dos fatores seja nulo; logo a equação é satisfeito pelo fator de x que anulam o x, ou o fator ax + b. $x = 0$, $ax + b = 0$
As duas raízes são:	Resolvendo a equação $ax + b = 0$, temos:

+ $\sqrt{-\frac{c}{a}}$ e - $\sqrt{-\frac{c}{a}}$	Transpondo b para segundo membro ax = - b dividindo os membros por a: x = - $\frac{b}{a}$
Observação: Se a quantidade de - $\frac{c}{a}$ for positiva, o que depende dos sinais de *a* e *c*, as raízes serão reais; se a quantidade for negativa, sucede que *a* e *c* tem sinais iguais, as duas raízes serão imaginárias.	Logo, são raízes da equação: x = o ou x = - $\frac{b}{a}$

Fonte: (CUNHA, 1914)

Nesse mesmo contexto, são semelhantes em Calado (1956) os casos apresentados acima por Cunha (1914). Difere em alguns aspectos a sua forma de aplicar a dedução. Por outro lado, Calado (1956) apresenta o 3º caso, de forma mais estruturada, quando $ax^2 = 0$ ($b = 0$ e $c = 0$); Na resolução, divide-se ambos os seus membros pelo coeficiente *a*, obtendo-se desse modo a equação $x^2 = 0$; donde resulta $x = 0$. "*A equação proposta admite então uma raiz nula. Chama atenção que uma equação do 2º grau admite sempre duas raízes. Se, como no caso presente, se encontra uma raiz distinta, diz-se que a equação admite duas raízes iguais"* (CALADO, 1956).

Na resolução das equações completas, Trajano (1943) utiliza de forma detalhada o método de resolução "completar quadrados". Apresentamos um problema e recortes das explicações do autor, como forma de exemplo. "Quais as raízes da equação $x^2 + 8x = 33$?".

Quadro 3: Método de Resolução Completar Quadrados

Equação	$x^2 + 8x = 33$
Adiciona 16 no primeiro e segundo membro para não alterar a igualdade;	$x^2 + 8x + 16 = 33 + 16$ $x^2 + 8x + 16 = 49$
Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, achamos x + 4 e + 7 ou - 7;	$x + 4 = \pm 7$
O valor de x aparece com a forma de; Isto quer dizer que, se o número 7 for tomado, no sentido positivo, o valor de x será – 4 + 7 = 3; no sentido negativo será – 4 – 7 = - 11	$x = - 4 \pm 7$
Respostas da equação	x' = 3 e x'' = - 11

Fonte: Trajano (1943)

O autor indica ainda o caminho para testar as respostas, substituindo na equação o valor das raízes e verificando através da igualdade se o valor da raiz satisfaz a equação (TRAJANO, 1943). Por outro lado, vale destacar que, quando a equação não se encontra na forma mais simples, a canônica, são necessários procedimentos para reduzi-la. Estes passam por algumas operações semelhantes às equações do primeiro grau. É necessário, em muitas situações, tornar os termos fracionados da equação em valores inteiros, simplificar, transpor os termos, adicionar, reduzir ao menor número em que a equação deve ser expressa.

Para Calado (1956), "qualquer equação do 2º grau é redutível à forma canônica". Indica também que toda equação desta forma pode se transformar numa equação equivalente em que um dos seus membros é um quadrado perfeito e o outro é independente da incógnita. O autor apresenta três casos particulares de resolução:

1º caso: o 1º membro da equação é o desenvolvimento do quadrado num binômio e o 2º membro é zero, exemplo: $x^2 + 2x + 1 = 0$;

2º caso: o 1º membro da equação é o desenvolvimento do quadrado num binômio e o 2º é um número positivo, exemplo: $x^2 - 4x + 4 = 9$;

3º caso geral: se a equação proposta não se enquadra em nenhuma das formas particulares anteriormente consideradas, é possível reduzi-la a uma dessas formas.

No que diz respeito à resolução das equações incompletas, tanto na forma $ax^2 + c = 0$, onde $a \neq 0$ e $b = 0$, ou na forma $ax^2 + bx = 0$, onde $a \neq 0$ e $c = 0$, Trajano (1956) apresenta algumas resoluções. A primeira forma propõe o seguinte exemplo: "Qual é o valor de x na equação $5x^2 - 18 = 3x^2 + 14$?", observemos a resolução no quadro a seguir.

Quadro 4: Resolução Incompleta Trajano (1956)

Equação	$5x^2 - 18 = 3x^2 + 14$
Transpondo os termos	$5x^2 - 3x^2 = 14 + 18$
Reduzindo	$2x^2 = 32$
Dividindo os membros por dois	$x^2 = 16$
Extraindo as raízes	$X \quad \pm 4$

Fonte: Trajano (1956)

Segundo Trajano (1943), em toda equação incompleta na forma $ax^2 = bx$ existem duas raízes, sendo que uma delas é sempre zero; em segundo lugar que a outra raiz é igual a - b/a, isto é, ao coeficiente de x dividido pelo coeficiente de x^2.

Menezes (1969), no que diz respeito à resolução das equações incompletas, (1) $ax^2 + bx = 0$, (2) $ax^2 + c = 0$ e (3) $ax^2 = 0$, aponta algumas regras que auxiliam a resolução (§282, §283 e §284).

Quadro 5: Método de Resolução das Equações Incompletas

(1) § 282	**(2) § 283**	**(3) § 284**
Reduzir a equação a forma $ax^2 + bx = 0$, se necessário.	Reduzir a equação a forma $ax^2 + c = 0$, se necessário.	Reduzir a equação a forma $ax^2 = 0$, se necessário.
Fatorar o seu primeiro membro, isto é, decompor em um produto de dois fatores lineares ou do 1º grau, $x(ax + b) = 0$;	Transpor *c* para o segundo membro e dividir ambos os membros por *a*.	Dividir ambos os membros por *a*, que sempre deve ser diferente de zero.
Igualar a zero cada fator linear, isto é: $x = 0$ ou $ax + b = 0$	Extrair a raiz quadrada de ambos os membros da última igualdade, atribuindo-se no valor dessa raiz o duplo sinal $\pm$ e obtendo para x, dois valores	Fatorar o primeiro membro; igualar cada fator a zero, a fim de tornar evidentes as duas

Obter o valor de x de cada equação do 1º grau, para obter as raízes x_1 e x_2.	simétricos que são as raízes x_1 e x_2.	raízes da equação proposta do 2º grau.

Fonte: Menezes (1956)

A resolução da equação completa em Menezes (1956) solicita reduzir a equação à forma geral, se for necessário. Após a redução, apresenta de forma direta a fórmula resolutiva, indicando os valores dos coeficientes a, b, c, na fórmula para obter as duas raízes x_1 e x_2.

Procuramos apresentar, a partir do contexto histórico, uma discussão sobre as resoluções de equação do segundo grau a uma incógnita. Temos vários elementos relacionados à resolução das equações completas e incompletas. Na sequência, procuramos relacionar esses elementos em termos de organização matemática e didáticas.

A Pesquisa

Esta pesquisa analisou quatro livros didáticos antigos (compêndios), com intuito em reconstruir as organizações matemáticas pontuais (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias) para o ensino das equações do segundo grau a uma incógnita. Além desses documentos, acrescentamos as "contribuições da literatura" (ARAÚJO, 2009, BESSA DE MENEZES, 2010). Os livros[6] analisados foram: Calado (1956), Trajano (1943), Menezes (1969) e Cunha (1914). A análise dos livros e dos documentos, contempla a primeira etapa da nossa tese[7] de doutorado que se encontra em andamento.

Conforme mencionado, os compêndios foram escolhidos, por entendermos que esses saberes estão mais próximos da sua gênese, mostram a realidade matemática com uma riqueza maior de detalhes.

Com a reconstrução da organização matemática, foi possível propor os critérios de análise referentes às organizações matemáticas e, assim, analisar as aulas dos sujeitos envolvidos na tese. O objetivo contemplado na tese a partir dessa análise foi o de caracterizar as organizações matemáticas - os tipos de tarefas, as técnicas, as tecnologias e as teorias - no ensino de equações do segundo grau.

A seguir apresentamos as organizações matemáticas pontuais: tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

[6] Detalhes nos referencias bibliográficos.
[7] A Tese faz parte do programa Ensino das Ciências e Matemática da UFRPE, tem como título "O Contrato Didático e as Organizações Matemáticas e Didáticas: analisando suas relações no ensino da equação do segundo grau a uma incógnita". O prazo de defesa é segundo semestre de 2016.

Tipos de Tarefa

Os compêndios analisados possibilitaram a classificação/categorização das equações do segundo grau, tanto na forma completa, como nas incompletas. Em termos de resolução, as informações contidas nos livros apontam as praxeologias matemáticas pontuais para quatro tipos de tarefa:

- T_1: Resolver a equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$;
- T_2: Resolver a equação do tipo $ax^2 + c = 0$;
- T_3: Resolver a equação do tipo $ax^2 + bx = 0$;
- T_4: Resolver a equação do tipo $ax^2 = 0$.

Com essa análise, verificamos que nem sempre as equações do segundo grau aparecem na forma apresentada acima, podem surgir em diferentes formas. Entendemos que essas formas precedem esse tipo de tarefa, e as consideramos como subtipos[8] de tarefas. Entendemos que os subtipos de tarefas são formas que ainda não foram reduzidas à forma canônica apresentada anteriormente.

O termo subtipos de tarefas[9] é apresentado por Chevallard (1999) muito superficialmente e em apenas dois artigos. Porém, nas pesquisas de Araújo (2009) e Bessa de Menezes (2010), essa categoria é utilizada com frequência. No entanto, divergimos com os pesquisadores, em especial com Bessa de Menezes (2010), no momento de identificar essa categoria, como apresentamos no parágrafo anterior. Seguimos as orientações do dicionário da língua portuguesa Priberam[10], em que entende "*sub* como prefixo em latim significa "por baixo". Sub pode ser entendido também como um elemento designativo de inferioridade, substituição, aproximação".

Para Cunha (1914) e Menezes (1969) existem situações em que os elementos da equação devem ser desenvolvidos, sofrer transposições, serem reduzidas até chegar a uma forma limite da equação, a forma canônica, algo igualmente já discutido por Chevallard (2007) nas organizações matemáticas e organizações didáticas.

---

[8] *Sub* como prefixo em latim significa "por baixo". *Sub* pode ser entendido também como um elemento designativo de inferioridade, substituição, aproximação. Informação contida, in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa [em linha], 2008-2013, http://www.priberam.pt/dlpo/sub [consultado em 30-06-2015].

[9] Não encontramos informações suficientes por parte dos artigos de Chevallard que permitissem construir um entendimento sobre a categoria subtipos de tarefas. Dessa forma, analisamos os trabalhos de Araújo (2009) e Bessa de Menezes (2010) para auxiliar a nossa tomada de decisão sobre o conceito de subtipo de tarefas.

[10] http://www.priberam.pt/dlpo/sub [consultado em 30-06-2015].

Podemos dizer, então, que os subtipos de tarefas T_{11}, T_{12} e T_{13}, apresentados abaixo, ao serem desenvolvidas se transformarão em T_1 ($ax^2 + bx + c = 0$). Da mesma forma, T_{21} em T_2 ($ax^2 + c = 0$), T_{31} em T_3 ($ax^2 + bx = 0$) e assim por diante.

- T_{11}: Resolver a equação do tipo $ax^2 + bx + c = d$;
- T_{12}: Resolver a equação do tipo $(ax + c)^2 = 0$;
- T_{13}: Resolver a equação do tipo $(x + a).(x + b) = 0$;
- T_{21}: Resolver a equação do tipo $(x + a).(x + b) = cx + d$;
- T_{31}: Resolver a equação do tipo $(x + a).(x + b) = c$.

As Técnicas

Da mesma forma que apontamos as tarefas a partir dos estudos, procuramos apresentar as técnicas relativas aos tipos de tarefas que foram selecionados:

Quadro 6: Técnica Principal e Auxiliar dos Tipos de Tarefa

T_1: $ax^2 + bx + c = 0$	
τ Principal	• τ_{CQ}: Completar quadrados; • τ_{FB}: Fórmula de Bháskara.
τ Auxiliar	• τ_{DRE}: Desenvolver ou reduzir expressões; • τ_{TTC}: Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.
T_2: $ax^2 + c = 0$	
τ Principal	• τ_{TTC}: Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.
τ Auxiliar	• τ_{DRE}: Desenvolver ou reduzir expressões.
T_3: $ax^2 + bx = 0$	
τ Principal	• τ_{FE}: Fatorar expressões, colocando em evidencia o fator comum.
τ Auxiliar	• τ_{ITZ}: Igualando os termos do produto a zero; • τ_{TTC}: Transpondo termos ou coeficientes, invertendo operações.
T_4: $ax^2 = 0$	
τ Principal	• τ_{DRE}: Desenvolver ou reduzir expressões.
τ Auxiliar	• τ_{FE}: Fatorar expressões, colocando em evidencia o fator comum.

Fonte: Elaborado pelo autor da Tese

Dependendo da forma como o subtipo de tarefa relacionada à equação do segundo grau se apresenta, surge a necessidade de mobilizar outras técnicas, que consideramos como técnica auxiliar, ou seja, as técnicas auxiliares são aquelas desenvolvidas pelo professor para chegar à forma canônica da equação do segundo grau.

As Tecnologias

Utilizando a mesma dinâmica dos itens anteriores, apontamos as tecnologias matemáticas que justificam as técnicas apresentadas nos dois últimos quadros. O objeto dessa informação é produzir elementos teóricos que justifiquem a resolução das equações do segundo grau. Observemos a tabela:

Quadro 7: Tecnologias dos tipos de tarefas

Equação na forma completa $ax^2 + bx + c = 0$:
• θ_{POI}: Propriedades das operações inversas em IR (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos; • θ_{PR}: Propriedade da radiciação.
Equação na forma incompleta $ax^2 + c = 0$:
• θ_{PR}: Propriedade da radiciação; • θ_{POI}: Propriedades das operações inversas em IR (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos.
Equação incompleta na forma $ax^2 + bx = 0$:
• θ_{PDM}: Propriedade distributiva da multiplicação; • θ_{PPN}: Propriedade do produto nulo; • θ_{POI}: Propriedades das operações inversas em IR (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos.
Equação incompleta na forma $ax^2 = 0$:
• θ_{PDM}: Propriedade distributiva da multiplicação; • θ_{PPN}: Propriedade do produto nulo.

Fonte: Elaborado pelo autor da Tese

Vale destacar que as tecnologias apresentadas anteriormente, no que concerne às equações do segundo grau, consistem de propriedades (ou axiomas) apoiados nas equações algébricas, que, por sua vez, pertencem à teoria dos *anéis dos polinômios* (Θ_{AP}). Por outro lado, as propriedades das operações inversas e as propriedades gerais das igualdades pertencem ao corpo dos reais (Θ_{CR}).

Chevallard (2007) aponta ainda que devemos entender, em relação às Teorias (Θ), que sua função é justificar e esclarecer a tecnologia e pode ser assumida por uma instituição ou uma pessoa. No entanto, uma grande quantidade de professores, ao assumir essa atribuição, parece estar seguindo pelo caminho da valorização da abstração, tornando a teoria quase imperceptível aos alunos.

Algumas Considerações

Esta pesquisa procurou reconstruir as organizações matemáticas pontuais (tipos de tarefa, técnicas, tecnologias e teorias) para o ensino das equações do segundo grau. Para ser possível a reconstrução, selecionamos quatro livros antigos (compêndios) e informações da literatura, bem como, utilizamos a teoria antropológica do didático como campo teórico e metodológico.

Destacamos que a reconstrução das OM representa a primeira etapa de análise da nossa tese de doutorado que se encontra em andamento. Essas ações, procuram contemplar um dos objetivos, caracterizar as organizações matemáticas – os tipos de tarefa, as técnicas, as tecnológicas e as teorias – no ensino de equação do segundo grau em uma turma do 9º ano do ensino fundamental.

Os resultados obtidos, apontam para quatro tipos de tarefa (T_1: $ax^2 + bx + c = 0$; T_2: $ax^2 + c = 0$; T_3: $ax^2 + bx = 0$ e T_4: $ax^2 = 0$), com respectivas técnicas: τ: completar quadrados e fórmula de Bhaskara, τ: transpondo termos ou coeficientes, invertendo as operações e desenvolver ou reduzir operações, τ: fatorar expressões colocando em evidencia o fator comum, igualando os termos do produto a zero e desenvolver ou reduzir operações, τ: desenvolver ou reduzir operações e fatorar expressões colocando em evidencia o fator comum.

No que diz respeito às tecnologias, temos para T_1 a tecnologia propriedades das operações inversas em IR (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos e propriedade da radiciação, para T_2 a tecnologia propriedade da radiciação e propriedades das operações inversas em IR (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos, para T_3 a tecnologia propriedade distributiva da multiplicação, propriedade do produto nulo e propriedades das operações inversas em IR (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos e para T_4 a tecnologia propriedade distributiva da multiplicação e propriedade do produto nulo.

Já a Teoria tem a função de justificar e esclarecer a tecnologia (CHEVALLARD, 1996). Logo, a análise aponta que as propriedades (ou axiomas) se apoiam nas equações algébricas, que, por sua vez, pertencem à teoria dos *anéis dos polinômios*. Por outro lado, as propriedades das operações inversas e as propriedades gerais das igualdades pertencem ao corpo dos reais.

Referências Bibliográficas

ALMEIDA, J. R.; CÂMARA, M.. **Pensamento algébrico e formação inicial de professores.** Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 5, p. 1-17, 2014.

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França:** estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. 2009. 290f. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2009.

ALMEIDA, F. E. L.. **O Contrato Didático na Passagem da Linguagem Natural para a Linguagem Algébrica e na Resolução da Equação na 7º Série do Ensino Fundamental.** Dissertação de Mestrado, UFRPE, 2009.

BITTAR, M.. **Uma proposta para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica de professores de Matemática.** EM TEIA: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 6, p. 1-20, 2015.

BELLEMAIN, P. M. B.. **O que as orientações curriculares preconizam? O que os professores esperam? O que os alunos fazem?** Uma análise sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático. In: IV SIPEM - Seminário INternacional de Pesquisa em Eduação Matemática, 2009, Brasilia. Anais - UCB - 2009, 2009.

BRITO MENEZES, A.P.A.. **Contrato Didático e Transposição Didática:** Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação á Álgebra na 6º Série do Ensino Fundamental. Tese de Doutorado, UFPE, 2006.

BROUSSEAU, G.. **Fundamentos e Métodos da Didática da Matemática.** In: Didáctica das Matemáticas /Brun, J... [et al]; Direção: Jean Brun. Trad: Maria José Figueredo, Lisboa: Instituto Piaget, 1996.

BESSA DE MENEZES, M.. **Praxeologia do Professor e do Aluno: uma análise das diferenças no ensino de equações do segundo grau.** Tese de Doutorado, UFPE, 2010.

BOSCH, M.; GASCÓN, J.. **25 años de transposición didáctica.** In: Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) / L. Ruiz-Higueras... et. al.; Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.

CAMARA DOS SANTOS, M.. A pesquisa em educação matemática no Brasil: perspectivas e possibilidades. In: ALMEIDA, J. R. et. al. 1ed.São Carlos, SP: Pedro & João Editores, 2011, v. 1, p. 217-224.

CHEVALLARD, Y.. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico.** Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol 19, nº 2, 1999.

___________. **Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques.** In : Maury, S. & Caillot, M. (éds), Rapport au savoir et didactiques, Éditions Fabert, Paris, 2003, p. 81-104.

___________. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique.** In: Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) / L. Ruiz-Higueras... et. al.; Jaén, España: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.

CALADO, J. J. G.. **Compêndio de Álgebra.** 2ª Ed. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco, 1956.

CUNHA, A. J. da. **Elementos da Álgebra.** 12ª Ed. Lisboa: Livraria Antônio Maria Pereira, 1914.

MENEZES, D. L. de. **Abecedário da Álgebra.** 2ª Ed. São Paulo: Livraria Nobel, 1969.

PONTE, J. P. et. al.. **Equações do 2º grau do fim do século XIX ao início do século XXI:** uma análise de sete manuais. Revista: Quadrante, vol. XXI, nº 1, 2007.

TRAJANO, A.. **Álgebra Elementar.** 19ª Ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1943.