THATIANA SAKATE ABE

O ENSINO DE PROBABILIDADES POR MEIO DAS VISÕES CLÁSSICA E FREQUENTISTA

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Campo Grande – MS
2011

THATIANA SAKATE ABE

O ENSINO DE PROBABILIDADES POR MEIO DAS VISÕES CLÁSSICA E FREQUENTISTA

Dissertação apresentada como exigência parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, à Comissão Julgadora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática, sob a orientação da Professora Doutora Marilena Bittar.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Campo Grande/MS
2011

BANCA EXAMINADORA

Prof[a]. Dr[a]. Marilena Bittar, UFMS

Prof[a]. Dr[a]. Cileda de Queiroz e Silva Coutinho, PUC/SP

Prof[a]. Dr[a]. Patrícia Sandalo Pereira, UFMS

Campo Grande, 04 de Abril de 2011

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho
ao meu pai, Muneo Abe
por todo amor e dedicação
que me ajudou a enfrentar
mais este desafio.

AGRADECIMENTOS

Nesse momento tão especial pra mim, venho agradecer as pessoas que me ajudaram e contribuíram para meu crescimento pessoal e profissional nesta longa caminhada de mestrado, pois não foi sozinha que consegui chegar até aqui.

Primeiramente agradeço a Deus, por ter me fortalecido em todas às vezes que desanimei.

Ao meu pai. Tive a sorte de ter um pai que sempre me apoiou e esteve ao meu lado. A ele meu muito obrigada, pelo seu incansável incentivo aos meus estudos e, que nunca me deixou desistir possibilitando que eu conquistasse mais essa vitória.

Ao meu marido. Agradeço pela compreensão e, principalmente pela paciência, colaborando em tudo o que foi possível.

Ao meu filho, que é a razão da minha vida e é por ele que eu luto todos os dias.

À minha família, em especial, tia Guia, tia Maria, Sandra (sogra), Britto (sogro) e meus primos. Agradeço pelo carinho, apoio e por sempre torcerem por mim.

Ao professor Luiz Carlos Pais (tio Luiz). Agradeço por toda auxílio, carinho e incentivo oferecidos para que eu principiasse essa jornada e também pelo exemplo de professor e pesquisador que deve ser seguido.

À Rosana de Sousa Oliveira (tia Zana). Fico grata por se dispor com carinho de seu tempo para realizar a revisão de minha dissertação.

À professora Marilena Bittar. Principal responsável por este momento, auxiliando com todo o seu conhecimento e que é um exemplo de pesquisadora e educadora matemática. Fico grata pela dedicação, parceria e orientação durante esta pesquisa. Quero dizer que aprendi muito em sua companhia.

À professora Cileda de Queiroz e Silva Coutinho. Fico grata pelas valiosas contribuições dadas no momento da qualificação e que foram essenciais para o aprimoramento desta pesquisa. Reitero que continuo sendo sua fã.

À professora Patrícia Sandalo Pereira. Agradeço pelas contribuições que deu no momento da qualificação e por todo apoio.

Aos meus colegas de Mestrado. Fico grata pelo apoio, pelas discussões e aprendizado durante o curso. Em especial, agradeço a Edilene, Adriana, Cida e Kátia pelo companheirismo e companhia.

Aos professores Lucélia, Anderson, Lindomar e aos discentes que participaram e tornaram possível a conclusão desta pesquisa. Fico grata pelo interesse, atenção e disponibilização de tempo.

Ao Fernando e a Day. Agradeço pelo alto astral que sempre me ajudava a vencer o cansaço e por sempre auxiliarem no que fosse preciso.

Aos professores do PPGEduMat. Fico grata pela dedicação e as contribuições de todos para a realização desta pesquisa e minha formação como pesquisadora em Educação Matemática.

Por fim, agradeço à FUNDECT pela provisão da bolsa de mestrado, possibilitando dedicação exclusiva à minha pesquisa e formação como pesquisadora em Educação Matemática.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo principal investigar a aprendizagem de probabilidade por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental a partir de situações que envolvessem duas visões diferentes de probabilidade, a clássica e frequentista. Além disso, pretendeu-se evidenciar as vantagens de se trabalhar com a dualidade dessas duas abordagens na introdução desse conceito. Para tanto, utilizamos como referencial teórico alguns preceitos da Teoria das Situações Didáticas, proposta por Brousseau, que foi de fundamental importância para o encaminhamento desta pesquisa auxiliando na elaboração da sequência didática, na forma como procedemos a apresentação das situações aos alunos. Tentamos levá-los a vivenciar dialéticas adidáticas de ação, formulação e validação, visando à aprendizagem da Probabilidade por meio das abordagens clássica e frequentista. Como metodologia de pesquisa nos inspiramos na Engenharia Didática, conforme sugerida por Artigue, que nos auxiliou na elaboração, organização e aplicação de nossa sequência didática, além de tornar possível realizar as análises e validações propostas nos objetivos, uma vez que essa visa pesquisas que estudam os processos de aprendizagem de um dado objeto matemático, favorecendo uma ligação entre a pesquisa e a ação pedagógica. Nossos sujeitos de pesquisa foram seis alunos voluntários do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola estadual de Campo Grande/MS, que participaram das sessões, que ocorreram durante o horário normal de aulas sob autorização do professor e da direção da escola. Observamos que a realização dos experimentos aleatórios em conjunto com o recurso informático do simulador da roleta, favoreceu a aquisição e compreensão do cálculo de probabilidades por meio das visões clássica e frequentista pelos alunos, bem como a articulação entre ambas. O simulador da roleta propiciou uma observação concreta do que acontece quando realizamos um experimento aleatório uma quantidade pequena e um número significativamente grande de vezes, que se tornaria mais difícil sem este recurso, pois a realização de um mesmo experimento por muitas vezes poderia se tornar penoso e tomaria muito tempo.

Palavras-chave: Probabilidade Clássica, Probabilidade Frequentista, Ensino Fundamental.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE SIGLAS

SIGLAS	DESCRIÇÃO
ABE	Associação Brasileira de Estatística
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
FCC	Fundação Carlos Chagas
FIU	Faculdades Integradas Urubupungá
NCTM	National Council of Theachers of Mathematics
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
PPGEduMat	Programa de Pós-graduação em Educação Matemática
SARESP	Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
SBEM	Sociedade Brasileira de Educação Matemática
SIPEM	Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UNESP	Universidade Estadual Paulista
UNIJALES	Centro Universitário de Jales

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A presente dissertação relata o desenvolvimento de uma pesquisa que teve como objetivo principal investigar a aprendizagem de probabilidade por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental a partir de situações que envolvessem as visões clássica e frequentista. Além disso, buscamos evidenciar as vantagens de se trabalhar com a dualidade dessas duas abordagens na introdução desse conceito, uma vez que pudemos observar nas pesquisas, que a maioria dos professores não tem contemplado em suas aulas noções de probabilidade principalmente no Ensino Fundamental e ainda consideram um conteúdo muito difícil até mesmo para os alunos do Ensino Médio.

Para tanto, organizamos esta dissertação em quatro capítulos e finalizamos com as considerações finais e perspectivas. Na sequência descreveremos sucintamente cada um deles.

No primeiro capítulo realizamos uma pequena narrativa de nossa trajetória como pesquisadores em Educação Matemática destacando acontecimentos relevantes que culminaram com o ingresso no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Neste capítulo ainda, descrevemos alguns fatos, idéias iniciais e pesquisas que foram conduzindo à problematização desta pesquisa.

No segundo capítulo, foram abordados diversos aspectos da Probabilidade que compuseram as análises preliminares desta pesquisa, que posteriormente auxiliaram na elaboração da sequência didática. Para tanto foi realizado um estudo de conceitos matemáticos relevantes e uma descrição das diferentes visões de probabilidade: clássica, frequentista, subjetiva e axiomática, além da probabilidade geométrica que é um exemplo de contexto. Ainda neste capítulo foi realizado um sucinto relato de como se procedeu a inserção da Estocástica no ensino brasileiro, processo que teve seu início em um movimento internacional que começou a reconhecer a importância do desenvolvimento do raciocínio probabilístico e do uso da estatística, bem como sua posição atual no Ensino Básico. Na sequência, também fomos observar nas pesquisas que envolvem o ensino e aprendizagem de probabilidade, o que elas sugerem, além de descrever obstáculos e dificuldades que poderíamos encontrar no processo de ensino e aprendizagem de probabilidade.

No terceiro capítulo são apresentados os objetivos (principal e específicos), além das escolhas teóricas e metodológicas. Nele trazemos um pouco do aporte teórico que embasa o desenvolvimento desta pesquisa, que é a Teoria das Situações Didáticas proposta por Guy Brosseau, bem como uma breve descrição da metodologia no qual nos inspiramos, a Engenharia Didática.

O quarto capítulo foi destinado a sequência didática, composta por seis sessões e cada uma delas acompanha sua respectiva análise *a priori* e análises *a priori* locais, que são referentes a cada uma das atividades da sessão para melhor observação, descrição da experimentação e análise *a posteriori*. Neste capítulo descrevemos também as variáveis didáticas e como trabalhamos com elas durante a aplicação da sequência.

Para finalização deste texto, apresentamos as considerações finais e perspectivas. Nela procuramos analisar se houve a validação da sequência didática de nossa pesquisa e se nossos objetivos foram atingidos. Além disso, apontamos algumas direções para as quais novas pesquisas neste tema podem seguir, bem como nossas perspectivas para novas pesquisas.

CAPÍTULO 1

1. PROBLEMATIZAÇÃO DA PESQUISA

Apresentamos neste capítulo um breve relato de minha trajetória como pesquisadora, que principia na iniciação científica e vai até o ingresso no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Em seguida, descreveremos alguns trabalhos e ideias que nos levaram a problematização inicial de nossa pesquisa.

1.1. NOSSO INÍCIO COMO PESQUISADORES

Nossos primeiros passos com o trabalho e pesquisa na área da Educação Matemática tiveram início há cerca de cinco anos, quando, ainda na graduação, fomos convidados a participar do projeto de iniciação científica intitulado *Situações-Problema para o encaminhamento das aulas de matemática no Ensino Infantil e Fundamental (1ª à 4ª Séries)*, sob orientação da Professora Mestra Flavia Sueli Fabiani Marcatto.

A proposta inicial do projeto era desenvolver atividades de matemática direcionadas para a sala de aula dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Para tanto, foi realizado inicialmente, um levantamento com professores das redes municipal e estadual, da cidade de Jales/SP, tendo como objetivos: detectar as dificuldades que os mesmos encontravam ao trabalhar com conteúdos de matemática nas séries iniciais; observar se o material utilizado por eles estaria de acordo com as suas necessidades; e organizar situações-problema que pudessem auxiliá-los em seu trabalho. Além disso, realizamos, em paralelo, um levantamento bibliográfico em livros, dissertações, teses, artigos e sites com o intuito de selecionar material suficiente que pudesse nos auxiliar no cumprimento de nossos objetivos.

O levantamento das dificuldades dos professores foi feito por meio de entrevistas do tipo semi-estruturadas, nas quais combinamos perguntas abertas e fechadas que nos guiariam. Além disso, durante a entrevista procuramos nos mostrar atenciosos com os entrevistados, agindo como se fosse uma conversa informal, para que os mesmos falassem sem constrangimentos. Tentamos, também, não interferir em suas falas para que suas respostas não sofressem influências ou que não se quebrasse alguma sequência de pensamento. Desse modo os professores entrevistados tiveram a possibilidade de discorrer sobre o tema proposto e expor suas dificuldades.

A ideia de trabalhar com a metodologia de jogos e Resolução de Problemas surgiu na disciplina *Pesquisa e Práticas Educacionais III*, quando a professora Flávia ministrava atividades com dados para o ensino de matemática. Naquele momento, nos veio à memória um jogo que brincávamos na infância em Campo Grande/MS, o Bozó[1]. Apresentei-o a nossa orientadora, que após tomar conhecimento das regras e da dinâmica do Bozó, percebeu ser um jogo rico em conceitos matemáticos e que poderia ser muito útil para o ensino.

Encontramos, então, nossa ferramenta de ensino e começamos a pesquisar sobre a metodologia de jogos e Resolução de Problemas e a respeito do jogo Bozó, buscando sua origem e toda matemática que poderíamos extrair dele para chegarmos a uma aplicação adequada ao ensino.

O jogo Bozó é muito conhecido nos estados do Mato Grosso e Mato Grosso do Sul, onde é jogado por crianças e adultos de todas as idades, inclusive pelos índios da região como foi registrado pelos pesquisadores Maurício Lima e Breno Nogueira em seu projeto *Jogos Indígenas do Brasil*[2]. Porém em outros estados brasileiros pouca gente tem conhecimento deste jogo.

A verdadeira origem do jogo Bozó é incerta, mas devido às semelhanças com os jogos General, Hooligan, Iate e o Yahtzee (atualmente comercializado pela Hasbro), acreditamos também tratar-se de uma das variantes de um jogo francês muito antigo chamado Yam que foi difundido no Brasil pela Grow nos anos 1970.

Observamos que o Bozó também apresenta algumas semelhanças com o jogo de Poker, pois o resultado dos dados imita algumas de suas combinações, como o *full hand*, a seguida e a quadrada.

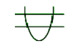
Podemos ainda deduzir que as regras do jogo Bozó podem ter sido originadas a partir de alterações do jogo General, pelas várias semelhanças encontradas entre as regras de ambos, inclusive uma das casas do Bozó, a de maior pontuação, leva o nome de General.

---

[1] A regras do jogo Bozó encontram-se no anexo A.

[2] O projeto, batizado de Jogos Indígenas do Brasil, teve como objetivo resgatar uma parte da cultura dos índios pouco conhecida pelo público, além de despertar o interesse da comunidade acadêmica para o tema. Oito aldeias em cinco estados brasileiros, de outubro de 2003 a janeiro de 2004, foram visitadas pela equipe de pesquisa de campo, composta por Maurício Lima (coordenador do projeto) e Breno Nogueira (produtor executivo), além de uma equipe profissional de cinegrafia. As aldeias estudadas foram as dos índios Guarani, na ilha Cardoso (litoral sul de São Paulo); Camaiurás, Bororos e Parecis, no Mato Grosso; Canelas, no Maranhão; Ticunas e Maiorunas, no Amazonas e os Manchineris, no Acre.

A partir de uma entrevista[3] realizada por Maísa Del Pino Coelho com indígenas de uma tribo Terena do estado de Mato Grosso do Sul, onde a prática do jogo Bozó é frequente, verificamos que esse jogo tem feito parte dessa cultura por várias gerações, porém não há registros que confirmem sua origem, entretanto citamos algumas curiosidades.

Para os índios Terena, o símbolo , representa a Deusa da Lua, o símbolo representa o guerreiro e o tabuleiro do Bozó parece ser a junção entre eles  , assim, segundo o índio Zanone, pode significar a Deusa da Lua protegendo o guerreiro.

De acordo com o índio mais velho da tribo inicialmente jogava-se com copos feitos de chifre de boi e foi o branco que depois trouxe o copo de couro costurado, que é o mais utilizado atualmente. Os indígenas chamavam o jogo Bozó de *jogo de copo* e o tabuleiro e anotações eram feitos no chão com um galho ou pedaço de pau. Isso nos leva a duas hipóteses: os índios tomaram conhecimento do jogo Bozó com as regras e tabuleiro da forma que conhecemos atualmente ou aprenderam com o "branco" a versão francesa Yam ou até mesmo uma de suas variações como o General e modificaram para essa versão.

O termo Bozó, de acordo com diversos dicionários brasileiros, significa *Jogo de Dados* e na definição do Dicionário do Aurélio *online*[4] consta ser um "Jogo de dados, em que as apostas são feitas após o lançamento dos cubos, que ficam encobertos sob um copo de couro, folha-de-flandres ou outro material".

O Bozó é um jogo que oferece uma combinação entre sorte e estratégia e, apesar da complexidade de suas regras, seu mecanismo simples e direto, faz com que o aluno-jogador reflita diante das possibilidades de ocorrência das faces dos dados de forma que consiga desenvolver estratégias, planejar seus lançamentos e saiba escolher a melhor forma de pontuação para aumentar suas chances de vencer, desenvolvendo certa agilidade mental e raciocínio lógico.

Do ponto de vista pedagógico, o jogo Bozó se apresenta como um rico instrumento facilitador na aprendizagem de matemática, pois o professor pode desenvolver diversas atividades para anos escolares distintos, dependendo do objetivo a ser atingido e dos conceitos a serem trabalhados, pois proporciona a relação do aluno com elementos de seu contexto cultural, possibilitando a efetiva construção de seu conhecimento, pois

[3] (ZANONE, 2007)
[4] <http://www.dicionariodoaurelio.com/Bozo>. Acesso em 11 jan. 2011.

> [...] no brincar, o sujeito é ser sociocultural que utiliza estratégias matemáticas pessoais, espontâneas, podendo utilizar e desenvolver a sua Matemática informal, oral, oprimida, não estandardizada, escondida, ou seja, sua Matemática Popular. Porém, acrescenta o autor, quando o brincar está ausente do espaço escolar, a criança transforma-se em "aluno", um ser que age de acordo com as expectativas do professor – acabando, assim, com o *ser matemático cultural* do aluno, transformando-o em mero reprodutor de fórmulas. (GONÇALVES, H. J. L., 2005. p. 83)

O jogo, se trabalhado adequadamente pode vir a despertar o interesse em aprender e diminuir bloqueios apresentados por alguns alunos que muitas vezes acreditam serem incapazes de aprender matemática, pois no ambiente criado pelo jogo nem sempre o melhor aluno é o que descobre primeiro a estratégia vencedora ou ganha sempre (BORIN, 2004).

Durante o trabalho com jogos alguns alunos podem desenvolver ou descobrir habilidades matemáticas desconhecidas por eles, o que contribuiu para verem a matemática de uma forma mais divertida e a possam, a partir daí, a compreendê-la e a se interessar por ela. Além disso, dependendo da gestão do professor, os erros podem ser encarados com mais naturalidade e menos pressão. (BORIN, 2004).

> Dentro da situação do jogo, onde é impossível uma atitude passiva e a motivação é grande, notamos que, ao mesmo tempo em que estes alunos falam matemática, apresentam também um melhor desempenho e atitudes mais positivas frente a seus processos de aprendizagem. (BORIN, 2004, p.09)

No ano subsequente, em 2007, almejávamos fazer um trabalho envolvendo Probabilidade e Estatística com o jogo Bozó. Por motivos diversos, fomos impelidos a deixar de lado nossa pesquisa, porém, continuamos desenvolver outros trabalhos, o que acarretou no desenvolvimento do I Workshop de Educação Matemática (I WODEM) do Centro Universitário de Jales (UNIJALES) como o tema *Jogos, Brinquedos, Brincadeiras e a Educação*, integrando o curso de Matemática com o de Pedagogia. O evento contou com a presença dos graduandos de ambos os cursos, além de alunos e professores das redes estadual e particular da região de Jales, contabilizando a participação de 217 pessoas inscritas, somadas a alunos de escolas públicas e particulares.

No I WODEM, todos os participantes tiveram a oportunidade de manipular e jogar os mais de 60 jogos apresentados na exposição, além de participar das comunicações orais, onde alguns professores e universitários tiveram a oportunidade de apresentar seus trabalhos e relatar suas experiências com jogos.

Posteriormente, fomos convidados a levar o I WODEM a universidades e escolas da região, como a UNESP de Ilha Solteira e nas Faculdades Integradas Urubupungá (FIU) em Pereira Barreto. Esses trabalhos resultaram para nós em profícuas experiências, aumentando ainda mais nossa convicção de que poderíamos contribuir de alguma forma com a Educação Matemática e assim continuarmos realizando estudos nessa área.

1.2. PROBLEMATIZAÇÃO DA PESQUISA

Como mencionamos anteriormente, nossas intenções de trabalhar com a Probabilidade foram adiadas e logo após o término da graduação ingressamos no curso de Pós-Graduação *lato sensu* da Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Ilha Solteira, intitulado *Fundamentando a prática de ensino do professor de Matemática*, no qual tivemos a oportunidade de aprimorar ainda mais nossos conhecimentos.

Nesse curso, em uma das disciplinas que envolvia Análise Combinatória e Probabilidade, pudemos notar que estes conteúdos, incluindo a Estatística, causavam muito desconforto entre os quase 50 professores cursistas e a maioria declarou desconhecer totalmente estes conteúdos por não terem aprendido em sua vida escolar e nem em sua formação, além do fato de este conteúdo estar presente há pouco tempo no currículo escolar somado ao pouco tempo que eles têm para planejar suas aulas e aprimorar seus estudos, mesmo considerando-os importantes acabavam por deixá-los de lado e alguns confessaram que abordavam alguma coisa de Estatística, mas consideravam esses conteúdos muito difíceis até para o Ensino Médio.

Este fato aguçou ainda mais nossas intenções de fazer um trabalho que envolvesse o ensino e aprendizagem de Probabilidade e não a formação de professores, pois se os professores consideravam a Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória conteúdos muito difíceis para os alunos, acreditamos que poderíamos contribuir mais se pudermos provar ser possível realizar um ensino satisfatório que envolvesse pelo um desses temas, no caso a Probabilidade. Dessa forma, esta foi nossa primeira escolha para a formulação da intenção de pesquisa, um dos requisitos obrigatórios para ingresso no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática (PPGEduMat), Curso de Mestrado da UFMS.

Ao ingressarmos no Mestrado fomos orientados por nossa orientadora a procurar e proceder à leitura de artigos, livros, dissertações e teses referentes à Probabilidade e à Didática da Matemática, para que pudéssemos expandir nossos conhecimentos sobre esses temas, além de viabilizar a escolha da questão de pesquisa, a delimitação dos objetivos, bem como os referenciais teóricos e metodológicos que melhor se adequariam à pesquisa.

Dessa forma, deparamo-nos com trabalhos que foram nos conduzindo aos nossos questionamentos e escolhas no que se refere à nossa pesquisa, como a dissertação de Kobashigawa (2006) intitulada: *Parâmetros curriculares nacionais de matemática para o Ensino Fundamental: das prescrições ao currículo praticado pelos professores*, na qual o objetivo principal foi analisar de que forma os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental da área de Matemática têm sido apropriados, interpretados e aplicados pelos professores em sua docência.

A primeira parte da coleta de dados dessa pesquisa contou com a participação de 67 professores de Matemática da rede estadual, que responderam a um questionário, considerando os PCN de 1998, no qual, as questões foram divididas em cinco blocos.

Referente à nossa pesquisa analisamos a questão 14 do último bloco: “Os PCN falam sobre o tema Tratamento da Informação. Você tem conseguido trabalhar com Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória no Ensino Fundamental?” (KOBASHIGAWA, 2006, p.56), que tinha o objetivo de verificar como os professores trabalhavam com o tema Tratamento da Informação, sob o enfoque sugerido pelos PCN e os seguintes resultados foram obtidos:

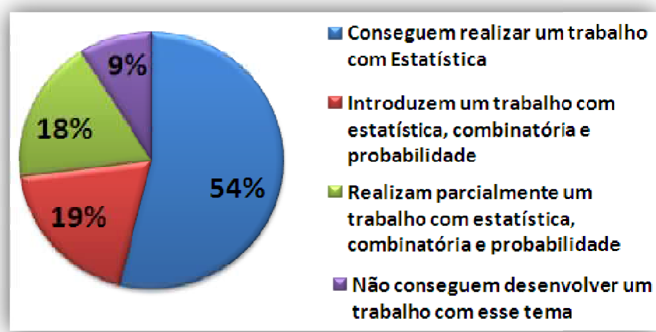


Gráfico 1: Resultados de Kobashigawa (2006) para a questão 14.

Diante da constatação de que a maioria dos professores pesquisados (91%), introduz ou realiza um trabalho efetivo ou parcial com a Estatística contra apenas 37% que introduz ou realiza um trabalho parcial com Probabilidade, podemos inferir que o ensino de Estatística tem tido mais destaque que o de Probabilidade no Ensino Fundamental, o que corrobora com a pesquisa de Santos (2005), na qual aponta que apenas 24% dos professores participantes de sua pesquisa trabalham com Probabilidade por considerá-la muito difícil para os estudantes deste ciclo, além de afirmarem que não é abordada nos livros didáticos e não terem domínio deste conteúdo, uma vez que, não aprenderam na graduação e consequentemente no ensino básico.

> Evidentemente, sem conhecer com bastante profundidade um dado assunto matemático, fica muito difícil pensar em formas de ensiná-lo. Para esses professores, ensinar combinatória e probabilidade, por exemplo, significa apresentar um conjunto de fórmulas de permutações, arranjos, combinações e mostrar aos alunos, em situações-problema, quais devem ser utilizadas para que eles reproduzam o mesmo procedimento em situações similares. Como sua concepção de ensino prioriza o uso de definições formais, é provável que este seja um forte motivo para não aceitarem o tratamento desses conteúdos no Ensino Fundamental. (SANTOS, 2005, p.99)

Estas considerações vêm a confirmar nossas percepções obtidas na experiência relatada anteriormente no curso da UNESP e também influenciaram nossa escolha de realizar um trabalho com alunos do Ensino Fundamental, mais especificamente os do 9º ano, pois é neste ano que se fecha este ciclo do Ensino Básico.

Destacamos também a dissertação de Coutinho (1994), com o título: *Introdução ao conceito de probabilidade por uma visão frequentista – Estudo epistemológico e didático,* que teve como tema o ensino e a aprendizagem da Probabilidade de alunos com idades entre 16 e 18 anos. Salientamos que este é o primeiro trabalho científico da área publicado no Brasil.

Esta pesquisa nos levou a conhecer a história e a epistemologia da Probabilidade, além de propiciar um primeiro contato com a visão frequentista, até então desconhecida por nós, pois em nossa vida escolar e também na graduação aprendemos apenas a visão clássica e axiomática, na qual a probabilidade é calculada *a priori* e se restringe a situações em que seus espaços amostrais são equiprováveis.

De acordo com Coutinho (1994), o aluno não deve ter contato apenas com a visão clássica de probabilidade, uma vez que existem diversos experimentos ligados à nossa realidade que não são igualmente prováveis de acontecerem, podendo dar ao aluno a impressão errônea de que não é possível calcular a probabilidade em certas situações ou conduzir ao erro de atribuir equiprobabilidade aos casos possíveis para, assim, ser possível encontrar essa probabilidade.

A partir do trabalho de Coutinho (1994) procuramos por diversos artigos e pesquisas relacionados ao ensino de probabilidade em uma abordagem frequentista e nos deparamos com outras visões de probabilidade como a subjetiva e a axiomática, além da probabilidade geométrica, que consiste no ensino de probabilidade em um contexto geométrico, dando-nos a opção de ensinar probabilidade por meio de conceitos geométricos que os alunos já conhecem.

A partir dessas reflexões iniciais decidimos realizar uma pesquisa que envolvesse as visões clássica e frequentista de probabilidade tentando responder a seguinte questão de pesquisa: **a elaboração e aplicação de situações envolvendo e articulando diferentes visões de Probabilidade (Frequentista e Clássica) pode favorecer a aprendizagem deste conceito por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental?**

CAPÍTULO 2

2. A PROBABILIDADE NAS PESQUISAS E NO ENSINO

Procuramos neste capítulo realizar um panorama geral da Teoria de Probabilidades, iniciando com um estudo de conceitos matemáticos relevantes para a nossa pesquisa e uma descrição das diferentes visões de probabilidade: clássica, frequentista, subjetiva e axiomática, além da probabilidade geométrica que é um exemplo de contexto.

Também compõe este capítulo um sucinto relato de como se deu a inserção da Estocástica no ensino brasileiro (contexto nacional e internacional), bem como sua posição atual (PNC, livro didático, concepção dos professores) e também procuramos observar o que manifestam as pesquisas e para onde elas apontam, além de descrever obstáculos (didáticos, ontogênicos e epistemológico), concepções espontâneas e dificuldades que os alunos possam vir a encontrar em seu processo de ensino e aprendizagem de probabilidade, que nos ajudou na elaboração de nossa sequência didática.

2.1. ALGUNS CONCEITOS MATEMÁTICOS

Apresentamos a seguir algumas noções de Probabilidade que serão abordadas em nossa sequência didática como o conceito de experimento[5] determinístico, experimento aleatório, espaço amostral, evento elementar, evento impossível e evento certo.

Salientamos que apesar de serem conceitos básicos de probabilidade, consideramos esta parte importante, pois nosso trabalho além de ser um trabalho científico também tem a intenção de atingir o professor de matemática.

2.1.1. Experimentos Determinísticos

Experimentos determinísticos são verificações, por meio de experiência, que mesmo sendo repetidas inúmeras vezes sob condições idênticas ou semelhantes[6] conduzem sempre a um mesmo resultado, sendo possível afirmar ou prever as consequências.

---

[5] Experimentos são verificações por meio de experiência em que existe a intencionalidade humana para acontecer.

[6] Podemos dizer “que as condições de realização de um experimento são semelhantes, quando as variações das condições que não são levadas em conta não modificam as características da experiência. Podemos dizer ainda

> Todos sabemos da importância de experimentos científicos e de engenharia. A experimentação é útil, pois podemos assumir que, se executarmos certos experimentos sob condições quase idênticas, chegaremos essencialmente aos mesmos resultados. Nestas circunstâncias, somos capazes de controlar o valor das variáveis que afetam o resultado do experimento. (MURRAY; SCHILLER; SRINIVASAN, 2000, p.15)

Consideramos que o ensino da matemática atual tem um caráter determinista, onde a resolução de qualquer exercício deve possuir uma resposta única, causando certo desconforto ao ensino da Estatística e também da Probabilidade, para os quais temos “possíveis” e não “determinados” resultados.

> [...] a maioria das pessoas têm uma visão excessivamente determinista do mundo e, em particular, para o docente envolvido com o ensino de matemática, o seu maior contato é com temas (aritmética e, em menor grau, a geometria) que privilegiam a exatidão dos resultados e que refletem o que é considerado primordial para a educação escolar dos estudantes. (OLIVEIRA, 2003, p. 109)

Até mesmo Laplace tinha uma visão determinista de mundo. Apesar de ter tido um papel importante no desenvolvimento da Teoria de Probabilidades, afirmava que esta “nada mais é que o bom senso transformado em cálculo, e que “a probabilidade é relativa em parte à nossa ignorância, em parte aos nossos conhecimentos”. (COUTINHO, 1994, p. 21)

Podemos citar como exemplos, experimentos da Física e da Química, nos quais mesmo sendo realizados diversas vezes e em condições semelhantes chegam sempre aos mesmos resultados, assim, se averiguarmos todas as condições iniciais do experimento, podemos saber antecipadamente o que irá ocorrer, sem a necessidade de realizar a experimentação. Citamos como exemplo, a verificação de quanto tempo demora para que um certo líquido entre em ebulição. Sempre que efetuarmos esse experimento, lembrando que as condições de cada experimentação devem ser similares, ou seja, a quantidade de água, o recipiente, a potência do fogo, as condições ambientes, encontraremos sempre o mesmo período de tempo para chegar ao ponto de ebulição.

2.1.2. Experimentos Aleatórios

Experimentos não determinísticos ou aleatórios, como são mais conhecidos, são experimentos que ao serem realizados por diversas vezes, exatamente nas mesmas condições

---

que as condições de realização de um experimento são semelhantes, quando estas condições permanecem essencialmente inalteradas”. (SILVA, I. A., 2002, p. 87) podem resultar em diferentes resultados, pois dependem da aleatoriedade, ou seja, da ação do acaso. Dessa forma, não temos como afirmar resultados com precisão, mas podemos encontrar resultados possíveis. Em resumo, um experimento aleatório deve possuir as seguintes características:

- Poderá ser repetido sob as mesmas condições indefinidamente.
- São conhecidos todos os resultados.
- Não se pode prever ou calcular qual o evento resultante do experimento antes da conclusão do processo. (COUTINHO; NOVAES, 2009, p.131)

Em Bayer et al (2005, p. 6) temos mais uma característica: "ao realizar um grande número de repetições do experimento aleatório, uma regularidade poderá surgir", mas consideramos que essa regularidade irá surgir se o número de repetições tender ao infinito, como veremos mais frente quando abordaremos a visão frequentista de probabilidade. Como exemplo, podemos verificar que ao jogar um dado honesto[7], não temos como predizer com certeza que face sairá na superfície superior, mas podemos afirmar, mesmo repetindo esse experimento inúmeras vezes, que será um dos números entre 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Em nosso cotidiano nos defrontamos com várias situações na quais agem as leis do acaso e assim, não conseguimos predizer com certeza o que irá acontecer ou se iremos ganhar ou perder, pois não temos controle sobre o acaso. Entretanto, podemos nos basear nele para a tomada de nossas decisões como as pessoas "que tomam decisões nas indústrias, nas empresas ou em qualquer estabelecimento comercial. Em diversas áreas profissionais, devem-se considerar riscos na tomada de decisões, tais como na saúde, no comércio, na indústria e no setor de serviços", (COUTINHO; NOVAES, 2009, p. 131) e é a Teoria das Probabilidades que estuda esses fenômenos[8] que envolvem a aleatoriedade.

2.1.3. Espaço Amostral

Como vimos anteriormente, em um experimento aleatório, ao contrário do determinista, não podemos prever ou predizer o resultado, mas podemos identificar os possíveis resultados. A esse conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de Espaço Amostral e geralmente é representado pela letra grega Ω ou S.

---

[7] Um dado é considerado "honesto" quando ele não é viciado, ou seja, é perfeitamente simétrico e dessa forma, todas as faces têm a mesma probabilidade de sair, $\frac{1}{6}$.

[8] Ao contrário dos experimentos aleatórios, os fenômenos aleatórios não dependem da intencionalidade humana para o seu progresso, como por exemplo, os fenômenos metereológicos.

Achamos importante salientar ser “um”, e não “o” espaço amostral associado a um experimento aleatório, pois o mesmo fenômeno, dependendo do que se quer observar pode apresentar espaços amostrais diferentes.

Para exemplificar, citamos o experimento jogar dois dados honestos simultaneamente. Se quisermos observar “a soma das faces” que caem viradas para cima, o espaço amostral é {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}, mas se o que queremos verificar são “as faces” que caem voltadas para cima, temos: {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6;4), (6,5), (6,6)}. Observe que por serem dados distintos a os resultados (2, 6) e (6,2) são distintos.

Nos espaços amostrais em que cada um de seus elementos, isto é, eventos elementares têm a mesma chance de serem obtidos, sendo igualmente prováveis, o espaço amostral desse experimento é dito “equiprovável” e quando não têm a mesma chance de acontecer, sendo não igualmente prováveis, nesse caso então, o espaço amostral é “não equiprovável”.

Também podemos classificar os espaços amostrais, de acordo com a quantidade de elementos como:

- **Espaço amostral finito:** neste conjunto é possível enumerar os elementos e assim encontrar a quantidade total de eventos elementares que este conjunto possui. “Notemos que, se $\#\Omega = n$, então Ω terá $\mathbf{2^n}$ subconjuntos e, portanto, $\mathbf{2^n}$ eventos”. (HAZZAN, 1994, p. 93)

  Exemplo: Lançar uma moeda e observar a face superior.

  $$S = \{\text{cara. coroa}\}$$

- **Espaço amostral infinito e numerável:** segue uma regularidade e é contável;

  Exemplo: Uma moeda é lançada sucessivamente até que apareça cara pela primeira vez. Se ocorrer cara no primeiro lançamento o experimento termina. Se ocorrer coroa no primeiro lançamento, faz-se o segundo lançamento e se então ocorrer cara o experimento termina. Se não ocorrer cara nos dois primeiros lançamentos, faz-se um terceiro lançamento e caso não ocorra cara, faz-se um quarto lançamento e assim por diante até que ocorra a primeira cara, quando o experimento termina.

S = {(coroa), (coroa cara), (coroa coroa cara), (coroa coroa coroa cara), ...}[9]

Note que os pontos desse espaço amostral podem ser postos em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais e, portanto ele é infinito, porém enumerável.

- **Espaço amostral infinito e não numerável:** não segue uma regularidade e é incontável.

  Exemplo: Testar uma válvula eletrônica até ela queimar, anotando o tempo de vida.

  $$S = \{x \in IR/x \geq 0\}$$

- **Espaço amostral contínuo:** nesse espaço amostral os resultados possíveis constituem conjuntos contínuos[10], tais como medidas geométricas homogêneas, por exemplo, comprimento, área e volume.

  Exemplo: Lançar um dardo em um alvo circular (ver Figura 1) com os olhos vendados e verificar que local acerta. O espaço amostral seria a área circular total, pois existe um contínuo de pontos que podemos acertar.

Figura 1: Alvo circular.

2.1.4. Eventos

Evento é uma representação abstrata de um resultado do Espaço Amostral de um experimento no qual existe ação do acaso, ou seja, é todo subconjunto do Espaço Amostral. Na terminologia dos conjuntos é representado por letras maiúsculas do nosso alfabeto (A, B, C,..., Z). A seguir temos alguns tipos de eventos:

- **Evento certo -** tem 100% de chance de acontecer, nesse caso podemos dizer ser o próprio espaço amostral. Notação: E = Ω;

---

[9] O espaço amostral é infinito ao caso e que nunca ocorre cara, e, assim, a moeda é lançada um número infinito de vezes.

[10] Os conjuntos contínuos são aqueles para os quais a unidade é definida pelos seus próprios elementos. Os conjuntos contínuos são aqueles para os quais é necessário construir uma medida com unidade, uma vez que entre seus elementos não há descontinuidade discriminatórias. Comprimentos, superfícies, volumes, peso e tempo são exemplos que demonstram continuidade entre os seus constituintes. Definição disponível em: <http://www.caxias.rs.gov.br/_uploads/educacao/artigo_28.pdf>. Acesso em: 2 jan. 2011.

- **Evento impossível** - tem 0% de chance de acontecer, isto é, não pode ocorrer. Notação: E = { } ou E = Ø;
- **Evento elementar** – são os eventos individuais, ou seja, que possuem um único elemento.

Como exemplo, considere o experimento aleatório: lançar um dado honesto e observar a face voltada para cima, no qual o espaço amostral é:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Neste caso, o evento certo de ocorrer é o próprio espaço amostral. Um evento impossível de ocorrer, seria sair a face “7” e um evento elementar seria uma das faces possíveis como, por exemplo, obter a face 3.

É importante observar que, “como os eventos são subconjuntos do espaço amostral, podemos representar a reunião, a interseção de dois eventos e o complementar de um evento pelos diagramas utilizados para representar subconjuntos de um dado conjunto”. (DANTAS, 2004, p. 22)

2.2. DIFERENTES VISÕES DE PROBABILIDADE

A Probabilidade é um conceito multifacetado, podendo ser visto por diferentes aspectos. (CARVALHO; FERNANDES, 2007) Assim, existem diferentes formas de se observar um acontecimento aleatório, ao que muitos autores chamam de visões, concepções, enfoques e até de abordagens diferentes da probabilidade.

Diferente do ensino de Matemática que é, de acordo com Corrêa (2010, p. 9), caracterizada por uma visão determinista em um enfoque formal, a probabilidade se desenvolve em diferentes perspectivas dialeticamente conectadas e restringí-la “a uma única abordagem não contribui para a aquisição de uma forma de pensar diferente da lógica dicotômica do sim/não, na qual preside incerteza, campo intermediário onde atua a probabilidade”. Dessa forma entendemos que a visão determinista da Matemática torna-se um entrave paro o ensino de Probabilidade.

De acordo com Coutinho (2007), diversas pesquisas distinguem três enfoques de probabilidade: clássico (laplaciano), frequentista e bayesiano (subjetivo). A autora também aponta que existe

> [...] um tipo de dualidade para a apreensão da noção de probabilidade devida à coexistência dos enfoques laplaciano e frequentista. Esta dualidade pode gerar obstáculos de ordem epistemológica e didática no processo da formação do conceito de probabilidade em situação escolar. (COUTINHO, 2007, p. 66)

A seguir iremos analisar mais detalhadamente cada uma dessas visões (clássica, frequentista, subjetiva e axiomática), além da probabilidade geométrica, que consiste no ensino de probabilidade em um contexto geométrico, ou seja, é a utilização da geometria no ensino de probabilidade e vice versa, pois “oferece ao estudante a oportunidade de rever alguns conceitos geométricos, que resgatem a construção do conhecimento matemático”. (SILVA; CAMPOS; ITACARAMBI, 2008, p.1)

2.2.1. Visão Clássica

O francês Pierre-Simon Laplace (1747–1827) fez a primeira tentativa de axiomatização da probabilidade no campo da matemática por meio de seus trabalhos. Um deles é o livro *Théorie analytique des probabilités* (Teoria Analítica das Probabilidades) de 1812, no qual muito dos conhecimentos probabilísticos da época foram sistematizados e adicionados a muitas de suas contribuições. Outra contribuição de Laplace é a obra *Essai Philosophique sur les Probabilités* (Ensaio Filosófico sobre as Probabilidades) de 1814, que contém a “primeira apresentação axiomática do cálculo de probabilidades, contendo a definição explícita da probabilidade dada como primeiro princípio” (COUTINHO, 2007, p. 65), consolidando definitivamente a Teoria das Probabilidades no quadro matemático.

O primeiro princípio diz que: “a razão deste número àquele de todos os casos possíveis é a medida desta probabilidade, que é assim não mais que uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis” (LAPLACE apud COUTINHO, 2007, p. 65) e o segundo princípio:

> Mas isto supõe os diversos casos igualmente possíveis. Se não o forem, determinaremos primeiramente suas possibilidades respectivas as quais a justa apreciação é um dos pontos mais delicados da teoria dos acasos. Então a probabilidade será a soma das possibilidades de cada caso favorável”. (LAPLACE apud COUTINHO, 2007, p. 65-66)

Segundo Coutinho (1994) Laplace traduz sua visão “pascaliana” da probabilidade, a “geometria do acaso”, por meio de princípios (axiomas e definições), e com apenas os dois primeiros princípios foi possível corrigir o problema de D’Alembert sobre o jogo cruz ou cunho (cara ou coroa) publicado no artigo *Croix et Pile*, na Grande Enciclopédia de Denis Diderot e Jean Le Rond D’Alembert.

> Queremos saber qual a aposta a se fazer para tirarmos “cruz” jogando duas vezes consecutivas. A resposta que encontramos em todos os autores, e seguindo os princípios ordinários, é esta. Existem quatro combinações:
>
> | Primeira Jogada | Segunda Jogada |
> |---|---|
> | cruz | cruz |
> | cunho | cruz |
> | cunho | cunho |
> | cruz | cunho |
>
> Destas quatro combinações, uma fará perder e três farão ganhar; existem então 3 contra 1 para apostar a favor do jogador que lança a moeda. [...] Entretanto, isto é exato? Por que tomando apenas o caso das duas jogadas não é necessário reduzir a uma as duas combinações que resultam “cruz” na primeira jogada? Porque, uma vez que temos “cruz” como resultado, o jogo está terminado, e a segunda jogada de nada adianta. Assim, existem propriamente apenas três combinações de possibilidades [...] Logo, existem apenas 2 contra 1 para apostar [...] (D’ALEMBERT, 1784 apud COUTINHO, 1994, p. 19-20)

A resolução dada por D’Alembert, constitui um erro, pois, o experimento pede duas jogadas consecutivas da mesma moeda, existindo, portanto quatro possibilidades: (cunho-cruz), (cunho-cunho), (cruz-cruz) e (cruz-cunho), da quais três são favoráveis ao evento tirar cruz e não três combinações: (cunho-cruz), (cunho-cunho) e (cruz), das quais duas fazem ganhar e uma perder. Existe aqui uma confusão de D’Alembert que ao centrar-se na informação do evento muda para um modelo probabilista dependente de suas próprias observações. O mesmo pode ocorrer com alunos que no lançamento de dois dados, atribuem ser a mesma solução sair, por exemplo, (1,6) e (6,1).

Na visão clássica, o segundo princípio de Laplace afirma que a probabilidade de ocorrer um determinado evento E é dada pela razão da quantidade de casos favoráveis a esse evento (total de casos que interessam) sobre a quantidade de casos possíveis desse experimento (total de elementos do espaço amostral equiprovável S), por isso ela é dita como uma probabilidade teórica ou calculada *a priori*, por ser calculada sem a necessidade de realizar o experimento. Apresentamos a seguir a definição dada por Dantas (2004, p. 25):

> Consideremos um espaço amostral S com *N* eventos simples, que suporemos igualmente possíveis. Seja A um evento S composto de *m* eventos simples. A probabilidade de A, que denotaremos P(A), é definida por:
>
> $$P(A) = \frac{m}{N}$$

O espaço amostral na visão clássica só pode ser equiprovável, limitando bem o campo de probabilidades que podemos calcular, uma vez que, a maioria dos acontecimentos de nosso cotidiano não leva em conta a equiprobabilidade. Isso pode ser visto com um ponto fraco, pois de acordo com Lecoutre (1984 apud COUTINHO, 2005a), na ausência de informações ou na má interpretação do experimento os alunos são levados a crer que todos os resultados têm a mesma probabilidade de serem obtidos. Dessa forma, o uso da equiprobabilidade pode reforçar obstáculos epistemológicos. Por exemplo, ao lançar uma moeda honesta podemos considerar que os dois lados, cara e coroa, têm a mesma probabilidade de sair, por causa da simetria geométrica da moeda, mas no lançamento de uma tachinha[11], não há como atribuir equiprobabilidade aos eventos elementares cair de "ponta" ou "não ponta", pois ela não possui a simetria da moeda, assim não haveria como calcular a probabilidade.

Para exemplificar**,** utilizaremos o exemplo da moeda: Ao jogar uma moeda honesta qual a probabilidade de sair cara?

S = {cara; coroa}

Evento A: sair cara

Total de casos favoráveis => $n(A) = 1$

Total de casos possíveis => $n(S) = 2$

Probabilidade do evento A:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{2}$$

Em resumo, na visão clássica de probabilidades,

> [...] a probabilidade de um acontecimento composto é a fracção de acontecimentos elementares favoráveis a esse acontecimento no espaço amostral. Nesta definição de probabilidade assume-se implicitamente a equiprobabilidade de todos os acontecimentos elementares do espaço amostral e constitui uma abordagem a priori da probabilidade, pois calculam-se probabilidades antes da realização de qualquer experiência

[11] Problema apresentado por Coutinho (1994, p.108): "No lançamento de uma tachinha, qual a chance de obtermos a posição "ponta"?"

> física. Naturalmente, o pressuposto da igual probabilidade dos acontecimentos elementares revela o carácter circular desta definição de probabilidade (FERNANDES, 1999, p. 51)

Nas palavras de Laplace: (1814 apud MORGADO et al., 1991, p.104)

> A teoria do azar consiste em reduzir todos os acontecimentos do mesmo gênero a um certo número de casos igualmente possíveis, ou seja, tais que estejamos igualmente inseguros sobre sua existência, e em determinar o número de casos favoráveis ao acontecimento cuja probabilidade é buscada. A razão deste número para o de todos os casos possíveis é a medida dessa probabilidade, a qual é, portanto uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e cujo denominador é o número de todos os casos possíveis.

2.2.2. Visão Frequentista

A visão frequentista de probabilidade tem seus primeiros estudos publicados em 1713 com a obra *Ars Conjectandi* (Arte de Conjecturar) de Jacques Bernoulli (1654-1705), "que aproxima Probabilidade de um evento pela sua frequência observada quando a experiência é repetida um grande número de vezes" (COUTINHO, 1994, p.15), ou seja, a probabilidade é calculada *a posteriori,* observando a estabilização da frequência.

A obra de Bernoulli é dividida em quatro capítulos, e aos dois últimos, reservou um tratamento especial às probabilidades, no qual introduz e demonstra a Lei dos grandes números, conhecido também como Teorema de Bernoulli, "no qual a probabilidade de um evento ocorrer tende a um valor constante quando o número de ensaios desse evento tende para o infinito" (SILVA, I. A., 2002, p.36). Assim, a probabilidade de ocorrência de um evento A qualquer, pode ser definida como um limite, da seguinte forma:

> 1º) O experimento é repetido n vezes.
> 2º) Observa-se a frequência relativa de ocorrência de um certo resultado A: fr(A) = $\frac{n(A)}{n}$, onde n(A) é o nº de vezes em que ocorre o resultado A em n realizações do experimento.
> 3º) Probabilidade como limite: P(A) = $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n(A)}{n}\right)$
> (BAYER et AL, 2005, p. 6)

Assim, na visão frequentista a probabilidade é de cunho experimental, por isso ela é dita probabilidade empírica ou calculada *a posteriori* após a realização do experimento aleatório certo número grande de vezes, onde se pode observar que a frequência relativa

[12](número de vezes que ocorreu um resultado dividido pelo número de vezes que o experimento foi realizado) de um evento vai tendendo para um valor constante e esse é o valor da probabilidade. Segundo Dantas a probabilidade frequentista

> [...] consiste em repetir-se o experimento aleatório, digamos *n* vezes, e anotar quantas vezes o evento A associado a esse experimento ocorre. Seja n(A) o número de vezes em que evento A ocorreu nas *n* repetições do experimento. A razão
>
> $$f_{n,A} = \frac{n(A)}{n}$$
>
> é denominada frequência relativa de A nas *n* repetições do experimento.
> Repetindo-se o experimento um grande número de vezes, nas mesmas condições, e de modo que as repetições sucessivas não dependam dos resultados anteriores, observa-se que a freqüência relativa de ocorrências do evento A tende a uma constante *p*. (DANTAS, 2004, p. 26)

Logo, a série de frequência relativa permite estimar o valor da probabilidade. Para exemplificar utilizaremos o experimento da moeda honesta. Pela probabilidade clássica ou teórica, sabemos que a probabilidade de sair cara é de 50%. Para demonstrar o cálculo *a posteriori*, na visão frequentista apresentaremos algumas experimentações históricas desse experimento com grandes quantidades de jogadas no qual podemos perceber a estabilização, como a de Georges-Louis Leclerc, mais conhecido como Conde de Buffon, que realizou o lançamento de uma moeda 4.040 vezes e anotou a ocorrência de 2.048 caras, ou seja, a frequência relativa foi de aproximadamente 50,69%.

John Kerrich, um matemático sul-africano, quando estava preso na Dinamarca em 1940 (2ª Guerra Mundial), realizou 10.000 jogadas de uma moeda e segundo seus dados, nas 100 primeiras jogadas obteve 44 caras, ou seja, 44%, mas ao chegar a 10.000, tinha 5.067 caras, frequência relativa de 50,67%. (JUNIOR, 2009)

Um dos pioneiros no desenvolvimento da estatística e fundador do primeiro departamento universitário, de todo o mundo, dedicado a estatística na *University College London* em 1911, Karl Pearson, também fez o experimento e ao jogar por 24.000 vezes obteve 12.012 caras, obtendo a freqüência de 50,05%. (JUNIOR, 2009)

Podemos observar que nas três experimentações anteriores, todas as frequências relativas de se obter cara, se aproximaram muito de 50%. Percebemos assim a importância da grande quantidade de repetições; quanto mais vezes esse experimento for realizado, mais o

[12] Frequência relativa é o quociente entre a frequência absoluta (total de casos de uma categoria) e o número total de dados; pode ser expressa em decimal ou porcentagem.

resultado se estabiliza em torno de 50%, que é o resultado da probabilidade calculada *a priori*. Podemos observar, por exemplo, na experimentação de Kerrich que em apenas cem lançamentos, obteve 44% de caras e assim foi possível observar uma estabilização em torno 50%. De fato, quanto menor for a quantidade de realizações do experimento, a verificação de uma estabilização fica mais difícil no caso da moeda honesta, se lançarmos, por exemplo, apenas 10 vezes não é difícil obtermos oito caras e duas coroas, que daria uma frequência relativa de 80% e 20% respectivamente.

O espaço amostral na abordagem frequentista não está intrinsecamente ligado à equiprobabilidade, isto é, seus eventos elementares não precisam ter a mesma chance de ocorrer, assim é possível resolver diversos outros problemas probabilísticos para os quais não é possível calcular a probabilidade *a priori*, como o problema da tachinha apresentada anteriormente, em que não há como atribuir simetria às duas opções: cair de "ponta" ou "não ponta". Porém, existem experimentos em que suas repetições não são possíveis ou não podem ser realizados em condições idênticas que são requisitos primordiais para o cálculo frequentista.

Por exemplo, para testar uma nova cirurgia, não há como repetir essa experiência em condições idênticas, pois necessitaria do mesmo paciente e, mesmo que feita em outros pacientes, existem variações nas condições de cada um deles (tipo físico, idade, grau da doença, etc.).

O problema da tachinha foi trabalhado por Coutinho (1994, p.117-119) em sua pesquisa, na qual é pedido aos alunos que realizem o experimento por algumas vezes cada um e depois são somados os resultados de todo. A seguir apresentamos uma tabela com as experimentações realizadas pelos alunos, nas quais "a primeira coluna indica a ordem de chamada, a segunda indica o número de lançamentos, a terceira indica o total de sucessos e, a última, a frequência relativa acumulada" para o resultado "ponta":

LINHA	LANCE	F	F%
1	30	15	50,00
2	60	27	45,00
3	90	42	46,67
4	120	54	45,00
5	150	66	44,00
6	180	80	44,44
7	210	95	45,24
8	240	110	45,83
9	270	128	47,41
10	300	146	48,67
11	330	159	48,18
12	360	169	46,94
13	390	191	48,97
14	420	209	49,76
15	450	231	51,33
16	480	248	51,67
17	510	256	50,20
18	540	266	49,26
19	570	280	49,12
20	600	293	48,83
21	630	305	48,41
22	660	323	48,94
23	690	331	47,97
24	720	346	48,06
25	750	368	49,07
26	780	380	48,72
27	810	392	48,40
28	840	404	48,10
29	870	418	48,05

LINHA	LANCE	F	F%
30	900	434	48,22
31	930	454	48,82
32	960	467	48,65
33	990	479	48,38
34	1020	502	49,22
35	1050	518	49,33
36	1080	531	49,17
37	1110	546	49,19
38	1140	561	49,21
39	1170	570	48,72
40	1200	579	48,25
41	1230	594	48,29
42	1260	614	48,73
43	1290	624	48,37
44	1320	639	48,41
45	1350	651	48,22
46	1380	662	47,97
47	1410	678	48,09
48	1440	695	48,26
49	1470	708	48,16
50	1500	723	48,20
51	1530	738	48,24
52	1560	747	47,88
53	1590	761	47,86
54	1620	778	48,02
55	1650	790	47,88
56	1680	805	47,92
57	1700	814	47,88
58	1720	826	48,02

Contrário ao que Coutinho (1994) havia previsto, os alunos não observaram a impossibilidade do cálculo *a priori* deste resultado, mesmo percebendo que havia falta de simetria na tachinha, insistiram que sendo duas posições possíveis não tinham motivos de calculá-la e de acordo com os resultados das frequências relativas da tabela, os alunos optaram pelo valor 50% como a melhor chance de obter a posição “ponta”. Dessa forma, essa concepção errônea foi reforçada e, de acordo com Coutinho (1994), “este fato teria sido evitado, ou pelo menos minorado, se a tachinha escolhida possuísse ponta mais alongada ou mesmo, se lançássemos qualquer outro objeto irregular” em que não fosse possível também o cálculo *a priori* da probabilidade.

Em resumo, na visão frequentista de probabilidade

> [...] a probabilidade de um acontecimento resulta da frequência relativa observada desse acontecimento em experiências repetidas. Este procedimento não permite obter a probabilidade exacta do acontecimento, mas apenas uma sua estimativa. Naturalmente que estamos, nesta perspectiva, face a uma abordagem da probabilidade *a posteriori*, pois atribuem-se as probabilidades depois das experiências se terem realizado. A probabilidade é atribuída a um acontecimento individual inserido num colectivo, que é uma classe infinita de acontecimentos ‘semelhantes’ que se

> assume terem certas propriedades ‘aleatórias’. Então, a probabilidade é o limite para que tende a frequência relativa. (FERNANDES, 1999, p. 52)

2.2.3. Visão Subjetiva

A Visão Subjetiva foi introduzida por Thomas Bayes, dois anos após sua morte, em *La Doctrine des Chances* (1763), que implica na “noção de probabilidade *a priori*, tendo observado uma consequência *a posteriori*”. (COUTINHO, 2007, p. 64)

> Bayes, pela primeira vez, vai deixar derrapar a probabilidade – objeto matemático que a geometria do acaso extraiu da descrição probabilista para a probabilidade no sentido encontrado no dicionário Larousse: a uma noção subjetiva (todas as informações que fundamentam nossa convicção mais íntima) ele associa um objeto matemático (formal): uma lei de probabilidade e a utiliza para voltar ao real. (BRU, 1981, p. 147 apud COUTINHO, 2007, p. 64).

Dessa forma, nessa concepção a probabilidade estimada carrega certo grau da percepção pessoal de cada um, em que é necessário fazer uso de experiências anteriores, crenças e conhecimentos prévios sobre o assunto que envolve a probabilidade que se deseja exprimir. Assim, a probabilidade para um mesmo evento pode ter diversos valores, pois depende da avaliação pessoal de cada indivíduo.

> Uma corrente de probabilistas considera a probabilidade de um evento como sendo a medida da crença que o observador possui na ocorrência do evento. Desse modo, a probabilidade será em geral diferente para distintas pessoas em decorrência das diferentes opiniões que elas têm sobre a ocorrência do evento. Em uma outra descrição equivalente, a probabilidade de um evento é o valor que cada observador estaria inclinado a apostar na realização do evento. (DANTAS, 2004, p.28)

Para encontrar a probabilidade de o Corinthians ganhar em uma partida contra o São Paulo, mesmo tendo uma estatística grande de resultados de jogos entre eles, não podemos considerar que as partidas ocorreram em condições semelhantes, pois os jogadores, o técnico, o estádio e até as condições climáticas não são os mesmos, e, independente de qualquer condição, se perguntar a qualquer corintiano quem tem maior probabilidade de ganhar essa partida, as respostas serão bem diferentes das respostas dos são paulinos.

Tanto na visão clássica quanto na frequentista o cálculo da probabilidade independe das opiniões do observador, sendo, portanto, interpretações objetivas de probabilidades. Mas em uma concepção subjetiva, o sujeito considera informações prévias e dados obtidos empiricamente (frequência com que se repete o experimento), que são combinadas na fórmula de Bayes para obter uma nova probabilidade do acontecimento. (FERNANDES, 1999)

> A probabilidade subjetiva é determinada por especialistas, que analisam todo o contexto e os resultados já conhecidos de experimentos ocorridos nas mesmas condições (série histórica de resultados) para então estimar um valo a ser adotado. Tal valor é testado no final do processo, para avaliar sua adequação. Este tipo de enfoque está na base do que se chama Métodos Bayesianos. (COUTINHO; NOVAES, 2009. p. 132)

De acordo com Batanero (2005) por meio da regra de Bayes aparece um novo ponto de vista, no qual as probabilidades *a priori*, podem a partir da informação de dados observados *a posteriori* ser revistos, transformando a probabilidade *a priori* em *a posteriori*, perdendo assim, sua objetividade. Autora afirma também que na abordagem subjetiva.

> [...] já não é mais necessário a repetição o experimento nas mesmas condições para dar sentido à probabilidade, no qual amplia o campo de aplicação, como no estudo das decisões em economia ou em diagnóstico médico. Atualmente, a escola bayesiana aplica as probabilidades a todo tipo de eventos incertos, mesmo que continue a controvérsia sobre o *status* científico das probabilidades subjetivas. (BATANERO, 2005, p.254, tradução nossa).

Borovcnik, Bentz e Kapadia (apud FERNANDES, 1999, p.53) consideram que em relação ao enfoque subjetivo, as duas maiores dificuldades “resultam da pretensão em traduzir qualquer situação de incerteza por uma probabilidade e da falta de orientação para medir as probabilidades prévias”.

Em resumo, na visão subjetiva de probabilidade

> [...] a atribuição de probabilidades baseia-se na assunção básica de que os sujeitos têm as suas próprias probabilidades que resultam de um padrão implícito de preferência entre decisões. Num contexto de jogos de sorte-azar, a probabilidade de um acontecimento pode ser determinada pelos riscos que uma pessoa está disposta a correr ao fazer uma aposta na sua ocorrência. Assim, para um ganho fixo, quanto mais elevada for a parada que o jogador está disposto a arriscar maior será a sua confiança na realização do acontecimento. Muito embora as pessoas possam diferir nos riscos que aceitariam correr, tal não constitui problema, dado que o sujeito segue regras básicas de coerência e consistência. (FERNANDES, 1999, p. 53)

2.2.4. Visão Axiomática

Émile Borel com sua obra *Le Hasard* (1914), deu uma das primeiras contribuições para a axiomatização da probabilidade, no qual contempla a probabilidade como um tipo especial de medida, a Teoria das Medidas de Borel que fundamentou a elaboração da Teoria de Integração por Henri Lebesgue, “colocou a Análise Matemática em uma perspectiva revolucionária, mesmo que Lebesgue não tenha desenvolvido suas consequências e aplicações à Teoria das Probabilidades”. (COUTINHO, 1998, p. 24-25)

Os trabalhos de Borel e Lebesgue possibilitaram que Andrei Nikolaevich Kolmogorov desse “uma apresentação axiomática à teoria das Probabilidades, colocando-a no quadro da Teoria dos Conjuntos e tornando-a mais clara em suas limitações” em sua obra *Foundations of the Theory of Probability* (1933). “No prefácio de sua obra ele destaca que seu objetivo é explicar e sistematizar o conjunto de axiomas que já estavam sendo utilizados, embora de forma implícita, pela maioria dos teóricos contemporâneos do Cálculo de Probabilidades”. (COUTINHO, 1994, p. 25)

De acordo com Fernandes (1999, p.54), o enfoque axiomático pode ser visto como a constituição teórica para as concepções objetiva e subjetiva da probabilidade. Ou seja, os axiomas de Kolmogorov são uma justificação da posição objetiva e “os axiomas sobre o comportamento racional no ato de apostar, como coerência e consistência, fornecem regras para as probabilidades, as quais devem obedecer aos axiomas de Kolmogorov e suas consequências”.

A axiomática criada por Kolmogorov, segundo Batanero (2005, p. 255, tradução nossa), é aceita por “todas as escolas, independentemente do significado filosófico dado a natureza da probabilidade. Desde então, a probabilidade é apenas um modelo matemático que podemos usar para descrever e interpretar a realidade dos fenômenos aleatórios”, que tem se revelado muito útil em quase todos os campos da atividade humana e por isso é adotada no ensino e aprendizagem até hoje.

Em resumo, a visão axiomática de probabilidade “é um conceito definido implicitamente por um sistema de axiomas e um conjunto de definições e teoremas deduzidos daqueles axiomas” (FERNANDES, 1999, p. 54), o que não exclui as outras visões (clássica e frequentista), pois suas definições também satisfazem esses axiomas, que podem ser traduzidos da seguinte forma:

> Dados dois eventos A e B, resultantes de um mesmo experimento aleatório, ou seja, contidos em um mesmo espaço amostral Ω, sendo $A \neq$ e $B \neq$, temos:
> Axioma I: $0 \leq P(\mathrm{A}) \leq 1$
> Axioma II: Se $A = \Omega$, então $P(A) = 1$, e nesse caso A é chamado *evento certo.*
> Axioma II-A: Se $A =$, então $P(A) = 0$, e nesse caso A é chamado *evento impossível.*
> Axioma III: Se $A \quad B =$, então $P(A \quad B) = P(A) + P(B)$
> A partir desses axiomas podem ser definidas propriedades operatórias, tais como:
> Propriedade 1: Se $A \quad B$, então $P(A \quad B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
> Propriedade 2: Se $A \quad B =$, então $P(B) = 1 - (A)$, e nesse caso A e B são chamados *eventos complementares*.
> Propriedade 3: Se A e B são eventos independentes, então $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
> Definição: Dizemos que A e B são eventos condicionados quando
> $P(A/B) = \overline{}$, de onde podemos concluir que se A e B não são independentes (são eventos condicionados), então $P(A \cap B) = P(B).P(A/\mathrm{B}) = P(A).P(B/A)$. (COUTINHO; NOVAES, 2009, p. 133).

2.2.5. Visão Geométrica: um contexto

As origens da noção de probabilidade geométrica são atribuídas a Georges Louis Leclerc, o conde de Buffon (1707-1788) com a apresentação do jogo *Franc Carreau* (jogo do ladrilho) e depois em seu *Essai d'Arithmétique Morale* (Ensaio Moral de Aritmética), de 1777, onde explica e exprime as vantagens da utilização da geometria na Teoria das Probabilidades. (COUTINHO, 2007)

> Buffon apresenta na França o jogo de *Franc Carreau* em um trabalho endereçado à Academia Real de Ciências, em 1733. Este jogo consiste em lançar uma moeda sobre um piso ladrilhado com lajotas iguais em uma forma qualquer. Os jogadores apostam sobre a posição final da moeda: ficará ela inteiramente sobre uma única lajota (franc-carreau), ou sobre uma ou mais juntas entre lajotas? (COUTINHO, 2007, p.14)

Buffon também apresenta o problema que ficou conhecido como a Agulha de Buffon, onde é possível estimar o valor de π. Segue o enunciado dado por Tunala (1995, p.20).

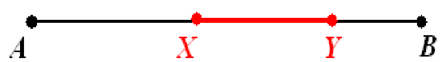
> Consideremos uma família de retas paralelas em $\mathbb{R}^2$, onde quaisquer duas adjacentes são distantes de $2a$. Determinar a probabilidade P_2 de que uma agulha de raio r ($r < a$), lançada ao acaso sobre o plano, não intercepte nenhuma das retas.

A Probabilidade Geométrica pode ser definida como o estudo da probabilidade envolvida em problemas geométricos. Dessa forma, as atividades propostas aos alunos devem levar em conta seus conhecimentos prévios de geometria, pois essa é sua principal vantagem, utilizar conceitos já conhecidos para se trabalhar com probabilidade, conforma aponta Coutinho (2001).

Nesse contexto as situações que envolvem probabilidade geométrica podem ser calculadas fazendo uso da visão clássica (*a priori*) ou da frequentista de probabilidades (*a posteriori*), realizando o experimento por um número grande de vezes.

Para ficar mais claro daremos alguns exemplos a seguir:

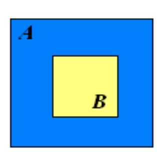
Exemplo 1: Selecionando um ponto de $\overline{AB}$ ao acaso, qual a probabilidade que ele pertença a $\overline{XY}$?



Em diversos problemas, entretanto, precisaremos escolher um ponto de uma determinada "linha". Se X e Y são pontos de uma linha de extremos A e B, admitimos que a probabilidade de que um ponto da linha AB pertença à linha XY (contida em AB) é proporcional ao comprimento de XY e não depende da posição dos pontos X e Y sobre AB. Portanto, selecionado um ponto de AB, a probabilidade de que ele pertença a XY será: [13]

$$\boldsymbol{P} = \frac{comprimento\ de\ \boldsymbol{XY}}{comprimento\ de\ \boldsymbol{AB}}$$

Exemplo 2: Selecionando um ponto da região A ao acaso, qual a probabilidade que ele pertença a região B?



Se tivermos uma região B do plano contida em uma região A, admitimos que a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B é proporcional à área de B e não

[13] Resolução apresentada por Eduardo Wagner no artigo: *Probabilidade Geométrica – o problema do macarrão e um paradoxo famoso* da Revista do Professor de Matemática, nº. 34, 1997.

depende da posição que B ocupa em A. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que ele pertença a B será:[14]

$$P = \text{———}$$

Exemplo 3: Dividindo aleatoriamente um segmento em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?

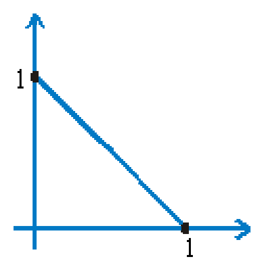
A seguir apresentamos uma solução dada por Wagner (1997, p.30-31) fazendo uso da noção clássica de probabilidades:

Tomemos um segmento de reta de comprimento 1. Vamos dividi-lo em três partes: uma, , de comprimento *x*, outra $\overline{PQ}$, de comprimento *y* e a terceira, $\overline{QB}$, naturalmente com comprimento $1 - x - y$.

Cada forma de dividir o segmento unitário fica então associada ao par ordenado (x, y) onde

$$x > 0,\ y > 0 \text{ e } x + y < 1$$

Isso corresponde, no plano cartesiano, à região triangular que mostramos ao lado. Portanto, cada forma de dividir um segmento em três partes está agora representada por um ponto interior ao triângulo da figura.



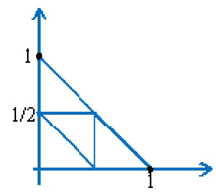
Entretanto, não são todas as divisões que formam triângulos. Um triângulo existe se, e somente se, cada lado tiver comprimento menor que a soma dos outros dois. Isso é equivalente a dizer que, em um triângulo, cada lado é menor que o seu semi perímetro, que no nosso caso é igual a −.

Temos, portanto, x − , y − , 1 – x − .

---

[14] Resolução apresentada por Eduardo Wagner no artigo: *Probabilidade Geométrica – o problema do macarrão e um paradoxo famoso* da Revista do Professor de Matemática, nº. 34, 1997.

A última condição é naturalmente equivalente a $x + y \quad -$ e, reunindo as três, temos que a região *favorável* é o interior do triângulo formado pelos pontos médios dos lados do triângulo inicial.



Ora, o triângulo formado pelos pontos médios tem área igual a 1/4 da área do triângulo grande, o que nos leva a concluir que a probabilidade de que os três segmentos formem um triângulo é 0,25.

De acordo com a resolução de Wagner (1997) dividindo um segmento em três partes, a probabilidade de que eles formem um triângulo é de 25%, porém, durante um curso de aperfeiçoamento de professores de Matemática do Ensino Médio, promovido pelo IMPA/RJ, foi pedido aos 60 professores presentes que partissem um espaguete em três pedaços ao acaso. O que ocorreu foi que 41 conseguiram formar um triângulo, indicando que a probabilidade seria estimada em 41/60 ou 0,68. Apesar de 60 experimentos ser pouco para confiar no resultado a resposta correta não deveria ser muito distante do resultado calculado *a priori*, 0,25, mas o que ocorre é que as pessoas tendem a quebrar o macarrão em parte mais parecidas aumentando a probabilidade de essas formarem um triângulo.

2.3. O ENSINO DE PROBABILIDADES

Neste tópico, realizamos um estudo da inserção da Probabilidade no ensino começando pelos movimentos internacionais que tiveram grande influência na introdução desse conceito no ensino brasileiro, em seguida, passamos a uma análise dos PCN bem como a concepção dos professores em relação ao seu conhecimento e sua prática de ensino de probabilidades, o que nos levou a observar o livro didático, principal fonte de pesquisa do professor, segundo Lajolo e Dante (1996; 1996).

Incluímos nesta parte também a discussão de pesquisas brasileiras que abordaram o tema ensino e aprendizagem de probabilidade para estudar o que elas apontam e, em seguida, fazemos uma seleção das dificuldades, obstáculos e concepções espontâneas, encontradas nas pesquisas, que os alunos podem vir a apresentar na aprendizagem desses conceitos.

2.3.1. Inserção no Ensino: Contexto Internacional e Nacional

A Estatística e a Probabilidade tiveram inclusão recente no currículo de matemática de diversos países com afirmam Ponte e Fonseca (2001). Na década de 1950 surge um movimento mundial que reconhece a importância do desenvolvimento do raciocínio probabilístico e do uso da estatística resultando na adoção do seu ensino na educação básica de diversos países (CARZOLA; KATAOKA; SILVA, 2010).

Na Inglaterra, um dos países pioneiros da introdução dessa área,

> [...] começou a ser incluída nos currículos de Matemática do ensino secundário no final dos anos 50, estreitamente ligada ao estudo das Probabilidades e com uma orientação marcadamente teórica (com especial relevo para o estudo de testes de hipóteses). Um pouco mais tarde começou a ser igualmente introduzida nos currículos do ensino primário (nomeadamente, formas de representação de dados e medidas simples de tendência central). No final dos anos 70, surgiu neste país um importante projecto de desenvolvimento curricular, promovido pelo Schools Council, em que a Estatística era essencialmente encarada como "trabalho com dados". As orientações deste projecto viriam a ser plenamente consagradas no chamado relatório Cockcroft (1982) que, por sua vez, veio a constituir uma influência determinante no National Curriculum inglês. (PONTE; FONSECA, 2001, p 26)

Já em Portugal, esse movimento teve início na década de 1960, período (Matemática Moderna) em que a Estatística começou a aparecer como tema curricular e, posteriormente, nos anos 1970, é oficialmente incluída no currículo do ensino secundário e em seguida no fundamental. (PONTE; FONSECA, 2001)

Segundo Lopes (1998), alguns países começaram a repensar a organização curricular de seus currículos sendo influenciados por artigos como o publicado pelo *National Council of* Theachers of Mathematics (NCTM), *Agenda for Action – Recommendations for school mathematics of 1980's*[15]. Em reflexões resultantes das discussões de simpósios internacionais como os ocorridos em Estrasburgo (1985), Kuwait (1986) e Valência (1987), ficou evidenciada a importância de se ensinar competências necessárias ao cidadão que atuará na sociedade, emergindo assim, "a importância do papel ativo do aluno no processo ensino-

[15] "Esse documento propõe um ensino de Matemática metodologicamente apoiado na resolução de problemas, na observação, exploração e experimentação; destaca, ainda, o uso de calculadoras e computadores. Para isso, é necessário conceber a Matemática como uma ciência aberta e dinâmica, não apenas como uma ciência exata, feita, organizada e pronta. O ensino em que a Matemática tem papel fundamental na interpretação do mundo real é um processo de investigação e aquisição de conhecimentos, uma criação humana continuamente em expansão". (LOPES, 1998, p. 38)

aprendizagem, a ênfase na resolução de problemas, a necessidade do uso de calculadoras e computadores e, especialmente, o trabalho com Estocástica no Ensino Fundamental" (p, 39).

> Nesse cenário, percebo a evidência de uma ruptura com o determinismo e a linearidade, predominantes nos currículos de Matemática, justificando, assim, a importância do ensino da Estocástica na Escola Fundamental.
> Os currículos internacionais estão enfatizando o desenvolvimento da criticidade do aluno ao considerar a importância de se trabalhar com a análise de dados e a necessidade de relacionar o trabalho de Matemática com observações do mundo real. (LOPES, 1998. p.82)

Desse movimento, resultaram mudanças ocorridas nos currículos de diversos países que começaram a incorporar a Estocástica no seu ensino e em Rotunno (2007, p. 26-27), podemos verificar que existem atualmente três diferentes tendências de ensino na Europa:

> a) ênfase no processo de Análise de Dados, na perspectiva em que esta ciência é utilizada na sociedade, tendo em conta que o uso de dados faz parte da vida de todos os dias (tendência predominante em países como a Inglaterra);
> b) como capítulo da Matemática, por vezes designada por Estocástica, enfatizando aspectos conceptuais e/ou computacionais (abordagem seguida, por exemplo, na França);
> c) como uma ferramenta auxiliar para o estudo de diversos assuntos e disciplinas escolares (tendência visível, por exemplo, na Suécia).

No final da década de 1990, esse movimento também tem seus reflexos no Brasil e dessa forma, conceitos básicos de Estatística passam a "ser discutidos pela comunidade educacional e acadêmica, tendo sido incorporados oficialmente à estrutura curricular brasileira da disciplina de matemática" por meio da publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais de (PCN). No Ensino Fundamental (BRASIL 1997, 1998) e Médio (BRASIL 2002, 2006). (CARZOLA; KATAOKA; SILVA, 2010, p. 20).

A pesquisa de Gonçalves, M. C. (2004) deixa claro que na década de 1970 a Probabilidade já fazia parte do ensino, pois em uma análise dos livros didáticos dessa época (Matemática Moderna), verificou que alguns dos livros didáticos introduziam esse conteúdo nos atuais segundo e terceiro anos do Ensino Médio, e ainda, o Guia Curricular do Estado de São Paulo de 1975, fazia referência a esse ensino como fazendo parte de todos os campos de conhecimento.

Gonçalves, M. C. (2004) traçou um panorama do ensino de Probabilidade nas diferentes décadas no Brasil, focalizando os documentos oficiais apenas do Estado de São

Paulo, por considerar que este estado tem sua importância no contexto nacional e faz um paralelo com os períodos de ensino de Probabilidades franceses identificados por Parzysz.

> [...] a relação está presente na década de 70, quando ambos os currículos se apropriaram da Teoria dos Conjuntos para trabalhar a probabilidade e no terceiro período francês, de 1986 a 1990, que coincide com o período de vigência das Propostas curriculares do governo paulista. A relação observada é que, nesse período, a Franca disponibilizara uma organização curricular de tal forma que os conceitos presentes na Análise Combinatória fossem necessários para resolução de situações probabilísticas, enquanto que, em nossa proposta, as orientações e aplicação nos livros didáticos mesclavam-se no final da década de 80 e excluíam totalmente a Teoria dos Conjuntos nos anos 90. No final dos anos 90, o governo brasileiro publica os Parâmetros Curriculares Nacionais, suscitando o trabalho experimental [...] e na França, na década de 90 até os dias atuais, a Probabilidade é vista segundo o ponto de vista frequentista. (GONÇALVES, M. C., 2004, p. 79)

Entretanto, a Probabilidade também já vinha sendo incluída junto com a Estatística e Análise Combinatória nas Propostas Curriculares de Matemática de outros Estados da Federação como Santa Catarina, Paraná, Rio de Janeiro, São Paulo e Minas Gerais, conforme aponta a pesquisa de Rotunno (2004, p. 8) na qual realizou uma análise dessas Propostas para responder como esses conteúdos se apresentavam no contexto escolar e “encontrar elementos que possam ter sido tomados como subsídios para inclusão desses temas no currículo do Ensino Fundamental” pelos PCN. A escolha dessas propostas se deu, pela autora, por serem consideradas as mais bem elaboradas e as mais citadas no relatório emitido pela Fundação Carlos Chagas (FCC)[16] referente às propostas curriculares oficiais.

Como já foi comentado, a introdução da Probabilidade e Estatística no currículo escolar é bem recente em diversos países, inclusive no Brasil, sua inclusão oficial ocorreu com a publicação dos PCN dentro do bloco de conteúdos Tratamento da Informação que incorpora também Análise combinatória. Analisaremos o documento referente ao Ensino Fundamental (PCN-EF), pois esta pesquisa tem por finalidade o estudo do ensino e da aprendizagem desse nível de ensino.

---

[16] A Fundação Carlos Chagas (FCC), fundada em 1964, é uma instituição privada sem fins lucrativos, reconhecida como de utilidade pública nos âmbitos federal, estadual e municipal, dedicada à avaliação de competências cognitivas e profissionais e à pesquisa na área de educação. site :<http://www.fcc.org.br/institucional/>

2.3.2. Os PCN e Concepções dos Professores

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) constituem um referencial de qualidade para a Educação Básica com abrangência nacional e tem a função de

> [...] orientar e garantir a coerência dos investimentos no sistema educacional, socializando discussões, pesquisas e recomendações, subsidiando a participação de técnicos e professores brasileiros, principalmente daqueles que se encontram mais isolados, com menor contato com a produção pedagógica atual.
> Por sua natureza aberta, configuram uma proposta flexível, a ser concretizada nas decisões regionais e locais sobre currículos e sobre programas de transformação da realidade educacional empreendidos pelas autoridades governamentais, pelas escolas e pelos professores. Não configuram, portanto, um modelo curricular homogêneo e impositivo, que se sobreporia à competência político-executiva dos Estados e Municípios, à diversidade sociocultural das diferentes regiões do País ou à autonomia de professores e equipes pedagógicas. (BRASIL, 1997a, p. 13)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática têm o intuito de prover elementos para ampliar a discussão acerca do ensino dessa área do conhecimento em âmbito nacional, socializar informações, resultados de pesquisas e principalmente fazer com que chegue ao conhecimento dos professores.

Os conteúdos matemáticos aparecem divididos em quatro blocos de conteúdos: Números e Operações (campo da Aritmética e da Álgebra); Espaço e Forma (campo da Geometria); Grandezas e Medidas (permite interligações entre os campos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria e de outros campos do conhecimento); e Tratamento da Informação[17] (campo da Estatística, Probabilidade e Análise Combinatória). (BRASIL, 1998)

Tendo em vista o objetivo deste estudo, examinaremos o bloco Tratamento da Informação e daremos mais enfoque ao conteúdo de Probabilidade. Desta forma, analisando os PCN, verificamos que estes defendem a inclusão deste bloco em consequência de uma demanda social e ainda salientam que poderia estar incorporado aos outros blocos, mas encontra-se propositalmente separado para evidenciar sua importância, em decorrência de seu uso na sociedade atual.

> Um olhar mais atento para nossa sociedade mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão “tratar” as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados

[17] Concordamos com Coutinho (2005a, p. 5) “que a designação “Tratamento da Informação” não é adequada para esse ramo do conhecimento, pois uma informação não é objeto de tratamento, pois os dados tratados é que geram uma informação”.

> estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando idéias relativas à probabilidade e à combinatória. (BRASIL, 1998, p. 49)

Nesse sentido, Lopes (2008), em acordo com os PCN, também defende a importância do ensino desses conteúdos por estarmos inseridos na era das informações, e dessa forma é preciso que a escola proporcione aos seus alunos, a partir dos anos iniciais da Educação Básica, a formação de conceitos que os auxiliem no exercício de sua cidadania, desenvolvendo sua capacidade de atuação reflexiva, ponderada e crítica em seu grupo social, aumentado assim suas chances de êxito na vida pessoal e profissional, mas pondera que

> Não basta ao cidadão entender as porcentagens expostas em índices estatísticos como o crescimento populacional, taxas de inflação, desemprego, ... É preciso analisar/relacionar criticamente os dados apresentados, questionando/ponderando até mesmo sua veracidade. Assim como não é suficiente ao aluno desenvolver a capacidade de organizar e representar uma coleção de dados, faz-se necessário interpretar e comparar esses dados para tirar conclusões. (LOPES, 1998, p. 12-13).

Mendoza e Swift (1981 apud LOPES, 2008, p. 59) também destacam sua utilidade enfatizando que conhecimentos básicos de estatística e probabilidade deveriam ser ensinados de modo que os indivíduos pudessem utilizá-los para atuar na sociedade, podendo “analisar índices de custo de vida, realizar sondagens, escolher amostras e tomar decisões em várias situações do cotidiano”.

Lopes (2008) também defende a importância do ensino da estocástica, por propiciar aos alunos uma base consistente para estudos futuros, nos quais possam atuar em diferentes áreas científicas como a Biologia e as Ciências Sociais.

Neste contexto, o ensino de temas como a Estocástica, torna-se indispensáveis para a formação de um cidadão, pois, em relação à Probabilidade, torna se “imprescindível o conhecimento da probabilidade de ocorrência de acontecimentos para agilizarmos a tomada de decisões e fazermos previsões em várias situações do cotidiano” (LOPES, 1998, p. 12).

Na concepção dos PCN a principal finalidade do ensino de Probabilidade no Ensino Fundamental

> [...] é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis). (BRASIL, 1998, p. 52)

Organizamos um quadro (ver Anexo C) com as principais orientações dos PCN para o ensino de Probabilidades para o segundo (4º e 5º anos), terceiro (6º e 7º anos) e quarto (8º e 9º anos) ciclos do Ensino Fundamental, na qual podemos observar como Coutinho (2005), que o conceito de probabilidade é introduzido com a apresentação de situações aleatórias no 2º ciclo e vai sendo retomado e aprofundado a cada ciclo seguinte de forma progressiva. Dessa forma, favorece a construção passo a passo do conceito de probabilidade.

- Segundo ciclo: é a partir deste ciclo que devem ser iniciados os primeiros contatos com situações aleatórias a partir de experimentos simples quando devem ser identificados os resultados possíveis e também deve se observar as frequências relativas de um acontecimento e utilizar essas informações para avaliar probabilidades.
- Terceiro ciclo: os alunos devem aprender a construir o espaço amostral e calcular a probabilidade por meio de uma razão (abordagem clássica) de experimentos aleatórios com eventos elementares equiprováveis e também devem ser levados a perceber a importância de fazer previsões na vida cotidiana.
- Quarto ciclo: os alunos, além da determinação do espaço amostral utilizando o princípio multiplicativo e calcular a probabilidade, por meio de uma razão (abordagem clássica), de experimentos aleatórios com eventos elementares equiprováveis, devem, por meio de simulações estimar a probabilidade de sucesso de um evento ou verificar probabilidades previstas.

> Contrariamente ao aluno francês [...] que tem seu primeiro contato com o aleatório em contexto escolar apenas no ensino médio, nosso aluno passa pelos primeiros processos de familiarização com o acaso já nos primeiros ciclos da Escola Básica. (COUTINHO, 2003)

Não incluímos neste quadro o primeiro ciclo (1º, 2º e 3º anos), pois, concordamos com Coutinho (2005, p. 6), que os objetivos indicados pelos PCN para este ciclo não abarcam especificamente um trabalho com conceitos de Probabilidade, mas podem fazer conexão com as competências exigidas dos alunos para o trabalho nesse campo como

> [...] a observação das regularidades nas operações realizadas, a construção e o trabalho com representações preparam os alunos para o processo de abstração necessário à mudança de domínios (do domínio da realidade para o domínio pseudo-concreto). Ao mesmo tempo, o trabalho com tabelas e gráficos para leitura e interpretação de informações introduz os alunos às idéias de freqüências de ocorrência de um determinado resultado de uma observação, o que será fundamental para a compreensão do enfoque frequentista de probabilidades (enfoque experimental, nos termos usados pelos PCN).

> Citando os Parâmetros, *os assuntos referentes ao Tratamento de Informação serão trabalhados neste ciclo de modo a estimularem os alunos a fazer perguntas, estabelecer relações, a construir justificativas e a desenvolver o espírito de investigação,* atitudes fundamentais para o trabalho não somente no campo das probabilidades, mas em todos os domínios da Matemática.

Nos PCN de 1997 e 1998 também encontramos, respectivamente, uma parte intitulada "Orientações Didáticas" referentes ao primeiro e segundo ciclos e "Orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos", que têm a pretensão de "contribuir para a reflexão a respeito de como ensinar, abordando aspectos ligados às condições nas quais se constituem os conhecimentos" (BRASIL, 1997b; BRASIL, 1998, p. 95).

Com a citação dos PCN podemos notar que as Orientações Didáticas "pretendem contribuir", dando condições para que o professor construa suas atividades a partir das reflexões e não dar sugestões ou instrumentalizar o professor (COUTINHO, 2005a), pois salienta que essas orientações não abordam todos os conteúdos a serem desenvolvidos e dessa forma, "devem ser complementadas e ampliadas com a leitura de documentos e trabalhos que discutam pesquisas, estudos e outras orientações didáticas sobre os conteúdos matemáticos que fazem parte do currículo do ensino fundamental". (BRASIL, 1998, p. 95)

Dentre as Orientações Didáticas para os primeiro e segundo ciclos destacamos a comparação entre razões que envolvem então a proporcionalidade, conceito fundamental para o ensino de Probabilidade, no qual é possível formular situações que vão conferir significado à divisão em partes iguais e devem ser trabalhadas a partir de situações do cotidiano, por que assim, de acordo com os PCN, são mais bem compreendidos pelos alunos, constituindo-se como um agente facilitador para a construção do raciocínio probabilístico, como constatou Coutinho em sua tese. (COUTINHO, 2005a).

> A proporcionalidade, por exemplo, está presente na resolução de problemas multiplicativos, nos estudos de porcentagem, de semelhança de figuras, na matemática financeira, na análise de tabelas, gráficos e funções. O fato de que vários aspectos do cotidiano funcionam de acordo com leis de proporcionalidade evidencia que o raciocínio proporcional é útil na interpretação de fenômenos do mundo real. Ele está ligado à inferência e à predição e envolve métodos de pensamento qualitativos e quantitativos (Essa resposta faz sentido? Ela deveria ser maior ou menor? (BRASIL, 1997b, p. 38)

Outro argumento importante, presente nas "Orientações Didáticas" para os primeiro e segundo ciclos é a sugestão do enfoque frequentista, também sugerido por outros autores como Coutinho (1994; 2001) e Silva, I. A. (2002), que fica evidente pelo trecho presente nos

PCN: “pela observação da frequência de ocorrência de um dado acontecimento, e um número razoável de experiências, podem-se desenvolver algumas noções de probabilidade” (BRASIL, 1997b, p. 85)

A seguir reproduzimos as “Orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos” para o Ensino de Probabilidade presente nos PCN.

> Nos ciclos finais, a noção de probabilidade continua a ser explorada de maneira informal, por meio de investigações que levem os alunos a fazer algumas previsões a respeito do sucesso de um evento.
> Para ampliar a noção de probabilidade pode-se partir de uma situação como: em 10 lançamentos de uma moeda deu 9 vezes cara, ou seja, 90% dos lançamentos. A partir dessa afirmação é possível explorar as seguintes situações: se a moeda for lançada mais 10 vezes, é provável que essa porcentagem se repita? e se o número de lançamentos for 1.000? ou 10.000? Qual é a porcentagem que deve dar em cada caso? As respostas dos alunos evidenciam sua intuição a respeito de algumas idéias envolvidas na probabilidade e favorecem um trabalho de familiarização com esse assunto.
> É importante que eles descubram, pela experimentação, que as chances de cada resultado ser igual - 50% - deve-se à simetria da moeda e sua homogeneidade (moeda honesta).
> Com esse trabalho espera-se que o aluno também perceba que ele poderia ter lançado uma moeda 15 vezes obtendo nesses lançamentos 15 caras. Mas, mesmo que isso tivesse acontecido - o que é bem difícil - no 16º lançamento, a chance de obter cara continua sendo a mesma de obter coroa e que a “disparidade” entre os resultados de cara e de coroa tendem a diminuir conforme se amplia o número de experimentos.
> Ao se realizarem experiências para calcular probabilidades, é interessante utilizar materiais manipulativos que permitam explorar a propriedade da “simetria” (dados, moedas), como também os que não possuem essa “simetria”. (roletas com áreas desiguais para os números).
> No trabalho com probabilidade é fundamental que os alunos compreendam o significado de espaço amostral e sua construção pela contagem dos casos possíveis, utilizando-se do princípio multiplicativo e de representações como uma tabela de dupla entrada ou um diagrama de árvore. Desse modo, será possível indicar o sucesso de um evento utilizando-se de uma razão. (BRASIL, 1998, p. 137-138)

Com esta citação podemos observar que, nessa orientação, os PCN enfatizam ainda mais a utilização de um enfoque frequentista, desejando-se que os alunos percebam por meio das experimentações (um número grande de vezes) que possam estimar a probabilidade de ocorrência de um evento e comparar com a calculada *a priori* no enfoque clássico, fazendo uso da razão (casos favoráveis sobre total de casos possíveis), porém apenas em espaços amostrais equiprováveis, o que pode reforçar o obstáculo da equiprobabilidade[18].

---

[18] Obstáculo epistemológico segundo Lecoutre (1984), no qual o indivíduo atribui a equiprobabilidade aos eventos pela ausência de informações. Já citado nos itens 2.3.1. e 2.4.1

Como mencionado anteriormente, os PCN de Matemática constituem um referencial de qualidade para a Educação Básica, mas "como professores estão incorporando os Parâmetros Curriculares Nacionais na área de Matemática? Eles os utilizam como orientação para o planejamento de suas atividades em sala de aula?". Esses foram alguns dos questionamentos feitos por Kobashigawa (2006, p.18), em sua pesquisa e referente ao Tratamento da Informação[19] observou que nem todos os professores abordam esse bloco de conteúdos em suas aulas e apenas 37% introduzem ou realizam um trabalho parcial com Probabilidade no Ensino Fundamental.

Em sua pesquisa, Santos (2005), que teve como finalidade contribuir para o entendimento de como se dá o processo de incorporação de temas ligados à combinatória, probabilidade e estatística na Educação Básica e as relações dessa inovação curricular com o processo de formação continuada de professores, também verificou que nem todos os 52 professores participantes de sua pesquisa trabalham com o Tratamendo da Informação e desses apenas 24% abordam Probabilidade no Ensino Fundamental e 34% no Ensino Médio. Este estudo revelou que isso ser deve ao fato de os professores: considerarem esses conteúdos muito difíceis para os estudantes do Ensino Fundamental e até mesmo para o Ensino Médio; afirmarem não serem abordados nos livros didáticos; não terem domínio deste conteúdo, uma vez que, não os estudaram na graduação; e ainda, desconhecerem o que é proposto pelos PCN, além de não terem clareza da importância desses conteúdos para a formação do aluno.

> Evidentemente, sem conhecer com bastante profundidade um dado assunto matemático, fica muito difícil pensar em formas de ensiná-lo. Para esses professores, ensinar combinatória e probabilidade, por exemplo, significa apresentar um conjunto de fórmulas de permutações, arranjos, combinações e mostrar aos alunos, em situações-problema, nas quais devem ser utilizadas para que eles reproduzam o mesmo procedimento em situações similares. Como sua concepção de ensino prioriza o uso de definições formais, é provável que este seja um forte motivo para não aceitarem o tratamento desses conteúdos no Ensino Fundamental. (SANTOS, 2005, p. 99)

Os resultados de Kobashigawa (2006) e Santos (2005) vêm ao encontro das considerações de Carzola e Santana (2006), de que os professores da Escola Básica, não foram preparados para ministrar esses conteúdos e as pesquisas nessa área (Didática da Estatística e da Probabilidade) ainda são muito recentes no Brasil.

> Desafortunadamente, poucos professores tiveram acesso a uma formação estatística completa durante seus estudos, menos ainda tiveram a oportunidade de eles mesmos terem acesso à oportunidade de realizar um estudo estatístico ou sobre didática da Estatística. Tão pouco a prática

[19] Salientamos que já discutimos esta pesquisa no item 1.2.

> profissional lhes ajuda a completar esta formação, uma vez que, por não ensinarem Estatística – ou ensiná-la como uma parte da Matemática – não adquirem novos conhecimentos didáticos sobre a matéria. (BATANERO apud CARZOLA; SANTANA, 2006, p. 7, tradução nossa)

Ainda com relação aos professores vemos na pesquisa de Gonçalves (2004), na qual estudou quais as concepções sobre probabilidade os professores de matemática em exercício de São Paulo possuem relacionadas à sua formação básica a partir das concepções enunciadas por Azcárate (1996), que a maioria dos vinte professores participantes de sua pesquisa possuía a concepção "não probabilística" da realidade independente da faixa de ensino e que apenas três desses professores reconhecem a abordagem frequentista como modelo para resolução de situações aleatórias. Em sua pesquisa, o autor também buscou uma relação entre estas concepções e as diferentes tendências do Ensino de Probabilidades nas décadas de 1970, 1980 e 1990, por meio da análise de livros didáticos e documentos oficiais de cada período.

No quadro 1, a seguir, apresentamos as características e indicadores de cada tipo de concepções probabilísticas propostas por Azcárate (1996). Dessa forma podemos observar que os professores participantes da pesquisa de Gonçalves (2004) encontram-se no primeiro nível de concepções probabilísticas.

Concepção Probabilística	Características	Indicadores
Concepção "não probabilística da realidade"	Ausência da compreensão do azar e de sucessos aleatórios. As respostas são baseadas em crenças, com modelos deterministas de raciocínio e suas explicações se apoiam em ocorrência de sucessos simples e imediatos. (GONÇALVES, M. C., 2004, p. 118)	• Não reconhecimento claro do azar e dos sucessos aleatórios; • Modelos de raciocínio determinista; • Respostas baseadas em crenças e critérios de causalidade e/ou expectativa de resultados imediatos (AZCÁRATE, 1996 apud GONÇALVES, M. C., 2004, p. 87)
Concepção "intuitiva"	Presença de alguma compreensão do azar e sua relação com sucessos aleatórios, porém em caráter parcial e junto aos modelos concretos. Os juízos heurísticos são fundamentais nos esquemas de resolução de diferentes situações. (GONÇALVES, M. C., 2004, p. 118-119)	• Alguma compreensão do azar e dos sucessos aleatórios; • Raciocínios baseados fundamentalmente no uso heurístico de juízo; • Respostas baseadas em modelos não normativos, com muitas diferentes valorações das situações dependendo da experiência pessoal. (AZCÁRATE, 1996 apud GONÇALVES, M. C., 2004, p. 87)

Concepção "emergente"	Aceitação e compreensão das múltiplas representações matemáticas do azar. Há uma compreensão de alguns modelos probabilísticos e certa capacidade de aplicação em determinados casos, os mais familiares. Esta concepção supõe a presença de alguma instrução em probabilidade e estatística, ainda que seja de caráter inicial. (GONÇALVES, M. C., 2004, p. 119)	• Uma compreensão inicial sobre a existência de múltiplas representações matemáticas do azar, a partir de diferentes perspectivas; • Habilidade para aplicar modelos normativos a problemas simples e familiares; • Diferenciação reconhecida entre as crenças intuitivas e os modelos matemáticos. (AZCÁRATE, 1996 apud GONÇALVES, M. C., 2004, p. 87)
Concepção "normativa"	Profunda compreensão de modelos probabilísticos e sua aplicação em situações diversas. Apresentam habilidades para comparar e contrastar as diferentes situações aleatórias, em função dos diferentes modelos. (GONÇALVES, M. C., 2004, p. 119)	• Uma profunda compreensão da noção de aleatoriedade e sua aplicação ao estudo da realidade; • Habilidade para selecionar e aplicar modelos normativos e sua relação com diferentes contextos e fenômenos; • Capacidade para comparar e contrastar os diferentes modelos e raciocínio sob critérios normativos nas distintas situações aleatórias. (AZCÁRATE, 1996 apud GONÇALVES, 2004, M. C., p. 87-88)

Quadro 1: Quadro de Concepções Probabilísticas propostas por Azcárate (1996).

Faremos menção à pesquisa de Corrêa (2010), pois esta aborda o conhecimento profissional, na qual o autor buscou reconhecer, em um estudo de caso com seis sujeitos de pesquisa, como o conhecimento profissional influi na abordagem de Probabilidade quando o professor de Matemática do Ensino Básico leciona esse tema a partir do 6º ano.

Corrêa (2010, p. 141) observou que a abordagem da probabilidade se desenvolve em processos contínuos e crescentes, envolvendo diferentes perspectivas de ensino e reconhece que o conhecimento profissional e a abordagem da probabilidade possuem uma relação biunívoca, ou seja, "o conhecimento específico do conhecimento profissional está para o enfoque formal de probabilidade da mesma forma que o conhecimento pedagógico do conhecimento profissional está para o enfoque experimental de Probabilidade" e ainda verificou que:

- Cinco dos sujeitos apresentam uma concepção "não probabilística" da realidade, pelo indicador modelo de raciocínio determinista, pois utilizam unicamente a visão clássica, e uma professora possui a concepção "probabilística intuitiva", pelo indicador de suas respostas serem baseadas em modelos não normativos, com diferentes valores das situações dependendo da experiência pessoal. Podemos notar que esse resultado, como também ressalta o autor, coincide com o de Gonçalves, M. C. (2004), que também constatou que a maioria dos professores possui a concepção “não probabilística” da realidade;

- Todos tiveram seu primeiro contato com a Probabilidade na fase adulta, o que, de acordo com Corrêa (2010), baseado em Coutinho (1994), é um fator complicador, pois quanto mais cedo houver um contato com a probabilidade, podemos encontrar menos resistência a obstáculos;

> [...] pelo encorajamento de um ensino precoce de Probabilidades [...]. Ficou bastante clara para nós a diferença na aquisição destas noções e mesmo na correção dos erros de raciocínio, que aconteceu de forma muito mais significativa, com menos dificuldades para os alunos mais jovens. (COUTINHO, 1994, p. 132)

- Cinco professores não apresentam clareza do acaso, que é também um obstáculo epistemológico, considerando que a humanidade também demorou séculos para lidar e compreender o acaso;

> Um ponto que percebemos que interferiu diretamente na compreensão do acaso foi a visão determinista da Matemática, ou seja, para compreender o acaso, requeria que o entrevistado abandonasse tal visão, pois a análise de uma situação probabilística, para os mesmos era impossível ocorrer por essas duas perspectivas simultaneamente. (CORRÊA, 2010, p. 134-135)

- Muitos professores atribuem os valores de probabilidade apenas em porcentagem, o que complica ainda mais seu ensino, pois nas séries iniciais do Ensino Fundamental os alunos ainda não compreendem esta linguagem;
- A transição de situações-problema envolvendo espaço amostral equiprovável para o não equiprovável foi um elemento que dificultou as análises didáticas dessas situações pelos professores, o que constitui um obstáculo didático da utilização exclusiva da equiprobabilidade, que também foi identificado por Coutinho (1994, 2001).

Baseados nos resultados dessas pesquisas concordamos com Lopes (2008, p. 70) ao afirmar que a formação dos professores é um dos principais empecilhos para a efetivação do ensino de probabilidade e estatística na educação básica, pois esta, “atualmente, não incorpora um trabalho sistemático sobre estocástica, dificultando a possibilidade desses profissionais desenvolverem um trabalho significativo com essa temática nas salas de aula”.

A formação continuada em conjunto com a prática docente também não tem colaborado suficientemente para a inclusão da Probabilidade, como verificou Corrêa (2010), e de acordo com Santos (2005, p. 7), isso se deve pela “falta de discussões mais consistentes em relação à prática de ensino desses conteúdos em sala de aula e o pouco tempo destinado para o desenvolvimento do assunto”. Santos, apoiando-se em Oliveira (2003)[20], afirma que

> [...] os estudos têm denunciado que os programas de formação causam pouco efeito sobre a prática do professor e que não conseguem desafiar os professores em relação às suas concepções e crenças sobre o conhecimento da disciplina. Como salienta essa autora, é importante que os cursos desempenhem um papel mobilizador da reflexão sobre as ações e práticas dos professores e que incentivem os docentes a assumir o papel de sujeitos da sua formação, contribuindo, assim, para o seu desenvolvimento profissional. (SANTOS, 2005, p. 102)

De acordo com as considerações anteriores, podemos inferir que a maioria dos professores não está contemplando em suas aulas noções de probabilidade no Ensino Fundamental e isso se deve principalmente ao fato de não estarem preparados para ensinar Probabilidade, uma vez que as formações inicial e continuada não estão dando suporte suficiente para que o professor tenha domínio deste assunto, no qual a maioria ainda possui uma concepção não probabilística da realidade (raciocínio determinista), como apontam as pesquisas de Gonçalves, M. C. (2004) e Corrêa (2010).

Em nosso ver, é devido a esses motivos que os professores consideram a probabilidade um conteúdo difícil para alunos do Ensino Fundamental e até mesmo para o Ensino Básico, além de afirmarem que a Probabilidade não é abordada nos livros didáticos, como aponta a pesquisa de Santos (2005).

2.3.3. Livros Didáticos

Friolani (2007) aponta que o livro didático passa de um material de apoio ao professor à sua principal fonte de pesquisa para o preparo e desenvolvimento de suas aulas e dessa forma, desempenha o papel de protagonista e não de coadjuvante no processo de ensino e aprendizagem.

Nesse sentido, Lajolo (1996) também afirma que no Brasil os livros didáticos acabam por determinar conteúdos (“o que” se ensina) e condicionar as estratégias de ensino do

---

[20] Santos (2005) faz referência a Andréia Maria Pereira de Oliveira e sua dissertação: Formação Continuada de Professores de Matemática e suas Percepções sobre as Contribuições de um Curso, defendida em 2003, pertencente a Universidade Estadual Paulista (UNESP) – campus de Rio Claro.

professor ("como" se ensina). Dessa forma, podem ser decisivos na qualidade do ensino escolar.

Corroborando com Friolani (2007) e Lajolo (1996), Dante (1996, p. 52) também declara que "o livro didático passou a ser o principal e, em muitos casos, o único instrumento de apoio ao trabalho docente", indicando assim, a extensão, a sequência e até ritmo de desenvolvimento das aulas, além de ser ferramenta essencial no auxílio à aprendizagem em sala de aula

Dessa forma achamos importante investigar como a Probabilidade é abordada nos livros didáticos do Ensino Fundamental, o que posteriormente servirá como ferramenta para construção de nossa sequência didática. Queremos ainda verificar se a afirmação feita pelos professores da pesquisa de Santos (2005) de que a probabilidade não é abordada nos livros didáticos ainda se sustenta.

Começaremos pela análise das atividades propostas para o ensino de probabilidade e estatística nos livros didáticos do Ensino Fundamental, realizadas por Lopes e Moran (1999, p. 4), na qual observaram que existe "um descompasso claramente perceptível entre os objetivos a serem alcançados pela inclusão do ensino da estatística e probabilidade no Ensino Fundamental e a forma como se dá nos textos examinados". Na sequência, segue uma lista dos problemas encontrados pelas autoras:

- No 2º ciclo, as atividades fazem "menção às possibilidades em abordagens lúdicas, sem função outra que sua listagem por si mesma". Dessa forma, trabalha apenas conceitos matemáticos; (LOPES; MORAN, 1999, p. 5)
- Não são utilizados os termos *evento* e *evento elementar* referindo-se, respectivamente, a qualquer subconjunto do espaço amostral e a cada uma das possibilidades do experimento;
- Apesar de ser uma ferramenta essencial da Probabilidade, a porcentagem não aparece vinculada ao raciocínio probabilístico;
- A palavra probabilidade não é utilizada na introdução do conceito de chance;
- O conceito de probabilidade é definido exclusivamente em uma abordagem clássica (casos favoráveis sobre casos possíveis), quando são trabalhados apenas experimentos com espaços amostrais equiprováveis e com um conjunto finito de possíveis, não fazendo referência às suas restrições;

- A definição frequentista não é abordada;
- "Os conceitos básicos de amostra probabilística e não probabilística, não são abordados"; (LOPES; MORAN, 1999, p. 8)
- "alguns autores utilizam-se de adjetivação para amostra como "representativas" e "reprodução da população", sem utilizar o termo amostra probabilística, o que deveria ser evitado ou atribuído a essas qualidades uma chance". (LOPES; MORAN, 1999, p. 8).

As autoras também inferiram que o ensino de Probabilidade e Estatística não se relacionam, resultando em um ensino compartimentalizado. Esse fato também foi constatado por Friolani (2007) e Gonçalves M. C. (2004) em suas análises dos livros didáticos do Ensino Fundamental e Ensino Médio respectivamente e também pelo Guia de Livros Didáticos 2008, que faz a seguinte assertiva em relação a um dos livros didáticos aprovados: "No entanto, a articulação entre probabilidade e estatística não é feita". (BRASIL, 2008, p. 66)

Fomos verificar se esses problemas encontrados por Lopes e Moran (1999) ainda persistem em três coleções de livros didáticos provadas pelo Guia do PNLD 2008:

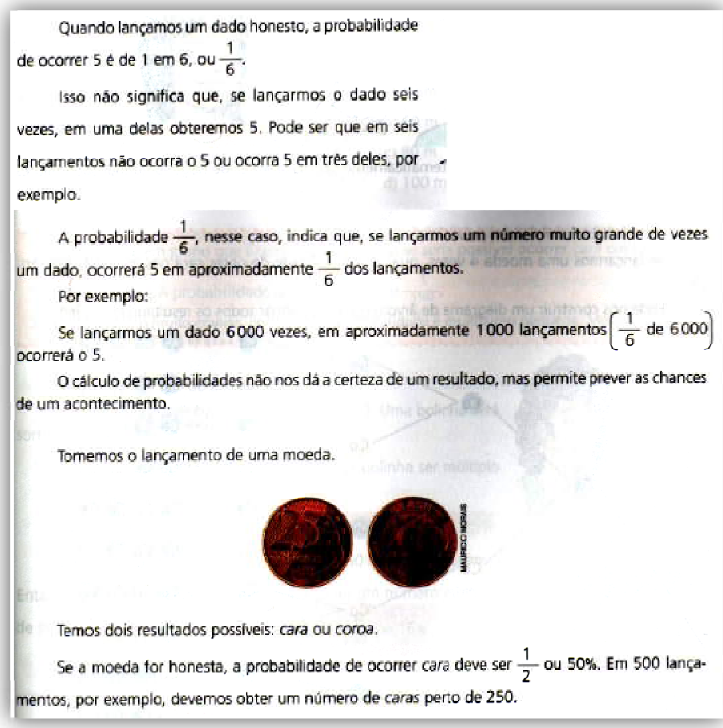
1) *Matemáticas Ideias e Desafios*, de Iracema Mori e Dulce Satiko Onaga;

2) *Praticando Matemática*, de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos;

3) *Matemática e Realidade,* de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolcce e Antonio Machado.

Verificamos que todas as coleções: apresentam a noção de Probabilidade; não utilizam os termos evento para qualquer subconjunto do espaço amostral e termo evento elementar para cada uma das possibilidades do experimento; não apresentam a ideia de experimento determinístico; apresentam um ensino compartimentalizado; a porcentagem aparece vinculada a probabilidade; a palavra probabilidade é utilizada na introdução do conceito de chance; e todas abordam a probabilidade na visão clássica sem fazer menção às restrições de se trabalhar com espaços amostrais equiprováveis.

Observamos também que nenhuma das coleções apresenta probabilidade geométrica e apenas a coleção *Praticando Matemática* não apresenta a ideia de experimento aleatório, mas faz uma pequena menção sobre a frequência de um evento elementar se aproximar de sua probabilidade em um número grande de realizações, mas não para o cálculo de probabilidades, como podemos observar na figura a seguir.



Quando lançamos um dado honesto, a probabilidade de ocorrer 5 é de 1 em 6, ou $\frac{1}{6}$.

Isso não significa que, se lançarmos o dado seis vezes, em uma delas obteremos 5. Pode ser que em seis lançamentos não ocorra o 5 ou ocorra 5 em três deles, por exemplo.

A probabilidade $\frac{1}{6}$, nesse caso, indica que, se lançarmos um número muito grande de vezes um dado, ocorrerá 5 em aproximadamente $\frac{1}{6}$ dos lançamentos.

Por exemplo:

Se lançarmos um dado 6000 vezes, em aproximadamente 1000 lançamentos $\left(\frac{1}{6} \text{ de } 6000\right)$ ocorrerá o 5.

O cálculo de probabilidades não nos dá a certeza de um resultado, mas permite prever as chances de um acontecimento.

Tomemos o lançamento de uma moeda.

Temos dois resultados possíveis: *cara* ou *coroa*.

Se a moeda for honesta, a probabilidade de ocorrer *cara* deve ser $\frac{1}{2}$ ou 50%. Em 500 lançamentos, por exemplo, devemos obter um número de *caras* perto de 250.

Figura 2: (VASCONCELLOS; ANDRINI, 2008, p. 116-117)

Também podemos notar que a noção de probabilidade nessas coleções, está concentrada em apenas um capítulo do livro do 9º ano, não levando em consideração a recomendação dos PCN de que o ensino de probabilidade deveria ser iniciado no 2º ciclo e a partir daí ir sendo retomado e aprofundado a cada ciclo seguinte de forma progressiva favorecendo assim, a construção passo a passo deste conceito. Além disso, são destinadas poucas páginas à probabilidade. A coleção *Matemática e Realidade*, por exemplo, destinou apenas quatro páginas a este estudo, talvez por isso os professores da pesquisa de Santos (2005) afirmaram que os livros didáticos não abordam este conteúdo.

Passamos agora à pesquisa de Luis Cesar Friolani (2007), que analisou três coleções de livros didáticos em sua dissertação intitulada *O pensamento estocástico nos livros didáticos do Ensino Fundamental*, que teve como objetivo verificar qual a organização referente ao Tratamento da Informação que os livros didáticos do Ensino Fundamental (6º ao 9º ano) apresentam e se esta vem a favorecer a construção do pensamento Estocástico, atendendo também às orientações propostas pelos PCN.

Para tanto, foram analisadas as seguintes coleções de livros didáticos: *Oficina de Conceitos*, de Walter Spinelli e Maria Helena Soares de Souza; *Matemática em Movimento*, de Adilson Longen; e *Matemática Hoje se Ensina Assim*, de Antonio José Lopes Bigode, que foram escolhidas devido a dois critérios, o primeiro é que a coleção deveria obrigatoriamente ter sido aprovada pelo PNLD (2005) e, além de ser uma obra tradicional, ser frequentemente adotada pelos professores.

A análise foi realizada segundo a Organização Praxeológica (CHEVALLARD, 1995), em que buscou "identificar as tarefas, as técnicas e o discurso teórico-tecnológico, bem como o nível de letramento estatístico que, segundo Shamos (1995), se classifica em cultural, funcional e científico". (FRIOLANI, 2007. p. 7)

Com relação ao conteúdo de Probabilidade, Friolani (2007) procurou observar se as coleções oferecem condições para a construção dos conceitos básicos pelos alunos, tal como foram enunciados por Coutinho (2001) em sua pesquisa, que foram:

> [...] a percepção do acaso, a ideia de experimento aleatório e a noção de Probabilidade. Ou seja, é necessário que o sujeito que está pronto para resolver um problema no campo da Probabilidade perceba que a situação a ser analisada não é determinística, que inclui o desenvolvimento de uma experiência aleatória [...] e que o evento observado resultado dessa experiência aleatória, pode ser avaliado em termos probabilísticos por uma razão entre o número de sucessos possíveis e o número total de casos [...] Logo, ao final do Ensino Fundamental, o aluno deverá ser capaz de observar e descrever um experimento através de diagrama de árvores, calcular a Probabilidade de um evento, relacionar a Estatística e a Teoria das Probabilidades, assim como resolver problema de contagem [...] (FRIOLANI, 2007, p.21)

A seguir apresentamos um quadro com as principais conclusões de Friolani (2007) em relação às três coleções analisadas por ele.

Coleções	Conteúdo	Considerações
Oficina de Conceitos Walter Spinelli Maria Helena Soares de Souza (Editora Ática) (2002)	As atividades propostas nesta coleção buscam desenvolver as habilidades estatísticas com pesquisa, resolução de problemas, organização e representação de dados, através de tabelas e gráficos, além dos cálculos e da interpretação de medidas estatísticas, como média mediana e moda. Quanto à Probabilidade, o autor propõe atividades a partir do enfoque frequentista, proposto por Bernoulli, associado à abordagem clássica de Laplace; o cálculo de Probabilidade é elaborado a partir de tabela com distribuição de frequência absoluta e relativa. (FRIOLANI, 2007, p.131)	• Atende as orientações propostas pelos PCN e pesquisas na área; • Favorece o desenvolvimento do pensamento estocástico; • Procura desenvolver as habilidades do aluno em relação a pesquisa; • Procura a interação entre os conceitos de Estatística e Probabilidade;
Matemática em Movimento Adilson Longen (Editora Positivo) (2004) e **Matemática Hoje se Ensina Assim**[21] Antonio José Lopes Bigode (Editora FTD) (2002)	As tarefas ali contidas não envolvem a resolução de problemas, ou seja, as propostas são de simples interpretação de dados já registrados em tabelas e gráficos, particularmente explorando unicamente a leitura direta, sem explorar a pesquisa, a coleta, a organização e a representação dos dados, a análise e a tomada de decisões. Dessa forma, não atendem as orientações propostas pelos PCN e pelas pesquisas na área. (FRIOLANI, 2007, p.132)	• Há pouca exploração das atividades propostas em cada coleção referente ao Tratamento da Informação permite apenas o desenvolvimento de alguns conceitos estocásticos; • Não atende as orientações propostas pelos PCN e pesquisas na área; • Não favorece o desenvolvimento do pensamento estocástico; • Não existe interação entre os conceitos de Estatística e Probabilidade;

Quadro 2: Quadro com observações dos livros analisados por Friolani (2007)

Como podemos observar, entre as três coleções, a coleção *Oficina de Conceitos* é a única que aborda a probabilidade a partir uma visão frequentista e salientamos que esta não está entre as aprovadas no Guia do PNLD (2008). Nas outras duas coleções, a abordagem é feita por meio da visão clássica de probabilidade e também não observamos muitas mudanças em relação às considerações do autor, levando em conta as suas referidas análises presentes no Guia do PNLD (2008):

[21] O autor faz uma análise única dessas duas coleções por apresentarem perfis equivalentes.

- Na coleção *Matemática em Movimento* a probabilidade está presente apenas no livro do 9º ano em um único capítulo intitulado: *frações e probabilidades* e as noções não só de probabilidade com também de combinatória e estatística estão pouco presentes na obra, além apresentarem uma exploração inapropriada desses conceitos;
- Na coleção *Matemática Hoje é Feita Assim*, tanto a probabilidade quanto a estatística continuam tendo pouca presença, pois estão reduzidas a um único capítulo cada uma, no 8º ano para probabilidade e no 9º ano estatística, mas apesar disso estão inclusos os conhecimentos relevantes deste campo.

Em suas considerações finais, Friolani (2007) concorda com Morais (2006) concluindo que os autores de livros didáticos privilegiam tarefas que cooperam para uma concepção tecnicista da estatística, levando a um letramento de nível cultural e também está de acordo com pesquisas recentes nas quais apontam que os livros didáticos não estão apresentando conceitos básicos do bloco Tratamento da Informação. Porém, pontua que os autores de livros didáticos vêm apresentando certa preocupação em atender às novas orientações dos PCN e que têm acrescentado esse tema de forma receosa e geralmente em um capítulo localizado no final do livro do 9º ano.

Friolani (2007, p. 133) também cita a pesquisa realizada por Gonçalves, M. C. (2004) na qual revela “que os professores não estão preparados para ensinar esses conceitos de maneira a favorecer a construção do pensamento estocástico, uma vez que foram formados no método tradicional, tecnicista, e ensinam da mesma forma” e conclui que esse pode ser um dos motivos dos baixos rendimentos apresentados pelos alunos nas avaliações oficiais como o SAEB[22], o SARESP[23] e o ENEM[24].

[22] O Sistema de Avaliação da Educação Básica (Saeb), conforme estabelece a Portaria n.º 931, de 21 de março de 2005, é composto por dois processos: a Avaliação Nacional da Educação Básica (Aneb) e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Anresc). Definição obtida em <http://www.inep.gov.br/basica/saeb/default.asp>. Acesso em: 27 jan. 2011.

[23] O Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – Saresp – é uma avaliação externa da Educação Básica, realizada desde 1996 pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo – SEE/SP. O Saresp tem como finalidade produzir informações consistentes, periódicas e comparáveis sobre a situação da escolaridade básica na rede pública de ensino paulista, visando orientar os gestores do ensino no monitoramento das políticas voltadas para a melhoria da qualidade educacional. Definição obtida em: <http://saresp.fde.sp.gov.br/2010/Pdf/2_Apresentacao_site_Revisado.pdf >. Acesso em: 27 jan. 2011.

[24] Criado em 1998, o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) tem o objetivo de avaliar o desempenho do estudante ao fim da escolaridade básica. Podem participar do exame alunos que estão concluindo ou que já concluíram o ensino médio em anos anteriores. O Enem é utilizado como critério de seleção para os estudantes que pretendem concorrer a uma bolsa no Programa Universidade para Todos (ProUni). Além disso, cerca de 500 universidades já usam o resultado do exame como critério de seleção para o ingresso no ensino superior, seja complementando ou substituindo o vestibular. Definição obtida em: < http://www.enem.inep.gov.br/enem.php>. Acesso em: 27 jan. 2011.

De acordo com Friolani (2007) suas reflexões permitiram

> [...] não apena concluir que as coleções, de modo geral, não favorecem a construção do pensamento estocástico, mas também perceber a necessidade de mais pesquisas relacionadas a este assunto e de aperfeiçoamento dos professores, para que possam desenvolver esses conceitos a partir da resolução de problemas. Assim, poderão complementar as atividades propostas pelos livros didáticos e propiciar aos alunos a aquisição de habilidades referentes aos conceitos estocásticos, o que os levará a atingir o nível de letramento funcional.
> Por outro lado, aos autores de livros didáticos cabe incorporar às suas obras os resultados das pesquisas atuais. (FRIOLANI, 2007, p.133-134)

Como a pesquisa de Friolani (2007) foi realizada a partir de livros didáticos aprovado no Guia do PNLD (2005), achamos que devíamos observar o Guia do PNLD (2008) por ser o vigente atualmente, cujo guia qual afirma que "quase todas as coleções incluem conceitos como princípios de contagem e possibilidade, chance e probabilidade". Ressalta-se também que na abordagem desses conceitos no bloco Tratamento da Informação estas são as maiores deficiências e apontam-se problemas graves, como o uso de possibilidade referindo-se erroneamente a probabilidade. Além disso, são feitas, por vezes, explorações superficiais e com situações que simulam forçadamente a realidade. (BRASIL, 2008, p. 52)

O Guia do PNLD (2008) também afirma que devido ao bloco Tratamento da Informação estar a pouco tempo entre os conteúdos do Ensino Fundamental, "ainda não se tenha estabelecido uma tradição dos tópicos deste bloco, que devem ser ensinados, e de que forma este ensino deve ocorrer" (BRASIL, 2008, p. 50). Percebe-se, assim, que não existe um consenso sobre o que e como abordar estes conteúdos. Esta assertiva pode estar relacionada com o que foi observado anteriormente com relação aos professores, pois a maioria não está preparada para este ensino por não ter conhecimento do conteúdo, uma vez que não o viram em sua formação e ainda possuem uma *concepção não-probabilista de probabilidade* como foi constatado por Gonçalves, M. C. (2004).

2.3.4. Ensino e Aprendizagem

Como já foi mencionada anteriormente as pesquisas sobre a Educação Estatística ainda são muito recentes e de acordo com Carzola, Kataoka e Silva (2010, p. 21-22), atualmente no Brasil existem duas correntes distintas.

> Uma delas é formada por pesquisadores vinculados à Educação Matemática e áreas correlatas, que tem forte ligação com a escola básica [...] Em 2000 alguns desses pesquisadores criaram um Grupo de Trabalho dentro da Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM[25], denominado GT12 – Ensino de Probabilidade e Estatística.
> A outra é formada por professores que ensinam Estatística em cursos de graduação e pós-graduação das diversas áreas do conhecimento, [...] mais preocupados com a formação do estatístico e dos usuários de Estatística no Ensino Superior e sua ligação é mais forte com a Associação Brasileira de Estatística – ABE[26].

Carzola, Kataoka e Silva (2010) fizeram um levantamento da produção científica dos 43 pesquisadores[27] ligados à Educação Estatística e que fazem parte do GT12 (Ensino de Probabilidade e Estatística) que, como já foi citado, é um grupo de trabalho da SBEM, com o objetivo de analisar o movimento desta área no Brasil.

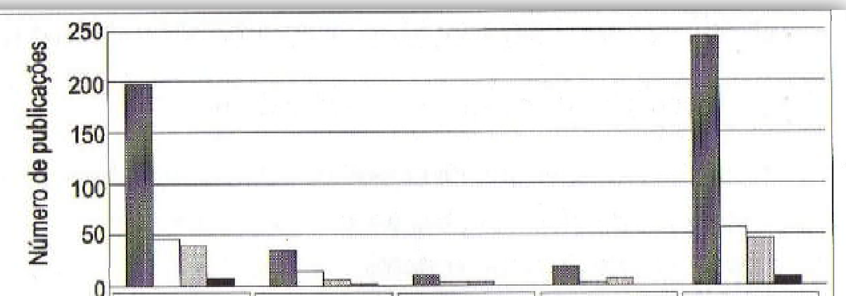
Um dos resultados obtidos pelas autoras foi que a maioria das publicações são da área de Estatística (68,2%), seguido da Probabilidade (16,2%), depois Estocástica (13,4%) e por fim a Análise Combinatória com apenas 2,2% (ver Figura 3). (CARZOLA; KATAOKA; SILVA, 2010)

---

[25] Fundada em 27 de janeiro de 1988, a SBEM é uma sociedade civil, de caráter científico e cultural, sem fins lucrativos e sem qualquer vínculo político, partidário e religioso. Tem como finalidade congregar profissionais da área de Educação Matemática ou de áreas afins. A SBEM tem em seus quadros pesquisadores, professores e alunos que atuam nos diferentes níveis do sistema educacional brasileiro, da educação básica à educação superior. Tem também sócios institucionais e sócios de outros países. Definição obtida em: <http://www.sbem.com.br >. Ultimo acesso em: 26 jan. 2011.

[26] A Associação Brasileira de Estatística (ABE) foi criada em 1984, após vários anos de profícua discussão sobre sua viabilidade e oportunidade por parte da comunidade estatística nacional e tem como maior objetivo, promover o desenvolvimento, disseminação e aplicação da Estatística no Brasil. Pela diversidade da Estatística nas mais diversas áreas do conhecimento, a ABE tem como missão incentivar, através dos eventos que organiza e promove, um intercâmbio amplo entre professores, pesquisadores, profissionais e estudantes das mais diversas áreas que necessitem da Estatística, bem como profissionais do setor produtivo. Definição obtida em: <http://redeabe.org.br/>. Ultimo acesso em: 26 jan. 2011.

[27] As autoras consideraram apenas os 43 pesquisadores que apresentaram trabalho(s) nas três edições do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) por acreditar ser o GT12 responsável por uma parcela significativa da produção científica da Educação Estatística no Brasil. Apesar de esta escolha ter deixado de lado outros pesquisadores que também trabalham com esta temática. (CARZOLA; KATAOKA; SILVA, 2010)



	trabalho	artigo	livro	cap. de livro	total
Estatística	192	31	6	11	240
Probabilidade	45	10	1	1	57
Estatística e Probabilidade	40	3	1	2	47
Análise Combinatória	7	1	0	0	8
Total	284	45	8	14	352

Figura 3: Publicações do GT12 na área de Educação Estatística por área de investigação
Fonte: Carzola; Kataoka; Silva (2010, p. 33)

Dessas pesquisas brasileiras apresentaremos algumas que tiveram enfoque no ensino e aprendizagem de probabilidade para ver para onde as pesquisas apontam e que estão relacionadas ao desenvolvimento da nossa pesquisa. Silva, I. A. (2002), Coutinho (1994), Gonçalves, M. C. (2004).

Principiamos com o trabalho de Coutinho (1994) que teve como objetivo investigar como se dá a aquisição de conceitos básicos de Probabilidade por meio da visão frequentista, ou seja, a partir da observação da estabilização da frequência relativa de um evento após um grande número de repetições do experimento aleatório, para mostrar as vantagens da utilização dessa abordagem para o ensino dos primeiros conceitos de probabilidade.

Para tanto, a autora optou por colocar os alunos em situações, que pudessem por meio da experimentação, fazê-los realizar uma modelização do real e assim, descrever a experiência aleatória e seu espaço amostral, buscando trabalhar sobre as concepções espontâneas adquiridas por meio de um questionário, no qual identificou duas dificuldades didáticas (concepções que dificultam a aprendizagem), devido a entraves de natureza cognitiva:

- a crença da equiprobabilidade devido a ausência de informações sobre o evento a ser observado;
- a crença de que a probabilidade de um evento pode ser influenciada por informações obtidas pelo observador; (COUTINHO, 1994, p. 131)

Coutinho (1994, p. 136) defende a opção de ensino por uma visão frequentista pelo fato de que a maioria dos alunos, pela sua própria experiência de vida, já utilizam a frequência relativa para estimar a probabilidade de um evento, mesmo que de uma forma intuitiva e "para que possa ser mais um instrumentos de leitura da realidade na qual estamos inseridos e a qual podemos diariamente acompanhar pelos noticiários, repletos de dados estatísticos".

Podemos notar que em sua dissertação Coutinho (1994, p.09), defende a necessidade de uma mudança no programa de ensino brasileiro e que a visão frequentista de probabilidade parece ser "mais adequada a um primeiro contato com as probabilidades, pois pode utilizar experimentos ligados à realidade dos alunos, uma vez que não precisa estar limitado à hipótese de equiprobabilidade". Já em sua tese (COUTINHO, 2001) mostra que existe a necessidade de se articular as noções frequentista e laplaciana para a efetiva construção do conceito de probabilidade.

Nesse sentido, Batanero (2005, p. 260) também defende que o ensino de Probabilidade exclusivamente pelo enfoque frequentista não é suficiente, pois, "um conhecimento genuíno de probabilidade só se alcança com o estudo de alguma probabilidade formal, embora deva ser gradual e estar apoiada na experiência estocástica dos estudantes".

> Mesmo quando a simulação pode ajudar a achar uma solução para um problema probabilístico decorrente de uma situação da realidade, a simulação não pode provar que esta seja a solução mais relevante, porque depende das hipóteses e da definição teórica na qual o modelo é construído. Um conhecimento genuíno de probabilidade somente pode ser alcançado por meio do estudo de alguma teoria formal de probabilidade. No entanto, a aquisição da teoria formal de probabilidade pelos estudantes poderá ser gradual e apoiada por sua experiência estocástica. (BATANERO; HENRY; PARZYSZ, 2005 apud CORRÊA, 2010, p. 21)

Friolani (2007, p.78) concorda que devemos associar o enfoque frequentista, pois este se apresenta como um agente facilitador para o aprendizado por ser mais próximo da realidade dos alunos, com o enfoque clássico, porque "é com a confrontação entre esses enfoques, que a Probabilidade *a priori* e *a posteriori* torna essa aprendizagem eficaz, e o aluno constrói o significado para os conceitos básicos de Probabilidade".

Em acordo com essa linha de pensamento, temos a dissertação de Silva, I. A. (2002), que desenvolveu e aplicou uma sequência didática na qual os conceitos de probabilidade foram abordadas integrando as concepções clássica e frequentista visando uma aprendizagem mais sólida e significativa.

Esse autor aponta que entre os principais problemas relacionados ao ensino e aprendizagem do conceito de probabilidades no ensino médio está a falta de se trabalhar algumas noções importantes; a abordagem tecnicista e tradicional baseada na sequência "definição-exemplo-exercício" ou apenas "definição-exemplo" sem atividade alguma para poder aprofundar o ensino; e principalmente a abordagem exclusiva da visão clássica de probabilidades, sem fazer qualquer referencia à visão frequentista, proporcionando aos alunos apenas uma das faces da teoria de Probabilidades.

Apesar de sua sequência não contemplar a experimentação concreta, isto é, a realização efetiva do experimento, pelos resultados da análise *a posteriori* , Silva, I. A. (2002, p. 156) pode atestar a validade de sua proposta, dessa forma, existe a possibilidade da construção da definição frequentista sem a necessidade de realizar experimentos, mas pondera que a realização de atividades nas quais os alunos pudessem observar concretamente a estabilização da frequência relativa dos eventos, "poderia ter encaminhado um número ainda maior de alunos a incorporar – construir – a visão frequentista de probabilidades".

Corroborando com Silva, I. A. (2002), Lopes (1998, p. 28) afirma que é "necessário desenvolver uma prática pedagógica na qual sejam propostas situações em que os estudantes realizem atividades, observando e construindo os eventos possíveis, através de experimentação concreta", pois, a aprendizagem da Estocástica só irá complementar a formação dos alunos se for significativa, com situações que sejam contextualizadas, investigadas e analisadas.

Em suas considerações finais, Silva, I. A. (2002, p. 158) afirma que os alunos apresentaram um bom aproveitamento, pois concretizaram seus estudos tendo uma visão mais significativa e abrangente do conceito de probabilidade, na qual as visões clássica e frequentista parecem ter sido incorporadas/construídas pelos alunos e também que "um número considerável de alunos parece ter iniciado uma aprendizagem significativa das noções constitutivas do campo conceitual probabilístico".

Outro autor que levou em consideração a dualidade dos enfoques clássico e frequentista de probabilidade foi Rodrigues (2007), fazendo uso da Urna de Bernoulli[28] como modelo fundamental no ensino de probabilidade, no qual utilizou uma atividade denominada "Garrafa de Brousseau", descrita a seguir.

[28] "A Urna de Bernoulli é um modelo pseudoconcreto de probabilidade, e representa dada uma experiência aleatória, um modelo binomial resultando em dois eventos possíveis: "sucesso" ou "fracasso". Por que pseudoconcreto? Porque os alunos podem expressá-lo utilizando um vocabulário corrente, quotidiano, mesmo trabalhando com objetos abstratos, já idealizados a partir de objetos da realidade". (RODRIGUES, 2007, p. 57)

> Em uma garrafa não transparente e vazia colocaremos cinco bolas, tomadas de um saco opaco que contém cerca de trinta bolas. Devemos verificar que haja no saco apenas bolas brancas e bolas pretas.
> Após misturar, retirar 5 bolas, permitindo aos alunos a constatação da quantidade (mas não da cor). Colocar 5 bolas na garrafa, fechando seu gargalo com material transparente, simulando um funil.
> Questão a ser colocada: como estimar a composição na garrafa? Ou seja, como estimar a proporção de bolas brancas na garrafa? (RODRIGUES, 2007, p. 70)

Rodrigues (2007, p. 95) pôde observar que por meio dessa situação, os alunos foram atores principais no seu processo de aprendizagem, pois “o conceito de probabilidade por um modelo frequentista já estava sendo utilizada pelos alunos na fase de validação” e conclui que o ensino do conceito de probabilidade tendo como modelo fundamental a Urna de Bernoulli é viável e significativo como também comprovou a pesquisa de doutorado de Coutinho (2001), na qual verificou que os alunos aceitam a utilização do modelo pseudo-concreto urna de Bernoulli para representar o jogo de Franc-Carreau.

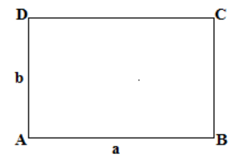
Como vimos anteriormente os PCN também incitam a utilização de uma abordagem clássica e frequentista de probabilidade e segundo Coutinho (2005, p. 7) os dois últimos objetivos[29] para o ciclo 2, estão de acordo com a proposta para sequência didática de Coutinho (2001), na qual apresenta

> [...] atividades com enfoque experimental e que utilizam uma mudança de quadros para a resolução de problemas apresentados em contexto geométrico. Ou seja, um problema no quadro de probabilidades será resolvido no quadro geométrico, tendo seu resultado interpretado e validado novamente no quadro original, o da probabilidade.

Neste trabalho, Coutinho (2001 apud COUTINHO, 2005b) faz uso do contexto geométrico para o ensino de Probabilidades, e mostra a importância do uso de um contexto diferente, pois propicia a riqueza dos enfoques necessários para a construção do conceito de probabilidade. A autora também tira vantagens do recurso computacional utilizando o *software* Cabri-géométre II para realizar a simulação do experimento um número significativo de vezes, que é uma dificuldade do ensino por uma abordagem frequentista.

---

[29] Ver quadro de orientações dos PCN no Anexo 2.

> O software Cabri-geomètre II permite o cálculo das coordenadas de um *pixel* interior a uma superfície representada na tela. Este procedimento supõe uma caracterização, pelo software, desta superfície. Para explicar essa forma de utilização de Cabri II e do seu "gerador de acaso" (1), vamos nos servir da figura mais simples para este tipo de uso: um retângulo ABCD, que posicionaremos na tela conforme a figura ao lado: lados paralelos aos lados da tela. Podemos assim medir os comprimentos dos lados AB e AD, obtendo as dimensões "*a* cm" e "*b* cm", respectivamente.
>
> 
>
>
> A possibilidade de escolher um *pixel* ao acaso em um cabri-desenho existe devido ao uso da função "rand", acessível através da "calculadora". (COUTINHO, 2005b, p. 191)

Ainda neste sentido o trabalho Kataoka et al (2007, p. 6-7) propôs uma ideia para a apresentação de conceitos básicos de probabilidade geométrica, bem como um confronto de resultados com a probabilidade frequentista. Segundo os autores as sequências didáticas propostas, também estão de acordo o dois últimos objetivos dos PCN, pois

> [...] apresentam um caráter experimental, utilizando uma mudança de enfoque para a resolução de problemas. Assim, um problema de probabilidades será resolvido no enfoque geométrico, tendo seu resultado interpretado e validado novamente no enfoque original, o da probabilidade.

Salientamos que nesta proposta tanto Kataoka et al (2007) como Coutinho (2001), fazem uso de recursos computacionais disponíveis para realizar os processos de simulações da probabilidade frequentista, ou seja, "para mostrar que, para um "n" grande, os resultados das estimativas de probabilidades podem atender aos critérios de convergência e terem uma boa precisão".

Outros autores que utilizaram a probabilidade geométrica foram Silva, Campos e Itacatambi (2008, p. 14) que relatam a experiência que tiveram na aplicação de atividades envolvendo Probabilidade Geométrica em que estudantes universitários tiveram a oportunidade de rever conceitos geométricos e aprender probabilidade por meio de atividades nas quais utilizavam o geoplano. Esses autores verificaram que a maioria já traz uma ideia de probabilidade independente de terem aprendido ou não e que

> A geometria, ainda que deixada para o final do plano de ensino por muitos educadores e ate mesmo vista de forma superficial no ensino medio, nao apresentou obstáculos para os estudantes nas atividades. Isto mostra que uma atividade bem planejada pode superar algumas defasagens encontradas na formação matemática de nossos estudantes. Para finalizar, ressaltamos a necessidade de o professor assumir o papel de investigador diante daquilo que pretende ensinar, pois este trabalho revelou o sucesso de nossa

> investigação, bem como o de nossos estudantes, no ensino do conceito de probabilidade.

Os trabalhos aqui apresentados são referentes ao ensino e aprendizagem de Probabilidade e em geral apontam que este deve ser conduzido levando em consideração a dualidade das visões clássica e frequentista, ou seja, a confrontação entre a probabilidade calculada *a priori* e *a posteriori*. Sugerem também a utilização do contexto geométrico (probabilidade geométrica) para o ensino, além de enfatizarem a vantagem dos recursos informáticos para a simulação de experimentos um número consideravelmente grande de vezes.

Assim, em nosso trabalho levaremos em conta essas considerações para a construção de nossa sequência didática e também se faz necessário um olhar sobre as dificuldades e os erros que os alunos cometem na aprendizagem de probabilidade.

2.3.5. Dificuldades e Obstáculos

A noção de obstáculo foi introduzida por Gaston Bachelard em 1938 no seu livro *A formação do espírito científico*, quando este "observou que a evolução de um conhecimento pré-científico para um nível de reconhecimento científico passa, quase sempre, pela rejeição de conhecimentos anteriores e se defronta com um certo número de obstáculos". Dessa forma, um obstáculo é um conhecimento antigo, que resiste/interfere na adaptação/aquisição de um conhecimento novo, e não a falta dele. (PAIS, 2001, p. 39)

De acordo com Igliori (2008, p. 125-126), a noção de obstáculo epistemológico foi introduzida na Educação Matemática por Guy Brousseau em 1976, como uma forma para identificar causas e dificuldades na aprendizagem matemática, assim caracteriza-se "como um obstáculo à aprendizagem da matemática constitutivo por um saber mal adaptado, no sentido de Bachelard, e como ferramenta de análise de erros recorrentes", ou seja, que frequentemente são cometidos pelos alunos. Dessa forma, modifica-se a concepção de erro, que passa de uma consequência da ignorância ou da incerteza para uma consequência de um conhecimento existente que foi válido para alguns casos, mas que agora se torna falso, ou mal adaptado. Nesse sentido, a intenção de Brousseau foi dar uma nova percepção ao papel do erro dos alunos, o de ser uma parte essencial no processo de aprendizagem, tal como é vista na concepção construtivista, na qual, errar deve ser permitido e "devem-se buscar situações em que os erros, necessários à aprendizagem, revelem um saber em constituição". (ALMOULOUD, 2007)

> Um obstáculo se manifesta pelos erros, os quais, em um sujeito, estão unidos por uma fonte comum: uma maneira de conhecer; uma concepção característica, coerente, embora incorreta; um "conhecimento" anterior bem-sucedido na totalidade de um domínio de ações. (BROUSSEAU, 2008, p. 49)

Para Brousseau o erro é a "manifestação explícita de um conjunto de concepções espontâneas[30], que, integradas a uma rede coerente de representações cognitivas, tornam-se obstáculos à aquisição e ao domínio de novos conceitos", sendo necessário para: desencadear o processo de aprendizagem; o professor situar as concepções dos alunos, compreendendo os obstáculos que se encontram por traz dos erros; e o professor adaptar a situação didática. (ALMOULOUD, 2007, p. 131-132).

Os obstáculos foram tipificados por Brousseau de acordo com sua origem, que são os obstáculos de origem epistemológica, didática e ontogênica. (IGLIORI, 2008)

Obstáculos de origem didática

Estes obstáculos resultam das escolhas de estratégias de ensino efetuadas para um determinado sistema educativo. Que são válidas para um certo domínio e que posteriormente podem vir a insurgir-se como obstáculos no desenvolvimento de um conceito. Por exemplo, a abordagem do ensino de probabilidade apenas pautada em experimentos aleatórios com espaços amostrais equiprováveis, como é aventado pelos PCN-EF, pode levar o aluno a atribuir equiprobabilidade para experimentos que não são equiprováveis ou levá-lo a concluir que não é possível calcular tal probabilidade.

Em Coutinho (2005a) temos também que a adoção do ensino exclusivamente por meio de uma abordagem clássica pode consolidar o obstáculo da equiprobabilidade que, de acordo com Lecoutre (1984 apud COUTINHO, 2005a), consiste em crer que todos os resultados possíveis de um experimento aleatório têm a mesma probabilidade de serem obtidos na ausência de informações ou em uma má interpretação.

---

[30] Concepções espontâneas são concepções (erradas ou corretas), que os alunos constroem de uma noção, antes que ela seja institucionalizada, tornando se objeto de aprendizagem.

As questões: Como definir probabilidade? A abordagem frequentista é a mais natural, a mais “rigorosa”? Essa definição só se aplica a eventos que podem ser repetidos?, são consideradas como obstáculos didáticos por Girard (1997 apud SOUZA, 2002).

Souza (2002) também coloca com obstáculo a questão de como considerar um dado regular por simetria, sem, contudo comprovar essa regularidade realizando um número grande de lançamentos para verificar se as frequências relativas das faces se aproximam de 1/6, mas se apóia em Faria (2000) que considera que não é importante considerar se os dados são regulares, sendo suficiente apenas supor que a ***idéia de dado ideal*** exista.

Gonçalves e Nunes (2010) analisaram a práxis de 15 professores de Matemática do Ensino Fundamental, com a intenção de identificar obstáculos epistemológicos e didáticos presentes em sua prática pedagógica, observaram os seguintes obstáculos didáticos:

- **Motivação**: ao trabalharem com atividades práticas e experimentais, os professores sentem dificuldade em lidar com a motivação dos alunos, que pode resultar em muito barulho e até indisciplina, assim, faz com que os professores “fujam” de atividades desse tipo, reduzindo o ensino estocástico apenas ao teórico;
- **Interdisciplinaridade**: alguns professores têm dificuldades em fazer articulações com outras áreas do conhecimento, o que pode ocasionar em um ensino estocástico descontextualizado e sem significado para o aluno;
- **Livro Didático**: os professores se deparam com a obrigação, tanto por parte da escola quanto dos pais, de ter que utilizar o livro didático integralmente apesar do tempo letivo não ser suficiente, assim ele segue os capítulos na sequência em que se apresentam e “isso faz com que o ensino fique restrito à utilização do livro didático, reduzindo-se, também, o processo de construção conceitual à visão laplaciana de probabilidades que é a mais encontrada nos livros”. (Gonçalves; Nunes, 2010, p. 92)
- **Jornada de Trabalho do Professor**: em decorrência do pouco tempo para planejamento apropriado de suas aulas o professor opta por um ensino estocástico por uma abordagem teórica;
- **Esquemas Mentais**: os professores têm dificuldade de analisar diversas estratégias desenvolvidas pelos alunos na resolução de problemas, ou seja, seus esquemas mentais dificultando, assim, a construção e o desenvolvimento conceitual dos alunos referentes às noções estocásticas.

Também concordamos com Coutinho (1994) que a necessidade de o professor criar situações adidáticas adequadas para o ensino e a dificuldade de encontrar uma bibliografia que adote a visão frequentista como ponto de partida para o ensino do cálculo das Probabilidades, também constituem obstáculos de origem didática, pois como vimos anteriormente, os professores não estão preparados para ensinar Probabilidade e também observamos que alguns livros didáticos, considerados a principal fonte de pesquisa do professor, não abordam esse tema, muito poucos abordam a visão frequentista e nenhum adota essa concepção como ponto de partida para o ensino.

Obstáculos de origem ontogênica

Estes obstáculos surgem a partir das limitações neurofisiológicas do estágio de desenvolvimento em que o aluno se encontra. (ALMOULOUD, 2007)

Nesse sentido, em Coutinho (1994) vimos que os trabalhos de Jean Piaget e Bärbel Inhelder acerca da gênese das ideias de acaso e probabilidade são os primeiros e mais importantes na área da psicologia cognitiva. Esses autores defendem que a aquisição do conceito de probabilidade se desenvolve seguindo a passagem de uma sequência de estágios que têm relação com as operações formais de Piaget. Assim, se tentarmos ensinar uma criança que está no primeiro estágio (sensório-motor) noções que ela terá condições cognitivas de adquirir no estágio das operações formais, isto se constituirá um obstáculo de origem ontogênica.

A seguir são descritas as fases por que passa uma criança na aquisição dos conceitos de acaso e probabilidade e que tem relação com as operações formais de Piaget.

> - No estado sensório-motor (4 a 7 anos aproximadamente) a criança não está “pronta” para comparar as chances de ocorrência de diversos eventos aleatórios. Elas não possuem ainda, nenhuma medida intuitiva de probabilidade;
> - No estado das operações concretas (7 a 11 anos aproximadamente) a criança já tem capacidade para estabelecer certos tipos de comparações entre as probabilidades recíprocas de eventos. Existe a diferenciação entre as operações (associadas ao domínio do dedutível) e o acaso (associado ao domínio do imprevisível);
> - No estado das operações formais (11-12 anos em diante) já existe na criança uma assimilação do acaso às operações formais e aparece o julgamento de probabilidade, a construção dos sistemas de combinatória, permitindo determinar o conjunto de casos possíveis e o acesso ao raciocínio proporcional. (COUTINHO, 1994, p. 36)

Coutinho (1994), também classifica como entraves de natureza cognitiva o fato de o ensino de probabilidade ser destinado a alunos que ainda não dominam a linguagem da Teoria dos Conjuntos e a resistência ao trabalho com números decimais ou fracionários, que poderia ser minorada pela utilização da calculadora em sala de aula.

Esses obstáculos identificados por Coutinho (1994), em nosso ver podem ser considerados como "obstáculos matemáticos", termo dado por Girard (1997 apud SOUZA, 2002, p. 43), que constituem dificuldades de origem da não compreensão dos conceitos matemáticos necessários para apreensão de certa noção, como: as perguntas, "As probabilidades podem ser somadas? Multiplicadas?"; dificuldades de linguagem (o que significam "um", "apenas um", "não mais que um"; e de Lógica Matemática (a negação de nenhum não é todos).

Nesse sentido, Figueiredo (2000) observou que os alunos optaram pelo registro fracionário e decimal, pois têm dificuldades em realizar cálculos com porcentagem, mas em contrapartida têm mais facilidade em compreender a probabilidade neste registro. O autor atribuiu essa preferência pelo uso da porcentagem e certa aversão pelo uso da fração ao fato de que os meios de comunicação geralmente divulgam dados estocásticos sob esta forma.

> [...] não mostraram dificuldade de interpretação da questão, porém foi uma surpresa observarmos a dificuldade do aluno diante de uma multiplicação de porcentagens. Além de não saberem multiplicá-las, eles não conseguiram visualizar numa porcentagem uma fração ou um número decimal. Como 14 das duplas fizeram a mesma pergunta, tivemos que fazer um esclarecimento geral sobre como se multiplicam as porcentagens, para que o trabalho continuasse. (FIGUEIREDO, 2000, p. 119)

O mesmo pode ser observado na pesquisa de Souza (2002), pois os estudantes encontraram dificuldades em identificar as probabilidades nas questões em que não havia porcentagem no enunciado e o mesmo não ocorreu nas atividades em que as probabilidades eram representadas por porcentagens.

Em sua pesquisa Souza (2002, p. 111), além das operações matemáticas com porcentagem, também encontrou as dificuldades matemáticas com cálculos, fatorial, demonstração e lógica matemática.

> Analise a seguinte igualdade: $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$. Ela é verdadeira?
> Parece que AR percebeu a complementaridade dos eventos, pois escreveu: P1 + P1 = 1". [...]. Apesar disso, pudemos perceber, na dupla, uma dificuldade de Lógica Matemática misturada a uma manifestação de contrato didático: "sempre que tem um menos alguma coisa, são complementares", a

> dupla afirmou. Supôs então que a sentença era verdadeira para afirmar que era verdadeira, isto é, tomo o que era para ser verificado como verdadeiro e daí afirmou que era verdadeiro!
> FR afirmou que a igualdade é verdadeira, mas verificou o resultado numericamente. Havia calculado $P(X \geq 1)$ e $P(X = 0)$ e disse que o resultado "batia". Levantamos aqui um problema de demonstração.

A autora atribuiu as dificuldades causadas pela lógica e demonstração à ausência de um trabalho específico com demonstração e com lógica no Ensino Médio, observada nos livros didáticos.

Obstáculos de origem epistemológica

Estes obstáculos são inerentes ao saber e podemos identificá-los nas dificuldades encontradas na história do desenvolvimento de uma teoria matemática, portando não devemos "fugir" dele. Dessa forma, observando como se deu todo o processo de evolução da formação dos conceitos da Teoria de Probabilidades[31], podemos perceber algumas dificuldades (obstáculos epistemológicos) que os matemáticos tiveram no processo de desenvolvimento dessa teoria e que de forma similar, podem aparecer como conhecimentos que são válidos para alguns casos e que resistem causando dificuldades na aprendizagem desse conceito por alunos, mas que não devem ser ignorados, pois tiveram um papel muito importante, levando muitas vezes a outras descobertas como:

- a abordagem do ensino de probabilidade apenas pautado em experimentos aleatórios com espaços amostrais equiprováveis, já citado anteriormente como obstáculo didático, pois pode ser uma escolha didática do professor, também é considerado obstáculo epistemológico devido ao fato de que também podemos encontrar na história do desenvolvimento deste conceito um "longo domínio da visão pascaliana, ou seja, a definição de Probabilidade de um evento como sendo "a razão entre o número de realizações favoráveis e o número de realizações possíveis" (COUTINHO, 1994, p. 42), até que se consolide a visão frequentista com Bernoulli.

> Quando se ensina probabilidade na Escola Básica podemos optar por diversos caminhos para conduzir o ensino. Por exemplo, para ensinar o aluno a determinar a probabilidade de um evento aleatório, podemos optar apenas por experimentos aleatórios que gerem espaços amostrais equiprováveis e usarmos a definição clássica de probabilidade. A escolha desse caminho, para introduzir o conceito de probabilidade de um evento, pode ocasionar obstáculos epistemológicos. (GOULART, 2007, p. 16)

[31] Para melhor compreensão de alguns obstáculos epistemológicos, sugerimos uma observação do Anexo B.

- Obstáculo da Equiprobabilidade: a ausência de informações ou a má interpretação do experimento leva a crer que todos os resultados têm a mesma probabilidade de serem obtidos e o uso da equiprobabilidade pode reforçar esse obstáculo. (LECOUTRE, 1984, apud COUTINHO, 2005a),

Parzysz (1997 apud SOUZA, 2002, p. 40) chama de Obstáculo *Uniformiste*[32]que consiste em sempre considerar equiprováveis os eventos elementares de um experimento aleatório, isso ocorre com mais frequência quando são apenas duas possibilidades de resultados. Assim, "é preciso ter uma confrontação com o real que mostre a não equiprobabilidade dos eventos, e que seja capaz de criar um desequilíbrio cognitivo no aluno, que lhe possibilite perceber a necessidade de encontrar um modelo a que se adapte melhor"

- o conceito de probabilidade inicialmente identificado por uma visão clássica, com espaço amostrais equiprováveis foi objeto de "contradições dialéticas ente as abordagens geométricas e frequentista, entre as concepções subjetivas e objetivas e entre a determinação *a priori* e *a posteriori*". (ALMOULOUD, 2007, p. 141)

> [...] segundo Coutinho (1994), da evolução histórica do conceito de probabilidade tiramos o processo seguinte: o enfoque de Pascal e Fermat (1654) é limitado às situações de equiprobabilidade (jogos de azar). Este é criticado por Jacob Bernoulli (1713), que propõe uma estimação *a posteriori* da probabilidade de eventos complexos e naturais. (ALMOULOUD, 2007, p. 141)

- "o trabalho com quantidades contínuas foi, até o desenvolvimento da teoria das medidas e teoria da integração, com Borel e Lebesgue, um obstáculo na evolução desse conceito, porém, graças a esse obstáculo foram identificados diversos paradoxos famosos, como o paradoxo de Bertrand". (ALMOULOUD, 2007, p.139)

- "a dificuldade na escolha adequada de um modelo matemático para expressar sua ligação estreita com o mundo real, o mundo sensível, tal como a Geometria". (COUTINHO, 1994, p. 25)

> Observemos a dificuldade encontrada por D'Alembert em separar uma informação objetiva relativa ao evento observado, de tal forma a situa-se em um outro modelo probabilista, integrando-a de forma dependente das faculdades do observador. Destaca-se aqui a necessidade da escolha do modelo matemático adequado. (COUTINHO, 1994, p. 27)

[32] Obstáculo *Uniformiste* ou obstáculo que serve para todos, foi chamado assim por Parzysz (1997) em seu artigo *Les probabilités et la statistique dans le secondaire d'hier à aujourd' hui*.

- Souza (2002, p. 41) classifica como “Dificuldades devido à Independência de Experimentos Aleatórios” a concepção errada de D’Alembert pelo seu questionamento sobre a independência de duas jogadas consecutivas de uma mesma moeda. Nas palavras de D’Alembert (1769 apud COUTINHO, 1994, p. 19): “no curso normal da natureza, o mesmo evento (qualquer que seja ele) ocorre raramente duas vezes consecutivas, mais raramente três e quatro vezes, e jamais cem vezes consecutivas”.
- a dificuldade causada pela falta de um suporte matemático adequado, evidenciada nos estudos antecedentes ao trabalho de Kolmogorov; (COUTINHO, 1994)
- “a dificuldade na resolução de questões envolvendo o caráter subjetivo ou objetivo da Probabilidade”; (COUTINHO, 1994, p. 26)

> [...] o caráter subjetivo da probabilidade, definido por Bayes, vem em muitas vezes, reforçar a concepção errônea de que a probabilidade de um evento depende das informações” obtidas pelo observador. Dessa forma, observações diferentes geram probabilidades diferentes para um mesmo evento. (COUTINHO, 1994, p. 27)

- “a dificuldade pela complexidade de certos problemas da lógica combinatória”. (COUTINHO, 1994, p. 26).
- Corrêa (2010) cita Azcárate (1996) para relacionar o modelo determinista como um obstáculo epistemológico para a compreensão de conceitos probabilísticos.

> Sua integração na estrutura do pensamento implica na modificação do modelo determinista [...]. Essa ruptura ajuda na superação da lógica dicotômica do sim/não que impera hoje em nossa cultura e, em consequência, em nossas escolas, introduzindo nas pessoas uma forma diferente de pensar ao admitir a existência das possibilidades de todo um campo intermediário no qual domina a incerteza [...] Portanto, desde o ponto de vista educativo, a introdução no contexto escolar de uma possível interpretação probabilística da realidade, envolve uma mudança substancial na formação do indivíduo. (p. 24)

- o fato de não ser tão simples definir o acaso, é considerado um obstáculo epistemológico pois vemos na história que a humanidade demorou muito tempo para entender e aceitar o acaso, pois antigamente tudo o que acontecia era atribuída a vontade de Deus ou do Deuses, eram simplesmente manifestações divinas. Assim vemos na história que antes de definir o acaso foi preciso admitir que ele exista.

> A Humanidade precisou de centenas de anos para se acostumar com um mundo onde alguns eventos não tinham causa ou eram determinados por causas tão remotas que somente podiam ser razoavelmente representados por modelos não-causais. (PICHARD, 1997 apud SILVA, I. A., 2002, p. 34)

Nesse sentido Silva, I. A. (2002, p.94-95) aponta em sua pesquisa que “a crença, aceitação ou a rejeição do acaso como determinante do destino estão arraigados às representações particulares de cada indivíduo (aluno)” pode se constituir um obstáculo.

Em sua pesquisa Corrêa (2010, p. 135) verificou que cinco dos seis professores entrevistados não apresentaram clareza sobre a ocorrência do conceito de acaso; eles tentavam definir ou determinar, porém quanto mais argumentavam, mas se distanciavam da sua compreensão. Outra observação desse pesquisador foi que a visão determinista da Matemática interferiu diretamente na compreensão do acaso, ou seja, “requeria que o entrevistado abandonasse tal visão, pois a análise de uma situação probabilística, para os mesmos era impossível ocorrer por essas duas perspectivas simultaneamente”.

Girard (1997 apud SOUZA 2002, p. 42) perguntou a alguns alunos qual, dentre as três afirmações dadas, corresponderia a sua idéia de acaso. A maioria respondeu que “é apenas a consequência da nossa ignorância”, mostrando uma visão determinista, outros que “constitui o universo na ordem em que o vemos”, acreditando que o acaso existe em tudo e não se pode saber ou calcular tudo e para alguns o “acaso dissimula a ordem divina”.

Como podemos verificar a noção de acaso é ainda confusa para alunos e professores e Girad (1997 apud SILVA, I. A. 2002, p. 49) ainda nos deixa três questões de como compreender o acaso:

> a) Ele é o encontro de duas séries causais independentes? (no sentido de Aritóteles ou Cournot)
> b) Ele é dado à complexidade de um sistema, o que lhe causa bastante sensibilidade às condições iniciais? (no sentido de Poincaré)
> c) Não é ele o reflexo de nossa ignorância? (no sentido de Laplace)

Entler (1997) define três situações sobre o acaso, que considera serem três fenomenologias, três posições epistemológicas diferentes:

1) Acaso como desconhecimento das causas

Ao jogar uma moeda, não posso prever o lado em que ela irá cair porque não é possível localizar o conjunto de forças que agem sobre ela. No entanto, podemos afirmar que sua posição final tem um causa.

De acordo com Entler (1997), existe um princípio básico da filosofia que não temos muita dificuldade para intuir: todo efeito tem uma causa. Posso atribuir ao acaso se algo imprevisto acontecer sem que isso signifique que o fenômeno escapou às determinações que regem o universo. Neste caso o acaso diz respeito a um lapso do conhecimento e não da natureza, nas palavras de Émille Borel: “o acaso é apenas o nome dado a nossa ignorância”.

2) Acaso como cruzamento de séries causais independentes

> Uma telha cai do telhado de uma casa, passando eu pela rua ou não; não há qualquer conexão, qualquer solidariedade, qualquer dependência entre as causas que levam à queda da telha e aquelas que me fazem sair de minha casa, para levar uma carta ao correio. Mas, a telha cai sobre minha cabeça, e eis este velho matemático fora de atividade: é um encontro fortuito, que ocorre por acaso. (COURNOT, 1875 apud LESTIENNE, 1993 apud ENTLER, 1997)

Uma série causal é, de acordo com Entler (1997), uma cadeia de causas e efeitos interligados, no qual um fenômeno determina um outro e assim por diante, assim cada fenômeno é necessário para este acontecimento.

No caso de séries causais independentes, noção de acaso elaborada por Antoine Augustin Cournot, não existe um elo de determinação entre os fenômenos, pois eles são fenômenos desconexos, não existe uma cadeia de causas. No entanto, elas podem se cruzar no tempo e no espaço, determinando em conjunto um novo fato, como ocorreu no exemplo clássico de Cournot: a telha caiu sobre sua cabeça, no qual cada série explica seu movimento, mas não o cruzamento entre elas. (ENTLER, 1997)

3) Acaso como ausência de causas

Isso ocorre quando alguém diz que algo aconteceu por acaso, mas considerando que não existe um porquê a ser considerado, porém, não há como haver um fenômeno sem causa. (ENTLER, 1997)

Heurísticas de julgamento probabilístico

Tversky e Kahneman (1982, apud FERNANDES, 1999) descrevem três tipos de heurísticas[33] nas quais as pessoas recorrem para fazerem seus julgamentos probabilísticos, "que consistem em estratégias, deliberadas ou não, que se baseiam numa avaliação natural para produzir uma estimativa ou predição", que muitas vezes levam a erros ou viéses, mas que podem em algumas situações vir a ser eficientes.

- **Heurística da representatividade:** as probabilidades são avaliadas e atribuídas tendo como base sua representatividade, ou seja, se certo evento A for mais representativo que B, então tem mais probabilidade de acontecer. Como aconteceu no trabalho de Fernandes (1999, p.82), no qual ele pergunta:

> Qual dos resultados seguintes, obtidos em 6 lançamentos consecutivos de uma moeda equilibrada (não viciada), é mais provável? (C representa a face cara da moeda e E representa a face escudo.)
>
> a) EECECC
>
> b) CECECE
>
> c) CCECCC
>
> d) Ambas as sequências a) e b) são igualmente prováveis.
>
> e) Todas as três sequências a), b) e c) são igualmente prováveis.

Apesar de todas serem igualmente prováveis (e), os sujeitos da pesquisa adotaram a resposta (c) como a menos provável, justificando que não tem a mesma proporção de caras e coroas e ainda declaram a letra (a) como mais provável.

Na pesquisa de Lecoutre e Fischbein (1998 apud SOUZA, 2002) realizada com alunos entre 10 e 17 anos e com estudantes de Psicologia observaram o efeito "récence" (negativo e positivo) e perceberam que havia uma ligação com o viés da representatividade nas justificas das respostas dos estudantes mostravam.

> [...] o efeito "récence": consiste em, por exemplo imaginar que se num jogo de cara ou coroa, aparecem três caras em seguida, o indivíduo imaginar que é mais provável aparecer coroa na próxima (negativo); ao contrário [...] imaginar que na próxima aparecerá também cara (positivo). O efeito positivo raramente aparece, em qualquer idade; o negativo diminui com a idade. (SOUZA, 2002, p. 49)

---

[33] Estas heurísticas são "baseadas em avaliações naturais efetuadas rotineiramente como parte da percepção e da compreensão de mensagens, consistem em estratégias, deliberadas ou não, que se baseiam numa avaliação natural para produzir uma estimativa ou uma predição". (FERNANDES, 1999, p.81)

- **Heurística da disponibilidade:** as probabilidades são avaliadas e atribuídas tendo como base a facilidade com que ele se lembra ou constrói um exemplo, influenciadas pela experiência do indivíduo; dessa forma ele atribui maior probabilidade àquilo que ele lembra mais.

> Um jogador do totoloto[34] fez três apostas no concurso desta semana. Com qual dessas apostas, indicadas abaixo, tem mais chances de ganhar um prêmio?
> a) 1 2 3 4 5 6.
> b) 5 13 24 25 30 42.
> c) 2 17 19 25 34 39.
> d) Tem as mesmas chances de ganhar um prêmio com qualquer das apostas b) e c).
> e) Tem as mesmas chances de ganhar um prêmio com qualquer das apostas a), b) e c).
> A menor probabilidade de ganhar um prêmio no totoloto com a aposta a) foi justificada frequentemente a partir da evocação de resultados do totoloto, principalmente entre os sujeitos sem experiência de ensino de probabilidades. (FERNANDES, 1999, p.83)

Nesse experimento a aposta (a) foi a mais escolhida como tendo menor probabilidade de acontecer, justificada pela evocação dos resultados do totoloto e ainda atribuíram a aposta (b) maior chance por possuir um número de cada dezena.

- **Heurística de ajustamento e ancoragem:** "as pessoas fazem estimativas partindo de um valor inicial que é seguidamente ajustado para produzir uma resposta final". (FERNANDES, 1999. p.81).

- **Influência de fatores causais:** Afirmar que o resultado de um experimento aleatório depende de fatores causais, como por exemplo, atribuir o resultado de um dado à face que está virada pra cima no momento do lançamento e até a força que é jogada.

Rouan (1991 apud SOUZA, 2002) observou algumas concepções que considerou erradas sobre azar e probabilidade, levantadas por meio de um questionário e entrevistas com um grupo de alunos entre18 e 19 anos que tinha tido aprendido probabilidade em nível pré-universitário e outro grupo que não. Descreveremos três desses vieses.

- **Equiprobabilidade**: atribuir mesma probabilidade a todo experimento, mesmo que alguns dos possíveis resultados sejam desconhecidos;

- **Representatividade da população**: atribui-se maior ou menor probabilidade a um resultado de acordo com sua representatividade da população;

[34] Totoloto é um jogo de azar do tipo loteria que é realizado pela Santa Casa de Misericórdia de Lisboa desde 1985 em Portugal e cujo sorteio se realiza todos os sábados.

- **Representatividade do processo de azar**: julgamentos probabilísticos baseados em características errôneas do processo de azar. Como por exemplo, acreditar que em um jogo da Sena, a sequência 12, 13, 14, 15, 16 e 17 é menos provável que qualquer outra como 12, 34, 41, 62, 55 e 03.

Destacamos também o que Shaugnessy (1992, apud SOUZA, 2002, p.36) chamou de "negligência quanto ao tamanho da amostra", a concepção observada em um levantamento que o autor fez de pesquisas sobre as concepções que as pessoas têm em Probabilidade e Estatística, na qual afirma que "indivíduos que não (ou muito pouco) estudaram Estatística não percebem a diferença entre se obter duas caras em três lançamentos de moeda e 200 caras em 300 lançamentos". Dessa forma não compreendem que a variação das frequências dos eventos é mais fácil de acontecer em pequenas quantidades de lançamentos.

Concepções Espontâneas

As concepções espontâneas ou pré-construídas são percepções que os alunos possuem sobre certo assunto antes de sua efetiva aprendizagem e que podem vir a constituir dificuldades ou obstáculos para o aprendiz.

Maury (1984 apud SOUZA, 2002) observou que em contextos diferentes para a mesma estrutura de resolução podem ser focos de dificuldades e procedimentos diversos. Por exemplo, em uma roleta dividida em duas partes iguais, os setores constituem partes de um todo e em um saco com bolas de duas cores diferentes, mas com a mesma quantidade de bolas de cada cor, as bolas representam unidades. A autora pode notar que várias concepções espontâneas sobre probabilidade foram mais bem evidenciadas com as bolas do que com a roleta em um mesmo aluno.

Em seu trabalho Maury também verificou que os alunos tiveram melhor desempenho com um vocabulário corrente do que com um vocabulário mais técnico. Dessa forma o contexto e o vocabulário utilizados na apresentação dos problemas interferem diretamente na ação dos alunos.

> Uma constatação que nos parece importante é que as respostas dos alunos para questões de probabilidades são influenciadas pela sua formulação e pelo contexto, evidenciando que sem uma intervenção didática apropriada, a aprendizagem da Teoria das Probabilidades tornar-se-á muito difícil para os alunos. (COUTINHO, 1994, p. 34)

Figueiredo (2000) também observou que os alunos tiveram dificuldades na interpretação das questões, decorrentes do emprego da linguagem simbólica da probabilidade e afirma que para minimizar as dificuldades de notação apresentadas pelos alunos fosse melhor ter articulado os dois registros (linguagem natural e simbólica). Salientamos que essa dificuldade também foi encontrada por Souza (2002) em sua pesquisa.

Nesse sentido, também temos a concepção errada apontada por Hawkins e Kapadia (1984, apud FERNANDES, 1999), de que é mais difícil obter o número 6 no lançamento de um dado como consequência dos jogos de azar que muitas vezes indicam o 6 como condição para iniciar o jogo, e de fato, em uma partida pode demorar a sair o 6. De acordo com os autores, essa dificuldade não pode ser sanada apenas afirmando ao aluno que a probabilidade de se obter qualquer uma das faces é 1/6, mas consideram que uma abordagem frequentista seria mais eficaz.

Em sua pesquisa Coutinho (1994), buscou trabalhar sobre as concepções espontâneas e classificou duas delas, as mais frequentes, como dificuldades didáticas devido a entraves de natureza cognitiva:

> - a crença da equiprobabilidade devido a ausência de informações sobre o evento a ser observado;
> - a crença de que a probabilidade de um evento pode ser influenciada por informações obtidas pelo observador. (COUTINHO, 1994, p. 131)

Para identificar essas e outras concepções espontâneas de 41 alunos franceses com idades entre 15 e 18 anos, a pesquisadora, aplicou um questionário com dez questões, elaborado com base nos trabalhos de Bourdier e Maury e chegou aos seguintes resultados.

Sobre o entendimento do acaso, para a maioria dos alunos, 35, significa: “sem intervenção” e para os outros seis estudantes restantes: “sem poder prever o resultado”.

Também, foi identificada a concepção errônea de que “na falta de informações todos os eventos são equiprováveis”, na qual a probabilidade de um evento pode ser alterada de acordo com as informações obtidas sobre esse evento, mas com base na concepção clássica e não na frequentista. Além de contradições nos raciocínios desenvolvidos pelos alunos.

Com relação à proporcionalidade os alunos parecem compreender que as chances de se obter um vermelho são as mesmas entre uma urna B composta por 3 bolas vermelhas e 2 azuis e uma roleta dividida em dois setores (roleta C), na qual 60% é vermelha e 40% azul. Mas ao comparar essa roleta 1 com outra na mesma proporção, porém, dividida em mais setores (roleta D). Apesar de observarem, que as duas cores nas roletas possuem a mesma proporção, acreditam que na roleta D teriam mais chances de se obter um vermelho, porque estão divididas em mais setores vermelhos.

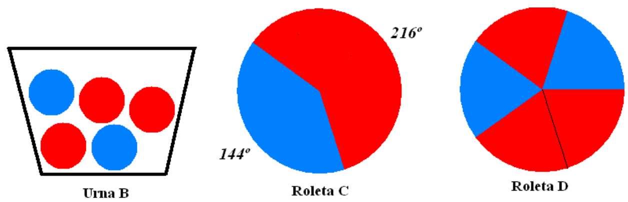


Figura 4- Representação da urna B e das roletas C e D.

Foi observado também que em se tratando do acaso, os alunos não levam em consideração as proporções dos elementos da experiência. Este é um raciocínio semelhante ao de D´Alembert (apud COUTINHO, 1994, p.56), no qual afirma que em qualquer experimento "o mesmo evento (qualquer que seja ele) acontece muito raramente duas vezes seguidas , mais raramente três e quatro vezes, e jamais cem vezes consecutivas".

No lançamento de dois dados a maioria dos alunos (30) acredita que obter uma face 5 e uma 6 é a mesma que duas faces 6. Nesse caso não fizeram distinção entre os resultados (5,6) e (6,5), perpetrando o mesmo erro de D´Alembert no seu artigo *Cruz et Pile*[35]. E os 7 alunos que responderam corretamente, pensaram erroneamente, pois acreditam ser mais difícil obter duas faces iguais que duas diferentes e 4 não souberam responder.

Para a maioria dos alunos probabilidade significa chance "no sentido subjetivo do termo, ou seja, não existe uma distinção entre o uso da probabilidade objetiva ou subjetiva" (COUTINHO, 1994, p.59). No lançamento de uma moeda por 100 vezes foi dito a eles que foram obtidos 60 coroas e 40 caras, e com base nisso nove alunos afirmaram ser essa uma informação útil para estimar a probabilidade de se obter coroa no 101º lançamento e depois afirmaram que se jogarmos essa moeda mais 10 vezes existirão mais coroas. Percebe-se então que alguns alunos encontraram suas respostas tendo como base os resultados obtidos em alguns resultados do experimento. A análise mostrou que 46% dos alunos responderam que, "existirão mais coroas que caras" se jogarmos a moeda mais 10 vezes, pois das 100 jogadas anteriores 60 foram coroas e 40 caras, dessa forma observamos que os alunos acreditam na importância da informação de resultados anteriores do experimento, constituindo uma "concepção errônea de que os resultados anteriores a uma experiência aleatória vão interferir nos seus próximos resultados". (COUTINHO, 1994, p.61)

[35] Artigo de Jean Le Rond D´Alembert, chamado "Croix ou Pile' encontrado em *La Grande Encyclopédie*, já comentado no item 2.3.1.

> No nível de ação imediata, pudemos constatar que para estes jovens "a ocorrência de um evento durante uma experiência aleatória pode ser influenciada por resultados anteriores a este", ou ainda que "a probabilidade de um evento depende das informações obtidas anteriormente sobre esse evento", ou mesmo que "da ausência de informações sobre condições da experiência aleatória conclui-se que a equiprobabilidade de seus resultados", caracterizando uma visão subjetiva da probabilidade. (COUTINHO, 1994, p. 67)

Coutinho (1994) também observou que os alunos não compreendem bem o significado das palavras *ao acaso, aleatório, chance e probabilidade* e constata a necessidade de uma sequência de ensino que formalize esses conceitos a partir das correções das concepções errôneas identificadas.

CAPÍTULO 3

3. A PESQUISA: ESCOLHAS TEÓRICAS E METODOLÓGICAS

Dedicamos esse capítulo a apresentação de nossos objetivos de pesquisa e ao estudo da Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986), aporte teórico que embasa o desenvolvimento de nossa pesquisa, bem como à apresentação da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988), metodologia utilizada nesse trabalho.

3.1. OBJETIVOS GERAL E ESPECÍFICOS

A partir de nossas leituras e reflexões, com a finalidade de responder a questão norteadora, definimos o seguinte objetivo geral: **investigar a aprendizagem dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, levando em consideração situações envolvendo diferentes visões de probabilidade**.

Para atingir esse objetivo geral elencamos os seguintes objetivos específicos:

- I**nvestigar e analisar dificuldades dos alunos no estudo de probabilidade;**
- **Estudar os conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução de problemas probabilísticos específicos às visões clássica e frequentista de probabilidades.**

3.2. A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Nesta pesquisa admitimos como ponto de partida que o sujeito aprende em uma perspectiva construtivista piagetiana, como um processo de aquisição de conhecimento por adaptação que ocorre por meio da assimilação e acomodação, na passagem de um estágio de desequilíbrio para um de equilíbrio. Na assimilação o sujeito se apropria de um objeto e cria para ele um significado próprio. Depois, para haver acomodação criam-se novos significados, ou há uma reestruturação de esquemas anteriores, e esse processo é chamado de equilibração, no qual a aprendizagem acontece. Dessa forma iremos buscar aporte na Teoria das Situações Didáticas, teoria desenvolvida por Guy Brosseau (1986), que é estruturada por essa noção de aprendizagem por adaptação descrita inicialmente por Piaget.

> A aprendizagem por adaptação é uma das noções utilizadas por Brousseau para estruturar a teoria das situações didáticas, enfatizando uma aproximação com os chamados esquemas de assimilação e acomodação, que foram descritos inicialmente por Piaget. Em uma tal aprendizagem, o aluno é desafiado a adaptar seus conhecimentos anteriores às condições de solução de um novo problema, é preciso que o aluno ultrapasse o seu próprio nível de conhecimento, revelando a operacionalidade dos conteúdos dominados até então. [...] o interesse em valorizar uma aprendizagem por adaptação é compará-la ao caso indesejável em que ocorre um excesso de formalismo ou da memorização inexpressiva [...] Nesse sentido, a adaptação pode ser entendida como a habilidade que o aluno manifesta em utilizar seus conhecimentos anteriores para produzir a solução de um problema. (PAIS, 2001, p. 69-70)

A Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986), propõe um modelo de elaboração de situações didáticas, ou seja, uma forma de apresentação de conteúdos especificamente matemáticos no qual o aluno constrói seu conhecimento, ou seja, possibilita a aprendizagem. Além disso, “por meio da análise das situações didáticas é possível investigar a problemática da aprendizagem matemática e desvelar aspectos que ocorrem durante a resolução de problemas e a elaboração de conceitos pelos alunos”. (FREITAS, 2008, p.81).

Essa teoria apóia-se em três hipóteses: o aluno aprende adaptando-se ao *meio*; o *meio* sem intenções didáticas é insuficiente para permitir a aquisição de conhecimentos matemáticos e finalmente o *meio* e as situações devem envolver significativamente os saberes matemáticos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. O *meio* a que nos referimos é segundo Brousseau (2008, p. 19), “um sistema autônomo, antagônico ao sujeito, e é deste que convém fazer um modelo, visto com um tipo de autômato”.

A situação didática é o objeto central da teoria das situações e foi definida por Brousseau (1986 apud FREITAS, 2008, p. 80) como:

> [...] um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos ou objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição.

Nesse sentido, o professor organiza um *meio* no qual o aluno estabelece relações com ele e com o saber, que são classificadas por Brousseau (2008) em três categorias: troca de informações não codificadas, por ações e decisões; troca de informações codificadas, pela linguagem; e troca de opiniões, por meio de argumentações.

Dentro das situações didáticas, existem ainda, as situações adidáticas, quando o aluno trabalha sem a interferência direta do professor sobre o saber. Para isso o professor apresenta um bom problema para o aluno para que ele aceite como seu e queira resolver o problema sem que seja por obrigação escolar e sem ajuda do mestre. Quando isso ocorre dizemos que houve a *devolução*[36]. Em uma situação adidática,

> O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. (BROUSSEAU, 2008, p.35)

Dessa forma, em uma situação adidática, o aluno deve ter papel ativo no seu processo de ensino e aprendizagem: ele age, fala, reflete e evolui por iniciativa própria. Para tanto, os conhecimentos que ele possui devem possibilitar iniciar a resolução do problema, mas não devem ser suficientes para chegar à solução sendo necessário encontrar novos conhecimentos.

> A "resposta inicial" só deve permitir ao aluno utilizar uma estratégia de base com a ajuda de seus conhecimentos anteriores; porém, muito rapidamente, esta estratégia deveria mostrar-se suficientemente ineficaz par que o aluno se veja obrigado a realizar acomodações – quer dizer, modificações de seu sistema de conhecimentos – para responder à situação proposta. [...] O trabalho do professor consiste, então, em propor ao aluno uma situação de aprendizagem para que elabore seus conhecimentos como uma resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor. (BROSSEAU, 1996b, p. 49)

A Teoria das Situações Didáticas foi desenvolvida a partir da classificação de situações caracterizadas por três tipos de dialéticas com o *meio*: ação (coloca seus saberes em prática para tentar resolver o problema, formula hipóteses empiricamente), formulação (tem que explicitar verbalmente suas hipóteses) e validação (tem que validar/demonstrar sua hipótese), e estas "envolvem diferentes relações com o saber em jogo: trocas diretas para uma ação ou uma tomada de decisão, trocas de informações em uma linguagem codificada, trocas dos argumentos". (ALMOULOUD, 2008, p. 37)

---

[36] A devolução era um ato pelo qual o rei abandonava seu poder para remetê-lo a uma câmara. Significa nas palavras do rei que: "já não se trata de minha vontade, mas do que vocês devem querer, porém, eu lhes confiro este direito porque vocês não podem reivindicá-lo por si mesmos". (BROUSSEAU, 1996b, p. 51)

- **Dialética de Ação**

Esta fase consiste em colocar o aluno em uma situação de ação, na qual a solução do problema é o conhecimento a ser aprendido e quando ele agir sobre esta situação, esta deve lhe retornar informação sobre sua ação, ou seja, “se o meio reage com certa regularidade, o sujeito pode relacionar algumas informações às suas decisões (*feedback*), antecipar suas respostas e considerá-las e suas futuras decisões”. (BROUSSEAU, 2008, p. 28)

Quando o aluno melhora ou abandona seu modelo para criar outro (assimilação e acomodação), pode-se dizer que a situação provocou uma aprendizagem por adaptação.

De acordo com Pais (2001) nesta situação o aluno deve agir diretamente sobre o problema com o intento de respondê-lo, sem precisar explicitar argumentos teóricos que justifiquem suas respostas, dessa forma, produz conhecimentos de natureza mais experimental e intuitiva que teórica.

- **Dialética de Formulação**

De acordo com Brousseau (2008) a formulação de um conhecimento corresponde a uma capacidade do aluno de retomá-lo, pois não basta que saiba dar a resposta de um problema ele deve saber comunicar suas estratégias de resolução para atuar nesta situação e essa comunicação está subordinada a dois tipos de retroação: uma por parte dos colegas, que podem ou não compreender/concordar e outra por parte do meio, no momento em que ele for utilizar esta estratégia em outro problema esta pode ou não levá-lo a uma solução correta.

Nesta fase então, o aluno deve trocar informações com outro(s) aluno(s) que podem ser em linguagem natural ou matemática, ou seja, é o momento em que ele explicita a solução e as ferramentas que utilizou para encontrá-la e de acordo com Almouloud (2007, p. 38) “se o aluno deve agir e não dispõe de toda a informação e se seu parceiro no jogo dispõe das informações que lhe faltam, pode haver, nessas trocas, julgamentos, debate de validade, sem que isto constitua necessariamente uma situação de formulação”

- **Dialética da Validação**

Na dialética de validação o objetivo principal é a validação das afirmações e proposições formuladas nas fases anteriores (ação e validação), é o momento em que o aluno deve provar a validade de suas estratégias nos debates e discussões. Assim nessa situação, segundo Brousseau (2008, p. 27)

> [...] os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias [...] e tanto aprendem a convencer os demais alunos como a se deixarem convencer sem ceder a argumentos retóricos, à autoridade, à sedução, à soberba, a intimidações etc. As razões que um aluno possa fornecer para convencer o outro, ou as que possa aceitar para mudar de opinião, serão progressivamente elucidadas, construídas, testadas, debatidas e acordadas. O aluno não só deve comunicar uma informação, como também precisa afirmar que o que diz é verdadeiro dentro de um sistema determinado. Deve sustentar sua opinião ou apresentar uma demonstração.

Vale destacar que a situação de validação está atrelada a de formulação e que em ambas pode se recorrer aos tipos de linguagem oral ou escrita, mas o mais comum é o aluno utilize as duas e muitas dificuldades na elaboração das provas podem estar associadas ao uso da linguagem simbólica e formal da matemática, pois os alunos têm pouco domínio sobre ela. (FREITAS, 2008)

- **Dialética da Institucionalização**

Brousseau (2008, p.31) acreditava inicialmente que apenas as dialéticas de ação, formulação e validação compunham todas as situações de aprendizagem possíveis, até que durante as experiências desenvolvidas percebeu que apenas essas situações não eram suficientes e que os professores precisavam "rever o que já haviam feito", ou seja, institucionalizar o conteúdo trabalhado.

> Demoramos a perceber que os professores realmente eram obrigados a "fazer alguma coisa": tinham que dar conta da produção dos alunos, descrever os fatos observados e tudo que estivesse vinculado ao conhecimento em questão; conferir um *status* aos eventos da classe vistos como resultados dos alunos e do processo de ensino; determinar um objeto de ensino e identificá-los; aproximar as produções dos conhecimentos de outras criações (culturais ou do programa) e indicar quais poderiam ser reutilizadas. (BROUSSEAU, 2008, p.31)

Surgiu assim, a necessidade de considerar a situação de institucionalização, na qual o professor dá *status* de saber aos conceitos ensinados. Neste momento, o professor "oficializa" o conhecimento matemático e, em conjunto com os alunos, sistematiza o que aprenderam para que reconheçam o que construíram e incorporem em seus esquemas e depois possam utilizá-los na resolução de outros problemas, pois de acordo com Pais (2001, p. 74) "a institucionalização só faz sentido quando o aluno compreende o significado do conteúdo e percebe a necessidade de integrar seu conhecimento a uma teoria mais ampla".

Na visão de Almouloud (2008, p. 40) a institucionalização deve ser negociada em uma dialética; não pode ser realizada muito cedo, pois interrompe a construção do significado, impedindo uma aprendizagem adequada, resultando em dificuldades tanto para o professor quanto para os alunos; e, “quando feita após o momento adequado, ela reforça interpretações inexatas, atrasa a aprendizagem, dificulta as aplicações”.

Nesse sentido, Brousseau (1996a, p. 56) salienta que a institucionalização não precisa ser obrigatoriamente sempre após a validação ela pode ser realizada tanto

> [...] sobre uma situação de ação - reconhece-se o valor de um procedimento que se converterá em um recurso de referência - como também sobre uma situação de formulação. Há formulações que serão conservadas (“isto se diz assim”, “aquilo deve ser lembrado”). O mesmo acontece com as provas: é necessário identificar o que será retido das propriedades dos objetivos que encontramos.

Como pudemos observar a teoria das situações didáticas tem como objetivo estudar formas de exploração de situações didáticas que visam à aprendizagem de um conteúdo matemático, no caso de nossa pesquisa situações que abordassem Probabilidade, valorizando a dualidade das abordagens clássica e frequentista. Dessa forma esse quadro teórico nos auxiliou na elaboração da sequência didática, na forma de apresentação das situações aos alunos, levando-os a vivenciar as dialéticas adidáticas de ação, formulação e validação, para depois fazermos a institucionalização e na forma como deveríamos agir em nosso papel de mediadores e pesquisadores nessas situações.

3.3. A ENGENHARIA DIDÁTICA

Para ajudar a elaborar, organizar e aplicar essas situações, além de fazer as análises e validações propostas nos objetivos, utilizamos alguns pressupostos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988) como metodologia, uma vez que essa visa pesquisas que estudam os processos de aprendizagem de um dado objeto matemático, favorecendo uma ligação entre a pesquisa e a ação pedagógica.

A Engenharia Didática leva esse nome por ter semelhanças com o trabalho de um engenheiro, que se apóia em seus sólidos conhecimentos teóricos e científicos para elaborar um projeto, mas que em certo momento, na execução, pode se deparar com problemas práticos e imprevisíveis.

Como metodologia de pesquisa, é definida por Artigue (1988, p.196) como "um esquema experimental que se baseia em "realizações didáticas" na sala de aula, isto é, se preocupa com a concepção, realização, observação e análise das sequências de ensino, abrindo, assim caminhos para a experimentação nas classes como prática de investigação".

Segundo Machado (2008, p.238), esse "processo experimental da Engenharia Didática se compõe de quatro fases": análises preliminares; concepção e análise *a priori* das situações didáticas; experimentação e análise *a posteriori* e validação.

Na primeira fase, momento em que devem ser realizadas as análises preliminares, as hipóteses cognitivas e didáticas são formuladas, pois são elas que fundamentam toda a estrutura da Engenharia Didática e como recomenda Pais (2001, p.101) nesta fase deve ser realizada "uma descrição das principais dimensões que definem o fenômeno a ser estudado e que se relacionam com o sistema de ensino, tais como a epistemológica, cognitiva, pedagógica, entre outras".

Em nossa pesquisa essa fase foi realizada tendo como objetivo obter informações que compuseram nosso quadro teórico. Para tanto, começamos por fazer um resgate histórico do desenvolvimento da teoria das probabilidades ao longo do tempo, com a finalidade de estudar como se deu a evolução e constituição deste conceito. Em seguida, realizamos um estudo de alguns conceitos probabilísticos e das diferentes visões de probabilidade (clássica, frequentista, subjetiva e axiomática), bem como a probabilidade geométrica.

Também analisamos como se deu a inserção recente deste conceito no currículo escolar brasileiro, que começou a partir das tendências internacionais e a fim de verificar o enfoque dado à probabilidade no ensino atual analisamos documentos oficiais (PCN e PNLD), a concepção dos professores e algumas pesquisas que envolvem o ensino e aprendizagem de probabilidade, além de identificar as deficiências envolvidas na abordagem desse conteúdo, as dificuldades, obstáculos e concepções espontâneas dos alunos.

A segunda fase, concepção e análise a *priori*, consiste da construção das situações a partir das análises preliminares e para tanto, inicialmente são delimitadas variáveis didáticas que são importantes para o processo de ensino e aprendizagem do objeto em estudo e podem ser divididas em micro-didáticas, que se referem a apenas uma sessão da engenharia e em macro-didáticas, que se refere ao conjunto todo, a organização geral.

O objetivo da análise *a priori* é determinar hipóteses a partir de uma análise teórica das atividades de como as escolhas efetuadas e as variáveis que admitimos pertinentes, permitem controlar os comportamentos dos alunos, explicar seu sentido podendo assim controlar a realização das atividades dos alunos, identificando os fatos observados e compreendê-los.

A análise *a priori* deve estar focada na situação adidática a ser desenvolvida e tem uma parte de descrição e outra de previsão. De acordo com Machado (2008. p.243-244) nesta fase deve-se:

> - descrever cada escolha local feita (eventualmente, relacionando-as às escolhas globais) e as características da situação adidática decorrentes de cada escolha;
> - analisar qual o desafio da situação para o aluno, decorrente das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele disporá durante a experimentação;
> - prever os comportamentos possíveis e mostrar no que a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos; além disso, deve-se assegurar que, se tais comportamentos ocorrerem, resultarão do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem.

Em resumo a análise *a priori* se compõe da elaboração das atividades, da divisão das sessões, do tempo, da justificação da escolha das variáveis didáticas e da descrição de estratégias de resoluções corretas ou não para prever possíveis ações e problemas que possam acontecer durante a experimentação.

Dessa forma, em nossa pesquisa organizamos uma sequência didática com a intenção de introduzir a noção de probabilidade por meio das visões clássica e frequentista a alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Essa sequência que é composta de seis sessões e as atividades que fazem parte de cada sessão foram elaboradas tendo como base as análises prévias e alguns preceitos da teoria das situações didáticas visando a devolução e o desenvolvimento do aluno passando pelas dialéticas de ação, formulação e validação.

Também descrevemos as variáveis didáticas escolhidas, além de possíveis estratégias que os alunos poderiam utilizar bem como as dificuldades que estes poderiam enfrentar durante o desenvolvimento da sequência.

Na terceira fase, experimentação, ocorre a aplicação da engenharia didática é o momento de por em prática todas as situações didáticas construídas para coleta de dados, que pode ser recolhida por meio de gravações, filmagens, transcrições, questionários, produções dos alunos e observações pertinentes. Nesta fase também se deve explicitar ao grupo pesquisado os objetivos e condições para a realização da pesquisa, ou seja, estabelecer a relação entre professor, aluno e pesquisador, além de poder ser feitas alterações necessárias, quando houver um problema ou imprevisto não identificado na análise *a priori*.

Nesta pesquisa, aplicamos a sequência de atividades com seis alunos do 9º ano, que não haviam estudado o conteúdo de probabilidade. Ocorreram seis encontros, durante os quais os dados foram coletados por meio das produções escritas e da gravação em áudio das sessões, que se fez necessária, pois em alguns momentos da sequência os debates foram realizados apenas oralmente.

Todos os registros obtidos ao longo da experimentação serão examinados com atenção durante as análises *a posteriori*, pois é o momento em que deve ser realizado o "tratamento" das informações coletadas, no qual olhamos mais atentamente para sequência como um todo, observar o que deu certo e errado, verificando se possuímos o material necessário para validar nossas hipóteses ou se é necessária outra intervenção. Para tanto, procuramos destacar as fases adidáticas vivenciadas pelos alunos durante a experimentação para identificar mudanças ocorridas na aquisição de conhecimentos probabilísticos durante o desenvolvimento da sequência aplicada.

É importante salientar que na Engenharia Didática a validação é interna, diferente de outras metodologias com validação externa[37], e consiste na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* da sequência aplicada na experimentação e é nela que "se validam ou refutam as hipóteses levantadas no início da engenharia". (MACHADO, 2008, p. 246).

[37] A validação externa se caracteriza pela confrontação entre os resultados de um grupo experimental e um grupo de controle, ou seja, pela comparação entre o grupo que participou da pesquisa e um que não participou.

CAPÍTULO 4

4. A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nossa sequência didática[38] é composta por seis sessões que foram concebidas levando em consideração o quadro teórico, apresentado no capítulo 2, bem como os conhecimentos prévios dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, as dificuldades, obstáculos, concepções espontâneas e as variáveis didáticas.

A tabela a seguir contém um resumo da sequência didática com os conceitos probabilísticos envolvidos em cada sessão:

Sessão	Conceitos envolvidos
1ª Sessão	Experimentos Aleatórios e Experimentos Determinísticos
2ª Sessão	Espaço Amostral, Evento Elementar e Impossível
3ª Sessão	Espaço Amostral Equiprovável e Não-Equiprovável
4ª Sessão	Probabilidade Visão Clássica
5ª Sessão	Probabilidade Visão Frequentista
6ª Sessão	Articulação da Probabilidade Clássica com a Frequentista

Quadro 3: Quadro das sessões.

Nesse capítulo, apresentamos toda a sequência didática realizada, e decidimos fazê-lo por sessão, apresentando a análise *a priori*, seguida da experimentação, e, finalizando, com sua análise *a posteriori*.

A análise *a priori* deve estar focada na situação adidática a ser desenvolvida e tem uma parte de descrição e outra de previsão. De acordo com Artigue (1996, p. 205), nesta fase

> - descrevem-se as escolhas efetuadas ao nível local (remetendo-as, eventualmente, para escolhas globais), e as características da situação adidática que delas decorrem;
> - analisa-se o peso que o investimento nesta situação pode ter para o aluno, particularmente em função das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele dispõe, uma vez operada a devolução, num funcionamento quase isolado do professor;
> - prevêem-se os campos de comportamentos possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efetuada permite controlar o sentido desses campos e assumir, em particular, que os comportamentos esperados, se intervierem,

[38] A sequência didática apresentada aqui é diferente da apresentada na qualificação.

> resultarão claramente da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem.

Em nossa pesquisa pretendemos seguir essas recomendações durante a apresentação das sessões. Assim para cada sessão descreveremos os objetivos, as variáveis microdidáticas, possíveis estratégias dos alunos e a forma como iremos agir diante do aparecimento ou ausência dos comportamentos esperados.

Na experimentação faremos um relato da realização da engenharia em conjunto com a análise *a posteriori*, na qual procuramos destacar as fases adidáticas vivenciadas pelos alunos durante a experimentação para identificar mudanças ocorridas na aquisição de conhecimentos probabilísticos durante o desenvolvimento da sequência aplicada, analisando os dados coletados segundo o referencial didático adotado.esta pesquisa, consideramos como variáveis: a formulação do problema (escrita ou oral); vocabulário (corrente ou técnico); oralidade (uso ou não uso do lápis e papel); contexto (diversos contextos); realização do experimento; realização do experimento para observação da estabilização da frequência relativa; e escolha dos experimentos aleatórios.

Variável 1: Formulação do problema

De acordo com Coutinho (1994) as variáveis de vocabulário referem-se à apresentação clara do problema, pois se for mal formulado pode interferir na resolução e nas estratégias, levando ao insucesso ou a um objetivo diferente do esperado. Dessa forma, optamos por apresentar atividades na forma escrita, mas depois iremos ler a atividade para depois nos certificarmos de que o aluno compreendeu bem o que se pede.

Variável 2: Vocabulário

Maury (1984 apud SOUZA, 2002) verificou em sua pesquisa que os alunos tiveram melhor desempenho com um vocabulário corrente do que com um vocabulário mais técnico. Dessa forma, optamos por inicialmente apresentar os conceitos probabilísticos em um vocabulário corrente, assim, o aluno se sente mais a vontade pra expressar suas concepções para depois atribuir o seu significado formal da linguagem matemática. Por exemplo, nos experimentos aleatórios envolvidos na sequência didática os alunos encontram todos os resultados possíveis, ou que pode ocorrer/acontecer em cada experimento, para depois formalizarmos que este conjunto de todas as possibilidades leva o título de Espaço Amostral.

Variável 3: Oralidade e Escrita

A escrita e a linguagem da matemática podem constituir dificuldades para os alunos se expressarem, optamos por trabalhar com a oralidade e a forma escrita, assim queremos que na maioria das atividades o aluno explique como procedeu na resolução e utilize a folha apenas para anotações, caso necessário, e para registrar o resultado.

Variável 4: Contexto

Maury (1984 apud SOUZA, 2002) observou que contextos diferentes para a mesma estrutura de resolução podem ser focos de dificuldades e procedimentos diversos. A autora também pôde notar que concepções espontâneas sobre probabilidade foram mais bem evidenciadas com as bolas do que com a roleta em um mesmo aluno. Assim, utilizaremos essa variável adotando experimentos com diferentes contextos como roletas, bolas, dados, moedas, tetraedros, dado do jogo Senet, geoplano e tachinha.

Variável 5: Realização do experimento para observação da estabilização da frequência relativa

Apesar de não ter contemplado em sua sequência a realização efetiva do experimento, Silva, I. A. (2002, p. 156) pôde atestar a validade de sua proposta, dessa forma, existe a possibilidade da construção da definição frequentista sem necessariamente realizar experimentos. Porém o autor considera que se os alunos tivessem observado concretamente a estabilização da frequência relativa dos eventos, “poderia ter encaminhado um número ainda maior de alunos a incorporar – construir – a visão frequentista de probabilidades".

Coutinho (1994) em sua dissertação trabalhou com a realização dos experimentos (lançamento de duas moedas e lançamento da tachinha) e em sua tese, Coutinho (2001) também utilizou a simulação com o Cabri-géomètre II, em um contexto de probabilidade geométrica e em ambos os trabalhos obteve resultados positivos. Dessa forma, em nossa pesquisa, temos experimentos com a utilização do simulador da roleta, no qual é possível simular grandes quantidades de realização do experimento e observar assim a estabilização da frequência relativa e experimentos em que não há a possibilidade de realização, mas pelo pouco tempo, não de estabilização.

Simulador da Roleta (*Spinners*)[39]

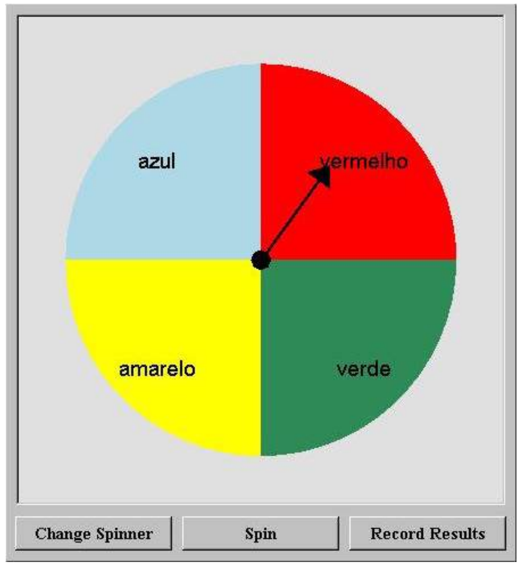


Figura 5: Roleta-exemplo.

Utilizaremos o simulador da roleta para que os alunos observem a estabilização das frequências relativas de cada evento elementar. Para melhor compreensão do funcionamento da roleta faremos uma breve explicação a seguir.

Para mudar a configuração da roleta é preciso apertar ao botão "*change spinner*" e aparecerá uma janela (ver Figura 6), na qual é possível alterar as cores, o nome e o tamanho do setor, por exemplo, a figura 6 contém a configuração da roleta-exemplo (ver Figura 5), no qual cada setor tem o mesmo tamanho, ou seja, está dividida em quatro partes. Para alterar o tamanho do setor, clique na seta para cima (para aumentar) ou para baixo (para diminuir) ao lado do nome da região que se deseja alterar. Para alterar a cor, basta clicar na caixa de texto para a região que se pretende alterar e, em seguida, clicar em uma cor na paleta de cores.

[39] Disponível em: <http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_186_g_2_t_5.html?open=activities>. Acesso em: 11 dez. 2010.

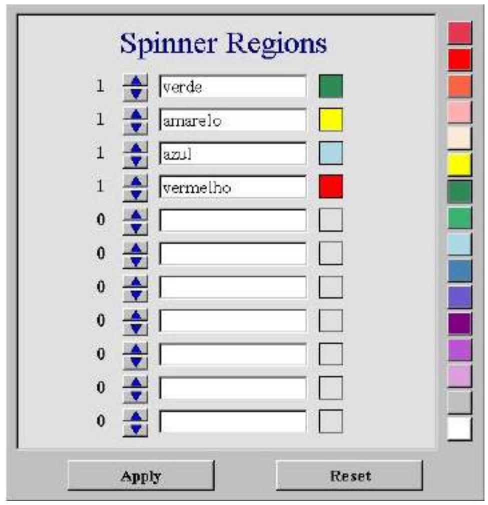


Figura 6: Configuração da roleta exemplo.

No simulador de roletas também é possível realizar a simulação de certa quantidade de jogadas. Para tanto, deve-se apertar a tecla “*record results*” (ver figura 5) e preencher o quadro aberto com o número de lançamentos desejado. Ao realizar a simulação aparece um histograma com a frequência absoluta de cada setor. Na figura a seguir temos um exemplo de 100 lançamentos com a roleta-exemplo (ver figura 7) e para realizar um novo lançamento deve-se apertar a tecla “*clear*”, caso contrário os resultados serão somados.

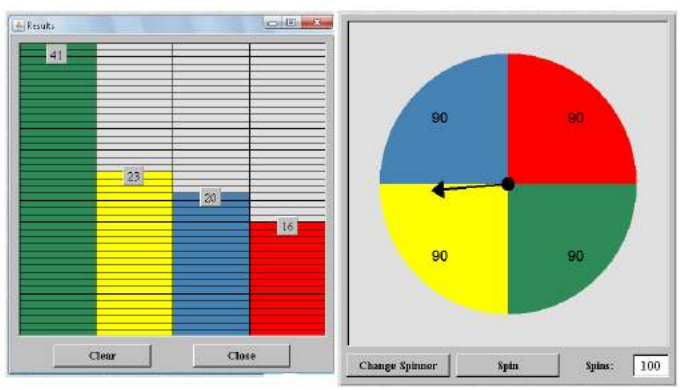


Figura 7: Resultado de cem lançamentos da roleta-exemplo.

Salientamos que o simulador da roleta tem um limite de 999 jogadas, mas o usuário pode ir somando as jogadas; para tanto é preciso não apertar a tecla “*clear*” na janela “*results*”. Assim, para obtermos os resultados de 2.000 lançamentos, por exemplo, temos que fazer o *spin* de 2 lançamentos e depois de 999 duas vezes, que somam 2.000.

Variável 6: Escolha dos experimentos aleatórios

Alguns experimentos aleatórios foram selecionados visando levar o aluno a utilizar a abordagem clássica ou a frequentista de probabilidades. Por exemplo, no experimento com o dado do jogo Senet, só é possível o cálculo da probabilidade de seus eventos elementares por meio da visão frequentista.

4.1. 1ª SESSÃO: EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS E EXPERIMENTOS DETERMINÍSTICOS

4.1.1. Análise *a priori*

Esta sessão visa possibilitar ao aluno compreender o sentido de experimento determinístico e experimento aleatório, ou seja, confrontá-lo com a "ação do acaso" (COUTINHO, 1994, p.80), colocando-o em contato com experimentos aleatórios, nos quais o acaso intervém e experimentos determinísticos, nos quais os resultados são sempre os mesmos e como pré-requisito o aluno deve ter conhecimento apenas da linguagem escrita.

Lopes (1998, p. 28) afirma que é "necessário desenvolver uma prática pedagógica na qual sejam propostas situações em que os estudantes realizem atividades, observando e construindo os eventos possíveis, através de experimentação concreta", pois, a aprendizagem da Estocástica só irá complementar a formação dos alunos se for significativa, com situações que sejam contextualizadas, investigadas e analisadas.

A apropriação da noção de experimento aleatório, de acordo com Coutinho (2002, p. 3) passa pela explicitação de três características fundamentais:

> (a) A existência de um protocolo experimental que permite a descrição completa das condições de realização do experimento, e consequentemente, sua reprodução nas mesmas condições.
> (b) A identificação do componente de imprevisibilidade pela impossibilidade de calcular ou de determinar previamente o resultado final do experimento.
> (c) A possibilidade de descrever com precisão o conjunto de resultados possíveis do experimento partindo do protocolo experimental.

Dessa forma, optamos por levar os alunos a identificarem noções de probabilidade a partir da realização dos experimentos, assim os alunos irão identificar propriedades e significados inicialmente em uma linguagem corrente, para depois institucionalizarmos, ou seja, formalizarmos o saber aprendido. Para tanto, serão apresentados treze experimentos e o material necessário para a realização dos mesmos. Nossa intenção é que o aluno perceba observando os resultados dos experimentos que em alguns ele pode prever o resultado com certeza e em outros não. Se isso acontecer, podemos dizer que houve a validação e realizaremos a institucionalização de experimento determinístico e experimento aleatório.

Procedimentos

Para melhor esclarecimento do desenvolvimento desta sessão, apresentaremos os procedimentos divididos em "momentos", pois não se trata da apresentação de questões para resolução.

1º Momento: Realização dos experimentos

Os alunos devem realizar cada um dos treze experimentos por algumas vezes e depois na ficha 1 (ver Anexo D), que contém a descrição de cada um deles, anotar alguns resultados. A seguir faremos uma descrição de cada experimento.

Descrição dos Experimentos

Experimento 1: Girar a roleta 1 e verificar em que cor o ponteiro para.

Experimento 2: Girar a roleta 2 e verificar em que cor o ponteiro para.

Experimento 3: Girar a roleta 3 e verificar em que cor o ponteiro para.

` Os experimentos 1, 2 e 3 utilizam o simulador de roletas para sua realização. A seguir é dada uma figura de cada uma das roletas; salientamos que os números presentes em cada setor da roleta representam seus respectivos graus.

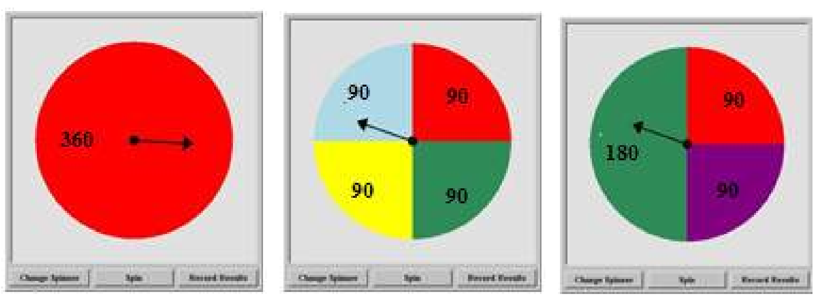


Figura 8: roleta 1, roleta 2 e roleta 3 respectivamente.

Experimento 4: Jogar uma moeda honesta e verificar que face aparece voltada para cima.

Experimento 5: Jogar duas moedas honestas ao mesmo tempo e verificar quais as faces aparecem voltadas para cima.

O experimento 5 deve ser constituído de duas moedas diferentes, como recomenda Coutinho (1994), para tentar evitar que os alunos não cometam o mesmo erro de D'Alembert, já comentado no item 2.3.1, de não distinguir (cara,coroa) de (coroa,cara).

Experimento 6: Jogar um dado regular (honesto) e verificar o número da face que aparece voltada para cima.

Experimento 7: Retirar uma bola do globo e verificar que cor ela vai ser.

Experimento 8: Jogar um tetraedro regular e verificar o número da face que aparece voltada para baixo.

Em uma questão semelhante envolvendo o tetraedro, Corrêa (2010) observou que alguns professores atribuíram ocorrer à face que cai “virada para baixo” como não ocorrê-la. Corrêa atribuiu essa confusão à não visualização espacial do tetraedro e ao fato de que somos mais familiarizados com o dado em que se observa a face que fica voltada para cima. Dessa forma, no experimento 8, devemos estar atentos a compreensão por parte do aluno de que deve ser observada a face do tetraedro que cai “virada para baixo”, pois o tetraedro regular é um sólido formado por quatro triângulos equiláteros e ao jogá-lo, uma face fica oculta (em contado com a superfície) e as outras três ficam expostas visualmente.

Experimento 9: Retirar uma carta de um baralho completo (52 cartas) e verificar de que naipe ela é.

Experimento 10: Retirar uma bola de um saquinho não transparente composto por 5 pedras verdes e 3 amarelas e verificar sua cor.

Experimento 11: Retirar uma bola de um saquinho não transparente composto por 10 bolas brancas, retirar uma bola e verificar a sua cor.

Experimento 12: Sortear um aluno de uma sala composta por 30 meninas e 20 meninos e verificar se um menino ou uma menina será sorteado.

Experimento 13: Retirar uma bala de um pacote composto por balas de canela e verificar de que sabor ela é.

2º Momento: Divisão dos experimentos

Questão proposta: Como podemos dividir esses experimentos em dois grupos? Que critérios vocês acham que podemos utilizar?

Esperamos que os alunos percebam que em alguns experimentos o resultado é sempre o mesmo, nunca muda, sendo possível saber de antemão o que vai acontecer e em outros já não existe essa possibilidade, pois não há como prever os resultados. Se isso acontecer entendemos como um momento dialético de validação. Caso isso não ocorra, para cada experimento perguntaremos antes de realizá-lo se o aluno pode dizer com certeza qual vai ser o resultado. Se, por exemplo, no experimento 2 da roleta 2 (ver Figura 8), ele afirmar que pode prever o resultado, a realização efetiva do experimento lhe provará o contrário. Após a discussão os alunos devem fazer a divisão na tabela da ficha 1 (ver Anexo D).

3º Momento: Institucionalização

Nesta fase prevemos a realização da institucionalização, ou seja, é o momento de dar *status* de saber aos conceitos aprendidos, de oficializar o conhecimento para que os alunos reconheçam o que construíram, no caso, Experimentos Determinísticos e Experimentos Aleatórios. A institucionalização será realizada oralmente e não será impresso para leitura do aluno, pois a intenção é que os alunos escrevam o significado desses conceitos na ficha 2 (ver Anexo E), tal como compreenderam.

A ficha 2, que chamamos de ficha de conceitos probabilísticos serve como um recurso para o aluno relembrar o que foi aprendido, pois nela serão descritos os significados de cada conceito conforme for sendo institucionalizado e ficará com o aluno até o final da experimentação. Também servirá como material de análise para nós.

Texto de institucionalização: Podemos observar que existem experimentos nos quais o resultado é sempre o mesmo. Desta forma, é sempre possível dizer com certeza o resultado, ou seja, podemos prevê-lo. É o que chamamos de Experimentos Determinísticos e também experimentos que mesmo realizados por diversas vezes, não há como dizer o resultado com certeza, ou seja, não é possível prever o resultado. Assim, a situações como estas, chamamos de Experimentos Aleatórios, como por exemplo, o experimento**:** girar a roleta 2 e verificar em que cor o ponteiro para, é um experimento aleatório, pois não é possível dizer com certeza em que cor o ponteiro irá parar ao contrário da roleta 1 que sempre irá parar no vermelho.

4.1.2. Análise *a posteriori*

Iniciamos esta primeira sessão nos apresentando e explicando aos alunos que se tratava de uma pesquisa e a participação deles seria voluntária e caso tiverem assiduidade, receberiam uma declaração de participação. Também explicitamos os objetivos desta pesquisa e suas condições de realização, na qual os encontros seriam gravados em áudio para posterior estudo e os nomes dos alunos seriam mantidos em sigilo. Em seguida pedimos que os alunos se dividissem em duplas e explicamos que todas as atividades seriam resolvidas em duplas em apenas um protocolo, assim, o grupo 1 é constituído pelos Alunos 1 e 2, o grupo 2, pelos Alunos 3 e 4 e por fim, o grupo 3 com os Alunos 5 e 6.

Iniciamos o 1º momento desta sessão, apresentando e realizando os treze experimentos. Em seguida pedimos aos alunos que anotassem os resultados de cinco jogadas para cada experimento na folha 1.

Consideramos nesse momento houve momentos adidáticos de ação e formulação, pois os alunos perceberam que não havia a necessidade de realizar alguns dos experimentos para saber o resultado e já escreviam direto na folha os cinco resultados. Para ilustrar trazemos a justificativa que o Aluno 2 deu ao seu parceiro de grupo, o Aluno 1, em relação ao experimento da roleta 1: “nesse nem precisa jogar, só vai ficar no vermelho mesmo”.

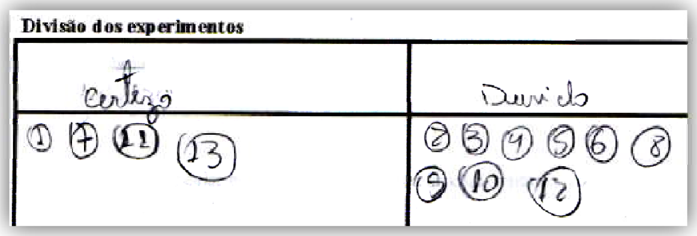
Com relação ao experimento com o tetraedro não observamos dificuldades na compreensão de que o que devia ser observado era a face voltada para baixo como ocorreu com os professores da pesquisa de Corrêa (2010) e acreditamos que isso se deve a disponibilização do tetraedro para efetiva realização.

Após a conclusão do 1º momento, passamos ao 2º, no qual pedimos aos alunos que dividissem esses treze experimentos em dois grupos e perguntamos que critérios eles utilizariam para realizar essa divisão.

> Aluno 5: Tipo... dividir o que você tem como saber e o que você não tem como saber.
> Pesquisadora: Saber o quê?
> Alunos: O resultado.
> Aluno 5: Tipo o da bala de canela, só tem bala de canela então vai sair bala de canela.
> Pesquisadora: Todo mundo concorda?
> (Todos fizeram sinal que concordavam)
> Pesquisadora: Então vamos dividir.

Podemos observar que houve um momento adidático de formulação e validação pelo Aluno 5. Formulação, quando ele afirma que a divisão deve ser feita entre os experimentos que dá pra saber o resultado e os que não e validação quando ele defende seu ponto de vista dando o exemplo do experimento determinístico da bala de canela.

Verificamos que os alunos realizaram a divisão corretamente e não tiveram dificuldades. A dupla 1 dividiu em *previsível* e *imprevisível*; a dupla 2 em *certeza* e *dúvida*; e a dupla 3 em *o que dá pra saber* e *o que não dá para saber*.

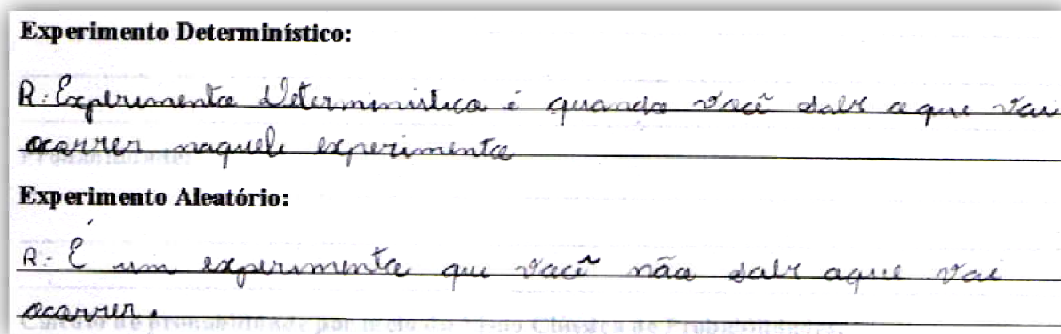


Divisão dos experimentos

certeza	Duvida
1 7 11 13	2 3 4 5 6 8 9 10 12

Figura 9: Resposta do grupo 2 da ficha 1.

Neste momento realizamos a institucionalização (3º momento) de experimento determinístico e aleatório fazendo relação com a divisão que eles fizeram, e, em seguida as duplas colocaram os significados na ficha 2.



Experimento Determinístico:

R: Experimento Deterministica é quando você sabe o que vai ocorrer naquele experimento

Experimento Aleatório:

R: É um experimento que você não sabe o que vai ocorrer.

Figura 10: Resposta da dupla 3 para experimento determinístico e aleatório.

Consideramos que os alunos compreenderam o significado de experimento aleatório e determinístico, passamos então a próxima sessão.

4.2. 2ª SESSÃO: ESPAÇO AMOSTRAL, EVENTO ELEMENTAR E EVENTO IMPOSSÍVEL

4.2.1. Análise *a priori*

Esta sessão visa discutir o conceito de Espaço Amostral e Eventos Elementares de um Experimento Aleatório. Como pré-requisito é necessário o conceito de experimento aleatório, institucionalizado na 1º sessão. Para tanto, continuamos trabalhando com os nove experimentos aleatórios da primeira sessão e também com a realização dos mesmos. Nossa intenção é que o aluno perceba que nos experimentos aleatórios, não podemos prever o resultado, mas podemos descrever os resultados possíveis. Se isso ocorrer, consideramos que houve a validação pelo aluno e realizaremos a institucionalização de espaço amostral, evento impossível e evento elementar.

Procedimentos

Para melhor esclarecimento do desenvolvimento desta sessão, também apresentaremos os procedimentos divididos em “momentos”.

1º momento: Resultados possíveis e impossíveis

Questão proposta: O experimento da roleta 2 é experimento aleatório, dessa forma você não pode prever em que cor o ponteiro irá parar, mas então, o que você pode dizer?

Na sessão anterior os alunos institucionalizaram que nos experimentos aleatórios, não há como predizer o resultado e agora, esperamos que não tenham dificuldades em observar que podem dizer quais são os resultados possíveis. Nesse caso da roleta 2, dizer que o ponteiro pode parar no vermelho, amarelo, verde ou no azul. Em seguida, perguntaremos se é possível que o ponteiro pare na parte rosa, por não haver essa possibilidade, pois nossa intenção é introduzir o sentido de evento impossível. Depois realizaremos este mesmo procedimento com os outros experimentos aleatórios.

2º momento: Institucionalização

Nesta fase prevemos a realização da institucionalização, ou seja, é o momento de dar *status* de saber aos conceitos aprendidos, de oficializar o conhecimento para que os alunos reconheçam o que construíram, no caso, espaço amostral, evento elementar e evento impossível e depois pedir que escrevam na ficha 2 o significado desses conceitos.

Texto de institucionalização: Nesta atividade você descreveu todos os resultados possíveis de cada experimento aleatório e esse conjunto de todas as respostas possíveis é denominado espaço amostral, geralmente representado pela letra S ou Ώ. Você também identificou resultados impossíveis de acontecer, que denominamos eventos impossíveis. Existe também o evento elementar que representa cada uma das respostas possíveis do espaço amostral, por exemplo, no experimento aleatório: girar a roleta 2 e verificar em que cor o ponteiro para:

S = {verde, amarelo, vermelho e azul} (espaço amostral)
A = {vermelho} (Exemplo de Evento elementar)
B = {rosa} (Exemplo de Evento impossível)

3º Momento: Preenchimento da ficha 3

Forneceremos a ficha 3 (ver Anexo F), que contém todos os experimentos aleatórios trabalhados na 1º sessão e para cada um desses experimentos pediremos que anotem na ficha o espaço amostral, um exemplo de evento impossível, um exemplo de evento elementar e o total de eventos elementares.

4.2.2. Análise *a posteriori*

Iniciamos esta sessão com a questão (1º momento): O experimento da roleta 2 é experimento aleatório, dessa forma você não pode prever em que cor o ponteiro irá parar. Mas então, o que você pode dizer?

> Aluno 5: Que ele sempre vai parar em uma cor.
> Pesquisadora: Certo. Então ele pode parar no rosa?
> Alunos: Não!
> Pesquisadora: Mas ele disse que "vai parar em uma cor", então pode ser qualquer cor.
> Alunos: Não!
> Pesquisadora: Então, em que cores ele pode parar?
> Alunos: Azul, vermelho, amarelo e verde.
> Pesquisadora: Pode parar no cinza?
> Alunos: Não.
> Pesquisadora: Por quê?
> Alunos: Por que não tem.
> Aluno 3: Porque só tem quatro determinadas cores.

Em seguida os alunos foram descrevendo oralmente todos os resultados possíveis de cada experimento e para cada um deles também perguntávamos sobre um resultado impossível como fizemos no experimento da roleta 2. Observamos nesse momento, indícios de fase de formulação, haja vista que os alunos começaram a elaborar conjecturas sobre os possíveis resultados.

Observamos que no experimento lançar duas moedas e observar as faces voltadas para cima, apenas a disponibilização de duas moedas diferentes para a sua efetiva realização não foi suficiente para observação de que (cara, coroa) seria diferente de (coroa, cara). Para os alunos só foram válidos os valores que ficam na superfície superior, pois afirmaram que seriam três possibilidades: uma cara e uma coroa, duas caras e duas coroas. Foi necessária então, uma intervenção. Na qual acabamos fornecendo informações sobre o saber em cena. Dessa forma a situação deixou de ser adidática como podemos ver a seguir.

> Pesquisadora: São duas moedas, sair cara nessa e coroa nessa, não é diferente de sair coroa nessa e cara nessa? (apontando para as moedas)
> [...]
> Aluno 5: É.
> Aluno 3: Se for olhar a ordem, pode cair coroa e cara ou cara e coroa...
> Pesquisadora: Todo mundo concorda?
> Alunos: Sim.

Observaremos mais adiante, na atividade 6.5 (6ª sessão) envolvendo dois tetraedros, que esta concepção errônea ainda irá persistir em um dos grupos.

Após descrevermos os resultados possíveis de cada um dos experimentos aleatórios, realizamos a institucionalização de espaço amostral, evento impossível e evento elementar e em seguida os alunos escreveram na ficha 2 o significado de cada um deles.

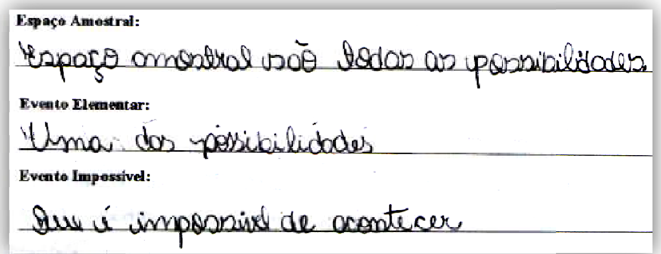


Figura 11: Resposta da dupla 1 para espaço amostral, evento elementar e impossível.

Na ficha 3, para cada experimento os alunos escreveram o espaço amostral, um exemplo de evento impossível, um exemplo de evento elementar e o total de eventos elementares. Não observamos dificuldades nesta atividade, pois já havíamos feito oralmente.

Com a institucionalização de espaço amostral, evento elementar e evento impossível, passamos para a próxima sessão.

4.3. 3ª SESSÃO: ESPAÇO AMOSTRAL EQUIPROVÁVEL E NÃO EQUIPROVÁVEL

4.3.1. Análise *a priori*

Esta sessão visa discutir o conceito de espaço amostral equiprovável e espaço amostral não-equiprovável de experimentos aleatórios e como requisito o aluno deve ter noção de experimento aleatório, espaço amostral, evento elementar e proporcionalidade.

Para tanto, continuamos trabalhando com os nove experimentos aleatórios da primeira sessão e também com a realização dos mesmos. Nossa intenção é que o aluno perceba que existem experimentos aleatórios em que todos os eventos elementares de seu espaço amostral têm a mesma chance de ocorrer e em outros que não. Se isso ocorrer, consideramos que houve a validação e realizaremos a institucionalização de espaço amostral equiprovável e não equiprovável.

Procedimentos

1º momento: Probabilidade

Explicaremos aos alunos que nos experimentos aleatórios, mesmo realizando-o por várias vezes e em condições semelhantes, não é possível prever o resultado, pois existe a ação do acaso, mas que podemos determinar o grau de incerteza da ocorrência de um evento elementar, ou seja, podemos calcular sua medida de incerteza. É o que chamamos de Probabilidade.

2º momento: Observação dos experimentos

Pediremos que os alunos observem novamente as roletas 2 e 3 e seus respectivos experimentos aleatórios e depois perguntaremos se eles acham que todos os eventos elementares da roleta 2 têm a mesma chance de sair. E também se eles acham a mesma coisa dos eventos elementares da roleta 3 e por quê. Este momento deve ser realizado apenas oralmente.

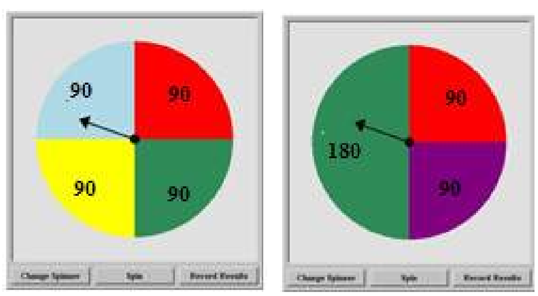


Figura 6: roleta 2 e roleta 3

Esperamos que os alunos não tenham dificuldades, pois observando as roletas ele pode verificar que a roleta 2 está dividida em quatro setores iguais de 90º e na roleta 3 é visível que o setor verde tem mais chances de ser obtido que os setores vermelho e roxo, por ser maior, 180º. Em seguida, os alunos devem verificar se os eventos elementares do espaço amostral de cada um dos outros experimentos aleatórios têm ou não a mesma chance de serem obtidos, justificando suas respostas. Este momento deve ser realizado apenas oralmente e acreditamos que não terão dificuldades em fazer essa diferenciação, por que utiliza o conceito de proporção que os alunos já estudaram.

3º momento: Institucionalização

Nesta fase prevemos a realização da institucionalização, ou seja, é o momento de dar *status* de saber aos conceitos aprendidos, de oficializar o conhecimento para que os alunos reconheçam o que construíram, no caso, espaço amostral equiprovável e espaço amostral não equiprovável e depois pedir que escrevam na ficha 2 o significado desses conceitos.

Texto de institucionalização: Você observou na atividade anterior que há espaços amostrais em que as chances de ocorrer cada um dos seus eventos elementares são as mesmas, ou seja, são igualmente prováveis, têm a mesma chance de serem obtidas, assim, o espaço amostral desse experimento é dito equiprovável. E também pôde observar que há espaços amostrais, nos quais seus eventos elementares não têm a mesma chance de serem obtidos, ou seja, não são igualmente prováveis, nesse caso então, o espaço amostral desse experimento é dito não equiprovável**.**

4º momento: Preenchimento da ficha 3

Para observarmos se os alunos compreenderam as noções propostas para esta sessão, na ficha 3, para cada experimento aleatório os alunos devem escrever se o espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável.

4.3.2. Análise *a posteriori*

Observando as roletas 2 e 3 os alunos não tiveram dificuldades em perceber que na roleta 2 todos tinham a mesma chance ou probabilidade de ocorrer e na roleta 3 não.

> Pesquisadora: Vocês acham que na roleta 2 todos os eventos elementares têm a mesma chance ou probabilidade de ocorrer?
> Aluno 5: Sim, 25% cada.
> (Todos concordaram)
> Pesquisadora: E na roleta 3?
> Alunos: Não.
> Aluno 3: Por que, os ângulos não são todos iguais a 180, não é?
> Pesquisadora: Então quem tem mais?
> Aluno 3: O verde
> Aluno 5: 50%

Podemos observar no excerto que os alunos relacionaram a probabilidade com a proporção nas roletas 2 e 3 e atribuíram 100% ao todo.

No experimento da moeda os alunos afirmaram que os dois lados da moeda tinham a mesma chance de ocorrer e atribuíram 50% para cada lado. Mas ao questionarmos por que, o Aluno 5 respondeu: “Por que são só as duas” e em seguida o Aluno 3 concordou dizendo: “Ou cai uma ou cai outro”.

Para confrontá-los a esse conhecimento utilizamos o experimento aleatório das pedras verdes e amarelas que possui duas possibilidades mas não são equiprováveis. Indagamos aos alunos que, nesse caso, como existem duas possibilidades, então teríamos a mesma chance de tirar uma pedra verde ou uma amarela.

Os alunos afirmaram que tirar uma pedra verde ou amarela não tinha mesma chance sair, pois havia mais pedras verdes no saquinho. E como não souberam justificar a equiprobabilidade no experimento aleatório da moeda, relembramos que era por causa da simetria da moeda, pois já havíamos explicado na primeira sessão. Em consequência disso, os alunos atribuíram a equiprobabilidade dos eventos elementares do dado e do tetraedro à simetria de ambos.

No experimento do baralho o aluno 5 disse que os naipes não tinham a mesma chance de sair por que “o baralho não é regular”, mas o aluno 2 o convenceu que são equiprováveis dizendo a ele: “são 52 cartas, sem coringa então tem o mesmo pra cada um”. Entendemos que houve um momento dialético de validação, pois o aluno 2 consegue provar a validade de sua afirmação e convence seu colega.

Com os outros experimentos não observamos dificuldades nos alunos em perceber se os eventos elementares de cada espaço amostral tinham ou não a mesma chance ou probabilidade de serem obtidos e após essa discussão passamos a institucionalização de espaço amostral equiprovável e espaço amostral não equiprovável. Em seguida, os alunos anotaram na ficha 2 o significado de cada um deles.

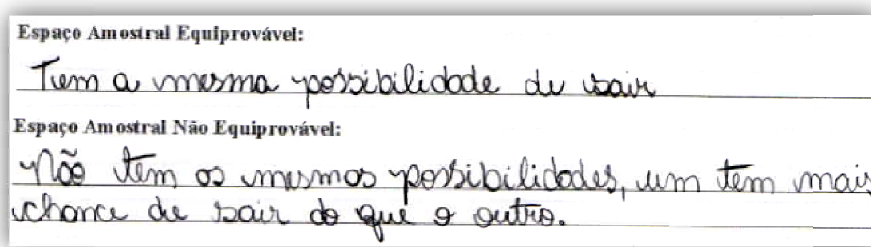

Espaço Amostral Equiprovável:
Tem a mesma possibilidade de sair
Espaço Amostral Não Equiprovável:
Não tem os mesmos possibilidades, um tem mais chance de sair do que o outro.

Figura 12: Resposta da dupla 1 para espaço amostral equiprovável e não equiprovável.

Podemos perceber que a dupla 1 confundiu chance ou probabilidade com possibilidade, assim como as outras duplas (2 e 3). Dessa forma foi necessária uma intervenção.

Observamos que os alunos compreenderam o que era um espaço amostral equiprovável e não equiprovável, pois fizeram corretamente esta classificação para cada experimento aleatório na ficha 2.

4.4. 4ª SESSÃO: VISÃO CLÁSSICA DE PROBABILIDADE

4.4.1. Análise *a priori*

Esta sessão visa introduzir a noção do cálculo de Probabilidade num enfoque clássico e de suas diferentes representações (fração, decimal e porcentagem), e como requisito são necessárias as noções trabalhadas anteriormente nas sessões 1, 2 e 3, além de razão e proporcionalidade.

Para tanto, continuamos trabalhando com os nove experimentos aleatórios da primeira sessão e também com a realização dos mesmos. Nossa intenção é que o aluno consiga relacionar proporção com probabilidade e calculá-la. Se isso ocorrer, consideramos que houve a validação e realizaremos a institucionalização.

Salientamos que optamos por deixar que os alunos utilizem a calculadora para fazer os cálculos de probabilidade e frequência relativa nas sessões 5 e 6, pois o foco não é o procedimento do cálculo e sim os resultados.

Procedimentos

1 º momento: Calcular probabilidades

Questão proposta: Você viu anteriormente que o espaço amostral do experimento com a roleta 2 é equiprovável, assim todos os eventos elementares têm a mesma chance de ocorrer. Dessa forma, qual você acha ser o valor dessa chance ou probabilidade de se obter cada um desses espaços amostrais?

Acreditamos que os alunos não terão dificuldades em encontrar a probabilidade como a proporção de casos favoráveis sobre os possíveis, pois concordamos com Piaget e Inhelder (1951, apud COUTINHO, 1994. p. 36), que nesta fase onde se encontram os alunos do 9º ano, a das operações formais, já exista certa "assimilação do acaso às operações formais e aparece o julgamento de probabilidade, a construção dos sistemas de combinatória, permitindo determinar o conjunto de casos possíveis e o acesso ao raciocínio proporcional". Dessa forma, esperamos que os alunos consigam responder que a probabilidade da roleta parar em cada um dos eventos elementares (verde, azul, vermelho e amarelo) é $\frac{1}{4}$ ou 25%, relacionando a proporção com a probabilidade, pois a roleta 2 está dividida em quatro partes iguais e pode-se verificar pelo valor dos graus de cada setor.

Em seguida, repetimos o mesmo procedimento com experimento da roleta 3 e os demais experimentos aleatórios e logo que em algum experimento surgir a resposta em fração ou decimal, o que esperamos que aconteça no experimento do dado, faremos a institucionalização das diferentes representações de probabilidade (decimal, fração e porcentagem).

Questão proposta para o experimento aleatório da roleta 3: Você viu anteriormente que o espaço amostral do experimento com a roleta 2 é não equiprovável, assim todos os eventos elementares não têm a mesma chance de ocorrer. Dessa forma, qual você acha ser a chance ou probabilidade de se obter cada um desses espaços amostrais?

Se os alunos encontraram a probabilidade do experimento da roleta 2, acreditamos que os alunos não terão dificuldades em responder que na roleta 3:

$$P(\text{verde}) = \frac{2}{4} \text{ ou } 0{,}50 \text{ ou } 50\%$$

$$P(\text{vermelho}) = \frac{1}{4} \text{ ou } 0{,}25 \text{ ou } 25\%$$

$$P(\text{roxo}) = \frac{1}{4} \text{ ou } 0{,}25 \text{ ou } 25\%$$

Salientamos que este momento deve ser realizado oralmente e o aluno pode fazer uso da calculadora, apenas os resultados devem ser anotados na folha 3. Neste momento pedimos que cada dupla explicite suas respostas e se houver diferenças, cada um deve defender seu ponto de vista, favorecendo a discussão e objetivando o aparecimento das dialéticas de ação, formulação e validação.

2º momento: **Institucionalização**

Nesta fase prevemos a realização da institucionalização, ou seja, é o momento de dar *status* de saber aos conceitos aprendidos, de oficializar o conhecimento para que os alunos reconheçam o que construíram, no caso, o cálculo de probabilidades. Lembrando que deve ser feito apenas oralmente e sem um texto escrito, pois em seguida devem escrever na ficha 2 o significado desse conceito.

Texto de institucionalização: Nos estudos anteriores foi possível observar que existem dois tipos de experimentos: os experimentos determinísticos, nos quais os resultados nunca mudam, sendo possível fazer uma previsão e os experimentos aleatórios, cujos resultados não podemos ter certeza, pois existe a ação do acaso. Mas, podemos descrever todos os resultados possíveis denominado de espaço amostral. Cada um desses resultados possíveis é denominado de evento elementar. Podemos determinar também o grau de certeza da ocorrência de um evento, ou seja, calcular sua medida de incerteza. É o que chamamos de Probabilidade.

Considerando o experimento aleatório das atividades anteriores (girar a roleta 2 e verificar em que cor o ponteiro para), concordamos que o espaço amostral é equiprovável, ou seja, todos os eventos elementares (vermelho, verde, azul e amarelo) têm a mesma chance de serem obtidos. Portanto, são igualmente prováveis e podemos dizer que cada uma dessas cores possíveis tem uma chance em quatro de ocorrer. Afinal, a roleta está dividida em partes iguais e, em outras palavras, significa que a probabilidade do ponteiro parar na cor vermelha ou em qualquer outra cor possível é de $\frac{1}{4}$ ou 0,25 ou 25%".

4.4.2. Análise *a posteriori*

Como já observamos na sessão 3 os alunos já explicitaram o valor das probabilidades dos eventos elementares das roletas 2 e 3 e da moeda em porcentagem assim pedimos apenas que fizessem o registro na folha 3.

Seguindo a ordem dos experimentos da ficha 3, perguntamos ao alunos qual seria a probabilidade de serem obtidas cada uma das faces do dado e o Aluno 5 respondeu: "ih! Professora calma aí, tem que fazer tipo... fazer lá o 100 por 6 não é professora?" e em seguida o Aluno 2 disse: "É 1 por 6".

Observamos que a solução dos dois alunos está correta, pois o Aluno 5 dividiu 100% por 6 (uma vez que todas as seis faces do dado têm a mesma probabilidade de sair), empregando o mesmo raciocínio que utilizou para calcular as probabilidades das roletas 1 e 3. Já o Aluno 2 utilizou a razão. Identificamos aqui momentos adidáticos de ação, formulação e validação, pois os conseguem calcular as probabilidades. Em seguida dizemos que ambos estavam corretos e pedimos que dividissem na calculadora e os resultados foram 16,666... e 0,1666..., assim foi possível que fizéssemos a intervenção das diferentes representações da probabilidade. Explicamos aos alunos que o primeiro havia encontrado a probabilidade em porcentagem e o segundo sob forma de fração e depois da divisão em decimal. Explicitamos também que essas três representações eram possíveis em probabilidade e que se igualavam. Observamos que na ficha 3 todos fizeram o registro apenas em fração, creditamos isso ao fato de a porcentagem e decimal, nesse caso, terem sido dízimas periódicas.

No experimento *retirar uma carta de um baralho completo (52 cartas) e ver de que naipe ela é,* o Aluno 5 havia respondido errado, mas foi corrigido pelo Aluno 3, como aparece no excerto a seguir, no qual identificamos momentos adidáticos de ação, pois tentam calcular a probabilidade. Acreditamos que poderíamos também ter observado momentos de formulação e validação se não tivéssemos interferido afirmando que os Alunos 2 e 3 estavam corretos.

Aluno 5: 1 pra 52.
Aluno 3: Não, 1 pra 4.
Aluno 2: 13 em 52.
(aguardaram o parecer da pesquisadora)
Pesquisadora: Sim 13 por 52 é 1 por 4 simplificado.
Aluno 5: Ha! Então é 25%.

Nos demais experimentos não identificamos dificuldades, pois foram respondidos corretamente, apenas nos experimento retirar uma bola de um saquinho não transparente composto por 5 pedras verdes e 3 amarelas e verificar sua cor, os alunos, apesar de responderem corretamente precisaram de nossa confirmação para terem certeza.

Os alunos parecem ter compreendido como calcular as probabilidades numa abordagem clássica, ou seja, *a priori*, sem a necessidade de realizar o experimento, por meio da razão e proporção, além de demonstrarem conhecimento de suas diferentes representações (fração, decimal e porcentagem). Dessa forma passamos à próxima sessão que visa à institucionalização da visão frequentista de probabilidades.

4.5. 5ª SESSÃO: VISÃO FREQUENTISTA DE PROBABILIDADE

O objetivo desta sessão, que é composta por quatro atividades, é realizar uma introdução da visão frequentista de probabilidade, pois concordamos com Coutinho (2001) e Silva (2002) que deve haver uma mudança no ensino de probabilidade brasileiro, no qual, apenas a concepção clássica (laplaciana), limitada a experimentos com espaço amostral equiprovável, é ensinada. Deve-se, também, fazer uma integração com a concepção frequentista, na qual seus experimentos não são obrigatoriamente ligados à equiprobabilidade, dando uma gama maior de situações que podem ser exploradas e que reproduzem a realidade.

> [...] a adoção de apenas uma das visões probabilísticas no processo de ensino-aprendizagem proporciona uma apreensão parcial e limitada do conceito de probabilidades: uma proposta de ensino na qual as duas visões sejam enfocadas, proporcionaria aos alunos uma apropriação mais significativa e abrangente do conceito de probabilidades. (SILVA, I. A. 2002, p.20)

Nesse sentido, pudemos observar nas pesquisas que vários autores também defendem um ensino de probabilidades que leve em consideração a dualidade das visões clássica e frequentista, ou seja, a confrontação entre a probabilidade calcula *a priori* e *a posteriori*, além de enfatizarem as vantagens de utilizar a informática para a simulação de experimentos um número consideravelmente grande de vezes.

Como já foi explicitado anteriormente esta sessão é constituída por quatro atividades, das quais, as duas primeiras (5.1 e 5.2) têm o objetivo de levar o aluno a perceber que as frequências relativas de cada evento elementar se aproximam da probabilidade calculada *a priori* quanto maior foi o número de realizações do experimento. E que isso nem sempre acontece quando essa quantidade for pequena. A diferença entre as duas atividades é que na primeira o espaço amostral é equiprovável e na segunda é não equiprovável, para melhor observação das estabilizações das frequências relativas e também para não reforçar o obstáculo da equiprobabilidade.

As duas últimas atividades 5.3. e 5.4. têm o objetivo de levar o aluno a perceber que existem experimentos em que não é possível realizar o cálculo *a priori* (clássica) de seus eventos e que uma solução ideal é observar a estabilização da frequência relativa com um número grande de realizações do experimento (frequentista), podendo assim calcular a probabilidade por meio da visão frequentista. Dessa forma, esperamos que os alunos, baseados nas percepções sobre a frequência relativa obtidas nas atividades 5.1. e 5.2., consigam perceber que podem estimar um valor para a probabilidade de cada evento elementar observando a estabilização de suas respectivas frequências relativas. Assim, na atividade 5.3., não é possível o cálculo *a priori*, pois a roleta está “quebrada”, mas apresenta uma tabela com as frequências relativas de 10 a 30.000 lançamentos desta roleta, na qual ele pode observar a estabilização e assim calcular a probabilidade. Já na atividade 5.4., também existe a impossibilidade do cálculo *a priori* e a melhor solução é o aluno encontrar as frequências relativas utilizando o simulador de roletas para estimar o valor das probabilidades. Salientamos que isto não será explicitado ao aluno.

A seguir apresentamos na íntegra a atividade 5.1 e, em seguida, a descrição e o planejamento desta atividade.

4.5.1. Atividade 5.1

1. Considerando o seguinte experimento aleatório: girar a roleta 4 e verificar em que cor o ponteiro para. Qual a probabilidade do ponteiro parar na parte rosa? E na parte roxa? Justifique.

2. Perceba que essa probabilidade foi calculada sem a necessidade de realizar o experimento, ou seja, teoricamente. Agora, imagine que você realizou esse experimento 10 vezes consecutivas (uma atrás da outra). Quantas vezes você acha que o ponteiro parou na parte rosa? E na parte roxa? Justifique.

3. Agora gire a roleta 10 vezes anotando os resultados na tabela abaixo:

	Anotações	Total
Rosa		
Roxo		

4. Qual dos resultados seguintes obtidos em 10 lançamentos consecutivos da roleta 4 em sua opinião é mais provável acontecer? Justifique.

a) Rosa; Rosa; Rosa; Rosa; Rosa; Rosa; Roxo; Rosa; Rosa; Roxo.

b) Roxo; Rosa; Roxo; Rosa; Roxo; Rosa; Roxo; Rosa; Roxo; Rosa.

c) Roxo; Rosa; Rosa; Roxo; Rosa; Roxo; Roxo; Rosa; Rosa; Roxo.

d) Os resultados (b) e (c) são igualmente prováveis.

e) Os três resultados são igualmente prováveis

5. Se girarmos a roleta ***n*** vezes, ou seja, se realizarmos esse experimento um número ***n*** de vezes e obtivermos uma quantidade ***a*** de vezes que o ponteiro parou na parte rosa e uma quantidade ***b*** de vezes que o ponteiro parou na parte roxa, dizemos que a frequência relativa do evento rosa é $\frac{a}{n}$ e a frequência relativa do evento roxo é $\frac{b}{n}$ e podem ser expressas em decimal ou porcentagem.
Agora, anote na tabela a seguir os resultados de seus colegas da questão 3, encontrando as frequências relativas de rosa e roxo e em seguida faça as simulações na roleta 4 com a quantidade indicada na coluna "Total de Lançamentos", calculando também as frequências relativas e observando se as frequências relativas se aproximam das Probabilidades calculas na questão 1.

Simulação	Total de Lançamentos	Total de Rosa	Frequência Relativa de Rosa (%)	Total de Roxo	Frequência Relativa de Roxo (%)
1	10				
2	10				

3	10				
4	10				
5	10				
6	100				
7	100				
8	100				
9	100				
10	500				
13	1.000				
14	1.000				
15	1.000				
17	2.000				
18	3.000				
19	5.000				
21	10.000				
22	50.000	25010	50,02	24990	4998
23	100.000	50010	50,01	49990	49,99

4.5.1.1. Análise *a priori*

Nessa atividade utilizamos o experimento da roleta 4 (girar a roleta e verificar em que cor ela para), no qual o espaço amostral é equiprovável, sendo possível o cálculo *a priori*. A intenção é que o aluno perceba, ao longo dos repetidos lançamentos com o simulador da roleta, que as frequências relativas (frequentista) de cada evento elementar se aproximam da probabilidade já calculada teoricamente (clássica), quando o experimento é realizado um número grande de vezes tendendo ao infinito. Porém isso nem sempre ocorre quando o experimento é realizado um número pequeno de vezes, promovendo uma integração entre as duas concepções (frequentista e clássica).

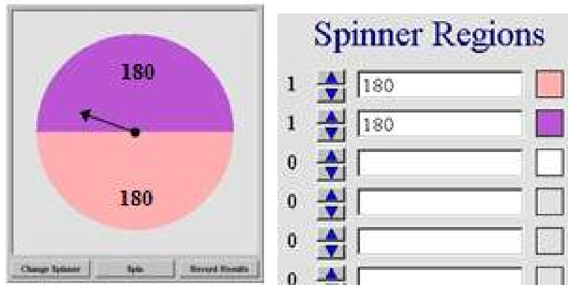


Figura 13: Roleta 4 e configuração.

Procedimento

Forneceremos a folha com a atividade 5.1 e o simulador da roleta 4. Esta atividade deve ser realizada com as três duplas em conjunto, para propiciar o aparecimento de momentos dialéticos de ação, formulação e validação.

Na questão (1), perguntamos aos alunos qual a probabilidade do ponteiro parar na parte rosa e na roxa, no lançamento da roleta 4 e acreditamos que os alunos não terão dificuldades, pois utilizam conhecimentos prévios que também já institucionalizados.

Para a questão (2) pedimos aos alunos que façam uma previsão de quantas vezes eles acham que ponteiro irá parar na parte rosa e na roxa, no lançamento da roleta 4 em dez vezes consecutivas. Nossa intenção é fazer com que o aluno comece a refletir sobre o significado do valor da probabilidade de cada setor da roleta, calculado anteriormente ser de 50% cada uma e observar se ele utiliza esses dados para suas respostas.

Em seguida, na questão (4), queremos observar se o aluno utiliza a heurística da representatividade para julgamento probabilístico, no qual a probabilidade é atribuída de acordo com sua representatividade ou a concepção errônea de achar que um evento raramente acontece diversas vezes seguidas, como D'Alembert pensava, não considerando a independência do experimento.

Na última questão (5) os alunos devem fazer as simulações no simulador da roleta com quantidades de lançamentos que variam de 10 a 10.000 lançamentos, calculando as frequências relativas em porcentagem e anotando os resultados nas tabelas, para que possam observar uma estabilização das frequências relativas.

Salientamos que optamos pela frequência relativa em porcentagem, pelo fato de que o aluno visualiza melhor a probabilidade nesta forma, como foi observado nos trabalhos de Figueiredo (2000) e Souza (2002), mas modificaremos para a frequência relativa em decimal se na sessão 4 observarmos que eles utilizam mais esta representação para probabilidade.

Também ressaltamos que para os cálculos da frequências relativas o aluno pode fazer uso da calculadora, pois o importante é que ele observe o resultado.

Com a observação da tabela preenchida com as frequências temos três objetivos, que consideramos como validação desta atividade:

1) O aluno perceber que a frequência relativa de cada evento elementar se aproxima da probabilidade calculada *a priori* quando a quantidade de realizações do experimento for grande;

2) O aluno perceber que nem sempre a frequência relativa de cada evento elementar se aproxima da probabilidade calculada *a priori* se a quantidade de realizações do experimento for pequena;

3) O aluno refletir sobre quantas realizações seriam suficientes para observar uma estabilização.

4.5.1.2. Análise *a posteriori*

Iniciamos esta sessão fornecendo aos grupos as folhas com a atividade 5.1., procedendo a leitura da primeira questão, na qual todos responderam corretamente, 50% para rosa e 50% para roxo, conforme havíamos previsto. Na segunda questão sobre quantas vezes eles achavam que o ponteiro pararia no roxo ou no rosa em dez lançamentos, segue o seguinte diálogo.

> Aluno 5: Cinco pra cada.
> Aluno 3: Não.
> Aluno 5: Cinco pra cada ué. Metade pra cada um. Se é 50% a probabilidade ué.
> Aluno 3: Não, se é 50% a probabilidade. Mas não é toda vez que o ponteiro vai parar em uma e em outra.
> Aluno 5: Pode sair duas vezes no roxo?
> Aluno 3: É. Pode... tipo... rodar duas vezes e pode cair duas vezes no roxo.
> Aluno 5: Professora vamos fazer o teste. Quer ver vai cair cinco em cada.
> Aluno 2: É pode cair 5 pra cada mas não é uma regra...
> Pesquisadora: Vamos jogar então.
> Aluno 5: Vai lá professora vai cair 5 em cada.
> Aluno 3: Não vai não.

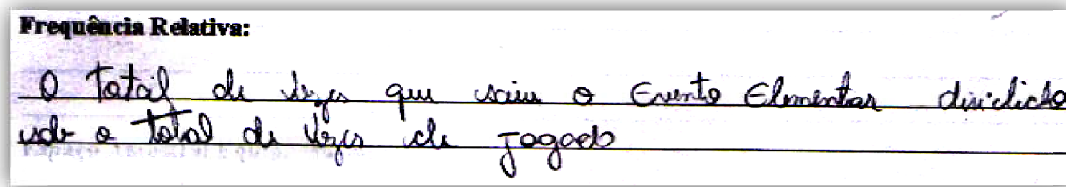
A partir do diálogo podemos notar que o Aluno 5 utilizou o valor da probabilidade para fazer sua previsão, já os Alunos 2 e 3 têm a percepção de que se as probabilidades são 50%, não quer dizer que sempre cairá metade para cada, como o Aluno 2 afirmou, “não é uma regra". Houve um momento de ação e formulação, pois os alunos formulam hipóteses e tentam defender seu ponto de vista e para tentar validar pedem para realizar o lançamento da roleta, assim realizamos a simulação para dez lançamento por duas vezes, pois como o resultado não foi 5 para cada cor, o Aluno 5 pediu que fizesse novamente e, uma vez mais o resultado não foi 5 para cada como ele havia previsto, dessa forma sua hipótese não é validada e ele concorda com os colegas. Para a quarta questão segue o diálogo:

> Aluno 4: A "d".
> Aluno 5: Não. Os três resultados são igualmente prováveis.
> Aluno 4: Porque três?
> Aluno 5: Por que não vai cair sempre na mesma ordem né o?
> Aluno 4: Não
> Aluno 5: Então, os três são igualmente prováveis.
> Aluno 3: É igual nas vezes que a professora jogou. (referindo-se as duas simulações de 10 lançamentos)
> Pesquisadora: Porque você achou que era a "d"? (perguntando ao Aluno 4)
> Aluno 4: Não professora, é que eu pensei errado professora. Eu que pensei que aqui é esses dois (apontando para as alternativas "b" e "c"), tipo é igual pros dois, então eu pensei errado.
> Aluno 2: Se for nessa ordem é menos provável. (apontando para a alternativa "a")
> Aluno 3 e 5: Eu acho que é a "e". (quase ao mesmo tempo)

O Aluno 4 escolheu o item "d", pois havia observado a quantidade de rosas e roxo, que são as mesmas tanto na alternativa "b", quanto na "c" (heurística da representatividade) e não a ordem da sequência, mas com os argumentos dos colegas (Aluno 3 e Aluno 5) acabou percebendo seu erro e concordando com eles.

Pela fala do Aluno 2 podemos notar que também havia pensado como o Aluno 4, mas em seguida cometeu o mesmo erro de D'Alembert (dificuldades devido a independência do experimento aleatório) ao afirmar que a alternativa "a" seria a menos provável nessa ordem.

Para finalizar esta questão, a pesquisadora explicou que a questão "e" seria a correta, devido à independência do experimento aleatório, ou seja, nesse caso cada lançamento é independente, não influindo sobre o outro e passamos a quinta questão, quando inicialmente explicamos o que significa a frequência relativa e como calculá-la e pedimos que escrevessem na ficha 2 o seu significado.


Frequência Relativa:

O Total de vezes que saiu o Evento Elementar dividido pelo total de vezes de jogado

Figura 14: Resposta da dupla 2 para o significado de frequência relativa.

Explicamos também o que representa a frequência relativa, porém nenhum dos grupos fez esse registro. Optamos ainda por não formalizar a quantidade de vezes que certo evento elementar ocorreu como frequência absoluta. Em seguida, começamos a fazer as simulações da roleta 4 com o simulador de roletas e a preencher da tabela do item (5). Para melhor compreensão das análises, a seguir dispomos apenas a tabela preenchida do grupo 1, pois são iguais para os três grupos por, como já foi dito anteriormente, ter sido realizada em conjunto.

Simulação	Total de Lançamentos	Total de Rosa	Frequência Relativa de Rosa (%)	Total de Roxo	Frequência Relativa de Roxo (%)
1	10	5	50%	5	50%
2	10	6	60%	4	40%
3	10	5	50%	5	50%
4	10	3	30%	7	70%
5	10	5	50%	5	50%
6	100	49	49%	51	51%
7	100	54	54%	46	46%
8	100	43	43%	57	57%
9	100	48	48%	52	52%
10	500	248	49,60%	252	50,40%
13	1.000	528	52,8%	472	47,2%
14	1.000	495	49,5 %	505	50,5%
15	1.000	508	50,8%	492	49,2%
17	2.000	1017	50,85%	982	49,15%
18	3.000	1526	50,87%	1474	49,13%
19	5.000	2525	50,50%	2475	49,50%
21	10.000	5010	50,10%	4990	49,90%
22	50.000	25010	50,02	24990	4998
23	100.000	50010	50,01	49990	49,99

Figura 15: Tabela da atividade 5.1. preenchida pela dupla 1.

Durante o preenchimento da tabela, esquecemos de apagar a tecla *clear* no simulador após a realização da simulação 5 que eram de 10 lançamentos, dessa forma, os resultados foram somados com os 100 lançamentos referentes a simulação 6. Engano que felizmente foi percebido pelo Aluno 5.

> Pesquisadora: Deu 62 no rosa e 48 no roxo.
> Aluno 5: 62% e 48%. (quando o total de jogadas era 10, 100 e 1000 perceberam que não havia a necessidade de fazer as contas na calculadora)
> Aluno 3: É 62% e 48%.
> Aluno 5: Professora eu tenho uma pergunta. A soma dessas duas porcentagens não vai dar 100 vai dar mais que 100.
> Pesquisadora: Deu mais que 100?
> Aluno 5: Deu porque ó 62% mais 48 vai dar ... (foi fazer a conta)
> Aluno 2: Ai, garoto!
> Aluno 5: Mas não vai dar porque 60 mais 40 já é 100.
> Pesquisadora: Como assim?
> Aluno 5: Aqui professora ó. 62 mais 48 é 110. Vai ficar 110%.
> Aluno 2: É mesmo.
> Pesquisadora: E não pode dar mais que 100%?
> Alunos: Não.
> Pesquisadora: E menos que 100%?
> Aluno 5: Também não né professora!

Podemos observar no diálogo momentos adidáticos de ação, formulação e validação. Ação quando o Aluno 5 percebeu que havia algo errado (a soma dava mais que 100%); formulação quando ele afirma que estava errado e validação pois ele realiza a soma confirmando que deu mais que 100% e ainda convence o Aluno 2 que estava correto. Assim, podemos notar que os alunos compreenderam que a soma das probabilidades dos eventos elementares do espaço amostral tem que ser sempre 100% e, após o preenchimento de toda a tabela, segue o diálogo que a pesquisadora teve com os alunos para tentar fazer com que percebam a relação da frequência relativa com a probabilidade.

> Pesquisadora: Qual era a probabilidade de parar no roxo e no rosa?
> Alunos: 50%.
> Pesquisadora: Agora observando a tabela, quando nós realizamos 10 lançamentos a frequência foi 50% sempre?
> Aluno 5: A maioria das vezes.
> Pesquisadora: Sim e teve uma variação não teve?
> Alunos: Sim.
> Pesquisadora: E quando jogamos 100 vezes, teve uma variação também?
> Alunos: Sim.
> Aluno 5: Curiosamente nenhuma caiu 50% pra cada professora.
> Pesquisadora: Sim, mas a variação foi grande?
> Alunos: Não.
> Aluno 5: Foram diferenças mínimas.
> Pesquisadora: Isso. Agora e quando jogamos 500 vezes deu 49,60%.
> Aluno 3: Também uma pequena diferença.
> Pesquisadora: Agora, e nas de 1.000 vezes?
> Aluno 5: A diferença já aumentou um pouco.
> Pesquisadora: 2.000 vezes?

Aluno 5: Abaixou de novo.
Aluno 3: É.
Pesquisadora: 3.000 vezes?
Aluno 5: Aumentou ... é, nem tanto.
Pesquisadora: Agora eu quero que vocês me digam se aproxima da probabilidade que é 50%?
Alunos: Se aproxima.
Pesquisadora: Quando lançamos 10.000 vezes se aproximou mais ou menos?
Alunos: Mais.
Aluno 5: Bem mais.
Pesquisadora: Olhem o 50.000 quando deu?
Aluno 5: Deu ... por 2 décimos não deu a porcentagem certa. (referindo-se a frequência relativa de rosa que foi 50,02% e de roxo 49,98%)
Pesquisadora: E 100.000 vezes?
Aluno 5: Por 1 décimo. (referindo-se a frequência relativa de rosa que foi 50,01% e de roxo 49,99%)
Pesquisadora: Então o que é que acontece?
Aluno 5: Quanto mais você joga, mais se aproxima da porcentagem de 50%?
Pesquisadora: Todos concordam?
Alunos: Sim.

Pelo diálogo, entendemos que os alunos perceberam que a frequência relativa de cada evento elementar se aproxima da probabilidade calculada *a priori* quando a quantidade de realizações do experimento for grande, chegando ao objetivo 1 desta atividade. Consideramos que essa situação não foi adidática, pois foi de certa forma gerenciada por nós, mas acreditamos que houve momento adidáticos de ação e formulação, uma vez que os alunos perceberam que quanto mais realizar o lançamento da roleta 4, mais as frequências relativas se aproximam das probabilidades. A seguir apresentamos a continuação do diálogo.

Pesquisadora: E quando você joga pouco se aproxima?
Aluno 5: Não ..... Sim professora, por que quando a gente jogou a maioria deu 50%.
Pesquisadora: Sim, mas em todas?
Alunos: Não.
Pesquisadora: E quando nós jogamos 1.000 vezes?
Aluno 5: Nenhuma deu 50%.
Aluno 3: Mas todas ficaram bem perto...
Pesquisadora: Então, quanto vocês jogariam pra chegar bem perto de 50%?
Aluno 5: 1 milhão?
Aluno 3: 100.000 vezes.
Pesquisadora: Sim daí vocês teriam muita certeza. Mas qual seria um mínimo de jogadas que vocês acham que já chegaria perto?
Aluno 2: 10 vezes.
Aluno 5 : É sim
Pesquisadora: Mas nem todas as vezes que nós jogamos 10 vezes chegou perto de 50%.
Aluno 5: É...
Pesquisadora: Olhem na tabela, a partir de quanto já começa ficar perto de 50% para cada?
Aluno 2: 1.000?
Pesquisadora: Vocês acham que umas 1.000 vezes já dá?

> Alunos: Sim.
> Aluno 5: Mas faltar um pouquinho...
> Pesquisadora: Umas 10.000 vezes então.
> Aluno 5: Aí eu acho que já dá.
> Pesquisadora: Então o que acontece se eu jogar poucas vezes?
> Aluno 5: Tem uma porcentagem maior de dar 50%.
> Pesquisadora: Mais do que jogar mais vezes?
> Aluno 3: Acho que não.
> Aluno 2: Acho que não ó, por que olha. (apontando para os valores das frequências relativas de roxo e rosa a partir de 2.000 lançamentos)
> Pesquisadora: Então se eu quiser me aproximar da probabilidade pra ter certeza o que eu tenho que fazer?
> Aluno 5: Jogar mais.
> Pesquisadora: Mas quanto?
> Aluno 5: Eu jogaria pra cima de 1.000 professora. Eu jogaria 1.000 vezes.
> Pesquisadora: Todo mundo concorda?
> Alunos: Sim.
> Pesquisadora: Por que?
> Aluno 2: Por causa da tabela, a partir de 1.000 já dá pra arredondar pra 50 cada.

A partir do diálogo observamos que os alunos atingiram os objetivos 2 e 3 desta atividade, pois compreenderam que se lançarem a roleta poucas vezes pode ser que a frequência relativa dos eventos rosa e roxo fiquem iguais a suas respectivas probabilidades, no caso 50%, mas que isso nem sempre acontece e muitas vezes nem é um valor próximo e também definiram que 1.000 ou mais jogadas seriam suficientes para observar uma estabilização.

4.5.2. Atividade 5.2

1. Vamos considerar o seguinte experimento aleatório: girar a roleta 5 e verificar em que cor o ponteiro para. Observando esta roleta antes de girá-la, qual a probabilidade do ponteiro parar na parte vermelha? E na parte azul? Justifique.
2. Sem fazer o lançamento da roleta 5, imagine que você realizou esse experimento por 10 vezes e então faça a seguinte previsão: quantas vezes você acha que o ponteiro parou na parte vermelha? E na parte azul? Justifique e depois realize no simulador a quantidade de 10 lançamentos por algumas vezes observando os resultados.
3. Faça as simulações na roleta 4 com a quantidade indicada na coluna "Total de Lançamentos", calculando também as frequências relativas e observando se elas se aproximam das Probabilidades calculadas na questão 1, para os eventos elementares parar no vermelho e no azul.

Simulação	Total de Lançamentos	Total de Vermelho	Frequência Relativa de Vermelho (%)	Total de Azul	Frequência Relativa de Azul (%)
1	10				
2	10				
3	10				
4	10				
6	100				
7	100				
8	100				
9	100				
10	100				
11	500				
13	1.000				
14	1.000				
15	1.000				
17	2.000				
18	3.000				
19	5.000				
20	50.000	37496		12504	
21	100.000	75010		24990	

4.5.2.1. Análise *a priori*

Nossa intenção é reforçar para os alunos a concepção de que em poucos lançamentos existe uma variação grande de resultados do experimento, não se aproximando sempre da probabilidade dos eventos elementares, nesse caso da roleta 5, calculada *a priori*, pelo enfoque clássico e que esta variação diminui quando aumentamos a quantidade de lançamentos, se aproximando da probabilidade para cada parte da roleta 5 (eventos elementares), ou seja, é possível observar uma estabilização da frequência relativa, que neste caso fica em torno de 75% para vermelho e 25% para azul, quando a quantidade de lançamentos é grande, tendendo ao infinito.

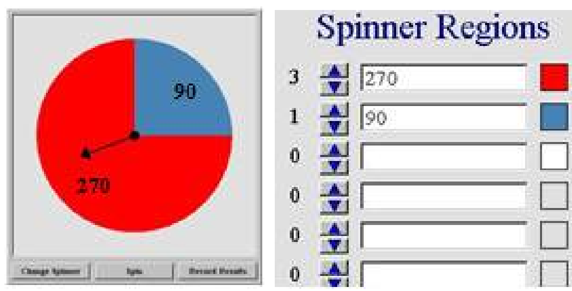


Figura 8: Roleta 5 e configuração.

A escolha desses valores deve-se ao fato de que as probabilidades de seus eventos elementares são diferentes de 50%. Dessa forma, os alunos podem observar a estabilização das frequências relativas em torno desses valores (75% e 25%) que não são equiprováveis, pois não descartamos a hipótese de que baseados na atividade 5.1., concluam que ao realizar qualquer experimento um número significativamente grande de vezes, independente do valor de suas probabilidades, a frequência relativa dos eventos elementares se estabilizará em torno de 50% para cada e nesse caso, confrontaremos o aluno com uma situação real que prove o contrário, assim, esperamos que possam inferir, realizando a simulação da roleta, que a frequência relativa tanto de vermelho, quanto de azul não ficará em torno de 50% para cada e sim de suas probabilidades calculas *a priori*.

4.5.2.2. Análise *a posteriori*

Iniciamos esta sessão fornecendo aos grupos as folhas com a atividade 5.2. e procedeu a leitura da primeira questão, na qual todos responderam corretamente, 75% para vermelho e

25% para azul. Na segunda questão sobre quantas vezes eles achavam que o ponteiro pararia no vermelho ou no azul em dez lançamentos, segue o seguinte diálogo para melhor observação da análise.

> Aluno 5: Eu acho que cairia mais vezes no vermelho.
> Aluno 3: Sairia umas 8 ou umas 7 pra vermelho.
> Pesquisadora: Mas em que quantidades vocês apostariam?
> Aluno 5: Eu acho que não vai cair metade e metade porque a maior parte é no vermelho.
> Aluno 3: Vamos jogar pra ver.

Entendemos que houve um momento adidático de ação, pois os alunos não quiseram dizer a quantidade de vezes que achavam que pararia no vermelho e no azul em 10 lançamentos por que perceberam não havia uma resposta definida ou determinada como na questão 2 da atividade 5.1. e também porque a probabilidade de 75% e 25% não é um valor inteiro, mas perceberam que teríamos mais vermelhas pois a probabilidade de sair vermelho era maior. Essa concepção foi reforçada quando fizemos no simulador um total de 10 lançamentos por algumas vezes. Em seguida perguntamos aos alunos o que aconteceria com as frequências relativas de vermelho e azul quanto mais realizarmos o experimento aleatório da roleta 5 e segue o diálogo:

> Aluno 5: Conforme você vai jogando mais vai se equivalar...
> Pesquisadora: Como assim?
> Aluno 5: Eu acho professora que quando, tipo, quanto mais você for jogando... Igual que nem o que aconteceu aqui (apontando para a atividade 5.1.), quanto mais você for jogando mais o azul vai se aproximar do vermelho.
> Pesquisadora: Mas vai se aproximar de quanto?
> Aluno 5: De 50%

Podemos observar que o Aluno 5 achou que se jogar muitas vezes a frequência relativa de vermelho e azul chegariam perto de 50% para cada, confirmando nossa hipótese e analisando o diálogo também vemos que este mesmo aluno apresenta momentos dialéticos de ação e formulação. Ação quando ele começa a pensar tirando ideias da atividade anterior, formulação quando ele conjectura que as frequência relativas se aproximariam de 50%. Em seguida perguntamos aos alunos se todos concordavam com o Aluno 5.

> Pesquisadora: Todo mundo concorda?
> Aluno 3: Vamo jogá pra ver
> Pesquisadora: Então vamos jogar pra conferir. Quantas jogadas?
> Aluno 5: 1.000 professora.
> (realizamos a simulação e a frequência relativa de vermelho foi 75,90% e de azul foi 24,10%)

> Aluno 3: Então... então, no caso então, o que ele falou tá errado, então, parece que eles vão ficando mais distante.
> Professora: Vamos jogar 2.000 vezes pra ver. (realizamos a simulação e a frequência relativa de vermelho foi 74,95% e de azul foi 25,05%).
> Aluno 3: Vai ser sempre distante.
> Pesquisadora: Está se aproximando de quanto?
> Aluno 5: De 80%.
> Aluno 3: Não de 75%.
> Aluno 5: Mas se aproximou mais de 80% quando jogou 1.000 vezes.
> Aluno 2: Não, deu 75,10!
> Aluno 5: É mesmo.
> Pesquisadora: Então quanto mais eu jogar...
> Aluno 5: Mais se aproxima da porcentagem.
> Pesquisadora: Pode ser que chegue exatamente?
> Aluno2: Pode.
> Aluno 5: Ou passe.
> Pesquisadora: Certo. Então se eu jogar poucas vezes as frequências relativas vão se aproximar da porcentagem?
> Aluno2 e 3: Não.
> Aluno 5: Pode ser que sim.
> Pesquisadora: Certo e seu eu jogar um número grande de vezes?
> Aluno 2 e 3: Sim.
> Aluno 5: Com certeza!

Consideramos que houve momentos adidáticos de ação, formulação e validação, pois os alunos, para verificarem se a afirmação do Aluno 5 é verdadeira ou não, realizaram o experimento por 1.000 e depois 2.000 vezes e pelos resultados das frequências relativas de vermelho e azul, observaram que não se aproximavam de 50% e sim de suas probabilidades calculadas *a priori* de 75% e 25% respectivamente.

Pelo diálogo observamos que os alunos compreenderam a frequência relativa como um tipo de “prova” de que se a probabilidade de certo evento elementar é um valor x, então se realizarmos o experimento aleatório um número grande de vezes, a sua frequência relativa vai chegar bem perto desse valor, que nem sempre é 50% para cada. E, que se realizar o poucas vezes pode ser que chegue perto, mas também, pode ser que não. Assim, os alunos realizaram a validação e ressaltamos que o preenchimento da tabela também não foi necessário. Dessa forma, esperamos que os alunos utilizem esse conhecimento novo para que também enxerguem essa estabilização da frequência relativa como uma forma de calcular probabilidades, ou seja, que pode-se estimar a probabilidade por meio da frequência relativa e para proporcionar essa adaptação elencamos as próximas atividades (5.2 e 5.3). Se isso ocorrer entendemos que houve a validação.

4.5.3. Atividade 5.3.

Vamos considerar o seguinte experimento aleatório: girar a roleta 6 e verificar em que cor o ponteiro para. Infelizmente a roleta 6 quebrou! Mas, sabemos que estava dividida em duas partes, das quais uma era amarela e a outra verde e ainda temos uma tabela com os valores das experimentações realizadas com ela antes de quebrar. Nessas condições, você poderia calcular a probabilidade do ponteiro parar na parte amarela? E na verde? Justifique.

Total de Lançamentos	Total de Amarelo	Frequência Relativa de Amarelo (%)	Total de Verde	Frequência Relativa de Verde (%)
10	6	60	4	40
20	14	70	6	30
30	27	90	3	10
40	33	82,50	7	17,50
50	37	74	13	26
60	43	71,67	17	28,33
70	57	81,43	13	18,57
80	62	77,50	18	22,50
90	71	78,89	19	21,11
100	79	79	21	21
200	163	81,50	37	18,50
300	236	78,67	64	21,33
400	309	77,25	91	22,75
500	411	82,20	89	17,80
600	489	81,50	111	18,50
700	558	79,71	142	20,29
800	622	77,75	178	22,25
900	724	80,44	176	19,56
1000	802	80,20	198	19,80
2000	1599	79,95	401	20,05
3000	2401	80,03	599	19,97
4000	3190	79,75	810	20,25
5000	3994	79,88	1006	20,12
6000	4763	79,38	1237	20,62
7000	5601	80,01	1399	19,99
8000	6390	79,87	1610	20,13
9000	7203	80,03	1797	19,97
10000	7999	79,99	2001	20,01

20000	16013	80,07	3987	19,93
30000	24004	80,01	5996	19,99

4.5.3.1. Análise *a priori*

No experimento desta atividade existe a impossibilidade do cálculo *a priori* dos eventos elementares, pois a roleta 6 está "quebrada", mas sabe-se que estava dividida em dois setores, um verde e outro amarelo e também existe uma tabela com os resultados das experimentações antes de ela "quebrar". Ressaltamos que os valores da tabela de resultados da atividade 5.3. são verdadeiros e foram obtidos por meio do simulador de roletas, no qual o setor amarelo tem 288º e o verde 72º, ou seja, as probabilidades são de 80% e 20% respectivamente. A roleta 6 (ver Figura 16) não será apresentada em nenhum momento aos alunos.

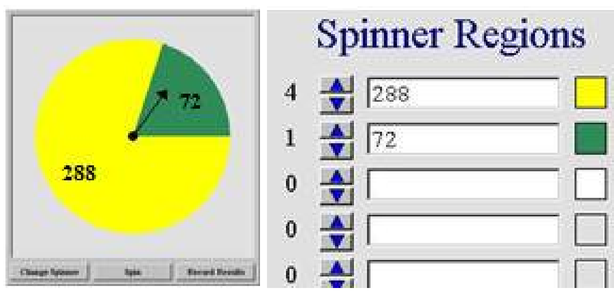


Figura 16: Roleta 6 e configuração.

Esperamos que os alunos baseados, nas percepções sobre a frequência relativa obtidas nas atividades 5.1 e 5.2, consigam perceber que podem estimar um valor para a probabilidade de cada evento elementar observando a estabilização das frequências relativas. Se isso ocorrer, entendemos que houve a validação.

Outra solução esperada por nós é que o aluno ignore os resultados das frequências relativas e atribua 50% tanto para o setor amarelo quanto para o verde, justificando serem duas possibilidades, ou seja, reforçando a concepção errônea apontada por Lecoutre (1984, apud COUTINHO, 2005a), de que na falta de informações atribui-se equiprobabilidade ao espaço amostral.

Após os alunos encontrarem as probabilidades, iremos questioná-los sobre a quantidade de jogadas que são suficientes para a observação da estabilização. Nossa intenção é que observem na tabela, a partir de que valores as frequências relativas começam a se estabilizar em torno das probabilidades, para que reflitam novamente sobre as quantidades de jogadas necessárias para poder estimar as probabilidades.

4.5.3.2. Análise *a posteriori*

Iniciamos esta atividade entregando a folha com a atividade 5.3. e após a leitura do enunciado os alunos ficaram meio confusos. O Aluno 5 afirmou não ter compreendido como os demais. Então, relembramos a atividade anterior com a roleta 5, indagando a eles qual era a probabilidade de o ponteiro parar na parte vermelha e na azul, o que foi respondido corretamente, 75% e 25%. Em seguida foi perguntado sobre o que acontecia se a roleta fosse lançada poucas vezes e o Aluno 2 disse que “tem menos chance de cair em 75% pra vermelho e o outro 25%”. Depois os questionamos sobre o que acontecia se lançasse a roleta um número grande de vezes e este mesmo aluno afirmou que “tem mais chance de ficar em 75% e 25%” e todos concordaram. Consideramos pela fala do Aluno 2 que ele já compreendeu como calcular a probabilidade por meio da visão frequentista e também porque em seguida já escreveu a resposta na folha de atividades.

A seguir colocamos o diálogo que tivemos com o Aluno 5 para analisar o seu desenvolvimento.

> Pesquisadora: Agora, na roleta 6 eu não sei como ela era só sei que estava dividida em amarelo e verde, mas antes dela quebrar eu anotei os resultados de várias simulações de lançamentos que vão de 10 até 30.000. Dessa forma, vocês podem dizer a probabilidade de parar no verde e no amarelo?
> Aluno 5: Ah, então é pra fazer tipo... é pra falar que o verde tá chegando perto de tal número e o amarelo também.
> Pesquisadora: Isso.
> (nesse momento, observamos que o Aluno 2, escreve a resposta correta na folha de seu grupo)
> Aluno 5: Professora, mas por exemplo aqui, se ele for chegar, por exemplo, aqui 79,99 (referindo-se ao resultado de 10.000 lançamentos) aí já passou pro 80 (referindo-se ao resultado de 20.000 lançamentos que foi de 80,70%) então vai chegar no 85 não é?
> Pesquisadora: No 85. Porque?
> Aluno 5: É porque, olha ele passou do 80 já... Ah não professora. (em seguida ele escreveu na sua folha de respostas: “a probabilidade é de cair 80% pra amarelo e 20% pra verde”.

Entendemos que, o Aluno 5 passou por momentos adidáticos de ação, quando ele percebeu que para calcular a probabilidade tinha que observar para onde a frequência relativa de verde e amarelo “tá chegando perto”; de formulação, quando ele tenta encontrar essa estabilização, chegando a afirmar que seria 85% para amarelo e validação, quando ele consegue perceber por meio dos resultados das frequências relativas da tabela que “a probabilidade é de cair 80% pra amarelo e 20% pra verde”, ou seja, encontrou a resposta correta.

A seguir colocamos a discussão iniciada pelo Aluno 4.

> Aluno 4: Ah, eu coloquei assim. Provavelmente a probabilidade de sair no verde ou no amarelo é de 50%, mas para ter certeza tem que jogar um número de vezes, mas nesse caso como é duas cores quanto mais você jogar mais vai se igualar. Eles vão se igualando.
> Pesquisadora: Está certo o que ele falou? Todo mundo concorda?
> Aluno 5: (Fez sinal que não).
> Aluno 2: Depende de como a roleta dele está dividida.
> Pesquisadora: É a mesma roleta para todos.
> Aluno 4: Então, igual ao que eu te falei se a roleta ta dividida em dois, quanto mais você jogar mais vão se igualar as porcentagens.
> Aluno 2: Não necessariamente.
> Aluno 5: Não, mas nem sempre. Que nem a roleta que a professora mostrou aqui (referindo-se a roleta 5) ta dividida em dois.
> Pesquisadora: Você mesmo disse que tinha que jogar um número de vezes pra ter certeza. Quanto você jogaria?
> Aluno 4: Mais de 1.000.
> Pesquisadora: Então olha na tabela quando deu para 1.000 lançamentos?
> Aluno 4: No amarelo deu 80,20.
> Pesquisadora: Observe quanto deu para mais de 1.000.
> [...]
> Pesquisadora: Depois vai aumentando as jogadas. Está ficando em torno de que valor?
> Aluno 4: Do 50.
> Aluno 3: Do 50?!?
> Aluno 4: Não, do ... 80. Mas e aqui ó. (apontando para as frequências relativas de verde).
> Pesquisadora: O verde está em torno de que valor?
> Aluno 4: Ah, perto do 20.
> Aluno 3: 20%.
> Aluno 4: Mas não são do mesmo tamanho?
> Pesquisadora: Eu não sei por que ela quebrou e o que eu tenho é essa tabela com realizações desse experimento antes dela quebrar.
> Aluno 4: É mesmo professora. (Em seguida o Aluno 4 escreveu na folha de respostas de seu grupo as respostas corretas)

No diálogo anterior podemos notar a presença do obstáculo da equiprobabilidade, apontado por Lecoutre (1984, apud COUTINHO, 2005a), pois o Aluno 4 atribuiu equiprobabilidade ao espaço amostral, pois não sabia como a roleta estava dividida, uma vez que ela estava “quebrada”, apesar de afirmar que para ter certeza deveria realizar o experimento. Podemos perceber que mesmo observando a estabilização da frequência relativa em 80% e 20% por meio da tabela, o Aluno 4 volta a tentar justificar a equiprobabilidade. Dessa forma, consideramos que este aluno teve momentos adidáticos de ação e formulação, quando ele atribui 50% para verde e amarelo, mas considera que “pra ter certeza tem que jogar um número de vezes" e podemos observar também, que ele valida, pois ele encontrou os valores corretos das probabilidades.

4.5.4. Atividade 5.4

Considere o experimento aleatório: girar a roleta 7 e verificar em que cor o ponteiro para.

- **a)** Qual é o espaço amostral?
- **b)** O espaço amostral é equiprovável ou não-equiprovável? Justifique.
- **c)** Qual a probabilidade do ponteiro parar em cada evento elementar desse experimento?

4.5.4.1. Análise *a priori*

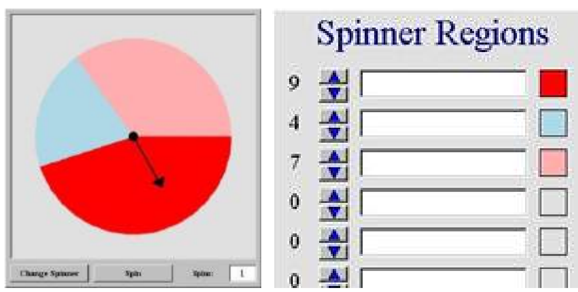


Figura 17: Roleta 7 e configuração.

No experimento desta atividade como na atividade 5.3. também existe a impossibilidade do cálculo *a priori* dos eventos elementares, pois a roleta 7 (figura 17) não apresenta uma proporção visível e nem os graus de cada setor. Neste caso, não apresentamos nenhuma tabela com resultados, mas disponibilizamos o simulador de roletas. Esperamos que os alunos baseados na atividade anterior (5.3.) não tenham dificuldades em perceber que devem estimar as probabilidades realizando o experimento um número grande de vezes e observar uma estabilização, por meio da frequentista relativa. Consideramos que se isso acontecer haverá validação. Ressaltamos que é necessária uma quantidade superior a 1.000 lançamentos para chegar a uma estimação razoável e que a probabilidade do ponteiro parar no setor azul é de 20%, no rosa, 35% e no vermelho, 45%.

Após a realização desta atividade deve ser realizado um debate para institucionalização das duas formas de calcular as probabilidades a clássica e frequentista e pedir que anotem os significados na ficha 2.

4.5.4.2. Análise *a posteriori*

Tivemos um problema com um dos computadores então os grupos 1 e 3 ficaram com o mesmo computador e decidiram realizar na roleta a simulação de 1.000 lançamentos e obtiveram as seguintes frequências relativas: 46,5% (vermelho), 19,5% (azul) e 34% (rosa).

O grupo 3 colocou como resposta esses mesmos valores das frequências relativas e o grupo 1 já arredondou todos os resultados anotando 45% (vermelho), 20% (azul) e 35% (rosa) e em sua justificativa o Aluno 2 disse que “nunca é o valor exato tem que arredondar e ver se tudo dá 100%”.

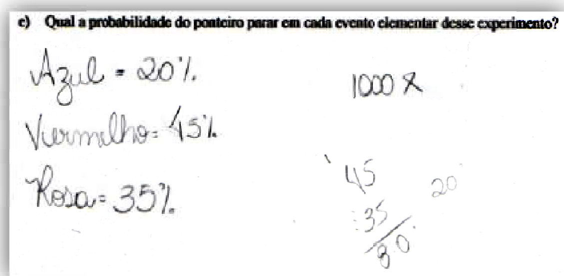


Figura 18: Resposta do grupo 1 para o item (c) da atividade 5.4.

O grupo 2 também adotou como resposta os valores que deram as frequências relativas de cada evento elementar que obteve em 1.000 lançamentos que foram respectivamente 46,40% (vermelho), 19,90% (azul) e 33,70% (rosa).

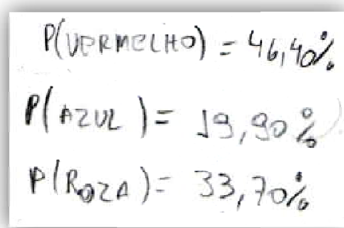


Figura 19: Resposta do grupo 2 para o item (c) da atividade 5.4.

Como podemos observar apenas o grupo 1 encontrou um valor aproximado, os outros grupos confundiram a frequência relativa com a probabilidade. Então, reportamos a atividade 5.3., perguntando qual era a probabilidade que haviam encontrado para verde e amarelo e eles responderam 80% e 20%. Em seguida questionamos os alunos:

> Pesquisadora: Mas baseado nas respostas de vocês não seria 80% e 20%, seria no caso de 1.000 jogadas 80,20% e 19,80% e em 30.000 jogadas seria 80,01% e 19,99%?
> Alunos: Não.

Pesquisadora: E cada vez que vocês jogarem a roleta 7 vai dar um valor diferente para cada probabilidade?
Alunos: Não.
Aluno 5: Já entendi professora.

Observamos que o Aluno 5 compreendeu, pois após o diálogo acima respondeu corretamente em sua folha de resposta. O grupo 2 realizou novamente o experimento com uma quantidade de 1.000 lançamentos por duas vezes e escreveu a resposta correta. Nenhum dos grupos teve problemas em encontrar o espaço amostral e dizer que é não equiprovável.

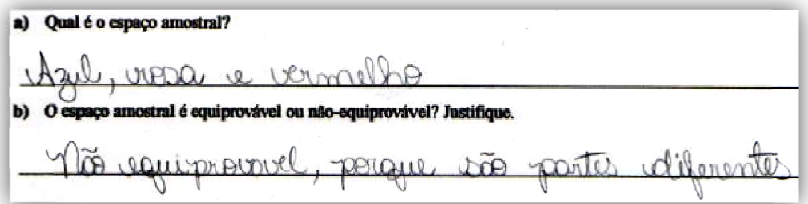


Figura 20: Resposta do grupo 1 para os itens (a) e (b) da atividade 5.4.

Após conclusão da atividade 5.4. iniciamos a institucionalização do cálculo *a priori* (visão clássica) e *a posteriori* (visão frequentista) como podemos observar no diálogo a seguir.

Pesquisadora: Como vocês calcularam a probabilidade na atividade 5.1. e 5.2.? (mostrando as roletas 4 e 5 no simulador de roletas)
Aluno 5: Olhando a divisão roleta...
(Todos concordaram)
Pesquisadora: Certo, mas foi necessário jogar a roleta pra vocês calcularem essas probabilidades?
Alunos: Não.
Pesquisadora: E na atividade 5.4.?
Aluno 2: Teve que jogar 1.000 vezes e aproximar os valores.
(Todos concordaram)
Pesquisadora: Que valores?
Aluno 4: ah, professora ... 20, 35 e 45.
Pesquisadora: Certo, mas como a gente chama esses valores?
Aluno 2 e 5: Frequência relativa!
Pesquisadora: Então a gente tem duas formas de calcular probabilidades?
Alunos: Sim.
Pesquisadora: Quais?
Aluno 5: Numa precisa jogar e achar a frequência e outra não.
Aluno 2: É precisa aproximar as frequências e a outra é só ver como está dividida.
Pesquisadora: Todo mundo concorda?
Alunos: Sim.

Em seguida, realizamos a institucionalização e perguntamos aos alunos se eles tinham calculado pela visão clássica ou frequentista os experimentos aleatórios da ficha 3. Todos responderam que foi pela clássica, pois não precisaram "realizar o experimento" para calcular e pedimos que anotassem os significados na ficha 2.

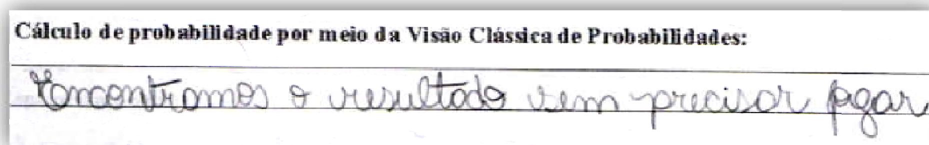

Cálculo de probabilidade por meio da Visão Clássica de Probabilidades:
Encontramos o resultado sem precisar pegar

Figura 21: Resposta do grupo 1 para ficha 2.

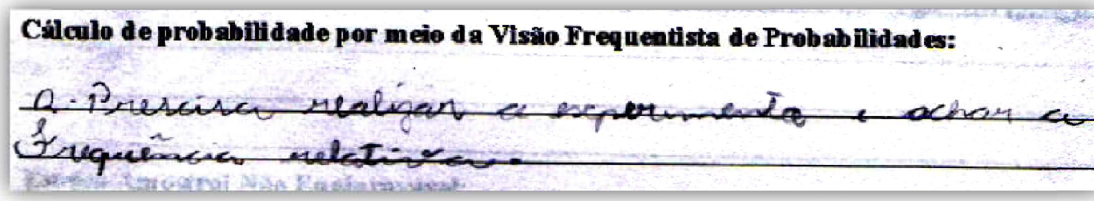

Cálculo de probabilidade por meio da Visão Frequentista de Probabilidades:
A. Precisa realizar o experimento e achar a frequência relativa.

Figura 22: Resposta do grupo 3 para ficha 2.

4.5.5. Considerações Gerais

Consideramos que a utilização do simulador da roleta proporcionou aos alunos a possibilidade de realizar os experimentos aleatórios diversas vezes, com as quantidades desejadas e necessárias para o desenvolvimento das atividades, propiciando uma observação concreta do que significa a probabilidade, do que acontece quando realizamos um experimento aleatório uma quantidade pequena e um número significativo de vezes. Relacionar a probabilidade com a frequência relativa não é tão simples para o estudante, talvez por não dar o valor exato e sim uma aproximação e sem o simulador teríamos que fornecer os resultados de lançamentos ou realizar os experimentos um a um e isso seria penoso, pois além de tomar muito tempo, poderia tirar o foco e a atenção dos alunos.

Na primeira atividade (5.1) desta sessão, apesar de considerarmos que uma primeira observação da estabilização das frequências relativas com o experimento da roleta 4, que possui apenas dois eventos elementares e equiprováveis tenha facilitado perceber a estabilização, também reforçou o viés da equiprobabilidade como aconteceu na atividade seguinte (5.2) com o Aluno 5. Nas atividades 5.3 e 5.4, os alunos reutilizaram o que perceberam das atividades 5.1 e 5.2 e conseguiram calcular as probabilidades por meio da visão frequentista.

Observando o desenvolvimento das atividades desta sessão, bem como suas respectivas análises *a priori* e *a posteriori*, consideramos que os alunos se envolveram no processo, no qual identificamos momentos adidáticos de ação, formulação e validação, conseguindo compreender o cálculo por uma abordagem frequentista.

4.6. 6ª SESSÃO: ARTICULAÇÃO ENTRE AS VISÕES CLÁSSICA E FREQUENTISTA

Esta sessão é composta por nove atividades e tem como objetivo principal fazer a articulação entre as visões frequentista e clássica de probabilidades. Para tanto, trabalharemos com seis experimentos aleatórios em que é possível o cálculo por meio das duas visões, em dois apenas pela frequentista e um somente pela clássica. Assim, em todas as atividades após a resolução o aluno deve ser questionado se ele poderia calcular as probabilidades também por meio da definição que ele não utilizou.

Para todos os experimentos aleatórios existe a possibilidade de sua realização efetiva e que a resolução deve ser feita oralmente, apenas o resultado deve ser registrado, mas disponibilizado uma folha para anotações, caso o aluno necessite. A seguir apresentamos a cada uma das atividades com suas respectivas análises *a priori* e *a posteriori*.

4.6.1. Atividade 6.1.

1) Considere o experimento aleatório: girar a roleta 8 e verificar em que cor o ponteiro para.

a) Qual é o espaço amostral?
b) O espaço amostral é equiprovável ou não-equiprovável? Justifique.
c) Qual a probabilidade do ponteiro parar em cada evento elementar desse experimento?

4.6.1.1. Análise *a priori*

A roleta 8 (ver Figura 23) será apresentada ao aluno no simulador de roletas e está dividida em seis setores de 60º cada um, dessa forma o aluno pode utilizar a visão clássica ou a frequentista para calcular as probabilidades. Acreditamos que a maioria dos alunos irá optar pelo cálculo *a priori*, pois a roleta está dividida em partes iguais.

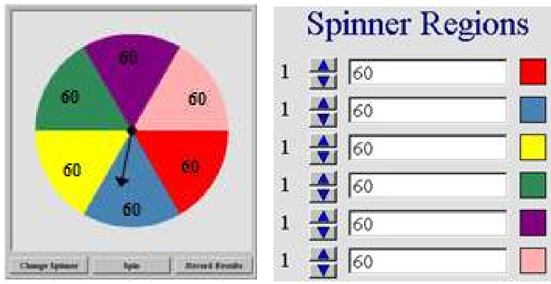
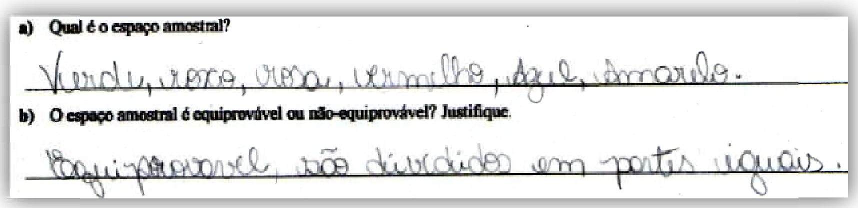


Figura 23: Roleta 8 e configuração.

4.6.1.2. Análise *a posteriori*

Todos os grupos responderam corretamente qual é o espaço amostral e que ele é equiprovável, pois está dividido em partes iguais e dessa forma todos têm a mesma probabilidade de serem obtidos.



a) Qual é o espaço amostral?

Verde, roxo, rosa, vermelho, azul, amarelo.

b) O espaço amostral é equiprovável ou não-equiprovável? Justifique.

Equiprovavel, são divididos em partes iguais.

Figura 24: Resposta do grupo 1 para a atividade 6.1.

Para o cálculo de probabilidades o grupo 3 optou pelo cálculo *a priori* fazendo 100% dividido por 6.

> Aluno 6: É 25 pra cada né.
> Aluno 5: Não, 20.
> Aluno 2: Não é 20.
> Aluno 5: Lógico que é.
> Aluno 5: 1, 2, 3, 4, 5, 6 (contando os setores). Não é 20 mesmo...
> (pausa)
> Aluno 5: Não vai dar exato.
> Pesquisadora: Pode usar a calculadora.
> Aluno 5: Professora, então vai dar ... esqueci o nome desse baratinho... 16,66666666.... e aí não vai acabar.
> Pesquisadora: É uma dízima periódica.
> Aluno 3: Meu, só três seis depois da vírgula, depois três pontinhos.

Os alunos do grupo 2 fizeram diferente: como o espaço amostral era equiprovável, foram realizando os lançamentos até observarem que os histogramas pareciam se igualar. Chegando até 5.000 lançamentos, calcularam as frequências relativas de cada um dos eventos elementares, mas como não foram exatamente iguais, não conseguiram encontrar um valor que pudessem definir para todas e ficaram na dúvida. Jogaram mais vezes e pediram ajuda ao

Aluno 5 que respondeu: “tem 6 cores que tem a mesma probabilidade, então tem que dar 100%, então é só dividir 100 por 6”.

Os alunos do grupo 1 realizaram o experimento no simulador de roletas por 1.000 vezes e calculou a frequência relativa de um dos eventos elementares, que deu aproximadamente 17%, e multiplicaram por 6 para ver se dava 100%, mas deu 102%. Dessa foram, diminuíram para 16,5%, não diminuíram para 16% por que como só passou 2% perceberam que ficaria muito abaixo, só que dava 99%. Neste momento eles escutaram o Aluno 5 responder 16,666...%, e então optaram por essa resposta, pois afirmaram que este valor “chega mais perto de 100% se somar”.

Quando perguntamos aos alunos se haviam utilizado a visão clássica ou frequentista, o grupo 2 e 3 afirmou ter resolvido pela clássica e o grupo 1 pela frequentista. Porém quando indagamos se poderiam utilizar a outra abordagem para o cálculo das probabilidades, apenas os grupo 2 afirmou não poder utilizar a abordagem frequentista, pois havia tentado e não tinha conseguido e o Aluno 2 do grupo 1 explicou a eles como haviam resolvido.

4.6.2. Atividade 6.2.

Considere o experimento aleatório: girar a roleta 9 e verificar em que cor o ponteiro para.

a) Qual é o espaço amostral?
b) O espaço amostral é equiprovável ou não-equiprovável? Justifique.
c) Qual a probabilidade do ponteiro parar em cada evento elementar desse experimento?

4.6.2.1. Análise *a priori*

A roleta 9 será apresentada aos alunos no simulador de roletas. Está dividida em cinco setores e seus respectivos graus estão na roleta, dessa forma o aluno pode utilizar a visão clássica ou a frequentista para calcular as probabilidades, mas acreditamos que a maioria dos alunos irá optar pelo cálculo *a posteriori*, pois a roleta não está dividida partes iguais.

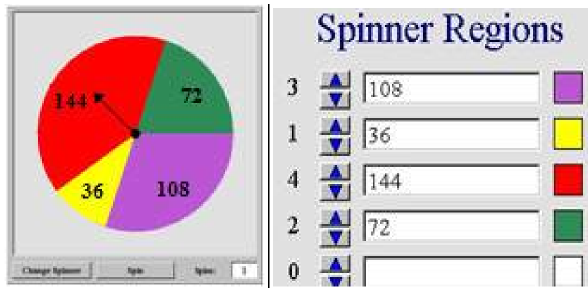


Figura 25: Roleta 9 e configuração.

4.6.2.2. Análise *a posteriori*

Todos os grupos responderam corretamente qual é o espaço amostral e que ele é não equiprovável, pois não está dividido em partes iguais e dessa forma não têm a mesma probabilidade de serem obtidos.

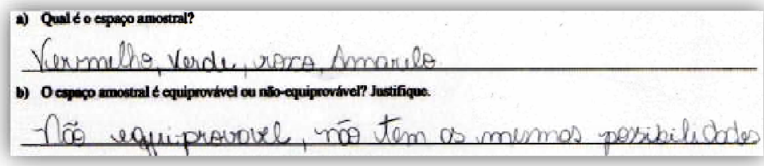


Figura 26: Resposta do grupoo 1 para os itıs (a) e (b) da atividade 6.2.

Os grupos 1 e 3 jogaram 1.000 vezes e obtiveram as seguintes frequências relativas: 39,8% (vermelho), 19,8% (verde), 30,7% (roxo) e 0,97% (amarelo) e optaram por 40%, 20%, 30% e 10% respectivamente. Assim responderam corretamente.

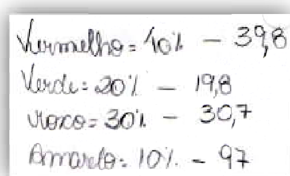


Figura 27: Resposta do grupo 1 para a atividade 6.2.

O alunos do grupo 2 pensaram em responder de acordo com os graus de cada setor, realizaram algumas contas na calculadora, mas logo desistiram e optaram por realizar 1.000 lançamentos, nos quais obtiveram 300 de roxo, 89 de amarelo, 410 de vermelho e 201 de verde.

> Aluno 4: Aí ó tipo deu 30 pro roxo. Aí 10 pro amarelo.
> Aluno 3: Porque 10 pro amarelo se deu 89?
> Aluno 4: Porque 89 dividido por 10 dá 8,9% que arredonda pra 10.
> Aluno 4: Num é 41. É só 40. (repreendendo o aluno 3 que estava anotando 41% para o vermelho, pois a frequência absoluta deu 410)

Aluno 3: Por que é só 40?
Aluno 4: Porque tem que arredondar se não, não vai dar 100. E 20.

Quando a pesquisadora perguntou se haviam utilizado a visão clássica ou frequentista, todos os grupos afirmaram ter resolvido pela frequentista. Porém quando indagamos aos alunos se poderiam utilizar visão frequentista para o cálculo, apenas o Aluno 4 disse que sim, “pelos graus”, mas afirmou não saber como fazer. Fizemos então uma intervenção explicando como fazer, mas não detalharemos aqui, pois o importante é que os alunos perceberam que é possível o cálculo pela abordagem clássica também.

4.6.3. Atividade 6.3.

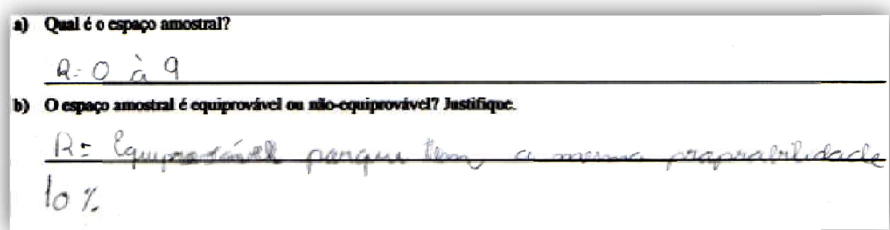
Julia tem que telefonar para Larissa para contar uma novidade, mas ao tentar ligar ela percebe que não se lembra do último número do celular da amiga. Então, ela decide escolher um número ao acaso. Qual é a probabilidade de que Júlia acerte na primeira tentativa?

4.6.3.1. Análise *a priori*

Este experimento pode ser resolvido utilizando apenas a noção clássica de probabilidades, pois nesse caso Júlia precisaria tentar no máximo nove vezes para encontrar o número da amiga. Nossa intenção é que o aluno também pense no experimento aleatório em si e não pense que pode resolver utilizando a visão frequentista.

4.6.3.2. Análise *a posteriori*

Todos os grupos responderam corretamente qual é o espaço amostral, e que ele é equiprovável, pois “cada um tem uma chance”, como afirmou o Aluno 4.


a) Qual é o espaço amostral?

R: 0 à 9

b) O espaço amostral é equiprovável ou não-equiprovável? Justifique.

R: Equiprovável porque tem a mesma probabilidade 10%

Figura 28: Resposta do grupo 3 para a atividade 6.3.

Aluno 4: Eu acho que é de 0 a 100%.
Aluno 5: 10% professora.
Aluno 4: Por que 10%?
Aluno 5: Por que tem que dar 100%.

> Aluno 2: Porque ao total não tem que dar 100%? São quantos números? (falando com o Aluno 4)
> Aluno 4: 10.
> Aluno 2: Se você for colocar... dividir 100% pra cada número, quanto vai ficar? .... 10% por cento pra cada número, conta. 10, 20, 30, 40, 50, 60, 80, 80, 90 e 100.
> Aluno 4: Ah. Entendi.

Consideramos que houve um momento adidático de validação, pois os Alunos 2 e 5 afirmam que a probabilidade é de 10% e em seguida, o Aluno 2 consegue convencer o Aluno 4 que está correta.

Como todos utilizaram a abordagem clássica, indagamos se eles teriam como calcular a probabilidade pela visão frequentista. Inicialmente o Aluno 5 afirmou que sim, depois concordou com os colegas que seriam no máximo 10 tentativas, uma para número do celular até acertá-lo e portanto não havia como realizar o cálculo *a posteriori*. A seguir apresentamos um trecho da discussão.

> Aluno 5: Sim, jogando 1.000 vezes.
> Aluno 2: Mas se ela jogasse tipo ... 10 vezes ela já iria encontrar.
> Aluno 4: No mínimo 10. Porque se ela jogar menos que 10 não tem como ela acertar. São 10 números.
> Aluno 2: 10 ou menos...

4.6.4. Atividade 6.4.

Considere o seguinte experimento: jogar um dado do jogo Senet e observar a face que cai voltada para cima.

a) Jogue o dado do jogo Senet por algumas vezes observando os resultados.
b) Qual é o espaço amostral?
c) O espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável? Justifique.
d) Qual a probabilidade de ocorrer cada uma dessas faces do dado do jogo Senet?

4.6.4.1. Análise *a priori*

Nessa atividade utilizamos o experimento com um dado do jogo Senet[40], que é um jogo egípcio muito antigo encontrado nas tumbas dos faraós, conhecido também como jogo de passagem da alma para outro mundo, porque os povos daquela época acreditavam que os desenhos existentes no tabuleiro teriam utilidade para os mortos na indicação de seu caminho na outra vida. Este jogo também foi citado no famoso Livro dos Mortos do Antigo Egito.

---

[40] A história completa do jogo Senet, bem como suas regras, está disponível em: <http://www.jogos.antigos.nom.br/senat.asp>. Acesso em: 23 fev 2010.

Figura 29: Tabuleiro do jogo Senet em madeira[41].

Esse jogo simboliza a luta da alma do jogador contra o mal ou forças inimigas que vagam no Nada. As peças de cada jogador são chamadas de “dançarinos”, enquanto os dados, de “dedos”, porque os dados encontrados no túmulo de Tutankâmon têm a forma de dedos humanos até com unhas esculpidas.

O dado do jogo Senet, como podemos observar na figura 30, é um cilíndro seccionado ao meio e possui quatro faces. Porém no experimento: jogar um dado do jogo Senet e observar a face que cai na parte superior consideramos que existem apenas duas possibilidades, que chamamos de faces lisa e cilíndrica, pois no seu lançamento não há como este dado cair com as duas outras faces menores para cima.

Figura 30: Dado do jogo Senet.

Neste experimento não é possível o cálculo *a priori* da probabilidade de seus eventos elementares (lisa e cilíndrica), pois o espaço amostral é não equiprovável devido a não simetria do dado do jogo Senet. Dessa forma, o aluno é levado a ter que encontrar a probabilidade realizando o experimento um número grande de vezes para observar a estabilização das frequências relativas, ou seja, fazendo uso da concepção frequentista para calcular a probabilidade.

Para calcular a probabilidade de sair a face lisa e cilíndrica, jogamos o dado do jogo Senet por 2206 vezes e obtemos os seguintes resultados:

---

[41] Figura extraída de: <http://www.origem.com.br/home/>. Acesso em: 24 fev. 2011.

Tabela 1 – Resultado do dado do jogo Senet

Face	**Frequência absoluta**	**Frequência relativa**	**Frequência relativa (%)**
Lisa	892	0,4044	40,44
Cilíndrica	1314	0,5956	59,56
Total	**2206**	**1**	**100**

De acordo com os valores das frequências relativa da tabela 1, assumimos a probabilidade de sair face lisa como 40% e cilíndrica 60%.

Para a realização da atividade, iniciaremos apresentando o dado do jogo Senet com a história do jogo e em seguida eles irão jogar algumas vezes, item (a), observando os resultados, para certificação de que compreenderam o experimento e para verificarem a impossibilidade de cair sobre uma das faces menores e dessa forma considerar apenas duas possibilidades de resultados, que chamamos de lisa e cilíndrica.

No item (c) esperamos que os alunos percebam que os dois lados do dado do jogo Senet são bem diferentes (liso e cilíndrico) e que dessa forma não é possível atribuir a equiprobabilidade ao seu espaço amostral como na moeda, cujas faces são perfeitamente simétricas. Porém, na falta da equiprobabilidade alguns alunos são levados a crer que não é possível calcular a probabilidade do experimento e também não descartamos a hipótese de aparecerem respostas baseadas na figura do dado, como, por exemplo, atribuir uma probabilidade maior para o lado cilíndrico por ter maior área.

Esperamos que, baseados nas atividades anteriores, os alunos consigam chegar à conclusão de que a melhor forma de calcular essas probabilidades seria pelo enfoque frequentista, realizando o experimento por um número grande de vezes e anotando os resultados para encontrarem nas frequências relativas de cada evento elementar, a probabilidade calculada *a posteriori*.

Nesse caso, devido à impossibilidade ocasionada pelo pouco tempo da experimentação, de os alunos jogarem o dado do jogo Senet um número grande de vezes apresentaremos os resultados obtidos por nós (ver Tabela 1) aos alunos, para que eles somem aos seus resultados.

4.6.4.2. Análise *a posteriori*

Inicialmente relatamos a história do jogo Senet e em seguida os alunos jogaram algumas vezes para observação, como sugeria o item (1), e definiram o espaço amostral como "parte lisa" e "parte arredondada". Indagamos se o dado do jogo Senet possuía mais dois lados e o aluno 2 respondeu: "mas não consegue cair na lateral, não mesmo" e todos concordaram.

Observamos novamente o obstáculo da equiprobabilidade: ao questionarmos os alunos todos afirmaram que o espaço amostral é equiprovável por que ambos teriam a mesma chance, por serem duas possibilidades. Então, relembramos o experimento aleatório da roleta 5 novamente, por ter duas possibilidades (vermelho e azul), mas com probabilidades diferentes e eles já sabiam a probabilidade e indagamos se, de acordo com a justificativa deles nesse experimento ambos também seriam equiprováveis.

Mesmo assim ficamos na discussão e eles não se convenceram. O aluno 5 chegou a afirmar que o experimento com o dado do jogo Senet "não tem nada a ver com a roleta", mas sugeriu que jogássemos para "tirar a prova", todos concordaram e começaram a jogar e anotar os resultados.

Como o tempo era pouco e já havíamos realizado o experimento 2.206 vezes como foi planejado, fornecemos esses resultados aos alunos que foram 892 para lisa e 1314 para cilíndrica, para que somassem com suas jogadas e calculassem a frequência relativa para lisa e cilíndrica, no qual obtiveram os seguintes resultados:

Tabela 2: Resultados dos alunos para o dado do jogo Senet

Aluno	**Frequência Absoluta de Lisa**	**Frequência Relativa de Lisa (%)**	**Frequência Absoluta de Cilíndrica**	**Frequência Relativa de Cilíndrica (%)**
Aluno 1	904	40,61	1322	59,39
Aluno 2	906	40,37	1338	59,63
Aluno 5	899	40,48	1322	59,52
Aluno 6	902	40,53	1.324	59,47

Com base nos resultados obtidos, os alunos, optaram por 40% como a probabilidade de sair face lisa e 60% a de cilíndrica ou "arredondada", como haviam definido. Em seguida, perguntamos novamente se o espaço amostral era equiprovável ou não equiprovável. Segue o diálogo abaixo.

> Pesquisadora: Quanto vocês tinham falado que ia dar a probabilidade de lisa e arredondada?
> Aluno 5: 50% pra cada.
> Pesquisadora: E deu 50% pra cada?
> Alunos: Não.
> Pesquisadora: Deu quanto?

> Alunos: 40 e 60.
> Pesquisadora: Então o espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável?
> Alunos: Não equiprovável.
> Pesquisadora: Sempre que tiver duas possibilidades é sempre 50% pra cada?
> Alunos: Não.
> Aluno 2: É mesmo professora nem sempre...

A concepção da equiprobabilidade para dois eventos mostrou-se bastante forte nos alunos, entretanto, parece que conseguimos, ao menos localmente, que eles percebessem que dois eventos podem não ser equiprováveis.

4.6.5. Atividade 6.5.

Considere o seguinte experimento: lançar dois tetraedros regulares (perfeitamente simétricos) ao mesmo tempo e observar as faces que aparecem viradas para baixo (na superfície inferior).

a) Qual o espaço amostral do experimento?
b) Esse espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável? Justifique.
c) Qual a probabilidade de ocorrer cada um dos eventos elementares desse experimento?
d) Qual a probabilidade de se obter duas faces iguais?
e) A probabilidade de sair uma face “2” e uma “4” é a mesma que a probabilidade de se obter duas faces “4”?

4.6.5.1. Análise *a priori*

Para este experimento disponibilizamos dois tetraedros regulares iguais para observar se os alunos iriam cometer o mesmo erro do lançamento de duas moedas simultaneamente, ou se compreenderam que, no lançamento de dois tetraedros e observar as faces viradas para baixo, por exemplo, (1,4) é diferente de (4,1).

Este experimento pode ser calculado por meio das duas visões (clássica e frequentista) e o espaço amostral é {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4)}.

Nos itens (d) e (e) queremos observar se o aluno utiliza corretamente a proporcionalidade para calcular a probabilidade *a priori*. O item (e) é semelhante à pergunta feita por Coutinho (1994) em sua pesquisa, para identificar concepções espontâneas, mas esperamos que os alunos respondam corretamente pois o cálculo de probabilidades já foi formalizado a eles.

4.6.5.2. Análise *a posteriori*

Observamos que os grupos 1 e 3 encontraram o espaço amostral corretamente e apenas o grupo 2 não diferenciou, por exemplo, (1,4) de (4,1), mas o Aluno 2 explicou a eles que eram diferentes, lembrando-os do experimento aleatório do lançamento das duas moedas.

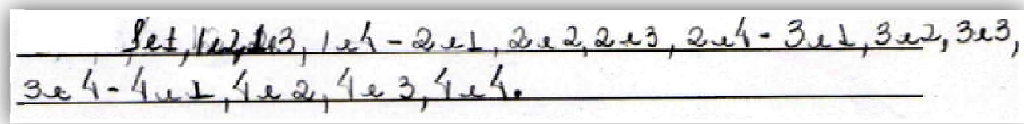


Figura 31: Resposta do grupo 1 para o item (a) da atividade 6.5.

O grupo 3 fez um esquema diferente, como podemos observar na figura 32, no qual o Aluno 5 explica: "o 1 pode cair com o 1, 2, 3 e 4, o 2 pode cair com o 1, 2, 3 e 4, o 3 pode...".

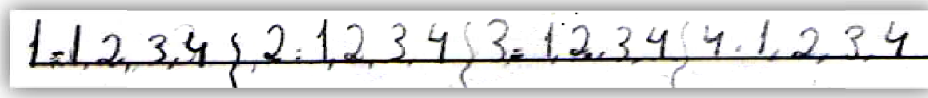


Figura 32: Resposta do grupo 3 para o item (a) da atividade 6.5.

Verificamos que todos os grupos consideraram corretamente que o espaço amostral é equiprovável e também não tiveram dificuldades em calcular as probabilidades, todos os grupos dividiram 100% por 16, encontrando 6,25% para cada um dos eventos elementares.

No item (d), os alunos inicialmente disseram não saber fazer então perguntamos quais eram as possibilidades de se obter duas faces iguais. Todos conseguiram responder corretamente que eram (1,1) (2,2), (3,3) e (4,4), somando quatro possibilidades. Porém, resolveram de formas diferentes. O grupo 1 somou as probabilidade de cada uma dessas possibilidades (6,25 + 6,25 + 6,25 + 6,25 = 25%), o grupo 2 respondeu 25%, pois 4 possibilidades representava 25% das 16 e o grupo 3 fez a razão (— = 0,25 = 25%).

Para o item (e) tivemos que explicar o que era sair uma face "2" e uma "4", que consideramos uma dificuldade na formulação do problema e os três grupos responderam corretamente, pois calcularam as duas probabilidades.

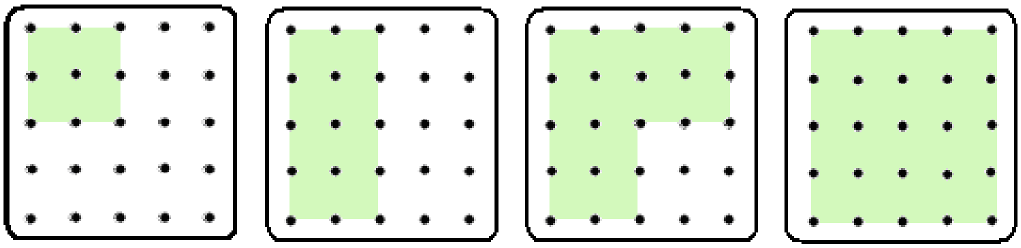
> Pesquisadora: Qual a probabilidade de sair uma face "2" e uma "4"?
> Aluno 5: É .... 8 para 16 não é professora?
> Pesquisadora: Por que?
> Aluno 5: Por que tem quatro dois e quatro quatros.
> Pesquisadora: Mas aqui tem uma face "2" e uma "4"? (apontando para a possibilidade (4,1)).

> Aluno 5: Ah, então vai ficar 2 por 16.
> Aluno 5: Professora, a probabilidade de sair uma “2” e uma “4” é 12,5%.
> Pesquisadora: E qual a probabilidade de sair duas faces “4”?
> Aluno 5: É 1 em 16 ... 6,25%.

Como podemos observar todos os grupos calcularam as probabilidades *a priori*, por meio da visão clássica, mas também consideraram a possibilidade do cálculo *a posteriori*, jogando os tetraedros um número bem grande de vezes, mas ressaltaram que seria muito trabalhoso.

4.6.6. Atividade 6.6.

Observe as representações dos geoplanos abaixo na malha pontilhada e considere o seguinte experimento: jogar uma bolinha no geoplano delimitado, chacoalhar e verificar em que região ela para. Para cada caso, responda as questões e coloque os resultados no quadro:



caso 1 **caso 2** **caso 3** **caso 4**

a) Qual é a área total do geoplano?
b) Qual é a área da parte pintada?
c) Qual é a área da parte não pintada?
d) Qual a probabilidade dela cair dentro parte pintada?
e) Calcule a razão entre a área da parte pintada e a área total do geoplano em fração, decimal e porcentagem.
f) Qual a probabilidade dela dentro da parte não pintada?
g) Calcule a razão entre a área da parte não pintada e a área total do geoplano em fração, decimal e porcentagem.

	Caso 1	**Caso 2**	**Caso 3**	**Caso 4**
a)				
b)				
c)				
d)				
e)				
f)				
g)				

4.6.6.1. Análise *a priori*

Esta atividade envolve a Probabilidade Geométrica, visando envolver conceitos de geometria para o cálculo de probabilidades, favorecendo aos alunos a oportunidade de rever e utilizar alguns conceitos de geometria. Além disso, permite uma abordagem diferenciada de probabilidade com relação ao que vem sendo apresentado nos livros didáticos, nos quais, quase que exclusivamente são abordadas atividade com dados, moedas e baralhos.

As questões propostas nesta atividade utilizam o geoplano e foram elaboradas tendo como base as ideias apresentadas no artigo “Probabilidade e Geometria: Uma investigação com Alunos Universitários” de Silva, Campos e Itacarambi (2008). Os autores relatam a experiência que tiveram na aplicação de atividades envolvendo probabilidade e geometria com estudantes universitários do 3º semestre, do curso de Ciências Contábeis de uma universidade particular da cidade de São Paulo.

Para essa atividade disponibilizaremos aos alunos, geoplanos quadrangulares 5x5, que também são representados na malha pontilhada das atividades, como mostra a figura 34, a seguir.

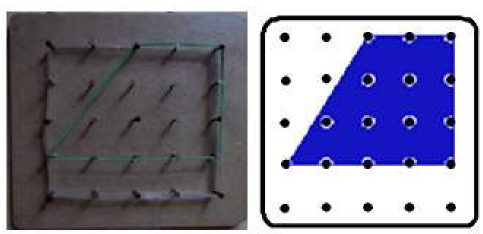


Figura 33: Geoplano e representação.

Esta atividade desempenha o papel de familiarização do geoplano, além de podermos relembrar ou sanar possíveis dúvidas que os alunos tiverem relativas ao cálculo de áreas, pois este não é o conceito visado em nossa sequência e irá servir como “base” para as atividades 6.7 e 6.8, que também estão em um contexto geométrico.

Para calcular a probabilidade neste contexto e num enfoque clássico, consideramos como o espaço amostral (S) a bolinha cair dentro e fora do polígono delimitado no geoplano. Assim a probabilidade pode ser compreendida como a razão entre a área do evento (chances favoráveis) e a área total (chances possíveis).

Nossa intenção é levar o aluno a relacionar esta razão com a probabilidade dos eventos elementares do experimento aleatório. Para tanto, nos quatro casos os alunos, pela proporção, conseguem calcular as probabilidades como fizeram em alguns experimentos das roletas, e depois pedimos que calculem a razão e esses podem inferir que a razão tem o mesmo valor da probabilidade encontrada, como podemos observar no quadro preenchido com as respostas a seguir.

	Caso 1	**Caso 2**	**Caso 3**	**Caso 4**
a)	16	16	16	16
b)	4	8	12	16
c)	12	8	4	0
d)	25%	50%	75%	100%
e)	$\frac{4}{16}$ = 0,25 = 25%	$\frac{8}{16}$ = 0,50 = 50%	$\frac{12}{16}$ = 0,75 = 75%	$\frac{16}{16}$ = 1 = 100%
f)	75%	50%	25%	0%
g)	$\frac{12}{16}$ = 0,75 = 75%	$\frac{8}{16}$ = 0,50 = 50%	$\frac{4}{16}$ = 0,25 = 25	$\frac{0}{16}$ = 0 = 0%

Quadro 4: Quadro de respostas da atividade 6.6.

Como ocorreu no trabalho de Silva, Campos e Itacarambi (2008), também inferimos que possam surgir estratégias diferentes para a resolução do item (f): encontrar a probabilidade da bolinha cair fora da região delimitada.

Estratégia 1: Subtrair de 100% a probabilidade obtida no item (c);

Estratégia 2: Subtrair de 1 a probabilidade obtida no item (c);

Estratégia 3: Fazer a razão entre a área da região não delimitada e área total.

4.6.6.2. Análise *a posteriori*

Os alunos não tiveram problemas em calcular as áreas nos itens (a), (b) e (c) e nem em encontrar as probabilidades nos itens (d) e (f) pela proporção como na roleta. No caso 4, perceberam a impossibilidade do "cair fora".

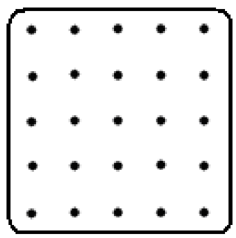
> Aluno 5: No caso 4 professora não vai ter como cair fora professora descobri.
> Pesquisadora: Então a probabilidade de cair fora vai ser?
> Alunos: 0%.
> Pesquisadora: E de cair dentro?
> Alunos: 100%.
> Pesquisadora: Quando a probabilidade de um evento é 100%, a gente chama de evento certo, porque é certo que ele vai ocorrer.

Nos itens (e) e (g) os alunos não sabiam o que era a razão e nem como calculá-la, então explicamos como fazer até chegar à probabilidade, pois não é o conteúdo visado nesta pesquisa. Como previsto, logo perceberam que o resultado da razão tinha o mesmo valor da sua respectiva probabilidade; o Aluno 2 respondeu ser “a prova” de que haviam encontrado a probabilidade corretamente.

Os alunos quando questionados se poderiam calcular a probabilidade por meio da visão frequentista consideraram que poderiam, mas que seria chato e muito mais demorado.

4.6.7. Atividade 6.7.

Construa um polígono qualquer no geoplano, desenhe-o na malha pontilhada e pinte a região interna.



Agora, considere o seguinte experimento: jogar uma bolinha no geoplano delimitado, chacoalhar e verificar em que região ela para. Responda as questões abaixo:

a) Qual é a probabilidade da bolinha parar dentro da região delimitada?

b) Qual é a probabilidade da bolinha parar fora da região delimitada?

4.6.7.1. Análise *a priori*

Nesta atividade o aluno deve construir no geoplano um polígono qualquer e desenhá-lo na malha pontilhada para então fazer o cálculo das probabilidades de a bolinha cair fora e dentro da área delimitada por ele.

O cálculo das probabilidades dos eventos elementares pode ser realizado por meio das visões clássica e frequentista. Esperamos que os alunos percebam, utilizando as informações obtidas com a atividade anterior, 6.6., que podem calcular as probabilidades num enfoque clássico pela a razão entre as áreas. E, que também é possível obter a solução por meio da visão frequentista.

4.6.7.2. Análise *a posteriori*

Os alunos construíram os polígonos no geoplano e desenharam sua representação no geoplano sem problemas, mas foi necessário explicar o que era um polígono.

O grupo 2 encontrou a probabilidade de cair fora e dentro pela proporção conforme fizeram na atividade 6.7, pois desenhou um quadrado no centro (ver Figura 34).

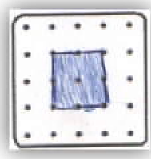


Figura 34: Resposta do grupo 3 para a atividade 6.8.

Inicialmente os grupos 1 e 3 também tentaram utilizar a mesma estratégia para calcular as probabilidades tentando encontrar uma proporção, mas não conseguiram, pois construíram um hexágono (ver Figura 35) e um triângulo respectivamente (ver Figura 37). Consideramos que houve momentos adidáticos de ação e formulação, pois tentaram utilizar a mesma estratégia que deu certo anteriormente. Assim, nos perguntaram como deveriam proceder. Pedimos então, que revissem a atividade 6.6.

Retomando a atividade 6.6., como já haviam observado que as razões coincidiam com as probabilidades, os alunos perceberam que nesse caso poderiam calcular a probabilidade pela razão. Como o Aluno 2 afirmou, “a gente pode usar a prova pra achar”, consideramos que houve momentos adidáticos de validação, pois os alunos tentaram resolver pela proporção, mas não conseguiram e depois baseados em percepções adquiridas anteriormente, encontraram uma forma para resolver a questão, ou seja, de calcular as probabilidades pedidas. A seguir colocamos as respostas dos dois grupos.

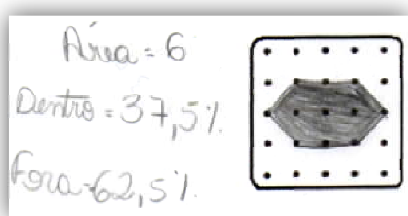


Figura 35: Resposta do grupo 1 para a atividade 6.8.

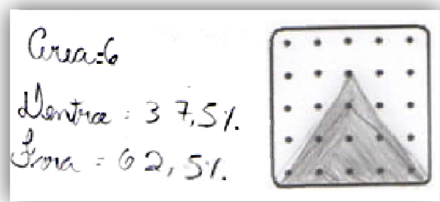
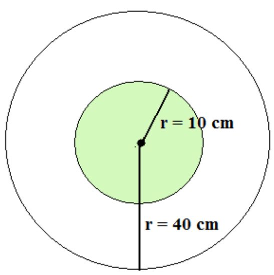


Figura 36: Resposta do grupo 3 para a atividade 6.8.

Coincidentemente as áreas de ambos foram iguais e isso foi observado pelos alunos, pois o Aluno 5 nos questionou: “professora, mas por que deu igual?” e, em seguida, o Aluno 2 respondeu: “por que as áreas saíram iguais”. Nesta atividade também os alunos consideram a possibilidade do cálculo por meio da visão frequentista.

4.6.8. Atividade 6.8.

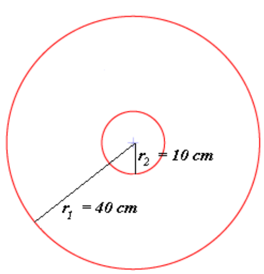
Fernando, com os olhos vendados, procura atingir um alvo circular de 40 cm de raio tendo no centro um disco de 10 cm de raio. Se num determinado arremesso ele acertou o alvo, qual a probabilidade de que tenha atingido o disco central?



4.6.8.1. Análise *a priori*

Nesta atividade queremos verificar se os alunos reteram a relação probabilidade-razão entre as áreas, reutilizando o novamente este conceito para resolver esta atividade. Como este não é o foco de nossa pesquisa, caso necessário, relembraremos como calcular a área da circunferência. Também queremos observar se os alunos percebem a possibilidade do cálculo pela probabilidade frequentista.

Resolução:



$A_1 = r_1^2$ $\qquad$ $A_2 = r_2^2$

$A_1 = 40^2$ $\qquad$ $A_2 = 10^2$

$A_1 =$ $\qquad$ $A_2 =$

Evento (E): atingir a área central do disco central (A_2)

P(E) = — = ——— = — = 0,0625 = 6,25%

4.6.8.2. Análise *a posteriori*

Para resolver essa questão, todos os alunos disseram que precisavam encontrar o valor das áreas para calcular a probabilidade, como o Aluno 2 que disse: “tem que dividir esse por esse”, referindo-se primeiro a área do disco central e segundo a área total e dessa forma realizariam um cálculo *a priori* por meio da visão clássica. Porém, não sabiam como calcular a área da circunferência e que foi explicado por nós, pois esse não é o conhecimento em jogo.

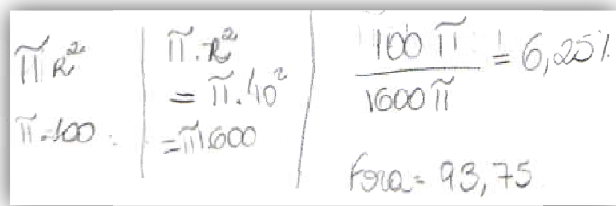


Figura 37: Resposta do grupo 1 para atividade 6.9.

Podemos observar na figura 38 que para calcular a probabilidade de acertar fora do disco central, o grupo 1, diminui de 6,25% de 100%. Salientamos que os alunos também consideraram que poderiam calcular a probabilidade “jogando”, ou seja, por meio da visão frequentista.

4.6.9. Considerações Gerais

Consideramos, por meio das análises *a priori* e *a posteriori* de cada atividade, que houve uma boa articulação entre as duas visões probabilísticas, no qual a possibilidade de realização dos experimentos em conjunto com o recurso do simulador da roleta, no caso dos experimentos com as roletas, favoreceu a compreensão de que em um experimento aleatório, existe a possibilidade de utilizar as duas abordagens para calcular as probabilidades ou apenas uma delas.

Nas atividades com probabilidade geométrica que representam uma contextualização da matemática dentro da matemática, pudemos notar que essas atividades serviram para que os alunos relembrassem e utilizassem esse conceito. Salientamos que esse campo pode ser bem mais explorado com a utilização de diversos conceitos geométricos e também com o recurso da informática como fez Coutinho (2001) em sua pesquisa.

A utilização da calculadora foi de fundamental importância, pois além de calcularem as frequências relativas e probabilidades mais rapidamente, observamos que também favoreceu a utilização de outras estratégias, tentativas e verificações.

A ficha 2, que continha os conceitos probabilísticos trabalhados e foram escritos com as palavras dos alunos, ou seja, da forma que eles compreendem, foi utilizado como um recurso importante pois percebemos que sempre recorriam a ela quando precisavam relembrar algum conceito.

Outro ponto importante é que em vários momentos os alunos confundiam chance ou probabilidade com possibilidade, apesar de termos explicitado a diferença e sempre corrigir. Em suas falas essa concepção errônea sempre voltava e atribuímos isso à linguagem cotidiana e até mesmo ao fato de, em alguns livros didáticos encontrarmos o uso do termo possibilidade referindo-se erroneamente a probabilidade, como afirma o Guia do PNLD (2008).

4.7. 7ª SESSÃO: REINVESTIMENTO

Para verificarmos se o aluno reteve alguns conceitos elaboramos questões em que os alunos podem utilizar o que aprenderam durante as sessões anteriores. Esta atividade, composta por sete questões, deve ser realizada individualmente pelos alunos e sem o apoio da ficha 2 que é a ficha, na qual os alunos puderam recorrer durante toda a experimentação para relembrar conceitos.

Iniciamos esta sessão entregando aos alunos as folhas de questões e explicamos que, diferentemente das outras atividades, esta deveria ser feita individualmente e sem discussões. Ressaltamos também que não poderiam utilizar a ficha 2 e que se não soubessem alguma questão poderiam deixar em branco.

Infelizmente apenas os Alunos 1, 2, 5 e 6 compareceram para realizar esta atividade e o tempo disponível para realização da prova foi de 45 minutos, o que não foi suficiente para responderem todas as questões a tempo, pois apenas o Aluno 5 começou a resolver a última questão. O Aluno 2 resolveu até a questão 6, assim como os Alunos 1 e 6, porém não resolveram o item (d) e não podemos afirmar se não souberam responder ou deixaram de responder pois o tempo havia acabado.

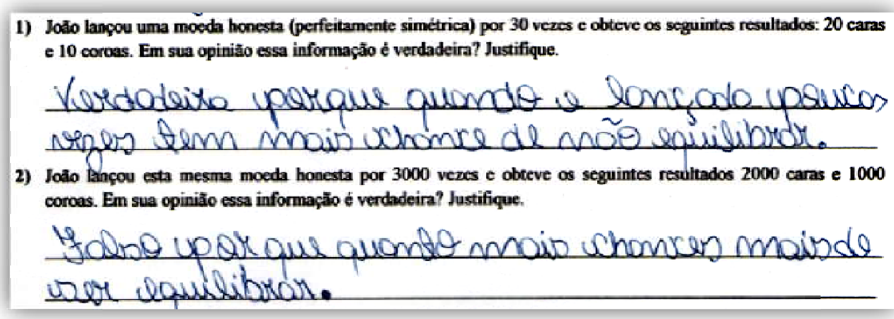
Questões 1 e 2

1)	João lançou uma moeda honesta (perfeitamente simétrica) por 30 vezes e obteve os seguintes resultados: 20 caras e 10 coroas. Em sua opinião essa informação é verdadeira? Justifique.
2)	João lançou esta mesma moeda honesta por 3000 vezes e obteve os seguintes resultados 2000 caras e 1000 coroas. Em sua opinião essa informação é verdadeira? Justifique.

As questões 1 e 2 foram elaboradas tendo como base algumas questões aplicadas por Gonçalves, M. C. (2004) para verificar concepções dos professores sobre aleatoriedade e probabilidade.

Nossa intenção é verificar se o aluno reteve a informação de que quando o experimento aleatório for realizado poucas vezes é possível que a frequência relativa de cada evento elementar fique bem distante de sua respectiva probabilidade, mas quando são muitas realizações não existe essa possibilidade e assim os valores das frequências relativas devem ficar em torno das probabilidades. Em outras palavras existe uma diferença entre realizar o experimento poucas vezes e muitas vezes.

Verificamos que todos os alunos acertaram esta questão e atribuímos isso principalmente à utilização da roleta.

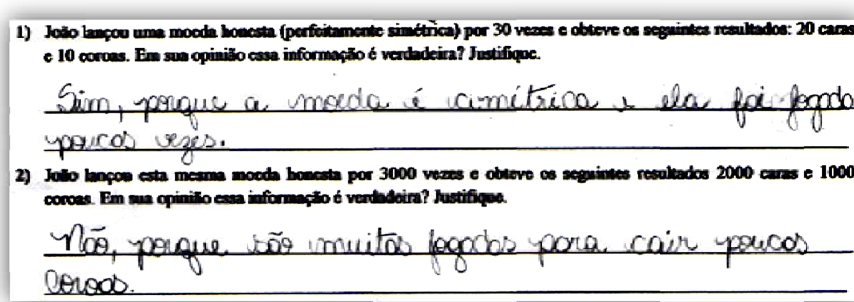

1) João lançou uma moeda honesta (perfeitamente simétrica) por 30 vezes e obteve os seguintes resultados: 20 caras e 10 coroas. Em sua opinião essa informação é verdadeira? Justifique.

Verdadeiro porque quando é lançado poucas vezes tem mais chance de não equilibrar.

2) João lançou esta mesma moeda honesta por 3000 vezes e obteve os seguintes resultados 2000 caras e 1000 coroas. Em sua opinião essa informação é verdadeira? Justifique.

Falso porque quando mais chances mais de ser equilibrar.

Figura 38: Resposta do Aluno 1 para as questões 1 e 2 da 7ª Sessão.

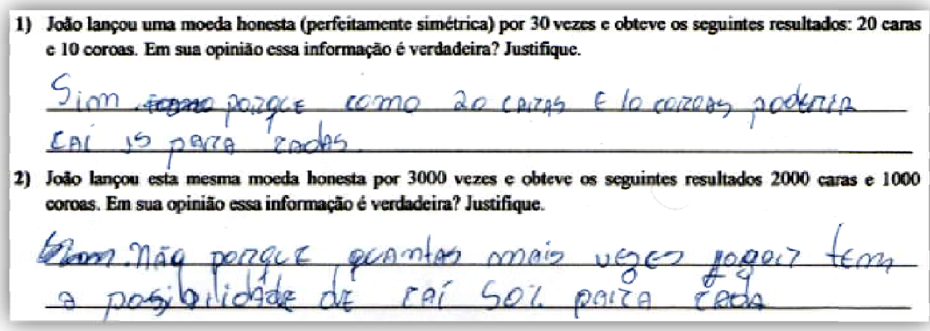

1) João lançou uma moeda honesta (perfeitamente simétrica) por 30 vezes e obteve os seguintes resultados: 20 caras e 10 coroas. Em sua opinião essa informação é verdadeira? Justifique.

Sim, porque a moeda é simétrica e ela foi jogada poucas vezes.

2) João lançou esta mesma moeda honesta por 3000 vezes e obteve os seguintes resultados 2000 caras e 1000 coroas. Em sua opinião essa informação é verdadeira? Justifique.

Não, porque são muitas jogadas para cair poucas coroas.

Figura 39: Resposta do Aluno 2 para as questões 1 e 2 da 7ª Sessão.



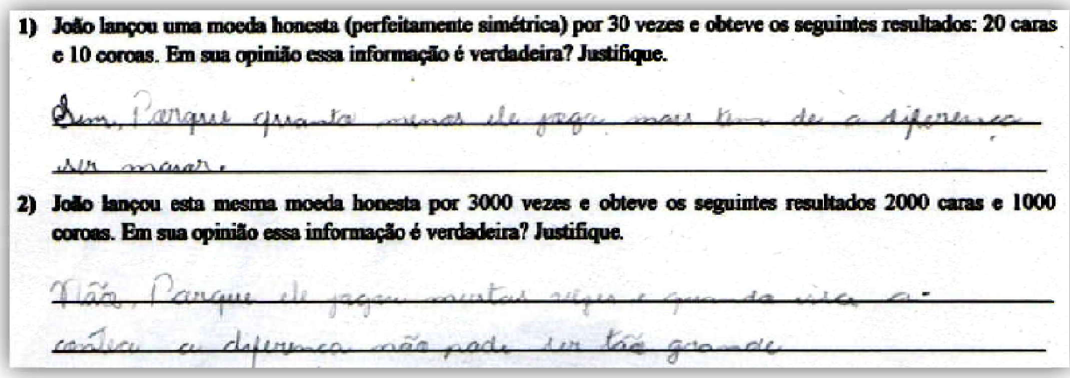
1) João lançou uma moeda honesta (perfeitamente simétrica) por 30 vezes e obteve os seguintes resultados: 20 caras e 10 coroas. Em sua opinião essa informação é verdadeira? Justifique.

Sim ~~como~~ porque como 20 caras e 10 coroas poderia cai 15 para cada.

2) João lançou esta mesma moeda honesta por 3000 vezes e obteve os seguintes resultados 2000 caras e 1000 coroas. Em sua opinião essa informação é verdadeira? Justifique.

~~Sim~~ Não porque quantos mais vezes jogar tem a possibilidade de cai 50% para cada

Figura 40: Resposta do Aluno 6 para as questões 1 e 2 da 7ª Sessão.



1) João lançou uma moeda honesta (perfeitamente simétrica) por 30 vezes e obteve os seguintes resultados: 20 caras e 10 coroas. Em sua opinião essa informação é verdadeira? Justifique.

Sim, Porque quanto menos se jogar mais tem de a diferença ser maior.

2) João lançou esta mesma moeda honesta por 3000 vezes e obteve os seguintes resultados 2000 caras e 1000 coroas. Em sua opinião essa informação é verdadeira? Justifique.

Não, Porque se jogar muitas vezes e quando a vira a cara a diferença não pode ser tão grande

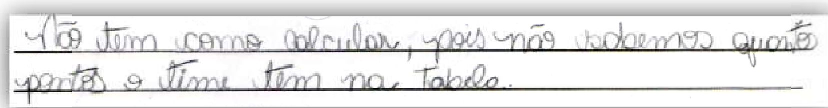
Figura 41: Resposta do Aluno 5 para as questões 1 e 2 da 7ª Sessão.

Questão 3

3) Qual a probabilidade de um certo time ganhar um campeonato de futebol? Justifique.

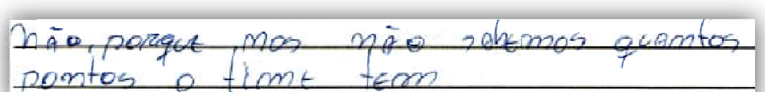
Salientamos que esta questão foi proposta por Coutinho (1994) em sua pesquisa para verificar se a concepção de atribuir equiprobabilidade na falta de informações ainda persiste, ou se os alunos utilizam a probabilidade subjetiva.

Verificamos que todos os alunos observaram que não havia como calcular, porém os Alunos 1 e 5, não justificaram. A seguir apresentamos as respostas dos Alunos 2 e 6.



Não tem como calcular, pois não sabemos quantos pontos o time tem na tabela.

Figura 42: Resposta do Aluno 2 para a questão 3 da 7ª Sessão.



Não, porque nos não sabemos quantos pontos o time tem.

Figura 43: Resposta do Aluno 6 para a questão 3 7ª Sessão.

Questão 4

4)	Dê um exemplo de experimento determinístico.

O objetivo desta questão é observar se o aluno reteve o significado de experimento determinístico, uma vez que, só trabalhamos com esse conceito na primeira sessão.

Verificamos que os alunos lembraram e deram como exemplo os experimentos trabalhados na 1ª sessão. Apenas o Aluno 1 não deu um exemplo mas colocou o significado.

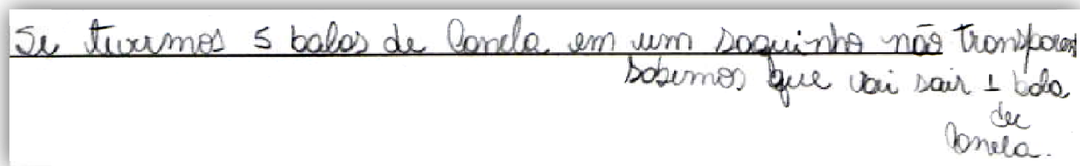

Se tivermos 5 balas de canela em um saquinho não trasparente sabemos que vai sair 1 bala de canela.

Figura 44: Resposta do Aluno 2 para a questão 4 da 7ª Sessão.

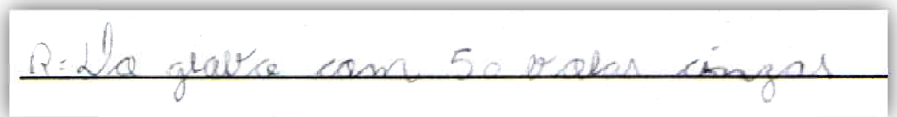

R: Da garrafa com 5 bolas cinzas

Figura 45: Resposta do Aluno 5 para a questão 4 da 7ª Sessão.

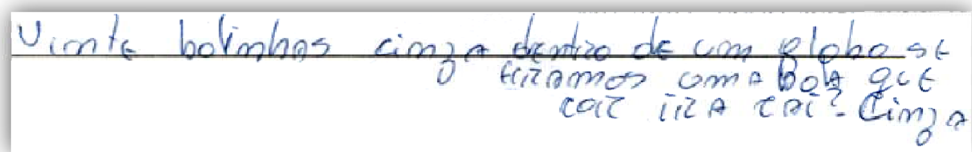

Vinte bolinhas cinza dentro de um globo se tiramos uma bola que cai irá cai? Cinza

Figura 46: Resposta do Aluno 6 para a questão 4 da 7ª Sessão.

Questão 5

5)	No experimento aleatório lançar duas moedas ao mesmo tempo.
a)	Qual é o espaço amostral?
b)	Qual é a probabilidade de cada um dos eventos elementares?

O objetivo desta questão é verificar se os alunos irão realizar o mesmo erro de não considerar diferentes os resultados (cara, coroa) e (coroa, cara) e foi disponibilizado para cada um duas moedas idênticas.

Pudemos observar que os Alunos 1 e 5 inicialmente não consideram diferentes, ficando apenas com três eventos elementares para este experimento, mas perceberam o erro. O Aluno 2 fez corretamente. A seguir colocaremos apenas a resposta do Aluno 2 por ser igual as demais.

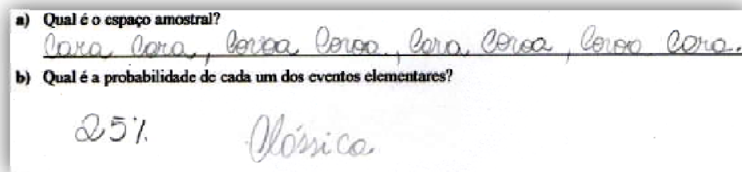


Figura 47: Resposta do Aluno 2 para a questão 5 da 7ª Sessão.

Após os alunos calcularem a probabilidade pedimos que anotassem ao lado que abordagem utilizaram como está ilustrado na resposta do Aluno 2 (ver Figura 47). Podemos verificar a seguir (ver Figura 48) que apenas o Aluno 6 não considerou diferentes dos resultados (cara, coroa) e (coroa, cara).

Figura 48: Resposta do Aluno 6 para a questão 5 da 7ª Sessão.

Questão 6

6) Considere o experimento aleatório: lançar uma tachinha ou percevejo e observar em que posição ela cai. Responda as questões a seguir:

a) Qual é o espaço amostral?

b) O espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável? Justifique.

c) Qual seria um evento impossível?

d) Qual a probabilidade de cada um dos eventos elementares desse experimento?

A escolha deste experimento aleatório se deve ao fato de que o cálculo de probabilidades só pode ser resolvida por meio da visão frequentista de probabilidades, pois gostaríamos de verificar se os alunos irão observar a não equiprobabilidade do espaço amostral, bem como sua impossibilidade de cálculo *a priori* e também se retiveram o conceito de evento impossível.

A intenção não era que os alunos calculassem a probabilidade pela frequência relativa, bastava apena que explicassem como, mas isso só seria revelado após perceberem isso, pois se colocássemos que era para explicar como fariam para calcular as probabilidades já daríamos indícios de ser pela abordagem frequentista.

Seguindo orientações de Silva (2002), disponibilizamos aos alunos a tachinha para evitar não quererem resolver a atividade alegando desconhecer o objeto. Lembramos também que o experimento da tachinha foi utilizado por Coutinho (1994), mas que não podemos utilizar os mesmos resultados obtidos[42] com as realizações desse experimento aleatório na pesquisa desta autora, por não tratar-se da mesma tachinha.

O Aluno 2 respondeu corretamente como podemos observar a seguir. Tivemos apenas uma interferência na questão (d), como foi previsto, pois afirmou que deveria jogar umas mil vezes para encontrar a frequência relativa, mas que não daria tempo, dessa forma pedimos que explicasse como faria e que abordagem utilizaria.

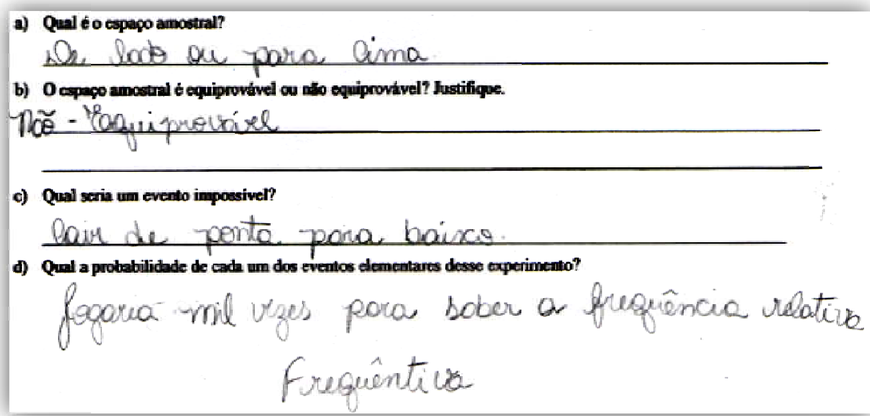
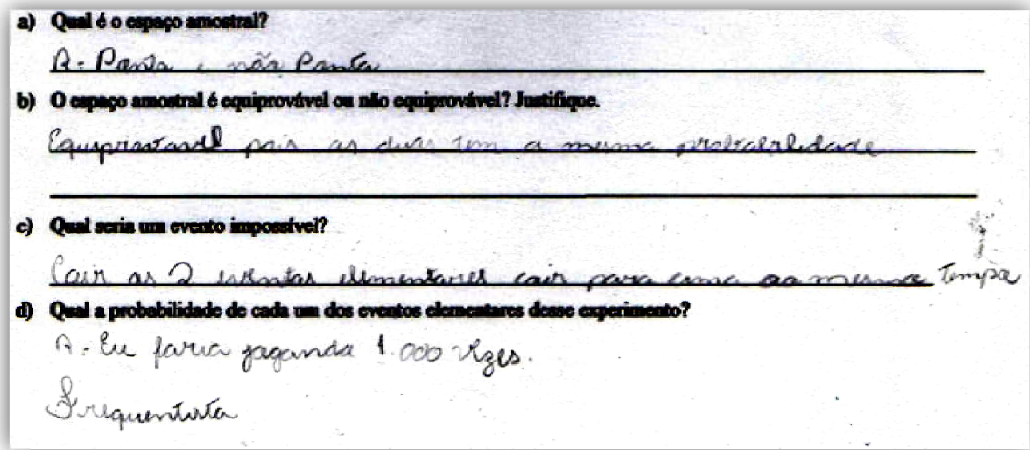

a) Qual é o espaço amostral?
De lado ou para cima
b) O espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável? Justifique.
Não - Equiprovável
c) Qual seria um evento impossível?
Cair de ponta para baixo.
d) Qual a probabilidade de cada um dos eventos elementares desse experimento?
Jogaria mil vezes para saber a frequência relativa
Frequêntica

Figura 49: Resposta do Aluno 2 para a questão 6 da 7ª Sessão.

O Aluno 5 também respondeu corretamente, mas tivemos que ajudá-lo nos nomes das duas posições. Podemos notar que ele atribui equiprobabilidade ao espaço amostral, mas disse que para calcular as probabilidades tinha que jogar a tachinha, ou seja, por meio da frequentista. Questionou o porquê de jogar a tachinha para calcular a probabilidade se ele atribui equiprobabilidade ao espaço amostral e ele respondeu: “igual naquele outro professora (referiu-se ao experimento aleatório do dado do jogo Senet), a gente falou que tinha a mesma possibilidade pra cada um, mas depois viu que não tinha, aqui é a mesma coisa professora tem que jogar um monte de vezes pra ver se esses dois (referiu-se aos eventos elementares: ponta e não ponta) não têm a mesma probabilidade”.

[42] Já comentado no item 2.2.2.

Com a fala do Aluno 5 entendemos que ele compreendeu que o espaço amostral "pode" ser equiprovável, mas que supôs inicialmente ter a mesma probabilidade para os dois lados e que ele teria que realizar o experimento e observar as frequências relativas pra conferir se realmente o espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável e calcular a probabilidade. Podemos observar que ele quer seguir os mesmos passos da atividade 6.4 com o experimento do dado do jogo Senet, portanto consideramos que ele acertou a questão.



a) Qual é o espaço amostral?

R: Ponta e não Ponta

b) O espaço amostral é equiprovável ou não equiprovável? Justifique.

Equiprovável pois as duas tem a mesma probabilidade

c) Qual seria um evento impossível?

Cair as 2 eventos elementares cair para cima ao mesmo tempo

d) Qual a probabilidade de cada um dos eventos elementares desse experimento?

R: Eu faria jogando 1.000 vezes.

Frequentista

Figura 50: Resposta do Aluno 5 para a questão 6 da 7ª Sessão.

Os Alunos 1 e 6, descreveram o espaço amostral e afirmaram que ele é não equiprovável, deram um exemplo correto de evento impossível, porém não responderam a letra (d).

Questão 7

7) Num saquinho não transparente foram colocadas cinco bolas de gude apenas diferenciadas pela cor (verdes e brancas), mas não sabemos a composição. Considere o seguinte experimento: retirar uma bola desse saquinho e observar sua cor. Qual a composição de bolas do saquinho?

Para este experimento, as seguintes regras devem ser seguidas:

- o saquinho não pode ser aberto para ver as bolas;
- não pode-se retirar todas as bolas de uma vez;
- pode-se retirar uma bola, observa a sua cor e colocá-la novamente no saquinho para que então possa retirar outra bola.

Esta atividade foi adaptada de uma atividade proposta por Brousseau chamada Garrafa de Brousseau[43], que sugere uma representação concreta da Urna de Bernoulli e que também foi utilizada por Rodrigues (2007) em sua pesquisa.

> A urna de Bernoulli é um modelo pseudoconcreto de probabilidade, e representa dada uma experiência aleatória, um modelo binomial resultado em dois eventos possíveis: “sucesso” ou “fracasso”. Por que pseudoconcreto? Porque os alunos podem expressá-lo utilizando um vocabulário corrente, quotidiano, mesmo trabalhando com objetos abstratos, já idealizados a partir de objetos da realidade. (RODRIGUES, 2007, p.57).

O objetivo desta atividade é fazer com que o aluno encontre uma estratégia para estimar a composição de bolas que se encontram dentro de um saquinho não transparente e o único dado que ele possui é que são cinco bolas entre verdes e brancas, mas nada sobre as a quantidade de cada uma das cores.

Esperamos que os alunos percebam que se calcularem as probabilidades de sair bola verde e branca podem descobrir a composição do saquinho. Porém, para encontrar essas probabilidades os alunos esbarram em um problema semelhante ao da atividade anterior do dado do jogo Senet, que não podem calcular a probabilidade *a priori* desse experimento.

Inicialmente deixaremos que manipulem o saquinho de acordo com as regras e daremos um tempo para que pensem em alguma estratégia para encontrar a probabilidade e a composição. Como já fizeram nas atividades anteriores, espera-se que os alunos calculem a probabilidade por meio da concepção frequentista, ou seja, realizando o experimento um número grande de vezes e observando sua frequência relativa como no dado do jogo Senet. Mas se isso não ocorrer, proporemos que realizem o experimento por 20 vezes cada um.

Apenas o Aluno 5 chegou a tentar resolver esta questão por que o tempo tínhamos disponível estava acabando e eles tinham que ir para a próxima aula. Como podemos observar na figura 51, o aluno começou tirando as bolas e anotando os resultados, mas parou, pois o tempo estava acabando e calculou as frequências de verdes e brancas.

---

[43] Em uma garrafa não transparente e vazia colocaremos cinco bolas, tomadas em um saco opaco que contém cerca de trinta bolas. Devemos verificar que há no saco apenas bolas brancas e bolas pretas.
Após misturar, retirar 5 bolas, permitindo aos alunos a constatação da quantidade (mas não da cor). Colocar as 5 bolas na garrafa, fechando seu gargalo com material transparente, simulando um funil.
Questão a ser colocada: como estimar a composição na garrafa? Ou seja, como estimar a proporção de bolas brancas na garrafa? (BROUSSEAU apud RODRIGUES, 2007, p. 60-61)

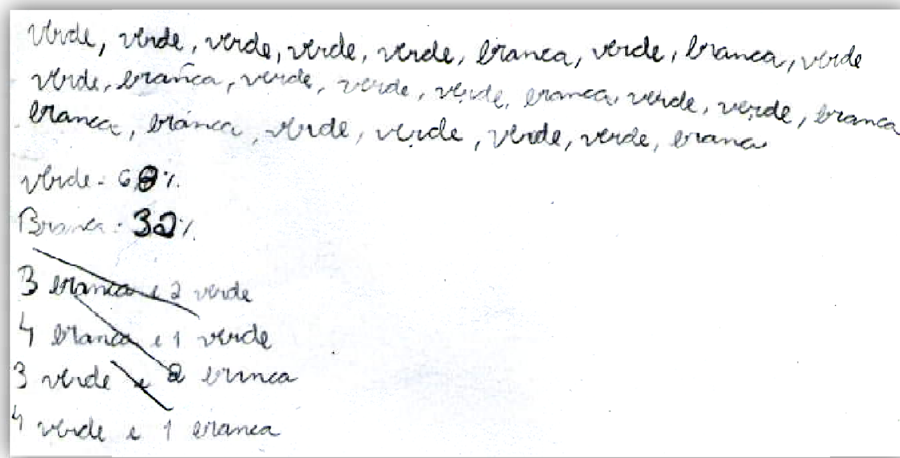

verde, verde, verde, verde, verde, branca, verde, branca, verde
verde, branca, verde, verde, verde, branca, verde, verde, branca
branca, branca, verde, verde, verde, verde, branca
verde - 68%
Branca: 32%
~~3 branca e 2 verde~~
~~4 branca e 1 verde~~
~~3 verde e 2 branca~~
4 verde e 1 branca

Figura 51: Resposta do Aluno 5 para a questão 7 da 7ª Sessão.

Em seguida o Aluno 5 colocou todas as possibilidades de composição do saquinho, das quais excluiu as duas primeiras, pois percebeu pela frequência relativa que deveria ter mais verdes do que brancas, restando as duas últimas opções.

O Aluno 5 ficou na dúvida, pois a frequência relativa de verde deu 68%, ele arredondou para 70% e a de branca ficou então em 30%. Na sequência ele pensou que se a composição do saquinho fosse 3 verdes e 2 brancas, a probabilidade seria de 60% e 40% respectivamente e se fossem 4 verdes e uma branca, seria 80% e 20%. Esses valores que ficaram entre dos valores das frequências relativas encontradas por ele. Assim, o aluno afirmou que precisava “jogar mais”, porém o sinal bateu e ele “chutou” em 4 verdes de 1 branca riscando a opção 3 verdes e 2 brancas.

Observamos que o Aluno 5 compreendeu que para encontrar a composição do saquinho deveria calcular a probabilidade pela visão frequentista. Se houvesse mais tempo, talvez tivesse conseguido responder corretamente. Dessa forma, consideramos que houve momentos adidáticos de ação e formulação pelo Aluno 5.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa pesquisa teve como objetivo verificar se a utilização de uma sequência didática que envolvesse e articulasse diferentes visões de probabilidade, neste caso a clássica e a frequentista, poderia favorecer a aprendizagem de conceitos probabilísticos básicos por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental. Fomos motivados por pesquisas anteriores nas quais mostraram que professores têm desconsiderado ou dado pouco enfoque esse conteúdo em suas aulas, além o considerarem muito difícil para alunos desse nível e até mesmo para o Ensino Médio.

Creditamos essa problemática ao fato de ser um conteúdo relativamente novo no currículo brasileiro e que, devido a isso, a maioria dos professores não tiveram contato com esse conteúdo em sua graduação e a formação continuada também não têm dado conta de instruir os professores, como apontam as pesquisas de Santos (2005) e Corrêa (2010). Pudemos também observar nas pesquisas de Gonçalves, M. C. (2004) e Corrêa (2010), que a maioria dos professores que participaram de suas pesquisas encontra-se no primeiro nível das concepções probabilísticas classificadas por Azcaráte, a "não probabilística da realidade".

Nosso objetivo principal foi investigar a aprendizagem de probabilidade a partir de situações que envolvessem as visões clássica e frequentista. Para nós a aprendizagem ocorre quando os conhecimentos anteriores sofrem as adaptações necessárias para resolver um problema transformando-se em um novo conhecimento, ou seja, "o aluno aprende adaptando-se a um meio que é um fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, [...]. Este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se por meio de respostas novas, que são a prova da aprendizagem" (BROUSSEAU, 1996a, p. 49). Levamos essa premissa em conta para analisar a evolução do conhecimento do aluno

Em nossa sequência, partimos do princípio que o aluno deveria conhecer alguns conceitos básicos de probabilidade, como experimento aleatório e determinístico, espaço amostral, espaço amostral equiprovável, espaço amostral não equiprovável, evento elementar, evento impossível e evento certo. Esses conceitos geralmente não aparecem nos livros didáticos, como pudemos verificar, e abrangem as três primeiras sessões de nossa sequência. A introdução desses conceitos foi feita a partir da realização de experimentos em diferentes contextos e das observações e percepções que os alunos foram elaborando que serviram para posterior formalização. Consideramos que os alunos aprenderam esses conceitos, pois os utilizaram durante as outras sessões e também na atividade de reinvestimento, na qual podemos observar que não tiveram dúvidas quanto aos seus significados.

A quarta sessão visou à aprendizagem do cálculo de probabilidades num enfoque clássico e das diferentes representações da probabilidade (fração, decimal e porcentagem). Pudemos observar que os alunos assimilaram a proporção com probabilidade inicialmente no caso das roletas 2 e 3 e, a partir desse conceito, conseguiram calcular a probabilidade dos outros experimentos aleatórios, mesmo que em diferentes contextos. Consideramos que a maioria dos alunos de nossa pesquisa compreendeu como calcular probabilidades nesse enfoque, pois utilizaram essa ferramenta durante as sessões seguintes e também na atividade de reinvestimento.

A quinta sessão objetivou realizar uma introdução da visão frequentista para o cálculo de probabilidades e consideramos que o recurso informático do simulador da roleta, favoreceu a aquisição e compreensão do cálculo de probabilidades por meio da visão frequentista, pois propiciou uma observação concreta do que acontece quando realizamos um experimento aleatório com uma quantidade pequena ou significativamente grande de vezes.

Na sexta sessão foram elencadas atividades para realizar uma articulação entre as duas abordagens de probabilidade, na qual pudemos observar que os alunos calcularam as probabilidades dos eventos elementares dos experimentos aleatórios e compreenderam quando podem ou não utilizar a visão clássica, a frequentista ou ambas para calcular as probabilidades.

Elencamos também uma última sessão de reinvestimento que foi realizada com a intenção de observar se alunos aprenderam os conceitos propostos em nossa sequência, pois partimos do princípio de que o aluno adquire conhecimento quando é capaz de utilizá-lo em outras situações. O resultado foi positivo. Dessa forma, respondendo a nossa questão de pesquisa, consideramos que a articulação das duas visões de probabilidade (clássica e frequentista) favoreceu sim a aprendizagem de alguns conceitos do conteúdo visado por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, pois podemos observar que os alunos vivenciaram momentos adidáticos de ação, formulação e validação.

Nosso trabalho abordou apenas conceitos iniciais de Probabilidade, abrangendo uma pequena parte do que poderia ser explorado em relação a esse tema de estudo, que conta ainda com poucas pesquisas. Esperamos ter contribuído para uma reflexão sobre o ensino de probabilidades no Ensino Fundamental, pois como Lopes (1998, p. 14-15) defende, “não podemos esperar que nosso aluno chegue ao Ensino Médio para iniciarmos conteúdo essenciais para o desenvolvimento de sua visão de mundo”. Isso implica em privá-los de condições que lhe permitam a compreensão de problemas que ocorrem em seu cotidiano, dentro de sua realidade social.

REFERÊNCIAS

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica**.** In*:* BRUN, J. (org.) **Didáctica das matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget Horizontes Pedagógicos, 1996. cap. 4, p. 193-217.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: Editora UFPR, 2007.

BATANERO, C. **Significados de la probabilidad en la educación secundaria**, 2005. . Disponível em: <http://redalyc.uaemex.mx/pdf/335/33508302.pdf>. Acesso em: 26 dez. 2009.

BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática**. 5. ed. São Paulo: IME/USP, 2004. 6 v.

BAYER, A.; ECHEVESTE, S.; ROCHA, J.; BITTENCOURT, H. R. **Probabilidade na escola**. In: Congresso internacional de Ensino da Matemática, Canoas, 2005. 1 v. p. 1-12. Disponível em: < http://www.exatas.net/artigo_ciem2.pdf>. Acesso em: 3 fev. 2011.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática**.** Brasília: SEF/MEC, 1997a.

______, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemáticas (1º e 2º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: SEF/MEC, 1997b.

______, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemáticas (3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental). Brasília: SEF/MEC, 1998.

______, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. Programa Nacional do Livro Didático**. Guia de livros didáticos PNLD 2008:** Matemática (séries/anos finais do Ensino Fundamental). Brasília: SEF/MEC, 2008.

BROUSSEAU, G. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática**.** In*:* BRUN, J. **Didáctica das Matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget Horizontes Pedagógicos, 1996a. cap. 1, p. 35-111.

______. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C.; SAIZ, I. (Org.) **Didática da matemática:** reflexões psicopedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996b. p. 48-72.

______. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas. Conteúdos e métodos de ensino.** São Paulo: Ática, 2008.

CARVALHO, C.; FERNANDES, A. J. Revisitando o conceito de probabilidade com um olhar da Psicologia. **Revista Quadrante**, v.14, n.2, p.71-88, 2007.

CARZOLA, I. M.; SANTANA, E. R. S. **Tratamento da Informação para o Ensino Fundamental e Médio**. Bahia: Via Litterarum Editora, 2006. 60p.

CARZOLA, I. M.; KATOKA, V. Y.; SILVA, C. B. Trajetória e perspectivas da Educação Estatística no Brasil: um olhar a partir do GT12. In: LOPES, C. E.; COUTINHO, C. Q. S.; ALMOULOUD. S. A. (orgs.). **Estudos e Reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado de Letras, 2010. p. 19-44.

CORRÊA, M. W. **O conhecimento profissional e a abordagem do Ensino de Probabilidade**: um estudo de caso, 2007. 154 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

COUTINHO, C. Q. S. **Introdução ao Conceito de Probabilidade por uma Visão Frequentista – Estudo Epistemológico e Didático.** 1994. 151 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 1994.

______. Modelagem, simulação e as orientações dos PCN-EF para o ensino de probabilidade. In: **Seminário IASI de Estatística Aplicada**: Estatística em Educação e Educação em Estatística, Rio de Janeiro, 2003.

______. **O Ensino de Probabilidades no currículo da Escola Básica**, 2005a. Disponível em <http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas_redondas/mr15.doc>. Acesso em: 13 dez 2010.

______. **Probabilidade geométrica: um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri**. In: Revista Educação Matemática Pesquisa ano 7, n. 2. p. 185-200, 2005b.

______. **Conceitos probabilísticos: quais contextos a história aponta?** In: REVEMAT – Revista Eletrônica de Educação Matemática. 2 v. 1 n., p. 50-67, UFCC: 2007. Disponível em: < http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/viewArticle/12991>. Acesso em: 02 fev. 2011.

COUTINHO, C. Q. S.; NOVAES, D. V. **Estatística para Educação Profissional**. São Paulo: Editora Atlas S. A., 2009.

DANTAS, C. A. B. **Probabilidade: Um Curso Introdutório.** São Paulo: Editora Edusp, 2004.

DANTE, Luiz Roberto. **Livro Didático de Matemática: Uso ou Abuso?** In: Em aberto. Brasília, v.26, n.69, p. 52-58, Jan/Mar. 1996.

ENTLER, R. **A definição do acaso**, 1997. Disponível em: <http://www.entler.com.br/textos/acaso_definicao.html>. Acesso em: 10 fev. 2010.

FERNANDES, J. A. S. **Instituições e aprendizagem de probabilidades - Uma Proposta de Ensino de Probabilidades no 9º Ano de Escolaridade.** 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade do Minho.

FIGUEIREDO, A. C. **Probabilidade condicional:** um enfoque de seu ensino-aprendizagem, 2000. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

FREITAS, J. L. M. Teoria das Situações Didáticas**.** In*:* MACHADO, S. D. A. (org.) **Educação Matemática:** Uma (nova) Introdução. 3.ed. São Paulo: Editora da PUC-SP (EDUC), 2008. p. 77-111.

FRIOLANI, L. C.. **O pensamento estocástico nos livros didáticos do Ensino Fundamental**. 2007. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

GONÇALVES, H. J. L. **A educação estatística no ensino fundamental:** discussões sobre a práxis de professoras que ensinam matemática no interior de Goiás. 2005. 143 p. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Brasília, Brasília, 2005**.**

GONÇALVES, M. C. **Concepções de professores e o ensino de probabilidade na escola básica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2004.

GONÇALVES, H. J. L; NUNES, J. M. V. Obstáculos didáticos e epistemológicos no ensino de noções de análise combinatória, probabilidades e estatística. In **Sinergia**, São Paulo, v. 11, n. 1, p. 86-94, jan./jun. 2010. Disponível em: < http://www.cefetsp.br/edu/prp/sinergia/>. Acesso em 16 jan. 2011.

HAZZAN, S. **Fundamentos de matemática elementar: combinatória e probabilidade.** 6 ed. São Paulo: Editora Atual, 1994. 5 v.

HENRY, M. **Du hasard aux probabilités: émergence historique d'un puissant outil mathématique,** s/d. Disponível em <http://www.pucsp.br/pensamentomatematico /henry.html>. Acesso em: 10 jan. 2011.

IGLIORI, S. B. C. A noção de "obstáculo epistemológico" e a Educação Matemática**.** In*:* MACHADO, S. D. A. (org.) **Educação Matemática:** Uma (nova) Introdução. 3.ed. São Paulo: Editora da PUC-SP (EDUC), 2008. p. 113-142.

JUNIOR, R. S. C. **Abordagem das Noções Iniciais de Probabilidade em uma Perspectiva Construtivista.** 2009. Dissertação (mestrado profissional em ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

KOBASHIGAWA, M. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Fundamental: das Prescrições ao Currículo Praticado pelos Professores.** 2006. 200f. Dissertação (mestrado profissional em ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

LAJOLO, M. **Livro Didático: um (quase) manual de usuário.** In: Em aberto. Brasília, v.26, n.69, p. 3-7, Jan/Mar. 1996.

LOPES, C. A. E. **A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental: uma Análise Curricular**. 1998, 139f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 1998.

______. **O Ensino da Estatística e da Probabilidade na Educação Básica e a Formação dos Professores.** Caderno Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008. Disponível em: < http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v28n74/v28n74a05.pdf >. Acesso em: 28 jan. 2011.

LOPES, C. A. E.; MORAN, R. C. C. P. **A Estatística e a Probabilidade Através das Atividades Propostas em Alguns Livros Didáticos Brasileiros Recomendados para o Ensino Fundamental.** Conferência Internacional Experiências e Expectativas do Ensino de Estatística – Desafios do Século XXI. Setembro de 1999, Santa Catarina. Ata

MACHADO, S. D. A. Engenharia Didática**.** In: ______. (Org.) **Educação Matemática: uma (Nova) Introdução**. São Paulo: EDUC, 2008, p. 233-248.

MACHADO, A.; IEZZI, G. **Matemática e realidade**. Coleção de 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: Editora Ática, 2005.

MARANHÃO, C. Síntese de Pesquisas sobre Relações no Tempo: Focalizando o Conceito de Institucionalização In: ______. (Org.) **Educação Matemática nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio: pesquisas e perspectivas.** São Paulo: Musa Editora, 2009. p. 251-276.

MORGADO, A. C. O.; CARVALHO, J. B. P.; CARVALHO, P. C. P.; FERNANDEZ, P. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA, 1991. Coleção Professor de Matemática.

ONAGA, D. S.; MORI, I. **Matemáticas ideias e desafios**. Coleção de 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: Editora Saraiva, 2008.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática uma análise da in fluência francesa**. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2001.

PICHARD, J. F. **Frise historique sur la probabilité et la statistique Bref aperçu du développement des théories probabiliste et statistique.** In: Henry, M. (Org.). Autour de La Modélisation em Probabilités. Besançon: Presses universitaires de Franche-Comté, 2001. p. 47-56. Coleção: Didactiques, série Mathématiques. Disponível em <http://www.pucsp.br/pensamentomatematico/henry.html>. Acesso em: 10 jan. 2011.

PONTE, J. P.; FONSECA, H. **Orientações curriculares para o ensino da Estatística Análise comparativa de três países**. Quadrante, Lisboa, v.10, n.1, p.93-115, 2001.

ROTUNNO, S. A. M. **Estatística e probabilidade: um estudo sobre a inserção desses conteúdos no Ensino Fundamental**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2007.

RODRIGUES, M. R. **A Urna de Bernoulli como Modelo Fundamental no Ensino de Probabilidade**. 2007, 100f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SANTOS, C. R. **O tratamento da informação: Currículos prescritos, formação de professores e implementação na sala de aula**. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

SILVA, B. A. Contrato didático. In*:* MACHADO, S. D. A. (org.) **Educação Matemática: Uma (nova) Introdução**. 3.ed. São Paulo: Editora da PUC-SP (EDUC), 2008. p. 49-76.

SILVA, I. M. **Probabilidade: A visão Laplaciana e a visão Frequentista na Introdução do Conceito.** 2002, 147f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

SILVA, V. A; DE CAMPOS, T. A; ITACARAMBI, R. R, **Probabilidade e Geometria: Uma investigação com Alunos Universitários.** 2008. Disponível em: <http://redeabe.org.br/oficina_probabilidade_geometria.pdf>. Acesso em: 20 jul. 2009.

SOUZA, C. A.. **A distribuição binomial no ensino superior**, 2002. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

TUNALA, N. Determinação de probabilidades por métodos geométricos. **Revista do Professor de Matematica**, Sao Paulo, v. 20, n. p. 16-22, 1º quadrimestre. 1992.

VASCONCELLOS, M. J.; ANDRINI, A. **Praticando matemática**. Coleção de 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental. São Paulo: Editora Brasil, 2008.

WAGNER, E. Probabilidade geométrica - o problema do macarrão e um paradoxo famoso. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 34, p. 28-35, 1997.

ZANONE. **Entrevista concedida a Maísa Del Pino Coelho**. Campo Grande (MS), 10 jan. 2007.

ANEXOS

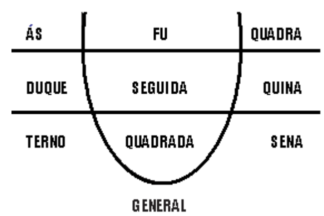
ANEXO A - Regras do Jogo Bozó

Descrição

O jogo é composto por cinco dados e um copo, que pode ser de qualquer material desde que não permita a visão dos dados, geralmente utiliza-se um copo feito de couro ou de chifre de boi. Além de material para registro do tabuleiro e dos pontos como papel, lápis e caneta.

Objetivos

Preencher todo o tabuleiro, de modo a obter mais pontos que o(s) adversário(s).



As Regras do Jogo Bozó

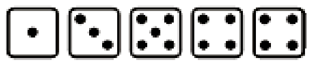
Como vimos anteriormente, não sabemos ao certo a origem do jogo Bozó, portanto suas regras sofrem variações. Apresentamos aqui as regras tais quais conhecíamos, porém durante a pesquisa nos defrontamos com algumas regras um pouco diferentes, mas que de modo geral se assemelham, como em uma onde apenas a pontuação das casas do meio eram alteradas ou a regra de que se conseguir o *General de boca* (na primeira jogada) já ganha-se o jogo.

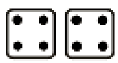
O jogo Bozó pode ser jogado em duplas ou individuais, e não há limite de jogadores, porém muitos jogadores tornam o jogo muito demorado, o que não é interessante se a intenção é pedagógica, o ideal seria jogar em dois (um contra o outro) ou em quatro (dupla contra dupla).

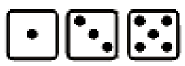
O objetivo do jogo é completar todas as dez casas do tabuleiro, portanto cada jogador tem direito a três tentativas, em cada jogada, e pode parar quando lhe for conveniente, ou seja, ele pode parar na primeira ou na segunda tentativa e fazer sua pontuação.

Na primeira tentativa devem ser jogados obrigatoriamente todos os cinco dados, depois são separados os dados que são convenientes, e jogam-se novamente os dados que sobraram, isso poderá ser feito também na segunda e terceira tentativas, podendo inclusive jogar todos os dados novamente, mas após a terceira e última, a escolha da marcação deve ser efetuada. Para ficar mais claro faremos abaixo um exemplo de jogada completa.

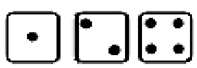
Primeira tentativa

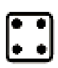
Saiu: 

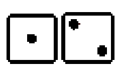
Separo: 

Jogo novamente: 

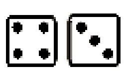
Segunda tentativa

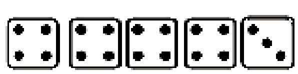
Saiu: 

Separo: 

Jogo novamente: 

Terceira tentativa

Saiu: 

Termino com: 

Opções de marcação:

- quadrada (40 pontos);
- quadra (16 pontos);
- terno (3 pontos);
- cancelar uma casa caso as anteriores já estiverem marcadas.

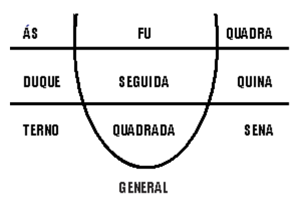
Não existe uma ordem estabelecida para preenchimento das casas do tabuleiro, mas a cada jogada completa deve ser preenchida uma das casas do tabuleiro e se não houver possibilidade de marcação, deve-se cancelar uma das casas ainda não marcadas, nesse caso o jogador perde o direito de marcar pontos nessa casa pelo resto da partida e quando se jogar em duplas, apenas após cada um realizar sua jogada é que se deve fazer a escolha da melhor marcação no tabuleiro. 24

O jogador também tem a opção de *Pedir Baixo*, e só serão válidas as faces de baixo dos dados, mas essa escolha deverá ser feita antes de se levantar o copo. Lembrando que nenhum dado pode *escapar* do copo antes de este ser retirado da mesa. Neste caso, todos os dados que haviam sido jogados devem ser recolhidos e novamente arremessados.

Se conseguir Fú, Seguida, Quadrada ou General, na primeira tentativa é dito *de Boca* e não há necessidade de realizar as outras duas tentativas e são adicionados 5 pontos ao valor original da casa, por exemplo, se conseguir seguida na primeira tentativa dos 5 dados, chama-se *Seguida de boca* e ao invés de 30 ganha-se 35 pontos.

O jogo termina quando todos os jogadores preencherem suas dez casas no tabuleiro, então, soma-se os pontos e ganha o jogador ou a dupla que obtiver mais pontos.

Como fazer a pontuação



As (face 1): soma das faces de um, que conseguir em três tentativas, de 1 a 5 pontos;

Duque (face 2): soma das faces de dois, que conseguir em três tentativas, de 2 a 10 pontos;

Terno (face 3): soma das faces de três, que conseguir em três tentativas, de 3 a 15 pontos;

Quadra (face 4): soma das faces de quatro, que conseguir em três tentativas, de 4 a 20 pontos;

Quina (face 5): soma das faces de cinco, que conseguir em três tentativas, de 5 a 25 pontos;

Sena (face 6): soma das faces de seis, que conseguir em três tentativas, de 6 a 30 pontos;

Fú: Um grupo de dados com três faces iguais mais outro grupo com duas faces iguais, vale 20 pontos, se for Fú de Boca vale 25 pontos, exemplos (2, 2, 2, 5 e 5) ou (6, 6, 6, 3 e 3); 25

Seguida: Cinco faces diferentes em sequência, vale 30 pontos, e se for Seguida de boca, vale 35 pontos, tem apenas duas possibilidades, (1, 2, 3, 4 e 5) ou (2, 3, 4, 5 e 6);

Quadrada: Um grupo de quatro dados com faces iguais, não importando o valor do quinto dado, vale 40 pontos e se for Quadrada de boca vale 45 pontos, exemplos (2, 2, 2, 2 e 6) ou (5, 5, 5, 5 e 3);

General: Todas as cinco faces iguais, vale 50 pontos, e se for General de boca, 55 pontos, exemplos (1, 1, 1, 1 e 1) ou (6, 6, 6, 6 e 6);

A**NEXO B – Resgate histórico da teoria de probabilidades**

Procuramos realizar um quadro com um resgate histórico da Teoria das Probabilidades a partir das obras e autores que contribuíram para este desenvolvimento. Este estudo se apoiou nos trabalhos de Coutinho (1994; 2007), Oliveira (2010), Silva, I. A. (2002), Pichard (2001) e Henry (s/d)

Salientamos que é apenas um resumo em ordem cronológica da publicação das obras. Para maiores detalhes e aprofundamento, indicamos a leitura dos trabalhos em que nos apoiamos e em especial os de Coutinho, Pichard e Henry que foram feitos a partir dos originais.

Obra/Autor	Descrição
***De Vetula* (1250)** Richard Fournival (1201-1260)	É um poema medieval que, segundo Coutinho (2007, p.57), é o primeiro documento conhecido que mostra o raciocínio combinatório, no qual "descreve um cálculo de combinações referentes ao lançamento de três dados".
***Summa de Arithmetica Geometria Propostioni et Proportionalita* (1494)** Luca Pacioli ou Fra Luca di Borgo (1445-1514)	Esta obra contém o problema "das partes" ou "da repartição"[44] das apostas que é considerado o problema fundador do Cálculo de Probabilidade, pois é este problema que mais tarde Antoine Gambaud, o Chevalier de Méré irá propor a Pascal e dar início a célebre correspondência tida como as bases da moderna Teoria de Probabilidade. (COUTINHO, 2007)
***Sulla Scoperta dei dadi*[45] (1656)** Galileu Galilei (1564-1642)	É um trabalho sobre jogos.
***Liber De Ludo Aleae*[46] (1663)** Girolamo Cardano (1501–1576)	Esta obra é considerada como o marco inicial da Teoria das Probabilidades, buscava permitir a tomada de decisões em problemas de jogos de azar vigentes da época e "encontram-se as primeiras citações sobre as regras da adição e da multiplicação (axioma do condicionamento e da independência) e também sobre a regra que podemos interpretar como a primeira assintótica de uma probabilidade" (COUTINHO, 1994, p. 15)

[44] O enunciado do problema da repetição é: "Uma brigada joga um jogo de Paume, de tal forma que lhes é requisitado um total de 60 pontos para ganhar. Cada etapa conta 10 pontos. O valor apostado é de 10 ducats. Após um incidente qualquer, os soldados não podem terminar o jogo. Um deles tem 50 pontos e o outro 20. Perguntamos qual parte do valor apostado fica para cada um". (PACIOLI, 1494 apud HENRY, 1994 apud COUTINHO, 2007).

[45] Tradução: A descoberta dos dados

[46] Tradução: O livro dos jogos de azar. De acordo com Henry (s/d) a obra de Cardano foi escrita entre 1526 e 1560, mas publicada apenas em 1665 após sua morte.

Correspondência (1654) Blaise Pascal (1623–1662) e Pierre de Fermat (1601-1665)	"A correspondência entre Pascal e Fermat é a fonte de um grande progresso para a conceituação da Probabilidade. (Borovcnik et al., 1991, p. 30). É o primeiro passo para uma mudança de ponto de vista rumo a uma avaliação das chances no domínio teórico. Mas, sobretudo, são os primeiros encaminhamentos que especulam sobre a sequência de um processo aleatório, a imaginar "as partidas inacabadas" segundo os termos de Fermat, afim de melhor enumerar "as chances" de cada jogador. Em sua carta de 29 de julho de 1654, Pascal propõe uma solução ao problema das partidas utilizando um método de recursividade do cálculo da esperança sobre ganhos futuros. Em seguida, ele retoma a solução proposta por Fermat: a enumeração dos casos possíveis e favoráveis, fazendo intervir a hipótese segundo a qual a partida será continuada. Pascal constata que os dois raciocínios conduzem à mesma resposta para determinar a repartição da quantia apostada pelos jogadores. Pascal e Fermat introduzem neste momento a ideia do que deveria se passar se "*existisse a possibilidade da continuação do jogo e se o jogo fosse equilibrado*". (Borovcnik et al., 1991, p. 31). Pascal, em sua carta endereçada à Academia Parisiense no final de 1654, destacará a importância dessa descoberta da "*Geometria do Acaso*"[47], mas não propõe uma definição explícita de probabilidade". (COUTINHO, 2007, p. 59)
***Tratado do Triângulo Aritmético* (1665)[48]** Blaise Pascal (1623–1662)	Neste Tratado Pascal faz "uma exposição das propriedades dos coeficientes binomiais e relações entre eles (a primeira sistemática a ser feita – daí o triângulo estar associado ao nome de Pascal), com alguns princípios de probabilidade. Por exemplo, a soma dos termos da terceira diagonal representa o número de possibilidades no lançamento de três moedas". (SILVA, I. A., 2002, p. 36)
***De raciociinis in ludo aleae*[49] (1657)** Christian Huygens (1629-1695)	Inspirado na leitura das cartas de Pascal e Fermat, Huygens relata suas reflexões nesse Tratado em que retoma a noção de esperança matemática proposta por Pascal introduzindo a explicitamente e permitindo a resolução de muitos problemas conhecidos na época, contribuindo assim no "desenvolvimento da noção de probabilidade: a formalização da noção de *direito de esperar*, expressa também sob o nome de *valor da chance"*. (COUTINHO, 2007, p.60)

[47] De acordo com Coutinho (2007, p. 53) a expressão "a geometria do acaso" que hoje se refere a matemática do acaso, foi proposta por Pascal e significa que podemos raciocinar, especular e fazer cálculos com o acaso, tal como se fazia com a Geometria".
[48] Esse Tratado foi escrito em 1654 e publicado em 1665. (HENRY, s/d).
[49] Tradução: O raciocínio nos jogos de azar.

***La logique ou l'art de penser* (1662)** D'Antoine Arnauld (1612-1695) e Pierre Nicole (1625-16950)	A palavra "Probabilidade" aparece pela primeira vez nesse livro. "*... il ne faut pas seulement considérer le bien et le mal en soi, mais aussi* la probabilité *qu'il arrive ou n'arrive pas, et regarder géométriquement la proportion que toutes ces choses ont ensemble, ce qui peut être éclairci par cet exemple.* *Il y a des jeux où dix personnes mettant chacune un écu, il n'y en a qu'une qui gagne le tout, et toutes les autres perdent ; ainsi chacun des joueurs n'est au hasard que de perdre un écu, et peut en gagner neuf... Ainsi, chacun a pour soi neuf écus à espérer, un écu à perdre, neuf* degrés de probabilité *de perdre un écu, et un seul de gagner les neuf écus ; ce qui met la chose dans une parfaite égalité"*. (HENRY, s/d, p. 10
***Ars Conjectandi* (1713)** Jacob Bernoulli (1654–1705)	Essa obra inicia a definição frequentista, nela Bernoulli "coloca claramente em evidência a dualidade do enfoque deste conceito: razão entre número de casos ou estimativa de seu valor obtida pela observação da frequência experimental". É estimada como a primeira etapa na teorização do Cálculo de Probabilidades. (COUTINHO, 2007, p. 61)
***Doctrine of Chances*[50] (1718)** Abraham De Moivre (1667-1754)	Esta obra é uma expansão de *Philosophical Transactions,* publicado em 1711, possui diversas questões sobre dados, no seu prefácio faz referência a obra dos Bernoulli e contém o princípio, que já aparecia em trabalhos anteriores e diz que a probabilidade de um evento composto é o produto das probabilidades das componentes. (SILVA, I. A., 2002) De acordo com Oliveira (2010, p.19) "demonstra um interesse especial em desenvolver métodos matemáticos e generalizações para a Teoria das Probabilidades. É interessante notar que para De Moivre, a estabilidade da frequência relativa era um ação divina – o homem simplesmente a detectava e estudava".
***Essai d'Arithmética Morale* (1777)** Georges Louis Leclerk, o conde de Buffon (1707-1788)	Buffon introduz a noção de probabilidade geométrica com apresentação do primeiro problema que utiliza "elementos geométricos para o cálculo efetivo das chances em um contexto de jogos de azar", o jogo de *Franc Carreau*[51]. (COUTINHO, 2007, p. 63)
***Croix et Pile* (1784)** Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783)	Neste artigo, extraído da *La Grande Encyclopédie* de D'Alembert, o autor faz um "questionamento sobre a independêncida entre duas jogadas consecutivas de uma moeda", dado muito importante na história do desenvolvimento do estudo das Probabilidades. (COUTINHO, 1998, p. 18)
***La Doctrine des Chances* (1763)** Thomas Bayes (1702-1761)	Publicada dois anos após sua morte, nesse ensaio Bayes introduz a definição subjetiva. "É uma nova concepção de Probabilidade, matematicamente idêntica à probabilidade da "Geometria do Acaso", que depende da análise do observados e da hipótese de equiprobabilidade por simetria. Os métodos bayesianos têm sua origem na idéia de atribuir uma probabilidade às causas de um evento observado a partir de um valor tomado "a priori" e recalculado em função dessa observação, de onde a classificação de "subjetiva"". (COUTINHO, 1994, p. 18)

[50] Essa obra de De Moivre está disponível em: <http://books.google.com.br/books >. Acesso em: 6 fev. 2011.
[51]"Este jogo consiste em lançar uma moeda sobre um piso ladrilhado com lajotas iguais em uma forma qualquer. Os jogadores apostam sobre a posição final da moeda: ficará ela inteiramente sobre uma única lajota (franc-carreau), ou sobre uma ou mais juntas entre lajotas?" (COUTINHO, 2007, p. 63)

***Essai sur l'Application de l'Analyse à La Probabilité des Decisions Rendues à La Pluralité des Voix* (1785)** Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, o Marquês de Condorcet (1743–1794)	Nesta obra tentou utilizar as técnicas probabilistas para tentar fundar uma Matemática Social. (COUTINHO, 1994) "Ver-se-á quanto, se esta ciência for mais divulgada, mais cultivada, ela contribuirá para a felicidade e para o aperfeiçoamento raça humana". (CARITAT apud COUTINHO, 1994, p. 21)
***Elémens du calcul des probabilités et son application aux jeux de hasard* (1805)** Marie Jean Antoine Nicolas de Caritat, o Marquês de Condorcet (1743–1794)	O primeiro livro destinado à educação. (PICHARD, 2001, p. 53)
Théorie Analytique des Probabilités*[52] *(1812) Pierre-Simon Laplace (1749–1827)	Esta obra reúne e sistematiza boa parte do que já era havia conhecido e traz contribuições de Laplace, da quais, muitas serviram de base para avanços até de outros campos da matemática como a ideia de Função Geradora e a Transformação de Laplace, mas "um dos pontos altos do livro é a aplicação da probabilidade ao método dos quadrados mínimos, justificando a conveniência de seu uso". (SILVA, I. A., 2002, p. 53)
***Essai Philosophique sur les Probabilités* (1814)** Pierre-Simon Laplace (1749–1827)	É nessa obra que a definição clássica foi consolidada como o primeiro princípio: *"A probabilidade de um evento é igual à razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis"*, limitada pela equiprobabilidade. (COUTINHO, 2007, p. 61). Laplace retoma e desenvolve todos os resultados de seus predecessores, fornecendo uma definição de base.
***Traité élémentaire du calcul des probabilités* (1816)** Sylvestre Lacroix (1765-1840)	Este livro explica vários tópicos de probabilidade e segundo Pichard (2001, p. 53), Lacroix foi o primeiro a ensinar a teoria da probabilidade.
Wilard Gibbs (1839-1903)	As hipóteses formuladas por Gibbs para explicar o movimento molecular dos gases lançaram as bases da Teoria da Probabilidade no século XX. (SILVA, I. A., 2002)
1906 Andrei Andreywitch Markov (1856-1922)	Apresenta uma moderna teoria de base probabilista conhecida como Modelos de Markov que representam uma ferramenta para análise de sistemas complexos que contenham probabilidades de determinados eventos ocorrerem, baseadas em observações e estados anteriores". (SILVA, I. A., 2002, p. 42)
***Leçons sur l'intégration et la recherché des fonctions primitives* (1904)** Henri Lebesgue (1875-194**1**) (1901)	"Elabora uma Teoria de Integração fundamentada pela Teoria das Medidas de Borel, colocou a Análise Matemática em uma perspectiva revolucionária, mesmo que Lebesgue não tenha desenvolvido suas consequências e aplicações à Teoria das Probabilidades". (COUTINHO, 1994, p. 24-25)
Cálculo de Probabilidades (1912) Jules Henri Poincaré (1854-1912)	"Deu ao conceito de acaso um enfoque moderno, ligando-o à complexidade dos fenômenos observados, sem contudo, tentar mudar os instrumentos fundamentais do Cálculo das Probabilidade". (COUTINHO, 1994, p. 23) O determinismo de Laplace fica evidenciado pela citação de Poincaré (1987 apud COUTINHO, 1994, p. 23) "Se um cone repousa sobre sua ponta, nós sabemos que ele vai tombar, mas não sabemos para que lado; nos parece que somente o acaso vai decidir".

[52] Tradução: Teoria Analítica da Probabilidade

***Le Hasard*[53] (1914)** Émile Borel (1871-1956)	Nesta obra forneceu uma das primeiras contribuições à axiomatização do Cálculo das Probabilidades e outras, "retoma numerosas considerações epistemológicas sobre a noção de Probabilidade, assim como discorre sobre inúmeras aplicações" (COUTINHO, 1994, p. 24)
Artigo (1919) Von Mises (1883-1953)	Von Mises publicou a sua teoria em um artigo em 1919 e mais fundamentalmente no seu livro "Probability, Statistics and Truth", publicado em 1928. A Teoria de Von Mises "aproxima a noção de probabilidade à freqüência experimental, dentro de sua teoria dedutiva, e supõe essencialmente a probabilidade defendida como limite de frequências". Podemos observar que existe uma relação bastante próxima dos trabalhos de Bernoulli e Von Mises, a probabilidade sob o ponto de vista frequentista, porém Mises se apropria dos recentes termos e conceitos do cálculo para defini-la. (COUTINHO, 1994, p. 24)
***A Treatise on Probability* (1921)** John Maynard Keynes (1883-1946)	Em uma análise deste livro, Borel resume estas concepções e publica em Revue de Philosophie (COUTINHO, 1994). Vale destacar que Keynes e Borel trabalharam com Probabilidade Subjetiva.
***Foundations of Theory of Probability* (1933)** Andrei Kolmogorov (1903-1987)	"Kolmogorov dá um apresentação axiomática à Teoria das Probabilidades, colocando-a o quadro da Teoria dos Conjuntos e tornando-a mais clara em suas limitações". (COUTINHO, 1994, p. 25)

Quadro 5: Resgate histórico da Teoria das Probabilidades.

[53] Tradução: O Acaso.

ANEXO C – Principais orientações dos PCN para os 2^0, 3^0 E 4^0 ciclos

Segundo Ciclo	Terceiro Ciclo	Quarto Ciclo
Objetivos de Matemática: • Recolher dados e informações, elaborar formas para organizá-los e expressá-los, interpretar dados apresentados sob forma de tabelas e gráficos e valorizar essa linguagem como forma de comunicação. • Utilizar diferentes registros gráficos — desenhos, esquemas, escritas numéricas — como recurso para expressar idéias, ajudar a descobrir formas de resolução e comunicar estratégias e resultados. • Identificar características de acontecimentos previsíveis ou aleatórios a partir de situações-problema, utilizando recursos estatísticos e probabilísticos. • Demonstrar interesse para investigar, explorar e interpretar, em diferentes contextos do cotidiano e de outras áreas do conhecimento, os conceitos e procedimentos matemáticos abordados neste ciclo. • Vivenciar processos de resolução de problemas, percebendo que para resolvê-los é preciso compreender, propor e executar um plano de solução, verificar e comunicar a resposta (BRASIL, 1997, p.57)	**Objetivos de Matemática**: Da competência métrica, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: • ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns dos problemas históricos que motivaram sua construção; • resolver problemas que envolvam diferentes grandezas, selecionando unidades de medida e instrumentos adequados à precisão requerida. Do raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: • observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade. Do raciocínio combinatório, estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: • coletar, organizar e analisar informações, construir e interpretar tabelas e gráficos, formular argumentos	**Objetivos de Matemática**: Da competência métrica, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: • ampliar e construir noções de medida, pelo estudo de diferentes grandezas, utilizando dígitos significativos para representar as medidas, efetuar cálculos e aproximar resultados de acordo com o grau de precisão desejável; • obter e utilizar fórmulas para cálculo da área de superfícies planas e para cálculo de volumes de sólidos geométricos (prismas retos e composições desses prismas). Do raciocínio proporcional, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: • representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional; • resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três. Do raciocínio estatístico e probabilístico, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a: • construir tabelas de freqüência e

	convincentes, tendo por base a análise de dados organizados em representações matemáticas diversas; • resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão. (BRASIL, 1998, p. 64-65)	representar graficamente dados estatísticos, utilizando diferentes recursos, bem como elaborar conclusões a partir da leitura, análise, interpretação de informações apresentadas em tabelas e gráficos; • construir um espaço amostral de eventos equiprováveis utilizando o princípio multiplicativo ou simulações, para estimar a probabilidade de sucesso de um dos eventos. (BRASIL, 1998, p. 81-82)
Conteúdos de Matemática: Lendo e interpretando dados apresentados em tabelas e gráficos, os alunos percebem que eles permitem estabelecer relações entre acontecimentos e, em alguns casos, fazer previsões. Também, ao observarem a frequência de ocorrência de um acontecimento, ao longo de um grande número de experiências, desenvolvem suas primeiras noções de probabilidade. (BRASIL, 1997, p. 58)	**Conteúdos de Matemática:** Neste ciclo, também amplia-se a exploração das possibilidades de quantificar o incerto. Com as noções elementares de probabilidade os alunos aprenderão a determinar as chances de ocorrência de alguns eventos (moedas, dados, cartas). Assim, poderão ir se familiarizando com o modo como a Matemática é usada para fazer previsões e perceber a importância da probabilidade na vida cotidiana. (BRASIL, 1998, p. 70)	**Conteúdos de Matemática:** O estudo da probabilidade tem por finalidade fazer com que os alunos percebam que por meio de experimentações e simulações podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático. Para tanto, terão de construir o espaço amostral como referência para estimar a probabilidade de sucesso, utilizando-se de uma razão. (BRASIL, 1998, p. 86)
Conteúdos conceituais e procedimentais: • Interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos. • Exploração da idéia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de “sorte. • Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades. • Identificação das possíveis maneiras de combinar elementos	**Conceitos e procedimentos:** • Representação e contagem dos casos possíveis em situações combinatórias. • Construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão. (BRASIL, 1998, p. 74-75)	**Conceitos e procedimentos:** • Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão. • Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas. (BRASIL, 1998, p. 90)

de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais. (BRASIL, 1997, p. 61-62)		
Critério de avaliação: Recolher dados sobre fatos e fenômenos do cotidiano, utilizando procedimentos de organização, e expressar o resultado utilizando tabelas e gráficos Espera-se que o aluno saiba coletar, organizar e registrar informações por meio de tabelas e gráficos, interpretando essas formas de registro para fazer previsões. (BRASIL, 1997, p.64)	**Critério de avaliação:** Resolver problemas de contagem e indicar as possibilidades de sucesso de um evento por meio de uma razão. Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de resolver problemas de contagem com quantidades que possibilitem obter o número de agrupamentos, utilizando procedimentos diversos, como a construção de diagrama de árvore, tabelas etc., sem o uso de fórmulas. Verifica, também, se o aluno é capaz de indicar a probabilidade de sucesso de um evento por meio de uma razão, construindo um espaço amostral em situações como o lançamento de dados, moedas etc. (BRASIL, 1998, p. 77)	**Critérios de avaliação:** Resolver problemas de contagem e indicar as possibilidades de sucesso de um evento por meio de uma razão. Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de resolver problemas de contagem utilizando procedimentos diversos, inclusive o princípio multiplicativo e de construir o espaço amostral de eventos equiprováveis, indicando a probabilidade de um evento por meio de uma razão. (BRASIL, 1998, p. 93)

ANEXO D

ANEXO E

ANEXO F - FICHA 3: EXPERIMENTOS ALEATÓRIOS