UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

MAXLEI VINÍCIUS CÂNDIDO DE FREITAS

UM ESTUDO SOBRE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM QUATRO COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

CAMPO GRANDE – MS
2015

MAXLEI VINÍCIUS CÂNDIDO DE FREITAS

UM ESTUDO SOBRE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM QUATRO COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Marilena Bittar.

CAMPO GRANDE – MS

2015

MAXLEI VINÍCIUS CÂNDIDO DE FREITAS

UM ESTUDO SOBRE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS EM QUATRO COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção título de Mestre em Educação Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Marilena Bittar.

Campo Grande – MS, 20 de fevereiro de 2015.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Profa. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter dado-me forças em momentos nos quais pensei em desistir.

À minha mãe Elza e ao meu pai Mario, por serem simplesmente a razão do meu viver. Sem eles nada em minha vida teria sentido.

À professora Marilena, pela paciência e carinho durante esses dois anos de mestrado. Sinto-me muito lisonjeado por tê-la como orientadora e principalmente amiga.

A Elane, pela atenção carinho e amor quando mais precisei.

Aos meus amigos Renan, Tatiani e Mauro por terem me aguentado e principalmente me ajudado durante todo esse tempo. Obrigado por fazerem parte da minha vida.

Aos amigos que o conheci graças ao PPGEduMat: Marcia, Darlysson,Vanessa, Mirian, Júlio, Jonas, Juliana, Viviane, Marcos, Neiva, Deyse e Rogério. Obrigado ao tempo de convivência que passamos juntos.

À Danielly Kaspary, por ter me ajudado mesmo quando não podia.

À banca examinadora pela leitura e contribuições. Professor Pitombeira e professora Paula é uma hora poder contar com o olhar de vocês nessa pesquisa.

À Capes, pelo apoio financeiro, que possibilitou a minha dedicação exclusiva com as diversas atividades do mestrado.

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo caracterizar o ensino de volume de sólidos geométricos em livros didáticos do ensino médio aprovados pelo PNLD/2012. Para tanto, foram escolhidas as quatro coleções mais adotadas pelas escolas públicas brasileiras, em especial aos capítulos que priorizam o estudo do conteúdo em questão, entretanto, dando mais ênfase à coleção mais adotada. A análise foi realizada sob a ótica da organização praxeológica, tomando como referencial teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático, o que nos permitiu identificar e analisar os conceitos, procedimentos e algoritmos do ensino investigados. Os resultados deste estudo evidenciaram, entre outras características, a valorização pelo ensino e prática de técnicas de resolução, a construção do bloco tecnológico-teórico, visto que todos os capítulos iniciam-se com a demonstração da fórmula do volume de um sólido conhecido, a institucionalização dos algoritmos usuais nos cálculos de volume, e a relação entre os sólidos trabalhados em um capítulo com outros já abordados. No que tange o princípio de Cavalieri, foi observado que essa ferramenta, apesar de ser tomada como ponto de partida para a construção das fórmulas de volume nas quatro coleções, nem sempre é abordada de maneira correta.

Palavras-chave: Sólidos Geométricos. Organização Matemática e Organização Didática. Livros Didáticos. Princípio de Cavalieri.

ABSTRACT

The present research aims to define the teaching of geometric solid volume in high school textbooks approved by PNLD/2012. Therefore, it were chosen the four most used collections in Brazilian public schools, especially the chapters that focus on the content approached here, but giving particular emphasis to the most adopted collection. This investigation was conducted over a praxeological view, taking as theoretical and methodological referential the Anthropological Theory of Didactic, which provides opportunities to identify and analyze the concepts, procedures and algorithms of the analyzed teaching. The results showed appreciation for teaching and practice of resolution technique as well the technology-theoretical block construction, since all chapters begin with demonstration of the volume formula of a known solid, the institutionalization of the usual algorithms in volume calculations and relationship between the solid worked in a chapter with others already addressed. Regarding to Cavalieri's principle, it was observed that this tool, despite of being taken by the four collection already mentioned as starting point for the construction of the volume formulas, it is not always correctly addressed.

Key-words: Geometric solids. Mathematical Organization and Didactic Organization. Textbooks. Cavalieri's Principle.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CIEM	Congresso Internacional de Ensino da Matemática
ANPED	Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação
ENDIPE	Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino
ENPEC	Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências
EBRAPEM	Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática
ENEM	Encontro Nacional de Educação Matemática
Espmat	Especialização Matemática
MEC	Ministério da Educação
OCN	Orientações Curriculares Nacionais
PCN	Parâmetros Curriculares Nacionais
P.G.	Progressões Geométricas
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UFRGS	Universidade Federal do Rio Grande do Sul
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No ensino fundamental os conceitos geométricos são abordados no eixo espaço e forma. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997), do ensino fundamental, é nesse nível de ensino que a criança começa a construir a ideia de espaço. A localização é apontada como um dos fatores fundamentais para essa construção e necessariamente leva em consideração a orientação, mesmo que inicialmente. Ao se orientar no espaço a criança toma como ponto de partida seu próprio corpo, ou seja, "o conhecimento do corpo procede do conhecimento do espaço e, ao mesmo tempo, o torna possível." (BRASIL, 1997, p. 82). Portanto, a criança tem no corpo a referência para a localização de objetos e, conforme vai se deslocando e explorando determinados ambientes, vai criando coordenadas espaciais, assim como relações entre os mesmos.

Esses objetos que estão presentes no espaço possibilitam um trabalho importante de exploração e construção das formas levando a criança a perceber semelhanças e diferenças entre elas, como também a reconhecer figuras tridimensionais (paralelepípedos, prismas, cilindros, pirâmides, cones, esferas, etc.) e bidimensionais (como quadrados, retângulos, círculos, triângulos, pentágonos, etc.), assim como a identificação de suas propriedades.

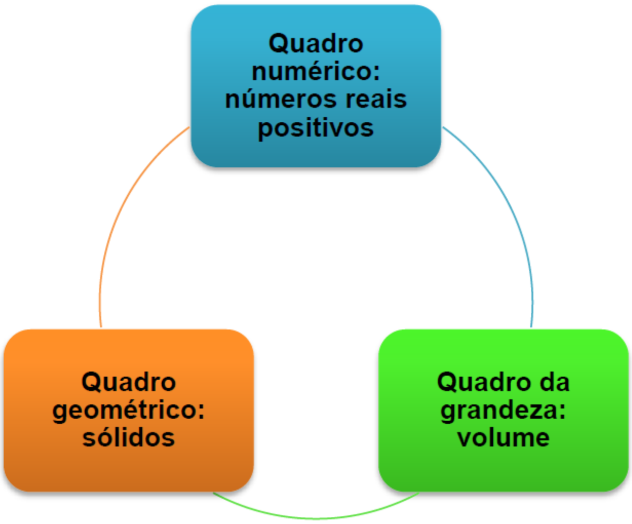
Segundo os PCN do ensino fundamental, para uma melhor compreensão de conceitos relativos ao espaço e às formas é indicado o trabalho com atividades em que as noções de grandezas e medidas são exploradas. Dessa forma, as diversas situações cotidianas, envolvendo grandezas diversas, presenciadas pela criança a leva estabelecer determinadas comparações, isto é, a medi-las. Por exemplo, o professor poderá propor aos alunos verificar se a área da sala de aula é menor, igual ou maior que a área da sala de tecnologia.

Nesse caso, percebemos que o estudo das grandezas e medidas está estreitamente ligado ao estudo do espaço e formas (campo geométrico), pois quando propomos ao aluno calcular a área de uma região retangular, por exemplo, estamos trabalhando, mesmo que implicitamente, conceitos geométricos (o retângulo é um paralelogramo em que os quatro ângulos são congruentes (retos) e seus lados opostos são congruentes e paralelos) e conceitos de grandezas e medidas (a área da figura, o comprimento dos lados da figura, as unidades de medidas utilizadas, dentre outros.).

De acordo com os PCN (do ensino fundamental e médio), no ensino fundamental as grandezas, em especial as geométricas (comprimento, área, volume e ângulo), são abordadas dentro do eixo grandezas e medidas, diferentemente do ensino médio onde tal tema encontra-se no eixo intitulado geometria e medidas. Talvez a opção de abordar, no ensino médio, essas grandezas dentro do eixo citado deve-se justamente ao fato de o mesmo estar associado a determinados conceitos geométricos.

Essa divergência apresentada pelos documentos oficiais (PCN do ensino fundamental e médio), em relação ao campo de abordagem das grandezas geométricas, vem sendo tema de estudos em pesquisas recentes, como Morais (2013), que têm defendido a abordagem de comprimento, área, volume e ângulo no campo das grandezas e não da geometria. De acordo com o autor, o ensino dos referidos conceitos na perspectiva de grandeza consiste na distinção/articulação de três quadros[1]: o geométrico; o numérico; e a grandeza. Esse modelo, segundo Morais (2013), foi desenvolvido por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989) para a construção do conceito de área. Esse modelo também pode ser representado graficamente, conforme observamos na figura 1 a seguir:

Figura 1: Representação gráfica do modelo didático de quadros adaptado para volume.



Fonte: Morais (2013)

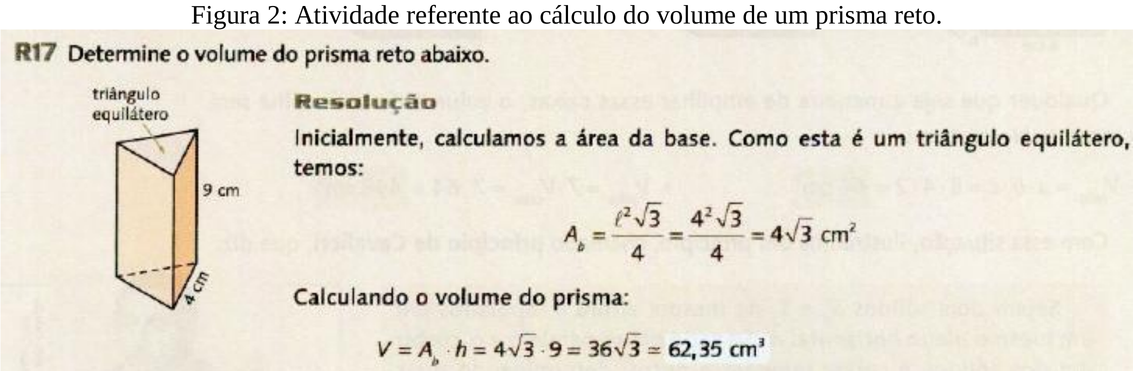
Na figura anterior, Morais (2013) faz uma adaptação do modelo citado para o estudo da grandeza volume. De acordo com o autor, o quadro geométrico refere-se às figuras geométricas espaciais, como paralelepípedos, cones e pirâmides. Já o quadro numérico é constituído pelos números reais positivos como 6, π ou 9,7. Por fim, o quadro das grandezas é composto de classes de equivalência de sólidos de mesmo volume, podendo estas serem

[1] De acordo com Morais (2013, p. 32), a noção de quadro é parte da Teoria de Jogos de Quadros e Dialética Instrumento Objeto proposta por Douady (1989), a qual foi o marco teórico da pesquisa supracitada sobre a aprendizagem da área como grandeza. No âmbito dessa teoria, intervém na constituição de um quadro os objetos de um ramo da Matemática, as relações entre esses objetos, as diferentes maneiras de representar esses objetos e relações bem como as imagens mentais que os sujeitos associam num dado momento, a esses objetos e relações.

representadas pelo par número/unidade de medida como 4cm³, 5,5m³, 50L, etc. Para Morais (2013) esses quadros são independentes, ou seja, podem ser distinguidos/articulados, pois sólidos diferentes podem ter mesmo volume e mudança na unidade de medida provoca mudança nos valores numéricos sem alterar a grandeza. Logo, as atividades voltadas ao estudo de tal grandeza devem favorecer tanto a passagem de um quadro para o outro, como a dissociação/articulação entre os mesmos.

Assim como Morais (2013), nosso interesse nessa pesquisa está voltado para o estudo da grandeza volume. No entanto, não temos a intenção de estudar tal tema em algum campo específico, isto é, no campo geométrico ou no campo das grandezas e medidas. Entendemos que quando estudamos a conceitualização de volume estamos, necessariamente, percorrendo esses dois campos ao mesmo tempo. Por exemplo, ao calcular o volume de um prisma reto, aplicando a fórmula, mobilizamos, mesmo que implicitamente, conceitos situados em ambos os campos, conforme observamos na figura 2 a seguir:

Figura 2: Atividade referente ao cálculo do volume de um prisma reto.



R17 **Determine o volume do prisma reto abaixo.**

Resolução

Inicialmente, calculamos a área da base. Como esta é um triângulo equilátero, temos:

$$A_b = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}\ \text{cm}^2$$

Calculando o volume do prisma:

$$V = A_b \cdot h = 4\sqrt{3} \cdot 9 = 36\sqrt{3} \simeq 62{,}35\ \text{cm}^3$$

Fonte: Coleção – Matemática: Ciência, Linguagem e Tecnologia – 3º ano do ensino médio, p 100.

Nesse exemplo, ao se referir ao prisma, a atividade está percorrendo, inicialmente, o campo geométrico, pois se trata de um sólido que possui conceitos e propriedades (o prisma é formado por duas faces (bases) poligonais, inferior e superior, paralelas e congruentes, cujas faces laterais são paralelogramos) situadas nesse campo. Posteriormente, com a necessidade de se encontrar a área da base do prisma, o campo das grandezas e medidas é percorrido. Entretanto, para que tal grandeza seja determinada é necessário conhecermos alguns conceitos e propriedades dessa figura geométrica, triângulo equilátero, ou seja, novamente o campo geométrico é retomado. Por fim, ao substituirmos as medidas, dadas e encontradas, na fórmula, o volume é determinado, isto é, novamente o campo das grandezas e medidas é percorrido.

Dessa forma, acreditamos que ao calcular o volume de um determinado sólido estamos percorrendo, simultaneamente, tanto o campo geométrico como o campo das grandezas e medidas. Por esse motivo, não achamos pertinente, em nosso estudo, situar os conceitos de volume em apenas um desses campos.

Nossa escolha pelo estudo sobre volume de sólidos geométricos em livros didáticos originou-se, primeiramente, devido a grande relevância do tema, ao longo da história, para a sociedade. De acordo com a história da matemática, (EVES, 2004), a construção da pirâmide de Gizé, por volta de 2.600 a. C, já envolvia alguns problemas matemáticos, em especial, o cálculo de volume de sólidos. No entanto, apesar de estarem presentes nas atividades cotidianas de nossos antepassados, os conteúdos matemáticos que envolvem o cálculo de área e volume não recebem o mesmo destaque que os demais. Segundo Lima (2011), o ensino desses conteúdos, quando ocorre, ainda é apresentado de maneira muito superficial, desligada da realidade.

Outro fator motivador que nos instigou a estudar tal tema emergiu da minha[2] experiência acadêmica, quando tive a oportunidade de lecionar como professor substituto em algumas escolas do município de Cassilândia - MS. Entre uma substituição e outra, o conteúdo de volume dos sólidos geométricos me chamou a atenção devido ao modo como o livro didático abordava tal tema. O livro em questão trazia as fórmulas para encontrar o volume dos sólidos tendo como principal objetivo sua aplicação. Esse fato é comum em muitos livros didáticos, conforme afirma Morais (2013, p. 9): "[...] constatou-se que a abordagem de volume é predominantemente pautada na determinação e na aplicabilidade da fórmula, pois todas as sessões sobre volume, exceto a do bloco retangular, inicia-se a partir da construção dessa ferramenta".

Uma inquietação que surgiu nesse processo foi que para resolver as atividades sobre volume de sólidos geométricos bastava aplicar a fórmula correspondente a cada situação, ou seja, para que os alunos conseguissem responder as questões, só era necessário decorar as fórmulas, as quais eram apresentadas no livro. Nesse caso, os alunos ficam "presos" às fórmulas e não conseguem, em sua maioria,

> [...] relacionar conceitos, identificar os elementos do sólido ou ainda estabelecer relação entre dois sólidos, isto se deve muitas vezes a deficiências de conceitos básicos da geometria plana e também as dificuldades conceituais dos próprios professores em conceitos básicos da geometria plana e mesmo da geometria espacial. (COSTA; LIMA, 2010, p. 34).

---

[2] Relato de minha experiência acadêmica

Os livros didáticos ao darem ênfase às atividades que envolvem basicamente a memorização e aplicação de fórmulas, podem não possibilitar o desenvolvimento de determinadas habilidades, como visualização e argumentação lógica. Esse fato vem ao encontro do pensamento de Pais (2001), ao afirmar que no ensino de matemática o que se valoriza é o excesso de memorização de fórmulas, regras e definições, ao invés de conceitos significativos para o aluno.

Esses fatos vêm despertando o interesse de pesquisadores (COSTA; LIMA, 2010) em analisar livros didáticos devido à importância de se ter uma obra clara e objetiva, que não contenha erros, e que não seja mal redigida, para que não gerem ambiguidade e deixem margem a dúvida, o que, ao nosso ver, quando ocorre, dificulta a assimilação do conteúdo, necessitando assim, de maior atenção do professor para evitar que o material didático mal elaborado comprometa a aprendizagem dos alunos.

Assim, devido a grande relevância do estudo de volume dos sólidos ao longo da história e na atualidade, além da importância que o livro didático tem para o docente e, partindo-se do pressuposto que este tem um papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, decidimos realizar essa pesquisa com a intenção de responder a seguinte questão: *Como é proposto o ensino de volume de sólidos geométricos em livros didáticos no ensino médio?*

Na busca por respostas para nossa questão de pesquisa tomamos como referencial teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard (1999), a qual nos possibilita analisar os aspectos matemáticos e didáticos do ensino investigado. Ao longo dos últimos anos, muitos pesquisadores, como Cruz (2005), Oliveira (2010) e Kaspary (2014), vêm desenvolvendo estudos sob a ótica dessa teoria.

Cruz (2005) desenvolveu uma pesquisa tendo como objetivo investigar como a noção de variável é tratada em livros didáticos nas séries finais do ensino fundamental (3º e 4º ciclos). Para isso, a autora analisou quatro coleções de livros didáticos focando três aspectos: a relação entre os PCN e as coleções analisadas; as abordagens utilizadas para introduzir e desenvolver a álgebra nos livros didáticos; e os diferentes usos das letras de acordo com o estudo realizado por Usiskin (1995). As análises dos livros didáticos se deram sob a ótica da organização praxeológica[3], dentro do quadro teórico da TAD.

[3] Para Cruz (2005, p. 28) “A organização praxeológica é formada por um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas para um tipo de tarefas.”.

Oliveira (2010) investigou a relação existente entre os conhecimentos adquiridos na formação inicial e aqueles mobilizados durante a prática pedagógica por um professor de matemática em início de carreira. Para tanto, a autora levou em consideração as vertentes da base de Conhecimentos para o ensino, desenvolvidas por Shulman (1986), que estão relacionadas ao conhecimento: de conteúdo do objeto de estudo; pedagógico do objeto de estudo; e curricular. Oliveira escolheu, como tema de investigação, funções por ser um dos conteúdos fundamentais na aprendizagem da matemática. A autora se apoiou na TAD, por meio da análise das organizações matemáticas e didáticas, para modelar as atividades matemáticas desenvolvidas pelo docente, assim como o livro didático utilizado pelo mesmo, mais especificamente do capítulo que aborda o tema função.

Kaspary (2014) investigou o ensino das operações de adição e subtração dos números naturais em uma coleção de livros didáticos aprovada pelo PNLD/2013. Para isso, ela analisou a coleção mais adotada no país, que contempla os cinco primeiros anos escolares, tendo em vista que são nesses anos que tal conteúdo é abordado. Sob a ótica da TAD, a autora identificou e analisou algoritmos, conceitos e procedimentos presentes na coleção, em relação às operações de adição e subtração de números naturais, e também investigou as abordagens propostas por esses livros para o ensino desse conteúdo.

Percebemos que a TAD e, em particular, as noções de organização matemática e didática têm sido utilizadas com sucesso em pesquisas que analisam as práticas docentes e principalmente os livros didáticos. Dessa forma, buscamos, no decorrer desse estudo, discutir mais profundamente alguns dos conceitos dessa teoria, tendo em vista a importância que a mesma tem para o desenvolvimento da nossa pesquisa, assim como para os autores supracitados.

Em relação à apresentação do trabalho:

No primeiro capítulo apresentamos algumas considerações sobre o ensino e aprendizagem de volume destacando, principalmente, a forma que esse tem sido abordado por professores e/ou livros didáticos. Apresentamos ainda, breves considerações sobre o PNLD, o livro didático e os documentos oficiais considerações referentes aos livros didáticos trazendo discussões a respeito da importância desse material didático para alunos, professores e pesquisadores. Além disso, discutimos um pouco sobre as Orientações Curriculares Nacionais (OCN) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), apontando algumas particularidades desses documentos oficiais, em especial, suas propostas para o ensino de geometria espacial. Por fim, apresentamos a revisão de literatura destacando o trabalho desenvolvido por Morais (2013).

No segundo capítulo apresentamos, inicialmente, as demonstrações das fórmulas do cálculo do volume de sólidos geométricos seguida dos nossos objetivos de pesquisa e alguns conceitos da Teoria Antropológica do Didático que se fazem presentes em nossa investigação, assim como os procedimentos de análise dos dados e a descrição das coleções analisadas. Já no terceiro capítulo, descrevemos e analisamos os dados coletados. Nele, apresentamos a relação dos tipos de tarefas e técnicas identificadas nas quatro coleções mais adotadas pelas escolas públicas brasileiras e o estudo da organização matemática e da organização didática da coleção mais adotada.

Por fim, trazemos algumas considerações a respeito dos resultados encontrados, retomando nossa questão de pesquisa.

CAPÍTULO I - O ENSINO DE VOLUME NA EDUCAÇÃO BÁSICA

1.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE O ENSINO E APRENDIZAGEM DE VOLUME

O tema volume tem sido alvo de discussões de vários pesquisadores (MORAIS; BELLEMAIN, 2010; MORAIS, 2013; LIMA et al., 2003) nos últimos anos e os principais motivos têm sido: a maneira inadequada de sua abordagem; a dificuldade em relação aos conceitos envolvendo o tema; e a utilização incorreta do princípio de Cavalieri, conforme destaca Lima et al. (2003, p. 81):

> Nos livros didáticos brasileiros, este assunto é apresentado, em geral, de forma bastante insatisfatória. Muitos sequer dizem o que significa calcular um volume e vários chutam, sem dó nem piedade, todas as fórmulas. Alguns citam o princípio de Cavalieri, mas não o utilizam corretamente, e outros nem isto fazem. O importantíssimo conceito de semelhança não é abordado por nenhum deles e, por consequência, a teoria presente nesses livros é quase ininteligível.

Essa afirmação vem ao encontro com o pensamento de Carvalho (1999) para quem é imprescindível que os conteúdos apresentados nos livros didáticos de matemática apresentem estratégias de ensino que favoreçam a compreensão de propriedades e conceitos, em especial os de volumes. Tal afirmação se torna ainda mais crítica, tendo em vista que muitos professores ainda veem no livro didático o melhor caminho, quando não o único, para ministrar suas aulas.

Preocupados com essa situação, alguns autores, como Lima et. al (2003), vêm propondo abordagens diferentes, daquelas focadas na aplicação de fórmulas, para tornar o ensino e aprendizagem de áreas, semelhanças e volumes, mais dinâmico. Na obra intitulada: Temas e Problemas, no seu quinto capítulo, Lima et al. (2003) apresenta algumas sugestões de atividades para introdução do conceito de volume.

> Para introduzir o conceito de volume, o professor deve, antes de qualquer tentativa de uma definição formal, apresentar uma ideia intuitiva e fornecer diversos exemplos para que os alunos possam compreender do que vai se falar. E qual é a primeira coisa que devemos dizer? Não nos ocorre nenhuma outra frase melhor que a seguinte: Volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupada. (LIMA et al., 2003, p. 73).

Essa ideia, segundo os autores, pode proporcionar inúmeras comparações provocativas, por exemplo: “Dadas duas caixas, qual delas tem maior volume? Quem tem maior volume: Maria ou Pedro? Observando uma panela pequena e uma garrafa, que objeto parece ter maior volume? Uma bola de futebol ou uma caixa de sapatos?”. (LIMA et al., 2003, p. 73). Nesse caso, as comparações surgem como meio para estimular o raciocínio, a visualização, a argumentação, além de motivar a construção de ideias na busca por possíveis respostas a essas perguntas. No entanto, apesar de algumas comparações parecerem muito óbvias outras podem não ser tão simples assim.

> [...] No caso da panela e da garrafa, pode-se encher a garrafa com água e despejar dentro da panela. Para comparar volumes de objetos impermeáveis podemos mergulhá-los, um de cada vez, em um reservatório contendo água até o bordo e comparar a quantidade de água que transbordou. Se tivermos um reservatório cilíndrico de vidro, podemos colar em sua parede uma escala de nossa escolha e, com ela medir volumes de pequenos objetos impermeáveis, como uma pedra de formato irregular, por exemplo. (LIMA et al., 2003, p. 73).

Notamos que a comparação da panela com a garrafa é mais perceptível para o aluno, do que a comparação entre dois objetos impermeáveis. No primeiro caso, após despejar a água, colocada dentro da garrafa, na panela já será possível concluir se possuem volumes iguais ou diferentes, já no segundo caso além de mergulhar cada objeto separadamente, ainda é preciso verificar qual foi o volume de água transbordado após cada imersão para então estabelecer o volume dos objetos. Se a comparação for entre dois objetos muito pequenos essa verificação não será tão “palpável” ao aluno, pois será necessário a ele o conhecimento de determinados conceitos e métodos para que o cálculo desses volumes seja realizado.

Para Lima et al. (2003) esse tipo de experiência pode até ser um fator motivador para o estudo de volumes, assim como ter, eventualmente, alguma utilidade prática, no entanto na maioria dos problemas a serem enfrentados é totalmente inútil.

> Por exemplo, o mestre de obras precisa saber o volume de concreto que será utilizado na construção das colunas, vigas e lajes de um edifício. A forma e as dimensões de cada um destes objetos estão na planta e o cálculo do volume deve ser feito antes que o edifício exista. Alguns objetos são pequenos demais, ou grandes demais, ou são inacessíveis ou, simplesmente, não existem concretamente. Sentimos então a necessidade de obter métodos para o cálculo de volumes, pelo menos de objetos simples, conhecendo sua forma e suas dimensões. (LIMA et al., 2003, p. 73-74).

Para os autores, a ideia inicial é medir o volume de objetos comparando-os com uma determinada unidade de medida. Tradicionalmente, a unidade de medida utilizada é o cubo, cuja aresta mede uma unidade de comprimento, o qual denominamos de cubo unitário. Assim, o volume de um objeto deve ser um número que exprima quantos cubos unitários esse objeto pode conter. O volume de um bloco retangular, por exemplo, poderá ser determinado de maneira satisfatória quando o comparamos a um cubo unitário, ou seja, seu volume é dado pelo número que expressa a quantidade de vezes que esse bloco contém o cubo unitário.

No entanto, as dificuldades começam a surgir quando a comparação é realizada entre um objeto irregular, como uma panela, e esse cubo. Como comparar a panela e o cubo? E se fosse uma esfera? Provavelmente não teríamos respostas para essas perguntas, entretanto não podemos negar que a ideia de comparação sugerida por Lima et al. (2003) é totalmente viável para determinar, com precisão, o volume de um paralelepípedo retângulo, ou simplesmente, um bloco retangular.

Diante dessas situações, percebemos a necessidade de apresentar ao aluno, alternativas e métodos que o ajude calcular o volume de outros objetos, como esferas e cones. Porém, não podemos deixar de observar o nível de ensino que estamos trabalhando. No ensino médio, nosso foco de estudo, a maneira mais interessante para se abordar o cálculo de volumes é por meio do princípio de Cavalieri, cuja apresentação faremos no decorrer deste trabalho. Para Primo (2013, p. 25), esse princípio é "[...] bem intuitivo e aceitável por parte dos alunos, sendo que sua aplicação é consideravelmente simples e nos permite reduzir os argumentos necessários para a dedução de fórmulas, que expressam o volume de alguns sólidos.". No entanto, cabe destacar que a compreensão desse princípio exige conhecimentos elementares da matemática.

Segundo Primo (2013) é improvável que o aluno consiga compreender o princípio de Cavalieri sem conhecer as definições e classificações de sólidos como: prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Além disso, o autor deixa claro que é fundamental que o aluno tenha alguns conhecimentos de geometria plana, tais como: propriedades dos triângulos e classificação; figuras semelhantes; cálculo de área de figuras planas; o teorema de Pitágoras; e o teorema de Thales.

Dessa forma, para se apropriar dos conceitos e propriedades destacados por Primo (2013) é fundamental que o aluno tenha algum conhecimento sobre os sólidos geométricos. Para isso, é necessário que haja uma articulação entre "[...] o conteúdo estruturante de geometria plana e o conteúdo estruturante de grandezas e medidas, uma vez que o inter-relacionamento entre estes conteúdos se faz necessário à compreensão e domínio dos cálculos de áreas e volumes dos sólidos geométricos." (RAMOS; SILVA, 2012, p. 11). Assim, para o aluno progredir de um nível para outro, em relação à compreensão de conceitos, é extremamente importante que identifique algumas articulações entre os próprios conteúdos matemáticos.

No entanto, não podemos deixar de ressaltar que entre as maiores dificuldades apresentadas por professores de matemática durante suas aulas estão justamente na articulação e transição dos conteúdos matemáticos. De acordo com Peres (2010), muitos professores não conseguem ensinar, por exemplo, as figuras tridimensionais em materiais bidimensionais, como em quadro-negro ou mesmo nos livros didáticos. Esse fato reflete diretamente na aprendizagem dos alunos causando assim grandes problemas na formação dos conceitos geométricos.

Enfim, o que esperamos é que tanto os professores quanto os livros didáticos de matemática apresentem estratégias de ensino que favoreçam a compreensão de conceitos e propriedades do cálculo de volumes. Embora não deva ser tomado como a única fonte de referência, o livro didático deve fornecer elementos que possibilitem professores e alunos realizarem articulações e/ou transições com outras áreas do ensino e, principalmente, com os próprios conteúdos matemáticos.

1.2. BREVES CONSIDERAÇÕES SOBRE O PNLD, O LIVRO DIDÁTICO E OS DOCUMENTOS OFICIAIS

1.2.1. Plano Nacional do Livro Didático

O principal objetivo do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) é subsidiar o trabalho pedagógico dos professores por meio da distribuição de livros didáticos aos alunos da educação básica[4]. Após a inscrição dos livros didáticos através de suas respectivas editoras, ocorre um processo de avaliação dessas obras, sendo que o órgão responsável por tal avaliação é subordinado ao Ministério da Educação (MEC) que, por sua vez, publica o Guia de Livros Didáticos que é composto por todas as resenhas das coleções aprovadas. Posteriormente, esse guia é encaminhado para as escolas, para que os professores possam escolher o que melhor abrange seu projeto político pedagógico, como também disponibilizado na internet para que todos possam ter acesso.

Esse programa é desenvolvido em ciclos trienais alternados, ou seja, os livros selecionados em cada unidade de ensino são utilizados durante três anos consecutivos. Sua

[4] http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12373%3Apnld-e-pnlem-saiba-mais&catid=311%3Apnlem&Itemid=668 Acesso: 18 de novembro de 2014.

compra e distribuição são realizadas pelo MEC a cada ano para todos os alunos de um determinado seguimento, isto é, anos iniciais do ensino fundamental, anos finais do ensino fundamental ou ensino médio. Entretanto, os livros consumíveis deverão ser devolvidos ao final de cada ano, para que os alunos dos anos subsequentes possam utilizá-los.

A distribuição das obras didáticas para os estudantes dos anos iniciais do ensino fundamental (1º e 2º; 3º ao 4º), dos anos finais do ensino fundamental (6º ao 9º) e do ensino médio é realizada, respectivamente, da seguinte forma:

- ✓ 1º e 2º ano: alfabetização linguística, alfabetização matemática e obras complementares (ciências da natureza e matemática, ciências humanas, linguagens e códigos);
- ✓ 3º ao 5º ano: língua portuguesa, matemática, história, geografia, ciências, história regional e geografia regional;
- ✓ 6º ao 9º ano, recebem coleções de ciências, matemática, língua portuguesa, história, geografia e língua estrangeira moderna (inglês e espanhol);
- ✓ ensino médio, os alunos recebem livros didáticos de língua portuguesa, matemática, geografia, história, física, química, biologia, sociologia, filosofia e de língua estrangeira (inglês ou espanhol).

Cabe ainda destacar que esse programa também contempla os alunos que são portadores de necessidades educativas especiais. Nesse caso, as obras são distribuídas em Braille e contempla os livros de língua portuguesa, matemática, ciências, história, geografia e dicionários.

1.2.2. O Livro Didático

Considerado como um artefato cultural, visto que suas condições sociais de produção, circulação e recepção estão definidas com referência a práticas sociais estabelecidas na sociedade (MARTINS, 2006), o livro didático vem se constituindo, ao longo dos anos, como uma ferramenta pedagógica, embora não deva ser considerado como a única, capaz de promover e nortear possíveis mudanças e otimização da prática do professor. Para Martins (2006, p 118), a importância do livro didático, dentro do cenário da educação, "[...] pode ser compreendida em termos históricos, através da relação entre este material educativo e as práticas constitutivas da escola e do ensino escolar.".

De acordo com Freitas e Rodrigues (2008), essa ferramenta pedagógica faz parte da cultura e da memória visual de muitas gerações e, mesmo sofrendo tantas transformações na sociedade, ao longo dos anos, ainda possui uma função relevante para a criança, na missão de atuar como mediador na construção do conhecimento. Segundo esses autores, o interesse de pesquisadores acerca do livro didático surge devido ao simples fato do mesmo ser, "[...] muitas vezes, o único livro com o qual a criança entrará em contato." (FREITAS; RODRIGUES, 2008, p. 1).

No entanto, algumas discussões, quanto ao uso do livro didático em sala de aula, vêm surgindo nas últimas décadas. Para Lajolo (1996) o livro didático é um instrumento específico e importantíssimo de ensino e de aprendizagem formal e que, embora não seja o único material de que professores e alunos irão utilizar na escola, pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares. Por outro lado, Silva (1996) é enfático quando diz que para boa parte dos professores brasileiros, o livro didático se apresenta como uma insubstituível muleta e que as determinações que levam o professor à dependência do livro didático estão diretamente relacionadas à questão da identidade e dignidade do magistério.

Algumas pesquisas voltadas para a análise de livros didáticos veem "[...] o livro didático apenas como um instrumento de uso do segmento educacional considerado "usual", no ensino fundamental e médio" (PEREIRA; PEREIRA; MELO, 2010, p.1). Essa discussão em torno dos livros didáticos, "[...] vem suscitando um vivo interesse entre os pesquisadores de uns trinta anos para cá" (CHOPPIN, 2004, p. 549). Esse interesse pode ser comprovado devido ao aumento de publicações sobre o tema em eventos da área da educação (ENDIPE[5], ANPED[6], ENPEC[7]) e educação matemática (ENEM[8], EBRAPEM[9], CIEM[10], entre outros), assim como em revistas, dissertações, teses, seminários, congressos e grupos de pesquisa (PEREIRA; PEREIRA; MELO, 2010; EMMEL; ARAÚJO, 2012).

Segundo Garcia e Nascimento (2009), esse interesse, destacado pelos autores supracitados, além de evidenciar a expansão e o fortalecimento de um campo de investigação específico, também alerta para as dificuldades inerentes a tal situação, pois se trata de um objeto de pesquisa complexo.

[5] Encontro Nacional de Didática e Práticas de Ensino.
[6] Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação.
[7] Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências.
[8] Encontro Nacional de Educação Matemática.
[9] Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática.
[10] Congresso Internacional de Ensino da Matemática.

> Por todos os elementos que o constituem, pelas suas funções, por sua história, por ser objeto e canal, por ter múltiplos usos pelos medidores (alunos e professores), pela complexidade de sua gênese e por ser potencialmente ao mesmo tempo agente modificador do tecido social (como suporte educacional), antecipador e espelho de um momento, o livro didático é um produto cultural complexo e de difícil definição. (MAXWELL, p. 29).

Essa complexidade é justamente um dos principais motivos que levam pesquisadores a lançarem seus olhares sobre ele. Corrêa (2000, p. 13), por exemplo, entende que o livro didático, enquanto objeto e fonte de pesquisa, permite investigar a vinculação de ideias “[...] sobre o que a escola deveria transmitir/ensinar e, ao mesmo tempo, saber qual concepção educativa estaria permeando a proposta de formação dos sujeitos escolares.”. Por outro lado, Choppin (2004) afirma que os livros didáticos, por ser um objeto complexo, devem ser analisados por meio de uma perspectiva histórica e/ou comparativa para superar a visão imediata e entusiasta ou apaixonada que todos nós espontaneamente temos dos livros didáticos.

Embora haja algumas divergências sobre o uso dos livros didáticos, enquanto objetos de pesquisas, entende-se que os pesquisadores não devem se prender apenas ao que está escrito nas páginas dos livros, mas também considerar as formas de recepção e de leitura que dele fazemos. Para Salles (2011, p. 11), “[...] não só as diversas ideologias presentes nos conteúdos veiculados pelos livros são fontes de análise pelo pesquisador, mas também a própria forma de sua produção, circulação e recepção”. Dessa forma, os autores dos livros didáticos e suas escritas deixariam ser o único foco dos pesquisadores, abrindo espaço para que outros elementos que contribuíram para o desenvolvimento desses livros fossem pesquisados, como por exemplo, as editoras e Programa Nacional do Livro Didático (PNLD).

A partir das ideias dos autores supracitados, percebemos a valorização atribuída ao livro didático tanto em relação ao seu uso em sala de aula quanto ao tratamento das informações nele apresentado. Concordamos com Morais (2013) quando afirma que as escolhas metodológicas, a organização de um determinado conteúdo e principalmente o saber matemático presentes nesses recursos didáticos exercem um papel importantíssimo tanto no ensino quanto na aprendizagem dos conceitos matemáticos, tornando relevante a análise da abordagem de conteúdos específicos nessa ferramenta pedagógica.

Preocupados com a forma com que os livros didáticos têm abordado os conteúdos, particularmente os matemáticos, os documentos oficiais, como as Orientações Curriculares Nacionais (OCN) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), vêm propondo reformas educacionais, como a inserção de uma visão mais atualizada dos conteúdos didáticos.

Entretanto, cabe-nos destacar que as ideias apresentadas nesses documentos não se restringem apenas a uma mera mudança de conteúdos, mas também a uma mudança de filosofia de ensino e aprendizagem. Segundo Blumenthal (2010), as ideias básicas contidas nesses documentos “[...] apontam para a necessidade de mudanças urgentes não só no o que ensinar, mas principalmente no como ensinar e avaliar e no como organizar as situações de ensino e de aprendizagem.”. Diante desses fatos percebemos o quanto é importante que os livros didáticos apresentem conteúdos que favoreçam o desenvolvimento do raciocínio, da sensibilidade expressiva, da sensibilidade estética e da imaginação do aluno.

Em relação aos conteúdos geométricos, em particular o volume de sólidos geométricos, as OCN e os PCN apresentam propostas quanto a seu ensino e aprendizagem. Dessa maneira, buscaremos, na sequência, apresentar algumas dessas propostas com o intuito de proporcionar uma melhor compreensão a respeito do tema.

1.2.3. Orientações Curriculares Nacionais (OCN) e Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Médio

A partir de 2006 diversas escolas da rede pública brasileira passaram a receber o documento *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*, o qual tem como objetivo principal “[...] contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente.” (BRASIL, 2006, p. 5). As OCN foram organizadas em três volumes:

- Volume I - Linguagem, Códigos e suas Tecnologias: são incluídas as disciplinas de Língua Portuguesa, Literatura, Línguas Estrangeiras, Espanhol, Arte e Educação Física;
- Volume II - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias: esse volume é constituído pelas disciplinas de Biologia, Física, Química e Matemática;
- Volume III - Ciências Humanas e suas Tecnologias: são apresentadas as disciplinas de Filosofia, Geografia, História e Sociologia.

Esse documento foi elaborado a partir de discussões envolvendo professores, alunos, em alguns casos, e gestores de escolas públicas brasileiras. Nele estão destacadas as preocupações e orientações gerais presentes em documentos oficiais anteriores, como por exemplo, PCN, em 1999, o PCN +, em 2002, e os PCN em debate, em 2004. Dessa forma, as OCN chegam às escolas, após várias discussões e contribuições referentes ao trabalho e formação educacional, apresentando e discutindo questões relativas ao currículo escolar e a cada disciplina em particular. (BRASIL, 2006).

De acordo com Siqueira (2014, p.37) o maior problema na formação educacional esta na forma de abordar: “[...] a pluralidade de conhecimentos, os campos científico-tecnológicos, ciências humanas e ciências sociais, distintos e altamente complexos, contemplando os marcos legais para oferta do Ensino Médio [...]”. Tais marcos legais, destacados pelo autor, são explicitadas nas OCN sob dois aspectos:

> O primeiro diz respeito às finalidades atribuídas ao ensino médio: o aprimoramento do educando como ser humano, sua formação ética, o desenvolvimento de sua autonomia intelectual e de seu pensamento crítico, a sua preparação para o mundo do trabalho e o desenvolvimento de competências para continuar seu aprendizado (Art. 35). O segundo propõe a organização curricular com os seguintes componentes: base nacional comum, a ser complementada, em cada sistema de ensino e estabelecimento escolar, por uma parte diversificada que atenda a especificidades regionais e locais da sociedade, da cultura, da economia e do próprio aluno (Art. 26); planejamento e desenvolvimento orgânico do currículo, superando a organização por disciplinas estanques; integração e articulação dos conhecimentos em processo permanente de interdisciplinaridade e contextualização; proposta pedagógica elaborada e executada pelos estabelecimentos de ensino, respeitadas as normas comuns e as de seu sistema de ensino; participação dos docentes na elaboração da proposta pedagógica do estabelecimento de ensino. (BRASIL, 2006, p.7).

Cabe-nos ressaltar que os marcos legais para a oferta do ensino médio não se restringem apenas à concretização e aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no ensino fundamental (Art. 26, lei nº 9394/96), no intuito de dar continuidade aos estudos, “[...] mas também a uma formação mais ampla que favoreça o desenvolvimento de princípios éticos, pensamento crítico e autonomia intelectual.” (MORAIS, 2013, p. 24). Dessa forma, assim como Morais (2013), entendemos que o ensino da matemática pode se tornar uma ferramenta importante na formação do jovem, de acordo com as perspectivas estabelecidas pela Lei de Diretrizes e Bases, lei nº 9394/96.

De acordo com os PCN (BRASIL, 1997), o ensino de matemática deve ser realizado visando o desenvolvimento de um conjunto de competências. No caso específico da geometria espacial, “isso também deve ocorrer de maneira que o aluno possa perceber a relação existente entre o que ele estiver estudando na sala de aula e o mundo, assim, o que ele estiver aprendendo passa a ter mais significado.” (SILVA, 2013, p 21). Os PCN (BRASIL, 1997, p. 21) destacam ainda que:

> A abordagem tradicional, que se restringe a métrica do calculo de áreas e volumes de alguns sólidos, não é suficiente para explicar a estrutura de moléculas e cristais

> em forma de cubos e outros sólidos, nem tampouco justifica a predominância de paralelepípedos e retângulos nas construções arquitetônicas ou a predileção dos artistas pelas paralelas nas pinturas e esculturas. Ensinar geometria no ensino médio deve possibilitar que essas questões aflorem e possam ser discutidas pelos alunos.

Já as OCN (Brasil, 2006, p.75), enfatizam que:

> O estudo da geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do quotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de figuras geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida. Também é um estudo em que os alunos podem ter uma oportunidade especial, com certeza não a única, de apreciar a faceta da matemática que trata de teoremas e argumentações dedutivas. Esse estudo apresenta dois aspectos – a geometria que leva à trigonometria e a geometria para o cálculo de comprimentos, áreas e volumes.

Ainda de acordo com as OCN (BRASIL, 2006, p. 76), a geometria, no nosso caso a espacial, deve ser estudada com mais detalhes e sistematizações, pois “[...] o aluno já apresenta as condições necessárias para a compreensão de certas demonstrações que resultem em algumas fórmulas [...]”. Para a compreensão das fórmulas de volumes de sólidos (cilindro, prisma, pirâmide, cone e esfera), o referido documento propõe que se tome como ponto de partida, o princípio de Cavalieri.

Segundo Lima (1991), o cálculo do volume dos sólidos geométricos pode ser compreendido de três maneiras distintas. A primeira é utilizar a apresentação clássica de Euclides e Arquimedes, a segunda é usar o cálculo infinitesimal e, por fim, a terceira é utilizar o princípio de Cavalieri. A opção pelo princípio de Cavalieri, como método de compreensão das fórmulas de volume em livros didáticos, ocorre devido a esse princípio permitir “[...] uma simplificação notável nos argumentos que conduzem às fórmulas clássicas de volume.” (LIMA, 1991, p.89).

Em síntese, entendemos que o livro didático tem um papel importante no ensino e na aprendizagem dos conceitos matemáticos, assim como as propostas apresentadas nos documentos oficias valorizam o ensino da geometria espacial, em especial, o volume dos sólidos geométricos. Percebemos também, nesses documentos, a importância da utilização do princípio de Cavalieri para o estudo de volumes de determinados sólidos geométricos, visto que esse princípio permite ao aluno compreender o significado das fórmulas.

No entanto, mesmo recebendo um destaque considerável nos documentos oficiais, quanto ao seu ensino e aprendizagem, o tema volume não vem recebendo a mesma atenção que outros temas na literatura de educação matemática. Essa afirmação se deve ao fato de que poucos trabalhos foram identificados acerca do tema em questão, principalmente no ensino médio. Entretanto, apesar de poucos, os estudos realizados sobre o tema volume tem apontado falhas consideráveis quanto a sua abordagem, principalmente em livros didáticos, conforme abordaremos, na revisão de literatura, na próxima seção.

1.3 REVISÃO DE LITERATURA

Em relação à análise do tema volume em livros didáticos, podemos descrever alguns estudos, como o de Morais e Bellemain (2010) que analisaram cinco coleções de livros didáticos de matemática dos anos finais do ensino fundamental aprovados no PNLD 2008, nas quais foram mapeadas as situações que possibilitam dar sentido ao conceito de volume enquanto grandeza, e o de Morais (2013) que analisou sete coleções de livros didáticos de matemática do ensino médio aprovados no PNLD 2012, que também teve como foco principal mapear as situações que possibilitam dar sentido ao conceito de volume. Dessa forma, embora o trabalho desenvolvido por Morais e Bellemain (2010) seja de grande relevância para o nosso estudo e, principalmente, para a educação matemática, achamos pertinente apresentar, nesse momento, apenas o trabalho desenvolvido por Morais (2013), tendo em vista que o mesmo tem características e objetivos muito próximos ao estudo que estamos apresentando.

O estudo apresentado por Morais (2013) foi desenvolvido sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais desenvolvida por Vergnaud (1990) e do modelo didático proposto por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989). Suas análises foram pautadas a partir de critérios agrupados em três categorias: volume-descrição, volume-conceito e volume-fórmula.

O primeiro critério, volume-descrição, é caracterizado, segundo o autor, pelo tratamento da grandeza volume em relação: ao número de páginas; a posição do(s) capítulo(s) dedicado ao assunto; aos títulos dos capítulos; e localização por ano de ensino. Segundo Morais, o objetivo, com esse critério, é ter um olhar sobre a abordagem da grandeza volume do ponto de vista descritivo, o que possibilita concluir sobre a importância atribuída a esse conteúdo. No que se refere a tal critério, o autor constatou que das sete coleções analisadas, cinco abordam o volume na segunda metade do livro, e, desses cinco, quatro trazem esse estudo nos capítulos finais. Esse fato, segundo Morais, pode acarretar na ausência do ensino de volume, tendo em vista que o livro didático é de suma importância no encadeamento de ensino dos conteúdos.

Essa preocupação em relação à abordagem de volume nos capítulos finais dos livros didáticos não é exclusividade de Morais (2013). Para Vieira e Silva (2007), a abordagem desse tema nos capítulos finais pode induzir os docentes a não abordá-los, com a justificativa de falta de tempo. Nesse caso, os professores alegam que por terem que seguir o currículo escolar, não conseguem chegar até os capítulos finais e quando conseguem a abordagem é prejudicada. Concordamos com Lima et al. (2001), que os conteúdos geométricos devem ser abordados, nos livros didáticos, nos capítulos iniciais e/ou intercalados com outros conteúdos, ou seja, não podem ser engessados em um determinado capítulo dos livros.

Ainda em relação ao critério volume-descrição, Morais (2013) destaca que cinco coleções dedicam uma quantidade razoável de páginas a esse conteúdo. Nesse caso, o autor tomou como base, a quantidade média de páginas por capítulo em cada livro didático no qual volume é abordado. Entretanto, em relação a esse fato, algumas questões podem ser levantadas, por exemplo, será que o conteúdo de volume abordado nessas páginas favorece o processo de ensino e aprendizagem? Permitem a alunos e professores, um debate crítico e criativo que é uma das finalidades do processo educacional (ROMANATTO, 2004)? Entendemos que o simples fato dos livros didáticos dedicarem uma boa parcela de suas páginas a abordagem de um determinado conteúdo não significa que esse conteúdo é apresentado de forma correta, isto é, de acordo com que é proposto pelos documentos oficiais. Dessa forma, buscamos, em nosso estudo, apresentar respostas a essas questões.

O segundo critério, volume-conceito, compreende o seguinte mapeamento: situações; propriedades; e representações simbólicas. Segundo Morais (2013), esse mapeamento permite caracterizar a abordagem de volume como conceito. Para que o mesmo fosse realizado, o autor analisou tanto as explicações como os exercícios propostos.

> A presença ou ausência de definições e a exploração explícita de propriedades de volume foram observadas na parte de explicações de cada livro didático analisado. No mapeamento dos tipos de situações, as unidades de análise foram as atividades propostas, ou seja, as ocorrências foram contabilizadas exercício por exercício e a presença ou ausência de representações simbólicas foi observada tanto nos exercícios como na parte de explicações. (MORAIS, 2013, p. 58).

Morais (2013) destaca que seis coleções definem volume de forma explicita e uma apresenta apenas uma ideia intuitiva. Para o autor, a opção de trazer a definição de forma explicita enfatiza a necessidade de se realizar uma medição, valorizando assim esse tipo de situação e também os aspectos numéricos da grandeza. Cabe-nos destacar que, dentre as situações classificadas por Morais, as situações de medição[11] foram as que receberam maior destaque nas coleções analisadas. Esse fato pode dificultar a construção do sentido que o

[11] "As situações de medição consistem em atribuir um número, numa dada unidade, ao volume de um sólido." (MORAIS, 2013, p. 46).

aluno atribui aos conceitos de volume, conforme destaca Morais, Bellemain e Lima (2014, p. 43):

> A ênfase exacerbada nas situações de medição pode limitar o sentido atribuído pelos alunos ao volume, uma vez que, como mostra a teoria dos campos conceituais, a variedade de situações às quais os sujeitos são confrontados é um elemento importante para a construção do sentido que atribuem aos conceitos.

Por outro lado, as situações de comparação[12] e produção[13] são pouco valorizadas, o que pode provocar, segundo o autor, "lacunas na conceituação do volume." (MORAIS, 2013, p. 105). Ao ser apresentado de forma insuficiente nos livros didáticos, esses de situações podem levar o aluno a ter dificuldades na compreensão do conceito de volume, tendo em vista que as situações de comparação e produção favorecem, e muito, a distinção entre o sólido e o volume, com ou sem a interferência da medida (MORAIS; BELLEMAIN; LIMA, 2014).

Morais (2013) também identificou uma quantidade razoável de situações que não se enquadra na tipologia proposta em seu trabalho, dessa forma sugeriu a realização de um estudo mais aprofundado sobre essas situações, assim como uma análise minuciosa dessas atividades. Essa sugestão veio ao encontro do que propomos em nosso primeiro objetivo específico, que é identificar e analisar: conceitos, procedimentos e algoritmos presentes no ensino de volume de sólidos geométricos. Tal objetivo nos permite categorizar os tipos de situações não classificadas por Morais.

No tocante às propriedades referentes a volume, Morais (2013) identificou oito que remetem ou evidenciam invariantes operatórios como "a relação entre volume e capacidade, entre as fórmulas de volume de um prisma e da pirâmide, a ideia de volume como grandeza tridimensional e a dissociação entre a grandeza e o objeto geométrico." (MORAIS, 2013, p. 105). Para o autor, essas ideias propiciam uma melhor compreensão de volume como uma grandeza. Outro ponto importante destacado são as representações simbólicas em jogo[14] que, segundo o autor, "associam diferentes representações (gráfica e desenho) e exploram também vistas planas e o sólido em linguagem materna.". A figura 3 a seguir é um exemplo dessas representações.

---

[12] "As situações de comparação consistem em decidir, em um dado conjunto de sólidos, qual deles tem maior/menor volume ou se têm volumes iguais." (MORAIS, 2013, p. 48).
[13] "As situações de produção caracterizam-se pela produção de um sólido com volume menor, maior ou igual a um volume dado e têm como estratégias composição, decomposição-recomposição e princípio de Cavalieri." (MORAIS, 2013, p. 50).
[14] Morais (2013, p. 30) define representações simbólicas em jogo como um "sistema de símbolos com significado para o sujeito.".

Figura 3: Figura3: Situação analisada por Morais (2013, p. 76).

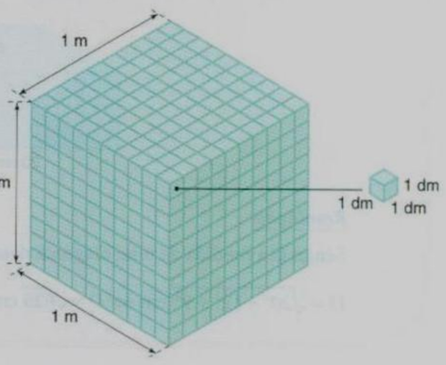
Cada unidade dessa escala vale 1.000 vezes a unidade imediatamente à sua direita. Para entender o porquê dessa relação, vamos dividir um cubo de 1 m de aresta em cubinhos de 1 dm de aresta, conforme a figura abaixo.

Assim, observamos que o metro cúbico foi dividido em 1.000 decímetros cúbicos, com o que concluímos:

$$1\ m^3 = 1.000\ dm^3$$

Repetindo o raciocínio para as demais unidades da escala, concluímos também que:

$1\ km^3 = 1.000\ hm^3$
$1\ hm^3 = 1.000\ dam^3$
$1\ dam^3 = 1.000\ m^3$
$1\ dm^3 = 1.000\ cm^3$
$1\ cm^3 = 1.000\ mm^3$



Fonte: Coleção F (2009, p. 218 apud MORAIS, 2013, p. 76).

Para Morais (2013, p. 76), a explicação apresentada na figura 3

> [...] além de contribuir para dar sentido à conversão de unidades, articula as representações simbólicas, que no caso também cumprem uma função: o desenho do cubo em perspectiva é um elemento importante da explicação e relaciona os aspectos numéricos e geométricos.

Além disso, essas representações permitem realizar distinção entre elementos dos quadros geométrico, numérico e das grandezas.

O autor finaliza o critério volume-conceito destacando que a articulação entre o sólido, a grandeza e a medida é favorecida, no entanto como a quantidade de situações de comparação e produção classificadas foi baixa, a distinção entre o sólido e a grandeza não poderá ser evidenciada. Vale ressaltar, que tais situações representam apenas, respectivamente, 4% e 3,4% de todas as situações classificadas nos livros didáticos analisados. Por outro lado, diante da grande quantidade de situações de medição classificadas, assim como das definições apresentadas, “o aspecto numérico pode reforçar uma concepção de volume como um número.” (MORAIS, 2013, p. 120), conforme nos mostra a figura 4 a seguir:

Figura 4: Exemplo de associação entre volume e um número apresentado por Morais (2013, p.104).

Por exemplo, considere um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 2 cm, 3 cm e 4 cm. Como o cubo de aresta 1 cm cabe nesse paralelepípedo $2 \cdot 3 \cdot 4$ vezes, podemos então dizer que o volume desse sólido é:

$$2 \cdot 3 \cdot 4 = 24\ cm^3$$

Fonte: Coleção E (2010, p. 277 apud MORAIS, 2013, p. 104).

Nesse caso, observamos uma igualdade entre um número (produto de três fatores 2, 3 e 4) e uma grandeza (o volume representado por 24 cm^3), o que, para Morais (2013), é uma escolha didática inadequada, pois estabelece uma igualdade entre elementos de naturezas distintas.

Por fim, no último critério apresentado, volume-fórmula, o qual compreende a abordagem das fórmulas de volume dos sólidos geométricos, Morais (2013, p.107) constatou que "as fórmulas de volume dos sólidos estudados usualmente na escola (prisma, pirâmide, cilindro, cone e esfera) são contempladas em todas as coleções.". Porém, duas coleções não apresentam, de forma explicita, a fórmula do tronco da pirâmide, sendo que uma delas também não traz a do volume do tronco de cone. Entendemos que a ausência dessas fórmulas pode trazer alguns benefícios ao processo de ensino e aprendizagem, pois ao invés se prender a elas o professor pode estimular o aluno a calcular o volume desses sólidos por meio de outros recursos, como semelhança de triângulos e decomposição. Nesse estudo, buscamos verificar se os livros didáticos apresentam, além das fórmulas, outras possibilidades para o cálculo de volume de sólidos, que favoreça o desenvolvimento do raciocínio do aluno.

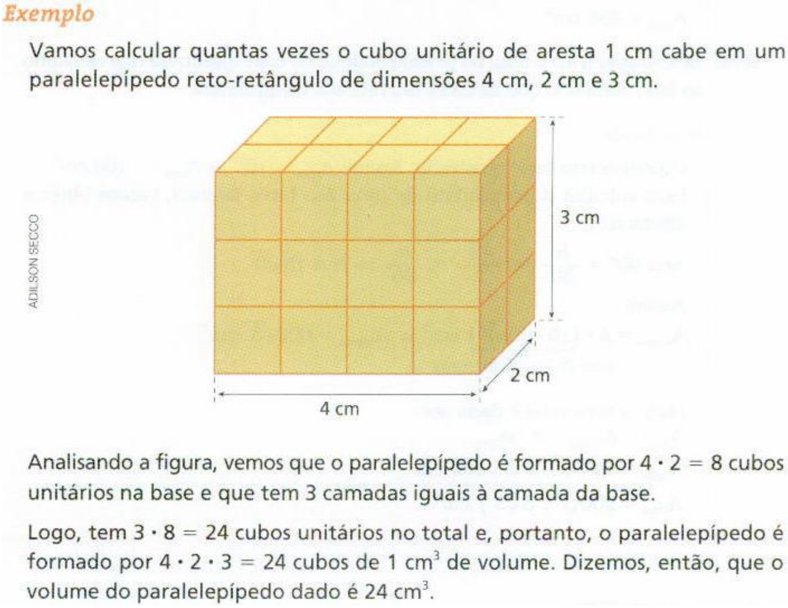
Morais (2013, p.107) identificou ainda a existência de conexões entre as fórmulas estudadas, "[...] o que possibilita estabelecer relações entre os volumes dos sólidos.". A fórmula do paralelepípedo reto-retângulo, por exemplo, é utilizada como suporte para a construção da fórmula de um prisma qualquer, e também como apoio para a introdução da fórmula de volume da pirâmide e do cilindro. Concordamos com o autor, ao afirmar que essas conexões favorecem tanto a articulação entre o volume de sólidos distintos, como a exploração da ideia de que sólidos distintos podem ter o mesmo volume. Tal exploração também é destacada por Figueiredo (2013, p. 24) ao relatar que:

> [...] devemos considerar que, do mesmo modo que ocorre para a área, sólidos diferentes podem ser equivalentes em relação ao volume, o que leva à necessidade de distinguir o sólido e seu volume. Assim, como a mudança de unidade de volume provoca mudança na medida do volume, mas não no volume enquanto uma grandeza, o que justifica a necessidade de distinguir volume (que no nosso marco teórico é a grandeza) e medida de volume (que na nossa base teórica é um número). O par número/unidade é uma maneira de expressar o volume como grandeza.

De fato, ao apresentar situações como essa, os livros didáticos possibilitam ao aluno compreender conceitos e propriedades que são, muitas vezes, esquecidos ou simplesmente ignorados pelos docentes.

Em relação à introdução das fórmulas do volume dos referidos sólidos, Morais (2013) evidenciou que todas as coleções analisadas partem do bloco retangular. Tal introdução é realizada, na grande maioria das coleções, por meio da decomposição do sólido em unidades de volume[15], conforme apresentado na figura 5 a seguir:

Figura 5: Exemplo da introdução do volume do bloco retangular apresentado por Morais (2013, p.104).


Exemplo

Vamos calcular quantas vezes o cubo unitário de aresta 1 cm cabe em um paralelepípedo reto-retângulo de dimensões 4 cm, 2 cm e 3 cm.

Analisando a figura, vemos que o paralelepípedo é formado por $4 \cdot 2 = 8$ cubos unitários na base e que tem 3 camadas iguais à camada da base.

Logo, tem $3 \cdot 8 = 24$ cubos unitários no total e, portanto, o paralelepípedo é formado por $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ cubos de 1 cm^3 de volume. Dizemos, então, que o volume do paralelepípedo dado é 24 cm^3.

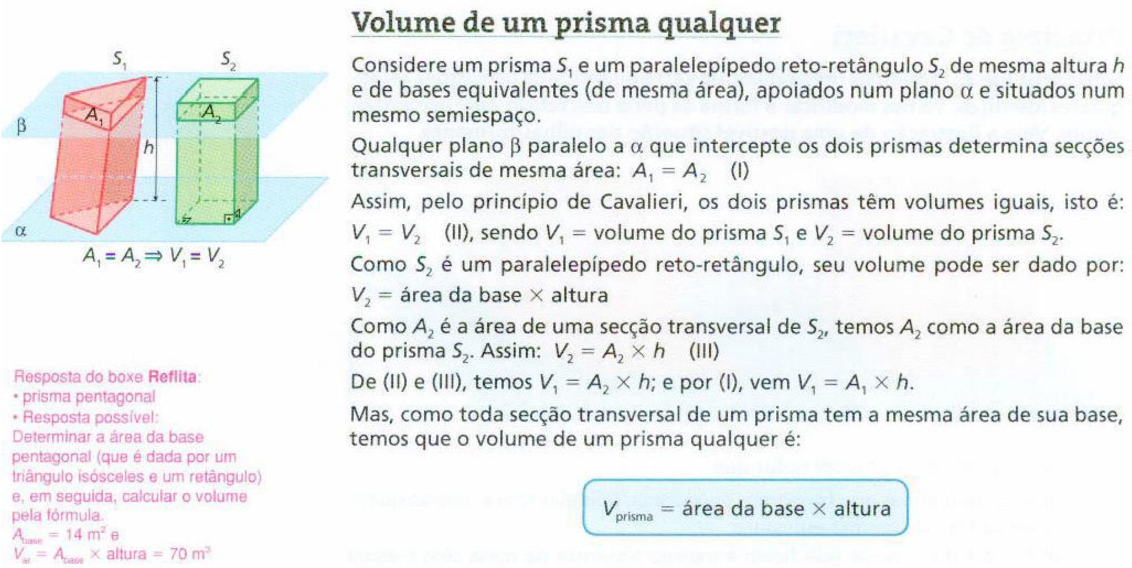
Fonte: Coleção A (2010, p. 178 apud MORAIS, 2013, p. 109).

Esse método de resolução, segundo Morais (2013, p. 109), é utilizado para “[...] generalizar a fórmula $V = a{\cdot}b{\cdot}c$ (onde a, b e c são os comprimentos das arestas do sólido concorrentes em um vértice).”. No entanto, o autor chama a atenção para o fato de essa fórmula ser estendida a outras atividades, sem justificativa prévia, nos casos em que o “domínio das medidas dos comprimentos das arestas é o conjunto dos números reais.” (MORAIS, p 109). Essa situação pode não ser conveniente, pois, nessa etapa de ensino, é sugerido que a construção da fórmula de volume ocorra de modo a favorecer a compreensão dos alunos.

Ainda no tocante ao critério volume-fórmula, Morais (2013, p. 112) analisou o uso do princípio de Cavalieri como recurso para justificar as fórmulas de volume. Nesse caso, ficou constatado que tal princípio é contemplado em todas as coleções analisadas, no entanto, a sua abordagem, em algumas coleções, “não está suficientemente clara: ora não se distinguem as hipóteses do que se deseja provar, ora não se justifica a igualdade das seções das áreas [...]”. No exemplo apresentado na figura 6 a seguir, é possível observarmos essa afirmação:

15 Volume de um cubo unitário

Figura 6: Exemplo de abordagem do princípio de Cavalieri apresentado por Morais (2013, p.113).



Volume de um prisma qualquer

Considere um prisma S_1 e um paralelepípedo reto-retângulo S_2 de mesma altura h e de bases equivalentes (de mesma área), apoiados num plano α e situados num mesmo semiespaço.

Qualquer plano β paralelo a α que intercepte os dois prismas determina secções transversais de mesma área: $A_1 = A_2$ (I)

Assim, pelo princípio de Cavalieri, os dois prismas têm volumes iguais, isto é: $V_1 = V_2$ (II), sendo V_1 = volume do prisma S_1 e V_2 = volume do prisma S_2.

Como S_2 é um paralelepípedo reto-retângulo, seu volume pode ser dado por: V_2 = área da base $\times$ altura

Como A_2 é a área de uma secção transversal de S_2, temos A_2 como a área da base do prisma S_2. Assim: $V_2 = A_2 \times h$ (III)

De (II) e (III), temos $V_1 = A_2 \times h$; e por (I), vem $V_1 = A_1 \times h$.

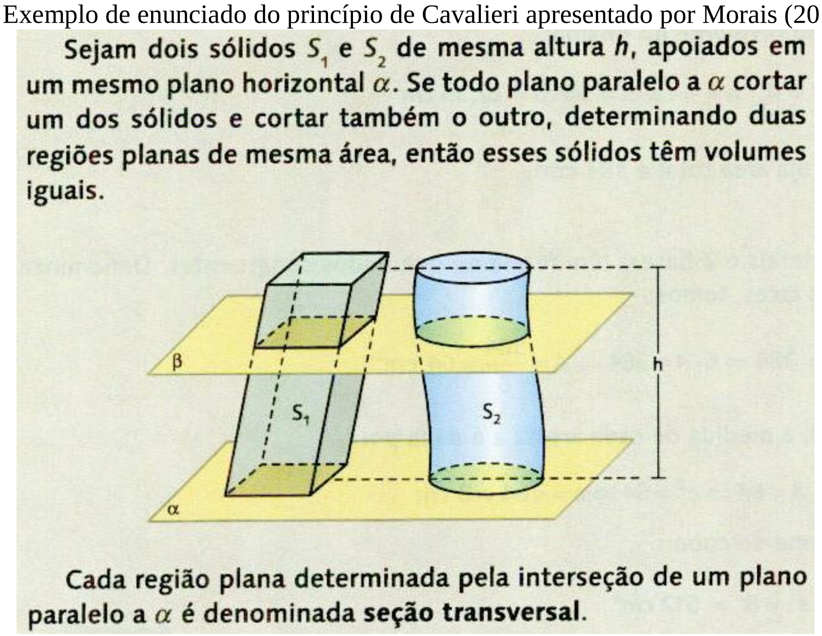
Mas, como toda secção transversal de um prisma tem a mesma área de sua base, temos que o volume de um prisma qualquer é:

V_{prisma} = área da base $\times$ altura

Fonte: Coleção A (2010, p. 180 apud MORAIS, 2013, p. 113).

Para Morais (2013, p. 113), os argumentos apresentados nesse exemplo são insuficientes para justificar a igualdade das áreas A_1 e A_2. Nesse caso, o autor salienta a necessidade de justificar que "a interseção de qualquer plano paralelo ao plano de sua base determina figuras planas equivalentes à base, permitindo obter, a partir da hipótese, o resultado esperado.". Outro ponto negativo destacado pelo autor, em relação a esse princípio, é a forma não muito clara que uma determinada coleção enuncia o mesmo, conforme observamos na figura 7 a seguir.

Figura 7: Exemplo de enunciado do princípio de Cavalieri apresentado por Morais (2013, p.115).



Sejam dois sólidos S_1 e S_2 de mesma altura h, apoiados em um mesmo plano horizontal α. Se todo plano paralelo a α cortar um dos sólidos e cortar também o outro, determinando duas regiões planas de mesma área, então esses sólidos têm volumes iguais.

Cada região plana determinada pela interseção de um plano paralelo a α é denominada seção transversal.

Fonte: Coleção C (2010, p. 99 apud MORAIS, 2013, p. 115).

Nota-se, nesse exemplo, que o trecho, **[...] se todo plano paralelo a α cortar um dos sólidos e cortar também o outro [...]**, não está apresentado de maneira correta, pois “considerando a natureza de um plano, se ele corta um sólido, necessariamente cortará o outro.” (MORAIS, 2013, p. 115). Entendemos que situações iguais a essa podem levar o aluno a ter uma compreensão errônea de conceitos e propriedades do conteúdo em questão, pois é muito comum o aluno tomar como verdade todas as informações apresentadas nos livros didáticos que utiliza. Nesse caso, caberá ao professor esclarecer o erro para que não influencie no processo de ensino e aprendizagem.

Assim, diante desses resultados percebemos que o tema volume, nos livros didáticos, ainda tem um grande potencial a ser explorado para a melhoria do ensino e aprendizagem de conceitos e propriedades. De fato, tanto as lacunas deixadas por Morais (2013), para que um estudo mais aprofundado seja realizado, quanto às questões levantadas no decorrer da revisão, são pontos importantes que precisam ser analisados e discutidos. Entendemos que, ao analisarmos uma quantidade considerável de coleções, como no caso de Morais (2013), alguns pontos importantes do estudo podem ficar comprometidos, tendo em vista que o tempo disponível para a conclusão da dissertação é pequeno. Dessa forma, buscamos, nessa pesquisa, realizar um estudo sobre o ensino de volumes de sólidos geométricos em quatro coleções aprovadas pelo PNLD 2012, entretanto, daremos ênfase na coleção mais adotada pelas escolas públicas brasileiras. Em nosso entendimento, quando focamos uma coleção específica, tanto a identificação e analise de conceitos, procedimentos e algoritmos, quanto as escolhas didáticas realizadas pelos autores relativas ao ensino de volume de sólidos geométricos podem ser melhor caracterizadas. Assim, podemos dizer que nossa intenção com esse estudo é colaborar com o ensino e aprendizagem do conteúdo de volumes, além de complementar o trabalho desenvolvido por Morais (2013).

CAPÍTULO II - O CONCEITO DE VOLUME

2.1. DEMONSTRAÇÕES DAS FÓRMULAS DO CÁLCULO DE VOLUME DE SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

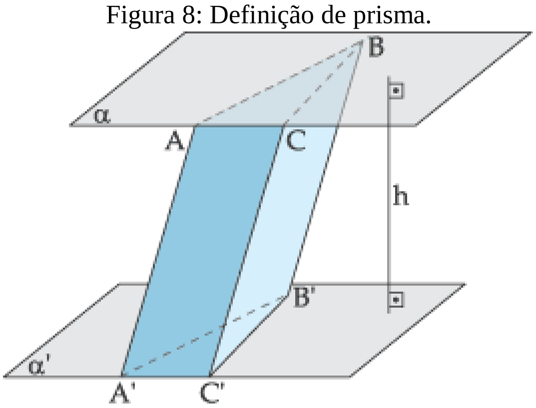
Discutimos, na sequência, alguns métodos utilizados para calcular o volume de sólidos geométricos. Para isso, apresentamos além da noção intuitiva de volume os principais teoremas e definições utilizados nos cálculos numéricos, e que consideramos essenciais para a compreensão do que escolhemos para apresentar. Como esse processo envolveu diversos conceitos de área de regiões poligonais, apresentamos, também, algumas propriedades sobre esse tema, importantes para o desenvolvimento de demonstrações realizadas. Entretanto, antes de iniciarmos essas discussões achamos pertinente apresentar, resumidamente, algumas definições e elementos de um sólido em especial, o prisma. Nossa intenção, com essa apresentação, é sanar algumas dúvidas que possam envolver esse sólido.

Para a construção deste capítulo nos baseamos em Lima (2009), Lula (2013) e Moise (1976).

2.1.1. Prisma: Definições e Elementos

Um prisma é um sólido formado por duas faces (bases) poligonais, inferior e superior, paralelas e congruentes, cujas faces laterais são paralelogramos.

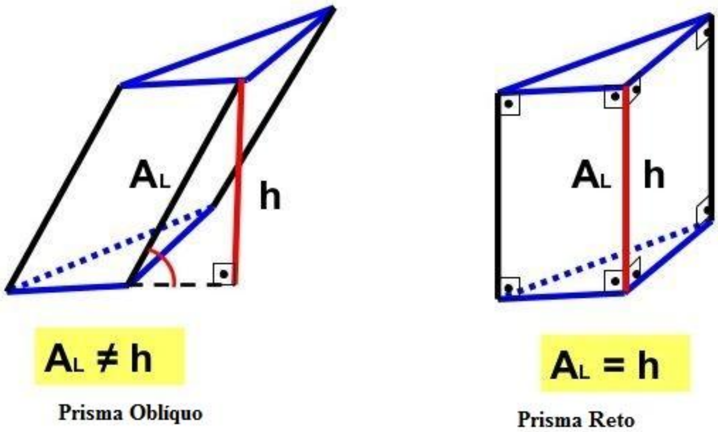
Figura 8: Definição de prisma.



Fonte: tudo matemática.

Esse sólido é denominado de acordo com a forma de suas bases, ou seja, se ele possui bases pentagonais, por exemplo, será denominado de prisma pentagonal. Quanto à sua classificação, os prismas são considerados retos se suas faces laterais forem perpendiculares à base, ou oblíquos, quando esse fato não ocorrer. Cabe destacar que os prismas retos possuem altura igual ao comprimento de qualquer uma de suas arestas laterais.

Figura 9: Prisma oblíquo e reto.



Fonte: Adaptado de http://pt.slideshare.net/PROFZEZEU/prismas-35457771.

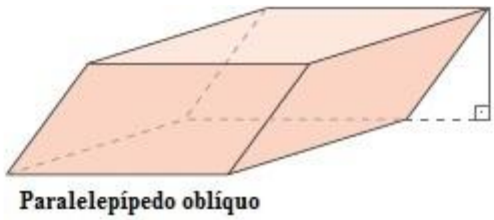
Ainda em relação aos prismas retos, destacamos duas características importantes: suas faces laterais são retângulos; e aqueles que possuem bases poligonais regulares são chamados de prismas regulares.

2.1.2 Paralelepípedo

Denominamos de paralelepípedo um prisma cujas bases são paralelogramos. A superfície total desse sólido é a reunião de seis paralelogramos. Um paralelepípedo pode ser: oblíquo; reto; e reto retângulo.

- Paralelepípedo oblíquo: é um prisma cujos ângulos formados pelas faces com as bases são diferentes de 90º;

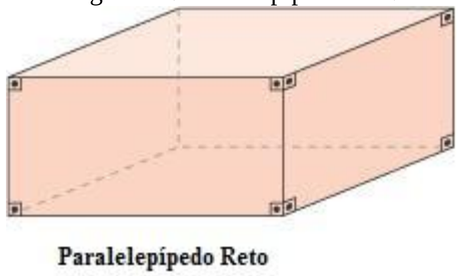
Figura 10: Prisma Oblíquo.



Fonte: Adaptado de Souza et. al (2009)

- Paralelepípedo reto: é um prisma reto cujas bases são paralelogramos. A superfície total desse sólido é a reunião de quatro retângulos (faces laterais) com dois paralelogramos (bases). Suas faces laterais são perpendiculares à base.

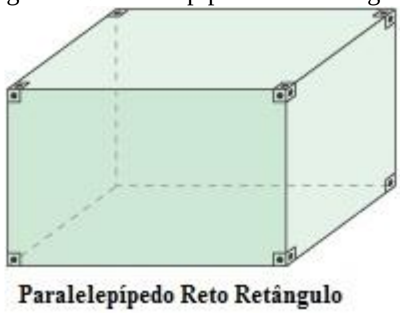
Figura 11: Paralelepípedo reto.



Fonte: Adaptado de Souza et. al (2009)

- Paralelepípedo reto retângulo: é um prisma reto cujas bases são retângulos. A superfície total desse sólido é a reunião de seis retângulos.

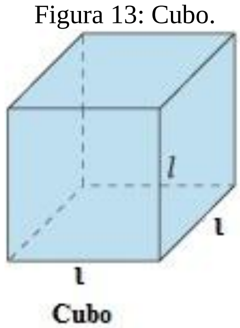
Figura 12: Paralelepípedo reto retângulo.



Fonte: Adaptado de Souza et. al (2009)

O paralelepípedo reto retângulo ainda apresenta um caso particular, o qual denominamos de cubo. O cubo tem todas as suas faces quadradas, ou seja, todas as suas arestas são congruentes. Dessa forma, como esse sólido é um caso particular de paralelepípedo reto retângulo, então podemos defini-lo como um prisma reto cujas faces são todas quadradas.

Figura 13: Cubo.



Fonte: Adaptado de Souza et. al (2009)

Assim, diante dessas informações, buscamos, na sequência, apresentar as discussões em torno das demonstrações das fórmulas do cálculo de volume de sólidos geométricos conhecidos.

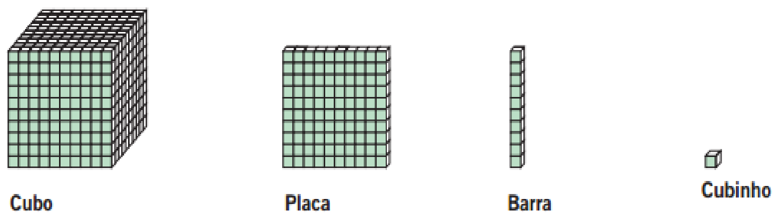
2.1.3 Noção Intuitiva de Volume

Podemos definir, de forma intuitiva, que o volume de um sólido é "a quantidade de espaço por ele ocupada" (LIMA, 2009, p. 59). Como a ideia central é representar esta "quantidade de espaço" (volume) por um número real positivo, basta compará-la com uma unidade e o resultado dessa comparação será justamente o número desejado, ou seja, a medida do volume.

Se tomarmos como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, seu volume, por definição, será igual a 1. Esse sólido será denominado de cubo unitário. Portanto, se a medida da aresta do cubo for igual a 1 m, seu volume será igual a 1 m^3; se a medida da aresta do cubo for igual a 1 dm, então a medida do volume será igual a 1 dm^3.

Um recurso didático que possibilita a compreensão das ideias intuitivas de volume é o Material Dourado (figura 14), o qual é constituído de cubinhos, barras, placas e cubos. Cada cubo é formado por dez placas, cada placa é formada por dez barras e cada barra é formada por dez cubinhos. Nesse caso, considerando que o volume do cubinho seja igual a $1cm^3$, cubo unitário, então para determinarmos o volume da barra basta somar o volume de 10 cubinhos ou efetuar o produto da quantidade de cubinhos que formam a barra pelo volume do cubinho, ou seja, $10 \cdot 1\ cm^3$. Logo, o volume da barra será igual a 10 cm^3. Da mesma forma, para calcularmos o volume da placa, bastará efetuar a soma do volume de 10 barras ou realizar o produto da quantidade de barras que formam a placa pelo volume da barra, $10 \cdot 10\ cm^3$, sendo assim o volume da placa será igual a 100 cm^3. Por fim, para que o volume do cubo seja determinado, basta somarmos o volume das 10 placas ou efetuarmos o produto da quantidade de placas que formam o cubo pelo volume das placas, $10 \cdot 100\ cm^3$, dessa forma o volume do cubo será igual a 1000 cm^3.

Figura 14: Material Dourado.



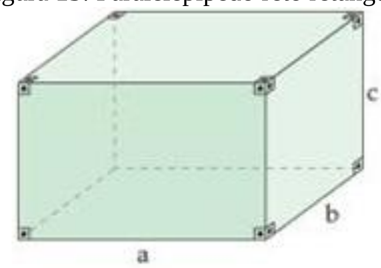
Fonte: Educar/USP/Matemática

Nesse aspecto, entende-se que, para calcularmos o volume de um sólido qualquer deveremos apresentar um número que exprima quantas vezes esse sólido contém o cubo unitário. No entanto, se o sólido analisado tiver um formato bastante irregular, não poderemos apresentar com exatidão o número de vezes que o cubo unitário caberá dentro desse sólido. Portanto, a ideia intuitiva de volume, segundo Lima (2009), deverá ser usada apenas como guia, à qual deveremos atribuir um significado preciso. Assim, se quisermos determinar o volume de sólidos com formatos irregulares ou tamanhos muito grandes ou pequenos precisaremos de métodos mais avançados que possam ser aplicados a qualquer caso. Ainda nesse capítulo apresentaremos alguns desses métodos.

2.1.4 Volume de um Paralelepípedo Reto Retângulo.

Um paralelepípedo reto retângulo fica inteiramente determinado quando conhecemos três de suas arestas, concorrentes num mesmo vértice, conforme observamos na figura 15. Nesse caso, dizemos que as arestas a, b e c representam, respectivamente, o comprimento, a largura e a altura do cubo, ou seja, as dimensões desse sólido. Um caso particular de paralelepípedo reto retângulo é o cubo, o qual possui todas as arestas com o mesmo comprimento e seis faces quadradas iguais.

Figura 15: Paralelepípedo reto retângulo.



Fonte: Adaptado de Souza et. al (2009)

Para determinarmos o volume de um cubo C cuja aresta mede a unidades de comprimento, sendo a um número real positivo, basta efetuarmos o produto das medidas das três arestas que concorrem num mesmo vértice. Logo a expressão algébrica que determina o volume desse cubo é $\boldsymbol{V_C} = a^3$, conforme demonstraremos na sequência.

Teorema 1. O volume (V) de um cubo de aresta a, sendo a um número real positivo, é determinado pelo produto de suas três dimensões.

Demonstração: Consideraremos, nesse caso, três possibilidades para a medida da aresta *a*. A primeira quando *a* for um número natural, a segunda racional e, por fim, quando *a* for um número irracional.

1ª possibilidade: Sabemos, por definição, que o volume de um cubo unitário é igual a 1. Logo, se *a* é um número natural, então um cubo cuja aresta mede *a* unidades de comprimento pode ser decomposto em a^3 cubos unitários justapostos, portanto o volume do cubo *C* é

$$\boldsymbol{V_C} = a^3.$$

2ª possibilidade: Seja $a = \frac{p}{q}$, com p e q números naturais, $q \neq 0$. Seja *U* o cubo unitário. Sabemos que $\boldsymbol{V_U} = 1$. Dividamos a aresta do cubo unitário em *q* partes iguais. Assim, cada uma dessas partes medirá $\frac{1}{q}$. Seja *U*' o cubo cuja aresta é uma dessas partes. Logo sua aresta mede $\frac{1}{q}$. Claramente o cubo unitário *U* pode ser decomposto em q^3 cubos *U*\`. Assim, $\boldsymbol{V_U} = q^3 \cdot \boldsymbol{V_{U'}}$.

Como $\boldsymbol{V_U} = 1$, segue-se imediatamente que

$$\boldsymbol{V_{U'}} = \frac{1}{q^3}.$$

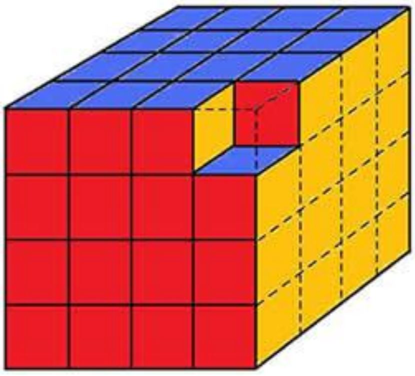
Seja, agora, *C* o cubo com areta *p* vezes a aresta de *U*´. Então,

$$\boldsymbol{V_C} = p^3 \times \boldsymbol{V_{U'}} = \frac{p^3}{q^3}, \text{ ou seja, } \boldsymbol{V_C} = \left(\frac{p}{q}\right)^3.$$

Portanto, concluímos que o volume de um cubo *C* cuja aresta é $a = \frac{p}{q}$, com p e q números naturais, sendo $q \neq 0$, é determinado por

$$\boldsymbol{V_C = a^3}.$$

Figura 16: Cubos justapostos - exemplo I.



Fonte: Espmat/UFRGS/Geometria

3ª possibilidade: Seja a é um número irracional $\forall x < a^3$, $\exists r \in Q \mid x < r^3 < a^3$. Sejam Z e C os cubos de arestas r e a, respectivamente. Então

$$x < \boldsymbol{V_Z} < \boldsymbol{V_C} \Rightarrow x < \boldsymbol{V_C}. \ (1)$$

Usando um raciocínio analogo,

$$\forall y > a^3 \ \exists s \in Q \mid a^3 < s < y.$$

Seja W o cubo de aresta s. Então, pelo acima,

$$y > \boldsymbol{V_W} > \boldsymbol{V_C} \Rightarrow \boldsymbol{V_C} < y. \ (2)$$

Combinando as equações (1) e (2), obtemos que

$$x < \boldsymbol{V_C} < y.$$

Façamos

$$x = a^3 - \epsilon, y = a^3 + \epsilon' , com \ \epsilon, \epsilon' > 0.$$

Então,

$$\forall \epsilon, \epsilon' > 0, x = a^3 - \epsilon < \boldsymbol{V_C} < a^3 + \epsilon'.$$

Como ϵ e ϵ' são inteiramente arbitrários, e podem portanto ser tomados tão pequenos quanto quisermos, vemos que

$$\boldsymbol{V_C} = a^3.$$

Com esse resultado, podemos agora enunciar e demonstrar o seguinte teorema:

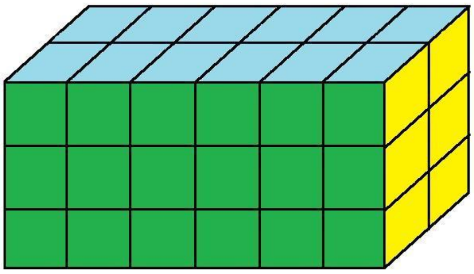
Teorema 2. O volume de um paralelepípedo reto retângulo de dimensões a, b e c, números reais positivos, é determinado pelo produto de suas dimensões.

Demonstração: Suponhamos, inicialmente, que P seja um paralelepípedo reto retângulo cujas três dimensões (arestas) tenham como medidas números racionais. Como as medidas são números racionais então podemos sempre reduzi-las a um mesmo denominador e, portanto, supor que essas medidas sejam $\frac{a}{q}, \frac{b}{q} e \frac{c}{q}$, com a, b, c e q sendo números naturais.

Decompondo as três arestas do paralelepípedo P, respectivamente, em, a, b e c, segmentos iguais, cada um deles com comprimento $\frac{1}{q}$, o paralelepípedo ficará decomposto em $a \cdot b \cdot c$ cubos justapostos, sendo que cada um desses cubos com arestas $\frac{1}{q}$ e, portanto, seu volume será igual à $\left(\frac{1}{q}\right)^3$. Logo, o volume do paralelepípedo P é

$$\boldsymbol{V_P} = a \cdot b \cdot c \cdot \frac{1}{q^3} = \frac{a}{q} \cdot \frac{b}{q} \cdot \frac{c}{q}.$$

Figura 17: Cubos justapostos - exemplo II.



Fonte: Espmat/UFRGS/Geometria

Portanto, o volume de um paralelepípedo reto retângulo P cujas medidas das dimensões são números racionais é determinado pelo produto de suas dimensões, ou seja,

$$\boldsymbol{V_P} = a \cdot b \cdot c.$$

Agora, cabe-nos demonstrar que o teorema também é válido quando pelo menos uma das medidas das dimensões (arestas) seja um número irracional. Para isso, vamos considerar um paralelepípedo reto retângulo P cujas medidas das dimensões medem a, b e c, onde pelo menos uma dessas medidas seja um número irracional.

Suponhamos que um número μ seja menor que $a \cdot b \cdot c$. Dessa forma, podemos encontrar números racionais l, m e n tais que $l < a$, $m < b$, $n < c$ tão próximos de a, b e c, respectivamente, que $\mu < l \cdot m \cdot n < a \cdot b \cdot c$. Assim, o paralelepípedo P contém um paralelepípedo menor Q cujas arestas medem l, m e n, logo, o volume do paralelepípedo Q é menor que o paralelepípedo P, ou seja, $\boldsymbol{V_Q} < \boldsymbol{V_P}$. Portando, $\mu < l \cdot m \cdot n = \boldsymbol{V_Q} < \boldsymbol{V_P}$, isto é, $\mu < \boldsymbol{V_P}$.

Analogamente considerando um número $\gamma > a \cdot b \cdot c$, podemos encontrar números racionais r, s e t, tais que $r > a$, $s > b$ e $t > c$ tão próximos de a, b e c, respectivamente, que $a \cdot b \cdot c < r \cdot s \cdot t < \gamma$. Dessa maneira, o paralelepípedo P está contido em um paralelepípedo R maior cujas arestas medem r, s e t, logo, o paralelepípedo P é menor que o paralelepípedo R, ou seja, $\boldsymbol{V_P} < \boldsymbol{V_R}$. Assim, temos que $\boldsymbol{V_P} < r \cdot s \cdot t = \boldsymbol{V_R} < \gamma$, isto é, $\boldsymbol{V_P} < \gamma$. Como $\mu < a \cdot b \cdot c < \gamma$, segue que

$$\boldsymbol{V_P} = a \cdot b \cdot c.$$

Portanto, o volume de qualquer paralelepípedo reto retângulo é dado pelo produto de suas três dimensões.

Até o momento, apresentamos uma expressão para determinar o volume de um paralelepípedo reto retângulo. No entanto, para calcular o volume de outros sólidos, necessitamos de métodos mais abrangentes como, por exemplo, o Princípio de Cavalieri, o qual apresentaremos a seguir.

2.1.5 Princípio de Cavalieri

No ensino médio o estudo de volume de sólidos geométricos tem como uma das bases o princípio de Cavalieri, o qual “[...] deve ser tomado como ponto de partida para o estudo de volumes de sólidos (cilindro, prisma, pirâmide, cone e esfera), permitindo ao aluno compreender o significado das fórmulas.” (BRASIL, 2006, p. 75-76).

A demonstração desse princípio é uma aplicação mediata do teorema de Fubini, do século XX, sendo feita com uso da Teoria da Medida. No entanto, apesar de ser um teorema, esse princípio é tratado, nos livros didáticos e textos de matemática elementar, apenas como postulado ou axioma. A opção por adotá-lo sem demonstração ocorre para “[...] evitar as dificuldades de se apresentar precocemente essa teoria.” (PATERLINI, 2010, p. 43). Segundo o autor, o responsável em suprir tais dificuldades é o professor, que, por meio de uma explicação plausível, apresenta a ideia traduzida por esse princípio aos estudantes do ensino médio, os quais não oferecem resistência em aceitá-la.

Os princípios de Cavalieri ou *método dos indivisíveis* foi desenvolvido pelo matemático Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647) e publicado em 1635 por meio do livro *Geometria Indivisibilibus*. No entanto, de acordo com Boyer (1996), o método dos indivisíveis, como era chamado por Cavalieri, já era utilizado pelos antigos gregos para obtenção de volumes de sólidos, como por exemplo, Demócrito (460 - 370 a. C.) e Arquimedes (287 – 212 a. C.).

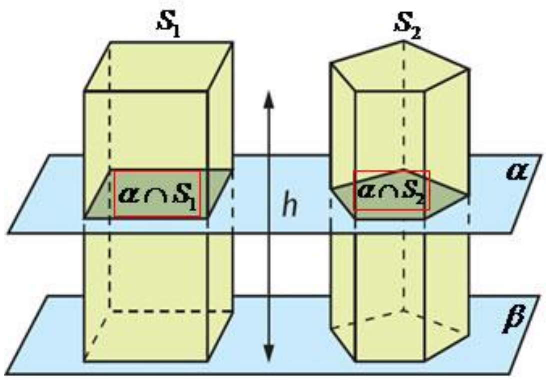
A obra apresentada por Cavalieri, segundo Eves (2004), é considerada excessivamente longa e “[...] pouco clara, sendo difícil até descobrir o que ele entendia por indivisível.” (p. 425). Entretanto, a utilização dos seus resultados no cálculo de áreas e volumes são fatores que comprovam a sua validade. Nesse sentido, ao serem aceitos como verdadeiros, seus resultados nos permitem “[...] resolver muitos problemas de mensuração que normalmente requereriam técnicas avançadas de cálculo.” (EVES, 2004, p.426).

Os resultados apresentados por Cavalieri deram origem a dois princípios, sendo um relativo ao cálculo de áreas e o outro ao cálculo de volumes. Contudo, discutiremos aqui apenas o princípio utilizado para o cálculo de volumes, cujo valor prático será evidenciado na sequência.

2.1.5.1 Princípio de Cavalieri para o Cálculo de Volumes.

De acordo com esse princípio, ao tomarmos dois sólidos, S_1 e S_2, com bases em um mesmo plano β, sendo este horizontal, se todas as seções transversais (interseções dos planos paralelos a β com os sólidos) dos dois sólidos, na mesma altura, tem a mesma área, então S_1 e S_2 têm o mesmo volume.

Figura 18: Ilustração do Princípio de Cavalieri.



Fonte: Lula (2013).

Dessa forma, o princípio de Cavalieri que utilizaremos em nosso trabalho pode ser enunciado da seguinte forma:

Princípio de Cavalieri: Dados dois sólidos S_1 e S_2 com bases sobre um mesmo plano. Se qualquer plano α, paralelo ao plano β, secciona S_1 e S_2 segundo figuras planas $\alpha \cap S_1$ e $\alpha \cap S_2$ de mesma área, então os sólidos S_1 e S_2 têm o mesmo volume.

Conforme já dissemos anteriormente, o princípio de Cavalieri é um teorema, ou seja, pode ser demonstrado, porém, sua demonstração envolve conceitos mais avançados da Teoria da Medida, logo tomaremos seu resultado como verdadeiro. Na sequência, apresentaremos como esse resultado pode ser aplicado para calcular o volume de outros sólidos.

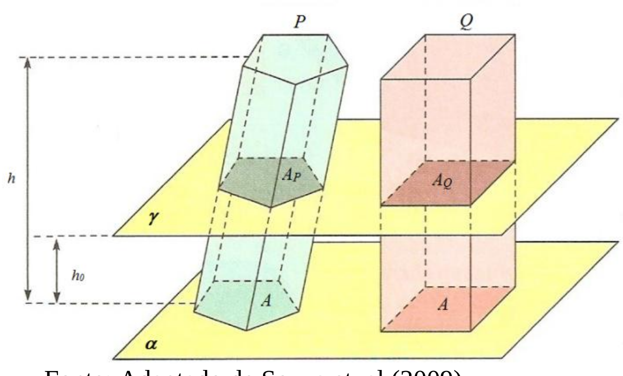
2.1.5.2 Cálculo do Volume de um Prisma.

Demonstramos, anteriormente (Teoremas 1 e 2), que o volume de um cubo e de um paralelepípedo reto retângulo, dois casos particulares de prismas, é determinado pelo produto de suas dimensões. Agora, com base no princípio de Cavalieri, demonstraremos que o volume de um prisma qualquer pode ser determinado pelo produto da área da base pela altura.

Teorema 3. O volume de um prisma qualquer é determinado pelo produto da área da base pela altura.

Demonstração: Sejam A e h a área da base altura, respectivamente, de um prisma P e, α um plano horizontal inferior que o contém. Consideremos também um paralelepípedo reto retângulo Q, cuja base inferior esta sobre α, com altura e área da base iguais as do prisma. Tomemos agora, um plano γ, paralelo a α, que secciona os dois sólidos a uma altura h_0 do plano α, conforme podemos observar na ilustração da figura 19.

Figura 19: Áreas equivalentes - exemplo I.



Fonte: Adaptado de Souza et. al (2009).

Notemos que os dois sólidos são seccionados pelo plano γ produzindo duas seções de áreas A_P e A_Q no prisma P e no paralelepípedo Q, respectivamente. Sabemos, por **definição**[16], que o paralelepípedo também é um prisma e que em todo prisma uma seção paralela à base é congruente com essa base[17]. Logo, podemos concluir que essas seções têm áreas iguais, ou seja, $A_P = A = A_Q$.

Dessa forma, como os dois sólidos possuem a mesma altura e as seções, determinadas por um plano paralelo a base, possuem a mesma área, então, pelo Princípio de Cavalieri, seus volumes são iguais. Como o volume do paralelepípedo reto retângulo é determinado pelo produto de suas três dimensões ($\boldsymbol{V_{Paralelep\acute{\imath}pedo}} = a \cdot b \cdot c$), **Teorema 2**, o que, neste caso, equivale a dizer que o volume do paralelepípedo é igual ao produto da área da base pela altura ($\boldsymbol{V_{Paralelep\acute{\imath}pedo}} = A \cdot h$), concluímos que o volume do prisma P também é determinado pelo produto da área da base pela altura, isto é,

$$\boldsymbol{V_P} = A \cdot h.$$

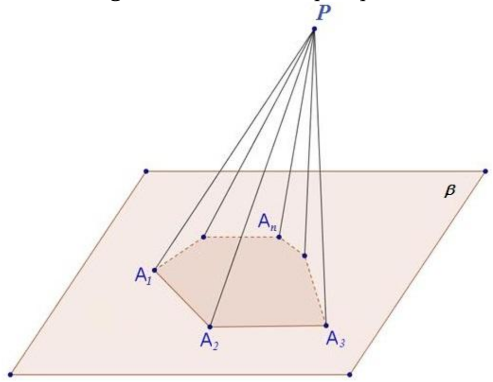
Percebemos, na demonstração anterior, que ao aplicarmos o princípio de Cavalieri reduzimos o cálculo de volumes ao cálculo de áreas. Essa mesma ideia pode ser aplicada para deduzir as fórmulas de outros sólidos. Dessa forma, daremos sequência, nesse trabalho, com o cálculo do volume de uma pirâmide.

2.1.5.3 Cálculo do Volume de uma Pirâmide.

Definição 1: Seja $A_1A_2A_3...A_n$ um polígono convexo, a base da pirâmide, situado em um plano horizontal β e, P um ponto, fora do plano de β, denominado de vértice da pirâmide. A pirâmide fica determinada quando ligamos o ponto P a todos os pontos do polígono e seu interior. Logo, a reunião de todos os segmentos que tem uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer do polígono constitui a pirâmide R, de base $A_1A_2A_3...A_n$ e vértice P.

[16] Paralelepípedo é a designação dada a um prisma formado por duas faces (bases) poligonais, inferior e superior, paralelas e congruentes, cujas faces laterais são paralelogramos.
[17] Tomamos como verdade que as seções determinadas em um prisma por planos paralelos à base são congruentes, entretanto, tal afirmação pode ser demonstrada (LIMA, 2009).

Figura 20: Pirâmide qualquer.



Fonte: Adaptado de Portal da Matemática.

Assim como no prisma, uma pirâmide será denominada de acordo com sua base, isto é, se sua base é um triângulo, então a denominaremos de pirâmide triangular ou tetraedro, se a base for um quadrilátero será dita pirâmide quadrangular e assim sucessivamente.

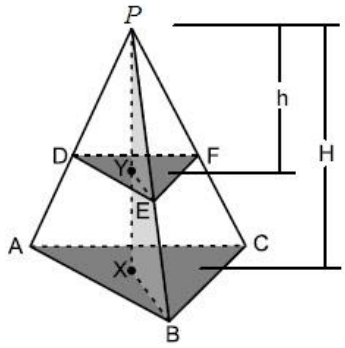
Se a base de uma pirâmide for um polígono regular e a altura da mesma coincidir com o centro desse polígono, a pirâmide será classificada como regular ou reta. Nesse caso, todas as arestas e faces laterais serão, respectivamente, congruentes e triângulos isósceles idênticos[18]. As pirâmides que não se encaixam no contexto acima descrito são chamadas de oblíquas.

Antes de demonstrarmos os próximos teoremas, apresentaremos algumas propriedades que julgamos serem fundamentais para a compreensão dos mesmos. Tais propriedades, referentes às pirâmides triangulares, são importantes, pois podem ser estendidas a outras pirâmides.

Inicialmente, consideraremos uma pirâmide *Q*, de base triangular *ABC*, vértice *P* e altura *H*, seccionada por um plano, paralelo à base, a uma distância *h* do vértice *P*. Tomaremos também, os pontos *X* e *Y*, situados, respectivamente, na base e na seção, dessa pirâmide, estando ambos localizados sobre a perpendicular baixada pelo vértice *P*, conforme mostra a figura 21 a seguir:

[18] Tomamos tal afirmação como verdade, entretanto, a mesma pode ser demonstrada (LIMA, 2009).

Figura 21: Razão de semelhança - exemplo I.



Fonte: Adaptado de Lula (2013).

Agora, mostraremos que os triângulos *DEF* e *ABC* são semelhantes, sendo $\frac{h}{H}$ a razão de semelhança e, consequentemente, $\left(\frac{h}{H}\right)^2$ a razão entre as áreas dos triângulos *DEF* e *ABC*.

Primeiramente, vamos mostrar que os triângulos *ABC* e *DEF* são realmente semelhantes com razão *k*. Para isto, observemos, na figura 21, os triângulos *PDE* e *PAB*. Notemos, que os segmentos *DE* e *AB* são paralelos, então, pelo Teorema Fundamental[19], os triângulos *PDE* e *PAB* são semelhantes. Dessa forma, podemos dizer que

$$\frac{PD}{PA} = \frac{PE}{PB} = \frac{DE}{AB} = k. \quad \text{(I)}$$

Analogamente, os triângulos *PEF* e *PBC* também são semelhantes, pois os segmentos *EF* e *BC* são paralelos. Logo, teremos

$$k = \frac{PE}{PB} = \frac{PF}{PC} = \frac{EF}{BC}. \text{ (II)}$$

Da mesma forma, os triângulos *PDF* e *PAC* são semelhantes, pois, assim como nos casos anteriores, os segmentos *DF* e *AC* também são paralelos. Então, podemos afirmar que

$$k = \frac{PF}{PC} = \frac{PD}{PA} = \frac{DF}{AC}. \text{ (III)}$$

Logo, por (I), (II) e (III), concluímos que

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k.$$

Portanto, os triângulos *DEF* e *ABC* são realmente semelhantes com razão *k*.

[19] Teorema Fundamental: Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e encontra os outros dois lados em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.

Por fim, cabe-nos mostrar que $k = \frac{h}{H}$. Para isto, observemos, figura 21, os triângulos *PYE* e *PXB*. Nota-se, facilmente, que esses triângulos são semelhantes, pois os segmentos *YE* e *XB* são paralelos, o que nos remete a dizer que

$$\frac{PY}{PX} = \frac{YE}{XB} = \frac{PE}{PB} = k\,.$$

Como o segmento *PY* é perpendicular ao plano da seção, com *PY* = *h*, e o segmento *PX* é perpendicular ao plano da base, com *PX* = *H*, então os triângulos *PYE* e *PXB* são, respectivamente, retângulos em *Y* e X, logo, $k = \frac{PY}{PX} = \frac{h}{H}$. Portanto, os triângulos *DEF* e *ABC* são semelhantes e $k = \frac{h}{H}$.

A análise apresentada acima, nos permite, enfim, determinar uma relação entre as áreas da base e da seção. Nesse caso, consideraremos h_1 a altura relativa à base *EF*, do triângulo *DEF*, e h_2 a altura relativa à base *BC* do triângulo *ABC*. Como os triângulos *ABC* e *DEF* são semelhantes, então todos os segmentos opostos ao mesmo ângulo desses triângulos são proporcionais e a razão da proporção será dada por $\frac{h}{H}$. Logo, podemos afirmar que:

$$A_{DEF} \text{ (Área do triângulo } DEF\text{)} = \frac{EF \cdot h_1}{2},$$

$$A_{ABC} \text{ (Área do triângulo } ABC\text{)} = \frac{BC \cdot h_2}{2},$$

$$\frac{A_{DEF}}{A_{ABC}} \text{ (Razão entre as áreas)} = \frac{\frac{EF \cdot h_1}{2}}{\frac{BC \cdot h_2}{2}} \Rightarrow \frac{A_{DEF}}{A_{ABC}} = \frac{EF \cdot h_1}{BC \cdot h_2}.$$

Como $\frac{EF}{BC} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{h}{H}$, então,

$$\frac{A_{DEF}}{A_{ABC}} = \frac{h}{H} \cdot \frac{h}{H} \Rightarrow \frac{A_{DEF}}{A_{ABC}} = \left(\frac{h}{H}\right)^2.$$

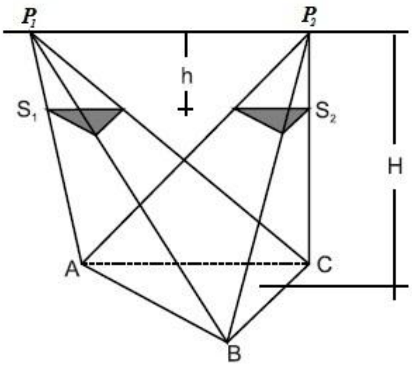
Portanto, $\left(\frac{h}{H}\right)^2$ é a razão entre as áreas dos triângulos *DEF* e *ABC.*

Agora, com as propriedades acima apresentadas, podemos demonstrar os seguintes teoremas:

Teorema 4: Duas pirâmides de mesma base e mesma altura possuem o mesmo volume.

Demonstração: Sejam K e L duas pirâmides de mesma base triangular, ABC, mesma altura, H, e vértices, P_1 e P_2, seccionadas por um plano, paralelo à base, a uma distância h dos vértices, o qual constitui duas seções de áreas S_1 e S_2 em K e L, respectivamente.

Figura 22: Áreas equivalentes - exemplo II.



Fonte: Adaptado de Lula (2013).

Nota-se, facilmente, que as seções S_1 e S_2 possuem a mesma área, pois

$$\frac{A_{ABC}}{S_1} = \frac{A_{ABC}}{S_2} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 \Rightarrow S_1 = S_2 .$$

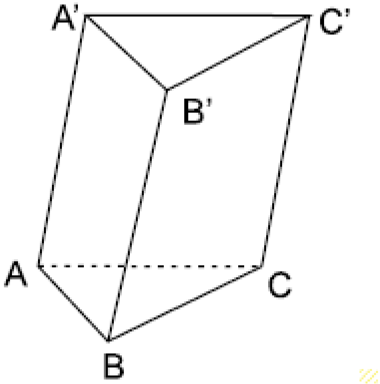
Logo, pelo princípio de Cavalieri, concluímos que as pirâmides K e L possuem o mesmo volume.

Teorema 5: O volume de uma pirâmide triangular é um terço do produto de sua altura pela área da base.

Demonstração: Seja Q um prisma triangular de base ABC e altura h, então, o volume desse prisma será determinado pelo produto da área da base pela altura, ou seja,

$$\boldsymbol{V_Q} = \mathrm{A}_{ABC} \cdot h.$$

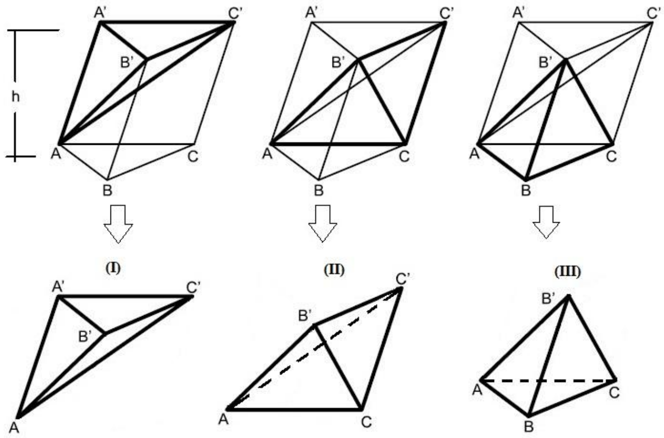
Figura 23: Prisma.



Fonte: Guia do professor.

Dividiremos, nesse momento, o prisma Q em três pirâmides triangulares, conforme a figura 24 a seguir:

Figura 24: Partição do prisma em pirâmides.



Fonte: Adaptado de Guia do Professor - UNICAMP.

Sabemos que em um prisma as bases paralelas possuem a mesma área, então as áreas das bases do prisma Q, figura 23, são iguais, isto é, $A_{ABC} = A_{A'B'C'}$. Logo, observando a figura 24, temos que:

i. As pirâmides I e III têm o mesmo volume.

Nesse caso, consideraremos $A'B'C'$ e A, respectivamente, a base e o vértice da pirâmide I e, da mesma forma, ABC e B', a base e o vértice da pirâmide III. Como as duas pirâmides possuem bases e alturas iguais, logo, pelo **Teorema 4**, o volume da pirâmide I é igual o volume da pirâmide III, ou seja,

$$\boldsymbol{V_I = V_{III}}.$$

ii. As pirâmides I e II têm o mesmo volume.

Agora, consideraremos *AB'C'* e *A'*, respectivamente, a base e o vértice da pirâmide I, assim como, *AB'C'* e *C*, a base e o vértice da pirâmide II. Como no caso anterior, as duas pirâmides possuem bases e alturas iguais, logo o volume da pirâmide I é igual o volume da pirâmide II, ou seja,

$$\boldsymbol{V_I = V_{II}}.$$

Dessa forma, por i e ii, concluímos que $\boldsymbol{V_I = V_{II} = V_{III}}$. Logo, o prisma *Q* foi dividido em três pirâmides triangulares com o mesmo volume, então:

$$\boldsymbol{V_P} = 3 \cdot \boldsymbol{V_{Pirâmide\Delta}} = A_{ABC} \cdot h \Rightarrow \boldsymbol{V_{pirâmide\Delta}} = \frac{1}{3} A_{ABC} \cdot h.$$

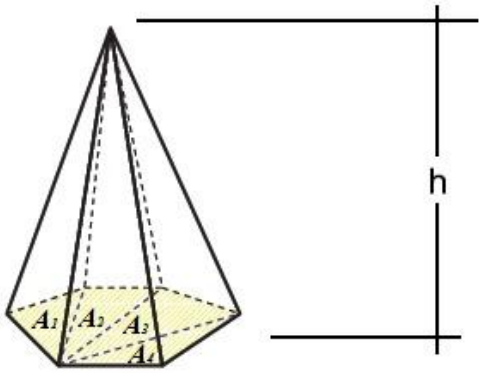
Portanto, o volume de uma pirâmide triangular é dado por um terço do produto de sua altura pela área da base.

Por fim, cabe-nos demonstrar que esse resultado é válido para pirâmides em geral.

Teorema 6: O volume de uma pirâmide qualquer é um terço do produto de sua altura pela área da base.

Demonstração: Para demonstrarmos esse teorema, devemos observar que qualquer pirâmide pode ser dividida em pirâmides de base triangular. Esta divisão é feita dividindo-se a base em triângulos, por meio de diagonais e definindo cada plano de divisão da pirâmide por uma dessas diagonais da base e pelo vértice da pirâmide, como nos mostra a figura 25 a seguir:

Figura 25: Pirâmide qualquer.



Fonte: Adaptado de Guia do Professor.

Suponhamos, então, que uma pirâmide *R*, de altura *h* e área da base *A*, tenha sido dividida em *n* triângulos de áreas A_1, A_2, A_3, A_4,..., A_n. O volume da pirâmide original será dado pelo somatório dos volumes das pirâmides triangulares de bases A_1, A_2, A_3, A_4,..., A_n. Logo,

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{pirâmide}} = \frac{1}{3}\ A_1 \cdot h + \frac{1}{3}\ A_2 \cdot h + ... + \frac{1}{3}\ A_n \cdot h$$

$$\text{“} \quad = \frac{1}{3}\ (A_1 + A_2 + ... + A_n) \cdot h$$

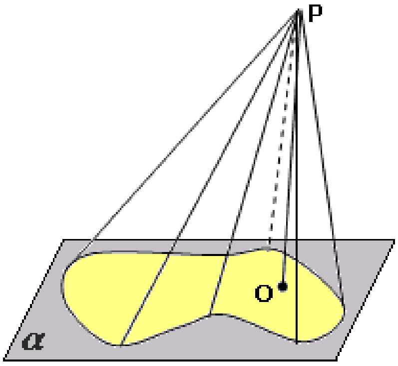
$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{pirâmide}} = \frac{1}{3} A \cdot h.$$

Portanto, o volume de uma pirâmide qualquer é dado por um terço do produto de sua altura pela área da base.

2.1.5.4 Calculo do Volume de um Cone.

Definição 2: Seja *A* uma figura plana, a base do cone, situada em um plano horizontal β e, *P* um ponto, fora do plano de *A*, denominado de vértice do cone. O cone fica determinado quando ligamos o ponto *P* a todos os pontos de *A*. Logo, a reunião de todos os segmentos que tem uma extremidade em *P* e a outra num ponto qualquer de *A* constitui o cone *K*, de base *A* e vértice *P*.

Figura 26: Cone qualquer.



Fonte: Adaptado de http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/cone/cone.htm.

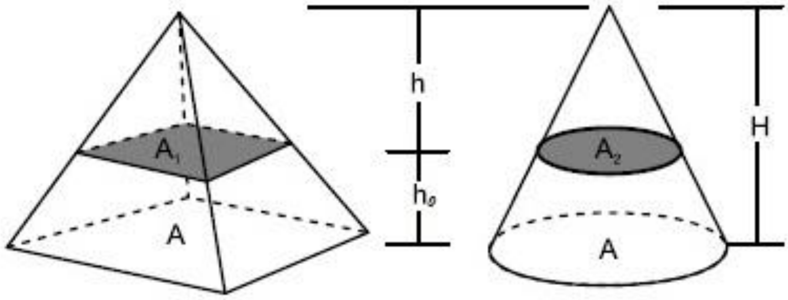
Um cone será classificado conforme a inclinação do seu eixo central em relação ao plano da base, isto é, se esse eixo for perpendicular ao plano, o cone será denominado de reto, caso contrário, de oblíquo. Cabe destacar também, que todo cone cuja base é um círculo será chamado de cone circular. Nesse caso, se o mesmo for reto e possuir a geratriz igual ao diâmetro da base será denominado de cone equilátero.

Para calcularmos o volume de um cone qualquer utilizamos uma fórmula similar à utilizada no cálculo do volume de uma pirâmide qualquer. Para compreendermos melhor este caso, enunciaremos e demonstraremos, na sequência, o seguinte teorema:

Teorema 7: O volume de um cone qualquer é um terço do produto de sua altura pela área da base.

Demonstração: Sejam A e H a área da base e altura, respectivamente, de um cone T e, α um plano horizontal inferior que o contém. Consideremos também uma pirâmide qualquer Q, cuja base inferior esta sobre α, com altura e área da base iguais as do cone. Tomemos agora, um plano γ, paralelo a α, que secciona os dois sólidos a uma altura h_0 do plano α, obtendo as seções de áreas A_1 e A_2 conforme podemos observar na ilustração da figura 27.

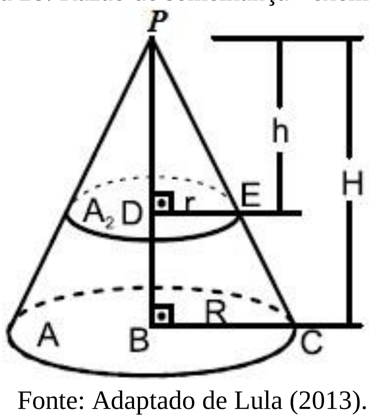
Figura 27: Áreas equivalentes - exemplo III.



Fonte: Adaptado de Lula (2013).

Como as seções A e A_2 são circunferências, logo tomaremos R e r como seus respectivos raios e, B e D como seus respectivos centros, conforme a figura 28 a seguir:

Figura 28: Razão de semelhança - exemplo II.



Fonte: Adaptado de Lula (2013).

Traçando a perpendicular *PB*, no cone *T*, obteremos os triângulos *PDE* e *PBC* semelhantes, assim, $\frac{r}{R} = \frac{h}{H}$. Então, o quociente entre estas áreas será

$$\frac{A_2}{A} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{h}{H}\right)^2.$$

Portanto,

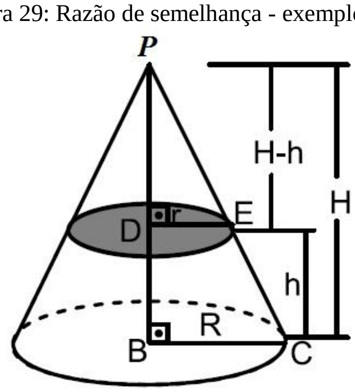
$$\frac{A_1}{A} = \left(\frac{h}{H}\right)^2 = \frac{A_2}{A} \Rightarrow A_2 = A_1.$$

Logo, pelo Princípio de Cavalieri, os volumes dos dois sólidos serão iguais, isto é, $\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{pir\hat{a}mide}} = \boldsymbol{V}_{\boldsymbol{Cone}} = \frac{1}{3} A \cdot h$.

Na sequência, definiremos tronco de cone e mostraremos que o volume desse sólido pode ser expresso pela seguinte fórmula: $\mathbf{V}_{\text{Tronco}} = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$.

Definição3: Sejam *H* e *R* a altura e o raio, respectivamente, de um cone reto *M* e, α um plano horizontal inferior que o contém. Consideremos também, um plano γ, paralelo a α, que secciona *M* a uma altura *h* do plano α. Este plano irá determinar dois sólidos: um cone *N*, de altura *(H – h)* e raio *r*; e o outro denominado de tronco do cone *M*, de altura *h* e raios *R* e *r*, conforme a figura 29 a seguir.

Figura 29: Razão de semelhança - exemplo III.



Fonte: Adaptado de Lula (2013).

Assim como na figura 28, ao traçarmos a perpendicular *PB*, figura 29, obteremos os triângulos *PDE* e *PBC* semelhantes, logo, por semelhança de triângulos, teremos

$$\frac{H}{R}=\frac{H-h}{r}\Rightarrow Hr=HR-hR\Rightarrow Hr-HR=-hR\Rightarrow$$
$$\Rightarrow H(r-R)=-hR\Rightarrow H=\frac{-hR}{(r-R)}\Rightarrow H=\frac{hR}{(R-r)}.$$

Como o volume do tronco do cone *M* é obtido quando subtraímos do cone *M*, de raio *R* e altura *H*, o cone *N*, de raio *r* e altura *h*, logo

$$\mathbf{V}_{\text{Tronco}}=\mathbf{V}_{\text{Cone (R)}}-\mathbf{V}_{\text{Cone (r)}}$$
$$\text{"}\quad=\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H-\frac{1}{3}\pi r^2\cdot(H-h)$$
$$\text{"}\quad=\frac{\pi}{3}\left(R^2H-r^2H+r^2h\right)$$
$$\text{"}\quad=\frac{\pi}{3}\left[\left(R^2-r^2\right)\cdot H+r^2h\right]$$
$$\text{"}\quad=\frac{\pi}{3}\left[\left(R^2-r^2\right)\cdot\frac{hR}{(R-r)}+r^2h\right]$$
$$\text{"}\quad=\frac{\pi}{3}\left[(R+r)\cdot(R-r)\cdot\frac{hR}{(R-r)}+r^2h\right]$$
$$\text{"}\quad=\frac{\pi}{3}\left[(R+r)\cdot hR+r^2h\right]$$
$$\mathbf{V}_{\text{Tronco}}=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right).$$

Portanto, a fórmula que expressa o volume do tronco de um cone reto é $\mathbf{V}_{\text{Tronco}}=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+Rr+r^2\right)$.

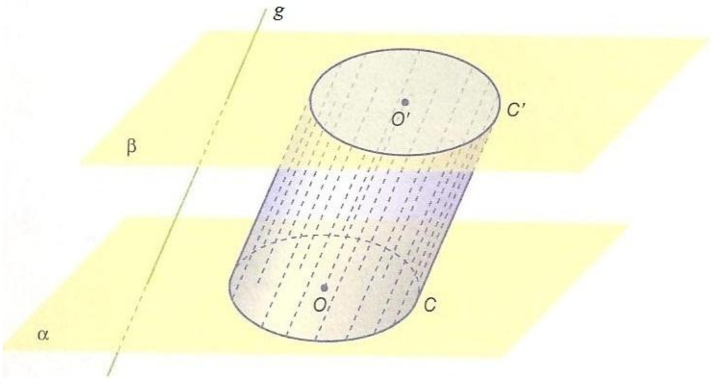
Cabe-nos destacar que esse mesmo raciocínio pode ser utilizado para determinarmos o volume do tronco de uma pirâmide qualquer.

Prosseguiremos, a seguir, com a definição de cilindro e demonstraremos que seu volume é determinado pelo produto da área da base pela altura.

2.1.5.5 Cálculo do Volume de um Cilindro.

Definição 4: Seja *C* uma figura plana, a base do cilindro, situada em um plano horizontal α e, *g* um segmento de reta, não paralelo a α, denominado de geratriz do cilindro. O cilindro fica determinado quando levantamos por cada ponto de *C*, um segmento de reta paralelo e com o mesmo comprimento que g. Logo, a reunião desses segmentos constitui o cilindro A, de base C e geratriz g.

Figura 30: Cilindro qualquer.



Fonte: Adaptado de http://loadinginformations.blogspot.com.br/2012_09_01_archive.html

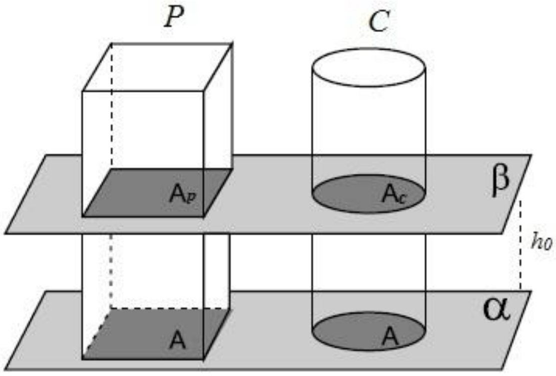
Quando a geratriz de um cilindro formar um ângulo reto com o plano que contém a sua base, o chamaremos de cilindro reto, caso contrário, cilindro oblíquo. Cabe-nos destacar também, que todo cilindro cuja base é um circulo será chamado de cilindro circular. Nos casos em que o diâmetro da base, de um cilindro circular reto, for igual a sua geratriz (altura), o denominaremos de cilindro equilátero.

Para determinarmos o volume de um cilindro, basta efetuarmos o produto da área da base pela altura, conforme apresentaremos na sequência.

Teorema 8. O volume de um cilindro é determinado pelo produto da área da base pela altura.

Demonstração: A demonstração desse teorema é análoga a demonstração do **Teorema 3**. Dessa forma, consideremos A (πR^2) e h a altura e a área da base, respectivamente, de um cilindro circular C e, α um plano horizontal inferior que o contém. Agora, construiremos um paralelepípedo reto retângulo P, cuja base inferior esta sobre α, com altura e área da base iguais as do cilindro. Tomemos agora, um plano β, paralelo a α, que secciona os dois sólidos a uma altura h_0 do plano α, conforme apresentado na ilustração da figura 31.

Figura 31: Áreas equivalentes - exemplo IV.



Fonte: Adaptado de Lula (2013).

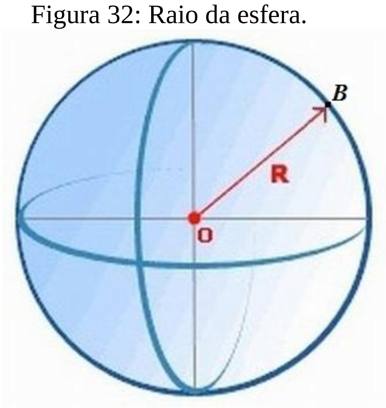
Como os dois sólidos possuem a mesma altura e as seções, determinadas pelo plano paralelo a base, possuem a mesma área[20], isto é, A_P = A = A_C, então, pelo Princípio de Cavalieri, seus volumes são iguais. Portanto, concluímos que o volume do cilindro, assim como o do prisma, é determinado por

$$\boldsymbol{V_C} = A \cdot h.$$

2.1.5.6 Cálculo do Volume de uma Esfera.

Definição 5: Denominamos de esfera, cujo centro e raio são, respectivamente, *O* e *R*, o conjunto de pontos do espaço cuja distância ao centro é menor ou igual ao raio *R*. Já o raio da esfera é a distância entre um ponto *B* qualquer, localizado na superfície da esfera, e o ponto *O*.

Figura 32: Raio da esfera.



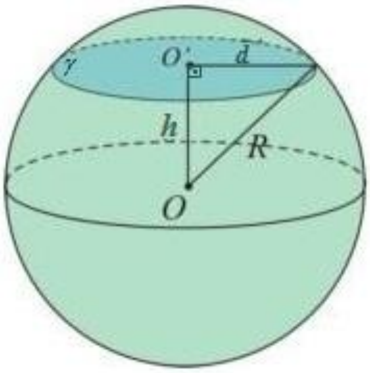
Fonte: Adaptado de http://soumaisenem.com.br/matematica/conhecimentos-geometricos/esferas

[20] Tomamos como verdade que e seções determinadas em um cilindro por planos paralelos à base são congruentes, entretanto, tal afirmação pode ser demonstrada (LIMA, 2009).

Assim como nos casos anteriores, para determinarmos a fórmula que expressa o volume de uma esfera utilizaremos o Princípio de Cavalieri. Logo, é necessário encontrar outro sólido cujas seções transversais tenham áreas iguais, em todos os níveis da esfera.

Dessa forma, deveremos, primeiramente, determinar as áreas das seções transversais da esfera. Para isso, consideremos um plano γ qualquer que secciona uma esfera *A*, de raio *R*, a uma distância h do seu centro, conforme destacado na figura 33 a seguir.

Figura 33: Área da seção.



Fonte: Adaptado de http://www.infoescola.com/geometria-espacial/esfera/

Nota-se que para a área da seção ($\mathbf{A}_S$) ser determinada basta conhecermos o raio da circunferência que foi formada. Como o raio da esfera e a distância do centro da esfera ao centro da circunferência são conhecidos, logo, pelo teorema de Pitágoras, teremos

$$R^2 = h^2 + d^2 \Rightarrow d^2 = R^2 - h^2.$$

Portanto, a área da seção será dada por $\boldsymbol{A_S} = \pi(R^2 - h^2)$.

Esse resultado permite-nos demonstrar o seguinte teorema:

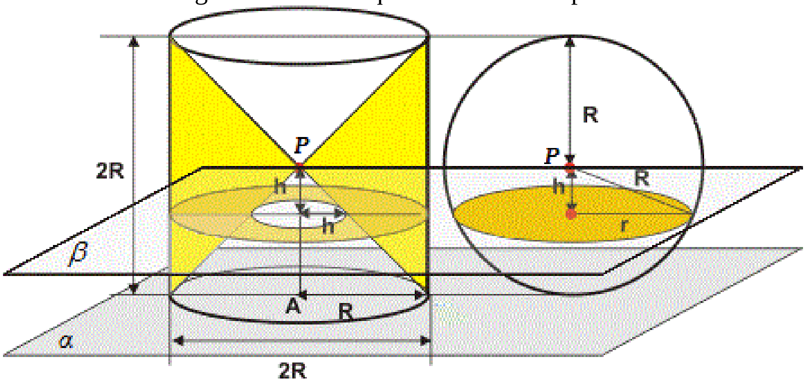
Teorema 9. O volume de uma esfera de raio *R* é $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Demonstração: Sejam *C* e *E*, respectivamente, um cilindro reto, cuja base é um círculo de raio *R* e a altura tem medida 2*R*, e uma esfera de raio R_1. Tomemos também, um plano horizontal α, tangente à esfera, no qual está contido a base de *C*, conforme mostrado na figura 34.

Construamos agora dois cones, no interior de *C*, com vértices no ponto médio do segmento que liga os centros das bases de *C* (superior e inferior) e com as mesmas bases de *C*. Logo, o sólido *T*, que é limitado exteriormente pela superfície lateral do cilindro e, interiormente, pelos dois cones, terá volume ($\boldsymbol{V_T}$) igual à diferença entre o volume de C ($2\pi R^3$) e o volume dos dois cones $\left(\frac{2}{3}\pi R^3\right)$, ou seja,

$$\mathbf{V}_T = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Figura 34: Áreas equivalentes - exemplo V.



Fonte: Adaptado http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1601.htm

Dessa forma, o teorema 9 estará demonstrado se provarmos que o volume de E é igual ao volume de T. Para isso, basta-nos mostrar que as seções de E e de T, produzidas por uma plano paralelo a α, possuem a mesma área.

Nesse caso, tomaremos um plano β, paralelo a α, a uma distância h do centro da esfera. Então, a interseção de β com a esfera E ($\beta \cap E$) constituirá um círculo de raio $\sqrt{R^2 - h^2}$, enquanto a interseção de β com o sólido T ($\beta \cap T$) constituirá uma coroa circular de raios externo e interno iguais, respectivamente, a R e a h. Assim, teremos

$$\text{área } (\beta \cap E) = \pi(R^2 - h^2)$$

e

$$\text{área } (\beta \cap T) = \pi(R^2 - h^2).$$

Dessa forma, área ($\beta \cap E$) = $\pi(R^2 - h^2)$ = área ($\beta \cap T$). Logo, pelo Princípio de Cavalieri, concluímos que o $\boldsymbol{V_T} = \boldsymbol{V_E}$. Portanto, a fórmula que expressa o volume de uma esfera de raio R é

$$\boldsymbol{V_E} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Diante desse enfoque, acreditamos ser possível desenvolver conceitos que favoreça ainda mais o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos, particularmente o cálculo de volumes de sólidos geométricos. Ao apresentar as fórmulas “prontas” os livros didáticos podem causar uma falsa impressão de que a matemática é um conjunto de regras prontas. Assim, entendemos que, além de apresentar conteúdos sem erros, principalmente em termos de definição e conceitos, é fundamental que os livros didáticos apresentem uma abordagem que beneficie, por exemplo, a compreensão da construção das fórmulas que permitem calcular o volume de sólidos.

Dessa forma, por acreditar nas possibilidades de contribuições que as demonstrações das fórmulas apresentadas nessa seção têm para o cálculo de volumes, uma vez que favorecem a compreensão de conceitos, propriedades e definições, assim como na influência que o livro didático exerce sobre a prática do professor e das poucas literaturas encontradas referentes ao tema é que delimitamos nosso problema de investigação, ou seja, *como é proposto o ensino de volume de sólidos geométricos em livros didáticos no ensino médio?* Em busca de respostas para essa questão traçamos um objetivo geral e dois específicos, os quais apresentaremos no próximo capítulo.

CAPÍTULO III - ESCOLHAS TEÓRICAS E METODOLÓGICAS

Nesta seção, apresentamos, inicialmente, os objetivos que direcionam o nosso trabalho e, posteriormente, algumas discussões em torno dos conceitos da Teoria Antropológica do Didático que são fundamentais em nossa pesquisa.

3.1 OBJETIVOS

Com a finalidade de responder à questão norteadora da nossa pesquisa, apresentada na seção anterior, traçamos nossos objetivos da seguinte forma:

Objetivo Geral é caracterizar o ensino de volume de sólidos geométricos em livros didáticos do Ensino Médio aprovados pelo PNLD/2012.

Para que tal objetivo seja atingido, precisamos, efetivamente, caracterizar a forma como a matemática está presente em torno desse conteúdo, e como os autores desses livros propõem que o ensino do volume de sólidos geométricos seja realizado. Dessa forma, delimitamos alguns **Objetivos Específicos**, tais como:

Em relação aos conteúdos de livros didáticos destinados ao Ensino Médio, cujo âmbito de nosso trabalho propõe identificar e analisar:

- Conceitos, procedimentos e algoritmos presentes no ensino de volume de sólidos geométricos;
- As escolhas didáticas realizadas pelos autores relativas ao ensino de volume de sólidos geométricos.

Para tanto, escolhemos como aporte teórico/metodológico a Teoria Antropológica do Didático (TAD) que, segundo Chevallard (1999), tem por objetivo estudar as atividades humanas perante as situações matemáticas oferecendo instrumentos para investigar e modelar a atividade matemática desenvolvida por uma determinada instituição que, no que se refere ao presente trabalho, o foco estaria na atividade matemática proposta nos livros didáticos. Segundo o autor, toda atividade humana consiste em cumprir uma tarefa t, a qual pertence a um conjunto de tarefas do tipo T, por meio de uma técnica τ, determinada por uma tecnologia θ, que por sua vez, é justificada por uma teoria Θ. Desse modo, é possível afirmar que qualquer atividade humana põe em prática uma organização, denominada pelo autor de praxeologia ou organização praxeológica, a qual é simbolizada por: [T, τ, θ, Θ].

De acordo com Chevallard, a análise de uma organização praxeológica presente em uma determinada instituição tem como base o estudo da organização matemática e organização didática proposta por essa instituição. A organização matemática é o estudo das atividades matemáticas que são propostas pela instituição e a organização didática refere-se à forma que é realizado o estudo em torno da organização matemática.

Assim, para que o nosso primeiro objetivo específico fosse alcançado, fez-se uma análise da organização matemática presente nos livros didáticos analisados que, em síntese, constituiu-se na identificação dos tipos de tarefas propostas, das técnicas mobilizadas para executar uma tarefa e das tecnologias e teorias que justificam a utilização de tais técnicas.

Por outro lado, para alcançarmos o nosso segundo objetivo específico propomos realizar uma análise por meio da organização didática, a qual, segundo Chevallard (1999) permite estudar o modo como é apresentada e estruturada a praxeologia matemática. Essa análise tem como propósito compreender as abordagens propostas pelos autores para o ensino de volume de sólidos geométricos nos livros didáticos analisados.

Na sequência deste trabalho, discussões serão desenvolvidas a respeito de alguns conceitos da Teoria Antropológica do Didático que julgamos serem importantes para o desenvolvimento da pesquisa.

3.2. TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO - TAD

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) foi desenvolvida pelo pesquisador francês Yves Chevallard tendo como foco central o estudo e o ensino do conhecimento matemático. De acordo com essa teoria, o conhecimento é fruto de alguma atividade humana, logo os conhecimentos matemáticos provêm de atividades matemáticas.

> O ponto crucial a este respeito dessas implicações é que pouco a pouco descobrimos que a TAD situa a atividade matemática, e, consequentemente, o estudo matemático da atividade, no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais. (CHEVALLARD, 1999, p.223 tradução nossa)[21].

[21] Le point crucial à cet égard, dont on découvrira peu à peu les implications, est que la TAD situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales.

Em nossa pesquisa, são justamente as atividades matemáticas apresentadas nos livros didáticos, em especial o estudo de volume de sólidos geométricos, que nos interessa. Essas atividades matemáticas podem ser descritas e analisadas por meio de um modelo denominado por Chevallard de praxeologia ou organização praxeológica.

A TAD utiliza-se de organizações praxeológicas para analisar como um objeto matemático existe em uma determinada instituição[22]. Nessa teoria, tudo pode ser considerado objeto, entretanto, para que ele exista é fundamental que seja reconhecido por uma instituição ou indivíduo. Por exemplo, para a instituição livros didáticos do 7º ano do ensino fundamental, o objeto (de estudo matemático) Arranjos, Permutações e Combinações não existe, mas ele existe para a instituição livros didáticos do 3º ano do ensino médio. Na presente pesquisa, considera-se o objeto como o volume de sólidos geométricos e a instituição como os livros didáticos do ensino médio.

Retomando a ideia de organizações praxeológicas, o termo praxeologia, pode ser dividido em duas expressões: Práxis, que significa prática, e Logus, que significa estudo. Assim, a praxeologia é o estudo da prática. Nesse sentido, entendemos que a relação intrínseca existente entre Práxis e Logos permite-nos formar a praxeologia matemática.

Uma organização praxeológica ou praxeologia é formada pelo quarteto: tarefas, técnicas, tecnologia e teoria. Chevallard considera como tarefas, tudo aquilo que é proposto para uma pessoa realizar. Essas tarefas são expressas por verbos de ação como: subir uma escada, fechar uma porta, efetuar uma adição, entre outros. De acordo com o autor, toda tarefa pertence a um grupo mais amplo denominado de tipo de tarefa. Do mesmo modo, todo tipo de tarefa pertence a um grupo mais amplo denominado de gênero de tarefa. Já a técnica, para Chevallard, é a maneira de realizar uma tarefa, ou seja, é o como fazer. Assim, para resolver um determinado tipo de tarefa é necessária pelo menos uma técnica. No entanto, alguns tipos de tarefas podem apresentar um grau de complexidade maior, sendo necessária a utilização de mais de uma técnica. Por outro lado, a tecnologia, segundo Chevallard, tem a função de justificar a técnica a fim de que essa possa garantir a realização de uma tarefa. Outra função que a tecnologia pode assumir é a de produzir técnicas, já que essas contêm alguns elementos tecnológicos. Da mesma forma, a teoria, de acordo com o autor, justifica e valida a tecnologia utilizada.

[22] Instituição para Chevallard pode ser uma escola, um livro, uma família, ou seja, um local - não apenas no sentido físico – onde possa ser desenvolvida uma praxeologia. No nosso caso, estamos estudando a instituição “livros didáticos” e a praxeologia que queremos identificar é aquela relativa ao volume de sólidos geométricos.

O quarteto apresentado no parágrafo anterior é representado por Chevallard da seguinte forma *O* = [T, τ, θ, Θ]. Esse quarteto é considerado, pelo autor, como sendo a junção dos blocos técnico-prático [T, τ] e tecnológico-teórico [θ, Θ]. O primeiro bloco, técnico-prático [T, τ], está relacionado ao saber-fazer enquanto o segundo bloco, tecnológico-teórico [θ, Θ], ao saber. Entretanto, Chevallard deixa claro que esses dois blocos estão estreitamente ligados, pois não pode existir saber-fazer sem que exista o saber, do mesmo modo não haverá o saber sem que haja o saber-fazer.

Cabe destacar que a praxeologia *O,* representado pelo quarteto [T, τ, θ, Θ], constitui uma praxeologia pontual, entretanto, raramente esse tipo de praxeologia aparece de forma isolada. É comum em uma determinada instituição uma teoria responder por várias tecnologias que, por sua vez, justifica várias técnicas. Dessa forma, as organizações pontuais, segundo Chevallard (1999), se unem para formar as praxeologias locais [T_i, τ_i, θ, Θ], centralizadas em uma determinada tecnologia, ou seja, vários *saber-fazer* justificados pelo mesmo saber. No mesmo sentido, as praxeologias locais se unem formando as praxeologias regionais [T_{ij}, τ_{ij}, θ, Θ], que são formadas em torno de uma mesma teoria. Por fim, as organizações globais, que são complexo praxeológico [T_{ijk}, τ_{ijk}, θ_{ij}, Θ_k], obtidas pela união de várias teorias Θ_k.

Ao encontro com o que foi apresentado até o momento sobre a noção de praxeologia, cabe-nos discutir mais pontualmente o emprego dado a esse conceito em nossa pesquisa. Dessa forma, discutiremos, na sequência, os conceitos de organização matemática e de organização didática.

A TAD apresenta o conhecimento matemático a partir de organizações matemáticas e didáticas. A organização matemática é “um estudo praxeológico das atividades matemáticas desenvolvidas pelo professor em sala de aula, ou então das atividades matemáticas que são propostas nos documentos oficiais ou livros didáticos” (OLIVEIRA, 2010, p. 44), ou seja, é a investigação dos tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias propostas.

Para compreendermos melhor uma organização matemática, tomamos, como exemplo, a seguinte questão: calcular o volume de um prisma triangular cuja área da base e altura medem, respectivamente, 6,92 cm² e 15 cm.

O tipo de tarefa que modela essa atividade pode ser “calcular o volume de um sólido conhecido”. A técnica de resolução que pode ser empregada, nesse exemplo, é “escolher uma fórmula de volume, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada”. O uso dessa técnica pode ser justificado adequadamente pelo princípio de Cavalieri. Nesse caso, consideramos essa justificativa como a tecnologia empregada. Como já abordamos anteriormente, a demonstração do princípio de Cavalieri é uma aplicação mediata do teorema de Fubini, sendo feita utilizando a teoria da medida. Logo, a teoria que justifica a tecnologia empregada é a Teoria da Medida.

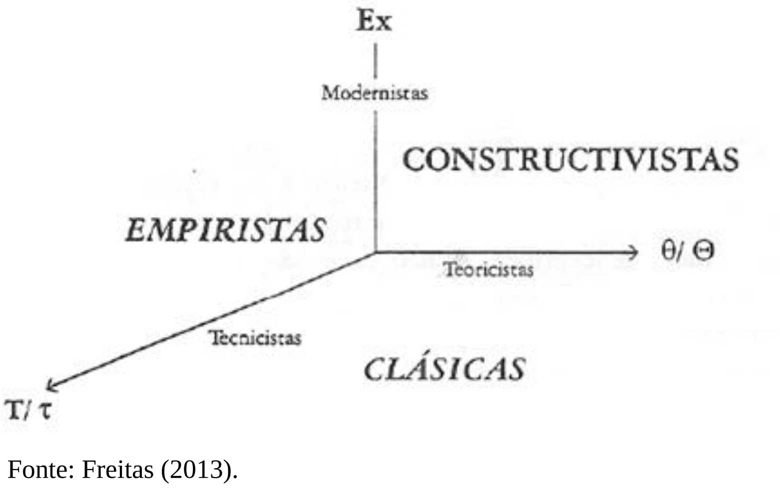
Já a organização didática refere-se ao modo como é construída e estruturada a organização matemática. Para analisar como uma organização didática apresenta uma organização matemática, recorreremos, aos momentos didáticos ou momentos de estudo abordados por Chevallard (1999). O autor apresenta seis momentos didáticos e, embora sejam expostos em uma determinada ordem, o autor ressalva o fato de não existir uma realidade cronológica entre eles.

- ✓ *O primeiro momento* caracteriza-se pelo (re) encontro com a organização matemática, isto é, se dá o primeiro contato com pelo menos um tipo de tarefa. Esse momento poderá, de acordo Carvalho (2012, p. 50), "[...] acontecer várias vezes em função do ambiente matemático e didático em que a tarefa se produz, pois o conteúdo matemático aparece em diferentes etapas do ensino, no mesmo ano (série) ou em outros diferentes". Em nossa dissertação descrevemos como ocorre esse primeiro encontro com o objeto volume dos sólidos geométricos nos Livros Didáticos analisados.
- ✓ *O segundo momento* é marcado pela exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica para resolvê-la. A elaboração de uma técnica é considerada, segundo Chevallard (1998) *apud* Oliveira (2010, p. 48), "como o "coração da atividade matemática", isso porque o autor atribui uma maior importância às discussões que levam à resolução do problema, ou seja, os procedimentos adotados que determinam a técnica que o resolverá". Apresentamos, em nossa pesquisa, os tipos de tarefas e técnicas relativas ao objeto volume dos sólidos geométricos.
- ✓ *O terceiro momento* contempla a constituição de um bloco tecnológico-teórico que possa validar a técnica. Esse momento não se dissocia dos demais, ocorre simultaneamente. De acordo com Oliveira (2010), dependendo do autor do livro, o terceiro momento pode vir a ser o momento do primeiro encontro com a Organização Matemática. Tomamos como exemplo, um livro de Geometria que apresenta, inicialmente, as definições e demonstrações das fórmulas referentes ao volume de uma pirâmide e posteriormente algumas atividades para que seja aplicado o saber apresentado. Nesse caso, a constituição do bloco tecnológico-teórico foi o primeiro encontro com a organização.

- ✓ Já *o quarto momento* acontece o trabalho com a técnica, tenta-se (re) formular e validar de modo a torná-la mais eficaz. Para Reis (2010, p. 28), "o desafio para melhorar uma técnica é que para fazer isso é preciso ampliar a tecnologia elaborada, este momento também permite colocar em prova o alcance da técnica, permitindo que a compreensão de que toda técnica é limitada". Portanto, esse é o momento em que testamos a abrangência da técnica na resolução dos tipos de tarefas.
- ✓ *O quinto momento* é o da institucionalização dos elementos que passam a integrar por definitivo a organização matemática. Esse momento, segundo Barbosa (2011), apresenta o que realmente é a Organização Matemática constituída, apontando quais elementos permanecerão na Organização Matemática e os que serão dispensados.
- ✓ Por fim, *o sexto momento* é marcado pela avaliação das técnicas e articulado a institucionalização propicia a reflexão do que foi validado. O que se avalia é a praxeologia, isto é, a abrangência das técnicas para a organização matemática que foi construída.

No presente trabalho, busca-se identificar esses momentos para compreender como o autor dos livros didáticos propõe a organização do conteúdo matemático em questão. Dessa forma, atentamo-nos também ao modelo construído por Gascón (2003), que busca esquematizar possíveis formas de organização didática. Esse modelo pode ser representado no tridimensional com os seguintes eixos: tecnicista, teoricista e modernista, conforme nos mostra a figura 35 a seguir.

Figura 35: Modelo epistemológico proposto por Gascón



Fonte: Freitas (2013).

De acordo com Gáscon (2003), a organização didática tecnicista prioriza o trabalho com a técnica. Neste caso, aprender significa dominar as técnicas de resolução, isto é, o aluno aprende por meio de treinamentos repetitivos. Já a teoricista é voltada exclusivamente para a teoria, ou seja, ensinar e aprender Matemática significa ensinar e aprender teoria. Nesse caso, a resoluções de problemas são consideradas como atividades secundarias que visam apenas auxiliar na aprendizagem das teorias. Para tanto, a organização didática modernista busca intensificar a atividade matemática com a exploração de tarefas e elaboração de técnicas, propondo aos alunos problemas de diferentes tipos, utilizando alguns resultados conhecidos ou técnicas diversas.

Gascón (2003) considera esses modelos de ensino extremamente reducionistas, pois enfatizam uma única dimensão da atividade matemática, ignorando as restantes. O autor destaca ainda, que esses modelos não aparecem nas instituições de maneira isolada, no entanto, participam de diferentes tipos de organizações didáticas, sempre com caráter misto e bastante complexo.

3.3 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE

Analisamos as 4 coleções mais adotadas[23] pelo PNLD/20012, tendo como foco os capítulos destinados ao volume dos sólidos geométricos. Dessa forma, apresentamos a análise de cada coleção e as devidas articulações entre elas em busca de revelar como o ensino desse conteúdo é proposto no ensino médio. Para tanto, analisamos os capítulos em que tal conteúdo é proposto separadamente. Essas separações se justificam por buscar na análise o nível de detalhamento exigido pela TAD.

A análise, sob a ótica da organização praxeológica, tem como objetivo evidenciar a organização matemática e didática, propostas nos livros didáticos para o ensino de volume. A análise da organização matemática consiste na identificação dos tipos de tarefas propostas, das técnicas mobilizadas, na resolução dessas tarefas e do bloco tecnológico-teórico que permite justificar o uso dessas técnicas. Já a análise da organização didática, tem como intuito analisar os seis momentos didáticos no ensino proposto (CHEVALLARD, 1999). Para isso, consideramos o livro do aluno e o manual do professor, que contém comentários e respostas das atividades, além de sugestões para o uso do livro e para o desenvolvimento do conteúdo em sala de aula, o que nos permite entender mais claramente a proposta do autor da coleção analisada.

---

[23] Fonte de consulta: Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE): http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos.

Cabe destacar que, das quatro coleções analisadas, só apresentamos a organização matemática e a organização didática da coleção mais adotada. Nossa intenção é promover discussões, junto aos membros da banca da qualificação, em busca de sugestões valiosas para o complemento do nosso trabalho.

3.3.1 Coleções Analisadas

No Guia do PNLD 2012 foram apresentadas as sete coleções aprovadas e disponibilizadas às escolas públicas, para que seus docentes pudessem escolher aquela que desejassem utilizar. Essa escolha, segundo o Fundo Nacional de Desenvolvimento (FNDE), deve ocorrer de forma democrática, cada escola tem autonomia para escolher a coleção de acordo com seu planejamento pedagógico. No entanto, em muitas escolas, esse processo de escolha tem ocorrido "[...] muito mais por ações desenvolvidas pelas editoras do que propriamente por orientações do FNDE/MEC ou das instâncias político-administrativas da secretaria estadual de educação." (ZAMBON; TERRAZZAN, 2013). Dessa forma, entendemos que nem sempre as coleções mais adotadas pelas escolas públicas são as escolhidas pelos docentes, o que nos leva a crer que as discussões realizadas entre os professores, em prol de uma escolha coerente com a necessidade pedagógica da escola, não são levadas em consideração no momento em que tais coleções são adotadas.

Com o intuito de enriquecer ainda mais as informações do nosso trabalho e, sabendo da importância do Guia do PNLD para o docente na escolha da coleção a ser utilizada, optamos por apresentar, na sequência, quatro coleções (Matemática - Ciência e Aplicações, Editora Saraiva; Matemática – Contexto e Aplicações, Editora Ática; Novo Olhar – Matemática, editora FTD; e Conexões com a Matemática, Editora Moderna) aprovadas pelo PNLD 2012, sendo estas as mais adotadas pelas escolas públicas, destacando os principais itens, do tema Volume dos Sólidos Geométricos, destacados nas resenhas do Guia do PNLD 2012. Posteriormente, ao longo de nossa pesquisa buscaremos identificar e analisar tais destaques.

3.3.1.1 Coleção I: Matemática - Ciência e Aplicações.

Esta coleção, que tem como autores Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Mauro Degenszajn, Roberto Périgo e Nilze Silveira de Almeida, foi a mais adotada pelas escolas públicas. O conteúdo de Volume de Sólidos Geométricos é apresentado, formalmente, no 2º ano do Ensino Médio do capítulo 10 ao capítulo 14. De acordo com o Guia do PNLD 2012 o Princípio de Cavalieri é apresentado e aplicado de maneira apropriada na obtenção das fórmulas do volume de sólidos geométricos. Entretanto, "[...] há imprecisões na argumentação lógica, pois são utilizados alguns conceitos que ainda não foram definidos e, em alguns casos, as afirmações feitas não são justificadas claramente." (p. 80).

3.3.1.2 Coleção II: Matemática – Contexto e Aplicações.

Esta coleção, que tem como autor Luiz Roberto Dante, foi a segunda mais adotada pelas escolas públicas. O conteúdo de Volume de Sólidos Geométricos é apresentado, formalmente, no 2º ano do Ensino Médio nos capítulos 11 e 12. Assim como na coleção I, o Princípio de Cavalieri é empregado, na dedução das fórmulas de volumes de sólidos, segundo o Guia do PNLD 2012, de maneira correta. Entretanto, a demonstração de alguns teoremas, importantes na compreensão de volume, como o de Talles, contém algumas imprecisões.

3.3.1.3 Coleção III: Novo Olhar – Matemática.

Tal coleção, de autoria de Joamir Roberto de Souza, foi a terceira mais adotada pelas escolas públicas. No entanto, diferentemente das duas primeiras coleções apresentadas, o conteúdo de Volume de Sólidos Geométricos é exposto formalmente no 3º ano do Ensino Médio nos capítulos 3 e 4. Embora não tenha inferido qualquer comentário a respeito do nosso tema de pesquisa, o Guia do PNLD 2012 deixa claro que "os poliedros, prismas, pirâmides, cilindros, cones, troncos e esferas são abordados com o rigor adequado, assim como a relação de Euler para poliedros convexos." (p. 102). Essa afirmação é muito pertinente ao nosso trabalho, tendo em vista que tanto os sólidos descritos, assim como a relação de Euller são elementos indispensáveis para a presente pesquisa.

3.3.1.4 Coleção IV: Conexões com a Matemática.

Por fim, escolhemos esta coleção, que tem como autora Juliane Matsubara Barroso, e que foi a quarta mais adotada pelas escolas públicas. O conteúdo de Volume de Sólidos Geométricos é apresentado formalmente no 2º ano do Ensino Médio nos capítulos 6 e 7. Nesta coleção, o Guia do PNLD 2012 destaca o uso frequente do Princípio de Cavalieri nas demonstrações de algumas fórmulas que envolvem volumes de sólidos. Por outro lado, na introdução ao método axiomático, “[...] nem sempre o rigor matemático é contemplado satisfatoriamente.” (p. 58).

CAPÍTULO IV – ANÁLISE DOS DADOS

Na sequência, realizamos o estudo da organização matemática visando identificar os tipos de tarefas sugeridas, as técnicas mobilizadas para a realização de cada tarefa e o bloco tecnológico-teórico que justifica o uso de cada técnica. Por fim, apresentamos o estudo da organização didática analisando os seis momentos didáticos no ensino proposto (CHEVALLARD, 1999), o qual nos possibilitou compreender e identificar as propostas dos autores, em particular da coleção mais adotada, no tratamento do tema em questão.

Cabe-nos destacar que os tipos de tarefas e técnicas identificadas estão presentes no(s) capítulo(s) destinado(s) a volume de sólidos Geométricos, nos livros do 2º ou 3º ano do ensino médio, tendo em vista que é nesses anos que o conteúdo citado é abordado formalmente nas escolas brasileiras.

4.1 TIPOS DE TAREFAS E TÉCNICAS IDENTIFICADAS NAS COLEÇÕES ANALISADAS

Após analisarmos as quatro coleções mais adotadas, descrevemos os principais tipos de tarefas identificadas assim como algumas observações, exemplificações e técnicas mobilizadas na resolução destes exemplos. Posteriormente, elaboramos duas listas com o objetivo de apresentar todos os tipos de tarefas identificadas assim como as técnicas utilizadas nas resoluções dos exemplos, exercícios resolvidos, exercícios propostos, atividades complementares, desafios, dentre outros. Identificamos e nomeamos, nessas listas, 6 tipos de tarefas e 12 técnicas contempladas nas quatro coleções analisadas. A seguir, traremos essas tarefas e, posteriormente, as técnicas para assim procedermos para a discussão.

4.1.1 Tipos de Tarefas (T)

Os tipos e subtipos de tarefas identificadas e nomeadas na Tabela 1 a seguir são derivados de uma análise refinada, sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático, acerca do conteúdo de volume de sólidos geométricos das quatro coleções apresentadas anteriormente.

Tabela 1: Tipos de tarefas identificadas.

Tipos de	Descrição	Subtipos de Tarefas	Quantidade	Quantidade

Tarefas			**de Subtipos**	**Total**
T1	Calcular o volume de um sólido.	$T1_1$ – Calcular o volume de um sólido conhecido. $T1_2$ – Calcular o volume de um sólido irregular.	408 30	438
T2	Calcular a área de uma determinada região de um sólido, dado seu volume.	$T2_1$ – Calcular a área da superfície total. $T2_2$ – Calcular a área da superfície Lateral.	19 5	24
T3	Calcular um determinado comprimento de um sólido, dado seu volume.	$T3_1$ – Calcular o comprimento da aresta. $T3_2$ – Calcular o comprimento da altura. $T3_3$ – Calcular o comprimento da diagonal. $T3_4$ – Calcular o comprimento do raio. $T3_5$ – Calcular o comprimento do diâmetro. $T3_6$ – Calcular o comprimento da geratriz. $T3_7$ – Calcular o comprimento de sólido. $T3_8$ – Calcular o comprimento da largura do sólido. $T3_9$ – Calcular o comprimento entre dois pontos.	19 45 2 13 2 1 2 1 1	86
T4	Calcular razões entre volumes e/ou comprimentos de sólidos.	$T4_1$ – Calcular a razão entre as alturas de dois sólidos $T4_2$ – Calcular a razão entre os volumes de dois sólidos	3 14	17
Tipos de Tarefas	**Descrição**	**Subtipos de Tarefas**	**Quantidade de Subtipos**	**Quantidade Total**

T5	Calcular a massa (peso) de um sólido conhecido, dado seu volume.	-	-	11
T6	Comparar o volume de sólidos conhecidos.	-	-	4

Fonte: dos autores da pesquisa.

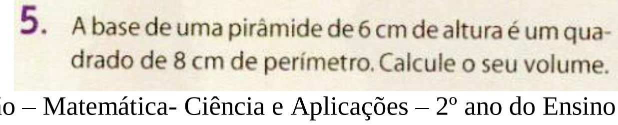
Apresentamos agora, para uma melhor compreensão, tanto os tipos de tarefas identificados, quanto os subtipos de tarefas gerados pelos tipos de tarefas. Cabe-nos destacar, que a ordem dos tipos de tarefas apresentados não condiz com qualquer grau de relevância, mas sim com a ordem de aparição em nossa análise.

4.1.1.1 T1: Calcular o volume de um sólido.

O tipo de tarefa T1 representa aproximadamente 76% de todas as atividades analisadas nas quatro coleções. Essa constatação vai ao encontro com o que foi apresentado por Morais (2013) em seus resultados, isto é, o autor da coleção valoriza as situações de medição, o que, segundo Morais, pode favorecer o desenvolvimento de concepções de volume como um número. A nosso ver, esse fato valoriza a definição intuitiva de volume apresentada por Lima (2009, 59), ou seja, volume de um sólido é “a quantidade de espaço por ele ocupada.”.

Para esse tipo de tarefa associamos dois subtipos de tarefa: $T1_1$ – Calcular o volume de um sólido conhecido; e $T1_2$ – Calcular o volume de um sólido irregular. O primeiro subtipo refere-se aos sólidos conhecidos, como paralelepípedos, prismas, pirâmides, tronco de pirâmides, cilindros, cones, tronco de cones, esferas, cunha esférica e fuso esférico. Já o segundo é direcionado aos sólidos irregulares, como uma pedra, uma panela, uma garrafa de refrigerante, dentre outros. A figura 36, a seguir, ilustra bem esse tipo de tarefa, particularmente o subtipo $T1_1$.

Figura 36: Exemplo de tipo de tarefa T1.



5. A base de uma pirâmide de 6 cm de altura é um quadrado de 8 cm de perímetro. Calcule o seu volume.

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do Ensino Médio, p. 208.

De acordo com a resolução apresentada pelo autor da coleção, figura 37, para resolver essa atividade deve-se, primeiramente, determinar a área da base da pirâmide para então calcular o volume da mesma. Cabe-nos destacar, que a aplicação direta da fórmula do volume de um determinado sólido, sem a necessidade de mobilizar outras técnicas, ocorre em boa parte das atividades analisadas. Quando isso não ocorre outras técnicas são mobilizadas, entretanto, sempre com o objetivo de auxiliar a aplicação da fórmula do volume, conforme observamos na figura a seguir.

Figura 37: Resolução, apresentada pelo autor da coleção, referente a figura 36.

base: losango em que d = 6 m e D = 10 m

$$\left.\begin{array}{l} H = 12\text{ m} \\ A_b = \frac{1}{2} \cdot D \cdot d = \frac{1}{2}(10\text{ m}) \cdot (6\text{ m}) = 30\text{ m}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 30 \cdot 12 \Rightarrow V = 120\text{ m}^3$$

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do Ensino Médio, p. 103 (Manual do Professor).

Nesse caso, foi necessário a mobilização de duas técnicas, as quais descrevemos da seguinte forma:

τ_1 – Escolher uma fórmula de área, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada.

e

τ_2 – Escolher uma fórmula de volume, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada.

Portanto, após a medida da área ser determinada basta substituí-la, assim como a medida da altura na fórmula do volume da pirâmide para que o mesmo seja determinado.

4.1.1.2 T2: Calcular a área de uma determinada região de um sólido, dado seu volume.

Este tipo de tarefa representa, aproximadamente, 4 % do total de atividades analisadas. A ele associamos dois subtipos de tarefa: $T2_1$ – Calcular a área total da superfície de um sólido conhecido; e $T2_2$ – Calcular a área lateral de um sólido conhecido. T2 refere-se a todas as atividades (que fornecem o volume) que propõem tanto o cálculo da área total quanto da área lateral de um sólido conhecido. Na figura 38, a seguir, observamos um exemplo desse tipo de tarefa.

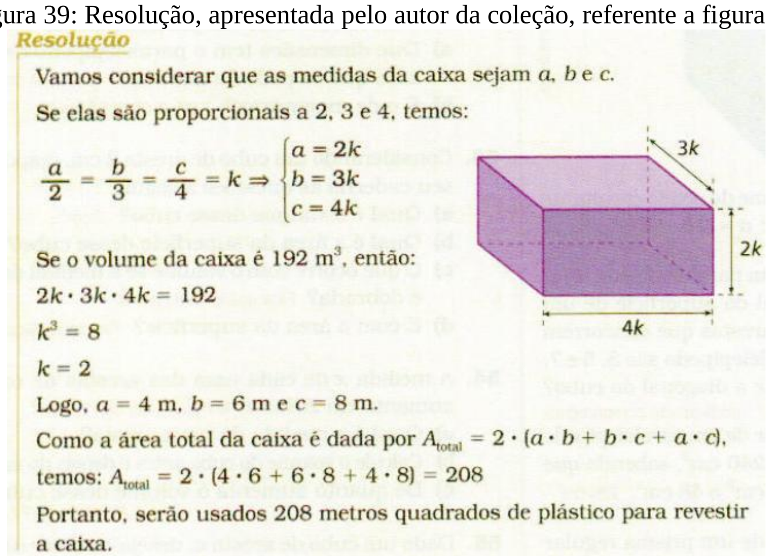
Figura 38: Exemplo de tipo de tarefa T2

R18. Uma caixa de isopor tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo, com arestas de medidas proporcionais a 2, 3 e 4, e ocupa um volume de 192 m³. Ela será revestida por uma película protetora de plástico. Quantos metros quadrados de plástico serão necessários para revestir essa caixa?

Fonte: Coleção – Conexões com a Matemática – 2º ano do Ensino Médio, p. 181.

Nesta atividade, ao analisarmos a resolução apresentada pelo autor da coleção (figura 39), identificamos a mobilização de três técnicas: a primeira remete-se a utilização das relações de proporcionalidade, onde o autor utiliza essa técnica para determinar as medidas das três dimensões do paralelepípedo reto retângulo; a segunda recai na aplicação da fórmula do volume do paralelepípedo. Neste caso, ele substitui os valores encontrados com a primeira técnica, nessa fórmula; e, por fim, a terceira técnica mobilizada implica na aplicação da fórmula da área total do paralelepípedo. Nela o autor substitui as medidas encontradas com as duas primeiras técnicas para determinar a área total do sólido em quentão.

Figura 39: Resolução, apresentada pelo autor da coleção, referente a figura 38.



Resolução

Vamos considerar que as medidas da caixa sejam a, b e c.

Se elas são proporcionais a 2, 3 e 4, temos:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k \Rightarrow \begin{cases} a = 2k \\ b = 3k \\ c = 4k \end{cases}$$

Se o volume da caixa é 192 m³, então:

$2k \cdot 3k \cdot 4k = 192$

$k^3 = 8$

$k = 2$

Logo, $a = 4$ m, $b = 6$ m e $c = 8$ m.

Como a área total da caixa é dada por $A_{total} = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c)$,

temos: $A_{total} = 2 \cdot (4 \cdot 6 + 6 \cdot 8 + 4 \cdot 8) = 208$

Portanto, serão usados 208 metros quadrados de plástico para revestir a caixa.

Fonte: Coleção – Conexões com a Matemática – 2º ano do Ensino Médio, p. 181.

Portanto, além das técnicas τ_1 e τ_2, já apresentadas anteriormente, outra técnica mobilizada nessa atividade foi a τ_3, a qual, definida por nós da seguinte forma:

τ_3 – Obter uma razão equivalente a uma razão dada, multiplicar ou dividir ambos os termos da razão dada por um número diferente de zero.

4.1.1.3 T3: Calcular o comprimento de um sólido, dado seu volume.

O tipo de tarefa T3 representa, aproximadamente, 15 % de todas as atividades analisadas. A esse tipo de tarefa associamos oito subtipos de tarefa: $T3_1$ – Calcular o comprimento da aresta; $T3_2$ – Calcular o comprimento da altura; $T3_3$ – Calcular o comprimento da diagonal; $T3_4$ – Calcular o comprimento do raio; $T3_5$ – Calcular o comprimento do diâmetro; $T3_6$ – Calcular o comprimento da geratriz; $T3_7$ – Calcular o comprimento de sólido; $T3_8$ – Calcular o comprimento da largura do sólido; e $T3_9$ – Calcular o comprimento entre dois pontos distintos. Consideramos para esses tipos de tarefa, quaisquer atividades que solicitem o cálculo de algum comprimento referente a um sólido geométrico. Porém, isto só será válido se a atividade analisada fornecer o volume do sólido em questão, conforme nos mostra a figura 40 a seguir.

Figura 40: Exemplo de tipo de tarefa T3

32. Qual deve ser a medida da aresta de uma caixa-d'água cúbica para que ela possa conter 8 000 ℓ de água?

Fonte: Coleção – Matemática- Contexto e Aplicações – 2º ano do Ensino Médio, p. 222.

Nesta atividade identificamos, a partir da resolução apresentada pelo autor da coleção, figura 41, a mobilização de duas técnicas: a primeira referente à aplicação da fórmula do volume do cubo, a qual foi utilizada pra determinar a medida da aresta do mesmo, e a segunda é a transformação da unidade de medida, de litros para metros. Vale ressaltar que essa segunda técnica, na maioria das atividades analisadas, não favorece uma compreensão mais profunda do conceito de volume e do papel das unidades, pois sua utilização nem sempre é justificada pelos autores das coleções, o que, segundo Morais (2013), pode reforçar a memorização de procedimentos, em vez de sua compreensão. Na figura a seguir, observamos a mobilização dessa técnica sem maiores justificativas.

Figura 41: Resolução, apresentada pelo autor da coleção, referente a figura 40.

32. $a^3 = 8\,000 \text{ dm}^3 \Rightarrow a = 20 \text{ dm} = 2 \text{ m}$

Fonte: Coleção – Matemática- Contexto e Aplicações – 2º ano do Ensino Médio, p. 158 (Manual do Professor).

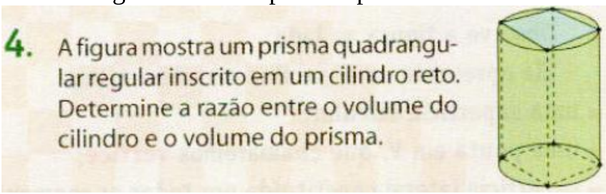
Logo, as técnicas mobilizadas nessa atividade foram τ_2, já discutida anteriormente, e τ_4, a qual definimos do seguinte modo:

τ_4 – Efetuar transformação de unidades de medidas utilizando um modelo pré-definido.

4.1.1.4 T4: Calcular razões entre volumes e/ou comprimentos de sólidos.

Já esse tipo de tarefa representa aproximadamente 3 % de todas as atividades analisadas. A ele associamos dois subtipos de tarefa: $T4_1$ – Calcular a razão entre as alturas de dois sólidos; e $T4_2$ – Calcular a razão entre os volumes de dois sólidos. Esse tipo de tarefa refere-se a todas as atividades que propõe o calculo da razão entre volumes e/ou alturas de dois sólidos, conforme observamos na figura 42 a seguir.

Figura 42: Exemplo de tipo de tarefa T4

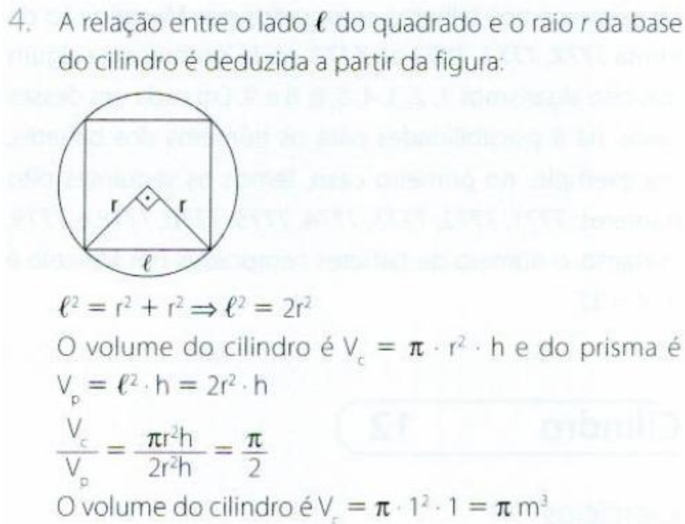


4. A figura mostra um prisma quadrangular regular inscrito em um cilindro reto. Determine a razão entre o volume do cilindro e o volume do prisma.

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do Ensino Médio, p. 223.

Para resolver essa atividade observamos, na resolução do autor, figura 43, a mobilização de duas técnicas: a primeira está relacionada à aplicação do teorema de Pitágoras, para determinar a medida da aresta do prisma, e a segunda refere-se à utilização das fórmulas do cálculo de volume do prisma e cilindro, para que os volumes dos mesmos sejam determinados.

Figura 43: Resolução, apresentada pelo autor da coleção, referente a figura 42.



4. A relação entre o lado ℓ do quadrado e o raio *r* da base do cilindro é deduzida a partir da figura:

$\ell^2 = r^2 + r^2 \Rightarrow \ell^2 = 2r^2$

O volume do cilindro é $V_c = \pi \cdot r^2 \cdot h$ e do prisma é $V_p = \ell^2 \cdot h = 2r^2 \cdot h$

$$\frac{V_c}{V_p} = \frac{\pi r^2 h}{2r^2 h} = \frac{\pi}{2}$$

O volume do cilindro é $V_c = \pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \pi\ m^3$

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do Ensino Médio, p. 110 (Manual do Professor).

Logo, além da mobilização de τ_2, outra técnica mobilizada nessa atividade foi a τ_5, a qual definimos como:

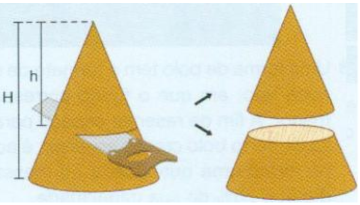
τ_5 – Identificar as medida de dois lados de um triângulo retângulo e substituir na expressão: $a^2 = b^2 + c^2$, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada.

4.1.1.5 T5: Calcular a massa (peso) de um sólido conhecido, dado seu volume.

Este tipo de tarefa corresponde a 2 % de todas as atividades analisadas e, refere-se a quaisquer atividades que tem como foco o cálculo da massa de um sólido conhecido. No entanto, para este tipo de tarefa, apenas as atividades que fornecem o volume do sólido ou as que necessitam do cálculo do mesmo foram consideradas. A figura 44, a seguir, ilustra bem esse tipo de tarefa.

Figura 44: Exemplo de tipo de tarefa T5.

R11 Um cone reto de madeira maciça tem massa igual a 27 kg e foi serrado, obtendo-se duas peças: um cone reto menor e um tronco de cone reto.
Considerando a massa da madeira proporcional ao seu volume, calcule a massa de cada peça obtida, sabendo que a razão entre as alturas H e h é $\frac{3}{2}$.



Fonte: Coleção – Novo Olhar - Matemática – 3º ano do Ensino Médio, p. 131.

Na resolução apresentada pelo autor, figura 45, referente a esta atividade, identificamos a mobilização de duas técnicas: a primeira esta relacionada à aplicação da regra de três simples, para calcular a massa do cone menor com e, a segunda, recai nas razões de semelhança para determinar o volume do cone menor.

Figura 45: Resolução, apresentada pelo autor da coleção, referente a figura 44.

Resolução

Sejam V e V_C os volumes do cone inicial e do cone menor, respectivamente. Como os dois cones são semelhantes e a razão entre suas alturas é $\frac{3}{2}$, então a razão de semelhança entre seus volumes é dada por:

$$\frac{V}{V_C}=\left(\frac{H}{h}\right)^3 \Rightarrow \frac{V}{V_C}=\left(\frac{3}{2}\right)^3 \Rightarrow \frac{V}{V_C}=\frac{27}{8} \Rightarrow V_C=\frac{8}{27}V$$

Desse modo, calculamos a massa do cone menor pela seguinte regra de três:

volume (u.v.)	massa (kg)
V	27
V_C	x

$$\frac{V}{\underbrace{V_C}_{\frac{8}{27}V}}=\frac{27}{x} \Rightarrow \frac{V}{\frac{8}{27}V}=\frac{27}{x} \Rightarrow x=\frac{8}{27}\cdot 27 \Rightarrow x=8 \rightarrow 8\text{ kg}$$

A massa do tronco de cone é dada por $27-8=19 \rightarrow 19$ kg.
Portanto, a massa do cone menor é 8 kg e a do tronco de cone é 19 kg.

Dois cones são semelhantes se possuem medidas correspondentes semelhantes (raio da base, altura e geratriz). Se a razão de semelhança entre suas medidas for k, então a razão de semelhança entre seus volumes será k^3.

Fonte: Coleção – Novo Olhar - Matemática – 3º ano do Ensino Médio, p. 131.

Portanto, as técnicas mobilizadas nesta atividade foram τ_6 e τ_7, as quais definimos da seguinte forma:

τ_6 – Construir uma tabela e agrupar as grandezas da mesma espécie em colunas e manter na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência. Na sequência, identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais e, por fim, montar a proporção e resolver a equação.

e

τ_7 – Estabelecer a razão de semelhança.

4.1.1.6 T6: Comparar o volume de sólidos conhecidos.

Esse tipo de tarefa corresponde aproximadamente a apenas 1 % de todas as atividades analisadas e refere-se a quaisquer atividades que tem como foco a comparação entre volumes de dois sólidos conhecidos. Como já destacado por Morais (2013), o percentual apresentado para esse tipo de tarefa é muito pequeno em relação a outros tipos de tarefas identificadas o que pode, segundo o autor, não ajudar na construção de um conceito, tendo em vista que a diversidade de situações é um elemento importante para tal construção. No entanto, consideramos pertinente destacar esse tipo de tarefa para verificar, principalmente, as técnicas recorridas para sua resolução. A figura 46, a seguir, ilustra bem esse tipo de tarefa.

Figura 46: Exemplo de tipo de tarefa T6

R3. Considerar três cilindros circulares retos: C, de altura h e base de raio r; C', de altura h e base de raio $2r$; e C'', de altura $2h$ e base de raio r.

a) Comparar o volume de C' com o de C.
b) Comparar o volume de C'' com o de C.
c) Comparar o volume de C' com o de C''.

Fonte: Coleção – Conexões com a Matemática – 2º ano do Ensino Médio, p. 208.

Na resolução apresentada pelo autor, figura 47, referente a essa atividade, identificamos a mobilização de apenas uma técnica, isto é, pra comparar o volume dos sólidos apresentados na atividade basta identificar a fórmula do referido sólido, substituir os valores em questão e posteriormente realizar os cálculos numéricos necessários.

Figura 47: Resolução, apresentada pelo autor da coleção, referente a figura 46.

Resolução

Primeiro calculamos o volume de C: $V = \pi r^2 h$.

a) C' tem volume $V' = \pi \cdot (2r)^2 \cdot h = 4(\pi r^2 h)$, ou seja, $V' = 4V$.
Portanto, o volume de C' é o quádruplo do volume de C.

b) C'' tem volume $V'' = \pi \cdot r^2 \cdot (2h) = 2(\pi r^2 h)$, ou seja, $V'' = 2V$.
Portanto, o volume de C'' é o dobro do volume de C.

c) Dos itens acima, temos: $V' = 4\pi r^2 h = 2(2\pi r^2 h)$, ou seja, $V' = 2V''$.
Portanto, o volume de C' é o dobro do volume de C''.

Fonte: Coleção – Conexões com a Matemática – 2º ano do Ensino Médio, p. 208.

Assim, a técnica mobilizadas nesta atividade é τ_2, a qual já abordamos anteriormente.

Buscamos, até o momento, apresentar, por meio de exemplos, todos os tipos de tarefas identificadas em nossas análises e, consequentemente, iniciamos também a apresentação de algumas técnicas mobilizadas para a resolução desses tipos de tarefas. Na próxima seção apresentamos, além das já discutidas, as demais técnicas identificadas em nosso estudo.

4.1.2 Técnicas (t)

Antes de iniciarmos as discussões em torno das demais técnicas identificadas, cabe-nos, neste momento, apresentar tanto as técnicas mobilizadas, ao longo da análise das resoluções das atividades relativas ao volume de sólidos geométricos, como também suas respectivas descrições e aparições.

Tabela 2: Tipos de técnicas identificadas

Técnicas	Descrição	Quantidade
τ_1	Escolher uma fórmula de área, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada.	189
τ_2	Escolher uma fórmula de volume, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada.	541
τ_3	Obter uma razão equivalente a uma razão dada, multiplicar ou dividir ambos os termos da razão dada por um número diferente de zero.	9
τ_4	Efetuar transformação de unidades de medidas utilizando um modelo pré-definido.	44
τ_5	Identificar as medida de dois lados de um triângulo retângulo e substituir na expressão: $a^2 = b^2 + c^2$, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada.	108
τ_6	Construir uma tabela e agrupar as grandezas da mesma espécie em colunas e manter na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência. Na sequência identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais e, por fim, montar a proporção e resolver a equação.	16
τ_7	Estabelecer a razão de semelhança.	55
τ_8	Identificar as medidas dos lados de um triângulo retângulo (cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa), substituir na fórmula da relação desejada (seno, cosseno e tangente), realizar os cálculos numéricos pertinentes e, se necessário, acrescentar a unidade de medida apropriada.	15
τ_9	Identificar os coeficientes da equação, determinar o valor do descriminante, substituir na fórmula de Bhaskara e realizar os cálculos numéricos pertinentes.	3
τ_{10}	Identificar a medida do raio e substituir na fórmula do comprimento da circunferência ($C=2\pi r$).	7
τ_{11}	Decompor um sólido qualquer em sólidos conhecidos.	24
τ_{12}	Escolher uma fórmula de diagonal, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada.	17

Fonte: autores da pesquisa

Discutiremos e exemplificaremos, na sequência, as técnicas que não foram abordadas na seção anterior. Porém, cabe-nos destacar que a análise foi realizada em torno das técnicas mobilizadas nas resoluções apresentadas pelos autores das coleções analisadas.

4.1.2.1 τ_8 – Identificar as medidas dos lados de um triângulo retângulo (cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa), substituir na fórmula da relação desejada (seno, cosseno e tangente), realizar os cálculos numéricos pertinentes e, se necessário, acrescentar a unidade de medida apropriada.

Essa técnica consiste em calcular, por exemplo, a relação seno, cosseno e tangente de um triângulo retângulo. A figura 48, a seguir, exemplifica bem um tipo de tarefa que mobiliza essa técnica.

Figura 48: Exemplo de tipo de tarefa que mobiliza a técnica τ_8

7. Um prisma oblíquo de base quadrada tem todas as arestas medindo 10 cm. As arestas laterais formam um ângulo de 60° com o plano da base. O volume do prisma é, em cm^3, igual a: alternativa c

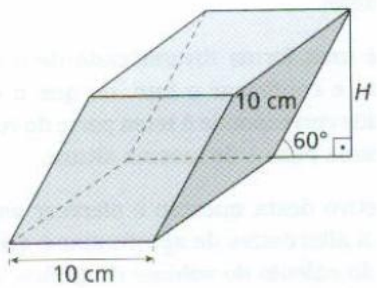
a) $150\sqrt{3}$ **b)** $240\sqrt{3}$ **c)** $500\sqrt{3}$ **d)** 900

Fonte: Coleção – Conexões com a Matemática – 2º ano do ensino médio, p. 199.

Notamos, ao analisarmos a resolução apresentada pelo autor, figura 49, que a técnica τ_8 é mobilizada para encontrar a altura do prisma que, por sua vez, será elemento imprescindível para a técnica τ_2, isto é, para que o volume desse sólido seja determinado.

Figura 49: Resolução, apresentada pelo autor da coleção, referente a figura 48.

7.



$$\text{sen } 60° = \frac{H}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{H}{10} \Rightarrow H = 5\sqrt{3}$$

$$V = A_{\text{base}} \cdot H = 10^2 \cdot 5\sqrt{3} = 500\sqrt{3}$$

Alternativa **c**.

Fonte: Coleção – Conexões com a Matemática – 2º ano do ensino médio, p. 181 (Manual do professor).

Logo, a mobilização das técnicas τ_2 e τ_8 e foram fundamentais para a resolução da atividade proposta.

4.1.2.2 τ_9 – Identificar os coeficientes da equação, determinar o valor do descriminante, substituir na fórmula de Bhaskara e realizar os cálculos numéricos pertinentes.

Já essa técnica, consiste em calcular o valor da incógnita x que, no caso da atividade apresentada na figura 50, refere-se à largura e a altura do paralelepípedo.

Figura 50: Exemplo de tipo de tarefa que mobiliza a técnica τ_9

4. (UFT-TO) Para fabricar-se uma caixa em forma de paralelepípedo, com 8 m de comprimento e com a altura igual à largura, ambas medindo **x** metros de comprimento, utilizou-se uma chapa metálica cuja área mede 322 m². Considerando-se essas informações, é correto afirmar que o volume dessa caixa é de:

a) 300 m³.
b) 322 m³.
c) 392 m³.
d) 400 m³.

Fonte: Coleção – Matemática- Contexto e Aplicações – 2º ano do Ensino Médio, p. 239.

Observamos, na resolução apresentada na figura 51, que, assim como no exemplo anterior, a técnica τ_9 tem um papel fundamental nessa atividade, pois ela é mobilizada para encontrar duas das três medidas necessária para se determinar o volume do sólido em questão, isto é, a altura e a largura.

Figura 51: Resolução, apresentada pelo autor da coleção, referente a figura 50.

4. $A_T = 2(8x + 8x + x^2) \Rightarrow \frac{322}{2} = 16x + x^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 16x - 161 = 0$

$\Delta = 900$

Então, $x = 7$ ou $x = -23$ (não serve).

Logo:

$V = 8 \cdot 7 \cdot 7 \Rightarrow V = 392\ m^3$

Resposta: alternativa **c**.

Fonte: Coleção – Matemática- Contexto e Aplicações – 2º ano do Ensino Médio, p. 162 (Manual do Professor).

Dessa forma, a atividade apresentada na figura 51 é resolvida por meio das técnicas τ_2 e τ_9.

4.1.2.3 τ_{10} – Identificar a medida do raio e substituir na fórmula do comprimento da circunferência ($C=2\pi r$).

A técnica τ_{10} tem como finalidade calcular o comprimento de uma determinada circunferência. Nesse caso, o comprimento desejado será determinado ao substituirmos, na fórmula do comprimento da circunferência, a medida do raio da mesma. O exemplo apresentado na figura 52 é um tipo de tarefa onde podemos observar a mobilização de tal técnica.

Figura 52: Exemplo de tipo de tarefa que mobiliza a técnica τ_{10}

89 (UFPR-PR) Segundo dados do Banco Central do Brasil, as moedas de 1 centavo e de 5 centavos são feitas do mesmo material, aço revestido de cobre, e ambas têm a mesma espessura, de 1,65 mm. Sabendo que a massa de cada moeda é diretamente proporcional ao seu volume, que as massas das moedas de 1 centavo e de 5 centavos são respectivamente 2,4 g e 4,1 g, e que o diâmetro da moeda de 1 centavo é de 17 mm, determine a alternativa que corresponde à medida que mais se aproxima do diâmetro da moeda de 5 centavos. b

a) 20 mm
b) 22 mm
c) 24 mm
d) 26 mm
e) 28 mm

Fonte: Coleção – Novo Olhar - Matemática – 3º ano do Ensino Médio, p. 143.

Nessa atividade, a mobilização da técnica τ_9 pode ser evidenciada ao final da resolução, figura 53, quando o raio, medida necessária para a mobilização dessa técnica, é determinado por meio de outras duas técnicas, τ_7 e τ_2.

Figura 53: Resolução, apresentada pelo autor da coleção, referente a figura 52.

89 alternativa **b**

Chamando de V_1 e V_2 os volumes das moedas de 1 centavo e 5 centavos, respectivamente, temos:

- $V_1 = 3{,}14 \cdot 8{,}5^2 \cdot 1{,}65 \simeq 374{,}33 \rightarrow$ aproximadamente 374,33 mm³
- $\dfrac{V_1}{\underbrace{2{,}4}_{\text{massa da moeda de 1 centavo}}} = \dfrac{V_2}{\underbrace{4{,}1}_{\text{massa da moeda de 5 centavos}}} \Rightarrow \dfrac{374{,}33}{2{,}4} = \dfrac{V_2}{4{,}1} \Rightarrow V_2 = 639{,}48 \rightarrow$

  $\rightarrow$ aproximadamente 639,48 mm³

Sendo *r* e *d* o raio e o diâmetro da moeda de 5 centavos, respectivamente, segue que:

- $V_2 = 639{,}48 \Rightarrow 3{,}14 \cdot r^2 \cdot 1{,}65 = 639{,}48 \Rightarrow r = 11{,}11 \rightarrow$

  $\rightarrow$ aproximadamente 11,11 mm
- $d = 2 \cdot 11{,}11 = 22 \rightarrow$ aproximadamente 22 mm

Fonte: Coleção – Novo Olhar - Matemática – 3º ano do Ensino Médio, p. 111 (Manual do Professor).

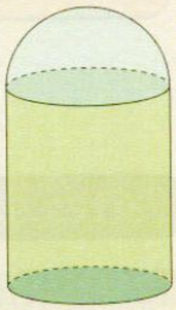
Assim, as técnicas mobilizadas nesse exemplo são τ_7, τ_2 e τ_9.

4.1.2.4. τ_{11} – Decompor um sólido qualquer em sólidos conhecidos.

Essa técnica refere-se à decomposição de um sólido qualquer em dois ou mais sólidos conhecidos. Para uma melhor compreensão da mesma tomamos como exemplo a atividade apresentada na figura 54.

Figura 54: Exemplo de tipo de tarefa que mobiliza a técnica τ_{11}.

10. A figura mostra um reservatório industrial de aço usado para armazenamento de cereais, conhecido como silo.
Ele é formado por um cilindro circular reto, com 8 m de altura e raio interno da base 2 m, encimado por uma semiesfera.
Usando a aproximação $\pi = 3{,}2$, responda:



a) Quantos metros quadrados de aço são gastos na confecção desse silo?
b) Quantos metros cúbicos de cereais o silo pode armazenar?

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do Ensino Médio, p. 245.

Para resolver essa atividade, em especial a alternativa b, o autor mobiliza duas técnicas, conforme apresentado na figura 55 a seguir.

Figura 55: Resolução, apresentada pelo autor da coleção, referente a figura 54.

b) $V_{recipiente} = V_{cilindro} + \dfrac{V_{esfera}}{2}$

$V_{cilindro} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 2^2 \cdot 8 = 32\pi = 32 \cdot 3{,}2 =$
$= 102{,}4\ m^3$

$V_{esfera} = \dfrac{4\pi}{3} \cdot r^3 = \dfrac{4\pi}{3} \cdot 2^3 = \dfrac{32}{3} \cdot \pi = 34{,}1\overline{3}\ m^3$

Assim, o volume do recipiente é:

$102{,}4 + \dfrac{34{,}1\overline{3}}{2} = 119{,}4\overline{6}\ m^3$

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do Ensino Médio, p. 115 (Manual do Professor).

A primeira técnica mobilizada é a decomposição do sólido, representado na figura, em dois sólidos conhecidos, ou seja, uma semiesfera (que seria a tampa do reservatório) e um cilindro. Já a segunda técnica mobilizada é substituição dos valores encontrados e fornecidos, na atividade, nas fórmulas dos volumes dos respectivos sólidos. Dessa forma, a soma dos respectivos volumes é o volume procurado. Logo, as técnicas mobilizadas nessa atividade foram τ_2 e τ_{11}.

Apresentaremos, na sequência, algumas discussões referentes aos elementos do bloco tecnológico-teórico com o objetivo de explicar e justificar a elaboração das técnicas. Mesmo não sendo apresentadas de forma explícita por alguns autores, listamos algumas situações que julgamos ser importantes para essa discussão.

4.1.3 Bloco Tecnológico-Teórico [θ, Θ]

Percebemos nos livros didáticos analisados que não há uma preocupação explícita por parte dos autores em justificar o uso da fórmula do cálculo de uma determinada área. Na maioria das resoluções analisadas o cálculo da área recai apenas na aplicação da fórmula. Nos poucos casos encontrados, em que há a preocupação de justificar o uso da fórmula da área, isso é feito por meio da decomposição do polígono, da planificação do sólido e também por razão de semelhança. A ideia de planificação foi identificada nos casos em que se pede a área total de uma superfície. Assim, entendemos que a tecnologia que justifica a técnica τ_1 (*Escolher uma fórmula de área, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada*) não é apresentada de forma satisfatória.

No que tange a técnica τ_2 (*Escolher uma fórmula de volume, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de* *medida apropriada*), alguns cuidados devem ser tomados quando formos justificá-la. Isso porque em algumas coleções analisadas observamos que algumas fórmulas de volume são justificadas por tecnologias diferentes. A fórmula do paralelepípedo, por exemplo, é justificada por meio da decomposição do sólido em unidades de volume. Por outro lado, a fórmula de uma pirâmide é justificada pelo princípio de Cavalieri. Entretanto, apesar de algumas coleções apresentarem erros quanto a suas abordagens, essas duas tecnologias são válidas e justificam a técnica τ_2 se apresentadas com um rigor matemático necessário. Dessa forma, entendemos que tanto a tecnologia $\boldsymbol{\theta_1}$ (princípio de Cavalieri) quanto a $\boldsymbol{\theta_2}$ (decomposição do sólido em unidades de volume) justificam o uso da técnica τ_2. Tais tecnologias podem ser justificadas, respectivamente, pelas teorias $\boldsymbol{\Theta_1}$ (Teoria da Medida) e $\boldsymbol{\Theta_2}$ (Geometria Euclidiana).

Em relação às técnicas τ_4 (*Efetuar transformação de unidades de medidas utilizando um modelo pré-definido*) e τ_6 (*Construir uma tabela e agrupar as grandezas da mesma espécie em colunas e manter na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência, na sequência identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais e, por fim, montar a proporção e resolver a equação*) percebemos que ambas são justificadas, nas coleções analisadas, por meio da tecnologia $\boldsymbol{\theta_2}$ (proporcionalidade entre grandezas) que por sua vez é justificada pela teoria $\boldsymbol{\Theta_2}$ (Álgebra). Já as técnicas τ_5 (*Identificar as medida de dois lados de um triângulo retângulo e substituir na expressão: $a^2 = b^2 + c^2$, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada*) e τ_8 (*Identificar as medidas dos lados de um triângulo retângulo (cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa*), *substituir na fórmula da relação desejada (seno, cosseno e tangente), realizar os cálculos numéricos pertinentes e, se necessário, acrescentar a unidade de medida apropriada*) são justificadas pela tecnologia $\boldsymbol{\theta_3}$ (Teorema de Pitágoras) que se justificada pela teoria $\boldsymbol{\Theta_2}$ (Geometria Euclidiana). No que tange a técnica τ_7 (*estabelecer a razão de semelhança*) percebemos que a mesma é justificada pela tecnologia $\boldsymbol{\theta_2}$ (Teorema de Tales) que por sua vez é justificada pela teoria $\boldsymbol{\Theta_2}$ (Geometria Euclidiana).

No que tange a técnica τ_9 (*Identificar os coeficientes da equação, determinar o valor do descriminante, substituir na fórmula de Bhaskara e realizar os cálculos numéricos pertinentes*) percebemos esta é justificada pela tecnologia $\boldsymbol{\theta_2}$ (*a demonstração da fórmula do descriminante*) e tem como justificativa a teoria $\boldsymbol{\Theta_2}$ (Álgebra). Em relação às técnicas τ_{10} (*Identificar a medida do raio e substituir na fórmula do comprimento da circunferência ($C=2\pi r$)) e τ_{12} (Escolher uma fórmula de diagonal, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada*) não encontramos vestígios de tecnologias que possam justificar as mesmas, tendo em vista que tais técnicas são apresentadas sem maiores justificativas. Por fim, a técnica τ_{11} (*Identificar em um sólido qualquer dois ou mais sólidos conhecidos e realizar a decomposição*), é justificada pela tecnologia $\boldsymbol{\theta_2}$ (Composição e decomposição de sólidos) que por sua vez é justificada pela teoria $\boldsymbol{\Theta_2}$ (Geometria Euclidiana).

4.1.4 Organização Matemática e Organização Didática da Coleção mais Adotada

Neste momento direcionamos o nosso olhar para os exemplos, os exercícios resolvidos e os exercícios propostos, relacionando os tipos de tarefas identificadas e as técnicas mobilizadas para solucioná-las e também a escolha do autor diante da apresentação e condução do tema em questão. No entanto, cabe-nos destacar, que o estudo da organização matemática e a organização didática só é realizado em torno da coleção mais adotada, ou seja, a coleção I.

Antes de iniciarmos a discussão, a respeito da análise da coleção I, apresentamos, na sequência, um extrato de um quadro que utilizamos para distribuir e relacionar os tipos de tarefas e as respectivas técnicas mobilizadas nas atividades presentes nas coleções analisadas. Nosso objetivo, com este extrato, é esclarecer a origem dos dados aqui apresentados e explicar o significado de cada coluna deste quadro.

Quadro 1: Técnicas relativas aos tipos de tarefas

Pág.	**Atividade**	**Tipos de Tarefas**	**Subtipos de Tarefas**	**Técnicas**	**Observações**
189	Ex. 2	T1	$T1_1$	τ_2	Paralelepípedo reto-retângulo
189	Ex. 3	T1	$T1_1$	τ_2 e τ_4	Cubo
190	R1	T1	$T1_1$	τ_2 e τ_4	Paralelepípedo reto-retângulo
190	R2	T1	$T1_1$	τ_1e τ_2	Paralelepípedo reto-retângulo
191	1	T1	$T1_1$	τ_2	Cubo e Paralelepípedo reto-retângulo
191	2	T1	$T1_1$	τ_2e τ_7	Paralelepípedo reto-retângulo

Fonte: autores da pesquisa.

O quadro 1 foi dividido em 6 colunas com os seguintes significados:

I. A primeira coluna refere-se à página, no livro, da atividade analisada;
II. A segunda coluna indica a atividade analisada em uma determinada página (Ex. 2: exemplo 2; R1: exercício resolvido 1; 1 atividade proposta 1);

III. A terceira coluna indica o tipo de tarefa identificada;

IV. A quarta coluna o subtipo de tarefa identificada;

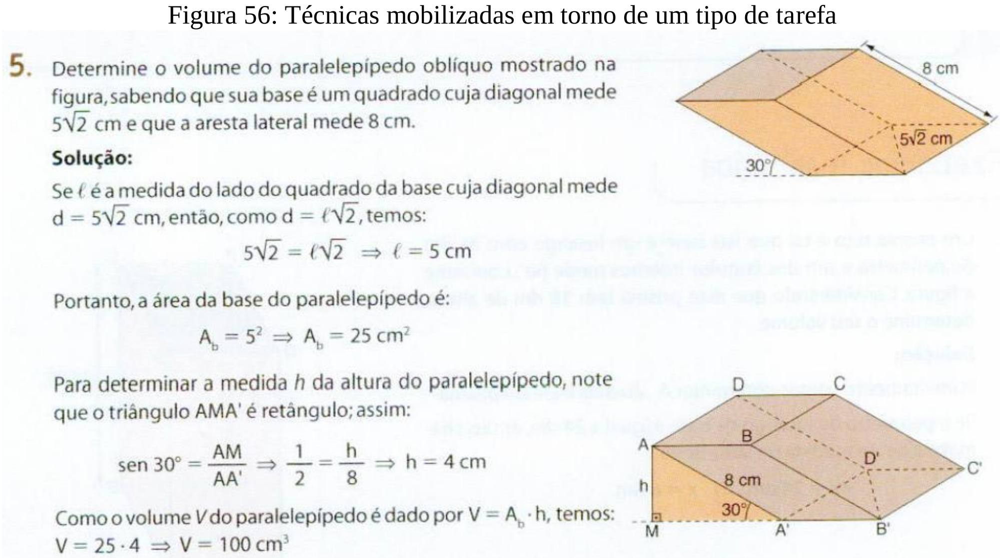
V. A quinta coluna refere-se às técnicas que foram mobilizadas para resolverem o tipo de tarefa em questão;

VI. Por fim, a sexta coluna indica o (s) tipo (s) de sólido (s) estudado (s) em cada atividade.

A partir dos dados apresentados no quadro 1 compusemos outros quadros e tabelas para destacarmos, por exemplo, os tipos de sólidos mais trabalhados na coleção e as técnicas privilegiadas pelo autor. Estes novos quadros e tabelas são utilizados, em nossas análises, para uma melhor compreensão dos dados analisados na coleção I.

Cabe-nos destacar ainda, que o número de tipos de tarefas dificilmente coincide com o número de técnicas, mesmo porque, às vezes, o mesmo tipo de tarefa pode demandar mais de uma técnica, conforme observamos na figura 56 a seguir.

Figura 56: Técnicas mobilizadas em torno de um tipo de tarefa



5. Determine o volume do paralelepípedo oblíquo mostrado na figura, sabendo que sua base é um quadrado cuja diagonal mede $5\sqrt{2}$ cm e que a aresta lateral mede 8 cm.

Solução:

Se ℓ é a medida do lado do quadrado da base cuja diagonal mede $d = 5\sqrt{2}$ cm, então, como $d = \ell\sqrt{2}$, temos:

$$5\sqrt{2} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 5 \text{ cm}$$

Portanto, a área da base do paralelepípedo é:

$$A_b = 5^2 \Rightarrow A_b = 25 \text{ cm}^2$$

Para determinar a medida h da altura do paralelepípedo, note que o triângulo AMA' é retângulo; assim:

$$\text{sen } 30° = \frac{AM}{AA'} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{8} \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$$

Como o volume V do paralelepípedo é dado por $V = A_b \cdot h$, temos:

$V = 25 \cdot 4 \Rightarrow V = 100 \text{ cm}^3$

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do Ensino Médio, p. 196.

Observamos, na figura 56, que para determinar o volume do paralelepípedo oblíquo, que consideramos como um tipo de tarefa T1 (subtipo $T1_1$), o autor mobiliza 4 técnicas diferentes, as quais identificamos como τ_1, τ_2, τ_8 e τ_{12}, essa situação pode ser simbolizada da seguinte forma: [T1, τ_1, τ_2, τ_8 e τ_{12}]. Logo percebemos que, em alguns casos, pra resolvermos uma determinada atividade deveremos utilizar mais de uma técnica pra encontrar o resultado esperado.

A seguir iniciamos as discussões em torno da análise da coleção I.

4.1.4.1 Análise da coleção mais adotada – coleção I.

Nesta coleção o conteúdo de volume dos sólidos geométricos é apresentado, no livro do segundo ano do ensino médio, em 4 capítulos, os quais disponibilizados na segunda metade da referida coleção. Dessa forma, optamos por realizar nossa análise seguindo a mesma ordem e numeração apresentada pelo autor. Logo, dividimos a análise da seguinte forma: no capítulo 10 (páginas 188 à 198), denominado de Prisma, é apresentado o volume do paralelepípedo, do cubo e do prisma; já o capítulo 11 (páginas 202 à 216), Pirâmide, aborda o volume de uma pirâmide e do tronco de uma pirâmide; o capítulo 12, Cilindro, (páginas 220 à 223) destaca o volume de um cilindro; já o capítulo 13 (páginas 227 à 237), Cones, é dedicado ao volume de um cone e do tronco de cone; e por fim, é apresentado no capítulo 14 (páginas 236 à 249), Esfera, o volume da esfera, do fuso esférico e da cunha esférica. Esta forma de análise possibilita-nos descrever a evolução das praxeologias ao final de cada capítulo.

4.1.4.1.1 Capítulo 10 - Prismas.

Neste capítulo, o autor inicia o conteúdo de volume expondo, resumidamente, a ideia intuitiva de volume e a “demonstração” da fórmula do volume do paralelepípedo. Nesse caso, percebemos que o primeiro momento com organização matemática ocorre com a apresentação e, consequentemente, a construção do bloco tecnológico-teórico, que fundamenta a elaboração e aplicação da técnica τ_2. Em seguida ocorre a institucionalização dessa técnica caracterizando o quinto momento, isto é, o autor apresenta a fórmula que será utilizada nas resoluções das atividades propostas na sequência, conforme observamos nas figuras 57, 58 e 59 a seguir.

Figura 57: Introdução do cálculo do volume.

Cálculo do volume

O **volume de um sólido** é a medida da região do espaço limitada por sua superfície.

No nosso dia a dia, para medir essa região do espaço estabelecemos algumas unidades de medidas. Por exemplo, para calcular o volume de um vaso tomamos como unidade de medida um certo tipo de copo. Nesse caso, se para encher totalmente o vaso forem usados 11 copos cheios de água, diremos que o volume do vaso é igual a 11 copos. Entretanto, convém observar que o método usado nesse exemplo é impreciso e, além disso, se após a última operação para encher o vaso sobrasse alguma quantidade de água no copo, não se saberia como determinar essa fração.

Para expressar o volume de um sólido por meio de um número, devemos estabelecer uma unidade padrão: a unidade de volume é o cubo, cuja aresta mede 1 u.c. (unidade de comprimento). Para cada unidade de comprimento temos uma correspondente unidade de volume, como mostrado na tabela:

Unidade de medida da aresta do cubo	Unidade de volume
1 dm	$1\ dm^3$
1 cm	$1\ cm^3$
1 m	$1\ m^3$
1 mm	$1\ mm^3$

De modo geral:

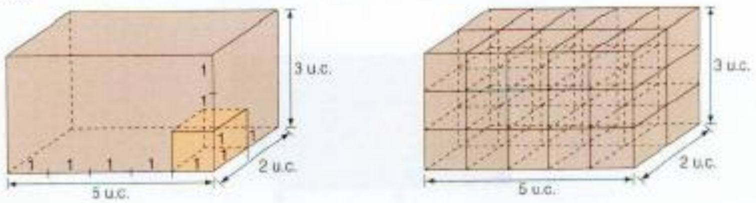
$$\boxed{\text{unidade de medida da aresta} = 1\ \text{u.c.} \Rightarrow \text{unidade de volume} = 1\ (\text{u.c.})^3}$$

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do ensino médio, p. 188.

Figura 58: Volume do paralelepípedo.

Consideremos um paralelepípedo retângulo com as seguintes dimensões: a = 5 u.c., b = 2 u.c. e c = 3 u.c.

A divisão do comprimento, da largura e da altura desse paralelepípedo em cinco unidades, duas unidades e três unidades, respectivamente, nos permite obter $5 \cdot 2 \cdot 3 = 30$ cubos unitários, conforme mostrado nas figuras abaixo:



Dizemos, então, que o volume desse paralelepípedo é $V = (5\ \text{u.c.}) \cdot (2\ \text{u.c.}) \cdot (3\ \text{u.c.}) = 30\ (\text{u.c.})^3$, ou seja:

$$\boxed{V = a \cdot b \cdot c}$$

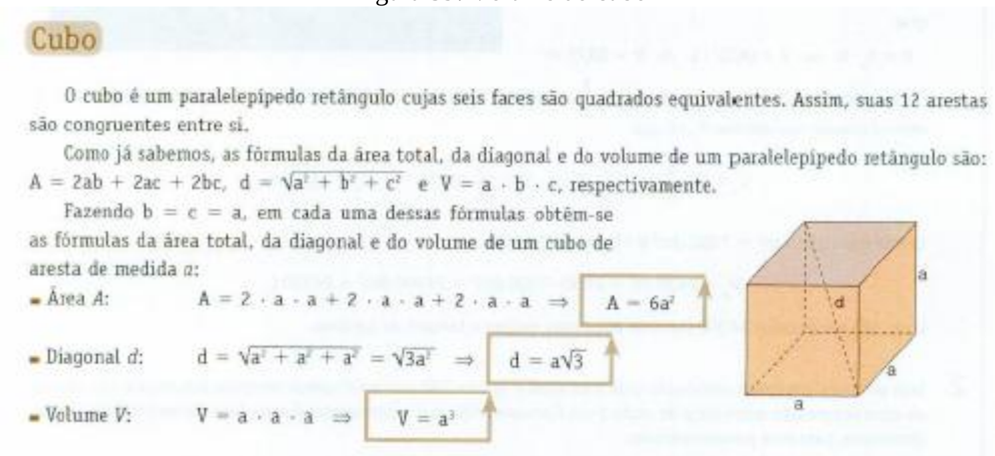
Como $a \cdot b$ é a área da base (A_b) e *c* é a medida *h* da altura, temos:

$$V = (a \cdot b) \cdot c \Rightarrow \boxed{V = A_b \cdot h}$$

Pense nisto: Em quantos cubos de aresta 1 cm pode ser decomposto um cubo de aresta 1 m?

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do ensino médio, p. 188.

Figura 59: Volume do cubo



Cubo

O cubo é um paralelepípedo retângulo cujas seis faces são quadrados equivalentes. Assim, suas 12 arestas são congruentes entre si.

Como já sabemos, as fórmulas da área total, da diagonal e do volume de um paralelepípedo retângulo são: $A = 2ab + 2ac + 2bc$, $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ e $V = a \cdot b \cdot c$, respectivamente.

Fazendo $b = c = a$, em cada uma dessas fórmulas obtêm-se as fórmulas da área total, da diagonal e do volume de um cubo de aresta de medida *a*:

- Área *A*: $A = 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a + 2 \cdot a \cdot a \Rightarrow \boxed{A = 6a^2}$
- Diagonal *d*: $d = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{3a^2} \Rightarrow \boxed{d = a\sqrt{3}}$
- Volume *V*: $V = a \cdot a \cdot a \Rightarrow \boxed{V = a^3}$

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do ensino médio, p. 189.

Ao final da institucionalização, da referida técnica, são apresentados exemplos e atividades resolvidas com o objetivo de trabalhar com a técnica recém elaborada e, posteriormente, são trazidas as atividades propostas, as quais demandam um total de 20 questões. Embora durante as resoluções destes sejam apresentadas as técnicas τ_4 e τ_{12}, entendemos que o foco ainda é a mobilização da técnica τ_2, caracterizando assim o 4º momento, isto é, o trabalho com a técnica τ_2.

Na sequência do capítulo é apresentado o princípio de Cavalieri, no entanto, antes de enunciá-lo é trazido um exemplo para que o mesmo seja compreendido de forma intuitiva. Logo após enunciar tal princípio, é demonstrada, resumidamente, a fórmula do volume do prisma, a qual é utilizada, logo a seguir, na resolução de um exemplo. A sequência das figuras 60, 61 e 62 possibilita-nos visualizar tal fato.

Figura 60: principio de Cavalieri.

Princípio de Cavalieri

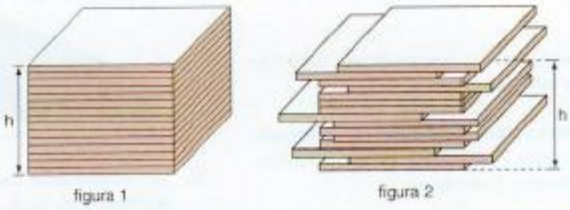
Conseguimos estabelecer uma fórmula para o volume de um paralelepípedo retângulo de maneira intuitiva; entretanto, para determinar a expressão do volume de outros sólidos, o processo não é tão simples. Uma maneira que pode ser utilizada para a obtenção do volume de um sólido é adotar como axioma um resultado formalizado pelo matemático italiano Bonaventura Francesco Cavalieri (1598-1647), que é conhecido como **princípio de Cavalieri**.

Antes de enunciar o princípio de Cavalieri, vamos apresentar um exemplo para que ele possa ser compreendido de maneira intuitiva:

4 Exemplo

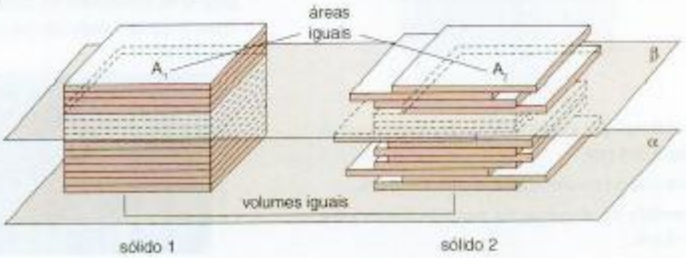
Dispõe-se de um conjunto de chapas retangulares de madeira, todas com as mesmas dimensões e, consequentemente, com o mesmo volume.

Imagine que elas foram usadas para formar duas pilhas diferentes, cada qual com a mesma quantidade de chapas, como mostram as figuras 1 e 2:



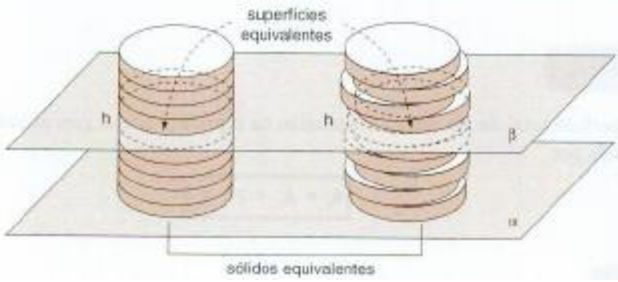
Note que, em ambas as pilhas, a quantidade de espaço ocupado pela coleção de chapas é a mesma, isto é, os sólidos das figuras 1 e 2 têm o mesmo volume.

Imagine agora esses mesmos sólidos com bases num mesmo plano α e situados num mesmo semiespaço dos determinados por α:



Qualquer plano β paralelo a α e secante aos sólidos 1 e 2 determina nesses sólidos superfícies equivalentes, ou seja, de áreas iguais.

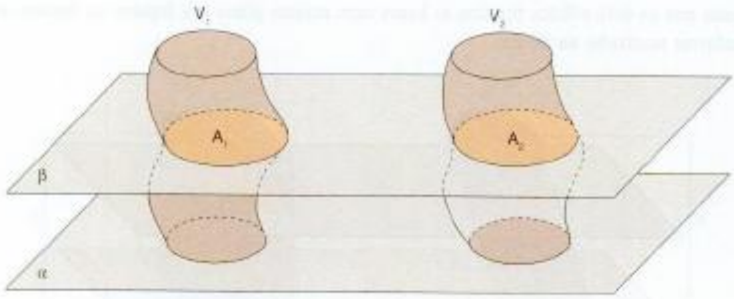
A mesma ideia pode ser estendida para duas pilhas, cada qual com a mesma quantidade de moedas de dimensões iguais:



Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do ensino médio, p. 192.

Figura 61: Continuação do principio de Cavalieri.

O que acabamos de apresentar de maneira intuitiva é o que chamamos Princípio de Cavalieri. De modo geral, sua aplicação deve ser feita colocando-se os dois sólidos com bases em um mesmo plano, paralelo àquele em que estarão as seções de áreas iguais:



$$A_1 = A_2 \Rightarrow V_1 = V_2$$

Segundo o Princípio de Cavalieri:

> Dois sólidos, nos quais todo plano secante, paralelo a um dado plano, determina superfícies de áreas iguais (superfícies equivalentes), são sólidos de volumes iguais (sólidos equivalentes).

A seguir, usaremos o Princípio de Cavalieri para calcular o volume de um prisma.

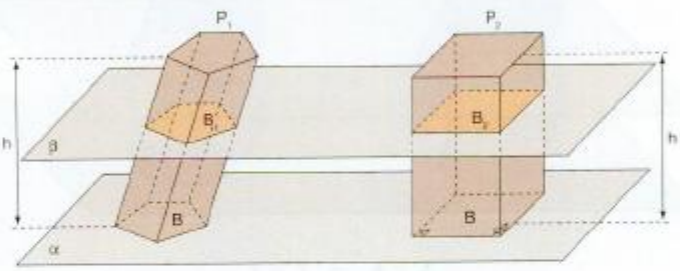
Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do ensino médio, p. 192.

Figura 62: Volume do prisma.

Volume (V)

Imaginemos um prisma P_1 de altura de medida h e área da base igual a B. Consideremos um paralelepípedo retângulo P_2, em que h é a medida da altura e a área da base é igual a B. Note que P_1 e P_2 têm as alturas de medidas iguais, assim como são iguais as áreas de suas bases.

Suponhamos que os dois sólidos tenham as bases num mesmo plano α e fiquem no mesmo semiespaço de origem α, conforme mostrado na figura:



Observe que qualquer plano β paralelo a α e que secione P_1 também seciona P_2. Note também que as seções (B_1 e B_2) têm áreas iguais, pois são congruentes às respectivas bases.

Então, pelo princípio de Cavalieri, o prisma P_1 e o paralelepípedo P_2 têm volumes iguais, ou seja, $V_{P_1} = V_{P_2}$.

Como $V_{P_2} = B \cdot h$, então: $V_{P_1} = B \cdot h$.

Assim, concluímos que:

$$\boxed{V = A_b \cdot h}$$

> O volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela medida da altura.

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do ensino médio, p. 194.

Percebemos, nas figuras anteriores, que mais uma vez o momento de construção do bloco tecnológico-teórico é retomado, assim como a institucionalização da técnica τ_2, tendo em vista que no caso anterior ela era mobilizada apenas para o cálculo do volume de dois casos particulares de prisma, o paralelepípedo e o cubo e, agora, sua mobilização é para o cálculo de um prisma qualquer. Dessa forma, entendemos que essas duas situações se caracterizam como o terceiro e o quinto momento respectivamente.

Após essa "nova" institucionalização da técnica τ_2 o autor apresenta alguns exemplos referentes ao trabalho com essa técnica e então propõe algumas atividades, denominadas de propostas e complementares. Entendemos que, assim como no início do capítulo, este processo caracteriza, respectivamente, o segundo e o quarto momento com a técnica τ_2, pois refere-se a resolução do cálculo do volume de um prisma qualquer por meio dessa técnica e também acontece o trabalho com essa técnica no decorrer das atividades apresentadas.

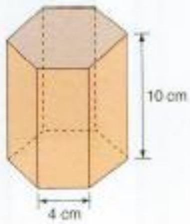
Entretanto, durante a análise dos exemplos e atividades citadas observamos algumas situações que são confrontadas com as técnicas τ_1, τ_6 e τ_8, figurando o 1º momento com estas técnicas, conforme nos mostra a figura a seguir.

Figura 63: Atividades resolvidas

4. Um artesão faz peças maciças de latão e as vende por R$ 35,00 o quilo. Fabrício comprou uma dessas peças, que tem a forma de um prisma regular hexagonal de 10 cm de altura e cuja aresta da base mede 4 cm. Considerando que a densidade do latão é 8,5 g/cm³, quanto Fabrício pagou pela peça comprada? Use a aproximação: $\sqrt{3} = 1,7$.

Solução:

Como a densidade do latão é 8,5 g/cm³, isto é, a massa de latão num volume de 1 cm³ é 8,5 g, então devemos primeiramente determinar o volume *V* da peça comprada por Fabricio.



- Cálculo de *V*:

A peça tem a forma de um prisma regular hexagonal; então, $V = A_b \cdot h$, em que $h = 10$ cm e A_b é área de um hexágono regular cujo lado mede 4 cm.

Como um hexágono regular é composto de seis triângulos equiláteros, então:

$$A_b = 6 \cdot \left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right) \underset{\ell = 4}{\Rightarrow} A_b = 6 \cdot \left(\frac{4^2 \cdot 1,7}{4}\right) \Rightarrow A_b = 40,8 \text{ cm}^2$$

Como $V = A_b \cdot h$, temos:

$$V = 40,8 \cdot 10 \Rightarrow V = 408 \text{ cm}^3$$

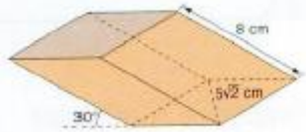
- Cálculo da quantia paga por Fabricio:

Como a densidade do latão é 8,5 g/cm³, a regra de três seguinte permite que se calcule a massa ("peso") da peça comprada:

$$\left.\begin{array}{ccc} \text{massa (g)} & & \text{volume (cm}^3\text{)} \\ 8,5 & \text{——} & 1 \\ x & \text{——} & 408 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{8,5}{x} = \frac{1}{408} \Rightarrow x = 3468 \text{ g} = 3,468 \text{ kg}$$

Se o artesão vende cada peça a R$ 35,00 o quilo, então a peça comprada por Fabrício custou 3,468 · R$ 35,00 ou seja, R$ 121,38.

5. Determine o volume do paralelepípedo oblíquo mostrado na figura, sabendo que sua base é um quadrado cuja diagonal mede $5\sqrt{2}$ cm e que a aresta lateral mede 8 cm.



Solução:

Se ℓ é a medida do lado do quadrado da base cuja diagonal mede $d = 5\sqrt{2}$ cm, então, como $d = \ell\sqrt{2}$, temos:

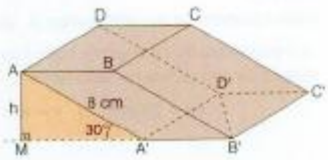
$$5\sqrt{2} = \ell\sqrt{2} \Rightarrow \ell = 5 \text{ cm}$$

Portanto, a área da base do paralelepípedo é:

$$A_b = 5^2 \Rightarrow A_b = 25 \text{ cm}^2$$

Para determinar a medida *h* da altura do paralelepípedo, note que o triângulo AMA' é retângulo; assim:

$$\text{sen } 30° = \frac{AM}{AA'} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{8} \Rightarrow h = 4 \text{ cm}$$



Como o volume *V* do paralelepípedo é dado por $V = A_b \cdot h$, temos:
$V = 25 \cdot 4 \Rightarrow V = 100 \text{ cm}^3$

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do ensino médio, p. 196.

Além das atividades apresentadas na figura acima, as técnicas τ_1, τ_6 e τ_8 também são mobilizadas em outras atividades apresentadas na sequência, caracterizando assim o quarto momento sobre a resolução do cálculo do volume de um prisma qualquer mobilizando essas técnicas. Já as técnicas τ_5 e τ_7 só aparecem uma vez cada nesse capítulo, não podendo assim ser caracterizado em algum momento didático.

Percebemos, no capítulo em questão, que o foco do autor é trabalhar com a técnica τ_2. As demais técnicas são utilizadas para auxiliarem na aplicação da técnica τ_2, tendo em vista que ela é mobilizada em quase todas as atividades analisas.

Após analisarmos todas as atividades propostas neste capítulo, observamos que o autor contempla 4 tipos de tarefas, conforme observamos na tabela 3 a seguir.

Tabela 3: Tipos de tarefas - Coleção I - Capítulo 10

	T1	**T2**	**T3**	**T5**
Total	27	1	4	1
%	82	3	12	3

Fonte: dos autores da pesquisa

Notamos que o tipo de tarefa T1, calcular o volume de um sólido conhecido, representa, aproximadamente, 82 % de todas as atividades analisadas nesse capítulo, o que é normal se levarmos em consideração que esse tipo de tarefa é o foco principal do conteúdo analisado. Já os tipos de tarefas T2, T3 e T5 contemplam, respectivamente, 3%, 12% e 3% de todas as atividades analisadas.

Em relação às técnicas mobilizadas neste capítulo, percebemos uma recorrência considerável de τ_2, a qual refere-se à aplicabilidade de uma fórmula para o cálculo do volume de um sólido conhecido, e τ_1 que consiste na aplicabilidade de uma fórmula para o cálculo da área de uma região conhecida, conforme observamos no quadro 3 a seguir.

Quadro 2: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Coleção I - Capítulo 10

	T1	**T2**	**T3**	**T5**
τ_2	8	-	-	-
τ_6	1	-	-	-
τ_1 e τ_2	7	1	2	-
τ_1 e τ_4	2	-	-	-
τ_1 e τ_5	1	-	-	-
τ_1 e τ_7	1	-	2	-
τ_1 e τ_{12}	1	-	-	-
τ_1, τ_2 e τ_6	-	-	-	1
τ_1, τ_3 e τ_4	4	-	-	-
τ_1, τ_2 e τ_{12}	1	-	-	-
τ_1, τ_2, τ_8 e τ_{12}	1	-	-	-

Fonte: dos autores da pesquisa

Observamos que τ_2 é mobilizada em praticamente todas as atividades propostas e, na maioria dos casos, é a única técnica utilizada para resolver uma determinada atividade. Já nos casos em que uma atividade necessita de mais de uma técnica para ser concluída, percebemos também uma grande mobilização de τ_2. Este fato é fácil de ser compreendido uma vez que em algumas atividades propostas é necessário, antes de aplicar a fórmula do volume de um determinado sólido, determinar, por exemplo, a área da base e/ou a altura do mesmo, o que requer a mobilização de outras técnicas. A mobilização de τ_1, em grande parte das atividades, é um exemplo da necessidade de se determinar a área da base de um sólido, antes de calcular o seu volume.

Outra técnica utilizada de forma considerável neste capítulo foi $\tau_{3.}$ Esta técnica, assim como a τ_1, teve como objetivo, nas atividades em que foi mobilizada, auxiliar a técnica τ_2 no cálculo do volume de um determinado sólido. Cabe-nos destacar que, dentre todas as atividades propostas nesse capítulo, apenas uma não mobilizou τ_2, pois, de acordo com o quadro 3, só foi necessário a mobilização da $\tau_{6.}$ Isso nos mostra que o autor privilegia, nesse capítulo, a aplicação da fórmula do volume de um sólido conhecido.

Quanto à evolução das praxeologias, neste capítulo são propostas, inicialmente, atividades a serem resolvidas mobilizando apenas a técnica $\tau_{2,}$ na sequência as atividades que demandam a mobilização das técnica τ_1 e τ_2, e, por fim, as que demandam a mobilização das técnicas τ_1, τ_2 e τ_6. Logo podemos dizer que a evolução das praxeologias ocorre do seguinte modo: [T, τ_2]$\rightarrow$ [T, τ_1 e τ_2]$\rightarrow$ [T, τ_1, τ_2 e τ_6]. Percebemos que esta evolução permanece equilibrada, no que diz respeito ao número de atividades que contemplam cada uma destas organizações, somente entre as duas primeiras praxeologias, tendo em vista que a quantidade de atividades abordadas nestes dois casos quase que se equiparam. Já a praxeologia [T, τ_1, τ_2 e τ_6] aparece em menor quantidade dentre as atividades propostas, o que nos leva a crer que o principal foco do autor é a utilização da fórmula para o cálculo da área, de uma região conhecida, assim como a fórmula do cálculo do volume dos sólidos aqui abordados. Já os estudos das demais praxeologias acontecem, de certo modo, superficialmente, pois as técnicas são apenas apresentadas, ou seja, não são trabalhadas efetivamente e nem sistematizadas. Um exemplo destes casos é a praxeologia [T, τ_1, τ_2, τ_8 e τ_{12}] que é contemplada apenas uma vez.

Apesar de serem casos particulares de prismas, o autor apresenta, sem breve justificativa, atividades referentes ao cálculo do volume do paralelepípedo e do cubo de formas distintas e sem uma breve justificativa. Nesse caso, dentre as atividades propostas neste capítulo, percebemos que o prisma é o sólido mais abordado pelo autor, seguido do paralelepípedo e do cubo, conforme nos mostra o tabela 5 a seguir.

Tabela 4: Tipos de sólidos trabalhados - Coleção I - Capítulo 10

Sólido	**Quantidade**	**%**	**Observação**	
Cubo	8	23	-	-
Paralelepípedo	13	37	Reto retângulo	11
			Qualquer	1
			Oblíquo	1
Prisma	14	40	Triangular	4
			Quadrangular	2
			Pentagonal	1
			Hexagonal	5
			Trapezoidal	1
			Oblíquo quadrangular	1

Total	**35**	**100**	**-**	**-**

Fonte: autores da pesquisa

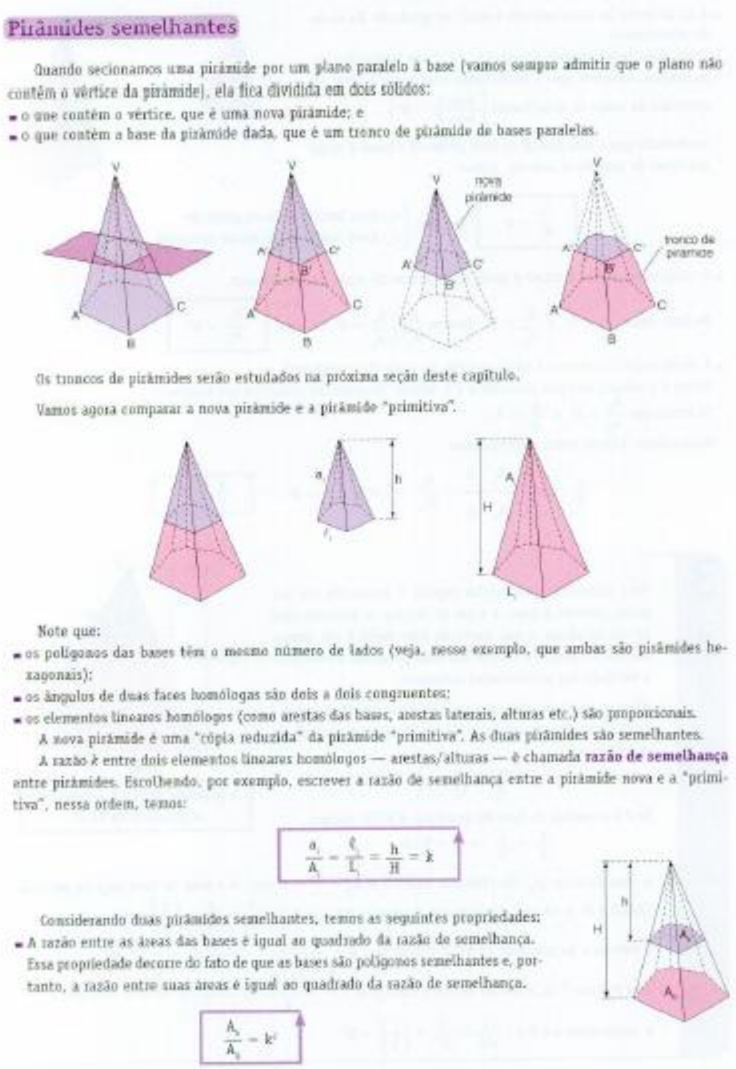
Notamos que, dentre os paralelepípedos abordados pelo autor, o reto-retângulo é o que recebe um maior destaque nas atividades, já dentre os prismas, o hexagonal foi o mais trabalhado seguido do triangular. Por outro lado, percebemos que os paralelepípedos, qualquer e oblíquo, assim como os prismas, pentagonal e trapezoidal, só foram abordados apenas uma vez cada um. Talvez a opção do autor por determinados sólidos esteja relacionada ao cálculo da área da base dos mesmos, isto é, trabalha com áreas conhecidas pelo leitor, como por exemplo, triângulos e retângulos.

4.1.4.1.2 Capítulo 11 – Pirâmide.

Ao iniciarmos a análise do referente capítulo, deparamos novamente com uma proposta muito parecida com a que encontramos no capítulo anterior, isto é, o conteúdo de volume inicia-se com a demonstração da fórmula do volume da pirâmide e, logo em seguida, são apresentados exemplos e atividades resolvidas referentes ao cálculo do volume da pirâmide. Durante a resolução são apresentadas algumas atividades resolvidas com o intuito de se trabalhar a fórmula do volume e outros conhecimentos geométricos (áreas, alturas, entre outros), após estas argumentações, o autor traz as atividades propostas que compreende um total de 12 atividades. Este momento é marcado pela exploração de alguns tipos de tarefas com o objetivo de mobilizar algumas técnicas já elaboradas ou até mesmo para a construção das mesmas. Em síntese, percebemos que o capítulo inicia-se com a construção do bloco tecnológico-teórico (primeiro momento com a organização matemática neste capítulo) seguido da institucionalização da técnica τ_2 (quinto momento) e o trabalho com a técnica recém institucionalizada (quarto momento).

Na sequência do capítulo, o autor traz algumas explicações sobre razão de semelhança, assim como sua demonstração, em particular para calcular o volume de duas pirâmides semelhantes, seguido de um exemplo para sua aplicabilidade, conforme apresentado nas figuras 64 e 65 a seguir.

Figura 64: Pirâmides semelhantes



Pirâmides semelhantes

Quando secionamos uma pirâmide por um plano paralelo à base (vamos sempre admitir que o plano não contém o vértice da pirâmide), ela fica dividida em dois sólidos:

- o que contém o vértice, que é uma nova pirâmide; e
- o que contém a base da pirâmide dada, que é um tronco de pirâmide de bases paralelas.

Os troncos de pirâmides serão estudados na próxima seção deste capítulo.

Vamos agora comparar a nova pirâmide e a pirâmide "primitiva".

Note que:

- os polígonos das bases têm o mesmo número de lados (veja, nesse exemplo, que ambas são pirâmides hexagonais);
- os ângulos de duas faces homólogas são dois a dois congruentes;
- os elementos lineares homólogos (como arestas das bases, arestas laterais, alturas etc.) são proporcionais.

A nova pirâmide é uma "cópia reduzida" da pirâmide "primitiva". As duas pirâmides são semelhantes.

A razão k entre dois elementos lineares homólogos — arestas/alturas — é chamada **razão de semelhança** entre pirâmides. Escolhendo, por exemplo, escrever a razão de semelhança entre a pirâmide nova e a "primitiva", nessa ordem, temos:

$$\boxed{\frac{a_l}{A_l} = \frac{\ell_l}{L_l} = \frac{h}{H} = k}$$

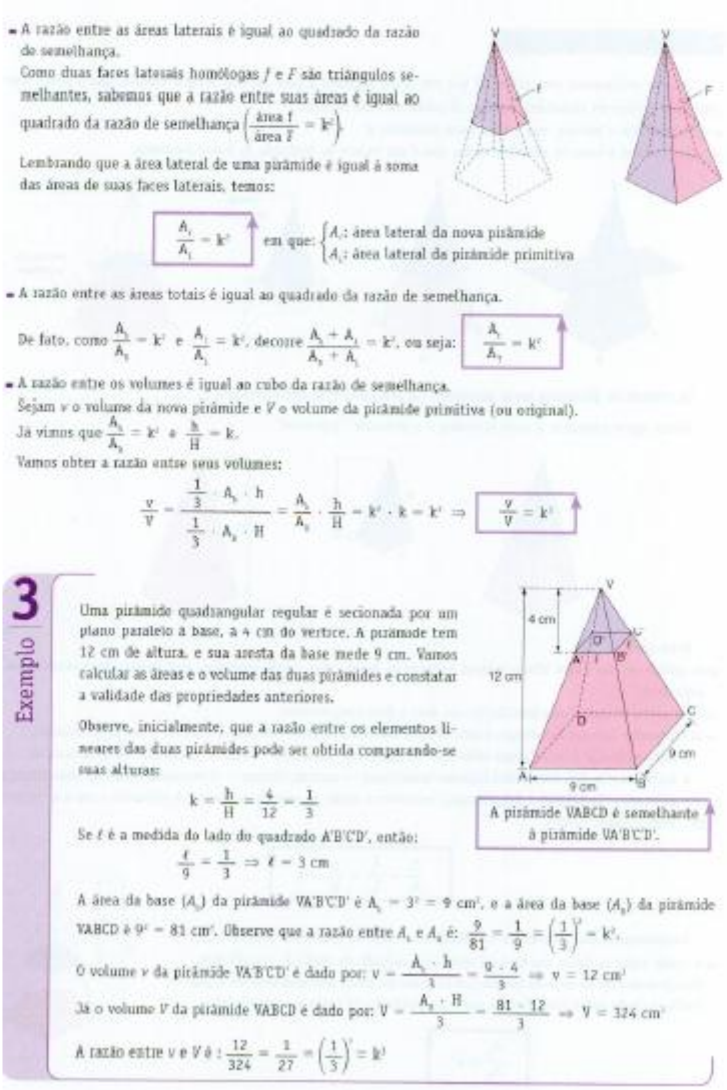
Considerando duas pirâmides semelhantes, temos as seguintes propriedades:

- A razão entre as áreas das bases é igual ao quadrado da razão de semelhança. Essa propriedade decorre do fato de que as bases são polígonos semelhantes e, portanto, a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança.

$$\boxed{\frac{A_b}{A_B} = k^2}$$

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do ensino médio, p. 211.

Figura 65: Pirâmides semelhantes



- A razão entre as áreas laterais é igual ao quadrado da razão de semelhança.

Como duas faces laterais homólogas *f* e *F* são triângulos semelhantes, sabemos que a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança $\left(\frac{\text{área } f}{\text{área } F} = k^2\right)$.

Lembrando que a área lateral de uma pirâmide é igual à soma das áreas de suas faces laterais, temos:

$\boxed{\frac{A_l}{A_L} = k^2}$ em que: $\begin{cases} A_l\text{: área lateral da nova pirâmide} \\ A_L\text{: área lateral da pirâmide primitiva} \end{cases}$

- A razão entre as áreas totais é igual ao quadrado da razão de semelhança.

De fato, como $\frac{A_b}{A_B} = k^2$ e $\frac{A_l}{A_L} = k^2$, decorre $\frac{A_b + A_l}{A_B + A_L} = k^2$, ou seja: $\boxed{\frac{A_t}{A_T} = k^2}$

- A razão entre os volumes é igual ao cubo da razão de semelhança.

Sejam *v* o volume da nova pirâmide e *V* o volume da pirâmide primitiva (ou original).

Já vimos que $\frac{A_b}{A_B} = k^2$ e $\frac{h}{H} = k$.

Vamos obter a razão entre seus volumes:

$$\frac{v}{V} = \frac{\frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h}{\frac{1}{3} \cdot A_B \cdot H} = \frac{A_b}{A_B} \cdot \frac{h}{H} = k^2 \cdot k = k^3 \Rightarrow \boxed{\frac{v}{V} = k^3}$$

Exemplo 3

Uma pirâmide quadrangular regular é secionada por um plano paralelo à base, a 4 cm do vértice. A pirâmide tem 12 cm de altura, e sua aresta da base mede 9 cm. Vamos calcular as áreas e o volume das duas pirâmides e constatar a validade das propriedades anteriores.

A pirâmide VABCD é semelhante à pirâmide VA'B'C'D'.

Observe, inicialmente, que a razão entre os elementos lineares das duas pirâmides pode ser obtida comparando-se suas alturas:

$$k = \frac{h}{H} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Se ℓ é a medida do lado do quadrado A'B'C'D', então:

$$\frac{\ell}{9} = \frac{1}{3} \Rightarrow \ell = 3 \text{ cm}$$

A área da base (A_b) da pirâmide VA'B'C'D' é $A_b = 3^2 = 9$ cm², e a área da base (A_B) da pirâmide VABCD é $9^2 = 81$ cm². Observe que a razão entre A_b e A_B é: $\frac{9}{81} = \frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = k^2$.

O volume *v* da pirâmide VA'B'C'D' é dado por: $v = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{9 \cdot 4}{3} \Rightarrow v = 12$ cm³

Já o volume *V* da pirâmide VABCD é dado por: $V = \frac{A_B \cdot H}{3} = \frac{81 \cdot 12}{3} \Rightarrow V = 324$ cm³

A razão entre *v* e *V* é : $\frac{12}{324} = \frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = k^3$

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do ensino médio, p. 212.

Observamos nas figuras anteriores o momento de construção do bloco tecnológico-teórico, que fundamenta a elaboração e aplicação da técnica τ_5. Em seguida é feita a institucionalização da mesma, caracterizando o quinto momento, isto é, o autor apresenta a relação de semelhança entre os volumes de duas pirâmides que será utilizada nas resoluções de alguns exemplos e atividades propostas na sequência. Cabe destacar, que tanto os exemplos quanto às atividades são resolvidos por meio da mobilização dessa técnica, o que caracteriza o quarto momento, ou seja, o trabalho com a técnica em torno de um determinado tipo de tarefa.

Após analisarmos todas as atividades apresentadas neste capítulo identificamos a contemplação de 5 tipos de tarefas, tabela 5, sendo que todas já foram privilegiadas no capítulo 10.

Tabela 5: Tipos de tarefas - Coleção I - Capítulo 11

	T_1	**T_2**	**T_3**	**T_4**	**T_5**
Total	24	2	4	3	1
%	71	6	12	9	3

Fonte: dos autores da pesquisa.

Assim como no capítulo anterior, observamos que o tipo de tarefa T1 é bem mais explorado pelo autor do que os demais. No entanto, como já abordamos anteriormente, o foco principal destes capítulos é justamente o cálculo do volume de um sólido geométrico, por isso a grande presença deste tipo de tarefa. Por outro lado, percebemos que os tipos de tarefas T3 e T4 tiveram um destaque considerável pelo autor, embora ainda recebendo pouca ênfase, isto é, menos de 10%. Isto indica que ele propõe determinadas atividades visando trabalhar algumas técnicas específicas, como por exemplo, a técnica τ_7 que está presente em todas as atividades do tipo T3 e T4, conforme nos mostra o quadro 4 a seguir.

Quadro 3: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Coleção I - Capítulo 11

	T_1	**T_2**	**T_3**	**T_4**	**T_5**
τ_2	2	-	-	-	-
τ_7	1	1		1	-
τ_1 e τ_2	5	-	-	-	-
τ_2 e τ_5	2	-	-	-	-
τ_2 e τ_7	3	-	3	1	-
τ_1 e τ_7	-	1	-	-	-
τ_1, τ_2 e τ_5	9	1	-	-	-
τ_1, τ_2 e τ_6	-	-	-	-	1
τ_1, τ_2 e τ_7	1	-	-	1	-
τ_2, τ_7 e τ_{11}	1	-	-	-	-
τ_1, τ_2, τ_5 e τ_7	1	-	-	-	-

Fonte: dos autores da pesquisa.

Observamos que neste capítulo, o autor mantém a ênfase dada primeiramente a τ_2 seguida por τ_1, com uma pequena variação na taxa percentual de cada uma delas. O motivo pelo qual enfatiza com mais intensidade t_2, deve-se ao fato de o autor sugerir, na maioria dos casos, que se calcule o volume de um determinado sólido por meio desta técnica. No entanto, notamos uma grande recorrência a técnica τ_7, sendo esta, em algumas atividades, a única técnica mobilizada. Neste caso, entendemos que o autor pretende mostrar que o volume e/ou a área de um determinado sólido pode ser determinado sem a recorrência de uma fórmula específica, ou seja, que estas medidas podem ser determinadas por meio da técnica τ_7.

Percebemos também que as demais técnicas mobilizadas neste capítulo sempre têm como objetivo auxiliar τ_2. Este fato é verificado na resolução de duas atividades apresentadas pelo autor, no primeiro caso ele mobiliza as técnicas τ_5 para determinar a altura de um triângulo equilátero e no segundo caso é mobilizada a técnica τ_{11} que consiste em decompor um sólido qualquer em dois sólidos conhecidos, logo, nestes dois casos, as técnicas citadas são mobilizadas justamente para auxiliar na aplicação da técnica τ_2.

Quanto à evolução das praxeologias presentes neste capítulo, são apresentados, inicialmente, alguns exemplos e atividades resolvidas com o objetivo de mobilizar apenas a técnica τ_2. Na sequência, são propostas algumas atividades que mobilizam a técnica τ_7, na continuidade, atividades que demandam a mobilização das técnicas (τ_1 e τ_2) e (τ_2 e τ_7) e por fim, atividades que mobilizam as técnicas τ_1, τ_2 e τ_5. Simbolizamos essa evolução praxeológica da seguinte forma: [T, τ_2]→ [T, τ_7]→ [T, τ_1 e τ_2]→ [T, τ_2 e τ_7]→ [T, τ_1, τ_2 e τ_5]. Neste caso, percebemos que não há uma evolução equilibrada entre as praxeologias apresentadas, visto que há um privilégio da praxeologia que envolve as técnicas τ_1, τ_2 e τ_5 . No entanto, percebe-se que a quantidade de atividades contempladas em cada organização vai aumentando gradativamente. Nota-se também, que algumas praxeologias só foram contempladas uma única vez, como por exemplo, [T, τ_1, τ_2, τ_5 e τ_7].

Por fim, observamos que o sólido mais explorado nas atividades propostas neste é a pirâmide, com aproximadamente 57% de todos os sólidos trabalhados, seguido do tetraedro e o tronco da pirâmide, com aproximadamente, 14% cada um, conforme destaca a tabela 6 a seguir.

Tabela 6: Tipos de sólidos trabalhos - Coleção I - Capítulo 11

Sólido	**Quantidade**	**%**	**Observação**	
Cubo	2	6	-	
Tetraedro regular	5	14	-	
Paralelepípedo	1	3	Reto-retângulo	1
Pirâmide	20	57	Quadrangular Hexagonal	14 6
Tronco de Pirâmide	5	14	Quadrangular Qualquer	4 1
Sólido Irregular	2	6	-	-
Total	**35**	**100**	-	-

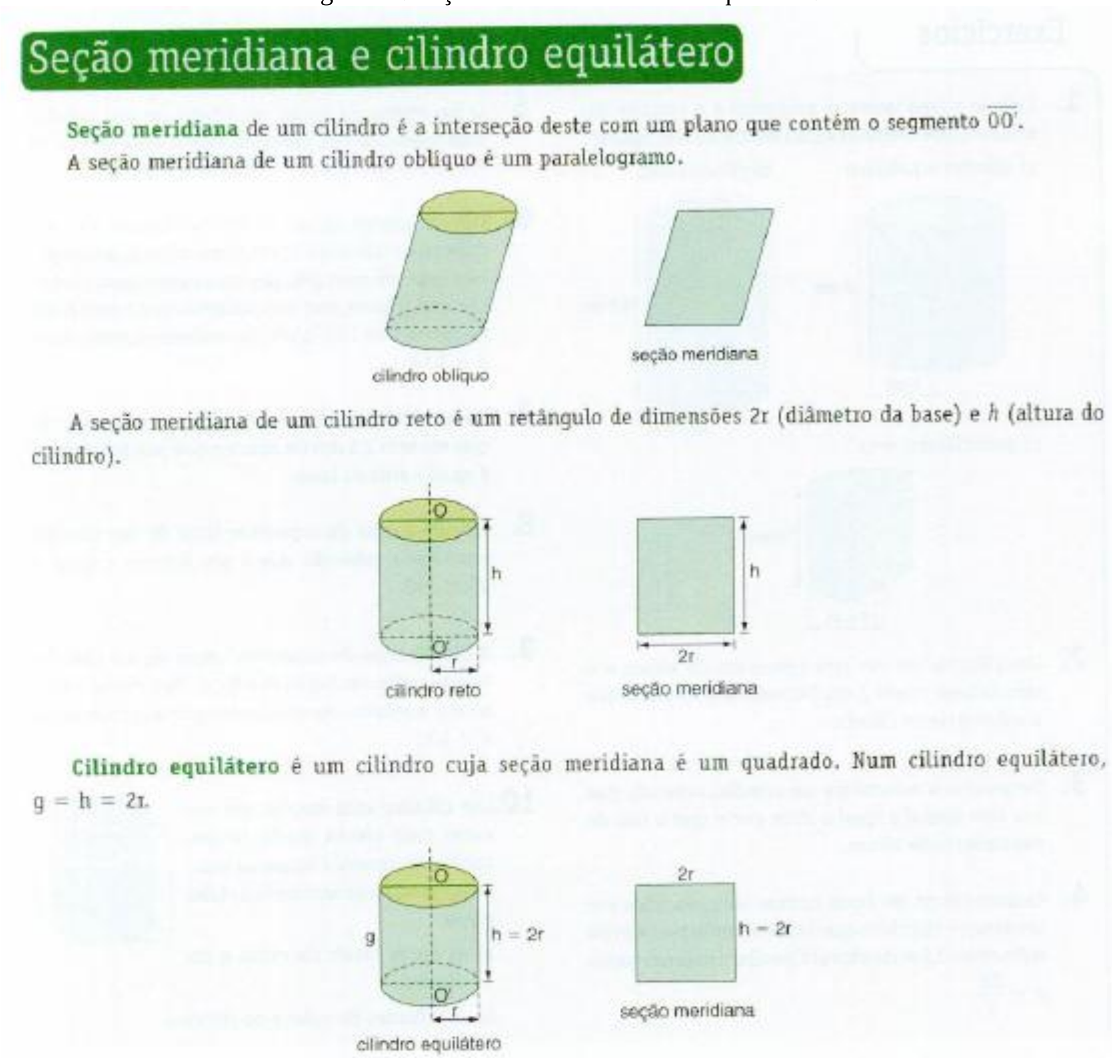
Fonte: autores da pesquisa.

Notamos ainda, que o autor busca relacionar, alguns sólidos trabalhados no capítulo anterior com o atual, como por exemplo, a exploração do cubo e do paralelepípedo. Outro ponto importante a destacar é o trabalho com sólidos irregulares que são abordados, mesmo que de forma tímida, em duas atividades apresentadas neste capítulo. Percebemos também, que o foco principal neste momento, é a exploração das pirâmides, em especial, as quadrangulares e hexagonais.

4.1.4.1.3 Capítulo 12 – Cilindro.

Assim como nos dois capítulos anteriores, este capítulo inicia-se realizando uma abordagem sobre a demonstração da fórmula do volume, nesse caso a do cilindro, seguida de um exemplo e uma atividade resolvida para trabalhar a técnica demonstrada. Dessa forma, entendemos que a organização didática deste capítulo em torno da técnica τ_2 ocorre praticamente da mesma forma que o anterior, caracterizando os mesmos momentos de estudo. Antes de apresentar as atividades propostas e complementares, as quais compreende um total de 25 atividades, o autor traz algumas explicações e exemplos a respeito de seção meridiana e cilindro equilátero, conforme destaca a figura a seguir.

Figura 66: Seção meridiana e cilindro equilátero.



Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do ensino médio, p. 221.

Observamos que a principal ideia do autor é apresentar a secção meridiana de diferentes tipos de cilindros, como o oblíquo, o reto e o equilátero todos destacados na figura anterior.

A Análise realizada em torno das atividades aqui apresentadas possibilitou-nos identificar a contemplação de 4 tipos de tarefas, conforme observamos na tabela 7 a seguir.

Tabela 7: Tipos de tarefas - Coleção I - Capítulo 12

	T1	**T2**	**T3**	**T4**
Total	17	1	3	2
%	74	4	13	9

Fonte: dos autores da pesquisa.

Observamos que, assim como nos dois primeiros capítulos analisados, o autor privilegia, neste capítulo, o tipo de tarefa T1, o qual corresponde, aproximadamente, a 74 % de todas as atividades analisadas. No entanto, notamos que o tipo de tarefa T2 também é contemplado neste capítulo, entretanto com pouca ênfase. Talvez o principal motivo desta contemplação seja a constante mobilização da técnica t_2 para sua resolução. Já os tipos de tarefas T2 e T4 são contemplados em uma proporção inferior aos outros dois tipos de tarefas apresentados anteriormente, porém suas resoluções também recaem na aplicação de $t_{2,}$ conforme destacamos no quadro 5 a seguir.

Quadro 4: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Coleção I - Capítulo 12

	T1	**T2**	**T3**	**T4**
τ_2	13	-	3	-
τ_2 e τ_5	-	-	-	1
τ_1 e τ_2	2	1	-	1
τ_2 e τ_4	1	-	-	-
τ_1, τ_2 e τ_8	1	-	-	-

Fonte: dos autores da pesquisa.

Notamos que a técnica τ_2 continua sendo mais privilegiada do que as demais e sua mobilização está presente em todas as resoluções das atividades apresentadas. Já as demais técnicas mobilizadas consistem, em sua maioria, auxiliar a técnica τ_2 no cálculo do volume de um cilindro. Isso nos mostra que o autor mantém a escolha feita nos capítulos anteriores de enfatizar a aplicação da fórmula do volume, neste caso, de um cilindro e também de utilizar técnicas auxiliares para dar suporte a τ_2 quando esta não for suficiente.

Em relação às praxeologias, a que envolve a técnica τ_2 representa o carro chefe deste capítulo, a evolução ocorre do seguinte modo: [T, τ_2]→ [T, τ_1 e τ_2]. Percebemos que a transição entre as praxeologias é bastante sutil, tendo em vista que a contemplação da praxeologia [T, τ_1 e τ_4] é pequena, sendo abordadas em apenas quatro atividades. Cabe-nos destacar ainda, que outras praxeologias também foram contempladas, como por exemplo, [T, τ_2 e τ_5], no entanto, exploradas apenas uma vez.

Já em relação aos sólidos mais explorados, percebemos uma abordagem considerável do cilindro, em especial do cilindro reto, conforme ilustra a tabela 8 a seguir.

Tabela 8: Tipos de sólidos trabalhados - Coleção I - Capítulo 12

Sólido	**Quantidade**	**%**	**Observação**	
Cubo	1	4	-	-
Prisma	2	7	Quadrangular	1
			Octogonal	1
Cilindro	24	89	Reto	16
			Qualquer	5
			Equilátero	3
Total	**27**	**100**	-	-

Fonte: autores da pesquisa

Percebemos ainda, que este capítulo quase não contempla os sólidos trabalhados nos capítulos anteriores, ou seja, não relaciona os sólidos explorados nas atividades anteriores com os atuais. Dessa forma, entendemos que o foco principal deste capítulo é a exploração de atividades que abordem o tema cilindro.

4.1.4.1.4 Capítulo 13 – Cone.

No que tange o capítulo 13, novamente a ideia apresentada nos capítulos anteriores aparece, isto é, a organização didática ocorre praticamente em torno da técnica τ_2. Logo, o conteúdo de volume inicia-se com uma breve demonstração da fórmula do volume, seguida de um exemplo para sua aplicabilidade. Na sequência são trazidas algumas atividades resolvidas para que essa técnica e outros conceitos apresentados anteriormente sejam trabalhados. Outro fato destacado nesse capítulo e a aparição de algumas definições a respeito de secção meridiana e cone equilátero, além de um exemplo sobre estes dois casos. A primeira parte do capítulo é finalizada com a apresentação das atividades propostas, sendo estas um total de 16 questões.

Já na segunda parte deste capítulo é apresentada, de forma breve, a demonstração da fórmula do tronco de cone (construção do bloco tecnológico-teórico e institucionalização da técnica τ_2) e um exemplo onde se calcula o volume de um determinado tronco de cone com e sem a utilização da fórmula demonstrada. Em seguida é trazida uma atividade resolvida, para uma melhor compreensão da fórmula apresentada (momento de trabalho com a técnica elaborada), e 5 atividades propostas e 8 atividades complementares.

Após analisarmos todas as atividades apresentadas neste capítulo, identificamos a contemplação de 3 tipos de tarefas, conforme abordamos na tabela 9 a seguir.

Tabela 9: Tipos de tarefas - Coleção I - Capítulo13

	T1	**T2**	**T3**
Total	32	2	2
%	90	5	5

Fonte: dos autores da pesquisa.

Notamos que, neste capítulo, o tipo de tarefa T1 teve uma abordagem ainda maior do que nos capítulos anteriores, representando, aproximadamente, 90% das atividades analisadas. Já os tipos de tarefa T2 e T3 contemplam 5 % cada um, o que nos leva a crer que o principal foco do autor é explorar, com maior ênfase, o tipo de tarefa T1, ou seja, o cálculo do volume de um cone. Para resolver estes tipos de tarefas algumas técnicas são mobilizadas, dentre elas τ_{10} (Identificar a medida do raio e substituir na fórmula do comprimento da circunferência ($C=2\pi r$), é a única que ainda não havia sido contemplada nos capítulos anteriores, entretanto essa técnica é mobilizada uma única vez nesse capítulo o que, a nosso ver, não se caracteriza um dos momentos descritos por Chevallard (1999). O quadro 6 a seguir nos mostra a relação dos tipos de tarefas e técnicas identificadas nesse capítulo.

Quadro 5: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Coleção I - Capítulo 13

	T1	**T2**	**T3**
τ_2	10	-	2
τ_7	1	-	1
τ_2 e τ_5	12	-	-
τ_1 e τ_2	1	-	-
τ_2 e τ_7	3	-	-
τ_2 e τ_8	1	-	-
τ_1, τ_2 e τ_5	-	1	-
τ_2, τ_5 e τ_6	1	-	-
τ_2, τ_5 e τ_{10}	1	-	-
τ_2, τ_4 e τ_5	1	-	-
τ_2, τ_5 e τ_{11}	1	-	-

Fonte: dos autores da pesquisa.

Percebemos que τ_2 continua sendo a técnica mais explorada neste capítulo, no entanto notamos um aumento significativa na exploração das técnicas τ_5 e τ_7. Neste caso, percebemos que estas duas técnicas são utilizadas, na maioria das atividades, para auxiliar τ_2, isto é, elas são mobilizadas com o objetivo de determinar as medidas da área da base e da altura de um sólido conhecido, pois estas medidas são fundamentais para se aplicar a fórmula do volume de um sólido conhecido. Portanto, o foco principal das técnicas τ_5 e τ_7 é dar suporte à aplicabilidade da técnica τ_2.

No que diz respeito à evolução das praxeologias, a situação, discutida nos parágrafos anteriores, pode ser simbolizada da seguinte forma: $[T, \tau_2] \rightarrow [T, \tau_2 \text{ e } \tau_5] \rightarrow [T, \tau_2 \text{ e } \tau_7]$. Percebemos que esta evolução só é equilibrada nas duas primeiras praxeologias, pois a quantidade de atividades contempladas em cada uma delas são praticamente a mesma. Por outro lado, a praxeologia que envolve as técnicas τ_2 e τ_7 aparecem timidamente nas atividades apresentadas neste capítulo. Já as demais praxeologias apresentadas só foram contempladas uma vez cada uma, logo não podemos concluir se houve ou não uma evolução.

Dentre todos os sólidos apresentados neste capítulo o cone reto e o tronco de cone reto são os mais explorados pelo autor, conforme destacamos na tabela 10 a seguir.

Tabela 10: Tipos de sólidos trabalhados - Coleção I - Capítulo 13

Sólido	**Quantidade**	**%**	**Observação**	
Paralelepípedo	2	5	Reto retângulo	2
Cilindro	2	5	Reto	2
Cone	27	66	Reto Equilátero Qualquer Revolução	18 4 1 4
Tronco de Cone	8	19	Reto Revolução Qualquer	6 1 1
Sólido Irregular	2	5	-	-
Total	**41**	**100**	-	-

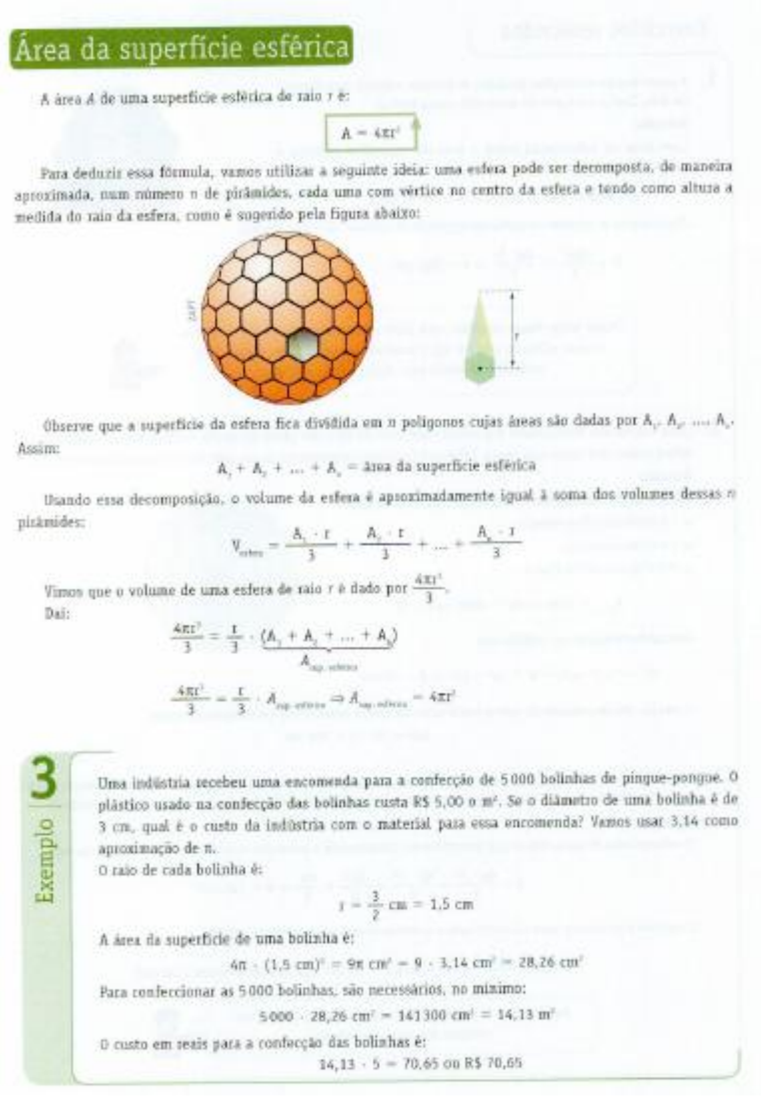
Fonte: dos autores da pesquisa.

Outro ponto importante que observamos na tabela é quanto aos tipos de cones explorados neste capítulo, nota-se, facilmente, que o autor não se restringe apenas à contemplação do cone reto, isto é, procura explorar, mesmo que em menor quantidade, o cone equilátero, de revolução e qualquer. Talvez a opção por esta escolha seja a possibilidade de se trabalhar conceitos diferentes em cada caso. Percebemos também que são explorados, mesmo que de forma tímida, alguns sólidos apresentados nos capítulos anteriores, como por exemplo, o paralelepípedo reto retângulo.

4.1.4.1.5 Capítulo 14 – Esfera.

Assim como nos demais capítulos até aqui apresentados, este também traz inicialmente a demonstração da fórmula do volume, neste caso a da esfera, seguida de um exemplo referente à sua aplicabilidade. Dessa forma, percebemos que a ideia inicial do capítulo ocorre da mesma forma que os demais capítulos da coleção. Entretanto, um fato em especial nos chamou bastante atenção durante o processo de análise deste. Verificamos que o autor traz a demonstração da fórmula da área da superfície esférica e do fuso esférico e algumas atividades resolvidas visando à mobilização dessas fórmulas o que caracteriza, a nosso ver, o terceiro momento, ou seja, a construção do bloco tecnológico-teórico que justifica as técnicas recém elaboradas seguido do quinto momento, isto é, a institucionalização das referidas técnicas, conforme observamos nas figuras 67 e 68 a seguir.

Figura 67: Área da superfície esférica.



Área da superfície esférica

A área A de uma superfície esférica de raio r é:

$$\boxed{A = 4\pi r^2}$$

Para deduzir essa fórmula, vamos utilizar a seguinte ideia: uma esfera pode ser decomposta, de maneira aproximada, num número n de pirâmides, cada uma com vértice no centro da esfera e tendo como altura a medida do raio da esfera, como é sugerido pela figura abaixo:

Observe que a superfície da esfera fica dividida em n polígonos cujas áreas são dadas por $A_1, A_2, ..., A_n$. Assim:

$$A_1 + A_2 + ... + A_n = \text{área da superfície esférica}$$

Usando essa decomposição, o volume da esfera é aproximadamente igual à soma dos volumes dessas n pirâmides:

$$V_{esfera} = \frac{A_1 \cdot r}{3} + \frac{A_2 \cdot r}{3} + ... + \frac{A_n \cdot r}{3}$$

Vimos que o volume de uma esfera de raio r é dado por $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Daí:

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{r}{3} \cdot \underbrace{(A_1 + A_2 + ... + A_n)}_{A_{sup.\ esférica}}$$

$$\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{r}{3} \cdot A_{sup.\ esférica} \Rightarrow A_{sup.\ esférica} = 4\pi r^2$$

Exemplo 3

Uma indústria recebeu uma encomenda para a confecção de 5 000 bolinhas de pingue-pongue. O plástico usado na confecção das bolinhas custa R$ 5,00 o m². Se o diâmetro de uma bolinha é de 3 cm, qual é o custo da indústria com o material para essa encomenda? Vamos usar 3,14 como aproximação de π.

O raio de cada bolinha é:

$$r = \frac{3}{2}\ cm = 1,5\ cm$$

A área da superfície de uma bolinha é:

$$4\pi \cdot (1,5\ cm)^2 = 9\pi\ cm^2 = 9 \cdot 3,14\ cm^2 = 28,26\ cm^2$$

Para confeccionar as 5 000 bolinhas, são necessários, no mínimo:

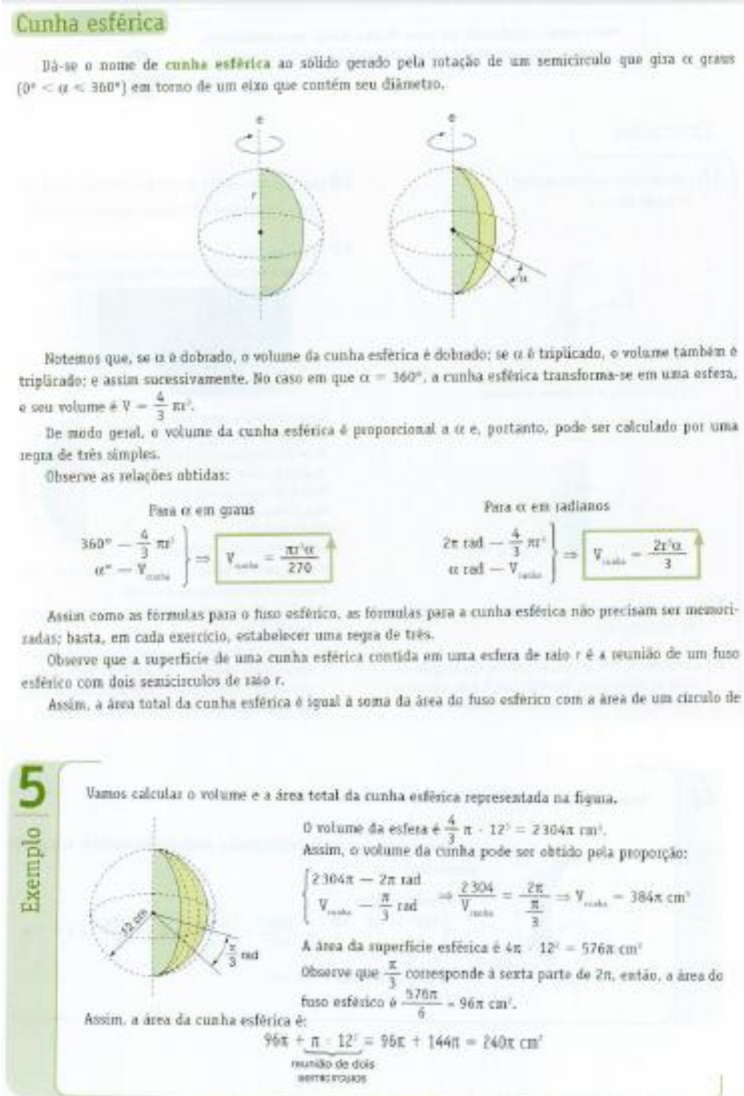
$$5000 \cdot 28,26\ cm^2 = 141\,300\ cm^2 = 14,13\ m^2$$

O custo em reais para a confecção das bolinhas é:

$$14,13 \cdot 5 = 70,65 \text{ ou R\$ } 70,65$$

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do ensino médio, p. 243.

Figura 68: Cunha esférica.



Cunha esférica

Dá-se o nome de **cunha esférica** ao sólido gerado pela rotação de um semicírculo que gira α graus ($0° < \alpha \leq 360°$) em torno de um eixo que contém seu diâmetro.

Notemos que, se α é dobrado, o volume da cunha esférica é dobrado; se α é triplicado, o volume também é triplicado; e assim sucessivamente. No caso em que $\alpha = 360°$, a cunha esférica transforma-se em uma esfera, e seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

De modo geral, o volume da cunha esférica é proporcional a α e, portanto, pode ser calculado por uma regra de três simples.

Observe as relações obtidas:

Para α em graus

$$\left.\begin{array}{l} 360° — \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \alpha° — V_{cunha} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{cunha} = \frac{\pi r^3 \alpha}{270}}$$

Para α em radianos

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi \text{ rad} — \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \alpha \text{ rad} — V_{cunha} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{V_{cunha} = \frac{2r^3\alpha}{3}}$$

Assim como as fórmulas para o fuso esférico, as fórmulas para a cunha esférica não precisam ser memorizadas; basta, em cada exercício, estabelecer uma regra de três.

Observe que a superfície de uma cunha esférica contida em uma esfera de raio r é a reunião de um fuso esférico com dois semicírculos de raio r.

Assim, a área total da cunha esférica é igual à soma da área do fuso esférico com a área de um círculo de

5 Exemplo

Vamos calcular o volume e a área total da cunha esférica representada na figura.

O volume da esfera é $\frac{4}{3}\pi \cdot 12^3 = 2304\pi$ cm³.

Assim, o volume da cunha pode ser obtido pela proporção:

$$\begin{cases} 2304\pi — 2\pi \text{ rad} \\ V_{cunha} — \frac{\pi}{3} \text{ rad} \end{cases} \Rightarrow \frac{2304}{V_{cunha}} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} \Rightarrow V_{cunha} = 384\pi \text{ cm}^3$$

A área da superfície esférica é $4\pi \cdot 12^2 = 576\pi$ cm²

Observe que $\frac{\pi}{3}$ corresponde à sexta parte de 2π, então, a área do fuso esférico é $\frac{576\pi}{6} = 96\pi$ cm².

Assim, a área da cunha esférica é:

$$96\pi + \underbrace{\pi \cdot 12^2}_{\text{reunião de dois semicírculos}} = 96\pi + 144\pi = 240\pi \text{ cm}^2$$

Fonte: Coleção – Matemática- Ciência e Aplicações – 2º ano do ensino médio, p. 247-248.

Na sequência são apresentadas 9 atividades referentes ao cálculo do volume da esfera, e mais 10 atividades referentes ao cálculo do volume de cunha esférica e do fuso esférico.

Ao final da análise de todas as atividades apresentadas, neste capítulo, identificamos a exploração de 4 tipos de tarefas, conforme nos mostra o tabela 11 a seguir.

Tabela 11: Tipos de tarefas - Coleção I - Capítulo 14

	T1	T2	T3	T5
Total	19	1	3	2
%	76	4	12	8

Fonte: dos autores da pesquisa.

Nota-se facilmente que dentre os tipos de tarefas identificadas, neste capítulo, T1 é a mais explorada pelo autor mantendo assim um percentual parecido com os outros capítulos analisados. Por outro lado, o tipo de tarefa T3 é contemplado em uma porcentagem maior do que vimos anteriormente. Talvez isso ocorra em decorrência do autor não se preocupar apenas com o cálculo do volume de sólidos apresentados no capítulo, mas também com outros elementos importantes que englobam os sólidos em questão.

Em relação às técnicas mobilizadas percebemos que o autor privilegia, assim como nos casos anteriores, a técnica τ_1, a qual está presente na resolução de todas as atividades analisadas neste capítulo, conforme ilustra o quadro 7 a seguir.

Quadro 6: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Coleção I - Capítulo 14

	T1	**T2**	**T3**	**T5**
τ_2	13	-	2	1
τ_1 e τ_2	2	1	-	-
τ_2 e τ_5	1	-	-	-
τ_2 e τ_6	2	-	1	1
τ_1 e τ_{11}	1	-	-	-

Fonte: dos autores da pesquisa.

Notamos que, dentre as atividades analisadas, 64% são resolvidas recorrendo apenas à mobilização da técnica τ_2, ou seja, não precisam de técnicas auxiliares em suas resoluções. Já em 16% das técnicas analisadas τ_2 aparece como técnica principal, isto é, antes ser mobilizada ela é auxiliada por uma outra técnica, como por exemplo, a utilização da técnica τ_{11}, que consiste na decomposição de um sólido qualquer em sólidos conhecidos, antes da mobilização de τ_2. Nesse contexto, entendemos que o autor se preocupa em trabalhar, durante a resolução das atividades, com a fórmula do volume do cilindro, no entanto, busca relacionar tal técnica com outros conceitos apresentados antes do conteúdo de volume.

Em relação à evolução das praxeologias, neste capítulo são propostas, inicialmente, atividades a serem resolvidas mobilizando apenas a técnica τ_2. Na continuidade, atividades que demandam a mobilização das técnicas τ_2 e τ_6, e, chegando às técnicas τ_1 e τ_2. Simbolicamente esta evolução ocorre do seguinte modo: [T, τ_2]→ [T, τ_1 e τ_2]→ [T, τ_2 e τ_6]. Nota-se que esta evolução só é equilibrada entre as duas últimas, visto que há um privilégio da praxeologia [T, τ_1]. Cabe ressaltar, que algumas praxeologias só foram contempladas uma vez neste capítulo, dessa forma não as consideramos como uma evolução.

Quanto aos sólidos abordados, neste capítulo, percebemos que o autor, além da esfera e da cunha esférica, contempla alguns sólidos trabalhados nos capítulos anteriores, conforme ilustra a tabela 12 a seguir.

Tabela 12: Tipos de sólidos trabalhados - Coleção I - Capítulo 14

Sólido	Quantidade	%	Observação	
Paralelepípedo	2	7	Reto retângulo	2
Cilindro	3	10	Reto Qualquer	2 1
Cone	1	3	Reto	1
Esfera	16	55	-	-
Cunha Esférica	3	10	-	-
Sólido Irregular	4	15	-	-
Total	**29**	**100**	-	-

Fonte: dos autores da pesquisa.

Nota-se ainda, que os sólidos irregulares são contemplados consideravelmente neste capítulo, visto que em algumas atividades propostas, o autor sugere que se decomponham alguns sólidos irregulares em sólidos conhecidos. Observa-se também uma articulação entre os sólidos apresentados nesse capítulo com os anteriores.

Diante dos resultados elencados anteriormente, consideramos pertinente, neste momento, apresentarmos algumas conclusões sobre a organização matemática e a organização didática da coleção I analisada. Inicialmente, cabe-nos destacar a quantidade razoável de páginas dedicadas ao conteúdo de volume, 50 ao todo, tendo em vista que, nas últimas décadas, o tema em questão tem sido alvo de várias discussões, conforme discutido anteriormente, justamente por não receber a mesma atenção que outros conteúdos matemáticos. No entanto, apesar da quantidade de páginas serem consideráveis, observamos que os capítulos dedicados ao conteúdo de volume são apresentados no final do livro o que pode acarretar "na ausência de seu ensino, sobretudo porque o livro didático é utilizado também no encadeamento de ensino dos conteúdos." (MORAIS, 2013, p. 67). Dessa forma, entendemos que o tema em questão deve ser estudado por meio de uma articulação com os demais conteúdos matemáticos, pois assim seu ensino não será afetado por falta de tempo.

Em relação à organização matemática, percebemos nitidamente a predominância do tipo de tarefa T1 (calcular o volume de um sólido), o qual representa, aproximadamente, 79% de todos os tipos de tarefas identificados na coleção I. Vale ressaltar que, nessa coleção, foram identificados 5 tipos de tarefas, T1, T2, T3, T4 e T5, em um total de 151 atividades analisadas[24]. A predominância de T1, nessa coleção, vai ao encontro do que foi identificado nas outras 3 coleções analisadas, isto é, os autores das mesmas têm como prioridade obter a medida do volume de sólidos conhecidos. Tal prioridade também é destacada no estudo

[24] As atividades analisadas englobam exemplos, atividades resolvidas, atividades propostas, atividades complementares, desafios, dentre outros.

desenvolvido por Morais (2013), ao afirmar que tanto as definições como a ideia intuitiva de volume, apresentadas nas coleções aprovadas pelo PNLD/2012, remetem à medição do espaço ocupado por um corpo, valorizando assim a necessidade de medir e, consequentemente, colocam o aspecto numérico em primeiro lugar. A valorização da medida fica ainda mais evidente, ao destacarmos o segundo e o terceiro tipo de tarefa mais identificada na coleção I, T3 (calcular um determinado comprimento de um sólido, dado seu volume) e T2 (calcular a área de uma determinada região de um sólido, dado seu volume), que representam, respectivamente, 11% e 5% de todos os tipos de tarefas identificados. Esses dois tipos de tarefas, assim como T1, têm como objetivo principal a obtenção de uma medida, o que valoriza ainda mais a afirmação feita por Morais (2013).

Outro ponto importante observado na coleção I são os métodos utilizados pelo autor para a resolução das atividades apresentadas, ou seja, as técnicas mobilizadas em torno de um determinado tipo de tarefa. Foram identificadas, nessa coleção, 9 técnicas, τ_1, τ_2, τ_3, τ_4, τ_6, τ_7, τ_8, τ_{10} e τ_{11}, dentre as quais τ_2 (escolher uma fórmula de volume, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada) é a que se mais destaca, tendo em vista que na maioria das atividades analisadas o que se propõe é justamente o volume de um determinado sólido. Dentre as 119 atividades do tipo T1 identificadas na coleção I, 46 (aproximadamente 39%) são resolvidas apenas por meio da técnica τ_2, ou seja, o volume fica determinado somente com a aplicação imediata da fórmula do volume do respectivo sólido. Segundo Morais (2013), esse tipo de situação pode favorecer a memorização de procedimentos, o que pode acarretar na falta de compreensão mais profunda do conceito de volume. Em outras situações, na qual a aplicação imediata da técnica τ_2 é insuficiente, identificamos a mobilização de técnicas que tem como principal objetivo auxiliar τ_2, como a técnica τ_1 (escolher uma fórmula de área, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada) que é utilizada para se determinar a área da base de um determinada sólido. Nesse caso, a atividade apresentada fornece somente a medida da altura, ou seja, a medida da área da base se faz necessária.

Ainda em relação ao tipo de tarefa T1, observamos que, das atividades analisadas, 17 (aproximadamente 14 %) são resolvidas por meio das técnicas τ_1 e τ_2, e 15 (aproximadamente 13 %) são resolvidas por meio das técnicas τ_2 e τ_5. Dessa forma, entendemos que determinadas técnicas são mobilizadas justamente para auxiliar a aplicação da fórmula do volume, ou seja, têm como principal função encontrar os elementos que são imprescindíveis para a aplicação da fórmula do volume. Destacamos também que, conforme se avança na análise das atividades apresentadas pelo autor, novas técnicas, até então não necessárias para a resolução de um determinado tipo de tarefa, são mobilizadas. Tal fato nos ajuda a elucidar melhor a evolução das praxeologias, tendo em vista que a mobilização de uma nova técnica só é necessária quando as outras, até então utilizadas, são insuficientes para se determinar o resultado esperado. Assim, entendemos que houve uma evolução das praxeologias, entretanto, ela não ocorreu de forma equilibrada, pois na maioria dos capítulos analisados uma determinada praxeologia é contemplada várias vezes, como [T, τ_1] e [T, τ_1 e τ_2], enquanto outras apenas uma vez.

No que tange a organização didática, fundamentada nos seis momentos didáticos propostos por Chevallard (1999), cabe-nos destacar alguns aspectos apresentados ao longo das nossas análises. Por exemplo, a organização didática em torno da praxeologia [T, τ_2] nos cinco capítulos analisados é muito parecida, isto é, autor inicia o conteúdo de volume com a demonstração da fórmula do mesmo, o que acreditamos ser a construção do bloco tecnológico-teórico (o primeiro momento com a organização matemática) que fundamenta a elaboração a aplicação da técnica τ_2. Na sequência ocorre a institucionalização dessa técnica caracterizando o quinto momento, isto é, o autor apresenta a fórmula que será utilizada nas resoluções das atividades propostas na sequência. Posteriormente, são apresentados alguns exemplos e exercícios resolvidos com o objetivo de trabalhar a técnica que acabara de ser constituída e que, em nossa perspectiva, caracteriza o quarto momento, ou seja, o trabalho com a técnica. Outra praxeologia que merece destaque é a [T, τ_1], tendo em vista que, no último capítulo do livro, o autor traz tanto a demonstração da fórmula da área da superfície esférica, quanto do fuso esférico o que caracteriza o terceiro momento, ou seja, a construção do bloco tecnológico-teórico que justifica as técnicas recém elaboradas seguido do quinto momento, isto é, a institucionalização das referidas técnicas. Posteriormente, são apresentadas algumas atividades resolvidas visando à mobilização dessas fórmulas, ou seja, busca-se trabalhar com a técnica recém-elaborada. Esses fatos nos levam a perceber a valorização, por parte do autor, de dois momentos didáticos, isto é, a construção do bloco tecnológico-teórico e também a institucionalização da técnica de resolução. Assim, a predominância desses dois momentos juntamente com o momento de trabalho com a técnica, nos permite aproximar o autor da obra em um modelo clássico conforme classificação de Gascón (2003).

Por fim, destacamos que a grande maioria das fórmulas utilizadas no cálculo do volume dos sólidos analisados, com exceção das fórmulas do paralelepípedo reto retângulo e do cubo que são justificadas pela decomposição em cubos unitários, é justificada pelo princípio de Cavalieri e, no caso específico da coleção I, não apresenta erros quanto à utilização dessa ferramenta. O fato de não conter erros é fundamental, pois favorece a compreensão dos alunos na construção das referidas fórmulas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a intenção de responder à nossa questão de pesquisa – "*Como é proposto o ensino de volume de sólidos geométricos em livros didáticos no Ensino Médio?*" – voltamo-nos para as quatro coleções mais adotadas nas redes públicas brasileiras, em especial para a coleção I (a mais adotada). A análise dessas coleções revela-nos aspectos significativos para a caracterização do ensino proposto. Na sequência, apresentamos algumas dessas principais características e no final destacamos alguns pontos que merecem ser discutidos em futuras pesquisas.

Cabe-nos enfatizar primeiramente que a TAD, nosso referencial teórico/metodológico, foi de grande valia para compreendermos a proposta de ensino do tema em questão. Entendemos que essa teoria, diferentemente da Teoria dos Campos Conceituais, permiti-nos identificar qual matemática está empregada, no nosso caso, nos livros didáticos e quais propostas o autor apresenta para o ensino e aprendizagem dos conteúdos abordados em tais livros. Essa teoria nos possibilitou, por exemplo, conhecer os tipos de tarefas que são propostos pelo autor, em relação ao conteúdo de volume tal como às técnicas mobilizadas para a resolução desses tipos de tarefas. Esse passo a passo, proporcionado pela TAD, nos mostra o(s) caminho(s) que o autor compreende que os professores, que optarem por tal coleção, devam prosseguir e de que maneira o conteúdo ali apresentado deve ser trabalhado.

Por meio das noções de organização matemática e de organização didática apresentadas pela TAD, analisamos as coleções focando nas principais características que acreditamos serem essenciais para se ter uma visão ampla e ao mesmo tempo detalhada da praxeologia. Dessa forma, pudemos responder nossos dois objetivos específicos, que se resumem em investigar qual o conteúdo matemático proposto e como ele é proposto nessas coleções. Para tanto, optamos por analisar as quatro coleções mais adotadas pelas escolas públicas brasileira, aprovadas pelo PNLD2012, mantendo foco na organização matemática e didática da coleção mais adotada.

Foram identificadas, em nossas análises, 6 tipos de tarefas contempladas nas quatro coleções analisadas. Na coleção I, cerne de nossa pesquisa, identificamos 5 tipos de tarefas, conforme observa-se na tabela a seguir.

Tabela 13: Síntese dos tipos de tarefas da coleção I

	T1	**T2**	**T3**	**T4**	**T5**
Total	119	7	16	5	4
%	79	5	11	3	2

Fonte: dos autores da pesquisa.

Dentre esses tipos de tarefas, observamos que T1 (calcular o volume de um sólido) representa, aproximadamente, 74 % de todas as atividades apresentadas. Esse tipo de tarefa gerou ainda dois subtipos de tarefas, isto é, $T1_1$ (Calcular o volume de um sólido conhecido) e $T1_2$ (Calcular o volume de um sólido irregular). Dentre esses dois subtipos identificados, o $T1_2$ foi contemplado com pouca ênfase, 8 vezes, se comparamos com o $T1_1$ que foi contemplado 111 vezes. Dessa forma, acreditamos que o estudo de algumas propriedades que possibilita a compreensão do cálculo do volume desses tipos de sólidos pode ficar comprometido.

Nesse contexto, fica evidente a valorização do ensino por meio de técnicas de resolução, pois atividades do tipo T1 são geralmente propostas após a apresentação da técnica, justamente para promover a sua prática. Esse fato fica ainda mais evidente se compararmos com o segundo tipo de tarefa mais contemplado, isto é, T3 (Calcular um determinado comprimento de um sólido, dado seu volume) que representa 11 % do total identificado. No que tange às técnicas de resolução identificamos 12 tipos nas quatro coleções, das quais 9 foram contempladas na coleção I, conforme ilustra o quadro a seguir.

Quadro 7: Síntese das técnicas da Coleção I

τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_6	τ_7	τ_8	τ_{10}	τ_{11}

Fonte: dos autores da pesquisa.

No caso dessa coleção, observamos que a técnica de resolução privilegiada é τ_2 (*Escolher uma fórmula de volume, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada*) que, na maioria dos casos, é utilizada como a técnica principal. Por exemplo, algumas atividades propõem o cálculo do volume de um determinado sólido, porém, antes de calcular esse volume, é necessário determinar a área da base do mesmo. Logo, a técnica τ_2 não é a única mobilizada, mas é a principal, pois será necessária sua utilização após a medida da área ser determinada, para que o cálculo do volume do sólido em questão seja realizado.

Percebemos ainda, no caso da coleção I, que houve uma evolução das praxeologias. No entanto, isso não ocorre de forma equilibrada, visto que algumas dessas praxeologias aparecem em menor quantidade do que outras. De acordo com as compreensões até este ponto, essa evolução ocorre no decorrer das atividades apresentadas, pois, conforme abordamos anteriormente, as primeiras questões apresentadas, em especial nos capítulos destinados ao cálculo de volume, mobilizam, em sua maioria, apenas as técnicas que acabaram de demonstrar. Assim, conforme vai-se avançando na resolução das atividades propostas, novas técnicas vão sendo mobilizadas, principalmente aquelas trabalhadas em capítulos anteriores ao de volume.

Em relação à análise da organização didática, percebemos que a mesma ocorre, nos cinco capítulos analisados, de forma muito parecida. A organização didática em torno da praxeologia [T, τ_2], por exemplo, inicia-se com a demonstração da fórmula do mesmo, o que acreditamos ser a construção do bloco tecnológico-teórico (o primeiro momento com a organização matemática) que fundamenta a elaboração a aplicação da técnica τ_2. Na sequência ocorre a institucionalização dessa técnica caracterizando o quinto momento, isto é, o autor apresenta a fórmula que será utilizada nas resoluções das atividades propostas na sequência. Posteriormente são apresentados alguns exemplos e exercícios resolvidos com o objetivo de trabalhar a técnica que acabara de ser constituída que, a nosso ver, caracteriza o quarto momento, ou seja, o trabalho com a técnica. Outra praxeologia que merece destaque é a [T, τ_1], tendo em vista que, no último capítulo do livro, o autor traz tanto a demonstração da fórmula da área da superfície esférica, quanto do fuso esférico o que caracteriza, a nosso ver, o terceiro momento, ou seja, a construção do bloco tecnológico-teórico que justifica as técnicas recém elaboradas seguido do quinto momento, isto é, a institucionalização das referidas técnicas. Posteriormente, são apresentadas algumas atividades resolvidas visando a mobilização dessas fórmulas, ou seja, busca-se trabalhar com a técnica recém-elaborada. Cabe destacar ainda, que durante a análise das 4 coleções não conseguimos identificar o momento dedicado a avaliação das praxeologias.

Diante disso, percebemos que o autor da coleção I valoriza tanto a construção do bloco tecnológico-teórico quanto à institucionalização da técnica de resolução. Assim, a predominância desses dois momentos juntamente com o momento de trabalho com a técnica, nos leva a aproximar as escolhas realizadas pelo autor da obra de um modelo clássico, conforme classificação de Gascón (2003).

Neste aspecto, a quantidade excessiva de técnicas, referentes ao cálculo do volume dos sólidos geométricos, identificadas na coleção I, pode não favorece o processo de ensino e aprendizagem, pois o aluno pode limitar-se à memorização das mesmas para efetuar seus cálculos. Acreditamos ainda que, apesar da coleção I apresentar várias situações contextualizadas, a forma estática em que o conteúdo de volume é abordado pode não proporcionar discussões construtivas entre professor e o aluno, tendo em vista que o foco principal dessa coleção é aplicação da fórmula do volume de um determinado sólido. Não obstante, é importante levar-se em consideração que, embora seja enunciado de forma correta na coleção mais adotada, o princípio de Cavalieri não foi apresentado de forma clara na coleção IV, conforme já havia abordado Morais (2013), o que pode acarretar em uma compreensão errada de determinados conceitos e propriedades. Entretanto, acreditamos que tal ferramenta, se utilizada com o rigor necessário que lhe é peculiar, é de grande valia para compreender e justificar o uso das fórmulas dos volumes de sólidos conhecidos, conforme sugerem as OCN.

Por fim, observamos, na coleção I, uma articulação, mesmo que em uma quantidade pequena, entre os sólidos trabalhos em um capítulo com aqueles trabalhos nos capítulos subsequentes. Isso pode ser observado na análise realizada em torno das atividades apresentadas no capítulo 14, que busca relacionar alguns conceitos e definições discutidos nos capítulos anteriores com os da esfera.

Para finalizar essas considerações, elencamos algumas questões que consideramos importantes para os leitores, tendo em vista que a leitura desse trabalho possa ter suscitado algumas dúvidas nos mesmos, assim como nos próprios desenvolvedores deste trabalho. Por exemplo, até que ponto a evolução das praxeologias podem influenciar no processo de ensino e aprendizagem? Será que a praxeologia apresentada nessas coleções são as mesmas que o professor põe em prática em sala de aula? Certamente dentre as questões que essa investigação levanta, essas duas nos interessaria olhar. Entretanto, elas se localizam entre uma categoria de assuntos que podem ser tratados na continuidade deste estudo, visto que, a presente pesquisa de mestrado, a questão central era investigar como é proposto o ensino de volume de sólidos geométricos em livros didáticos no ensino médio.

Dessa forma, esperamos que este trabalho possa contribuir para os estudos e investigações relacionadas aos livros didáticos, abarcando reflexões no que tange o ensino e aprendizagem do cálculo de volumes de sólidos geométricos em livros didáticos.

REFERÊNCIAS

ALFACONNECTION. **Matemática**. Disponível em: <http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo1601.htm>. Acesso: 14 Fevereiro de 2014.

ALMEIDA, D. C. C.; COSTACURTA, M. S. **Atividades Lúdicas para o Ensino e Aprendizagem da Geometria nos Anos Finais do Ensino Fundamental**. Chapecó: Unochapecó, 2010.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ALVES, A. M. M. **Livro Didático de Matemática**: Uma Abordagem Histórica. Dissertação (Mestrado em Educação). UFP. Pelotas-RS, 2005.

BARBOSA. E. J. T. **Equação do Primeiro Grau em Livros Didáticos sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). UEPB. Campina Grande-PB, 2011.

BARROSO, J. M. **Conexões com a Matemática**. Vol. 1, 2, 3. Ed. Moderna, 2011.

BLUMENTHAL, G. **Os PCN e o Ensino Fundamental em Matemática:** um avanço ou retrocesso? Artigo do Site Só Matemática: www.somatematica.com.br. Acesso em 13 de Dezembro de 2014.

BOYER, C. B. **História da Matemática**; Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática* (1º e 2º ciclos do ensino fundamental). v. 3. Brasília: MEC, 1997.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental**. Brasília, 1998.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Guia de Livros Didáticos**: PNLD 2012: Matemática / Brasília, 2011.

_______. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica I. **Guia de Livros Didáticos**: PNLD/2013. Brasília: MEC/SEF, 2012.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Volume 2, 2006.

CARVALHO, Paulo Cesar Pinto. Introdução à Geometria Espacial. Coleção do Professor de Matemática, SBM. Rio de Janeiro, 1999.

CARVALHO, D. G. **Uma Análise da Abordagem da Área de Figuras Planas no Guia de Estudo do Projovem Urbano Sob a Ótica da Teoria Antropológica do Didático**. Dissertação (Educação Matemática e Tecnológica), UFPE, Recife-PE, 2012.

CHEVALLARD, Yves. ***Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques:*** *L'approche anthropologique*. *Recherches em Didactique dês Mathématiques*, v 19, n 2, p. 221-266, 1999.

CHOPPIN, Alain. **História dos Livros e das Edições Didáticas**: sobre o estado da arte. [on-line] Revista Educação e Pesquisa, São Paulo, v.30, n.3, p. 549-566, set./dez. 2004. Tradução de Maria Adriana C. Cappello. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/ep/v30n3/a12v30n3.pdf>. Acesso em: 20 Ago. 2013.

CORRÊA, R. L. T. **O Livro Escolar Como Fonte de Pesquisa em História da Educação**. In: Cadernos CEDES, ano XIX, nº 52, Campinas, 2000.

COSTA, M. S.; ALLEVATO, S. G. **Livro Didático de Matemática**: Análise de Professor as Polivalentes em Relação ao Ensino de Geometria. VIDYA, v. 30, n. 2, p. 71-80, jul./dez., 2010, Santa Maria, 2010.

COSTA, M. A.; LIMA, S. R. R. **Ensino de Prismas:** Uma Análise a partir do Livro Didático. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Licenciatura em Matemática), UNIFAL, Alfenas, 2010.

CRUZ, E. S. **A noção de variável em Livros Didáticos do Ensino Fundamental: Um estudo sob a ótica da Organização Praxeológica**. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

DANTE, L. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. Vol. 1, 2 e 3. São Paulo: Ática, 2010.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. **Fundamentos da Matemática Elementar**. Volume 10. Atual editora, São Paulo, 1993.

EDUMATEC. **Cubo**. Espmat/UFRGS/Geometria. Disponível em: <http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo1/conteudo/conteudos18.htm>. Acesso em: 02 de Fevereiro de 2014.

EMMEL, R.; Araújo, M. C. P.: **A Pesquisa Sobre o Livro Didático no Brasil**: Contexto, Caracterização e Referenciais de Análise no Período 1999-2010. IX ANPEDSUL, 2012. Caxias do Sul, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Editora da Unicamp, São Paulo, 2004.

EZEQUIEL, T. S. **Livro Didático:** do Ritual de Passagem à Ultrapassagem. Pontos de Vista: o que Pensam Outros Especialistas?. Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996. Disponível em: <http://emaberto.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/1034/936> 23 de Novembro de 2014.

FIGUEIREDO, A. P. N. B. **Resolução de Problemas Sobre a Grandeza Volume por Alunos do Ensino Médio:** Um Estudo Sob a Ótica da Teoria dos Campos Conceituais. Dissertação (Educação Matemática e Tecnológica), UFPE, Recife – PE, 2014.

FREITAS, N. K.; RODRIGUES, M. H. **O Livro Didático ao Longo do Tempo**: A Forma do Conteúdo. UDESC, 2008.

GARCIA, T. M. F. B.; NASCIMENTO, F. E. **A Didática e os Manuais para Ensinar a Ensinar Física**. IX Congresso Nacional de Educação- EDUCERE; III Encontro Sul Brasileiro de Pisicologia - PUC, Curitiba - PR, 2009.

GASCÓN, J. **La Necessidade de Utilizar Modelos em Didática de Las Matemáticas**. Educ. Mat. Pesqui: São Paulo, v.5, n.2, pp.11-37, 2003.

GRANDO, C. M. **Geometria**: Espaço e Forma**.** Chapecó: Unochapecó. Coordenadoria de Educação a Distância, 2008.

IEZZI, G., DOLCE, O., DEGENSZAJN, D., PÉRIGO, R., ALMEIDA, N. **Matemática: Ciência e Aplicações**. Vol. 1, 2 e 3. Ed. 6 – São Paulo: Saraiva, 2010.

EMMEL, R. E.; ARAUJO, M. C.P. **A Pesquisa sobre o Livro Didático no Brasil: Contexto, Caracterização e Referenciais de Análise no Período 1999-2010.** Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul. ANPEDSUL

INFOESCOLA. **Esfera**. Disponível em: <http://www.infoescola.com/geometriaespacial/esfera/> Acesso: 14 Fevereiro de 2014.

KASPARY, D. R A. **Uma Análise Praxeológica das Operações de Adição e Subtração de Números Naturais em uma Coleção de Livros Didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), UFMS, Campo Grande – MS, 2014.

LAJOLO, M. **Livro Didático**: um (quase) manual de usuário. Em Aberto, Brasília, n. 69, v. 16, jan./mar. 1996.

LIMA, R. E. S. **O Estudo de Sólidos Geométricos**: A Utilização de Materiais Didáticos Manipuláveis no Ensino Médio. UFPB, 2011.

LIMA, E.L. **Medida e forma em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança, Grafitex – Coleção do Professor de Matemática, Rio de Janeiro,1991.

LIMA, E. L.; MORGADO, A. C.; JÚDICE, E. D.; WAGNER, E.; DE CARVALHO, J. B. P.; CARNEIRO, J. P. Q.; GOMES, M. L. M.; CARVALHO, P. C. P. **Exame de Textos. Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio.** VITAE, IMPA e SBM. Rio de Janeiro, 2001.

LIMA, E.L. **Medida e Forma em Geometria**: comprimento, área, volume e semelhança, SBM – Coleção do Professor de Matemática, 4ª Edição, Rio de Janeiro, 2009.

LULA, K.P. **Aplicações do Princípio de Cavalieri ao Cálculo de Volumes e Áreas**. (Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional), UFG, Goiânia, 2013.

MARTINS, I. **Analisando Livros Didáticos na Perspectiva dos Estudos do Discurso**: compartilhando reflexões e sugerindo uma agenda para a pesquisa. Pro-Posições v. 17, n. 1 (49) - jan./abr. UFRJ, 2006.

MATEMÁTICA. **Corpos redondos**: cilindro. Disponível em: <http://loadinginformations.blogspot.com.br/2012_09_01_archive.html>. Acesso: 13 de Fevereiro de 2014.

MATEMÁTICA ESSENCIAL. **Geometria Espacial**: cones. Disponível em: <http://pessoal.sercomtel.com.br/matematica/geometria/cone/cone.htm>. Acesso: 13 de Fevereiro de 2014.

MAXWELL. **Apresentando o Livro Didático de Língua Portuguesa: O Objeto e Seus Parâmetros**. PUC-RIO - Certificação Digital Nº 0812131/CA. Disponível em: <http://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/16124/16124_2.PDF> Acesso: 19 de Novembro de 2014.

MELLO, J. **Esfera**. Disponível em <http://soumaisenem.com.br/matematica/conhecimentos-geometricos/esferas>. Acesso: 13 Fev. 2014.

MOISE, E. E. **Geometria Moderna**. São Paulo, Edgard Blucher, 1976.

MORAIS, L. B. **Análise da Abordagem de Volume em Livros Didáticos de Matemática para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), UFPE, Recife-PE, 2013.

MORAIS, L. B., BELLEMAIN, P. M. B. **Análise da abordagem do conceito de volume nos livros didáticos de Matemática para os anos finais do ensino fundamental sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais**. Congresso de Iniciação Científica - UFPE, Recife, 2010.

MORAIS, L. B., BELLEMAIN, P. M. B, .; LIMA, P. **Análise de Situações de Volume em Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio à Luz da Teoria dos Campos Conceituais.** Revista online: Educação Matemática e Pesquisa, v. 16, n. 1, 2014.

OLIVEIRA, A. B. **Prática pedagógica e conhecimentos específicos: um estudo com um professor de matemática em início de docência.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), UFMS, Campo Grande – MS, 2010.

OSSENBACH, G.; SORMOZA, M. **Os Manuais Escolares Como Fonte para a História da Educação na América Latina.** Madrid: UNED edição, 2001.

PAIS, L. C. **Didática da Matemática:** uma análise da influência francesa. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PATERLINI, R. R. **Os "Teoremas" de Cavalieri**. Revista do Professor de Matemática, Rio de Janeiro, n. 72, p. 43-47, 2010.

PEREIRA, A. C. C.; PEREIRA, D. E.; MELO, A. P. **Livros Didáticos de Matemática**: Uma discussão sobre seu uso em alguns segmentos educacionais. UFRN/SEDUC-PA, 2010.

PERES, T. F. C. **Volume de Sólidos Geométricos – Um Experimento de Ensino Baseado Na Teoria de V. V. Davydov**. da Pontifícia Dissertação (Mestrado em Educação), PUC, Goiânia – GO, 2010.

PORTAL DA MATEMÁTICA. **Pirâmide – Definição**. Disponível em: <http://mauroweigel.blogspot.com.br/2010/08/nomenclatuda-de-piramide.html>. Acesso 12 Fev. 2014.

PRIMO, M.E. **O Princípio de Cavalieri para Cálculo de Volumes no Ensino Médio:** Algumas Possibilidades. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)), UFJF, Juiz de Fora – MG, 2013.

PROGRAMA EDUCAR. **Curso para Professores de 1ª a 4ª Série do Ensino Fundamental**. Educar/USP/Matemática. Disponível em: < http://educar.sc.usp.br/matematica/m2l2.htm>. Acesso: 12 Fev. 2014.

RAMOS, L. A.; SILVA, O. **Calculando Área e Volume dos Sólidos Geométricos a partir de Objetos Geométricos do Cotidiano do Aluno**. O professor PDE e os desafios da escola pública paranaense, 2012. Curitiba: SEED/PR., 2012. V.1. (Cadernos PDE).

REIS. E. S. **O Estudo de Sistemas de Equações do Primeiro Grau em Livros Didáticos Utilizados em Escolas Brasileiras**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), UFMS, Campo Grande – MS, 2010.

RODRIGUES, C. I.; COSTA, S. I. R. **Guia do Professor**: experimento. UNICAMP, Campinas-SP. Disponível em: <file:///D:/Downloads/TELA-volume_de_piramides---guia_do_professor.pdf>. Acesso: 13 de Fevereiro de 2014.

ROMANATTO, M. C. **O livro didático**: alcances e limites. In: Encontro paulista de Matemática. 7. São Paulo, 2004.

SALLES, A. M. **O Livro Didático como Objeto e Fonte de Pesquisa Histórica e Educacional**. UPF. Revista Semina. v.10 - 2º Semestre, Passo Fundo, 2011.

SANTOS, C. M.; FREITAS, L. M. **Um olhar sobre a Prática Pedagógica de uma Professora Indígena no Ensino de Geometria**. UFMS, Campo Grande-MS, 2013.

SILVA, A. R. **Uma Proposta para o Ensino de Geometria Espacial Métrica no Ensino Médio**. UFLA, Lavras-MG, 2013.

SILVA, E. T. **Livro Didático**: do Ritual de Passagem à Ultrapassagem. Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996.

SILVA, M. O. **O Volume dos Sólidos**: Estudo de Livros Didáticos e de uma Atividade Aplicada a Alunos do Curso de Licenciatura em Matemática. Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Licenciatura em Matemática), UFSC, Florianópolis, 2005.

SIQUEIRA, M. A. **Modelagem Matemática e Livro Didático no Ensino Médio**: Um Olhar para o PNLD. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e em Matemática), UFP, Curitiba, 2014.

SOUZA, H. J. G.; OLIVEIRA, R. J. S.; MONTES, S.M. **Áreas e Volumes**. IBILCE/UNESP, São José do Rio Preto-SP, 2009.

SOUZA, J. R. **Novo Olhar Matemática**. Vol. 1, 2 e 3. 1 ed. São Paulo: FTD, 2010.

TALIM, S. L.; SALDANHA, J. L. **Avaliação da Aprendizagem na Escola Plural**: o que ocorre na prática? Revista Electrónica Iberoamericana Sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación, v. 5, p. 84-99, 2007.

VIEIRA, S. S.; SILVA, F. H. S. **Flexibilizando a Geometria na Educação Inclusiva dos Deficientes Visuais**: Uma Proposta de Atividades. Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática. IX ENEM, Belo Horizonte, 2007.

ZAMBON, L. B.; TERRAZZAN, E. A. **Políticas de Material Didático no Brasil**: organização dos processos de escolha de livros didáticos em escolas públicas de educação básica. Rev. bras. Estud. pedagog. (online), Brasília, v. 94, n. 237, p. 585-602, maio/ago. 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A – TIPOS DE TAREFAS IDENTIFICADAS

Tipos de Tarefas	Descrição	Subtipos de Tarefas	Quantidade de Subtipos	Quantidade Total
T1	Calcular o volume de um sólido.	$T1_1$ – Calcular o volume de um sólido conhecido. $T1_2$ – Calcular o volume de um sólido irregular.	408 30	438
T2	Calcular a área de uma determinada região de um sólido, dado seu volume.	$T2_1$ – Calcular a área da superfície total. $T2_2$ – Calcular a área da superfície Lateral.	19 5	24
T3	Calcular um determinado comprimento de um sólido, dado seu volume.	$T3_1$ – Calcular o comprimento da aresta. $T3_2$ – Calcular o comprimento da altura. $T3_3$ – Calcular o comprimento da diagonal. $T3_4$ – Calcular o comprimento do raio. $T3_5$ – Calcular o comprimento do diâmetro. $T3_6$ – Calcular o comprimento da geratriz. $T3_7$ – Calcular o comprimento de sólido.	19 45 2 13 2 1	86

		$T3_8$ – Calcular o comprimento da largura do sólido. $T3_9$ – Calcular o comprimento entre dois pontos.	2 1 1	
T4	Calcular razões entre volumes e/ou comprimentos de sólidos.	$T4_1$ – Calcular a razão entre as alturas de dois sólidos $T4_2$ – Calcular a razão entre os volumes de dois sólidos	3 14	17
T5	Calcular a massa (peso) de um sólido conhecido, dado seu volume.	-	-	11
T6	Comparar o volume de sólidos conhecidos.	-	-	4

APÊNDICE B – TIPOS DE TÉCNICAS IDENTIFICADAS

Técnicas	Descrição	Quantidade
τ_1	Escolher uma fórmula de área, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada.	189
τ_2	Escolher uma fórmula de volume, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada.	541
τ_3	Obter uma razão equivalente a uma razão dada, multiplicar ou dividir ambos os termos da razão dada por um número diferente de zero.	9
τ_4	Efetuar transformação de unidades de medidas utilizando um modelo pré-definido.	44
τ_5	Identificar as medida de dois lados de um triângulo retângulo e substituir na expressão: $a^2 = b^2 + c^2$, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada.	108
τ_6	Construir uma tabela e agrupar as grandezas da mesma espécie em colunas e manter na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência. Na sequência identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais e, por fim, montar a proporção e resolver a equação.	16
τ_7	Estabelecer a razão de semelhança.	55
τ_8	Identificar as medidas dos lados de um triângulo retângulo (cateto oposto, cateto adjacente e hipotenusa), substituir na fórmula da relação desejada (seno, cosseno e tangente), realizar os cálculos numéricos pertinentes e, se necessário, acrescentar a unidade de medida apropriada.	15
τ_9	Identificar os coeficientes da equação, determinar o valor do descriminante, substituir na fórmula de Bhaskara e realizar os cálculos numéricos pertinentes.	3
τ_{10}	Identificar a medida do raio e substituir na fórmula do comprimento da circunferência ($C=2\pi r$).	7
τ_{11}	Decompor um sólido qualquer em sólidos conhecidos.	24
τ_{12}	Escolher uma fórmula de diagonal, substituir valores numéricos na fórmula, realizar os cálculos numéricos pertinentes e acrescentar a unidade de medida apropriada.	17