UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Rogério Cardoso Batista

UM ESTUDO DE REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÃO AFIM EM UMA PERSPECTIVA DE ARTICULAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA E FÍSICA

Campo Grande - MS
2015

Rogério Cardoso Batista

UM ESTUDO DE REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÃO AFIM EM UMA PERSPECTIVA DE ARTICULAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA E FÍSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

Campo Grande - MS

2015

Rogério Cardoso Batista

UM ESTUDO DE REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÃO AFIM EM UMA PERSPECTIVA DE ARTICULAÇÃO ENTRE MATEMÁTICA E FÍSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.
Orientador: Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

Campo Grande, MS, julho de 2015.

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

____
Profa. Dra. Marilena Bittar
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

____
Profa. Dra. Shirley Takeco Gobara
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul

RESUMO

A proposta do trabalho foi analisar estratégias e dificuldades de mobilização e interpretação de registros diante de situações-problema que inter-relacionaram Matemática e Física. Pautados pela Teoria das Situações Didáticas e Teoria de Registro de Representações Semióticas, foi elaborada uma sequência didática sobre conteúdos de função afim e movimento uniforme. Desenvolveu-se a sequência em um primeiro ano do ensino básico/técnico de um Instituto Federal de Educação e analisaram-se produções escritas e áudios em atividades propostas, numa sala de aula do cotidiano escolar. Nesse ambiente, estudantes interagiram com vários registros de representação semiótica. Nas experimentações, foram exploradas atividades de cinemática, num circuito aberto, para análise de posições em função do tempo, e foram observadas algumas relações entre elementos da função afim e seus correspondentes no movimento uniforme. Por fim, analisou-se a mobilização de registros matemáticos por esses alunos, diante das atividades propostas. Observou-se que os estudantes encontraram dificuldades, particularmente, com relação ao registro algébrico. Verificou-se, também, que houve contribuições importantes da multiplicidade de registros. O mesmo questionamento, anexado a registros diferentes, esteve associado a quantitativos díspares de respostas corretas. Considerou-se que a diversidade de registros favorece novas produções corretas. Por fim, a expectativa é que esta pesquisa possa contribuir com estudos sobre registros de representação semiótica para aprendizagem do conceito de função afim e movimento uniforme, em nível de ensino médio, na articulação entre as disciplinas de Física e Matemática.

Palavras-chave: Representações Semióticas. Função afim. Movimento uniforme. Ensino Médio.

ABSTRACT

The purpose of this research is to analyze strategies and difficulties on register interpretation and mobilization confronted to problem situations which connect Mathematics and Physics. Based upon Didactic Engineering, Theory of Didactic Situation and Theory of Semiotic Representation Registers, we created a didactic sequence concerning contents of linear function and uniform motion. After that, this sequence was applied for a group of junior students at a Federal Technical Institute and we analyzed written compositions and audio records of proposed activities in everyday classes, when students interacted with various Semiotics representation registers. During the experiments we explored kinematics activities, in an open circuit, for analysis of position regarding time measure and we also observed some relations between components of linear function and their corresponding elements in uniform motion. After all, we analyzed the mobilization of mathematics registers by these students according to the proposed activities. We observed that the students found them difficult, especially concerning to the algebra register. We also observed that important contributions on multiplicity of register were made. The same inquiring, linked to different registers, were associated to dissimilar quantities of right answers. It was considered that the diversity of registers acts in favor of right productions. We expect that this research may contribute to studies on Semiotic Representation Registers in order to guarantee the learning of linear function concept and uniform motion by High School students by means of articulating Physics and Mathematics subjects.

Key-words: Semiotic representations, Linear function, Uniform motion, High School.

Dedico este trabalho à minha família e meus amigos. Em especial: Gabrielle, Arthur, Luciane, Ana, Antônio e Mercedes (in memoriam).

AGRADECIMENTOS

Ao Professor e Orientador José Luiz Magalhães de Freitas, pelo ensinamento, compreensão e muita paciência. Apesar de algumas adversidades, levou o projeto até o final.

Aos professores que compuseram a banca, Luiz Carlos Pais, Marilena Bittar e Shirley Takeco Gobara pelas contribuições na construção desse trabalho.

À Professora e Coordenadora do Programa de Mestrado em Educação Matemática Marilena Bittar, pelo zelo ao bom nível do referido Programa.

Aos demais professores do Programa, pelo incentivo, apoio e ensinamentos.

Aos meus parceiros de orientação, Renan e Leonardo pelos momentos de discussões que contribuíram com esta pesquisa.

À minha família e aos meus amigos, em especial: Élcio, Sérgio, Marcos, Aurélio, Fabrícia, Franz, Hânia, Ricardo e Eli.

ORDENAMENTO DE FIGURAS

SUMÁRIO

CAPÍTULO I – INTRODUÇÃO

1.1 – MOTIVAÇÃO E ESTUDOS PRELIMINARES

Minha trajetória profissional, como professor, inicia-se quando lecionei as disciplinas de matemática e física. Trabalhando, por 12 anos, com estudantes do ensino médio de unidades de ensinos privadas do interior de São Paulo. Nessa experiência, observei que os estudantes manifestaram dificuldades diante de atividades envolvendo a construção e interpretação de gráficos. Posteriormente, em meados de 2011, deixei o setor privado e assumi um concurso público no Instituto Federal de Mato Grosso do Sul, *campus* de Corumbá (MS) e, em 2014, consegui uma remoção para o *campus* de Ponta Porã (MS). E, como já era esperado, dificuldades de aprendizagens verificadas no setor privado também foram encontradas nos Institutos Federais.

Em 2013, após minha entrada no mestrado, comecei a estudar resultados de trabalhos de dissertações e teses. Nosso objetivo era investigar alguns problemas de ações pedagógicas, dos resultados de pesquisas de Educação Matemática e/ou Ensino de Ciências, que se relacionassem com os problemas de minhas salas de aulas.

Pacca e Zuffi (2002) verificaram que alunos associam a reta do gráfico à trajetória do corpo em movimento. Fato que já verifiquei em minhas práticas em sala de aula que ratifica a referida pesquisa: a maioria dos alunos associou um registro gráfico de uma função afim, com inclinação positiva, a uma trajetória retilínea de um móvel que estaria subindo uma rampa.

A disciplina de física 1, dos Institutos Federais de Mato Grosso do Sul, traz em seu ementário o estudo de movimentos e suas causas. No Instituto onde as atividades foram realizadas, a reprovação na referida disciplina, na média dos últimos três anos (2011, 2012 e 2013) foi de, aproximadamente, 50%. Resultado este oriundo de uma análise de dados fornecidos pela Central de

Relacionamento do referido Instituto, para esta pesquisa, na Diretoria de Ensino. Esse fato indicou a necessidade de pesquisar possíveis intervenções pedagógicas que poderiam contribuir nos processos de ensino e aprendizagem da disciplina.

A vida em sociedade requer conhecimentos e ações fundamentais relativos a: medidas, detecção de padrões, produção de energia, cálculos percentuais, previsões estatísticas, dentre outras. Entendemos que a apresentação de um novo conteúdo, por meio de situações-problema, seja uma opção metodológica coerente com um ambiente que centralize no aluno o protagonismo de sala de aula.

Trindade (1996), ampara-nos em uma proposta de situações-problema que inter-relacionem Física e Matemática.

> Nesse sentido, deveríamos propor aos alunos situações-problema que favorecessem a construção com significado do conceito de função. Situações-problema que motivem os alunos a explicar mudanças, a encontrar regularidades entre mudanças, a perceber mudanças e relações entre elas como um problema merecedor de uma explanação científica. Situações que possibilitem aos alunos aplicar o conhecimento de funções para explicar fenômenos de sua vida diária, econômica e social, bem como os inúmeros fenômenos da Física e de outras Ciências (TRINDADE, 1996, p. 136).

Com o intuito de elaborar uma sequência de atividades relativas à função afim, em um contexto de movimentos uniformes, propusemos uma multiplicidade de representações que foram mobilizadas por estudantes do ensino médio. Consideramos que esses movimentos são elementos importantes para apropriação de relações entre variáveis implícitas numa função que compõem o modelo de um fenômeno.

Nossa pesquisa amparou-se em alguns conceitos da área da Educação Matemática, tais como: situações didáticas, situações adidáticas, tratamentos, conversões, institucionalizações, dentre outros.

O conhecimento apropriado de textos de autores da Educação Matemática, orientou-nos na leitura de equívocos, cometidos pelos estudantes, em relação ao entendimento do conceito de função. Para este conceito, entendemos que os processos de ensino e aprendizagem podem ficar comprometidos se as situações didáticas propostas forem apresentadas por meio de aulas expositivas que priorizam representações algébricas.

Nosso trabalho se coloca na confluência de temas da área de Educação Matemática e, sendo assim, trazemos alguns autores da Didática Francesa da Matemática, como amparo teórico e metodológico para desenvolvermos nossa pesquisa. Uma diversidade de registros de representação semiótica de funções, em um contexto de movimento uniforme, estará inserida em um meio que deve favorecer o aparecimento de situações adidáticas diante de atividades desenvolvidas sob o amparo da Teoria das Situações Didáticas.

O foco principal de nossa pesquisa são as interpretações de registros de funções em movimentos uniformes, no que tange aos tratamentos e conversões, na inter-relação entre função afim e movimento uniforme, por alunos do primeiro ano do ensino médio. Nesta proposta, a Teoria dos Registros de Representação Semiótica se constituiu no referencial teórico de base para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Segundo Duval, o início de apropriação de um objeto matemático necessita da mobilização de, no mínimo, dois registros de representação semiótica.

> [...] o entendimento dos objetos e dos conceitos em matemática começa, somente, no momento em que o aluno é capaz de mobilizar e de coordenar espontaneamente dois registros de representação para um mesmo objeto (DUVAL, 2012, p. 266).

Entendemos que os equívocos externados por estudantes, referente ao conteúdo função afim, nas aulas de física, estão associados a metodologias expositivas engessadas por um único registro de representação. Dessa forma, nossos objetivos foram se constituindo, concomitantemente, com nossa sequência de atividades que incita a mobilização de vários registros de representação semiótica.

OBJETIVO GERAL: Analisar a utilização de registros, por alunos do ensino médio, na inter-relação entre função afim e movimento uniforme.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1) Em um contexto de relações entre elementos de funções e movimentos uniformes, analisar tratamentos e conversões entre registros.
2) Investigar relações entre trajetória e geometria gráfica das posições em função de instantes de tempo.

Assim, no desenvolvimento desta pesquisa, elegemos como base para construção de nossa sequência de atividades uma multiplicidade de representações, mais especificamente, relações entre os registros: gráfico, língua materna, algébrico e tabular. No próximo item, apresentamos resultados de pesquisas que, de alguma forma, relacionaram função com movimento uniforme.

1.2 – O CONCEITO DE FUNÇÃO AFIM E ALGUMAS RELAÇÕES HISTÓRICAS COM O CONCEITO DE MOVIMENTO UNIFORME

Vamos expor nossos estudos teóricos amparados em informações oficiais e outras análises que abordam os conteúdos sobre movimento uniforme (MU), função e teorias que destacam reflexões sobre moderações do professor em ambientes de sala de aula. Analisamos aspectos históricos e epistemológicos das evoluções envolvendo conceitos de movimento uniforme e de função afim até as abordagens contemporâneas e, por fim, pesquisamos sobre prováveis dificuldades ou equívocos cometidos por estudantes iniciantes no primeiro ano do ensino médio diante desses temas. As referidas análises, com foco nos registros de funções em movimentos uniformes, corroboraram com o desenvolvimento, em sala de aula, de nossa sequência de atividades.

Constatamos que determinadas relações entre dois valores, por exemplo, entre velocidade e instante de tempo, não se destacam os conceitos de variáveis e de funções. Constatações desse tipo puderam ser notadas antes de Cristo, nas tabelas babilônicas onde estão implícitas, entre outros, nos resultados de multiplicações, divisões, algoritmos para o resultado da soma de termos de uma progressão geométrica.

De acordo com Oliveira (1997), posteriormente, circundando o nascimento de Cristo, além dos relatos orais, têm-se registros em papiros produzidos pelos gregos que externam provas circunstanciais de análises de figuras geométricas.

O surgimento de equações como representantes de funções criou um novo caminho no curso histórico da Matemática. O cálculo infinitesimal de Newton e Leibniz, rapidamente, foi influenciado por uma nova maneira de representar as relações entre grandezas variáveis.

Entre os séculos XVII e XVIII, as concepções básicas do cálculo de Isaac Newton inter-relacionaram cinemática e geometria. Portanto, de acordo com Oliveira (1997), a referida análise ficou restrita a um campo de abstração filosófica. Em 1673, Leibniz faz referência à palavra "*relatio*" para esboçar uma ideia de um conceito amplo de função. Na verdade, ele estava se referindo a uma relação formal que liga um ponto do eixo vertical de uma curva, em um plano cartesiano, a um ponto do eixo horizontal. E, posteriormente, o termo função se refere a partes de retas conseguidas por construção de correspondências a um ponto fixo e a pontos de uma determinada curva.

Foi no final do século XVII que foi proposto o uso de letra grega, no entanto, sem o uso de parênteses, surgindo uma embrionária definição de função como expressão analítica que apareceu pela primeira vez com Jean Bernoulli (1694-1698):

> Chamamos função de uma grandeza variável uma quantidade composta de qualquer maneira que seja desta grandeza variável e constantes. (YOUSCHKEVITCH, *apud* Oliveira, 1997, p. 19).

Concomitante com a tendência fundamental no avanço histórico da análise infinitesimal, nesse período, apesar de não dar indício sobre a maneira de estabelecer função a partir da variável independente, parece claro que Bernoulli pensa de fato nas expressões analíticas das funções.

De acordo com os estudos realizados por Vázquez, Rey e Boubée (2008), no início do século XVII, frutificaram noções básicas que contribuíram, significativamente, para a sedimentação do conceito de função, por exemplo: a abstração dando significados às letras nas equações, fusões conceituais que geraram o nascimento da geometria analítica. E, na primeira metade do século XIX, Dirichlet faz alusão ao termo correspondência entre variáveis quando se refere ao conceito de função, ou seja, estava surgindo um conceito que não depende do determinismo algébrico e nem da geometria.

Infelizmente, os problemas de Matemática que envolvem situações do cotidiano foram menosprezados por causa do Movimento da Matemática Moderna (MMM), isso ocorreu na Matemática nas primeiras décadas do século XX e no ensino de Matemática a partir da década de 1960.

> [...] o Movimento da Matemática Moderna (MMM) chega à educação básica brasileira, o sistema de ensino passou por uma grande revolução. Pensavam os responsáveis pelo Movimento que era preciso reformar o ensino da matemática, estipular uma nova grade curricular, algo que contemplasse a formalização, a lógica, a axiomatização, o rigor. (NEVES, 2009, p. 12)

Nas décadas de 1960 e 1970, esse movimento valorizava a teoria dos conjuntos, a linguagem simbólica e as propriedades estruturais da matemática e, consequentemente, os currículos de matemática na época começaram a supervalorizar o formalismo de notações do pesquisador matemático. Naquele período, o Movimento da Matemática Moderna pede mais rigor nas notações matemáticas. Aproximadamente, vinte anos mais tarde, surgem novas diretrizes que clamam por ações pedagógicas com viés interdisciplinar.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, na década de 1990, chamam a atenção para que as ações pedagógicas incentivem os estudantes a buscarem padrões e regularidades em diferentes situações: figuras, tabelas, gráficos, equações. O argumento que dá sustentação às novas diretrizes é que a exploração da diversidade e da articulação, em contextos diversificados, devem proporcionar um ambiente onde o estudante consiga desenvolver e praticar sua capacidade de abstração e generalização. Sendo assim, os referidos Parâmetros recomendam propostas de ensino que instiguem a curiosidade, o desejo de descoberta e o prazer de estar diante de novos desafios. E ainda destacam que a interdisciplinaridade não deve dissolver as disciplinas, mas sim, sustentar as características de cada uma e, concomitantemente, inter-relacionar tópicos adjacentes.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais destacam, fortemente, duas expressões: competências e habilidades, potencialidades essas a serem desenvolvidas pelos alunos como componente dos desígnios que se tem expectativa de atingir com a conclusão de uma etapa de estudos. Seguem, em anexo as tabelas 1 e 2, as referidas características para Matemática e Física do Ensino Médio.

Tanto em Física como em Matemática, a competência associada à contextualização sociocultural sinaliza para uma inter-relação de disciplinas com desenvolvimentos de leituras de mundo e aplicações no cotidiano. Por esse viés, Pacca e Zuffi (2002) entendem que o julgamento das compreensões de um estudante sobre o conceito de função somente acontece depois que ele tiver um conhecimento básico das representações e linguagens desta matemática específica, ou por professor, ou por livro. Antes disso, a percepção de relações entre variáveis pode estar vinculada a concepções do cotidiano. Assim, acreditamos que estas concepções do dia-a-dia, sem vínculo aos registros de representações formais, contribuem para dificuldades de compreensão conceitual, bem como para modelar o conceito matemático de função.

A seguir, apresentamos duas perguntas centrais do artigo de Pacca e Zuffi:

> Assim, procuramos responder, neste artigo, às seguintes questões: **Qual é a conceituação que o professor quer construir para as funções? Qual é a que ele verdadeiramente constrói, ao efetivar o uso da linguagem matemática de uma maneira característica do Ensino Médio?** Esperamos, com isto, contribuir para o aprofundamento das discussões acerca da formação matemática desses professores e de sua atuação profissional em sala de aula.
>
> Entendemos, também, que este estudo pode trazer à tona alguns questionamentos sobre a interação das linguagens próprias da Química, Física e Matemática, ao tratar desse conceito e de suas aplicações. Nessa fase da vida escolar, as ideias sobre funções são utilizadas para introduzir conceitos da Física Clássica, de fenômenos da eletricidade e também com várias aplicações da noção de proporcionalidade, na Química. Isto faz com que a linguagem matemática criada para o conceito de função seja também usada em outras áreas, mas talvez com "sotaques" tão distintos, que fica difícil ao aluno associar todas essas ideias, encarando os novos conceitos matemáticos, físicos ou químicos, como coisas estanques, sem nada em comum. (PACCA, ZUFFI, 2002, p. 3, grifo nosso).

Com intuito de buscar respostas às perguntas anteriores, estas pesquisadoras observaram três professores de Matemática do Ensino Médio. A seguir, transcrevemos algumas frases que se originaram nas análises que Pacca e Zuffi fizeram sobre as concepções do conceito de função externadas, durante as aulas, pelos referidos professores:

> [...] As funções eram apresentadas primeiro na sua notação analítica (expressão algébrica), mesmo que o domínio se tratasse de um conjunto discreto e pequeno de pontos, para somente depois se caracterizarem os gráficos, tabelas e manipulações das funções.
>
> [...] Os raros casos que trouxeram funções descontínuas ofereceram dificuldades de tratamento pelo professor e de compreensão, por parte dos alunos [...]
>
> [...] A grande ênfase dos professores era colocada na atribuição de valores específicos para a variável independente, calculando-se os respectivos valores das imagens, para só então colocá-los nos gráficos. Por outro lado, estes gráficos eram observados através de poucos pontos esparsos, sem se caracterizarem explicitamente as transformações globais que representavam entre dois conjuntos. A ideia de variação, fortalecida na concepção de processo, fica prejudicada no enfoque dado pelos professores, deixando lacunas quanto a este aspecto essencial à conceituação de função.

> [...] a definição formal proposta aos alunos no início do tratamento do assunto, embora bastante ampla, acabava substituída por termos da prática pedagógica dos professores.
>
> [...] os símbolos, as notações, muitas vezes eram tomadas como coisas, como objetos, sem que os seus significados abstratos fossem atingidos. Em contrapartida, faltou o concreto – o uso de fenômenos reais e de resoluções de problemas cotidianos – para justificar as operações que eram propostas sobre estas notações, embora se utilizassem de algumas poucas “aplicações” esterilizadas, feitas ao final do tratamento formal, com as quais tentavam justificar o estudo do conceito.
>
> [...] A relação discreto/contínuo é confusa [...] os gráficos contínuos eram sempre determinados por um conjunto muito pequeno de pontos discretizados, sem se discutir o que acontecia com as imagens nos intervalos entre esses pontos. (PACCA, ZUFFI, 2002, p. 7-8).

Além das observações anteriores, as pesquisadoras esboçaram algumas comparações das linguagens matemáticas entre os professores de Matemática, Física e Química. Elas destacaram que os professores de Física e de Matemática empregam notações distintas para abordarem as grandezas variáveis. Ao passo que os professores de Matemática usam “x” e “y” para representarem as variáveis, os professores de Física usam as notações “s” para variável dependente e “t” para variável independente, representando, respectivamente, o espaço e o tempo. Apesar das diferenças simbólicas, ambos tentam representar o mesmo conceito de função. Como a possível convergência conceitual pode não estar sendo tratada por nenhum dos professores, alguns estudantes ou a maioria pode não enxergar a dependência temporal da posição como uma função matemática.

E ainda, se os gráficos das funções são materializados como objetos visualizáveis, extrapolando as associações abstratas entre grandezas, relega-se a um segundo plano o foco relacional entre variáveis. Em muitas situações, o gráfico é proposto como um elemento palpável na Matemática; dessa forma, como consequência espontânea, a maioria dos estudantes passaria a associar os gráficos de Física a um aspecto visível do movimento, e numa associação equivocada ao mundo real, identificaria o gráfico posição em função do tempo com a trajetória do móvel.

Outro destaque enfatizado por Pacca e Zuffi é o conceito de proporcionalidade que está ligado à função linear, caso particular de função afim. Mas isto não se observa, nem na Matemática e tampouco na Química. Os professores das citadas disciplinas diferenciam este tópico em “regra de três” (Química) e “função linear” (Matemática), consequentemente, os estudantes são induzidos a classificar o assunto em dois tópicos distintos.

As autoras consideram que um grupo de trabalho formado pelos professores de Física, Química e Matemática, faz-se imprescindível para o ajuste de uma linguagem matemática adequada. E, ainda, destacam que esta interação, isolada, não abonará os detalhamentos necessários dos significados que orbitam as distintas disciplinas citadas, se o desenvolvimento dos docentes não gerar a adequada ponderação sobre as diferenças de linguagem.

Enfim, Pacca e Zuffi (2002) percebem que concepções de grupos de estudos que agreguem esses docentes de diferentes círculos do conhecimento podem contribuir muito na superação de entraves externados em suas linguagens díspares para citarem o mesmo objeto. Diante disso, encontramos em Raymond Duval, considerações convincentes sobre a utilização de diferentes registros para representar o mesmo objeto em estudo.

> Uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representação que uma figura ou um diagrama. Isto quer dizer que **toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa,** e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados (DUVAL, 2012, p. 281, grifo do autor).

Nesse sentido, acreditamos que uma abordagem que explore a complementaridade entre os diversos registros de representações se torna, a nosso ver, uma boa opção para ensino e aprendizagem da função afim e do movimento retilíneo uniforme.

As pesquisas realizadas por Moretti (2012), Colombo, Flores e Moretti (2008) e Curi e Santos (2012) apontam para o fato de que as conversões entre vários registros de representação semiótica e os tratamentos internos de cada registro oportunizam comparações entre diferentes custos cognitivos[1]. Consequentemente, as atividades em sala de aula podem ficar mais dinâmicas e os novos conceitos podem se tornar mais compreensíveis.

Curi e Santos (2012 e 2011), Flores e Moretti (2013), Buehring, Colombo e Moretti (2009) relataram que o ensino brasileiro apresenta as disciplinas fragmentadas, consequentemente, nossos universitários (professores e alunos) apresentam dificuldades em contextualizar os modelos científicos com o mundo do trabalho.

Os autores também consideram que a aprendizagem dos conceitos físicos necessita de uma articulação com os objetos matemáticos. Compartilhamos com estas considerações, visto que nossa proposta de pesquisa propõe articulações entre Física e Matemática. Mais especificamente, o desenvolvimento de nossa sequência didática diversifica os registros de representação semiótica com o intuito de analisarmos possíveis contribuições, dessa diversidade, nas interpretações de registro gráfico.

Maggio e Soares (2010) chamam a atenção para as dificuldades que os alunos apresentam nas tentativas de conversões entre registro gráfico e algébrico da função afim (especificamente do gráfico para o algébrico). As citadas dificuldades podem estar associadas às dificuldades de apropriações de conceitos físicos por causa de um não entendimento dos objetos matemáticos em questão.

Nossos estudos preliminares das pesquisas anteriores deram norte para o desenvolvimento de nosso trabalho. Conforme externado anteriormente, nos diálogos com o orientador, definimos estudar uma possível articulação entre Física e Matemática.

Em um meio contextualizado com movimentos uniformes, que contribuições a diversidade de registros de representação semiótica pode

[1] Por exemplo, entender um movimento analisando o registro algébrico (“fórmula”) pode ser mais difícil do que a análise pelo registro tabular (“tabela da posição por tempo”). Verificamos em nossa pesquisa que as conversões a partir de registro tabular tiveram um maior número de acertos em relação as conversões a partir de registro algébrico.

trazer para interpretações do movimento uniforme e da função afim? Trata-se da pergunta que guiará nossos estudos.

Os nossos estudos, sobre atividades de pesquisa na área da Educação Matemática, deparam-se com trabalhos que tentam entrelaçar os objetos matemáticos com outras áreas das ciências naturais. As contextualizações por meio de inter-relações com outras ciências estão implícitas nas considerações de Duval.

> [...] as diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias. De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos “reais” ou “físicos”. É preciso, portanto, dar representantes [...]. (DUVAL, 2012 p. 268)

O referencial teórico de Duval permite entender que, iniciar um trabalho de construção de aprendizagem de um objeto matemático por meio de contextualizações, com o mundo real, é um caminho fértil para a estabilidade da noesis[2].

Como é apresentado neste estudo, já mencionamos alguns trabalhos de pesquisas que inter-relacionam diversas áreas do conhecimento. É notório que vislumbramos, dentro da Educação Matemática, novas perspectivas de ações, que poderão facilitar o acesso dos nossos estudantes aos abstratos objetos matemáticos.

- Organização da pesquisa

Neste Capítulo I, além de minha motivação particular, abordamos alguns aspectos relacionados à história e epistemologia do conceito de função. Procuramos estudar o caminho do seu surgimento e variações de linguagens

[2] Compreensão conceitual pelo pensamento.

empregadas nas tentativas de comunicações deste objeto matemático. Na continuidade dos trabalhos, fizemos um estudo dos documentos oficiais, por exemplo: os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais; lembramos, num quadro em anexo, alguns pontos das antigas diretrizes, do referido documento para o ensino de Física e Matemática no Brasil.

No Capítulo II, destacamos contribuições de Duval (1993) e Brousseau (1986), teóricos franceses da Educação Matemática. De alguma forma, nosso trabalho busca subsídios teóricos nos referidos pesquisadores. E num aprofundamento necessário, mais especificamente, evidenciamos uma explanação mais detalhada da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1986) e da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval (1993). Os tratamentos e as conversões são conceitos importantes da Teoria de Duval, sendo assim, apresentamos uma situação-problema que nos permitiu desenvolver exemplos dos referidos conceitos. E por fim, destacamos a importância, na perspectiva de Duval, da multiplicidade de representações na elaboração de situações didáticas de ensino e aprendizagem.

Na sequência de nossa dissertação, no Capítulo III, descrevemos algumas características dos participantes de nossa pesquisa. Desde a produção de dados, realizada em Corumbá (MS), que nos forneceu subsídio para a preparação do “meio didático”, na perspectiva de Brousseau (1986), até a descrição do desenvolvimento, de fato, de nossa sequência didática em sala de aula (do quadro de horário regular) do segundo semestre letivo de 2014. Sequência esta que incentivou: conversões entre registros, desvinculação entre trajetória e geometria gráfica, produção de representação algébrica para modelagem de situação-problema, dentre outros.

No capítulo IV, concomitante, aos objetivos específicos de cada sessão, externamos nossas análises com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (1993) para o desenvolvimento experimental, considerando: tratamentos, conversões e possíveis validações dos resultados. E por fim, apresentamos algumas considerações gerais sobre nossas análises dos dados produzidos, em relação, principalmente, às interpretações de registros gráficos em funções afins por estudantes do primeiro ano do ensino médio, numa tentativa de convergência com a hipótese de Duval (1993) na qual conversões entre registros sejam ações importantes para o desenvolvimento das sessões envolvendo o objeto matemático função afim.

Como abordaremos no próximo capítulo, Duval (1993) e Brousseau (1986) nos forneceram elementos teóricos básicos para a confecção de uma sequência de atividades para nossa produção de dados.

CAPÍTULO II – Referencial Teórico

2.1 – INTRODUÇÃO

A finalidade das ações dentro do universo teórico e metodológico da Didática da Matemática é criar diálogos de máxima eficiência de comunicação entre atores e elementos que promovem estudos científicos sobre ambientes de ensino e aprendizagem. Se o ensino deve ter o foco ajustado para o professor, a aprendizagem deve ter como centro a participação do estudante. A arte de ensinar como transmissão de informação não garante a participação e o protagonismo do aluno. Portanto, parece-nos indispensável a criação, por parte dos professores, de situações didáticas que estimulem o envolvimento dos estudantes nas interações com o saber em jogo.

As considerações de Yves Chevallard podem nos mostrar uma perspectiva do alcance da didática no estudo das transformações do saber no percurso desde sua produção até chegar à sala de aula, a *transposição didática,* que se constitui num modelo teórico importante para a Didática da Matemática. Chevallard distingue vários conjuntos de saberes, dentre eles o saber científico e o saber ensinado. O fluxo do saber, do meio acadêmico para o ambiente de sala de aula, mostra-nos a ideia central que orbita o conceito da transposição didática.

> Do ponto vista da influência didática na própria produção histórica, a transposição didática parece ser uma das mais consideradas, e o trabalho de Yves Chevallard é sua referência principal. A obra basilar de Chevallard é o livro *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*. Nela, o autor caracteriza sistemas de saberes como *savoir savant* (saber científico) e *savoir enseigné* (saber ensinado). Assim, a categoria principal cunhada pelo autor - o conceito de transposição didática - designa a passagem do saber científico para o saber ensinado (VALENTE, 2007, p. 36).

Há períodos em que, por causa de conflitos sobre os saberes ensinados, surgem movimentos de elementos dos saberes científicos que se inserem nos saberes escolares, por exemplo, a teoria dos conjuntos que foi divulgada, a partir da década de 1960, pelo Movimento da Matemática Moderna. O modelo teórico criado por Chevallard nos possibilita analisar o referido fluxo da matemática escolar moderna via relações entre os saberes acadêmicos e escolares.

2.2 – ALGUNS ELEMENTOS DOS REFERENCIAIS TEÓRICOS

No que tange à contextualização de conteúdo, nosso trabalho busca inter-relacionar funções (saber acadêmico) com movimentos uniformes para que os estudantes possam estabelecer relações entre posições e instantes temporais (saber escolar). Nosso foco de pesquisa está voltado para o estudo de produções de alunos diante de atividades envolvendo conteúdos de cinemática e função afim. Para isso, apresentamos, de modo resumido, dois modelos teóricos que utilizamos no desenvolvimento desta pesquisa: Teoria das Situações Didáticas, de Brousseau, e Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval.

Na Teoria das Situações Didáticas, professor, aluno e saber são elementos fundamentais para a constituição de uma situação didática num ambiente pedagógico. Uma situação didática

> "[...] é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre o professor, os alunos e o saber, com finalidade de desenvolver atividades voltadas para o ensino e para a aprendizagem de um conteúdo específico" (PAIS, 2001, p.65).

Devemos refletir sobre alguns aspectos pedagógicos da expressão "múltiplas relações" externada por Pais. Podemos distinguir dois ambientes, sala de aula e sessão de experimentação com alunos. Podem fazer parte das "múltiplas relações" em sala de aula: avaliação, diversidade de representações semióticas, elaboração do plano de aula, subsídios midiáticos, artifícios metodológicos. Em um outro ambiente, sessão de experimentação: planejamento coerente com a metodologia para produção de dados, elaboração da sequência didática, estratégias que garantam a devolução por parte dos estudantes. O termo *devolução* é usado no sentido de transferência de responsabilidade, o professor além de comunicar o enunciado, procura agir de forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo como se o problema fosse seu. Esse deve ser um trabalho em que o professor não pode “contaminar” uma situação didática[3], diversidade de registros para os dados produzidos, entre outros.

Podemos analisar possíveis indícios de aprendizagens de matemática e física investigando dificuldades e, por meio delas, sua origem. Assim, Duval (1995) pode nos fundamentar teoricamente, pois acreditamos que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica possa orientar nossas análises de produções dos estudantes, diante de uma diversidade de registros.

Desta forma, dirigimos nossas ações para o nosso tema de investigação, criando um “meio” que possibilite, a partir de um enfoque cognitivista, encontrar elementos de resposta para nossa questão central que é: **Em um meio contextualizado com movimentos uniformes, que contribuições a diversidade de registros de representação semiótica pode trazer para interpretações do movimento uniforme e da função afim?**

A identificação de dificuldades, na perspectiva de Brousseau (1986), está vinculada a um saber que não se acomodou adequadamente em um conjunto de conhecimentos. Logo, abre-se outra perspectiva de interpretação dos equívocos cometidos pelos estudantes. Tal perspectiva nos deixa atentos com relação aos erros clássicos cometidos pelos alunos. O conhecimento de

[3] Sequência de atividades preparadas pelo professor que levem os estudantes a refletir e desenvolver ações autônomas, tornando-se o professor um mediador que, principalmente, estimule a continuidade das atividades propostas. Na perspectiva de Brousseau, uma sequência adidática é um elemento de um conjunto mais amplo denominado por situação didática, situação essa que prioriza a preparação de um “meio” onde se estabelece relações entre professor, estudantes e saber.

possíveis erros clássicos contribui para o aprimoramento da análise das produções oriundas de nossa sequência didática.

Destacaremos elementos teóricos fundamentais para constituição de uma base para a análise das produções e a identificação de dificuldades e de aprendizagens. Em detrimento à proposta de transmissão de informações, vale destacar que a Teoria das Situações Didáticas valoriza as citadas *devoluções* de propostas de atividades. Novamente, contribuições de Brousseau (1986) nos chama atenção para práticas pedagógicas que valorizam a participação dos estudantes. E por fim, destacamos a obra do teórico Raymond Duval, que coloca em evidência a importância da diversidade de registros de representações semiótica.

Com base nesses referenciais teóricos, arquitetamos nossa sequência didática, almejando que a variedade de registros contribua para a constituição de situações adidáticas que possibilitem inter-relações entre matemática e física. E ainda, que favoreçam as análises dos dados produzidos por uma extensa amplitude de movimentos de ensino e aprendizagem.

2.3 – TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

As metodologias expositivas, inseridas em situações didáticas, estão sendo questionadas, principalmente, por pesquisadores que trabalham com a participação dos alunos no processo de ensino e aprendizagem.

> Atualmente há um princípio associado às concepções de ensino-aprendizagem que é consenso entre educadores: que o aluno deve participar ativamente do processo de construção do conhecimento. [...] o aluno como ator central do processo de construção do conhecimento, [...] (GOBARA & MARQUES[4])

[4] Disponível em: < http://www.edy.pro.br/ginpec/artigos/Simone_AmericaPlantina2008.pdf>. Acesso em: 09/05/2015.

Nessas situações em que os estudantes se tornam protagonistas no processo de aprendizagem, faz-se necessário, pela perspectiva de teóricos franceses, analisar como eles atuam nesse processo. Sendo assim, em nossa sequência didática, diversificamos registros de representações para analisarmos tratamentos e conversões.

Nossa pesquisa intenciona, com a exploração de questões do cotidiano que inter-relacionam Matemática e Física, analisar a utilização de registros, na inter-relação entre função afim e movimento uniforme, expostas pelos estudantes durante resoluções de problemas. Com base nessa proposta e, ainda, como parte importante de nosso referencial teórico, a Teoria das Situações Didáticas que foi proposta em 1986 por Guy Brousseau, para propor situações de aprendizagens para temas exclusivamente matemáticos, sustenta a arquitetura do desenvolvimento das atividades de nossa sequência didática. Nossa finalidade com o referido aporte teórico é utilizá-lo para analisar produções dos alunos diante de atividades aplicadas em sala de aula. As atividades propostas possibilitam que os alunos vivenciem situações didáticas, segundo Brousseau (1986), principalmente, no que se refere à devolução, ou seja, condição em que os estudantes se envolvem na busca de resolução, adotando o problema como se fosse seu.

Na década de 80 do século XX, Guy Brousseau aprofundou as reflexões que o levaram aos primeiros modelos da teoria das situações didáticas. Brousseau propõe que o aluno, como um ator protagonista, esteja no centro de situações de aprendizagens. A partir de situações-problema o professor deve acompanhar todo o processo, atuando como um intermediador que orienta, motiva a continuidade das ações que devem ser realizadas pelos estudantes. Em um ambiente propício às aprendizagens, Brousseau denomina por situação didática as relações que emergem das interações entre professor, aluno e saber. Como dito, situação didática é:

> Um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (BROUSSEAU *apud* FREITAS, 2008, p. 80).

Por causas diversas, é comum que os estudantes tragam conhecimentos prévios equivocados em relação ao saber acadêmico. Diante disso, Brousseau (1986) propõe que seja preparado um “meio” didático que possa pôr em conflito certos equívocos conceituais, ou seja, um sistema antagônico que possa provocar desequilíbrios de possíveis equívocos.

Nesse ambiente proposto por Brousseau (1986), cabe ao professor a elaboração e desenvolvimento da sequência didática que deve ser balizada por um contexto que favoreça a devolução de um problema. Na perspectiva da teoria das situações didáticas, realizar tarefas, simplesmente, por expectativas de um parecer, dado pelo professor, que favoreça a aprovação, por nota, de um estudante, não se trata de um contexto que valorize o envolvimento do aluno em situações adidáticas, onde o aluno atue como protagonista. O professor deve adaptar o problema para que o mesmo tangencie os conhecimentos da maioria dos estudantes, ou seja, trata-se de uma reconstrução do contexto, ou ainda, propor uma situação-problema que provoque a mobilização de conceitos a serem construídos pelos estudantes. Na citada *devolução*, a função do intermediador (professor) versa em (re)construir uma situação-problema, que sensibilize o estudante para uma convincente adoção do problema. Assim, o aluno se envolve na resolução, aceitando o desafio e uma corresponsabilidade em buscar uma resposta, tudo isso, por aspiração fomentada pela curiosidade e não apenas para cumprir a tarefa proposta pelo professor. Ainda, com relação ao termo *devolução*, temos que:

> As concepções atuais do ensino exigirão do professor que provoque no aluno – por meio da seleção sensata dos “problemas” que propõe – as adaptações desejadas. Tais problemas, escolhidos de modo que o estudante os possa aceitar, devem fazer, pela própria dinâmica, com que o aluno atue, fale, reflita e evolua. Do momento em que o aluno aceita o problema como seu até aquele em que se produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo (BROUSSEAU, 2008, p.34-35).

Inserido no “meio” considerado anteriormente, o estudante deve estar apto a produzir uma resposta para o problema, caso não esteja, pode haver uma não adaptação ao ambiente proposto. Na perspectiva de Brousseau, o estudante não deve abandonar a situação. Ainda, são as situações:

> [...] que convocam à tomada de decisões, ou seja, que colocam os alunos em ação, as que permitem formular ideias e colocá-las à prova e, por último, os debates, momento em que o grupo discute estratégias de resolução, avaliando quais opções são mais adequadas (BROUSSEAU *apud* GURGEL, 2009, p. 30).

E, prioritariamente, o problema apresentado deve permitir que o estudante consiga elaborar, por meio de informações e conceitos pré-estabelecidos, algum procedimento fundamental, ou *de base*. Portanto, um conhecimento prévio não deve, unicamente por ele, ser suficiente para solucionar a questão. Se fosse assim, a atividade proposta não seria um problema, mas apenas um exercício para ser resolvido conforme modelos de aprendizagens anteriores. Essa estratégia primeira não deve ser, plenamente, satisfatória, no mínimo o estudante deve ser obrigado a realizar alguns ajustes e/ou considerações adicionais para que se estabeleça o aprendizado de conceitos novos para o aluno.

Ação, *formulação*, *validação* são termos propostos por Brousseau (2008) para tipificar elementos distintos dentro de uma *fase adidática*. Fase esta em que o aluno deve se tornar o ator protagonista e autônomo no processo de aprendizagem. Entende-se por *ação*, do estudante, quando este acolhe o desafio como um problema seu e tenta encontrar uma solução, neste caso, podemos dizer que a *devolução* foi concretizada, consequentemente, o estudante começa a elaborar estratégias para procurar um caminho que permita solucionar a atividade proposta.

As referidas ações, citadas anteriormente, podem dar norte ao estudante para que ele organize afirmações para uma resposta bem direcionada para a resolução final. Dessa forma, constrói-se, gradativamente, a situação *adidática* *de formulação*. Um indicativo de que esta situação está se evidenciando, pode se verificar quando um aluno tenta transmitir as estratégias de sua solução a outrem. Quando se considera uma possível legitimidade para uma proposta apresentada, torna-se necessário examinar as coerências conceituais do raciocínio que levou à solução. A referida solução pode ser apresentada por uma sequência de tratamentos, sendo que essa apresentação depende das características da bagagem cultural do estudante. Consequentemente, a partir do instante que o aluno se posiciona, pronunciando sua lógica e contesta possíveis contra-argumentos de seu colega de sala, com o intuito de tornar satisfatória sua proposta perante outrem. Consequentemente, verificamos a emergência de um debate de formulação, importante para nossa análise. Ou seja, se os interlocutores

> [...] colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas. Juntos encarregam-se das relações formuladas entre um meio e um conhecimento relativo a ele. Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio (BROUSSEAU, 2008, p. 30).

Se num grupo de estudantes, não está havendo acordo sobre determinados tratamentos realizados a partir de um registro algébrico, pode-se inserir a resposta na equação original e analisar se a igualdade é verificada. Por exemplo: $2.x + 8 = 12$; $2.x = 12 - 8$; $2.x = 4$; $x = 4/2$; $x = 2$. Quando se insere a resposta final 2 na primeira equação ($2.2 + 8 = 12$; $4 + 8 = 12$; $12 = 12$) e a igualdade é verificada, na perspectiva de Brousseau, a *fase de validação* foi concluída.

Em um ambiente de debate explícito, gradativamente, constitui-se a *validação* das conjecturas propostas num processo permeado de *situações adidáticas*. Enfim, uma *situação adidática* deve exigir que o estudante, durante o processo de investigação, abra novas trilhas que possam levá-lo a construir conceitos inéditos e necessários para a resolução do problema. Em nenhum momento o profissional da educação (intermediador) pode se distanciar do processo, devendo permanecer vigilante, questionador, motivador, estas devem ser características intrínsecas ao referido profissional.

Para Freitas (2008), o professor deve propiciar condições em sala de aula para que os alunos vivenciem as etapas de reflexões, escolhas inadequadas, tentativas erradas, semelhantes àquelas pelas quais passam os pesquisadores, a fim de que possam construir seus conhecimentos.

2.4 – TEORIA DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS

Segundo Duval (1993), numa distinção entre representação e objeto abstrato, as várias representações semióticas de um objeto matemático são, obrigatoriamente, imprescindíveis. Na verdade, os objetos matemáticos não estão expostos aos sentidos básicos da humanidade (visão, audição, tato, olfato) ou às experiências empíricas, como são os objetos da natureza ou da física e química da ordem dimensional dos corpos que interagimos no cotidiano.

> [...] independentemente de toda comodidade de tratamento, o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações (DUVAL, 2012, p. 270).

Como em nossa pesquisa são utilizadas a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a diversidade de registros de representação semiótica deve estar inserida em um meio preparado para a investigação de um novo conceito (objeto): devemos tomar precauções para que o objeto não seja associado a um único registro de representação, pois segundo Duval é a multiplicidade de registros que pode favorecer a apropriação conceitual do objeto representado.

Peirce (1972) define semiótica como “a ciência dos signos”, a partir de então, abordaremos alguns elementos importantes dessa ciência.

Semiótica é a ciência dos signos e dos artifícios expressivos da natureza e das civilizações. A análise semiótica compreende diversos eixos de estudos que desenvolvem linguagens ou códigos de significação, por exemplo: linguagem verbal/gráfica, códigos numéricos, linguagem biológica. Para Peirce (1972), o signo pode estabelecer conexões entre significante e significado. O signo pode, de alguma maneira, dar significado a elementos desconhecidos por outrem, ou seja, institui uma ideia de um signo análogo, ou ainda, um signo mais amplo, não na integridade dos objetos. Peirce destaca a importância das analogias de ideias e/ou signos que orbitam um tipo de conceito essencial, denominado por ele por *fundamento* do signo.

Representação e representações semióticas. Diversos conteúdos relacionados às ciências naturais, durante o ensino médio, são comunicados com um ferramental linguístico matemático. Estamos considerando que a matemática se constitui, gradativamente, por meio da utilização intensa de representações de objetos abstratos. De acordo com Duval (1999), os referidos objetos matemáticos não são facilmente atingíveis por uma apresentação sem estudos e retomadas. Entendemos que os objetos matemáticos podem ser apropriados, por meio do trabalho com representações grafadas e/ou mentais, pelos estudantes em ação. Por fim, torna-se necessário para todo processo de aprendizagem, ao menos, proporcionar uma multiplicidade de elementos comunicativos entre os atores envolvidos no referido processo, por exemplo: gráficos, tabelas, signos, símbolos, dentre outras representações. Então, os registros de representação podem tornar mais eficiente a comunicação envolvendo, entre outros elementos, o saber, o estudante e o professor, sendo que este último, preferencialmente, num papel de orientador de estudo.

No que tange aos registros, há sempre uma multiplicidade de representações semióticas dentro de um registro. Um registro tabular, por exemplo, pode ser representado por tabelas diferentes, assim como, um registro algébrico é constituído de diversas representações algébricas.

Raymond Duval (2003), com a intenção de analisar o desenvolvimento cognitivo em matemática, propôs reflexões sobre registros de representação semiótica. Duval, focalizando ações cognitivas de estudantes, conjectura que dificuldades de apropriação de um conceito não devem ser atribuídas, unicamente, ao desenvolvimento epistemológico do conceito matemático.

Segundo Duval (1995), não existe *noésis* (conceitualização) sem *semiósis* (representação), ou seja, não é possível "chegar" a um conceito sem o amparo de uma representação. A partir desta afirmação basilar, Duval (2003), também considera que os objetos das ciências naturais podem ser representados por interações do cotidiano, que seja em laboratório de pesquisa, ou, em algumas situações, pelos próprios sentidos humanos. A abstração dos objetos matemáticos traz para os professores desta ciência um desafio particular na arte de construir ambientes de aprendizagens dos conceitos desta área.

Outro fator considerado por Duval (2011) é o quantitativo de representações e as diversas características de comunicação de cada uma delas. São pontos que devem ser considerados na análise cognitiva dos processos de apropriação dos objetos matemáticos.

Duval (2011) destaca que se pode considerar um conjunto de registros de representações semióticas para analisar ações cognitivas em atividades matemáticas. Duas características peculiares das referidas representações, destacadas por este autor, são os tratamentos e as conversões que são transformações em suas próprias representações.

> [...] tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo [...] resolver um sistema de equações. [...] conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. (DUVAL, 2003, p.16)

Pensamos em um problema para elucidar a citação anterior: *A idade do avô, de 65 anos, é o dobro da idade do neto mais 25 anos. Calcule a idade do* *neto.* Ao transformarmos o problema anterior em 2.x + 25 = 65, convertemos uma representação de registro em língua materna para uma outra em registro algébrico. Assim, quando transformamos 2.x + 25 = 65 em x = (65+25)/2 = 45, realizamos um tratamento de um registro algébrico. Nesse caso, apesar do equívoco explícito, uma conversão e um tratamento foram realizados.

> A conversão requer que se perceba a diferença entre o que Frege (1971) chamaria de sentido e referência dos símbolos ou dos signos. Para a expressão de um número é preciso, de fato, distinguir a significação operatória ligada ao significante, em virtude das regras do sistema de expressão escrita (esta significação operatória não é a mesma para 0,25, 1/4 e 25.10^{-2}: não são os mesmos tratamentos que devem ser considerados para efetuar as adições 0,25 + 0,25 = 0,5, 1/4 +1/4 = 1/2 e $25.10^{-2} + 25.10^{-2} = 50.10^{-2}$ e o número representado que não é o significante 0,25, nem o significante 1/4 e nem o significante 25.10^{-2}. Cada uma destas três expressões tem uma significação operatória, mas representa o mesmo número (DUVAL, 2012, p. 273).

Devemos considerar que registros diferentes podem apresentar, para diferentes estudantes, custos cognitivos distintos. Portanto, compartilhamos a proposta de Duval que nos faz refletir sobre a importância da multiplicidade de registros como um artifício que pode contribuir significativamente em processos de aprendizagens.

Também devemos considerar que o processo de aprendizagem está recheado por “figuras” mentais difíceis de serem representadas por um ou alguns registros, ou seja, ações cognitivas podem levar em consideração vários elementos não semióticos. Apesar dessa consideração, enxergamos na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval (1995) fortes argumentos que podem sinalizar indícios de aprendizagens. Com base nisto, elegemos a teoria dos registros de Duval como um elemento importante de nosso referencial teórico.

Analisamos processos de aprendizagens do objeto matemático função afim a partir de articulações feitas com o movimento uniforme da física. Apresentamos para nossos estudantes uma sequência de atividades que esteja no centro de uma variedade de representações semióticas.

De acordo com Brousseau e Duval, para se propor um “meio” antagônico que provoque desequilíbrios e acomodações, torna-se coerente a preparação de sequência didática que seja subsidiada por uma multiplicidade de registros.

> Pode-se observar, em todos os níveis de ensino, na grande maioria dos alunos, um isolamento de registros de representação. Estes não reconhecem o mesmo objeto nas representações que são dadas em sistemas semióticos diferentes[...] (DUVAL, 2012, p. 283).

Raymond Duval nos chama atenção para a importância da diversidade de representações, pois é essa variedade de representações que possibilita o acesso aos conceitos.

> Uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representação que uma figura ou um diagrama. Isto quer dizer que **toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa,** e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados (DUVAL, 2012, p. 281, grifo do autor).

Nesse sentido, acreditamos que uma abordagem que explora a complementaridade entre os diversos registros de representações se torna, a nosso ver, uma boa opção para investigar situações didáticas em relação aos nossos objetivos específicos.

CAPÍTULO III – METODOLOGIA DA PESQUISA E COLETA DE DADOS

3.1 – INTRODUÇÃO

Consideramos importante a descrição dos participantes e tipo da atividade de pesquisa: trajetória escolar, relação idade/ano escolar, atividades individuais ou em grupos, dependência de aulas expositivas, dentre outras. Desenvolvemos, no capítulo IV, alguns elementos da engenharia didática de Artigue (1990), por enquanto, nesta fase introdutória da preparação do “meio” didático, não nos preocupamos com idas e voltas dentre as fases da engenharia didática e, tampouco, com intermediações que pudessem redirecionar a ações de estudantes em situações adidáticas.

3.2 – METODOLOGIA DA PESQUISA E COLETA DE DADOS

As turmas de primeiro ano do ensino básico/técnico do Instituto Federal de Mato Grosso do Sul têm se mostrado muito heterogêneas. O regime de cotas (ações afirmativas) que garante 50% das vagas para estudantes oriundos de escolas públicas pode contribuir para a referida heterogeneidade. Acreditamos que essa diversidade pode contribuir para as análises de nossa pesquisa. Além disso, apesar de ser minoria, recebemos alguns estudantes que já concluíram o primeiro ano do Ensino Médio em outra unidade de ensino. Isso foi considerado nas análises *a priori* da sequência de atividades visando a situações adidáticas.

Com intuito de buscar subsídios para preparação de um “meio” adidático, realizamos uma pré-experimentação numa sala de primeiro ano do Instituto Federal do município de Corumbá (MS), no segundo semestre de 2013, desenvolvemos uma sessão com seis duplas de estudantes. Após uma remoção interna, mudei-me para o município de Ponta Porã (MS).

A partir das considerações de Mion (2002), decidimos trabalhar, em nossa pesquisa, com duplas para favorecer diálogos que poderiam contribuir com a produção de áudios para nossas análises. Esta pesquisa focaliza processos de ensino e aprendizagem.

> A educação deve ser um processo vivido em equipe. O diálogo e a colaboração viabilizam o processo ensino-aprendizagem. A aprendizagem ocorre a partir do coletivo, nas reflexões no grupo, em relações interpessoais e nas interações dialógicas. A partir daí, dão-se momentos individuais em que o sujeito cria e recria a sua aprendizagem e reflete sobre ela (MION, 2002, p. 76).

No segundo semestre de 2014, realizamos nossas sete sessões de experimentações num primeiro ano do ensino básico/técnico (em informática) do Instituto Federal de Ponta Porã (MS). O quantitativo oscilou entre 17 e 18 duplas de estudantes no curso de Física 1 do Projeto Pedagógico de Curso da referida instituição. Nossa pesquisa foi realizada numa sala de aula normal, do período matutino.

Como é reconhecido no meio acadêmico, o ambiente rotineiro de uma sala de aula pode favorecer resultados de pesquisa que, de fato, elucidam variáveis intrínsecas aos processos de aprendizagens reais, nossa pesquisa:

> [...] foi apresentada como uma metodologia de pesquisa suscetível de fazer aparecer fenômenos didáticos em condições mais próximas possíveis do funcionamento de uma sala de aula clássica. (ALMOULOUD & SILVA, 2012, p. 26)

Trabalhamos com três aulas semanais de 45 minutos cada. Com o seguinte desenvolvimento cronológico:

Primeira Sessão: produção de dados (2 aulas)

Segunda Sessão: institucionalização parcial (1 aula)

Terceira Sessão: produção de dados (2 aulas)

Quarta Sessão: institucionalização parcial (1 aula)

Quinta Sessão: produção de dados (2 aulas)
Sexta Sessão: institucionalização parcial (1 aula)
Sétima Sessão: institucionalização final (2 aulas)

Os dados foram produzidos em papel, lápis e áudio no “meio” em que ocorreram situações adidáticas e institucionalizações parciais e final. Cada dupla constituiu, sempre, o mesmo grupo de pesquisa nas produções escrita e de áudio, por exemplo: G01, G02, G03 e assim sucessivamente. Cada grupo utilizou o próprio aparelho celular para o arquivamento das produções de áudio, denominando-as com a sigla idêntica da produção escrita. Perante, aproximadamente, 72 horas de áudio, esta estratégia facilitou a localização do áudio de determinada produção escrita.

A partir de então, realizamos um estudo mais aprofundado, iniciando pela produção de dados de uma avaliação diagnóstica e de nossos estudos preliminares. Com isso, buscamos perceber algumas dificuldades que poderiam surgir durante o desenvolvimento de nossa sequência didática e que pudessem desviar, ou bloquear, o gerenciamento das ações cognitivas, por parte dos estudantes, diante das representações semióticas apresentadas nas atividades.

Os trabalhos experimentais e teóricos, cujos objetivos focalizam o desenvolvimento de metodologias de ensino e uma diversidade de ambientes de aprendizagens, forneceram subsídios para o desenvolvimento de nosso trabalho. Sendo assim, apoiamo-nos na Teoria das Situações Didáticas (1986), e, sobretudo, na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1995).

As reflexões do filósofo francês Bachelard figuram uma das principais fontes de inspiração para que Brousseau organizasse a teorização sobre situações adidáticas de ação, formulação e validação, bem como de dificuldades encontradas pelos alunos. Acreditamos que a identificação e análise dessas dificuldades possam contribuir como subsídios tanto para a prática pedagógica em sala de aula quanto para as pesquisas sobre ensino e aprendizagem de Matemática e Física.

A partir do momento em que decidimos investigar inter-relações entre conceitos de Matemática e Física, elaboramos nossa sequência didática levando em consideração possíveis dificuldades que estariam direcionando as ações cognitivas dos estudantes para caminhos equivocados, alguns já observados ao longo de nossa carreira profissional. No desenvolvimento da análise de dados, sempre pensamos na comparação das produções escritas antes e depois do conhecimento *da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.* Tomamos o cuidado para não perder de vista nosso objetivo principal: analisar a utilização de registros de representação semiótica na inter-relação entre função afim e movimento uniforme.

Entendemos que seja natural, durante estudos teóricos, o surgimento de alguns questionamentos, por exemplo: existe alguma dependência entre a teoria das situações didáticas e alguns elementos da engenharia didática? No desenvolvimento de nosso texto, pretendemos evidenciar alguns pontos que permitem reflexões sobre o questionamento anterior.

São situações de aprendizagens em matemática que deram origem ao que hoje se denomina de engenharia didática. Antes da década de 1970, não havia um modelo teórico metodológico para tratar de etapas de ações que subsidiariam elaborações e análises de desenvolvimentos de sequências didáticas.

> Na década de 1970 teve início, na França, diversas investigações sobre o processo de aprendizagem da Matemática. Essas pesquisas analisavam a realização de sequências didáticas em sala de aula. Não havia, à época, uma metodologia que auxiliasse os pesquisadores no preparo e análise dessas sequências, uma vez que aquelas oriundas do campo da Educação não atendiam às especificidades que emergiam dos trabalhos em desenvolvimento: era preciso algo que considerasse, ao mesmo tempo, a especificidade do conteúdo matemático e questões didáticas. Essa é uma marca forte dos trabalhos desenvolvidos nessa década e que, posteriormente, deram origem ao que é conhecido, desde então, como a Didática da Matemática... (BITTAR, 2014, p. 1-2)

Somente em 1990 que Michèlle Artigue torna público um texto, em formato científico, promovendo a difusão da engenharia didática. Uma das marcas dessa metodologia é a liberdade de trânsito entre as etapas. Neste trabalho, propomos inserções de institucionalizações parciais entre as sessões da experimentação; com isso, esperamos contribuir com o trânsito entre as etapas. A validação interna é outra característica acentuada dessa metodologia que discutiremos mais adiante.

Vamos citar alguns elementos, na perspectiva de Artigue (1990), das clássicas etapas da engenharia didática. O estudo do desenvolvimento dos conceitos dos elementos que constituem o objeto de estudo da pesquisa, pesquisas (dificuldades/estratégias) em artigos científicos relacionados ao assunto, levantamento das diretrizes do Ministério da Educação acerca do referido objeto, elaboração de conjecturas sobre possíveis ações cognitivas dos estudantes, dentre outros, devem estar inseridos nas análises preliminares. São tais estudos iniciais que poderiam fornecer subsídios para a elaboração de uma sequência didática, planejamento esse, imprescindível para o desenvolvimento das produções de dados.

Segundo Pais (2001): "Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem". A elaboração da citada sequência didática, as hipóteses sobre possíveis estratégias e/ou dificuldades dos estudantes, análises de coerência entre situações-problema e bagagem cultural dos estudantes no ano/série em questão, dentre outras, são ações que devem estar contidas nas análises *a priori*. Descrever e prever são elementos importantes dessa análise.

> - descrevem-se as escolhas efetuadas ao nível local (remetendo-as, eventualmente, para escolhas globais), e as características da situação adidática que delas decorrem;
>
> - analisa-se o peso que o investimento nesta situação pode ter para o aluno, particularmente em função das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele dispõe, uma vez operada a devolução, num funcionamento quase isolado do professor;
>
> - preveem-se os campos de comportamentos possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efetuada permite controlar o sentido desses campos e assumir, em particular, que os comportamentos esperados, se intervierem, resultarão claramente da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem (ARTIGUE, 1996, p. 205).

Verificamos que Artigue associa as “escolhas” que darão corpo às atividades propostas, de alguma forma, às situações adidáticas. Vale destacar, também, que a definição/alteração das variáveis da sequência didática é um quesito importante da engenharia didática que pode permitir aos pesquisadores análises interessantes acerca de mudanças de estratégias utilizadas pelos estudantes.

Para cada atividade proposta, são as inter-relações entre: elementos da análise *a priori*, produções dos estudantes e objetivos específicos da pesquisa, que constituem a essência da análise *a posteriori*. Essa última etapa pode avalizar ou não a continuidade do desenvolvimento da sequência didática. A metodologia permite alterações, a qualquer momento, nas atividades propostas aos estudantes. Tais alterações podem contribuir com a validação interna da engenharia didática. Durante o desenvolvimento das atividades, entendemos que sejam as evoluções de posturas cognitivas dos estudantes que validam aprendizagens dos conteúdos em questão.

> A análise dos comportamentos cognitivos dos alunos diante das situações propostas deve ser feita sempre em confronto com o previsto na análise a *priori* e com os objetivos a serem alcançados. Esse confronto deve ser realizado em vários momentos da engenharia didática e é característica da ED que a define como tendo validação interna. A preocupação deve ser sempre analisar a evolução do sujeito ao longo da realização da sequência didática. Não se trata de confrontar dois grupos que passaram por experiências diferentes e nem de comparar o estado de conhecimento de um aluno antes da realização da sequência didática e ao final dessa (BITTAR, 2014, p. 5).

Entendemos que sejam verificações de superações de dificuldades, durante o desenvolvimento de atividades da sequência didática, que permitem considerar como satisfatória a citada validação interna.

Já destacamos que a elaboração da sequência didática deve estar articulada com a análise *a priori*. É plausível que essa deve ser uma etapa posterior aos estudos preliminares, consequentemente, se a análise dos dados de pesquisa, ou o próprio desenvolvimento das atividades, exigir pesquisas de elementos que deveriam ser elucidados nos estudos iniciais do processo; nesse contexto, a volta para etapas anteriores da engenharia é uma ocorrência natural da metodologia. Já destacamos que, na engenharia didática, o trânsito entre as etapas é livre e, além disso, o sentido de fluxos e números de voltas no circuito é indeterminado.

A engenharia didática é uma metodologia de ensino ou pesquisa? A indagação é outra reflexão que propomos desenvolver. Esse questionamento aparece em artigos científicos que se originaram em pesquisas em educação matemática.

No âmbito da teoria das situações didáticas, devemos planejar atividades que permitam a centralização do aluno nos processos de aprendizagens. E em uma análise com um viés metodológico, direcionado para a engenharia didática, metodologia que também utilizamos como uma ferramenta de organização, desenvolvimento e análise de sequências didáticas. As sequências podem gerar interpretações e transformações de informações de conhecimentos prévios do estudante ou fornecidas pelas próprias atividades propostas.

A engenharia didática sugere considerar os desdobramentos durante as etapas de aprendizagem. Diante de equívocos detectados nas produções dos alunos, o professor pode propor novas possibilidades de ações. As novas propostas serão eficientes se o pesquisador conhecer os erros clássicos que orbitam os objetos em estudo, obviamente, boas análises preliminares contribuem para a citada eficiência do processo experimental de coleta de dados.

Dessa forma, enxergamos um justificável/constante diálogo entre a análise *a priori* e a análise preliminar. Podemos ter uma gama de atividades que poderiam ser usadas para um redirecionamento de possíveis equívocos cometidos pelos estudantes. Vale refletir, também, sobre intermediações cautelosas para que tentemos evitar possíveis práticas de organizações didáticas clássicas, ou seja, podemos evitar induções e antecipações de respostas ou estratégias. Valem reflexões sobre flexibilidade e abertura para análises de diversas estratégias de resoluções e tentativas dos estudantes. Acreditamos que o confronto de concepções errôneas com atividades que gerem conflitos cognitivos seja uma conduta adequada para descobertas e possíveis superações de dificuldades. Permitindo, assim, apropriações autônomas de novos conceitos para os estudantes.

3.3 – PREPARAÇÃO DO “MEIO” DIDÁTICO (pré-experimentação)

Como foi exposto no capítulo introdutório, o autor desta dissertação realizou, prioritariamente, em sua trajetória profissional, ações pedagógicas em unidades de ensino do Ensino Médio do setor privado, onde se utilizavam como apoios pedagógicos materiais modulares de sistemas de ensino. As referidas apostilas propunham metodologias tradicionais de ensino, nas quais o professor centralizava ações, predominando o papel de transmissor de informações. Diante do desafio de desenvolver uma sequência didática que possibilitasse ambientes adidáticos para aprendizagens, resolvemos buscar subsídios para nosso “meio” didático numa pré-experimentação. Esperávamos com esta coleta de dados ter enriquecido nossos estudos preliminares e, com isso, propor uma sequência didática mais adequada aos estudantes participantes da pesquisa.

Nossa maior preocupação no planejamento da sequência didática foi conseguir elaborar atividades que favorecessem a devolução e, concomitantemente, fossem possíveis de serem resolvidas com o mínimo de intervenções do professor.

Consideramos como subsídios importantes os dados obtidos nas análises da pré-experimentação. Elas mostram produções de estudantes dentro de um ambiente que centraliza as ações dos estudantes, no qual as intermediações do professor, aparecem apenas, como suportes motivacionais para a continuidade de trabalhos autônomos.

A seguir, apresentamos algumas produções e análises de nosso preparo do “meio” didático. Nossa intenção nesta etapa preliminar não é, ainda, analisar as produções pelo viés da engenharia didática. Trabalhamos com uma turma pequena, do curso regular de informática, do período vespertino. A maioria dos alunos, dessa turma, não tinha estudado movimento uniforme, mas já tinha estudado função afim em Matemática no semestre anterior. Nessa turma fui professor de Física 1 de 12 alunos do primeiro ano do ensino básico/técnico do Instituto Federal de Corumbá (MS). Dividimos os estudantes em 6 duplas e as classificamos por A, B, C, D, E e F. Não se trata dos estudantes que participaram, de fato, das sessões da experimentação de nossa pesquisa. Nesta etapa, optamos pela não intermediação do professor nas atividades propostas, em relação aos conceitos em questão. Nossa intenção foi buscar elementos superficiais que dessem norte para a elaboração de nossa sequência de atividades.

3.4 – ANÁLISE DE PRODUÇÕES ESCRITAS DURANTE PREPARAÇÃO DO “MEIO” DIDÁTICO

Figura 01: Atividade 01 da pré-experimentação

01. Um carro A está sendo utilizado para passeio e o motorista mantém o veículo se deslocando sempre com a mesma rapidez, ou seja, a cada hora de viagem o carro percorre oitenta quilômetros e isso se repete ao longo de todo passeio. Calcule a distância percorrida durante trinta minutos de viagem.

Fonte: Dados da pesquisa dos autores

Apresentamos, na figura 01, uma atividade introdutória de cinemática. Propositalmente, não utilizamos nenhuma simbologia matemática, ou seja, na perspectiva de Raymond Duval, nossa redação ficou restrita apenas à linguagem materna. A seguir, apresentamos algumas produções escritas que julgamos interessantes para o direcionamento da preparação do “meio” didático.

Figura 02: Protocolo de resolução da atividade 01 da pré-experim. do grupo A

60 min. — 80 Km/h $\xrightarrow{\div 3,6}$ 22,22 m/s
30 min. — X — X m/s
X = 11,11 m/s

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

O grupo A utiliza corretamente algumas simbologias para representar determinadas unidades de medida. Pelo fato de conhecer o fator 3,6 para transformação da unidade de velocidade, ele deve ter concluído o primeiro ano do ensino básico em outra instituição, isso acontece em algumas situações nos Institutos Federais. No entanto, no caso em questão, a referida transformação é desnecessária. O grupo não utiliza fórmula pronta, mas monta uma análise proporcional equivocada. O exercício questionou sobre uma distância percorrida e foi respondido um número, errôneo, associado a uma unidade de velocidade.

Figura 03: Protocolo de resolução da atividade 01 da pré-experim. do grupo B

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta T} \Rightarrow 80 = \frac{\Delta S}{30} \Rightarrow \Delta S = 2400\,km$$

Fonte: Dados da pesquisa dos autores

O grupo B utiliza uma linguagem algébrica em sua resolução, portanto, a falta de sincronia entre as unidades de medidas temporais levou o grupo a um resultado equivocado.

Figura 04: Protocolo de resolução da atividade 01 da pré-experim. do grupo C

$80\,Km = 80000\,m$

$1h = 3600\,s$

$30min = 1800\,s$

$$\frac{80000}{3600} = \frac{x}{1800}$$

$x = 40\,000\,m$

$x = 40\,Km$

Fonte: Dados da pesquisa dos autores

Apesar do excesso de transformações de unidades, o grupo C faz uma análise proporcional e respondeu corretamente o exercício proposto.

Figura 05: Protocolo de resolução da atividade 01 da pré-experim. do grupo D

$80km$ —— $60min$

x —— $30\,min$

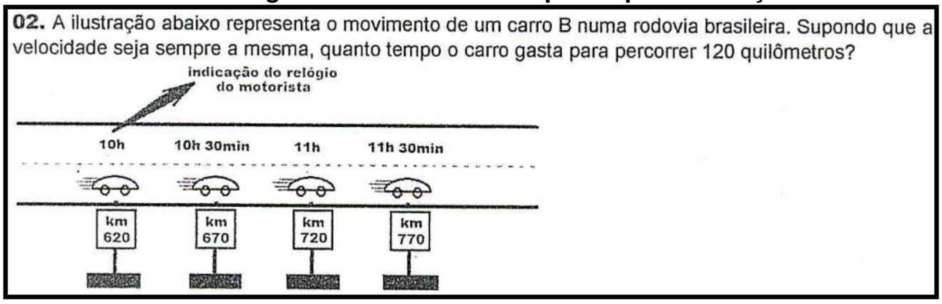
$x = 40\,km/h$

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

O grupo D apresentou uma eficiente análise proporcional, com destaque para relações corretas entre as unidades em questão. Tivemos o cuidado, durante o desenvolvimento destas atividades, de não valorizarmos algum registro de representação em detrimento de outros.

Nessa etapa, concomitante aos nossos estudos preliminares, entendemos como objetivo maior das análises das produções escritas, buscar subsídios para a estruturação de nossa sequência didática. Sendo assim, damos continuidade na exposição de mais algumas atividades.

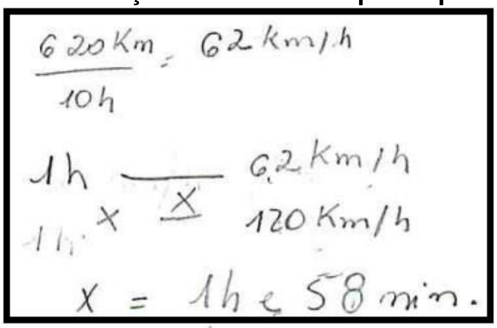
Fig. 06: Atividade 02 da pré-experimentação



Fonte: Autores da pesquisa.

Nessa atividade 02, inserimos as informações num contexto ilustrativo, numa tentativa de alusão às representações figurais, conforme Raymond Duval (1995). Com as ilustrações físicas apresentadas, na figura 06, propusemos um hibridismo de representações, neste caso, entre as linguagens materna e figural. Com base no proposto, analisamos alguns protocolos produzidos pelos alunos.

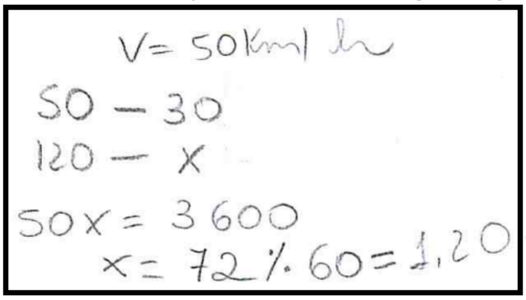
Figura 07: Protocolo de resolução da ativ. 02 da pré-experimentação do grupo A



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

O grupo A relacionou, equivocadamente, a indicação do relógio do motorista com o tempo de viagem desde o marco zero até o quilômetro 620. A produção anterior está associada a um equívoco na leitura da ilustração do enunciado. Concluiu-se, a partir de então, uma velocidade errônea e, posteriormente, em uma análise proporcional que relaciona incorretamente distância e velocidade, obteve-se um resultado que diverge das informações do exercício proposto. Percebemos, neste protocolo, que o domínio de um registro de representação e seus sucessivos tratamentos poderiam ter contribuído com a evolução de raciocínios que conduziriam a uma resposta plausível.

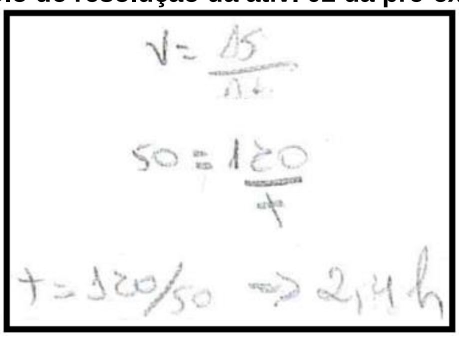
Figura 08: Protocolo de resolução da ativ. 02 da pré-experimentação do grupo B



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

A produção acima apresenta, na primeira linha, um valor incorreto para a velocidade do móvel, posteriormente, apesar da ausência das unidades de medida, montou-se uma estrutura de análise proporcional coerente, deixando-nos em dúvida com relação à resposta apresentada por causa da falta de indicação da unidade de medida. A produção escrita confirma a necessidade da produção de áudios dos diálogos entre os estudantes do grupo.

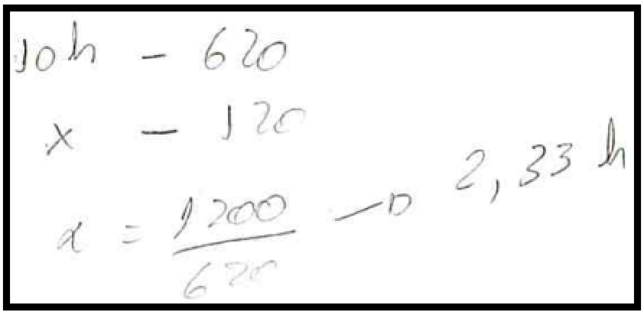
Figura 09: Protocolo de resolução da ativ. 02 da pré-experimentação do grupo C



Fonte: Dados da pesquisa dos autores

O grupo C utiliza a linguagem algébrica e desenvolve, corretamente, algumas transformações que conduzem a um resultado errôneo. A origem do erro está no valor 50 que representa, equivocadamente, a velocidade do carro. Pela ilustração, o carro percorre 50 quilômetros a cada trinta minutos, portanto, a velocidade que deveria ser utilizada na equação é de 100 km/h. Percebemos que não basta utilizar uma representação coerente e alguns tratamentos corretos para se chegar num resultado adequado. Uma boa leitura do registro que contém o enunciado é fundamental. Foi uma leitura equivocada da ilustração inserida na questão 02 que conduziu o grupo ao erro. A partir disso, pensamos que a diversidade de registros pode proporcionar outras possibilidades de leituras, contribuindo, portanto, para uma convergência a uma interpretação adequada. Conforme Duval (1995) sugere.

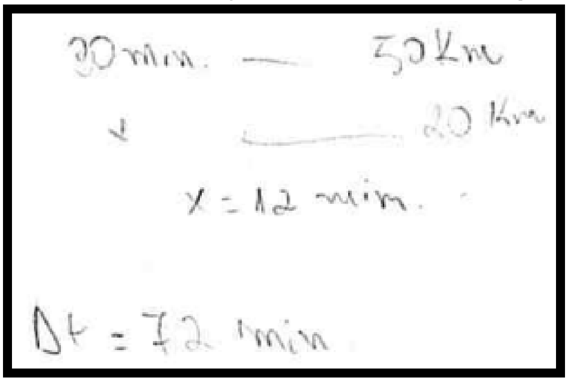
Figura 10: Protocolo de resolução da atividade 02 da pré-experiment. do grupo F



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Estamos diante de uma interpretação equivocada da ilustração da atividade, a indicação 10 horas do relógio do motorista não pode ser entendida, necessariamente, como um intervalo de duração da viagem, e outro erro equivalente, é admitir que nas referidas 10 horas o carro percorreu 620 quilômetros. E com base numa leitura inadequada da ilustração que foi proposta, montaram-se relações proporcionais que conduzem a um resultado incorreto. Acreditamos que a diversidade de registros pode oferecer outras possibilidades de leituras que favoreça interpretações adequadas.

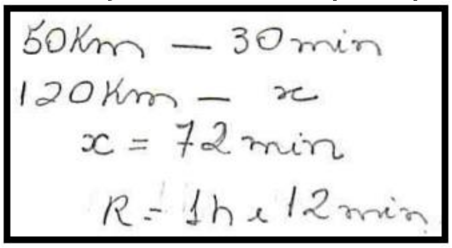
Figura 11: Protocolo de resolução do exercício 02 da pré-experim. do aluno D



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

A produção escrita do grupo D traz, implicitamente, algumas ações cognitivas corretas. Novamente, aparece uma análise proporcional e objetiva na resolução, e com relações coerentes entre as unidades. Analisando a resposta apresentada, torna-se claro que o estudante se preocupou em descobrir quanto tempo o carro gastou para percorrer 20 quilômetros; isso porque ele já sabia que a cada hora (60 minutos) o carro percorre 100 quilômetros. Resposta correta apresentada por uma resolução simples e objetiva. Em nossas ações como intermediadores no processo, tomamos o cuidado em manter uma neutralidade em relação ao tipo de registro utilizado. Ou seja, não sobrevalorizamos nenhum deles.

Figura 12: Protocolo de resolução da ativ. 02 da pré-experimentação do grupo E



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Observamos até então, um predomínio das análises proporcionais nas resoluções das atividades propostas. O grupo E apresenta uma resolução que não deixa dúvidas sobre o entendimento pleno, no que tange ao questionamento proposto, sobre o movimento uniforme do carro. Salientamos que, em algumas situações, o professor se depara com uma produção embasada num registro de representação semiótica, na perspectiva de Duval, que pode não externar um domínio pleno da situação-problema como podemos verificar em certas análises proporcionais.

Seguindo nossa intenção de construir subsídios para preparação de um “meio” didático, apresentaremos, a seguir, mais três produções da etapa denominada por pré-experimentação. A partir de então, contemplamos mais três registros de representação: tabular, gráfico com ilustração e algébrico.

Nosso objetivo com a figura 13 foi analisar leituras de um registro tabular e possíveis tratamentos na resolução de dois itens associados a situação-problema.

Figura 13: Atividade 03 da pré-experimentação

03. Um motoqueiro numa longa reta entre Corumbá e Campo Grande, consegue manter a velocidade de sua moto constante. Considerando que “S” é a posição indicada nos diversos pontos da rodovia (medida em quilômetros), “t” é o tempo (medido em horas) e com base na tabela abaixo:

S (km)	t (h)
580	0
650	1
720	2
790	3

c) Qual a posição “S” após 2,5h de viagem?

d) Qual a posição “S” após 3h24min de viagem?

Fonte: Autores da pesquisa.

Figura 14: Protocolo de resolução da ativ. 03 da pré-experimentação do grupo B

	S (km)	t (h)
70	580	0
70	650	1
70	720	2
70	790	3

c) Qual a posição “S” após 2,5h de viagem?

$70 \times \frac{2}{5} = 28$

d) Qual a posição “S” após 3h24min de viagem?

$70 \times \frac{3}{24} = 8{,}75$

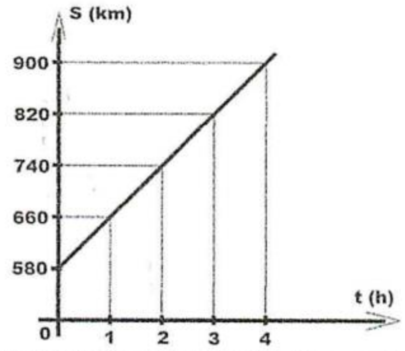
Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

O protocolo da figura 14 externa uma leitura coerente com relação aos incrementos entre as linhas do registro tabular. Como nessa pré-experimentação não produzimos áudio, não conseguimos verificar se o grupo B associou o incremento (70) a velocidade do móvel. O elemento que consideramos importante, da figura 14, é a associação equivocada, nos dois itens, entre a representação decimal e a representação fracionária. Isso sem considerarmos a falta de distinção entre unidades de medidas distintas. Tal fato fez com que preparássemos possíveis intermediações, concernentes a esses equívocos, para a experimentação de fato.

Pensamos no enunciado da figura 15 com intuito de analisarmos protocolos de resoluções diante de situação-problema que exige conversões do registro gráfico para o algébrico.

Figura 15: Atividade 04 da pré-experimentação

04. Um caminhão, completamente carregado, de uma Mineradora da região de Corumbá/Ladário se desloca na rodovia com um movimento representado pelo gráfico abaixo.



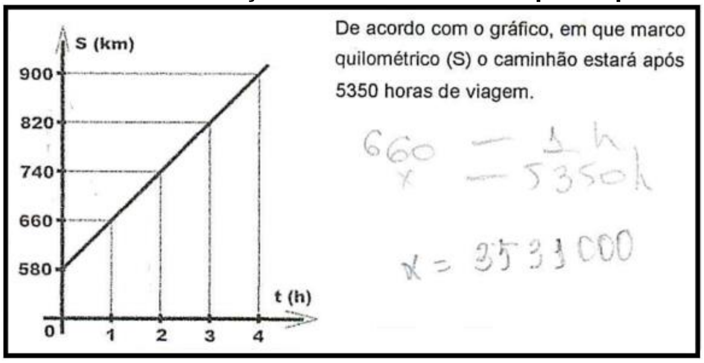
Sabendo que a velocidade está relacionada à rapidez do movimento, responda:

Segundo o mundo dos sonhos, vamos supor que a citada rodovia seja uma reta infinita e que o motorista seja um super-herói que não precise parar para comer e dormir. De acordo com o gráfico, em que marco quilométrico (S) o caminhão estará após 5350 horas de viagem.

Fonte: Autores da pesquisa.

A produção escrita a seguir nos mostra que interpretações errôneas e a falta de domínio de um registro específico pode dificultar solução de um problema.

Figura 16: Protocolo de resolução da atividade 04 da pré-experim. do grupo D



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Percebemos que algumas análises proporcionais são montadas mecanicamente sem reflexões sobre possíveis inconsistências com o cotidiano. Certamente, os estudantes são sabem que a velocidade do som é de, aproximadamente, 340 km/h; portanto, quando admitem que um caminhão percorre 660 km em 1 hora, na verdade, estão considerando um veículo, de carga pesada, supersônico. Consideramos essa produção importante para uma institucionalização parcial. O protocolo permite ao professor criar uma polêmica em sala de aula, acreditamos que uma situação polêmica pode favorecer reflexões importantes num ambiente propício às aprendizagens.

A nossa última atividade da etapa da pré-experimentação se refere a um registro algébrico "imerso" em um registro em língua materna. Sendo nossos objetivos: analisar tratamentos e conversões entre registros; investigar relações entre trajetória e geometria gráfica. Pensamos em expor, da figura 17, dois itens de nossa etapa da pré-experimentação que, de alguma forma, responderam aos referidos objetivos.

Figura 17: Atividade 05 da pré-experimentação

05. Um ônibus de transporte de passageiros está quebrado no acostamento de uma rodovia. Supondo que o ônibus irá se mover sempre com velocidade constante, apresentamos a seguir uma equação algébrica, ou seja, uma fórmula que mostra para gente a relação entre os marcos quilométricos (S) da rodovia e o tempo (t) de viagem logo após o conserto do ônibus: **S(t) = 360+90t** onde S é medido em "Km" e "t" é medido em "h".

a) Com as informações do enunciado, é possível dizer como é o "formato" da rodovia? Ou as informações são insuficientes para determinar a trajetória do ônibus?

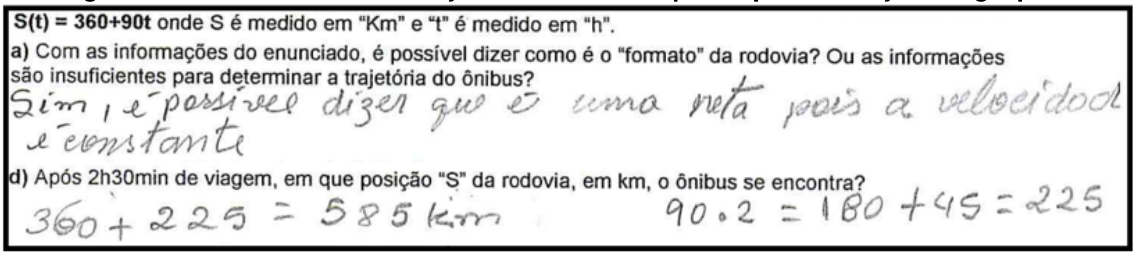
d) Após 2h30min de viagem, em que posição "S" da rodovia, em km, o ônibus se encontra?

Fonte: Autores da pesquisa.

No primeiro item, pretendíamos, principalmente, analisar o que os estudantes entendem pela expressão trajetória. Associamos trajetória à expressão “formato” da rodovia com intuito de contribuir com uma interpretação adequada.

Com o item d), verificamos transformação de unidades e possíveis tratamentos a partir da linguagem algébrica.

Figura 18: Protocolo de resolução da ativ. 05 da pré-experimentação do grupo B



S(t) = 360+90t onde S é medido em “Km” e “t” é medido em “h”.

a) Com as informações do enunciado, é possível dizer como é o “formato” da rodovia? Ou as informações são insuficientes para determinar a trajetória do ônibus?

Sim, é possível dizer que é uma reta pois a velocidade é constante

d) Após 2h30min de viagem, em que posição “S” da rodovia, em km, o ônibus se encontra?

$360 + 225 = 585$ km $90 \cdot 2 = 180 + 45 = 225$

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

A produção da figura 18 mostra um indício de que eventos do cotidiano podem balizar direcionamentos, diante de uma situação envolvendo movimento uniforme e função afim. O grupo vinculou trajetória retilínea a velocidade constante, a partir disso, entendemos que os estudantes desse grupo já haviam observado, algumas vezes, carros reduzindo velocidades em trajetórias curvas.

Por fim, no item d) da figura 18, verificamos alguns tratamentos sem rigor matemático (90x2=225), todavia, consideraram que 30 minutos é equivalente a meia hora e, por fim, indicaram corretamente a posição do ônibus após duas horas e meia de viagem. Neste estágio inicial, ficamos com a seguinte questão: como elaborar institucionalizações parciais convincentes que deem significado ao rigor das notações matemáticas?

3.5 – REFLEXÕES SOBRE OS DADOS PRODUZIDOS NA PREPARAÇÃO DO “MEIO” DIDÁTICO.

Os resultados externados anteriormente contribuíram significativamente para a elaboração do nosso “meio” didático. De acordo com os protocolos analisados, percebemos que a maioria dos alunos tenta resolver os problemas propostos usando relações de proporcionalidade, e ainda, não fazem uma análise dimensional cuidadosa, ou seja, não se preocupam em verificar a coerência entre as unidades de medidas. A maioria dos estudantes não opta pelo tratamento no registro algébrico, eles tentam resolver por proporções lógicas. Logo, a análise de conversões, na perspectiva de Raymond Duval (1995), torna-se uma tarefa difícil no que tange às considerações sobre possíveis trânsitos entre diferentes registros. Sendo assim, dentro do nosso objeto de pesquisa, pensamos em diversificar o máximo possível os registros de representação semiótica com o intuito de favorecer a produção de tratamentos e conversões.

A grande contribuição desta fase de preparação do “meio” didático é que devemos realizar algumas adequações em nossa sequência didática para não nos distanciarmos de nossa pergunta central: **Em um meio contextualizado com movimentos uniformes, que contribuições a diversidade de registros de representação semiótica pode trazer para interpretações do movimento uniforme e da função afim?** Com base nisso, identificamos algumas necessidades: o domínio de um registro de representação e adequados tratamentos podem evitar, por parte dos alunos, uma análise proporcional equivocada; a produção de áudios, pelos grupos participantes, amplia nossos mecanismos de análises; inseridos em diversos registros, devemos elaborar alguns itens que contemplem aspectos importantes, tanto de movimento uniforme como de função afim. Os referidos itens estiveram presentes em dez atividades inseridas em diferentes registros de representações semiótica.

CAPÍTULO IV – COLETA E ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA

Concomitantemente aos objetivos específicos de cada sessão da produção de dados, externamos nossas análises com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica para o desenvolvimento experimental, considerando: tratamentos, conversões e possíveis validações dos resultados. E, por fim, apresentamos algumas considerações gerais sobre nossas análises dos dados produzidos, em relação, principalmente, às interpretações de diversos registros em funções afins por estudantes do primeiro ano do ensino médio, na tentativa de convergência com a hipótese de Duval (2012) na qual conversões entre registros sejam ações importantes para o desenvolvimento das sessões envolvendo o objeto matemático função afim.

4 – O DESENVOLVIMENTO DAS AÇÕES DE APRENDIZAGENS, ANÁLISES E INSTITUCIONALIZAÇÕES.

4.1 – Análise da Primeira Atividade

Para o desenvolvimento das produções escritas e de áudios, no que concerne à análise da utilização de registros, propusemos uma diversidade de elementos comparativos, por exemplo: valor inicial da função afim e posição inicial do movimento uniforme, inclinação da tangente ao gráfico da função e a velocidade do veículo em movimento, função crescente/decrescente e sentido do movimento, relações entre gráficos de funções e trajetórias. Esses elementos citados foram inseridos em uma diversidade de registros. Especificamente, analisamos tratamentos, conversões e relações entre trajetórias e representações gráficas. Após levantamento e análise de trabalhos e pesquisas que realizamos sobre o tema, expusemos a constituição de nossas atividades e, posteriormente, para cada atividade que compõe o conjunto de nossas situações-problema, analisamos as produções na perspectiva de Raymond Duval (2012).

Com o intuito de apresentar os diversos registros que contemplam nosso conjunto de situações-problema, propusemos, **na atividade 01**, as seguintes conversões entre registros: do algébrico para o tabular, do tabular para o gráfico, além disso, associamos o registro em língua materna a uma ilustração.

Na atividade 02: apresentamos um texto em língua materna associado a uma ilustração e, durante a devolução, propusemos a produção de um registro tabular e de um registro algébrico.

Na atividade 03: apresentamos um texto em língua materna associado a um registro algébrico e durante a devolução propusemos a produção de um registro gráfico e uma possível relação entre o registro algébrico e a trajetória do móvel.

Na atividade 04: apresentamos um registro tabular e durante a devolução propusemos a produção de um registro em língua materna e de um registro algébrico.

Na atividade 05: apresentamos um enunciado em, apenas, língua materna e, durante a devolução, propusemos a produção de um registro algébrico e de uma possível ilustração para trajetória.

Na atividade 06: apresentamos um texto em língua materna associado a um registro gráfico com inclinação positiva e, durante a devolução, propusemos a produção de um registro algébrico e da descrição de uma possível trajetória para a situação-problema.

Na atividade 07: apresentamos um texto em língua materna associado a um registro gráfico com inclinação negativa e a ilustração de uma régua. Durante a devolução, propusemos a produção de um registro algébrico e da descrição de uma possível trajetória para a formiguinha.

Na atividade 08: apresentamos um texto em língua materna associado a três registros gráficos (um para cada formiga), com inclinações distintas. Com auxílio de uma possível ilustração que foi proposta no primeiro item, durante a devolução propusemos uma comparação entre os ângulos das tangentes aos gráficos e as intensidades das velocidades das três formigas.

Na atividade 09: apresentamos uma ilustração associada a um registro gráfico e, durante a devolução, propusemos a produção de tratamentos para a conclusão de determinadas posições e instantes de tempo, além de outra tentativa de desvinculação entre registro gráfico e trajetória do móvel.

Na atividade 10: apresentamos um texto em língua materna associado a dois registros algébricos e, durante a devolução, propusemos a produção de uma ilustração com a indicação dos dois móveis numa única trajetória retilínea. Pelos registros gráficos, é sabido que ocorreu uma colisão entre os móveis, por fim, propusemos a produção de um registro gráfico que contemple o movimento dos dois móveis num único plano cartesiano. A seguir, apresentaremos nossas atividades num formato de figuras.

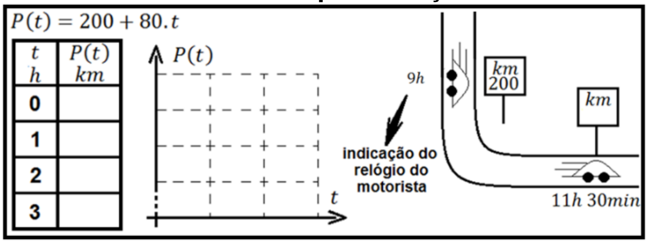
Figura 19: Atividade 01 da primeira sessão

01. Para entendermos o movimento de um carro é necessário saber como a posição "P" vai mudando com o passar do tempo "t". A velocidade está relacionada à rapidez de mudanças das posições. Vamos supor que $\boldsymbol{P(t)} = \mathbf{200 + 80}.\boldsymbol{t}$ seja a "fórmula" que representa a função que fornece informações sobre as alterações das posições em quilômetros (km) com o fluxo temporal em horas (h). Chamamos por P_0 a posição inicial que o carro ocupa na estrada quando o cronômetro é zerado, ou seja, em $t_0 = 0$ (instante inicial, quando o movimento começa a ser estudado). Com base nestas informações:

Fonte: Autores da pesquisa.

Com esta primeira atividade, de nossa sequência didática, apresentamos, para os colaboradores (estudantes) de nossa pesquisa, as principais representações que utilizaremos em nosso trabalho.

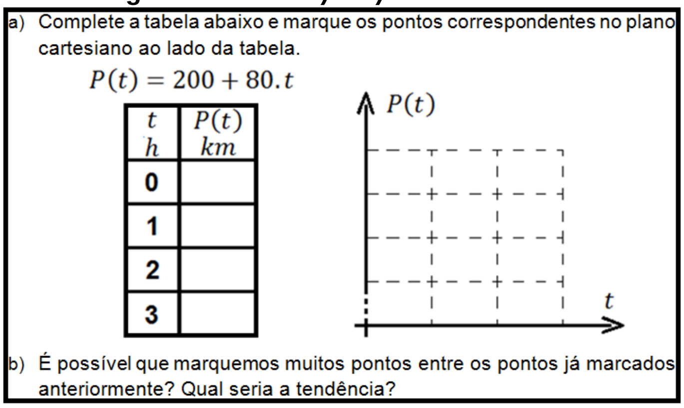
Figura 20: Diversidade de representações da atividade 01



Fonte: Autores da pesquisa.

Sendo os Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, um elemento importante de nosso referencial teórico, apresentamos, nas figuras 19 e 20, relações entre quatro registros distintos: língua materna, algébrico, tabular e gráfico. Ao longo de nossa sequência didática, alternamos o registro no corpo do enunciado, mesmo que implicitamente, afim de que os estudantes percebam que qualquer registro pode ser eficiente para externar relações entre as grandezas envolvidas na situação-problema.

Figura 21: Itens a) e b) da atividade 01



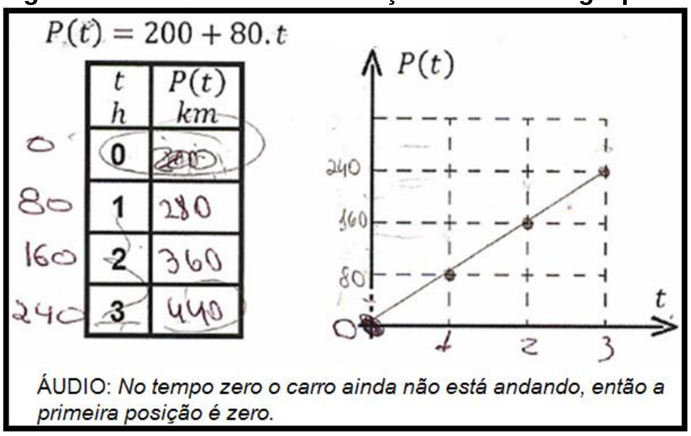
Fonte: Autores da pesquisa.

Conforme foi apresentado nas figuras 19 e 21, no enunciado do problema aparece a equação algébrica inserida em um texto em língua materna e, num primeiro item, pedimos para que completem a tabela e marquem os pontos no plano. Pelo fato de apresentarmos a equação algébrica sobre a tabela, acreditamos que os alunos não cometeriam equívocos em completá-la, pois se trata de uma equação de primeiro grau. Por outro lado, esperávamos possíveis equívocos na marcação dos pontos no plano cartesiano anexo. Fizemos esta previsão com base em relato de professores que ministram disciplinas na graduação: alguns alunos chegam à universidade com dificuldades em marcar pontos em um plano.

Ainda no primeiro item, os estudantes deveriam marcar os pontos num plano cartesiano quadriculado. Como não pedíamos para traçar o gráfico, acreditávamos que surgiriam respostas cujos gráficos estariam representados com linhas contínuas e outras com apenas pontos. O segundo item da atividade [b)] pedia para que os alunos "recheassem" os pontos já marcados no item anterior com outros pontos possíveis, quantos conseguissem. Esperávamos que alguns enxergassem a possível continuidade da função e que toda representação gráfica inicia-se, *a priori*, com uma análise discreta.

Conforme a figura 22, o grupo 07 completou as lacunas dentro da tabela corretamente e, numa região externa, expressou outros valores que deram origem aos pontos do gráfico. A análise dessa produção nos permitiu concluir que os estudantes associaram a tabela ao registro algébrico e o registro gráfico ao movimento do carro. Verificamos, na produção, duas conversões distintas associadas ao mesmo registro algébrico. Estivemos diante de uma produção que externou dúvidas do grupo durante o desenvolvimento desse item. Além do protocolo do grupo, apresentamos na mesma figura, a transcrição do áudio que trouxe uma justificativa para o fato da posição inicial do gráfico estivesse associada ao quilômetro zero.

Figura 22: Protocolo de resolução e áudio do grupo 07

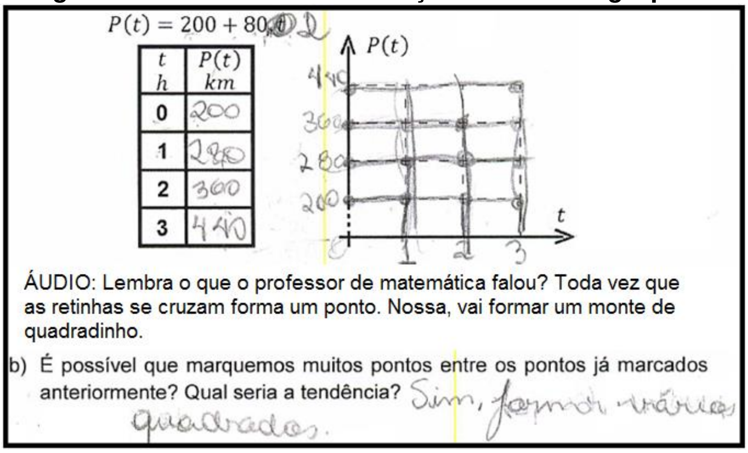


Fonte: Dados da pesquisa dos autores

As ações dos estudantes nortearam providências com relação a possíveis mediações do professor que permitissem o desenvolvimento de propostas que possibilitassem a ocorrência de situações adidáticas de formulação e validação. Diante dos equívocos do grupo 07, julgamos necessária uma institucionalização parcial com o intuito de aprofundar a análise das dificuldades dos alunos. Quando analisamos a conversão de tabela errônea para o registro gráfico, verificamos uma conversão adequada, tanto na escolha das escalas, como na representação dos pontos no plano cartesiano.

Vamos agora para uma produção do grupo 03.

Figura 23: Protocolo de resolução e áudio do grupo 03

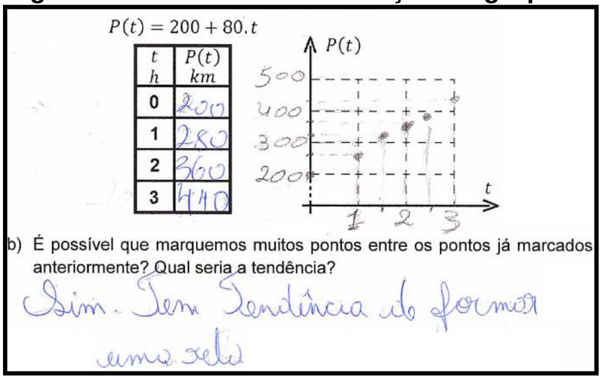


Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

A figura 23 traz uma produção escrita para o item b) desta atividade. A nossa intenção com esse item foi despertar uma reflexão, bem como um questionamento sobre possíveis diferenças entre funções contínuas e funções discretas. A produção, equivocada na marcação dos pontos, nos levou a investigar o áudio do grupo 03.

A partir da transcrição do áudio que está inserida na figura 23, consideramos que pode ter havido uma interpretação equivocada de conceitos de geometria na construção gráfica no plano cartesiano. Uma possível exposição, de professor, de que as intersecções de arestas geram pontos denominados vértices, pode ter motivado a produção do protocolo referente a figura 23. Fizemos uma intermediação[5], particular, junto ao grupo 03, propusemos uma marcação referente à outra tabela, portanto, num plano cartesiano sem malha quadriculada. A mudança da malha quadriculada para a não quadriculada levou o grupo a uma mudança de estratégia de resolução e aqueles quadradinhos do protocolo anterior não apareceram, esse fato nos revelou uma variável didática importante. Concluíram ainda que poderiam preencher, entre dois pontos do gráfico, com outros vários pontos até "*ficar parecido com uma reta*". Fizemos, em um outro momento, uma institucionalização parcial[6] para diferenciar, com a sala toda, a função contínua da função discreta. Analisando o protocolo do grupo 13, deparamo-nos com uma produção adequada em relação a uma constituição, gradativa, de representação de uma função contínua.

Figura 24: Protocolo de resolução do grupo 13



Fonte: Dados da pesquisa dos autores

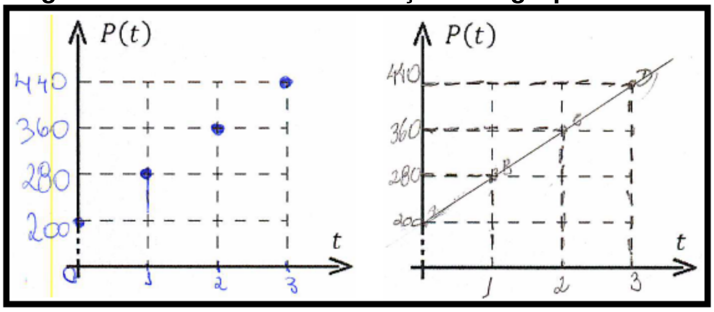
O grupo 13 atendeu plenamente qual é a atividade e o objetivo. E ainda, o grupo apresentou uma conversão que não ficou engessado aos valores da tabela para definir a escala do eixo das ordenadas; em seguida, definiu uma escala de 100 unidades, enquanto a maioria dos grupos definiu um valor que coincidiu com a velocidade do móvel, ou seja, 80 unidades de medida. Pela

[5] Usamos o termo intermediação para questionamentos direcionados para um grupo específico. Nosso intuito maior foi redirecionar o desenvolvimento das ações.

[6] Como institucionalização parcial, referimo-nos à intervenção para o coletivo após cada sessão da experimentação. Nestas intervenções, projetamos algumas produções escritas da última sessão e abrimos para discussões. Neste caso, o objetivo maior é produzir novos conflitos e novas acomodações. Apresentamos as produções na seguinte ordem: das mais inadequadas para as mais adequadas. É desta forma que tentamos dar significado para o objeto de estudo.

resposta do item b), podemos considerar que o grupo percebeu que a reta pode ser constituída por vários pontos. Enfim, o grupo apresentou uma conversão adequada e externaram indícios de que a função associada ao referido movimento por ser representada por uma função contínua.

Figura 25: Protocolo de resolução dos grupos 02 e 12

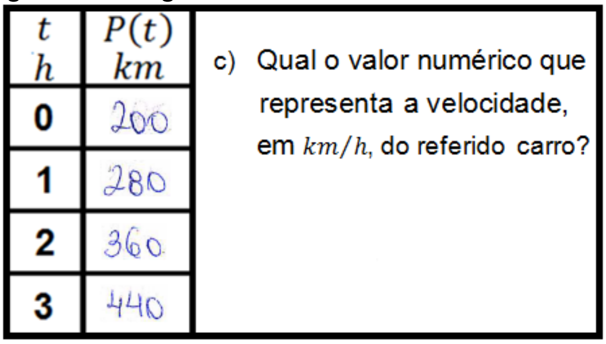


Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Conforme representado na figura 25, aproximadamente a metade dos grupos uniram os pontos constituindo uma “reta”. Tal resultado nos direcionou para uma outra institucionalização parcial que trabalhasse com um exemplo de função discreta. Trabalhamos na lousa, com questionamentos para o coletivo, a indicação de pontos, em um plano cartesiano, do preço total de um plano de saúde em função do número de consultas. A função que demos como exemplo foi $P(n) = 200 + 25 \, . \, n$, onde P é o preço total pago pelo plano de saúde familiar. Se nenhuma consulta for utilizada, paga-se 200 reais correspondente ao valor inicial, n é o número de consultas e todas custam o mesmo preço, independente da especialidade. Quando perguntamos se poderíamos marcar um ponto correspondente a n=1,5, responderam, rapidamente, que é impossível utilizar uma consulta e meia (“*professor, ou vai ou não vai ao médico*”). Após outras discussões, concluímos, coletivamente, que só poderíamos marcar pontos correspondentes a valores inteiros de n. Com isso, fechamos esta intermediação afirmando que não poderíamos unir os pontos continuamente e que a literatura matemática denomina esse tipo de gráfico como função discreta. Na atividade 01, como relatamos, a maioria dos grupos realizou conversões (do tabular para o gráfico) adequadas.

Apresentaremos na figura 26, a seguir, o terceiro item da atividade 01. Nossa intenção foi destacar uma importantíssima informação que está contida num registro tabular que relaciona posições do móvel e instantes temporais. Em nossos estudos preliminares, consideramos que o registro tabular é o mais eficiente para elucidar o quão rápido pode ser o movimento, ou seja, é o que mais facilmente “mostra” a velocidade do carro. Na verdade, a atividade 01 externou claramente o registro algébrico, o tabular e o gráfico como consequências das resoluções que os estudantes, autonomamente, desenvolveram. Verificamos, por meio de nossos estudos, que a informação sobre a velocidade não é identificada, tão facilmente, nos registros algébrico e gráfico. Lembramos que quase todos os grupos preencheram corretamente a tabela do item a); portanto, diante desse fato é esperado que a maioria identifique corretamente o módulo da velocidade do móvel.

Figura 26: Pergunta sobre o módulo da velocidade



t h	$P(t)$ km
0	200
1	280
2	360
3	440

c) Qual o valor numérico que representa a velocidade, em km/h, do referido carro?

Fonte: Autores e dados da própria pesquisa.

De nossas análises, a maioria dos grupos se embasou numa tabela como a da figura 26 para responder o referido item. Desse modo, se confirmou a coerência da previsão de nossa análise de que a maioria dos grupos respondeu corretamente, identificando o valor numérico correspondente à velocidade. Apesar do alto percentual de acertos, apresentamos a seguir respostas curiosas, embora algumas equivocadas:

Figura 27: Protocolo de resolução do grupo 11

c) Qual o valor numérico que representa a velocidade, em km/h, do referido carro?

80 Km/h, 80 é o valor fixo vezes o tempo

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

A figura 27 mostra a produção escrita do único grupo que associou a velocidade do carro à taxa de variação constante (“coeficiente angular”) da função associada ao movimento em questão. Ou seja, estamos diante de relação adequada entre elementos da função afim e do movimento uniforme.

Figura 28: Protocolo de resolução do grupo 13

c) Qual o valor numérico que representa a velocidade, em km/h, do referido carro?

$200 + 80 \cdot 1 = 280$ Km

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

A produção do grupo 13, referente à figura anterior, demonstra o valor numérico de P após 1 hora de viagem, faltou uma compreensão adequada do significado da letra P, pois o item questionava sobre o módulo da velocidade e não o da posição. Diante dessa produção, em uma institucionalização parcial, questionamos a sala, como um todo, sobre as diferenças conceituais entre posição, distância percorrida e velocidade. Acreditamos que a voz da maioria, endossada pelo autor, tenha alertado os restantes sobre necessárias reflexões concernentes às distinções entre os conceitos em questão.

Figura 29: Protocolo de resolução e áudio do grupo 15

t h	$P(t)$ km
0	200
1	280
2	360
3	440

c) Qual o valor numérico que representa a velocidade, em km/h, do referido carro?

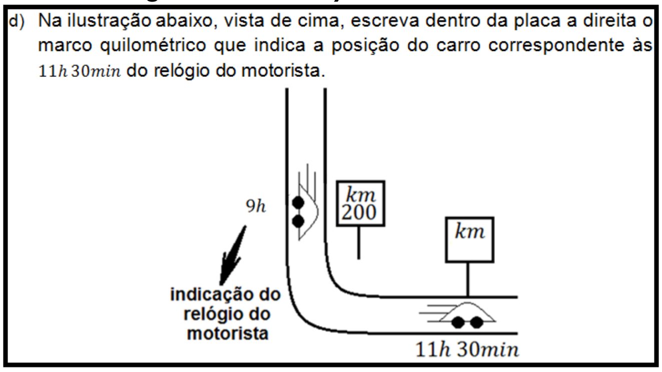
3

ÁUDIO: *Eu acho que o número que representa é esse que tá do lado do 440, que deve ser a maior velocidade.*

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

A transcrição do áudio que apresentamos, na figura 29, externa uma dificuldade do grupo na interpretação da língua materna e do símbolo P que estamos utilizando para representar a posição do móvel na rodovia. Observando a resposta “3” que o grupo apresentou, refletimos sobre o formato do texto que criamos para o item c), percebemos que a pergunta pode não ter sido bem formulada. Avaliamos que poderíamos ter perguntado: qual a velocidade, em km/h, do carro em questão? Para definir a velocidade de um móvel, é necessário citar o módulo e a direção de uma grandeza que é vetorial. Como, até então, nosso enunciado não continha nenhuma informação sobre a direção do movimento, nossa preocupação foi a de tentar deixar claro que no enunciado pedimos apenas o valor numérico, ou seja, apenas o módulo da velocidade do carro. Naquele momento, a dificuldade de interpretação adequada do símbolo P se mostrou coerente com nossos estudos preliminares, indicando que a apropriação dos conceitos das grandezas físicas poderá, gradativamente, se constituir ao longo da alternância de registros propostos nas próximas atividades.

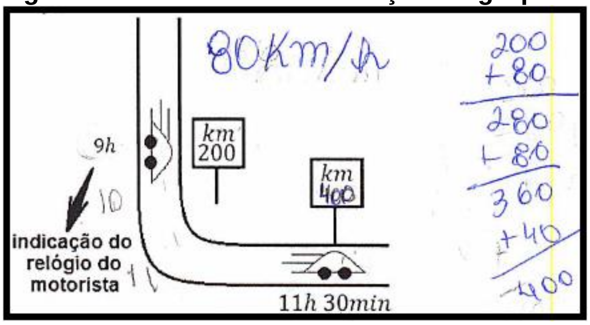
Figura 30: Item d) da atividade 01



Fonte: Autores da pesquisa.

Por se tratar de elementos importantes do movimento uniforme, pensamos nesta atividade, da figura 30, como uma oportunidade para que os alunos desenvolvessem, autonomamente, uma diferenciação entre distância percorrida e posição na rodovia. Julgamos em nossos estudos prévios, que a maioria dos grupos conseguiria identificar o valor do módulo da velocidade, como de fato constatamos que eles identificaram corretamente o módulo da referida grandeza. De modo geral, observamos que a maioria dos grupos identificou corretamente a posição do carro correspondente às 11h30min do relógio do motorista. Apresentamos a seguir alguns protocolos de resoluções referente ao item da figura 30.

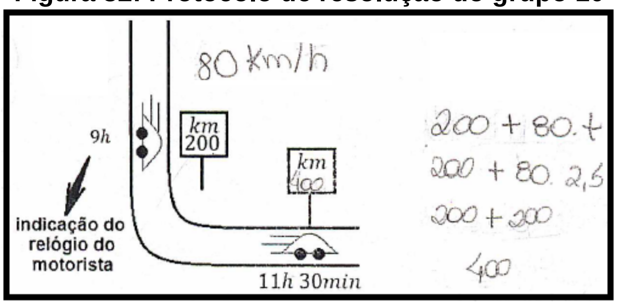
Figura 31: Protocolo de resolução do grupo 05



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

O módulo da velocidade apresentado no protocolo anterior revela que, apesar de não externarem tratamentos a partir do registro algébrico, o grupo 05 identificou o padrão matemático que dá origem as subsequentes posições. Na verdade, apresentaram tratamentos a partir da posição inicial que levaram ao resultado correto. Esses tratamentos revelam relações adequadas entre o padrão matemático e o movimento uniforme em questão.

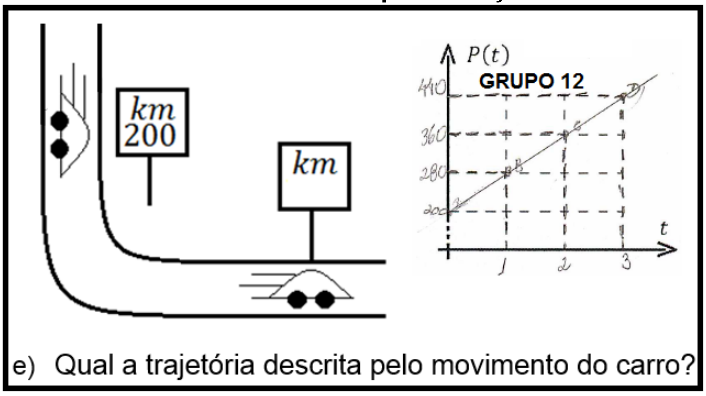
Figura 32: Protocolo de resolução do grupo 10



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Dentre os 19 grupos que participaram da primeira sessão da experimentação, apenas 2 recorreram ao registro algébrico para resolverem a atividade concernente à figura anterior. O resultado geral está de acordo com nossas considerações gerais da fase preparatória do “meio” didático, naquelas considerações, relatamos que a maioria dos alunos tentou resolver as situações-problema por análise proporcional (regra de três). Principalmente, por ser, a Teoria dos Registros de Representações Semiótica um elemento importante de nosso referencial teórico, nossas intermediações não privilegiaram nenhuma representação em detrimento de outras. Nossas análises não podem perder de vista os objetivos da pesquisa, portanto, temos que **analisar tratamentos e conversões entre registros envolvendo movimento uniforme e função afim**. No item externado pela figura 32, em uma etapa inicial do desenvolvimento da sequência didática, a minoria tentou desenvolver tratamentos a partir do registro algébrico. Portanto, como visto anteriormente, o grupo 10, além de ter realizado corretamente a transformação de unidades temporais, desenvolveu adequados **tratamentos** a partir do registro algébrico.

Figura 33: Último item e outras representações da atividade 01

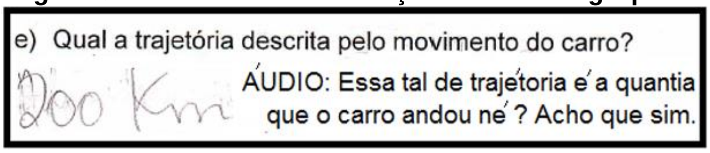


Fonte: Autores da pesquisa e dados da própria pesquisa.

Segundo Pacca e Zuffi (2002) a maioria dos estudantes relaciona o gráfico da função afim à trajetória do corpo. Esses autores afirmam também que se trata de obstáculos didáticos que se originam do fato de professores de matemática dando exemplos concretos, no estudo da função afim, para relações entre grandezas abstratas. Nosso objetivo, com estes dois últimos itens da atividade, é desarticular possíveis leituras equivocadas de registros gráficos. O gráfico da função desse exercício é uma reta com inclinação positiva e nós apresentamos uma trajetória com formato de “L”. Queremos com isto investigar a possibilidade de desvinculação entre gráfico das posições em função do tempo e trajetória do movimento.

Conforme ilustra a figura anterior, nossa proposta com o último item da atividade 01, foi iniciar um processo de desconstrução de possíveis identificações enganosas entre o gráfico da função e a trajetória descrita pelo móvel. Avaliamos que, pelo menos num momento introdutório, nosso objetivo foi atingido, pois foi possível observar uma quebra na interpretação da configuração usual. Nenhum grupo respondeu que a trajetória seria uma rampa, no que seria uma alusão a inclinação positiva ao gráfico da função. Esse resultado nos chama atenção para a notória influência de uma representação específica na elaboração de uma atividade. Acreditamos que os estudos preliminares de pesquisas sobre temas afins foram fundamentais para a elaboração de nossas atividades. Apresentamos a seguir uma produção escrita referente a este item.

Figura 34: Protocolo de resolução e áudio do grupo 11



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

A figura 34 nos revela que a comunicação pode depender de muitas variáveis. Em nossa análise, o grupo 11 não conseguiu interpretar adequadamente, pelo menos no contexto da atividade, o sentido da palavra trajetória. O áudio e a resposta afirmando que 200 quilômetros “de trajetória é a quantia que o carro andou”, deixam claro que a resposta se refere à distância percorrida pelo carro entre 9h e 11h 30min. Fizemos uma intermediação junto ao grupo 11 e perguntamos qual o “caminho” que o carro percorreu no referido intervalo de tempo. Os alunos do grupo responderam que “a estrada parece com uma letra L”. Novamente, perguntamos se eles poderiam fazer uma comparação entre distância percorrida e trajetória. Responderam: “professor, então a distância é o que a gente calcula e a trajetória é o que a gente vê?” Continuamos provocando reflexões e perguntamos se a fumaça deixada no ar pelo avião da esquadrilha da fumaça pode ser entendida como trajetória ou distância percorrida? Responderam sem titubear que seria a trajetória, apesar do direcionamento, consideramos que nossa intermediação teria sido mais cuidadosa se tivéssemos criado situações que favorecessem reflexões sobre o fato de que existem trajetórias que permitem a sensação visual, mas na maioria dos casos do cotidiano, a trajetória é constituída por pontos imaginários. Com isso, consideramos que demos início a um de nossos objetivos específicos: **Investigar relações entre trajetória e registro gráfico**.

Dentre os 19 grupos, apenas 3 completaram equivocadamente a tabela do primeiro item, ou seja, a maioria dos grupos completou corretamente os valores das posições, resultado esse que está de acordo com nossos estudos preliminares. De modo geral, analisamos a atividade 01 na perspectiva de Duval e observamos que a maioria dos grupos realizou **conversões** adequadas do registro algébrico para o registro tabular.

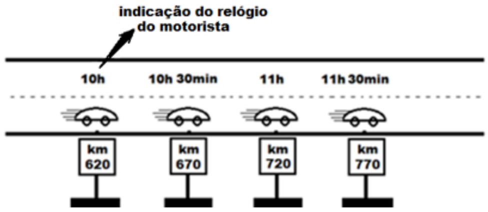
4.2 – Análise da Segunda Atividade

Como já destacamos em nosso texto, não pretendíamos sobrevalorizar nenhum registro de representação e, por isso, nossa sequência didática foi desenvolvida com alternância de registros. Defendemos a hipótese de que a maioria das representações semióticas pode informar os módulos das grandezas físicas para a resolução de uma situação-problema. Por uma perspectiva geral, lembramos que nosso objetivo de pesquisa é: **analisar a utilização de registros na inter-relação entre função afim e movimento uniforme**.

No que concerne ao uso de termos técnicos, tentamos propor uma possível adequação no uso de conceitos da teoria de Duval. Criamos uma ilustração “recheada” com informações numéricas para, ao menos, incluir alguns dos elementos elucidativos de uma representação figural de Raymond Duval. Apresentamos a referida adequação na figura a seguir.

Figura 35: Enunciado e itens a) e b) da atividade 02

02. A figura ilustrativa abaixo representa o movimento de um carro de luxo numa rodovia brasileira. Supondo que a velocidade seja sempre a mesma:



a) Preencha a tabela abaixo.

$\frac{t}{h}$	0	1	2	3
$\frac{P(t)}{km}$				

b) Que marco quilométrico você escolheu para que seja a posição inicial deste movimento?

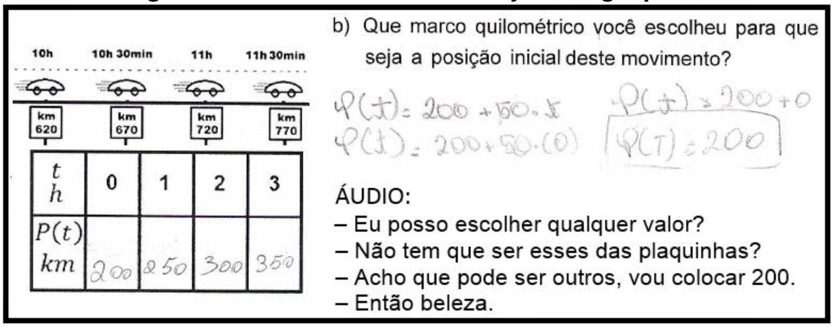
Fonte: Autores da pesquisa.

Na figura 35, apresentamos o enunciado da atividade 02 de nossa sequência didática que traz uma ilustração relacionada a alguns marcos quilométricos com indicações do relógio do motorista. O primeiro item pede para que o estudante complete a tabela com valores de posições do veículo. Com esse item, tentamos induzir uma “conversão”[7] de uma ilustração para um registro tabular. Acreditávamos, até por convergência com a ordem de escrita de nossa língua materna, que a maioria dos estudantes escolheria, como posição inicial, o valor da primeira placa à esquerda, ou seja, o quilômetro 620. O fato de essa posição estar associada à indicação 10 horas do relógio do motorista poderia induzir alguns alunos a fazerem cálculos que regredissem de hora em hora até encontrarem a posição associada ao instante zero hora. O item b) pediu que posição o aluno <u>escolheu</u> como posição inicial. Tentamos, dessa forma, deixar claro que, neste caso, na figura não existe elementos indicando uma posição inicial, ou seja, poder-se-ia escolher qualquer posição para zerar o cronômetro e iniciar o estudo do movimento.

A seguir, apresentamos o protocolo de resolução do grupo 08.

[7] As aspas indicam uma possível aproximação de parte da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Nossas ilustrações tentam propor uma alusão aos registros figurais de Raymond Duval.

Figura 36: Protocolo de resolução do grupo 08

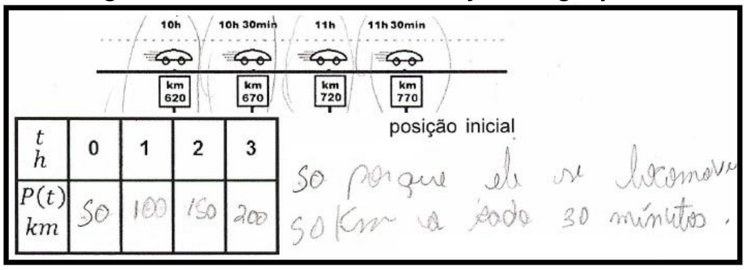


Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

O áudio referente à produção da figura 36 revela que a palavra “escolher”, inserida na pergunta, teve influência importante para a decisão do grupo na definição do valor numérico que representaria a posição inicial do móvel. Dentre os 19 grupos, o grupo 08 foi o único que a partir de um registro algébrico utilizou de **tratamentos** para demonstrar que a posição inicial, realmente, é o quilômetro 200. Podemos entender que os referidos tratamentos indicam tentativas de validação da resposta apresentada.

Nossa análise do áudio não permitiu identificar nenhum diálogo sobre o incremento de 50 unidades de uma coluna para outra. Acreditamos que as informações inseridas na ilustração, com intervalos de 30 minutos, tenham contribuído para o equívoco na resposta dos referidos incrementos que, na tabela a ser preenchida, deveria expressar o módulo da velocidade do carro. O curioso é que esse grupo respondeu, no item c) da atividade 02, 100 km/h para o módulo da velocidade. Nesse caso, observamos, por meio do áudio, o grupo 08 consultando a informação sobre a referida velocidade com um grupo vizinho. Nas análises do desempenho desse grupo foi possível ver que, apesar do equívoco com o valor da velocidade, eles conseguiram generalizar o padrão matemático, por meio de uma representação algébrica para a função matemática que descreve o movimento. Assim, mesmo que parcialmente, eles realizaram uma **conversão** do registro tabular para o gráfico, principalmente, no que concerne ao rigor de notações que exige um registro algébrico de função afim.

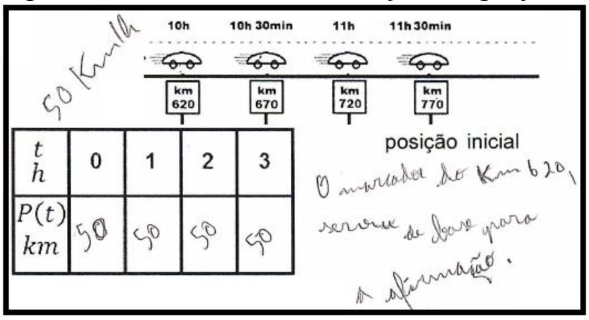
Figura 37: Protocolo de resolução do grupo 11



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

O protocolo anterior, produzido pelo grupo 11, torna evidente uma possível influência de uma representação (ilustração) no direcionamento das ações do grupo durante a resolução da atividade. A ilustração que criamos registra deslocamentos de 50 quilômetros a cada 30 minutos, sendo que essa característica do movimento não possui relação alguma com a grandeza posição inicial. A partir de então, diante das situações adidáticas desse ambiente, passamos a analisar a importância da diversificação de registros para favorecer interpretações adequadas de propostas de situações-problema. A "conversão" anterior não corresponde, corretamente, a ilustração apresentada pelo enunciado, principalmente, por falta de atenção do grupo em relação as devidas associações coerentes de intervalos de tempos.

Figura 38: Protocolo de resolução do grupo 18



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

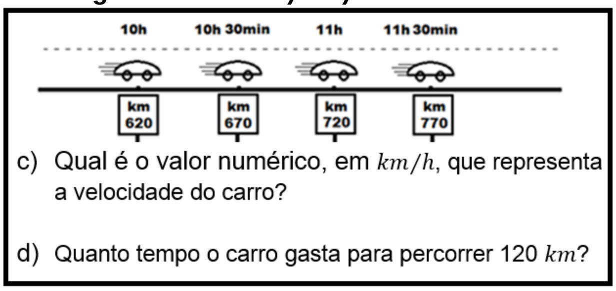
A produção da figura 38 levou-nos a uma intermediação junto ao grupo 18, isso ocorreu na própria sala onde aconteceu a produção de dados. Transcrevemos abaixo o diálogo com o grupo: (**P** sendo o pesquisador e **G** sendo o grupo)

P – *O que significa as placas que aparecem no desenho?*
G – *É um lugar da estrada.*
P – *Medido em que unidade?*
G – *Como assim?*
P – *Graus Celsius, quilogramas, centímetros, ...*
G – *Quilômetro né?*
P – *Existe alguma grandeza na tabela que também é medida em quilômetros?*
G – *Ahhh, então onde a gente escreveu a velocidade tinha que ser os valores das plaquinhas!*
P – *Pensem sobre nosso bate-papo!*

Como uma consequência dessa intermediação, decidimos incluir em nossas institucionalizações parciais questionamentos, para a sala toda, sobre possíveis diferenças entre posição e velocidade, e ainda, sobre a particularidade da posição inicial. A maioria diferenciou com clareza as referidas grandezas, alguns até citaram as respectivas unidades de medida. A partir dessas intermediações, percebemos o quão elucidativo são as reflexões sobre análise dimensional. Até então, a produção escrita do grupo 18 apresenta uma "conversão" totalmente equivocada.

No item c), tanto a ilustração como a tabela, por uma "conversão" adequada, podem facilitar a identificação do módulo da velocidade. Não esperávamos grandes dificuldades na identificação. No item subsequente, pedimos que o aluno calculasse o intervalo de tempo necessário para percorrer determinada distância. Nesse caso, esperávamos que poucos alunos usassem uma fórmula para o referido cálculo, com base nos resultados da pré-experimentação que desenvolvemos. Segue abaixo, na figura 39, a referida atividade.

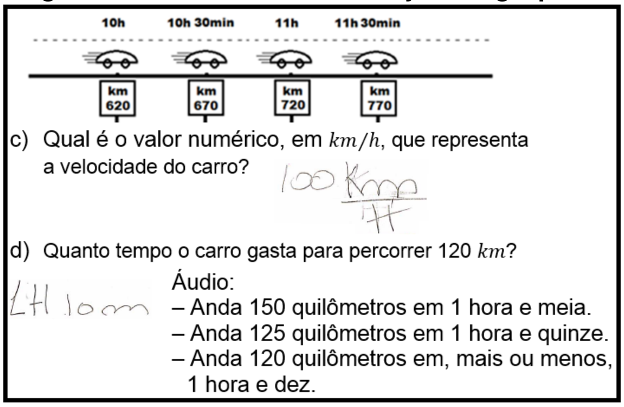
Figura 39: Itens c) e d) da atividade 02



Fonte: Autores da pesquisa.

De modo geral, as produções referentes aos itens apresentaram um considerável percentual de acertos. Quase todos os grupos responderam corretamente o valor do módulo da velocidade e apenas a metade conseguiu acertar o tempo necessário para percorrer 120 km. Dentre esses últimos, apenas **um grupo** tentou, erroneamente, desenvolver **tratamentos**, durante a resolução, a partir de um registro algébrico.

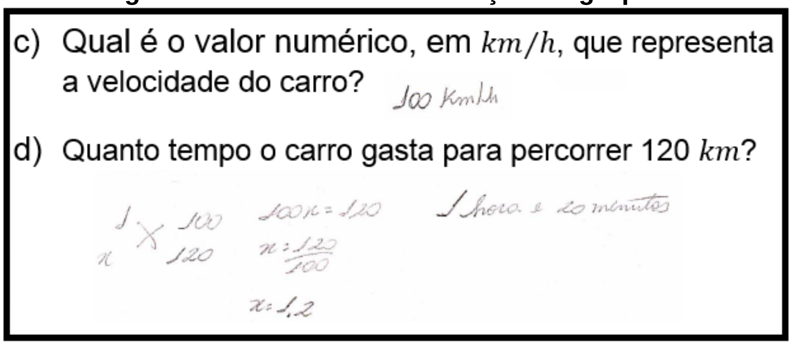
Figura 40: Protocolo de resolução do grupo 07



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Analisamos a produção escrita do grupo 07, conforme figura 40, ficamos curiosos sobre o resultado 1h 10min obtido, quando o correto é 1h 12min. Inserimos, também, na figura anterior a transcrição do áudio referente ao item. Percebemos que 1h 10min é o resultado aproximado de um possível cálculo mental por um dos estudantes do grupo.

Figura 41: Protocolo de resolução do grupo 12

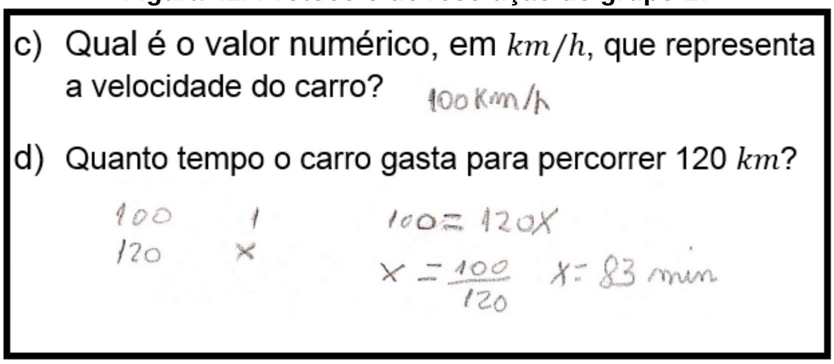


Fonte: Dados da pesquisa dos autores

O grupo 12, apesar de desenvolver **tratamentos** adequados a partir de uma equação oriunda da análise proporcional, externam-se equívocos em relação às unidades de medida.

Particularmente, por causa do protocolo da figura 41, por meio de uma institucionalização parcial, provocamos a sala em relação a qual interpretação é correta para a representação 1,2h. Percebemos, nessa institucionalização parcial, que muitos alunos acreditam que 1,2h seja igual a 1h 20min, mostrando dificuldade no tratamento dessa representação nesse sistema. O interessante é que a maioria relaciona corretamente 1 hora a 60 minutos, a partir disso, concluímos que a dificuldade pode estar na leitura que se deve realizar da notação decimal 1,2h. Na lousa, abrimos 1,2h em 1,0h + 0,2h e pedimos para que refletissem um pouco sobre uma possível igualdade entre 1,2h e 1h 20min. Após uns **cinco** minutos, aproximadamente, uns cinco alunos responderam que 1,2h era igual a 1h 12min. Diante da situação, mostramos para a sala que assim como 1,0h é igual 1,0 vezes 60min, 0,2h é igual a 0,2 vezes 60min, portanto, confirmamos que a resposta 1h 12min é a correta. Fechamos, assim, mais uma institucionalização parcial.

Figura 42: Protocolo de resolução do grupo 17


c) Qual é o valor numérico, em km/h, que representa a velocidade do carro? 100 Km/h

d) Quanto tempo o carro gasta para percorrer 120 km?

100	1
120	x

$100 = 120x$

$x = \frac{100}{120}$ $x = 83$ min

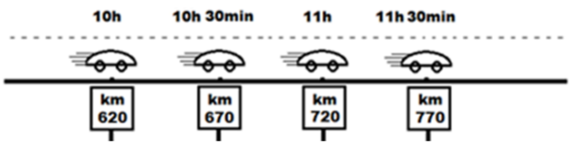
Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Analisando a figura 42, percebemos que o grupo 17 não domina com clareza as técnicas de análises proporcionais. O grupo igualou produtos horizontais entre as grandezas. Essa técnica é utilizada por alguns professores de matemática para resolução de relações inversamente proporcionais. Nossas análises preliminares não forneceram subsídios suficientes para que pudéssemos prever esse tipo erro na resolução de situações-problema num contexto de movimento uniforme. Na verdade, defendemos a ideia de que as transformações realizadas envolvendo análises proporcionais (“regra de três”) devem seguir a técnica da redução à unidade. Conjecturamos que as relações entre direta/inversa e produto/divisão são mais coerentes, no que se refere a uma lógica de desenvolvimentos cognitivos. Parece que a dificuldade é resolver por meio do raciocínio envolvendo grandezas proporcionais em contraposição ao uso mecânico de regras, inclusive a de três.

E por fim, no último item dessa atividade, criamos uma situação para conduzir, os estudantes, à produção de um registro algébrico, ou seja, que generalizassem as relações entre posições e instantes de tempo. Pelo fato de esperarmos que esta atividade apresentasse um grau maior de dificuldade, apresentamos a atividade anterior com um registro algébrico no corpo do texto e, na figura da mesma questão, representamos o algébrico, exatamente, sobre o registro tabular e, ainda, sugerimos uma possível comparação com a fórmula do exercício 01. Para tanto, produzimos dados, significativos, para nossa análise de tratamentos e conversões relacionados à capacidade de generalização de padrões matemáticos.

Referente a esse item, segue abaixo nossa proposta de atividade:

Figura 43: Proposta do último item da atividade 02

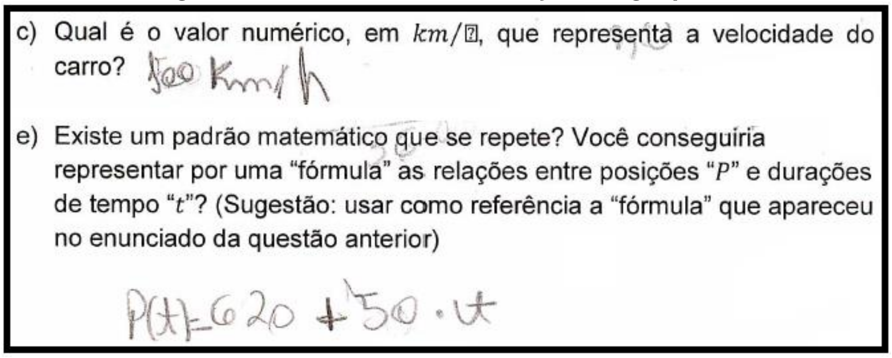


e) Existe um padrão matemático que se repete? Você conseguiria representar por uma “fórmula” que relacione as posições “P” com as durações de tempo “t”? (Sugestão: usar como referência a “fórmula” que apareceu no enunciado da questão anterior)

Fonte: Autores da pesquisa.

Consideramos que a situação-problema, proposta na atividade 01, foi de extrema importância no que tange a apresentação de uma diversidade de registros de representação semiótica. Consideramos que o sucesso da maioria nesse exercício foi influenciado pelo direcionamento dado pela sugestão, inserida no próprio item, que permitiu que se utilizassem estratégias de comparação com a representação algébrica do enunciado da primeira situação-problema.

Figura 44: Protocolo de resolução do grupo 03


c) Qual é o valor numérico, em km/h, que representa a velocidade do carro? 500 Km/h

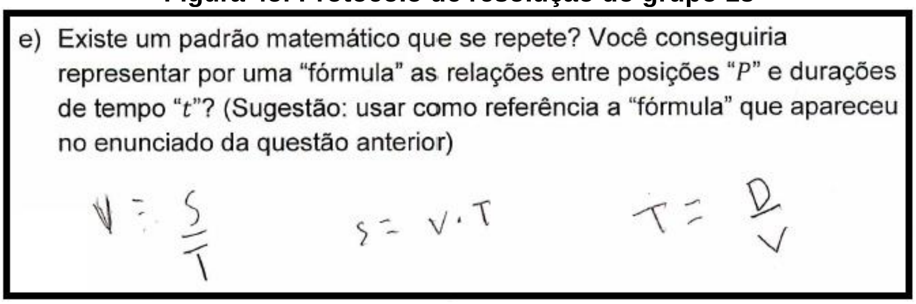
e) Existe um padrão matemático que se repete? Você conseguiria representar por uma “fórmula” as relações entre posições “P” e durações de tempo “t”? (Sugestão: usar como referência a “fórmula” que apareceu no enunciado da questão anterior)

$P(t) = 620 + 50 \cdot t$

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Conforme a figura 44, o grupo 03 respondeu corretamente o módulo da velocidade, portanto, não conseguiu associar a referida velocidade ao fator da variável tempo. Este equívoco apareceu na minoria das produções escritas. Resolvemos não intermediar, pelo menos por enquanto. Quase que no final de nossa sequência didática, propusemos uma situação que vincula, implicitamente, a inclinação do gráfico ao módulo da velocidade do móvel. Decidimos por esperar o desenvolvimento de todas as sessões para, se necessário, propormos reflexões sobre possíveis associações entre módulo da velocidade e taxa de variação da função afim.

Figura 45: Protocolo de resolução do grupo 18


e) Existe um padrão matemático que se repete? Você conseguiria representar por uma “fórmula” as relações entre posições “P” e durações de tempo “t”? (Sugestão: usar como referência a “fórmula” que apareceu no enunciado da questão anterior)

$V = \frac{S}{T}$ $\quad S = V \cdot T$ $\quad T = \frac{D}{V}$

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

O grupo 18, da figura 45, tentou utilizar um registro algébrico e possíveis tratamentos do mesmo. A letra “S” foi trocada pela letra “D” e não se fez nenhuma justificativa com relação à igualdade considerada. Com base na produção acima, percebemos que o grupo não se preocupou em considerar nossa sugestão inserida no item e). Verificamos, também, que o grupo optou por recorrer a uma equação que tinha na memória, ao invés de seguir a sugestão que poderia levá-lo por um caminho desconhecido, talvez com alguns desafios. Entendemos que as técnicas conhecidas, da memória, são mais confortáveis para ações cognitivas mas, neste caso, não foi suficiente para a proposta da atividade. Fizemos uma institucionalização parcial, de tal maneira que relacionamos a “velha fórmula de física”, do movimento uniforme, com a função afim que representa a generalização do padrão em questão.

Ao fazer uma análise geral, verificamos que a maioria dos grupos completou com coerência a tabela do primeiro item, ou seja, independentemente do valor inicial para a posição, a maioria propôs “conversões” adequadas da ilustração para a tabela. Também, a maioria considerou a velocidade correta para a realização da segunda atividade. A referida regressão, de hora em hora até o instante zero, que havíamos previsto não apareceu nas produções. Alguns dos grupos não iniciaram a tabela com a posição 620, tal fato nos chama atenção com relação a uma possível influência do registro de representação do enunciado. Aí, temos uma ilustração permeada com informações numéricas, sendo o quilômetro 620 o primeiro número que aparece em uma ordem da esquerda para a direita, ordem coincidente com a leitura e escrita de nossa língua materna.

Na atividade 02, como era esperado, as produções escritas dos participantes utilizaram análises proporcionais perante questões que envolvem movimentos com velocidades constantes.

Exatamente, 07 dentre 19 produções escritas, para a atividade 02, revela que realizar uma análise proporcional, sem indicar as respectivas unidades, pode levar alguns estudantes a ficarem em dúvida com relação à unidade de medida que está, corretamente, associada ao resultado. Ainda verificamos que a maioria dos grupos escreveu, corretamente, uma equação que relaciona as posições do móvel e os instantes de tempo, ou seja, a maioria dos grupos conseguiu representar o padrão matemático em questão por uma função afim. Ou seja, a maioria desenvolveu **tratamentos** e **conversões** adequados nessa etapa, introdutória, da produção de dados.

4.3 – Análise Da Terceira Atividade

Nossa proposta com a atividade, representada na figura 46, é analisar comparações conceituais entre: posição inicial do móvel e valor inicial da função afim, velocidade do ônibus e taxa de variação constante da função afim, polinômio do primeiro grau e trajetórias retilíneas, representação algébrica e representação gráfica. Acreditamos que a busca pelos elementos comparativos, citados anteriormente, pode contribuir com a utilização, correta, de alguns registros da função afim (objetivo geral). Lembramos que a confecção de nossa sequência de atividades foi amparada pela Teoria das Situações Didáticas, portanto, as referidas relações aparecem implícitas na situação adidática. Denominamos por situação adidática porque observamos que ocorreu devolução em quase todas produções dos grupos, ainda, os poucos que se mostraram inativos, conseguimos, por intermediações, colocá-los em ação como protagonistas no processo de aprendizagem.

Figura 46: Enunciado completo da terceira atividade.

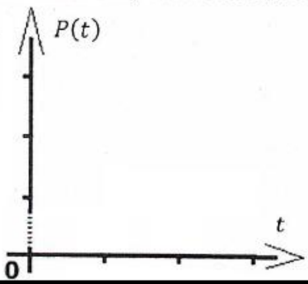
03. Um ônibus de transporte de passageiros está quebrado no acostamento de uma rodovia. Supondo que o ônibus irá se mover sempre com velocidade constante, apresentamos a seguir uma equação algébrica, ou seja, uma fórmula que representa a função que relaciona os marcos quilométricos (P) da rodovia e a duração do tempo (t) de viagem logo após o conserto do ônibus: $\boldsymbol{P(t) = 360 + 90.t}$, sendo P medido em "km" e t medido em "h".

a) Qual a Posição Inicial (P_0), em km, do ônibus?

b) Qual é, em $km/$h, a velocidade do ônibus?

c) É possível dizer como é o "formato" da rodovia? Ou seja, é possível dizer qual a trajetória descrita pelo ônibus? Justifique sua resposta.

d) Utilizando o plano cartesiano abaixo, converta a fórmula que aparece no enunciado em um gráfico.



Fonte: Autores da pesquisa.

Como nossa primeira atividade continha os quatro principais tipos de representações do nosso trabalho, conjecturamos, no primeiro item, que a maioria dos grupos iria associar corretamente a velocidade do móvel ao valor fixo da função afim. Em nossos estudos preliminares não conseguimos encontrar trabalhos que analisassem o uso correto dos termos técnicos em questão, nas relações entre matemática e física, que propusemos. Sendo assim, somente as análises das produções escritas poderão revelar se houve utilização adequada dos termos fluentes entre os estudantes. Apresentamos a seguir um protocolo produzido durante a realização da terceira atividade.

Figura 47: Protocolo de resolução do grupo 09.

$\boldsymbol{P(t) = 360 + 90.t}$

a) Qual a Posição Inicial (P_0), em km, do ônibus?

360+90.0

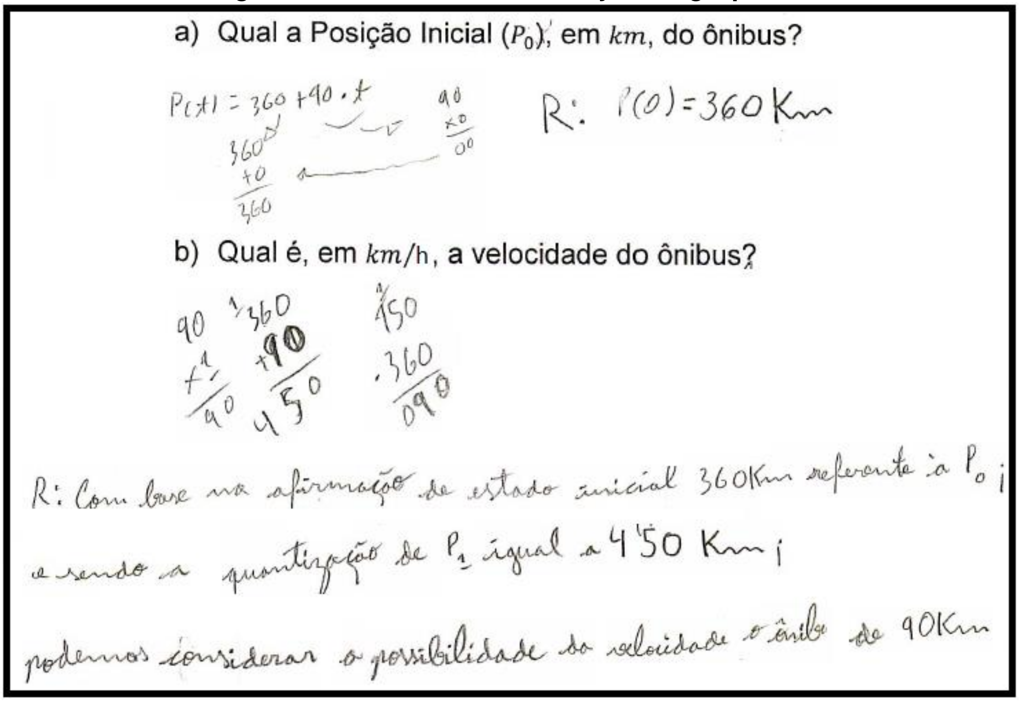
360+0=360Km.

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Quase que a totalidade, dentre os grupos, respondeu corretamente a atividade do item a). Conforme foi mostrado na figura 47, na perspectiva de Raymond Duval, a maioria, dentre as respostas adequadas, desenvolveu tratamentos, a partir da representação algébrica que apresentamos no enunciado, para encontrar a posição inicial do móvel. Os protocolos nos surpreenderam porque esperávamos que todas as respostas para este item fossem corretas e, entretanto, elas emergiriam de uma simples comparação com a parcela fixa da função afim associada ao movimento. Em algumas intermediações, destacamos que o início de um problema de física pode estar associado ao instante em que um “cronômetro” é zerado para começar a contagem dos instantes de tempo, ou seja, o instante de tempo “t” igual a zero simboliza o início do estudo de um problema de Física.

Nossa proposta com o item b) foi analisar possíveis associações entre a velocidade do ônibus e a taxa de variação constante da função afim. Em nossas atividades propostas e em nossas intervenções, tomamos o cuidado, pelo menos por enquanto, em não utilizar a expressão coeficiente angular da reta que, a nosso ver, é mais adequado nos estudos de geometria analítica. De nossos estudos prévios, consideramos que os grupos não apresentariam dificuldades em identificar o módulo da velocidade do ônibus. Diferentemente do conceito de aceleração, o conceito de velocidade está mais próximo do cotidiano dos estudantes. Trata-se, simplesmente, de uma análise da rapidez com que o móvel muda de posição. Apresentamos a seguir alguns protocolos do referido item.

Figura 48: Protocolo de resolução do grupo 18.



a) Qual a Posição Inicial (P_0), em km, do ônibus?

$P(t) = 360 + 90 \cdot t$

R: $P(0) = 360$ Km

b) Qual é, em km/h, a velocidade do ônibus?

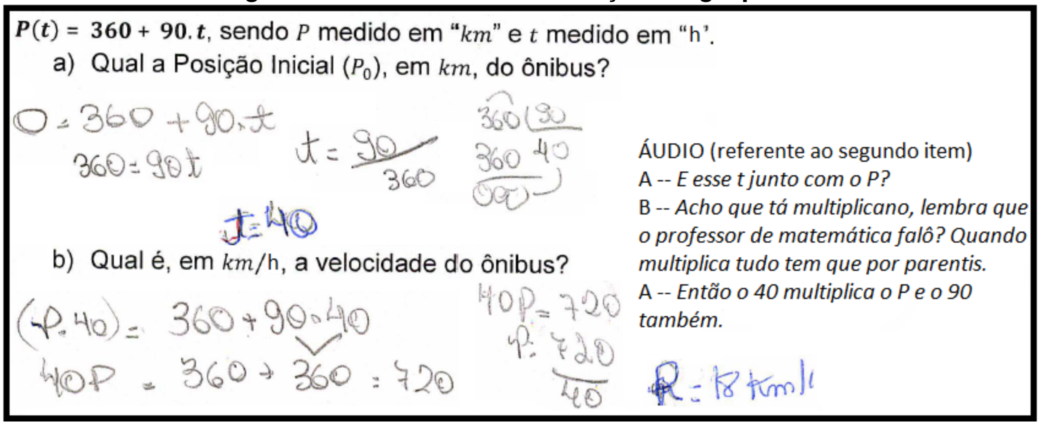
R: Com base na afirmação de estado inicial 360Km referente a P_0; e sendo a quantização de P_1 igual a 450 Km; podemos considerar a possibilidade da velocidade do ônibus de 90Km

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Conforme a figura 48, os estudantes, do grupo 18, analisaram a distância que o ônibus percorreu na primeira hora de movimento e, sem muita convicção, generalizaram para o módulo da velocidade. Eles não usaram fórmula e nem associaram o referido valor a constante fixa que multiplica o tempo na função do enunciado. Quase que a totalidade dos grupos respondeu com coerência o valor do módulo da velocidade. A produção escrita que externamos, anteriormente, foi a única resolução que não comparou a velocidade ao fator de "t" na função. O grupo 18 realizou **tratamentos** por meio do registro algébrico para os dois primeiros itens da atividade. Provavelmente, o grupo foi influenciado pelas institucionalizações parciais.

A seguir, apresentamos um protocolo que evidencia um sério equívoco na interpretação da notação da função afim.

Figura 49: Protocolo de resolução do grupo 08.



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

O grupo 08 da figura 49 acima, apresentou uma sequência de equívocos que mereceu uma intermediação direcionada ao grupo. A primeira dificuldade que detectamos foi na associação da posição inicial, obrigatoriamente, ao zero. Nesse mesmo item a), observamos equívocos nos tratamentos no registro algébrico. Consequentemente, o grupo associou o numerador de uma fração ao divisor em suas técnicas de divisibilidade.

No item b), conforme a transcrição do áudio exposto na figura 49, o grupo apresentou uma interpretação do registro algébrico da função afim que não apareceu em nossos estudos prévios. A variável "P" está em função da variável "t", simbolicamente, essa dependência é representada por "P(t)", consideramos, *a priori*, que este formalismo da notação direcionou o grupo para um entendimento de que existe no primeiro membro um produto entre "P" e "t".

A partir da produção da figura 49, estabelecemos um diálogo com o grupo 08. Começamos com uma sequência de questões simples que dependiam de tratamentos de polinômios de primeiro grau. Nesse estágio, optamos por não seguir o rigor técnico nas notações das funções, ou seja, com este grupo, abandonamos o "P(t)" em nossos diálogos. Descobrimos que os integrantes do grupo foram reprovados em matemática 1 e que, naquele semestre, coincidiu com a experimentação, pois estavam cursando matemática 1 e 2. Depois de uma meia hora de reflexões, conseguimos convencê-los de que cometiam equívocos em tratamentos de polinômios de primeiro grau. Voltamos a comentar sobre a notação matemática usual da função afim quando realizamos uma institucionalização parcial direcionada para a sala toda.

Na atividade 01 da primeira sessão, propositalmente, fizemos coincidir no mesmo exercício um gráfico de uma função afim com inclinação positiva e uma trajetória em um formato de “L”. Naquela atividade, nossa intenção foi analisar produções perante um processo de desvinculação entre trajetória do movimento e o registro gráfico em questão. Agora, no item c) da atividade, investigamos se os alunos estabeleceram alguma relação entre o registro algébrico e a trajetória do movimento. A seguir, apresentamos algumas produções sobre a análise.

Figura 50: Protocolo de resolução do grupo 03.

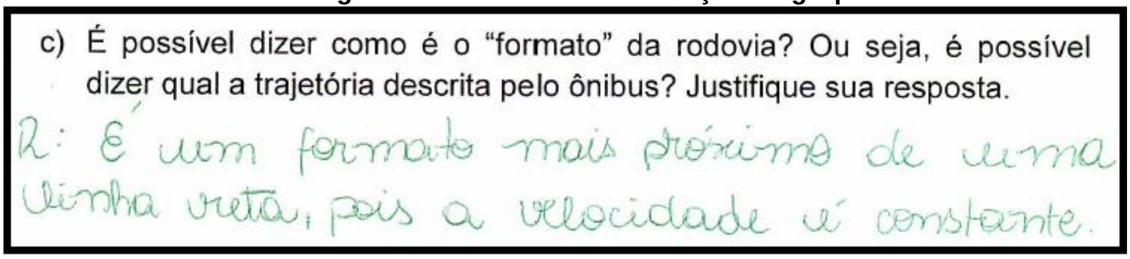
c) É possível dizer como é o “formato” da rodovia? Ou seja, é possível dizer qual a trajetória descrita pelo ônibus? Justifique sua resposta.

Sim, é possível, É uma reta, pois o ônibus estava em uma rodovia, com acostamento.

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Como já era esperado, os fenômenos visíveis do cotidiano influenciaram as produções sobre possíveis trajetórias referentes à atividade 03. Conforme a figura 50, o grupo concluiu que o fato de existir acostamento, na rodovia em questão, permite considerar que a trajetória é retilínea. Conversando particularmente com o grupo 03, perguntamos que relação eles fazem entre acostamento e formato da estrada. Um dos estudantes disse que já ouviu o pai dizer que é muito perigoso ficar parado no acostamento de uma curva, portanto, como o enunciado da atividade dizia que um ônibus estava quebrado no acostamento, eles concluíram que a trajetória deveria ser uma reta. No protocolo abaixo, verificamos outra influência do cotidiano que surge diante de uma situação-problema.

Figura 51: Protocolo de resolução do grupo 06.


c) É possível dizer como é o "formato" da rodovia? Ou seja, é possível dizer qual a trajetória descrita pelo ônibus? Justifique sua resposta.

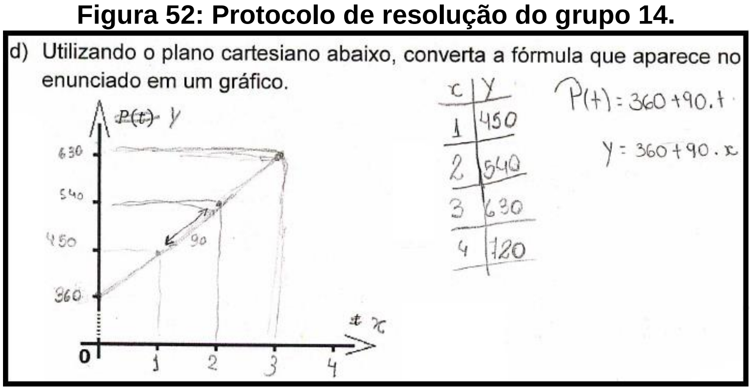
R: É um formato mais próximo de uma linha reta, pois a velocidade é constante.

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

A produção da figura 51 nos fornece elementos suficientes para que concluíssemos que eles acreditam que diante de uma curva, geralmente, um motorista reduz a velocidade. Esse fato corriqueiro do cotidiano influenciou a resposta anterior do grupo 06.

No último item da atividade 03, pedimos para que os grupos realizassem uma **conversão** de registro, ou seja, a partir do registro algébrico do enunciado propusemos a conversão para um registro gráfico. Na tentativa de mudança de estratégia em relação a atividade 01 de nossas sessões, retiramos a malha quadriculada do plano cartesiano em questão e não apresentamos, até então, um registro tabular. Apresentaremos abaixo, alguns protocolos do referido item.

Figura 52: Protocolo de resolução do grupo 14.



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

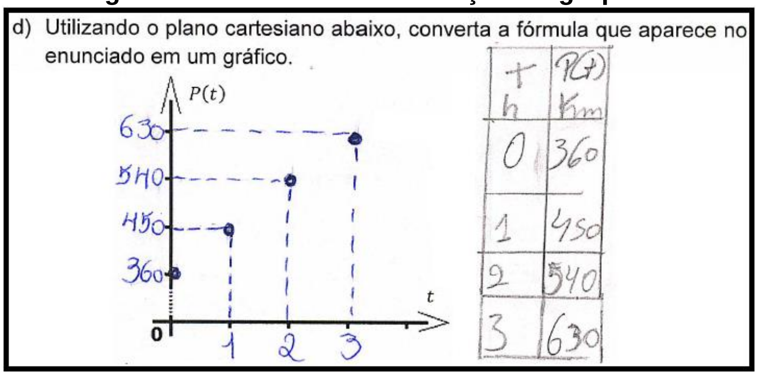
A produção escrita da figura 52 contribui como um subsídio importante para nossa questão central: **em um meio contextualizado com movimentos**

uniformes, que contribuições a diversidade de registros de representação semiótica pode trazer para interpretações do movimento uniforme e da função afim? Como o protocolo apresenta **duas conversões adequadas**, entendemos que a diversidade de registros pode ter contribuído positivamente para indícios de aprendizagens que favoreçam interpretações corretas tanto do movimento uniforme quanto da função afim.

Verificamos que o grupo 14 fez comparações entre a função que relaciona posições e instantes de tempo com a função afim que já estudaram em matemática. A produção escrita desse grupo externou uma relação coerente entre Matemática e Física. Na representação do conjunto domínio, os estudantes substituíram a variável “t” por “x” e para o contradomínio substituíram “P(t)” por “y”, notação esta que é clássica nas representações de matemática.

O grupo também marcou pontos na atividade 01. Naquela atividade, os estudantes não fizeram nenhuma mudança de variável para marcarem pontos no plano cartesiano. Consideramos que as ausências da malha quadriculada e do registro tabular influenciaram na mudança de estratégia. Por causa da ausência do registro tabular, a maioria recorreu, pelo menos com registro explícito, à linguagem algébrica e aos tratamentos correspondentes para marcarem pontos no plano cartesiano. Apresentamos a seguir um protocolo de resolução que produziu um registro tabular como subsídio para representação de pontos no plano cartesiano.

Figura 53: Protocolo de resolução do grupo 13.



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

A figura anterior deixa claro que alguns estudantes dependem do registro tabular para confeccionarem o registro gráfico. A citada dependência pode estar associada a atividades de matemática que seguem a seguinte ordem nos estudos de funções: linguagem algébrica, tabular, gráfica. A partir do registro algébrico, o grupo 13 poderia desenvolver cálculos mentais e marcar os respectivos pontos.

Analisando as produções escritas, verificamos que, aproximadamente a metade dos grupos respondeu com coerência o item c) da atividade 03, ou seja, que não existem elementos suficientes que permitem identificar a trajetória do movimento do ônibus a partir, apenas, do registro algébrico.

Em nossos quinze anos de experiência em sala de aula, temos verificado importantes influências dos fenômenos naturais, visíveis a olho nu, na aprendizagem de conceitos clássicos de ciências. No ensino médio, o atrito, a resistência do ar, a gravidade do local, são variáveis que devemos desprezar para desenvolvermos o conceito de inércia, movimento uniforme, queda livre, movimento oblíquo, dentre outros. Essas abstrações implícitas nos modelos científicos abordados pelas literaturas fazem com que os referidos modelos se distanciem das contemplações dos fenômenos do cotidiano. Por outro lado, em algumas situações

4.4 – Análise da Quarta Atividade

Ao longo da sequência didática, alternamos o registro de representação semiótica no corpo do enunciado. O objetivo de nossa atividade 04 foi produzir dados para análise da interpretação do registro tabular, da conversão do registro tabular para o registro em língua materna e de possíveis tratamentos de registros algébricos diante de uma situação-problema. Apresentamos a seguir a referida atividade.

Figura 54: Enunciado do primeiro item da atividade 04.

04.

a) Tomando como referência as relações da tabela abaixo, crie um texto correspondente ao movimento cujos dados constam na tabela.

$P(t)$ km	t h
580	0
650	1
720	2
790	3

c) Qual a distância percorrida nas duas primeiras horas de movimento?

Fonte: Autores da pesquisa.

Como já propusemos algumas construções de registros gráficos, inclusive com mudanças de variáveis, na figura 54 omitimos o item b), novamente, trata-se de um plano cartesiano em que os estudantes devem marcar pontos correspondentes aos valores da tabela. Nosso foco nesta atividade é analisar: a capacidade de interpretação do registro tabular, a criatividade de criação de um registro em língua materna, a distinção entre posição ocupada na estrada e distância percorrida. Externamos, a seguir, alguns protocolos referentes a produções em linguagem materna.

Figura 55: Protocolo de resolução do grupo 06.

$P(t)$ km	t h
580	0
650	1
720	2
790	3

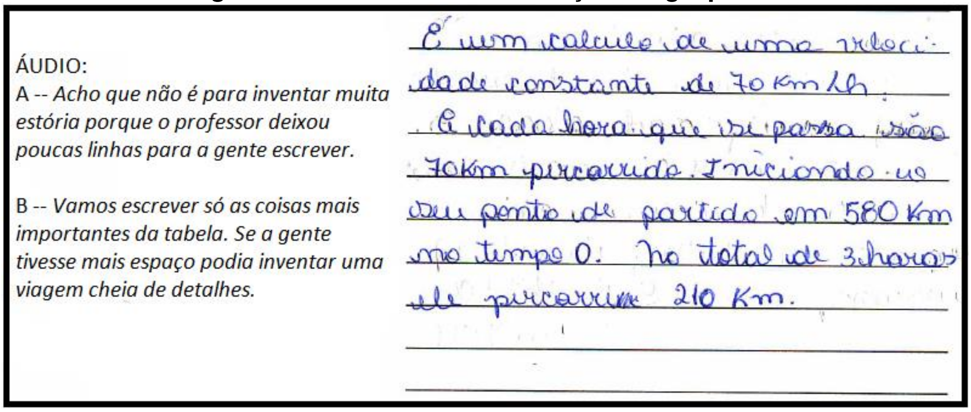
Uma moto tem seu ponto inicial (P_0) no marco 580Km. Obteve uma velocidade constante a partir deste ponto. Isso pode ser confirmado a partir da fórmula $P(t) = 580 + 70 \cdot t$.

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

O grupo 06 fez uma leitura objetiva e correta do registro tabular. Apesar de não ter se preocupado com um rebuscamento do texto, os estudantes conseguiram generalizar o padrão matemático em questão por meio de uma função que relaciona as posições ocupadas pelo móvel com os instantes tempo.

Apesar de estarmos diante de **duas conversões adequadas**, percebemos que nossa sequência didática pode ter contribuído para limitar a produção de nossos estudantes, pois nesse caso o número de linhas que apresentamos para a produção do registro em língua materna parece ter sido insuficiente.

Figura 56: Protocolo de resolução do grupo 05.


ÁUDIO:

A -- *Acho que não é para inventar muita estória porque o professor deixou poucas linhas para a gente escrever.*

B -- *Vamos escrever só as coisas mais importantes da tabela. Se a gente tivesse mais espaço podia inventar uma viagem cheia de detalhes.*

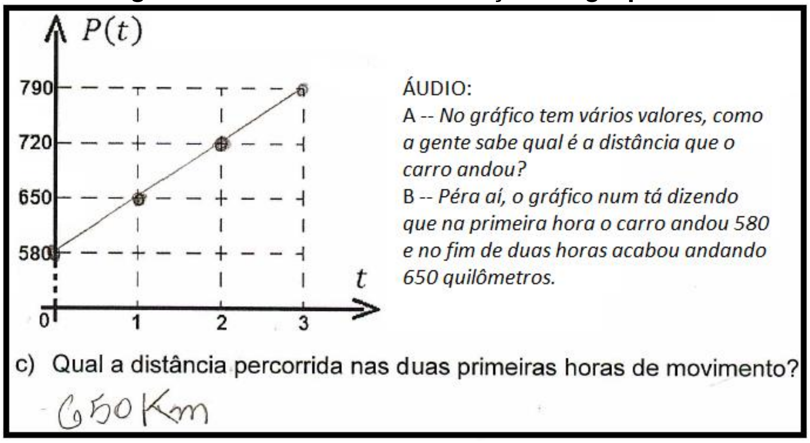
É um calculo de uma veloci-
dade constante de 70 Km/h.
A cada hora que se passa são
70Km percorrido. Iniciando no
seu ponto de partida em 580 Km
no tempo 0. No total de 3 horas
ele percorrerá 210 Km.

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Na figura 56, o grupo 05 externa com clareza que o número de linhas que deixamos como espaço para a produção do registro em língua materna influenciou na limitação do texto elaborado. O áudio que transcrevemos na figura anterior nos revela que os estudantes explicaram, objetivamente, as informações que julgaram mais importantes no contexto de um movimento uniforme.

O último item da atividade foi confeccionado com o propósito de análises sobre possíveis distorções conceituais entre distância percorrida e posição do móvel. De nossas análises, dentre os grupos, a maioria respondeu, corretamente, que a distância percorrida, em duas horas, é 140 km. Apresentamos a seguir alguns protocolos para a referida análise.

Figura 57: Protocolo de resolução do grupo 03.



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

O grupo 03 revela um clássico equívoco na distinção entre posição ocupada pelo móvel e distância percorrida. Da análise do áudio, consideramos que o grupo considerou que na primeira hora de movimento o carro percorreu 580 quilômetros e que na hora subsequente percorreu mais 70 km. Dessa forma, verificamos equívocos: na leitura do registro tabular, na leitura do registro gráfico, no conceito de movimento uniforme, bem como na distinção entre posição e distância percorrida. Apesar da maioria ter respondido corretamente ao item, achamos válida uma institucionalização parcial sobre a distinção entre distância percorrida e posição do móvel.

Na atividade 04, concluímos que os enunciados das atividades da sequência didática podem influenciar diretamente as produções, contribuindo para a eficiência das ações cognitivas dos estudantes ou, até mesmo, direcionando para resoluções que divirjam de gabaritos padrões.

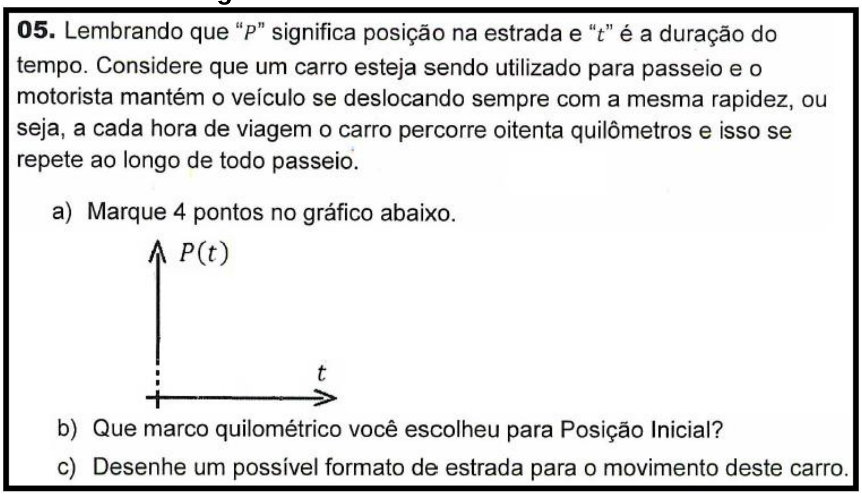
4.5 – Análise da Quinta Atividade

Nossos propósitos com a atividade 05 é apresentar uma situação-problema, *a priori*, apenas na língua materna. Propositalmente, não utilizamos nenhum símbolo numérico com o intuito de não evidenciar destaque no corpo do texto principal da referida atividade.

No primeiro item dessa atividade, pedimos para marcar 4 pontos num plano cartesiano que apresentamos, simplesmente, com os eixos das abcissas e das ordenadas, sem malha quadriculada e sem indicativos numéricos. Em nossas análises preliminares, não encontramos trabalhos que analisaram construções gráficas de função afim a partir, unicamente, da informação da taxa de variação constante.

No segundo item, perguntamos que posição inicial o grupo escolheu. Tentamos provocar desequilíbrios em possíveis equívocos conceituais e provocar o debate visando que observassem se existem possíveis relações entre valor inicial e taxa de variação constante da função afim. Na figura 58, apresentamos a atividade 05 a que nós estamos nos referindo.

Figura 58: Enunciado da atividade 05.



05. Lembrando que "P" significa posição na estrada e "t" é a duração do tempo. Considere que um carro esteja sendo utilizado para passeio e o motorista mantém o veículo se deslocando sempre com a mesma rapidez, ou seja, a cada hora de viagem o carro percorre oitenta quilômetros e isso se repete ao longo de todo passeio.

a) Marque 4 pontos no gráfico abaixo.

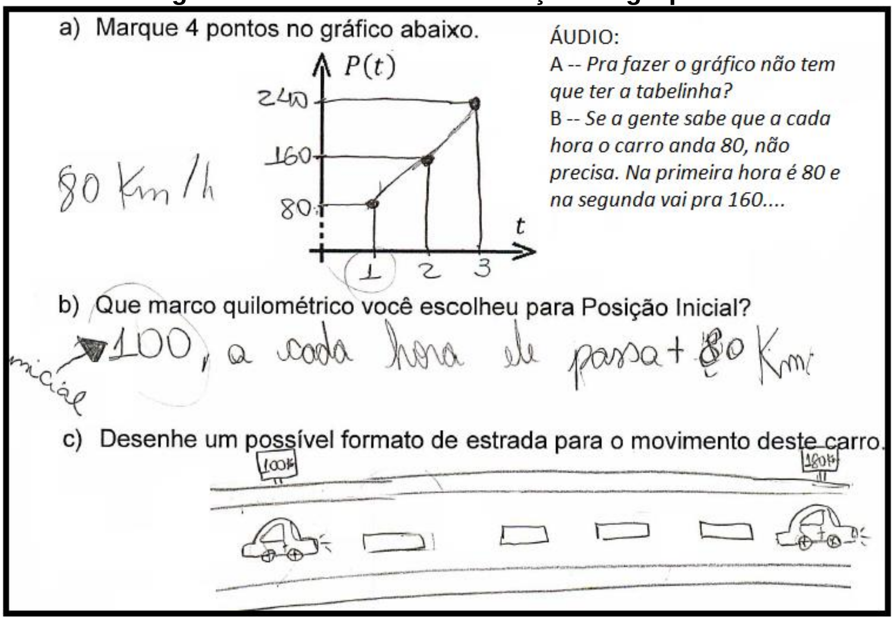
b) Que marco quilométrico você escolheu para Posição Inicial?

c) Desenhe um possível formato de estrada para o movimento deste carro.

Fonte: Autores da pesquisa dos autores.

Na atividade, tivemos 18 produções dos grupos, verificamos que, aproximadamente, a metade vinculou a posição inicial à velocidade constante do móvel e menos da metade escolheu outros valores quaisquer para representar o valor inicial da função. E, por fim, um quantitativo muito pequeno se aproximou de nossa previsão de que a maioria atribuísse zero para a posição inicial. Abaixo, apresentamos uma produção escrita, importante pelo fato de externarem inconsistências de resoluções entre os itens da atividade.

Figura 59: Protocolo de resolução do grupo 11.



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Comparando os três itens produzidos e a transcrição do áudio, inserida na figura acima, observamos que o grupo não percebeu que os pontos que representaram no plano cartesiano estavam associados à posição inicial igual a zero. Fizemos uma intervenção particular nas ações do grupo 11, perguntamos: qual era a posição após meia hora de movimento? E após 15 minutos? E no tempo zero? Rapidamente, o grupo concluiu que regredindo os valores no gráfico que haviam construído chegariam à posição zero quando o tempo fosse zero. Na sequência, perguntamos se a referida posição zero teria alguma "ligação" com a posição inicial inserida na pergunta. Um dos estudantes respondeu que pelo fato de poderem escolher o valor da posição inicial, consequentemente, eles poderiam "chutar" qualquer valor para a posição inicial, independentemente dos pontos que representaram no plano cartesiano. Terminamos nossa intervenção pedindo para que o grupo fizesse uma reflexão sobre possíveis relações entre a posição inicial do carro e o primeiro ponto a ser representado no gráfico.

Analisando a representação ilustrativa do item c), percebemos que o grupo associou a posição inicial à primeira placa que desenharam na rodovia. Apesar de alguns equívocos, verificamos que os estudantes do grupo não vincularam a trajetória ao gráfico que construíram. Processo de desvinculação esse que iniciamos desde a primeira atividade de nossas sessões. Na atividade 01, associamos uma trajetória em formato de “L” com uma tangente ao gráfico de função afim com inclinação positiva, associação que teve como principal objetivo iniciar, mesmo que gradativamente, uma distinção entre trajetória e geometria gráfica. De uma maneira geral, a maioria dos grupos não associou a trajetória do carro à geometria gráfica. Tal fato nos leva a considerar que nosso processo da referida desvinculação foi eficiente.

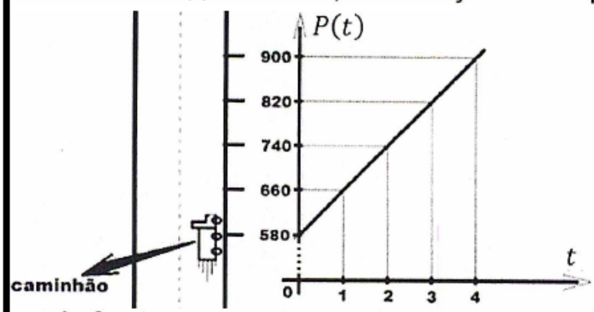
4.6 – Análise da Sexta Atividade

Dando continuidade em nossa escolha pela alternância do registro de representação predominante no enunciado, apresentamos, conforme a figura 60 abaixo, a atividade 06 de nossa sequência didática. Na atividade, a representação predominante é o registro gráfico associado a uma ilustração que representa um caminhão em uma rodovia retilínea. Tentamos, mesmo que de forma implícita, dar margem a uma associação entre as posições do eixo das ordenadas e os marcos quilométricos da estrada.

Com o item a), visávamos que os estudantes vivenciassem situações adidáticas, que possibilitassem uma associação entre posição inicial do móvel e valor inicial da função afim. Como já externamos em nosso trabalho de pesquisa, propusemos inter-relações entre Matemática e Física. No segundo item, buscamos associações entre velocidade do caminhão e taxa de variação constante da função proposta. Esperávamos que a ilustração associada ao gráfico permitiria que a maioria dos grupos considerasse, no item c), que a trajetória seria retilínea. E por fim, com as produções referentes ao último item, seria possível analisar possíveis conversões do registro gráfico para o registro algébrico, com base nesse objetivo, elaboramos uma situação-problema que exigisse a generalização do padrão matemático através de uma função afim.

Figura 60: Enunciado da atividade 06.

06. Um caminhão, completamente carregado, de uma transportadora da região de Dourados (MS) se desloca na rodovia com um movimento representado pelo gráfico ilustrado abaixo. Considere que as Posições são dadas em km (quilômetros) e a duração do tempo é dado em h (horas).



a) Qual a Posição Inicial (P_0), em km, do caminhão?

b) A velocidade do caminhão é constante ou variável? Qual é, em $km/$h, esta velocidade?

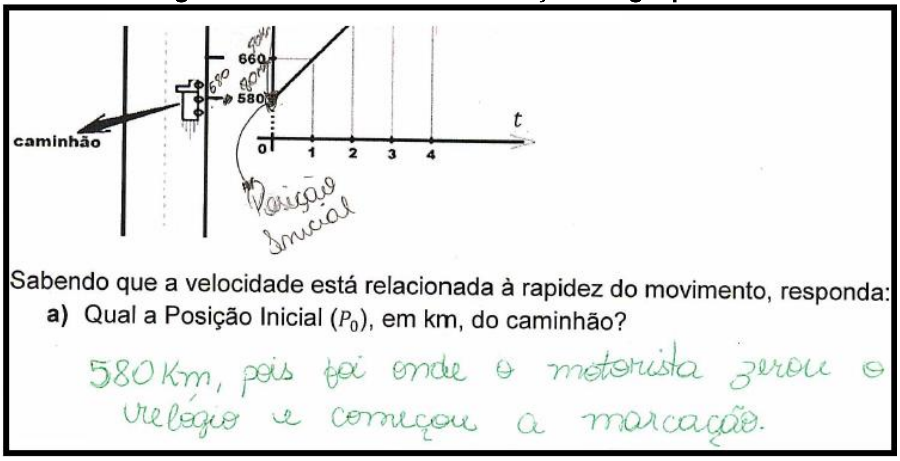
c) Qual a trajetória do caminhão? Ou seja, qual o formato da estrada por onde o veículo está se movendo?

d) Tente escrever uma "fórmula", ou seja, uma equação que represente uma Função que relacione P e t.

Fonte: Autores da pesquisa.

Analisando os protocolos de resoluções da atividade 06, conforme figura 60 anterior, ficou evidente nas produções escritas a contribuição positiva da diversidade de registros. Também ficou clara, em nossas análises, a influência do cotidiano na definição da trajetória. E por fim, a maioria conseguiu produzir um registro algébrico para a situação-problema em questão. Apresentamos a seguir alguns protocolos referentes à atividade 06.

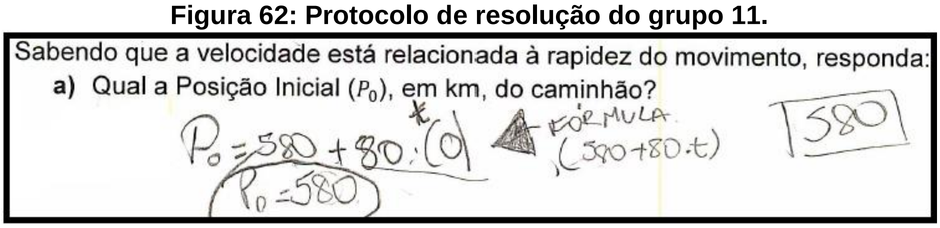
Figura 61: Protocolo de resolução do grupo 06.



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Na sexta atividade, a partir dela, torna-se evidente a evolução de todos os grupos nas atividades adidáticas que contextualizam função afim com Movimento Uniforme. A produção da figura 61, deixa claro que os estudantes do grupo enxergam o início da contagem dos tempos como o marco inicial de um problema de ciências. Nessa etapa de nossas sessões experimentais, já fizemos institucionalizações parciais que exigiram reflexões sobre quando seria o instante que representa o início de um fenômeno que será analisado. Nossas atividades propostas tentam posicionar os estudantes no centro do processo de aprendizagem. Sendo assim, obviamente, expusemos questionamentos para reflexões dos estudantes. Estamos conscientes de que nessa linha de ações adidáticas, o professor mediador não deve perguntar e responder na sequência, pois consideramos que o período de reflexões seja mais importante que a exposição da resposta padrão (correta). A evolução nas leituras e nos registros de representação semiótica também é observada na produção do grupo 11 apresentada na figura 62 abaixo.

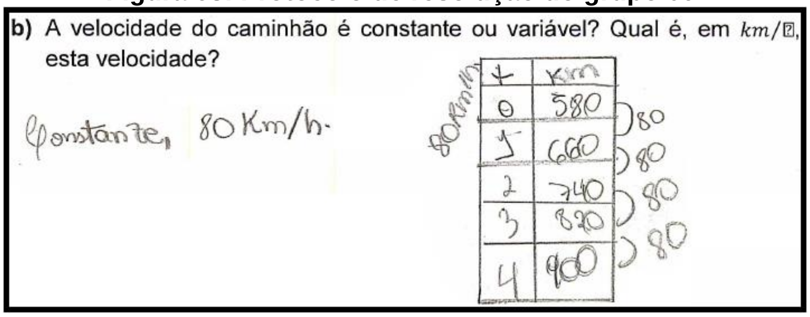
Figura 62: Protocolo de resolução do grupo 11.



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Conforme figura 62, o grupo 11 realizou a conversão do registro gráfico em um registro algébrico equivalente e, posteriormente, substituiu o instante de tempo por zero e, dessa forma, representaram a posição inicial do caminhão. Mesmo sem o indicativo da unidade de medida, o grupo fez considerações coerentes com relação ao instante de tempo associado às condições iniciais do problema. No que tange às inter-relações entre Física e Matemática, a maioria dos grupos ainda não está estabelecendo relações comparativas entre os principais elementos da função afim e do movimento uniforme. Por exemplo, no último protocolo do grupo 11, os estudantes poderiam, simplesmente, associar o valor inicial 580 da função afim à posição inicial do móvel e, da mesma forma, relacionarem a taxa de variação constante 80 à velocidade do caminhão. Como é sabido, nosso foco está ajustado para a diversidade de registros, mas esses fatos nos chamam a atenção sobre elementos importantes que não poderão estar de fora de nossa institucionalização final, como se trata de uma sala de aula normal, não podemos desprezar necessárias reflexões sobre possíveis aprendizagens dos objetos em estudo. A próxima figura contém uma conversão que foi utilizada como subsídio para a resposta do módulo da velocidade.

Figura 63: Protocolo de resolução do grupo 09.


b) A velocidade do caminhão é constante ou variável? Qual é, em $km/$□, esta velocidade?

Constante, 80 Km/h.

80 Km/h

t	Km
0	580
1	660
2	740
3	820
4	900

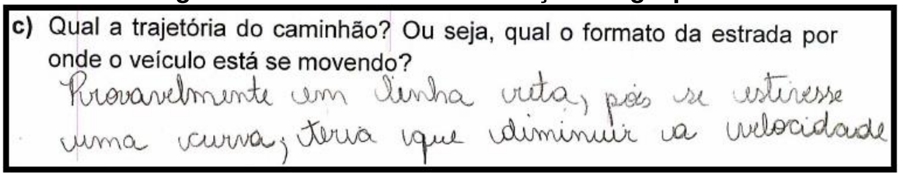
80
80
80
80

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Conforme figura 63, o grupo 09 sentiu necessidade de um registro tabular para responderem o questionamento sobre o módulo da velocidade. Independentemente de haver ou não necessidade do registro tabular para a identificação do módulo da velocidade, a tabela acabou contribuindo para a identificação da taxa de variação constante (velocidade). Entendemos que a **conversão** contribuiu para uma interpretação adequada do registro gráfico.

A seguir, analisaremos as produções referentes à trajetória do caminhão.

Figura 64: Protocolo de resolução do grupo 15.



c) Qual a trajetória do caminhão? Ou seja, qual o formato da estrada por onde o veículo está se movendo?

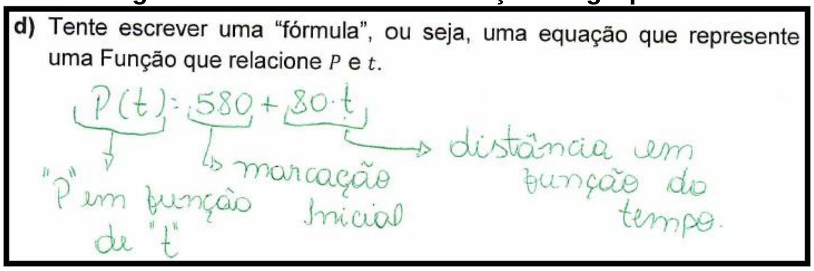
Provavelmente em linha reta, pós se estivesse uma curva, teria que diminuir a velocidade

Fonte: Dados de pesquisa dos autores.

Novamente, conforme a figura 64, percebemos influências de fatos do cotidiano nas produções escritas diante de situações-problema, uma pequena parcela dos grupos considerou trajetórias retilíneas por causa da conclusão de que as distâncias percorridas, em intervalos de uma hora, são iguais, ou seja, identificou um movimento com velocidade constante. Novamente, nosso processo de investigação de possíveis relações entre trajetória e geometria gráfica se deparou com a concepção resistente oriunda dos fatos do cotidiano.

Dentre os 18 grupos, apenas um considerou a trajetória semelhante à geometria gráfica do registro em destaque no enunciado em questão. Com base nas produções escritas e áudios analisados, a maioria considerou a ilustração agregada ao registro gráfico para admitirem trajetórias retilíneas para o movimento do caminhão. Portanto, percebemos que ilustrações agregadas a registros gráficos podem contribuir significativamente com interpretações contextuais de situações-problema. Ou seja, a diversidade de registros pode contribuir com processos de desvinculação entre trajetória e geometria gráfica. E, por fim, analisamos o último item da atividade que propõe aos estudantes uma generalização, com a produção de um registro algébrico, do padrão matemático que possa descrever o movimento do referido caminhão.

Figura 65: Protocolo de resolução do grupo 06.



d) Tente escrever uma "fórmula", ou seja, uma equação que represente uma Função que relacione P e t.

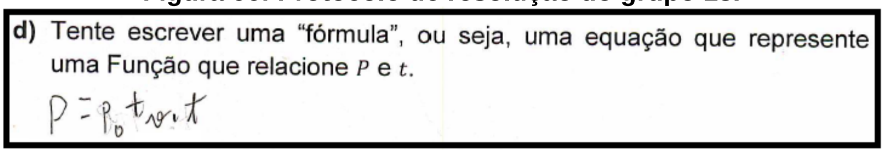
$\underbrace{P(t)}_{\text{"P" em função de "t"}} = \underbrace{580}_{\text{marcação inicial}} + \underbrace{80 \cdot t}_{\text{distância em função do tempo.}}$

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

O protocolo de resolução, que o grupo 06 apresentou, externa com clareza que o grupo interpreta todas as parcelas da função afim, que representa o movimento uniforme em questão, com elementos conceituais que se aproximam com coerência da interpretação do registro gráfico inserido no enunciado. O registro gráfico apresentado na figura 65 mostra uma conversão plenamente adequada, portanto, podemos considerar que no desenvolvimento de nossa sequência didática, nossas análises estão indicando que a diversidade de registros de representação semiótica está contribuindo, significativamente, com interpretações corretas de registros gráficos.

Verificamos em nossa análise, do último item, que quase a totalidade dos grupos escreveu corretamente o registro algébrico que simboliza o movimento em estudo. O quantitativo nos respalda, mesmo que parcialmente, para considerarmos como bom o nível de eficiência de nossa sequência didática. Referindo-nos ao item d), apresentamos, a seguir, uma das produções incompleta na generalização do padrão matemático do movimento em estudo.

Figura 66: Protocolo de resolução do grupo 18.



d) Tente escrever uma "fórmula", ou seja, uma equação que represente uma Função que relacione P e t.

$P = P_0 + v_0 \cdot t$

Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

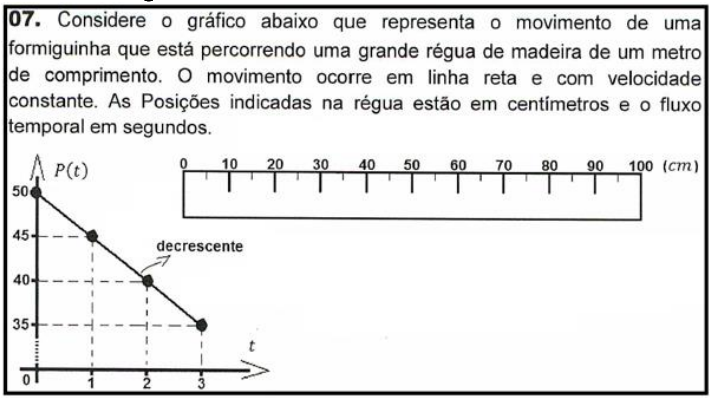
Conforme a figura 66, a resposta apresentada no protocolo do grupo 18 pode ser considerada incompleta por falta de identificação numérica dos valores fixos da função afim. Pelo menos a ordem estrutural dos elementos que compõe a referida função, sem o rigor de notação, pode ser considerada correta. Dentre as 18 produções referentes à atividade 06, apenas duas se apresentaram incompletas conforme esse protocolo.

Verificamos que todos identificaram corretamente a posição inicial e a velocidade do caminhão. Tal fato mostrou que a diversidade de registros desenvolvidos, até então, contribuiu para favorecer interpretações adequadas de registros gráficos. Com relação à trajetória descrita pelo móvel, foi observado que ainda existem produções que associam a velocidade constante a uma trajetória retilínea. Verificamos que a associação anterior se repete entre os mesmos grupos, portanto, podemos considerar que estamos diante de uma concepção resistente. Por outro lado, a maioria dos grupos respondeu que a trajetória era reta sem especificar o porquê. E por fim, quase que a totalidade dos grupos conseguiu generalizar, utilizando-se de um registro algébrico, o padrão matemático que relaciona as posições “P” ocupadas pelo caminhão em função dos instantes de tempo “t”.

4.7 – Análise da Sétima Atividade

Até a atividade 06, trabalhamos com representações gráficas de funções crescentes. Na figura 67, a seguir, propusemos uma possível mudança de estratégia, função decrescente, para tentarmos analisar possíveis interpretações de um “novo” registro gráfico.

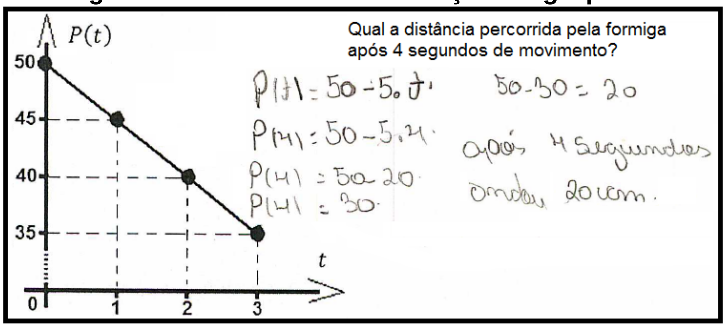
Figura 67: Enunciado da atividade 07.


07. Considere o gráfico abaixo que representa o movimento de uma formiguinha que está percorrendo uma grande régua de madeira de um metro de comprimento. O movimento ocorre em linha reta e com velocidade constante. As Posições indicadas na régua estão em centímetros e o fluxo temporal em segundos.

Fonte: Autores da pesquisa.

Dentre 18 grupos que participaram da atividade, 10 grupos produziram conversões adequadas, ou seja, a maioria correspondeu satisfatoriamente a nossa proposta de mudança de estratégia. Vale destacar que quase a totalidade de nossas atividades estiveram associadas a uma ilustração da situação-problema. Logo, entendemos que a diversidade de representações, novamente, favoreceu interpretações adequadas do movimento uniforme e da função afim. A seguir, apresentamos um protocolo significativo dentro de nossas análises.

Figura 68: Protocolo de resolução do grupo 04.



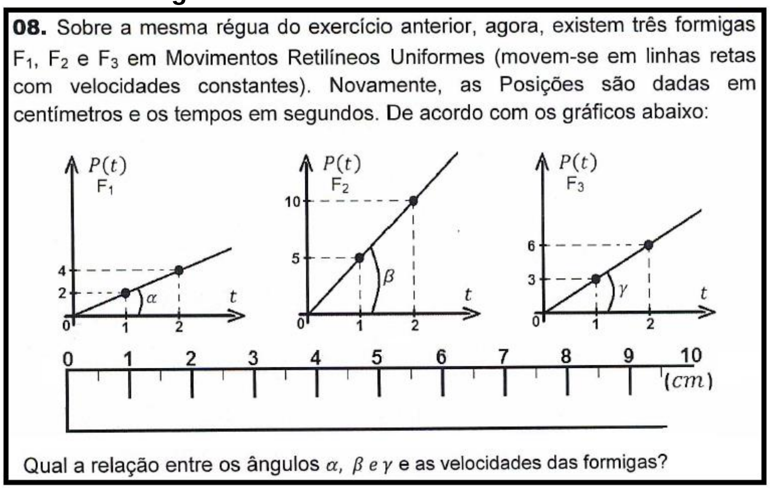
Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Especificamente, o grupo 04 produziu uma **conversão** correta e **tratamentos** adequados que externam o conhecimento da distinção entre posição e distância percorrida que são, a nosso ver, elementos conceituais importantes dentro do objeto movimento uniforme. A conversão e os tratamentos dessa produção justificam interpretações corretas do registro gráfico apresentado, interpretações que podem ter sido influenciadas positivamente pela ilustração anexada.

4.8– Análise da Oitava Atividade

Com o intuito de conduzir os estudantes a uma relação entre módulo de velocidade e inclinação da tangente ao gráfico, com base nos três gráficos que criamos, vide figura abaixo, pedimos, antes da citada relação, que os alunos representassem na régua, da figura 69, as formigas F_1, F_2 e F_3 nos instantes 0, 1 e 2 segundos. Entendemos que a ilustração agregada aos gráficos, seja uma representação que possa contribuir para leituras adequadas das representações gráficas em questão.

Figura 69: Enunciado da atividade 08.



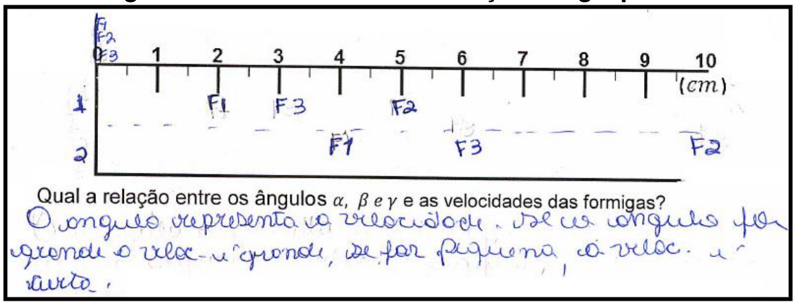
08. Sobre a mesma régua do exercício anterior, agora, existem três formigas F_1, F_2 e F_3 em Movimentos Retilíneos Uniformes (movem-se em linhas retas com velocidades constantes). Novamente, as Posições são dadas em centímetros e os tempos em segundos. De acordo com os gráficos abaixo:

Qual a relação entre os ângulos α, β e γ e as velocidades das formigas?

Fonte: Autores da pesquisa.

Em uma análise geral, dentre 18 produções, tivemos 15 produções que relacionaram, corretamente, a maior inclinação da tangente ao gráfico ao maior módulo da velocidade. Torna-se evidente, a nosso ver, a significativa contribuição de uma representação ilustrativa para leituras de gráficos. Trata-se de um indício de que a diversidade de registros de representação favorece interpretações adequadas de registros gráficos. Apresentamos, a seguir, o protocolo de resolução do grupo 05.

Figura 70: Protocolo de resolução do grupo 05.



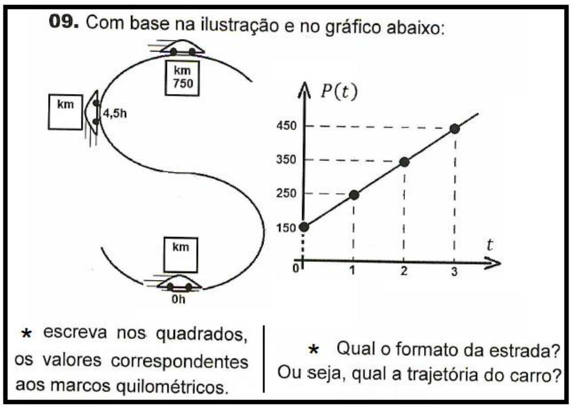
Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Na figura 70, a produção escrita deixou claro que, no instante zero, as formigas iniciam os movimentos juntas na posição zero, no instante 1 segundo já é notório que a F_2 percorreu a maior distância dentre as três e, por fim, após 2 segundos de movimento fica evidente que F_2 se distanciará cada vez mais das duas anteriores. Como quase a totalidade dos grupos, os estudantes do grupo 05 associaram, de alguma forma, o módulo da velocidade de F_2 ao maior ângulo que observaram visivelmente. Pelo que o aluno escreve, na figura 70, parece que ele identifica a velocidade com o ângulo e não com a “tangente do ângulo”. Essa relação parece ainda confusa e de difícil compreensão para eles. Com base na análise, entendemos que a atividade favoreceu a atuação da maioria dos estudantes como protagonistas na produção de subsídios, imprescindíveis, para um ambiente propício para apropriação, mesmo que parcialmente, dos objetos movimento uniforme e função afim. Ficou evidente que durante o desenvolvimento das atividades ocorreram situações adidáticas como propõe a Teoria das Situações Didáticas.

4.9 – Análise da nona atividade

Na figura 71, abaixo, a partir da ilustração e do registro gráfico, destacamos, com asterisco, dois itens de nossa atividade 09, um para analisarmos possíveis tratamentos e conversões e outro que damos continuidade ao processo de desvinculação entre trajetória e geometria gráfica. Aceitamos, como plausíveis, algumas críticas construtivas em relação a possíveis inadequações de perspectivas de nossa ilustração, nossa intenção era de propor uma vista de cima para uma pista horizontal em formato de “S”. As referidas inadequações podem ter contribuído para leituras que, possivelmente, não tenham “aceitado” o movimento do carro como sendo uniforme. Alunos que, mentalmente, admitiram que o carro, em alguns trechos, enfrentou aclives acentuados, devem ter considerado módulos de velocidades variáveis.

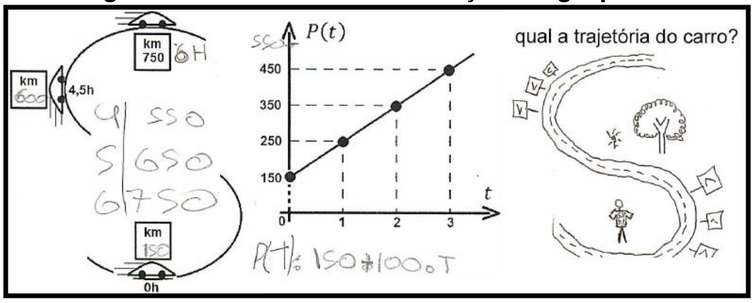
Figura 71: Enunciado da atividade 09.



Fonte: Autores da pesquisa.

Dentre 18 grupos, quase que a totalidade completou corretamente as placas da figura 71, associadas, respectivamente, aos instantes 0 e 4,5 horas. Dentre as produções corretas, aproximadamente a metade desenvolveu conversões e tratamentos. No que se refere à trajetória descrita pelo veículo, a grande maioria respondeu trajetória em formato de “S”. Com relação à perspectiva equivocada representada pela nossa produção, apenas uma produção escrita levou em consideração possíveis aclives na trajetória do veículo. Apesar de termos que repensar sobre importantes detalhes das perspectivas (vista de cima, vista frontal, vista lateral, dentre outras) nas representações de nossas ilustrações, podemos considerar positivas os anexos de ilustrações as situações-problema no que tange aos processos de desvinculação da trajetória à geometria gráfica. Representamos, na figura 72, uma produção que julgamos importante no quadro de nossa análise geral.

Figura 72: Protocolo de resolução do grupo 07.



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

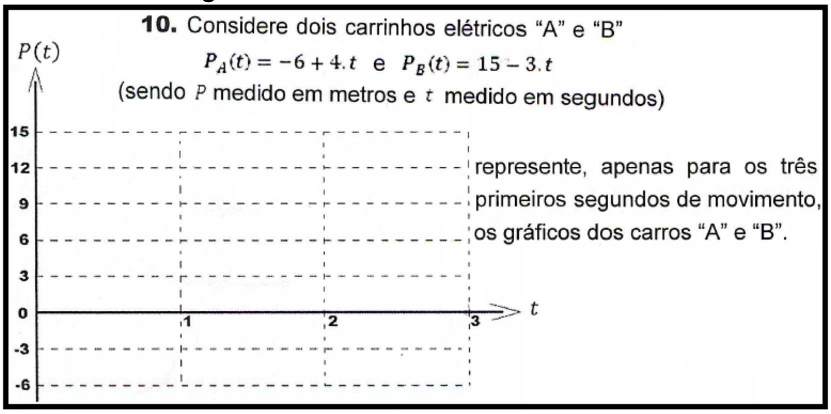
Julgamos importante o protocolo anterior, referente ao grupo 07, porque o mesmo apresenta **duas conversões** (algébrico e tabular) adequadas que, pelo viés da Teoria de Registros de Representação Semiótica, externam indícios de aprendizagens. E apresenta, no questionamento sobre a trajetória, uma clara desvinculação, na leitura do grupo, entre trajetória e representação gráfica da função. Consolida-se cada vez mais, em nossas análises, que a diversidade de representações favorece interpretações adequadas de movimentos uniformes e função afim.

4.10 – Análise da Décima Atividade

Nossa última atividade da sequência didática focaliza, prioritariamente, a questão central de nosso trabalho: **em um meio contextualizado com movimentos uniformes, que contribuições a diversidade de registros de representação semiótica pode trazer para interpretações do movimento uniforme e da função afim?** O principal item, da atividade 10, é a produção de duas curvas de funções afins num único plano cartesiano. A referida produção exige, no mínimo duas conversões para que se verifique, através dos gráficos, o instante de encontro de dois carrinhos que se movem, com movimentos uniformes, em sentidos opostos. Entendemos que a conversão a partir do registro algébrico para o registro gráfico também contribui para a apropriação de leituras e interpretações adequadas de representações envolvendo movimento uniforme e função afim.

Apresentamos, a seguir, uma síntese da atividade 10.

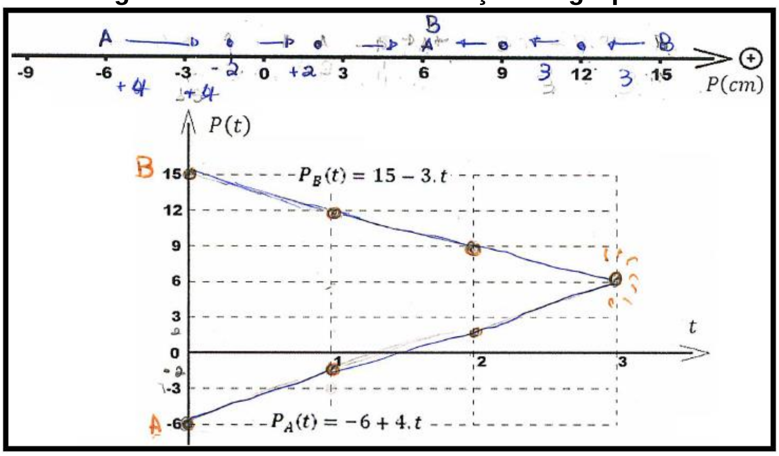
Figura 73: Enunciado da atividade 10.



Fonte: Autores da pesquisa.

Em linhas gerais, dentre 18 protocolos, 11 apresentaram registros gráficos adequados que permitiram identificar o instante de encontro e a posição de encontro dos móveis, dentre esses, 4 por tratamentos a partir dos registros algébricos e 7 por evoluções lógicas de raciocínio, evoluções essas que apresentamos na figura a seguir.

Figura 74: Protocolo de resolução do grupo 05.



Fonte: Dados da pesquisa dos autores.

Um exemplo das evoluções lógicas que nos referimos está representada na figura 74. Antes das produções das curvas, pedimos para que os estudantes representassem, sobre uma semirreta, os dois carrinhos no instante inicial do movimento. A maioria das produções corretas, dessa atividade 10, foi evoluindo de segundo em segundo, a partir da posição inicial, e concluíram que o referido encontro ocorre 3 segundos após o instante inicial. Nessa atividade, verificamos que apenas três grupos buscaram as validações dos resultados substituindo o instante 3 segundos nos registros algébricos fornecidos pelo enunciado. Apesar da considerável complexidade da atividade, consideramos satisfatórias as conversões e tratamentos que sinalizaram relações corretas entre os registros gráficos e algébricos em questão. Ou seja, a diversidade de registros contribuiu para leituras adequadas das funções afins contextualizadas por movimentos uniformes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em um meio contextualizado com movimentos uniformes, que contribuições a diversidade de registros de representação semiótica pode trazer para interpretações do movimento uniforme e da função afim? Trata-se de nossa questão central de pesquisa. O questionamento tem origem em nossos estudos preliminares e, principalmente, em anos de frustações de análises de produções escritas (correções de provas). Em, pelo menos 15 anos de sala de aula, mostraram-se evidentes, por parte dos estudantes, interpretações inadequadas de registros gráficos.

A partir dessa evidência, a proposta de nosso trabalho foi inter-relacionar Física e Matemática, envolvendo registros de representação semiótica. Nossas primeiras reuniões direcionaram nossos objetivos para análises de dificuldades com tratamentos e conversões relacionadas a uma diversidade de registros. Entretanto, durante o desenvolvimento da pesquisa, reajustamos nosso foco para análises de tratamentos e conversões num contexto de funções afins em movimentos uniformes. Em um meio, intencionalmente, preparado para favorecer análises de interpretações de registros gráficos, investigamos também possíveis relações entre trajetórias e geometrias gráficas de funções.

Desde a preparação do “meio” didático (pré-experimentação), que foi proposta com o intuito de ampliar subsídios dentro de nossos estudos preliminares, verificamos, por parte dos estudantes, uma sobrevalorização de análises proporcionais (“regra de três simples”), em muitos casos, sem a vinculação, necessária, entre representações numéricas e unidades de medidas. Assim, a referida experimentação preliminar (preparação do “meio” didático) sinalizou a necessidade de possíveis intermediações, para a sala como um todo, entre sessões consecutivas do desenvolvimento de nossa sequência didática, intermediações essas que denominamos por institucionalizações parciais.

Nas interações dos estudantes com o “meio” didático, as institucionalizações parciais podem ter contribuído, positivamente, para provocar conflitos e acomodações. Observamos que a maioria dos **tratamentos**

adequados que foram produzidos, atingiram rigorosidade de notações por intermédio de institucionalizações parciais. Dessa forma, permitimos a constituição, gradativa, de uma diversidade de registros de representação para interpretações da função afim em movimentos uniformes (objeto de pesquisa). Acreditamos que uma única institucionalização final não teria o mesmo efeito nos processos de apropriação do objeto que estudamos. Podemos dizer que institucionalizações parciais oxigenam reflexões dos estudantes e também provocam mudanças no “meio” didático.

Diversificamos os registros de representação semiótica e verificamos que a alternância deles pode ser explorada dentro de situações adidáticas, pois essa alternância favoreceu mudanças nas estratégias de resoluções das atividades propostas. Na sequência de atividades que elaboramos, constituída por situações-problema de Física, a mudança de um registro para outro pode favorecer ou não interpretações adequadas de situações-problema.

Em nossas análises, o que se mostrou eficiente, no que tange a indícios de aprendizagens, na perspectiva de Raymond Duval, foi a diversidade de registros inserida na exploração de situação-problema. Pelo viés da Teoria das Situações Didáticas, propusemos situações adidáticas de tal forma que uma diversidade de representações semióticas permitiu tratamentos e conversões adequadas. A partir de produções protocoladas pelos estudantes, podemos considerar que a apropriação de mais de um registro de representação pode ser um indício de aprendizagem do objeto matemático função afim no contexto do movimento uniforme.

A maioria das produções escritas mostraram-nos associações coerentes entre elementos do movimento uniforme com suas representações correspondentes na função afim. Esse fato se mostrou evidente na identificação do valor inicial da função afim com posição inicial do movimento do móvel, na taxa de variação constante da função com a velocidade constante do móvel, bem como a maior inclinação da tangente ao gráfico com o maior módulo da velocidade. As referidas associações são fortes indícios de apropriações de elementos fundamentais de nosso objeto de estudo.

Em nossos estudos preliminares encontramos resultados de pesquisas que mostraram que os estudantes encontram dificuldade em construírem registros algébricos a partir de registros gráficos. Durante a aplicação de nossa sequência de atividades, por meio da exploração de uma multiplicidade de registros, foi possível observar a realização, pela maioria dos grupos, de conversões adequadas do registro gráfico para o registro algébrico. Novamente, foi possível observar a importância da diversidade de registros nas interpretações tanto do movimento uniforme quanto da função afim.

Apesar de ser minoria, observamos produções escritas que associam o registro tabular, unicamente, ao registro gráfico, ou seja, que não estabelecem conexões com movimentos do cotidiano. Consideramos que exercícios repetitivos, ao longo dos anos escolares, num sentido único (do registro tabular para o gráfico), podem induzir a interpretações limitadas dos registros tabulares, pois informações contidas numa tabela podem proporcionar diversas interpretações conceituais sobre as grandezas relacionadas numa função.

A análise dos dados de nossa pesquisa nos forneceu subsídios para considerar que a identificação da taxa de variação constante de uma função não depende, necessariamente, de uma interpretação de um registro algébrico. Observamos que diante de situações-problema a referida identificação aparece, predominantemente, por análises proporcionais, cálculos mentais e, por fim, como tratamentos e conversões envolvendo registros algébricos.

Não caracterizamos como inadequadas as produções que apresentam resoluções por análises proporcionais, mas observamos que a ausência das unidades de medidas pode tornar-se um agravante, pois se limitar às análises de relações entre números pode dificultar a análise das interpretações dos alunos.

Equívocos externados por muitos estudantes, vivenciado pelo autor desta dissertação e também detectado nos estudos preliminares, são associações entre trajetória do movimento e o gráfico da função correspondente. Apesar de alguns equívocos de perspectivas na planificação de ilustrações de situações tridimensionais, pelas análises dos dados produzidos em nossa pesquisa, podemos considerar influências satisfatórias de ilustrações associadas a registros gráficos com o objetivo de provocar reflexões que visariam a desvinculação do equívoco citado.

Percebemos, também, em nossas análises, influências do cotidiano nas propostas de soluções para situações-problema. Para alguns grupos, em mais de uma situação-problema, a velocidade constante está, obrigatoriamente, associada à trajetória retilínea. Podemos, pois, admitir que estamos diante de uma concepção resistente, que talvez possa se constituir num obstáculo didático no sentido de Brousseau.

As propostas de investigações de dificuldades e de aprendizagens de conceitos matemáticos, com base na Teoria de Registros de Duval, devem considerar uma multiplicidade de registros de representação semiótica, bem como possíveis tratamentos e conversões entre eles. Em propostas de inter-relações entre Matemática e Física, mostrou-nos evidente que a referida diversidade de registros amplia a possibilidade, por parte dos estudantes, de interpretações plausíveis de registros gráficos de funções em movimentos uniformes. E ainda, de acordo com o desenvolvimento das produções escritas, verificamos que o acompanhamento das ações pelo profissional da educação e oportunas intermediações em situações adidáticas são imprescindíveis para o sucesso num ambiente de aprendizagem.

Entendemos que a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, na perspectiva de Raymond Duval, com algumas adaptações, pode contribuir para a identificação de aprendizagens de outras áreas, dentro das ciências exatas, que transcendem os limites de uma Matemática fechada em objetos conceituais abstratos.

Por fim, almejamos que algumas considerações desta pesquisa possam incitar novas reflexões entre pesquisadores/professores que trabalham com esses temas. E, que de algum modo, estejam pré-dispostos a reconsiderar a arte de criar situações didáticas de ensino e aprendizagem, bem como considerar novas, possíveis, variáveis no funcionamento cognitivo de seus estudantes, no que concerne, principalmente, aos registros de representação semiótica.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A.; SILVA, M. J. F. ***Engenharia didática: evolução e diversidade.*** Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 22-52, 2012.

ARTIGUE, M. ***Engenharia Didática.*** In: BRUN, ***J. Didáctica das Matemáticas***, Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ARTIGUE, M. ***Ingénierie Didactique. Recherches En Didactique Des Mathématiques***, vol. 9, nº 3, pp. 281-307. Grenoble: La Pensée Sauvage,1990.

BITTAR, M. ***Contribuições Da Teoria Das Situações Didáticas E Da Engenharia Didática Para Discutir O Ensino De Matemática***. (No prelo).

BRASIL. ***PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.*** Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques***. Recherches en Didactiques des Mathématiques.*** Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 7, n. 2, p.33-115, 1986, *apud* FREITAS, 2008.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. ***Reflexões em Torno da Representação Semiótica na Produção do Conhecimento.*** Educ. Mat. Pesqui., São Paulo, v. 9, n. 2, pp. 181-203, 2007.

COLOMBO, J. A. A.; FLORES, C. R.; MORETTI, M. T. ***Registros de Representação Semiótica nas Pesquisas Brasileiras em Educação Matemática: pontuando tendências. (análise das pesquisas realizadas no Brasil no período de 1990 a 2005)***. ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp – v. 16 – n. 29 – jan./jun. – 2008.

COLOMBO, J. A. A.; BUEHRING, R. S.; MORETTI, M. T. ***Registros de Representação Semiótica, Tarefas e Análise de Dados: articulações em torno do currículo de matemática.*** REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática. 91 V4.8, p.90-113, UFSC: 2009.

CURI, E.; SANTOS, C. A. B. ***A Mobilização de Conhecimentos Matemáticos no Ensino de Física.*** XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil, p. 09, 2011.

CURI, E.; SANTOS, C. A. B.. ***Registros de Representação Semiótica e suas Contribuições para o Ensino de Física.*** Ensaio **|** Belo Horizonte **|** v.14 **|** n. 03 **|** p. 85-95 **|** set-dez **|** 2012.

CURI, E.; SANTOS, C. A. B.. ***Um Estudo sobre os Cursos de Formação de Professores que Ensinam a Disciplina de Física no Ensino Médio.*** REVEMAT, eISSN 1981-1322, Florianópolis (SC), v. 06, n. 2, p. 1-18, 2011.

DUVAL, R. ***Aprendizagens intelectuais.*** Caderno do curso ministrado na PUC-SP, Fevereiro de 1999.

DUVAL, R. ***Entrar no Modo Matemático de Pensar: os registros de representações semióticas.*** In: CAMPOS, T. M. M. (Org.). ***Ver e Ensinar Matemática de Outra Forma****.* São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. ***Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. Aprendizagem em Matemática.*** Ed. Papirus, 2003, p.11 – 34.

DUVAL, R. ***Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo do Pensamento.*** Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática. eISSN 1981 1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, 2012. Tradução: Méricles Thadeu Moretti.

DUVAL, R. ***Sémiosis et Pensée Humaine. Registres Semiotiques et Apprentissages Intellectuels.*** Peter Lang. S.A. Suisse: Editions scientifiques européennes, 1995.

FREITAS, J. L. M. ***Teoria das Situações Didáticas.*** In: MACHADO, S. D. A. (Org). ***Educação Matemática Uma (nova) Introdução****.* 3.ed.rev. São Paulo: Educ, 2008. p. 77-109. (Trilhas)

GURGEL, T. ***Guy Brousseau: o pai da didática da Matemática****.* Revista Nova Escola, São Paulo: Editora Abril, edição 219, p. 28-32, jan/fev, 2009.

MAGGIO, D. P., SOARES, M. A. S., NEHRING, C. M. ***Registros de Representação Semiótica da Função Afim: análise de livros didáticos de matemática no ensino médio****.* Revemat, Florianópolis, V. 05. Nº 1. P. 38-47. 2010.

MION, R.A., ***Investigação-ação e a formação de professores em física: o papel da intenção na produção do conhecimento científico***. Tese de Doutorado, UFSC, 2002.

NEVES, K.C.R. ***Um exemplo de transposição didática: o caso das matrizes*****.** 2009. 164p. Dissertação de Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática – Universidade Estadual de Maringá, Maringá (PR).

OLIVEIRA, N. ***"Conceito de Função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem"***, Dissertação de Mestrado, PUC-SP, 1997.

PACCA, J. L. A.; ZUFFI, E. M. ***O Conceito de Função e sua Linguagem para os Professores de Matemática e de Ciências.*** Ciência & Educação, v.8, nº1, p.1 – 12, 2002.

PAIS, L. C. ***Didática Francesa da Matemática****.* Belo Horizonte. Editora Autêntica, 2001.

PEIRCE, C. S. ***Semiótica e Filosofia.*** São Paulo: Editora Cultrix, 1972.

TRINDADE, J.A.O., **Os obstáculos epistemológicos e a educação matemática**. Dissertação de Mestrado. UFSC, 1996.

VALENTE, W. R. ***História da Educação Matemática: interrogações metodológicas****,* REVEMAT **-** Revista Eletrônica de Educação Matemática. V2.2, p.28-49, UFSC: 2007.

VÁZQUEZ, P. S.; REY,G.; BOUBÉE C. ***El Concepto de función através de la Historia****.* Revista Iberoamericana de Educación Matemática. N. 16, p. 141 – 155, 2008.

ANEXO 01

Tabela 1. Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática.

Competências	Habilidades
Representação e Comunicação	• Ler e interpretar textos de Matemática; • Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões, etc); • Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica • (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa; • Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta; • Produzir textos matemáticos adequados; • Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação; • Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.
Investigação e Compreensão	• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões, etc); • Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema; • Formular hipóteses e prever resultados; • Selecionar estratégias de resolução de problemas; • Interpretar e criticar resultados numa situação concreta; • Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos; • Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades; • Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.
Contextualização Sociocultural	• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real; • Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento; • Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade; • Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

Fonte: BRASIL. MEC. PCNEM. Brasília: Ministério da Educação, 2002. p. 46.

Tabela 2. Competências e habilidades a serem desenvolvidas em Física.

Competências	Habilidades
Representação e Comunicação	• Compreender enunciados que envolvam códigos e símbolos físicos. Compreender manuais de instalação e utilização de aparelhos; • Utilizar e compreender tabelas, gráficos e relações matemáticas gráficas para a expressão do saber físico. Ser capaz de discriminar e traduzir as linguagens matemática e discursiva entre si; • Expressar-se corretamente utilizando a linguagem física adequada e elementos de sua representação simbólica. Apresentar de forma clara e objetiva o conhecimento apreendido, através de tal linguagem; • Conhecer fontes de informações e formas de obter informações relevantes, sabendo interpretar notícias científicas; • Elaborar sínteses ou esquemas estruturados dos temas físicos trabalhados.
Investigação e Compreensão	• Desenvolver a capacidade de investigação física. Classificar, organizar, sistematizar. Identificar regularidades. Observar, estimar ordens de grandeza, compreender o conceito de medir, fazer hipóteses, testar; • Conhecer e utilizar conceitos físicos. Relacionar grandezas, quantificar, identificar parâmetros relevantes. Compreender e utilizar leis e teorias físicas; • Compreender a Física presente no mundo vivencial e nos equipamentos e procedimentos tecnológicos. Descobrir o "como funciona" de aparelhos; • Construir e investigar situações-problema, identificar a situação física, utilizar modelos físicos, generalizar de uma a outra situação, prever, avaliar, analisar previsões; • Articular o conhecimento físico com conhecimentos de outras áreas do saber científico.
Contextualização Sociocultural	• Reconhecer a Física enquanto construção humana, aspectos de sua história e relações com o contexto cultural, social, político e econômico; • Reconhecer o papel da Física no sistema produtivo, compreendendo a evolução dos meios tecnológicos e sua relação dinâmica com a evolução do conhecimento científico; • Dimensionar a capacidade crescente do homem propiciada pela tecnologia; • Estabelecer relações entre o conhecimento físico e outras formas de expressão da cultura humana; • Ser capaz de emitir juízos de valor em relação a situações sociais que envolvam aspectos físicos e/ou tecnológicos relevantes.

Fonte: BRASIL. MEC. PCN. Brasília: Ministério da Educação, 2002. p. 237.

ANEXO 02

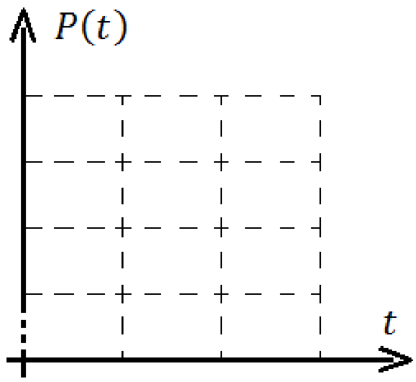
SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

01. Para entendermos o movimento de um carro devemos saber como a Posição “P” vai mudando com o passar do Tempo “t”. A velocidade está relacionada à rapidez de mudanças das Posições. Vamos supor que $\boldsymbol{P(t) = 200 + 80.t}$ seja a “fórmula” que representa a Função que fornece informações sobre as alterações das Posições com o passar do tempo, sendo km (quilômetro) a unidade de P e h (hora) a unidade de t. Chamamos por P_0 a Posição inicial que o carro ocupa na estrada quando o cronômetro é zerado, ou seja, em $t_0 = 0$ (instante inicial, quando o movimento começa a ser estudado). Com base nestas informações:

a) Complete a tabela abaixo e marque os pontos correspondentes no plano cartesiano ao lado da tabela.

$$P(t) = 200 + 80.t$$

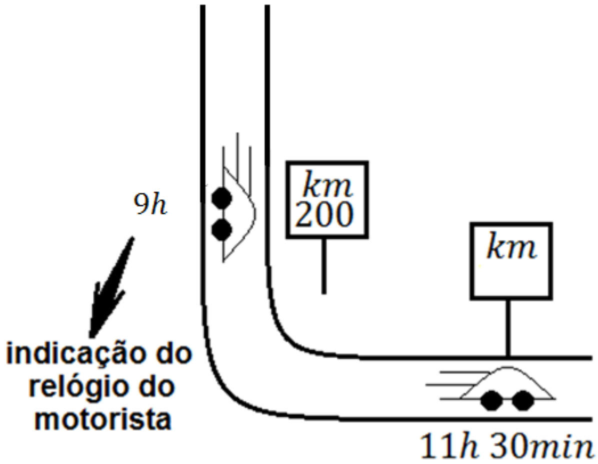
$P(t)$ km	t h
	0
	1
	2
	3



b) É possível que marquemos muitos pontos entre os pontos já marcados anteriormente? Qual seria a tendência?

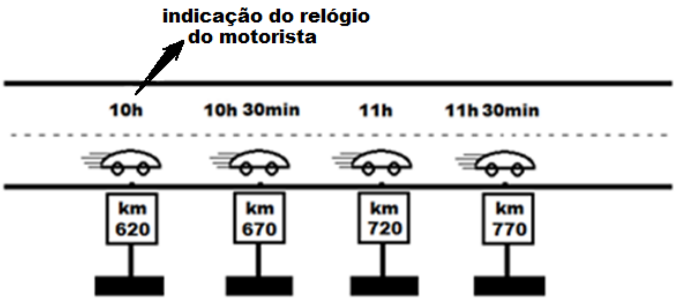
c) Qual o valor numérico que representa a velocidade, em km/h, do referido carro?

d) Na ilustração abaixo, escreva dentro da placa a direita o marco quilométrico que indica a posição do carro correspondente às $11h\ 30min$ do relógio do motorista.



e) Qual a trajetória descrita pelo movimento do carro, ou seja, qual o formato da estrada por onde o carro se move?

02. A figura ilustrativa de física abaixo representa o movimento de um carro de luxo numa rodovia brasileira. Supondo que a velocidade seja sempre a mesma:



a) Preencha a tabela abaixo.

$P(t)$ km				
t h	**0**	**1**	**2**	**3**

b) Que marco quilométrico você escolheu para que seja a Posição Inicial deste movimento?

c) Qual é o valor numérico, em km/h, que representa a velocidade do carro?

d) Quanto tempo o carro gasta para percorrer 120 km?

e) Existe um padrão matemático que se repete? Você conseguiria escrever uma "fórmula" que relacione as Posições "P" com as durações de tempo "t"? (pode-se usar como referência a "fórmula" que apareceu no enunciado da questão anterior)

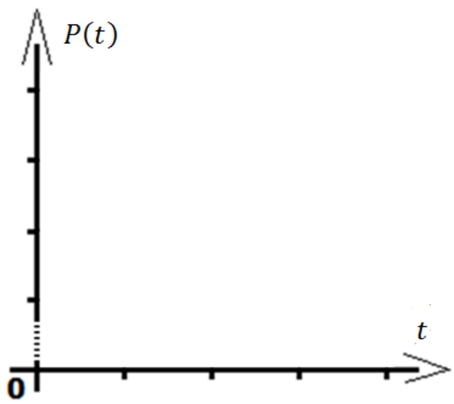
03. Um ônibus de transporte de passageiros está quebrado no acostamento de uma rodovia. Supondo que o ônibus irá se mover sempre com velocidade constante, apresentamos a seguir uma equação algébrica, ou seja, uma fórmula que representa a função que relaciona os marcos quilométricos (P) da rodovia e a duração do tempo (t) de viagem logo após o conserto do ônibus: $\boldsymbol{P(t) = 360 + 90.t}$, sendo P medido em "km" e t medido em "h".

a) Qual a Posição Inicial (P_0), em km, do ônibus?

b) Qual é, em km/h, a velocidade do ônibus?

c) É possível dizer como é o "formato" da rodovia? Ou seja, é possível dizer qual a trajetória descrita pelo ônibus? Justifique sua resposta.

d) Utilizando o plano cartesiano abaixo, converta a fórmula que aparece no enunciado em um gráfico.

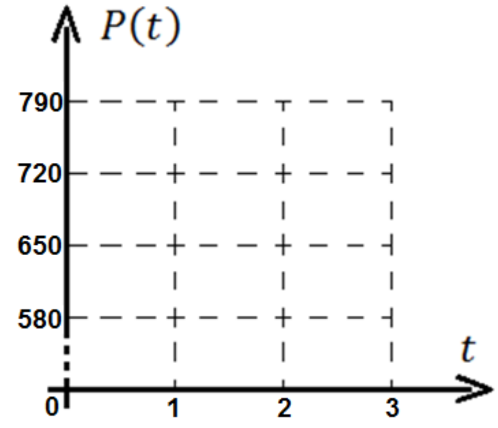


04.

a) Tomando como referência as relações da tabela abaixo, crie um texto correspondente ao movimento cujos dados constam na tabela.

$P(t)$ km	t h
580	0
650	1
720	2
790	3

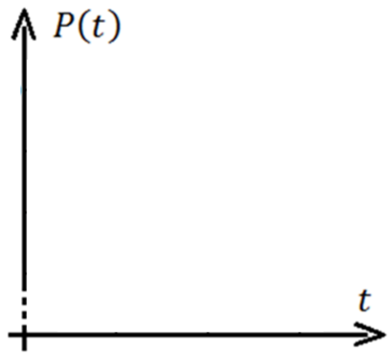
b) Marque os pontos da tabela no gráfico abaixo.



c) Qual a distância percorrida nas duas primeiras horas de movimento?

05. Lembrando que "P" significa posição na estrada e "t" é a duração do tempo. Considere que um carro esteja sendo utilizado para passeio e o motorista mantém o veículo se deslocando sempre com a mesma rapidez, ou seja, a cada hora de viagem o carro percorre oitenta quilômetros e isso se repete ao longo de todo passeio.

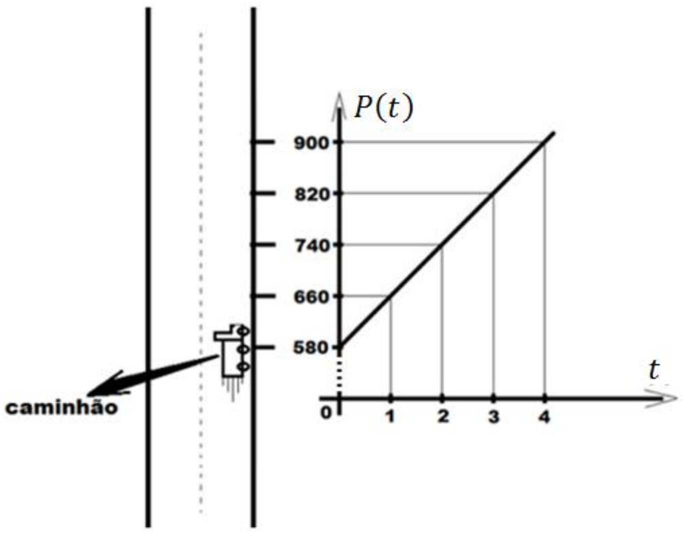
a) Marque 4 pontos no gráfico abaixo.



b) Que marco quilométrico você escolheu para Posição Inicial?

c) Desenhe um possível formato de estrada para o movimento deste carro.

06. Um caminhão, completamente carregado, de uma transportadora da região de Dourados (MS) se desloca na rodovia com um movimento representado pelo gráfico ilustrado abaixo. Considere que as Posições são dadas em km (quilômetros) e a duração do tempo é dado em h (horas).



Sabendo que a velocidade está relacionada à rapidez do movimento, responda:

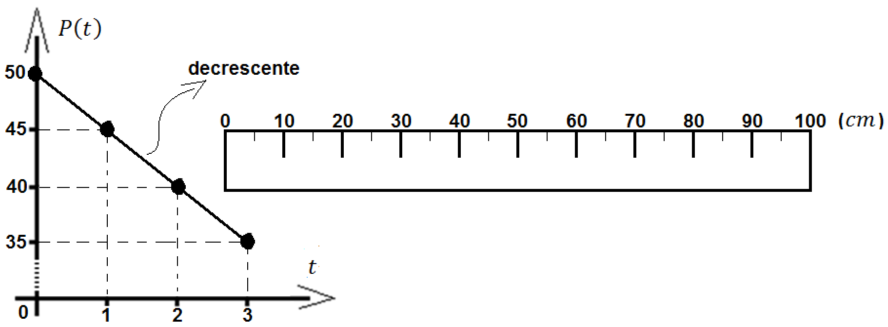
a) Qual a Posição Inicial (P_0), em km, do caminhão?

b) A velocidade do caminhão é constante ou variável? Qual é, em km/h, esta velocidade?

c) Qual a trajetória do caminhão? Ou seja, qual o formato da estrada por onde o veículo está se movendo?

d) Tente escrever uma "fórmula", ou seja, uma equação que represente uma Função que relacione P e t.

07. Considere o gráfico abaixo que representa o movimento de uma formiguinha que está percorrendo uma grande régua de madeira de um metro de comprimento. O movimento ocorre em linha reta e com velocidade constante. As Posições indicadas na régua estão em centímetros e o fluxo temporal em segundos.



a) Represente por uma bolinha a formiga sobre a régua no início da contagem dos tempos. Desenhe a formiga em três posições diferentes e indique a duração do tempo ao lado de cada Posição.
b) Qual a Posição Inicial (P_0), em cm, da formiga?

c) Qual o valor numérico que representa a intensidade da velocidade da formiga?

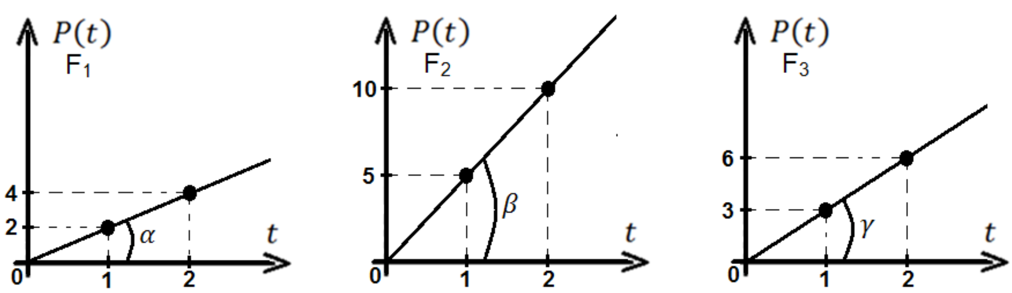
d) Qual a distância percorrida pela formiga após 4 segundos de movimento?

e) O que mudaria no movimento da formiga se o gráfico fosse crescente?

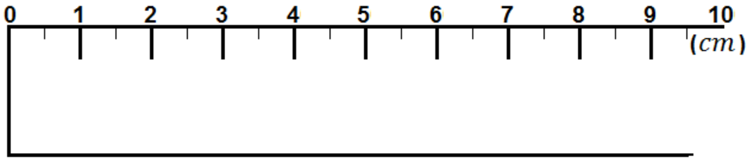
f) Como é a trajetória que a formiga percorreu?

g) Tente escrever uma "fórmula", ou seja, uma equação que represente a Função que relacione P e t.

08. Sobre a mesma régua do exercício anterior, agora, existem três formigas F_1, F_2 e F_3 em Movimentos Retilíneos Uniformes (movem-se em linhas retas com velocidades constantes). Novamente, as Posições são dadas em centímetros e os tempos em segundos. De acordo com os gráficos abaixo:



a) Represente, numa ampliação de um trecho da régua, as três formigas F_1, F_2 e F_3 nos instantes 0, 1 e 2 segundos.



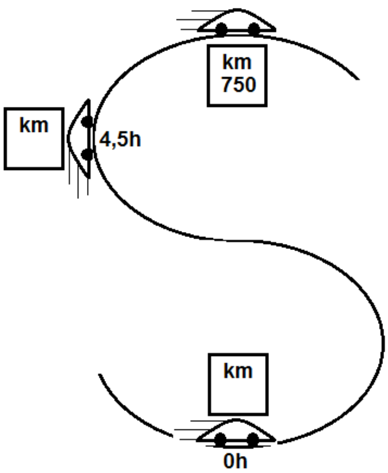
b) Qual formiga desenvolve maior velocidade?

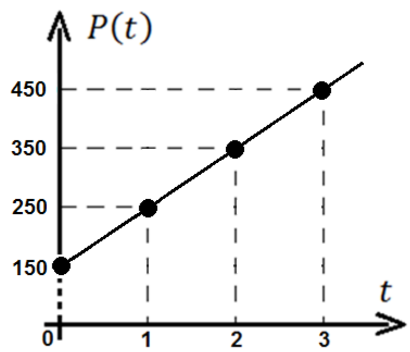
c) Qual a relação entre os ângulos $\alpha,\ \beta\ e\ \gamma$ e as velocidades das formigas?

d) As funções correspondentes aos gráficos do enunciado são crescentes ou decrescentes? Qual a relação deste fato com o movimento das formigas?

e) Lembrando que o comprimento total da régua é de um metro, quando a formiga mais rápida chegar ao final da régua, quanto tempo ainda falta para que a formiga mais lenta também conclua o percurso?

09. Com base no gráfico e na ilustração abaixo:





a) Escreva nos quadrados, próximos aos carros, os valores dos marcos quilométricos.

b) Escreva próximo ao carro de cima o tempo de duração da viagem até ao marco quilométrico 750.

c) Qual a distância percorrida pelo carro após quatro horas e meia de viagem.

d) Qual o valor numérico que representa a velocidade do carro?

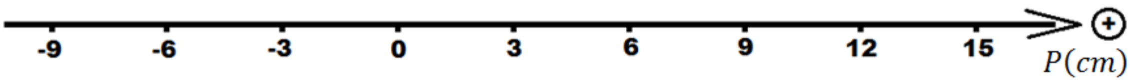
e) Qual o formato da estrada? Ou seja, qual a trajetória do carro?

10. Considere dois carrinhos elétricos “A” e “B” cujos movimentos seguem as equações algébricas seguintes: $\boldsymbol{P_A(t) = -6 + 4.t}$ e $\boldsymbol{P_B(t) = 15 - 3.t}$ (sendo P medido em metros e t medido em segundos).

a) O que significa o -6 da equação de “A”?

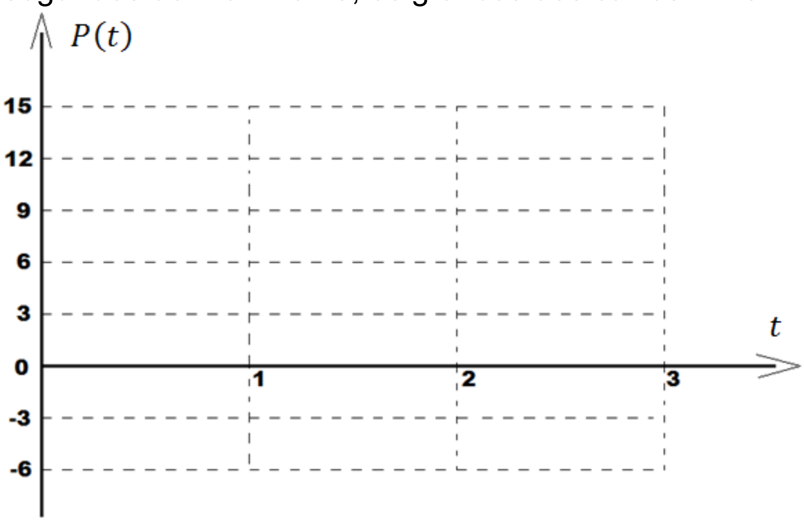
b) O que significa o +4 da equação de “A”? E o que significa o -3 da equação de “B”? Por que possuem sinais contrários?

c) Representem, no instante inicial ($t_0 = 0s$), os dois carros na “estrada” abaixo e indique o sentido de movimento de cada um. (Pode representá-los por uma bolinha ligada a uma seta que indique o sentido do movimento)



d) Os carros se encontrarão? Se a resposta for afirmativa, após quanto tempo e em que posição “P” acontecerá à colisão?

e) No plano cartesiano abaixo, represente, apenas para os três primeiros segundos de movimento, os gráficos dos carros “A” e “B”.



f) Os dois gráficos são crescentes? Justifique.