UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Páblo Carcheski de Queiroz

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO ARTICULANDO AS LINGUAGENS ALGÉBRICA E GEOMÉTRICA

Campo Grande - MS
2014

Páblo Carcheski de Queiroz

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO ARTICULANDO AS LINGUAGENS ALGÉBRICA E GEOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.
Orientadora: Profª. Dra. Marilena Bittar

Campo Grande - MS

2014

Páblo Carcheski de Queiroz

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO ARTICULANDO AS LINGUAGENS ALGÉBRICA E GEOMÉTRICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática**.**

Campo Grande, MS, Abril de 2014.

COMISSÃO EXAMINADORA

Profa. Dra. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Prof. Dra. Gladys Denise Wielewski
Universidade Federal de Mato Grosso

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Dedico este trabalho àqueles que me apoiaram em todos os momentos, meus pais, minha esposa e meus amigos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter me propiciado viver essa experiência e amparado sempre que necessário.

A Marilena Bittar, professora e orientadora, pelo ensinamento, compreensão e muita paciência.

Aos professores que compõem a banca, Gladys Denise Wielewski, José Luiz Magalhães de Freitas e Márcio Antônio da Silva pelas contribuições na construção desse trabalho.

Aos demais professores do Programa, pelo incentivo, apoio e ensinamentos.

As minhas colegas de orientação, Danieli e Katiane, pelos momentos de discussões que enriqueceram esse trabalho.

A minha família e aos meus amigos.

Aos diretores das Escolas Osvaldo Cruz e Prof. Vanderlei Rosa de Oliveira.

Em especial aos meus pais e minha esposa, pelo amor e compreensão.

A CAPES, pelo auxílio financeiro.

RESUMO

Esta pesquisa teve por objetivo investigar o processo de aprendizagem de função por alunos do 9º ano do ensino fundamental por meio de situações didáticas que permitem a articulação entre a álgebra e a geometria analítica. Para tanto elaboramos uma sequência didática, nos moldes da Engenharia Didática, pautada em resultados de estudos de documentos e de pesquisas que fornecem um panorama do ensino e das dificuldades na aprendizagem do conceito de função, bem como possibilidades de superação dessas. Esses documentos compõem, juntamente com a Teoria das Situações Didáticas e a Teoria de Registros de Representação Semiótica, o nosso referencial teórico. A aplicação dessa sequência didática foi realizada em uma escola pública da rede municipal de Campo Grande/MS. Constatamos que as situações propostas e a mobilização de diferentes representações para o conceito possibilitaram a esses alunos observar a variação entre grandezas e a relação entre elas para construir diferentes estratégias de resolução, o que contribuiu tanto para a mobilização quanto para a construção de conceitos.

Palavras-chave: Engenharia Didática. Registros de Representação Semiótica. Situações *adidáticas*. Aprendizagem.

ABSTRACT

This research aimd to investigate the process of learning function for students in 9th grade of elementary school through teaching situations that allow linkage between algebra and analytic geometry. To do so, we developed a didactic sequence, similar to the Didatic Engineering, based on the results of studies of documents and researches that provide an overview of teaching and the learning difficulties of the concept of function and the possibilities for overcoming these. These documents compose, along with the Theory of Didactic Situations and the Theory of Semiotics Representation Records, our theoretical reference. The application of this instructional sequence was performed in a public school in the city of Campo Grande / MS. We found that the proposed situations and mobilization of different representations for the concept allowed these students to observe the variation between magnitudes and the relationship between them to build different resolution strategies which contributed to the mobilization and for the construction of both concepts and procedures.

Keywords: Didatic Engineering. Semiotics Representation of Records. *adidactics* situations. Learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

Introdução

Durante minha graduação tivemos discussões, especialmente nas disciplinas de prática de ensino e estágio supervisionado, sobre dificuldades de aprendizagem relacionadas a conceitos matemáticos e algumas estratégias de superação para as mesmas possíveis de serem realizadas com alunos da educação básica. Ao iniciar minha carreira docente nos níveis fundamental e superior pude vivenciar situações envolvendo novas dificuldades.

O contato com a universidade e cursos de formação continuada possibilitou minha constituição como pesquisador, ainda em construção. Ao ingressar no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da UFMS, tive consciência de que existia um grande campo de investigação em torno do ensino e da aprendizagem de Matemática e que esse campo era embasado por inúmeras teorias tanto de ensino quanto de aprendizagem. Algumas dessas teorias já eram de meu conhecimento devido a estudos realizados nas disciplinas mencionadas anteriormente. Porém, os estudos realizados na graduação necessitavam de um aprofundamento frente a novas situações que estava vivenciando.

Mesmo com minha pouca experiência como docente – 3 anos até o início do mestrado – já observava dificuldades, apresentadas por alunos, quanto a conceitos algébricos e geométricos e também referentes à Geometria Analítica. Com alguns estudos iniciais percebi que um conceito importante tanto para a Matemática quanto para outras áreas do conhecimento era o conceito de função e que o seu ensino e aprendizagem era objeto de estudo de diversos pesquisadores. Com tantos resultados apresentados por essas pesquisas e a consciência de que muito ainda deve ser discutido frente à aprendizagem desse conceito nos[1] dedicamos, inicialmente, à leitura de pesquisas sobre o desenvolvimento histórico desse conceito, o seu desenvolvimento curricular, as práticas de ensino adotadas por professores e livros didáticos, as dificuldades enfrentadas por alunos e/ou professores nos diferentes níveis de ensino e possibilidades de superação propostas para essas. Diante dessas investigações desprendemos estudos a fim de investigar *quais as possibilidades de contribuição de um ensino articulado da álgebra com a geometria analítica para a aprendizagem do conceito de função*.

[1] Ao usar a primeira pessoa do plural nos referimos ao autor desta dissertação e sua orientadora.

Para responder essa questão de pesquisa elaboramos uma sequência didática nos moldes da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) levando em consideração alguns resultados de pesquisas que versam sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de função. Além dessas pesquisas e de documentos oficiais de educação também nos pautamos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003, 2011) e na Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008). A aplicação dessa sequência didática ocorreu em uma escola municipal de Campo Grande – MS, em uma turma ordinária do 9º ano em seu horário normal de aula. Foram realizadas 8 sessões, em um período de 3 meses, o que nos permitiu coletar nossos dados e contribuir para construção do conceito de função por parte dos alunos. Participaram dessas sessões, em média, 24 alunos divididos em 6 grupos dos quais obtivemos dados por meio de gravações em áudio e vídeo e pelo material escrito.

Nosso trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro, apresentamos a contextualização do nosso objeto de estudo trazendo inicialmente as investigações que culminaram com nossa questão de pesquisa e nossos objetivos. No segundo capítulo, aprofundamos alguns elementos das teorias anteriormente mencionadas e como as articulamos, além de detalhar nossas escolhas metodológicas. No terceiro capítulo apresentamos a construção e análise da sequência didática de cada sessão. Ao final desses capítulos apresentamos as considerações finais, discutindo alguns resultados obtidos e ideias para novas pesquisas.

Capítulo I: Contextualização do objeto de pesquisa

1.1 Trajetória pessoal/profissional

A preocupação inicial com o ensino e a aprendizagem do conceito de função se deu na preparação de uma oficina realizada no ano de 2007. Para essa oficina eu, juntamente com outros colegas de graduação e a professora da disciplina, elaboramos uma sequência envolvendo as representações algébrica e gráfica de funções polinomiais do 1º e 2º grau a ser desenvolvida com uma turma do ensino médio no laboratório de informática. Essa oficina foi realizada no momento em que cursava a disciplina de estágio supervisionado do último ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul.

Devido aos estudos realizados na disciplina de Prática de Ensino desse mesmo curso tínhamos contato com alguns *softwares* voltados para o ensino de Matemática, entre eles o *graphmatica*, e decidimos utilizá-lo nessa oficina. A análise dos resultados dessa atividade indicou que a aprendizagem do conceito de função foi favorecida pelo uso do software o que me fez retomá-la, com algumas adaptações, em anos posteriores como professor do ensino fundamental da Rede Municipal de Educação do Município de Campo Grande - MS.

Desde o término de minha graduação, em 2007, atuo como professor do ensino fundamental e também no ensino superior na modalidade EaD e, sempre que possível, participo de cursos de formação continuada oferecidos pela instituição em que trabalho além de ter participado do curso Mídias na Educação oferecido pelo Ministério da Educação e Cultura. A participação nesses cursos me possibilitou ter contato com diferentes metodologias de ensino e recursos que buscam favorecer tanto o ensino quanto a aprendizagem de determinados conteúdos matemáticos.

O trabalho com o conceito de função, ou sua formalização, no ensino fundamental ocorreu, até o presente momento, apenas no meu primeiro ano de atuação como professor. Naquele momento segui basicamente a linha proposta pelo livro didático, à exceção de uma situação inicial, para a qual usei uma situação que acreditava ser de melhor compreensão por parte dos alunos do que a proposta pelo livro didático, e da realização, com os alunos do 9º ano, das atividades da oficina anteriormente mencionada.

No ensino superior, na modalidade EaD de Licenciatura em Matemática lecionei as disciplinas de Desenho Geométrico, Prática de Ensino e Geometria Analítica. Mesmo conhecendo alguns softwares e reconhecendo a importância desses para a aprendizagem, foram poucas as vezes que fiz uso dessa ferramenta em minhas aulas, pois priorizava o plano de ensino, discutido e organizado pelos professores que compunham essa equipe, que se dedicava ao estudo teórico dos conceitos e a realização de listas de exercícios sem a utilização de algum *software*. A participação em cursos de formação continuada oferecidos pela Secretaria Municipal de Educação me possibilitou conhecer o GeoGebra e, a partir de então, com um pouco mais de experiência e autonomia comecei a utilizá-lo na disciplina de Geometria Analítica. A utilização desse software tinha como objetivos a formação dos acadêmicos como futuros professores e a aprendizagem de conceitos dessa disciplina que poderia ser favorecida pela utilização dessa tecnologia.

Após quatro anos de docência, quis retomar os estudos, o que me motivou a tentar realizar o Mestrado em Educação Matemática. Devido à minha experiência com tecnologia minha intenção de pesquisa foi relacionada à possibilidade de favorecer a aprendizagem de conceitos matemáticos por meio de uso de recursos tecnológicos. Com o início das orientações e das reuniões com colegas mestrandos redefinimos o objeto de estudo para o conteúdo de resolução gráfica de sistemas de equações do 1º grau com duas variáveis. Com o tempo esses estudos deram lugar à aprendizagem do conceito de função polinomial do 1º grau.

Ao realizar as primeiras leituras relacionadas à aprendizagem desse objeto matemático percebemos (minha orientadora e eu) que alguns trabalhos indicavam dificuldades relativas à aprendizagem do conceito de função. Isso nos fez planejar uma pesquisa a ser desenvolvida no momento da introdução formal desse conceito em uma sala de aula ordinária. A seguir apresentamos alguns estudos que justificam a realização dessa pesquisa.

1.2 O desenvolvimento do conceito de função

Conhecer o processo de desenvolvimento de conceitos matemáticos pode se caracterizar como uma ferramenta pedagógica que permite explorar as dificuldades que matemáticos enfrentaram e as ideias que estes tiveram nesse processo. Em algumas metodologias de pesquisa, como a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), a análise das dificuldades que marcaram a evolução desse conceito serve de apoio para a concepção de uma sequência de ensino a ser realizada em sala de aula.

No trabalho de Vázquez, Rey e Boubée (2008) é apresentado um estudo da concepção do conceito de função ao longo da história descrevendo fatos importantes ligados ao desenvolvimento do conceito de função. Seguindo o critério de Youschkevitch (1976 *apud* VÁZQUEZ, REY, BOUBÉE 2008) este estudo apresenta a evolução do conceito dividido em três períodos: Época Antiga, Idade Média e Período Moderno. Segundo esses autores já na Época Antiga podem ser encontradas manifestações que implicitamente contém a noção de função. Essas manifestações podem ser observadas nas tabelas babilônicas (2000 a.C – 500 a.C) nas quais estão presentes, entre outros, resultados de multiplicações e de divisões caracterizadas como funções de duas variáveis além de fórmulas para o cálculo da soma de *n* termos de uma progressão geométrica. Também são encontrados indícios de conhecimentos funcionais nos estudos da Geometria desenvolvidos pelos Gregos (500 a.C – 500 d.C) nos cálculos de área e de volume, entre outros. Nesse período, as representações para as ideias relacionadas a esse conceito eram feitas de forma verbal ou por meio de ilustrações em placas de argila.

Na Idade Média os estudos se voltam para fenômenos naturais, como calor, distância e velocidade que envolviam variáveis dependentes e independentes. A definição de função era dada pela anunciação verbal de suas propriedades ou mediante um gráfico. Segundo Vázquez, Rey e Boubée (2008) os estudos de variação se iniciam com Nicolás Oresme (1323-1382) com a representação gráfica-geométrica das propriedades variantes dos objetos associando as variações físicas com figuras geométricas.

Para esses autores no Período Moderno, que se inicia no final do século XVI, foram produzidos conhecimentos fundamentais para o desenvolvimento do conceito de função como: extensão do conceito de números a números reais, a criação da Álgebra simbólica, o estudo do movimento como um problema central da ciência e a união da Álgebra e da Geometria. Nesse período o termo função, utilizado inicialmente por Leibniz no estudo de curvas, ganha caráter de objeto de estudo na disciplina de análise. É nesse período também que o conceito de função é ampliado, incluindo como funções as expressões analíticas por partes e os gráficos que não têm expressões analíticas. Para os matemáticos desde Euler (1707-1783) a Cauchy (1789-1857) o conceito de função estava relacionado a expressões analíticas e curvas, mas a partir dos trabalhos de

Dirichlet (1805-1859), que define função como uma correspondência, este conceito adquire um significado que independe de uma expressão analítica ou curva.

Uma nova evolução desse conceito ocorreu com a Teoria de Conjuntos, desenvolvida inicialmente por Georg Cantor (1845-1918) e em seguida pelos estudos do grupo Bourbaki (1939), que possibilitou compreender função como relação de unicidade entre conjuntos numéricos e não numéricos.

Por esse breve sobrevoo sobre a história temos a noção de quão longo foi o período de desenvolvimento desse conceito, período no qual "os conhecimentos matemáticos, bem como as ideias prévias relacionadas às funções foram sendo construídos com base nos interesses, questionamentos, problemas, possibilidades e limitações da cultura e da época." (VÁZQUEZ; REY; BOUBÉE, 2008, p.152 "tradução nossa")[2]

Ao longo desses três períodos a definição do conceito de função e a própria ideia do que é uma função sofreu reformulações devido à atividade intelectual de matemáticos que se dedicaram à resolução de problemas que, de algum modo, estavam relacionados ao conceito de função. Deste modo observa-se a elaboração de diferentes formas de se representar esse conceito desde as representações em tabelas de valores até as representações por meio de equações algébricas. Esse processo pode contribuir para a compreensão de que a Matemática está em contínua evolução e que essa evolução se dá pela construção de conhecimentos que possibilitam a resolução de problemas pertinentes a cada época.

O desenvolvimento do conceito de função permite sua aplicação em diversas áreas do conhecimento e conteúdos próprios da Matemática o que o torna um conteúdo importante para o desenvolvimento do pensamento lógico matemático, além de permitir criar condições para interpretação de fenômenos sociais e da natureza. Para Ponte (1990) o conceito de função é um dos mais importantes de toda a matemática uma vez que noções ligadas a esse conceito entre elas, as relacionadas à Geometria Analítica, são fundamentais para o desenvolvimento do cálculo infinitesimal.

Ao longo do desenvolvimento desse conceito percebe-se a presença de conhecimentos algébricos e geométricos que, graças a Viète (1540-1603) e Descartes (1596-1650), se fundem possibilitando estudar função por meio da Geometria Analítica.

[2] "los conocimientos matemáticos relativos a las "funciones" se han ido construyendo, bien sobre ideas previas o bien contra ellas, sobre la base de los intereses, cuestionamientos, problemas, posibilidades y limitaciones de cada cultura y de cada época." (VÁZQUEZ, REY, BOUBÉE, 2008, p.152).

A necessidade de conhecimentos dos campos algébrico e geométrico pode tornar esse conceito de difícil apreensão para alunos de diversos níveis de escolaridade o que motiva estudos em diferentes direções. A seguir apresentamos alguns trabalhos realizados que investigam o ensino e a aprendizagem do conceito de função.

1.3 Pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem do conceito função

Trabalhos como (OLIVEIRA, 1997), (MARTINS, 2006), (ARDENGUI, 2008), (BASSOI, 2006) e (MAGGIO, 2011) têm sido realizados com a intenção de investigar o ensino e a aprendizagem do conceito de função nos diferentes níveis de ensino. Essas pesquisas relatam que abordagens realizadas em sala de aula pautadas na repetição, memorização e definição têm se mostrado ineficientes na construção do saber matemático em questão.

Na busca de compreender o processo de construção desse conhecimento, autores como Ardengui (2008) e Markovits, Eylon e Bruckheimer (1995) dedicam-se ao estudo das dificuldades de aprendizagem do conceito de função e buscam propor possibilidades de superação dessas. Já Oliveira (1997) constata que dificuldades enfrentadas por alunos da graduação devem-se, entre outras, a algumas propostas de ensino que não levam em consideração as dificuldades enfrentadas no desenvolvimento histórico do conceito de função. Em seus estudos preliminares a autora relata que em geral os alunos reduzem o conceito de função a alguns exemplos, principalmente as funções de 1º e 2º graus, além de acreditarem que a existência de uma expressão algébrica ou curva seja suficiente para afirmar que esta representa uma função. A redução do conceito de função a casos particulares e a necessidade de se expressar uma função por uma expressão algébrica pode ser fruto de uma das primeiras ideias do que seria função, ideia que, segundo Vázquez, Rey e Boubée, (2008), só foi expandida após alguns debates entre Euler e D’Alembert que incluíram como funções aquelas definidas por partes e as que têm gráfico e não têm uma expressão algébrica.

Para Martins (2006) o tratamento dado ao conceito, no ensino, que em muitos casos enfatiza a relação entre conjuntos ao invés de relacionar grandezas é uma das causas que dificultam que alguns alunos utilizem o conceito de função como ferramenta na resolução de atividades ligadas a esse conceito. Pelho (2003) afirma que a não compreensão do conceito de função está relacionada à falta de compreensão das variáveis e da relação entre elas, bem como à dificuldade em articular as diferentes maneiras de representar este conceito. Esse autor também considera possível a ocorrência de uma aprendizagem na qual os alunos conseguem construir tabelas de valores e gráficos a partir de expressões algébricas sem a compreensão do conceito de função.

Maggio (2011) e Bassoi (2006) analisam o ensino de função observando a prática de um professor em sala de aula e como esse utiliza e mobiliza as formas de representar esse conceito. As duas pesquisas buscam analisar o modo como os professores mobilizam as representações do conceito de função no ensino.

As diferentes formas de representar o conceito de função são utilizadas por Martins (2006), Pelho (2003), Maggio (2011) e Bassoi (2006) como meio que possibilita investigar o ensino e a aprendizagem desse conceito. Esses pesquisadores se baseiam na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1988), que permite investigar a compreensão em matemática por meio das representações semióticas. Para Duval (2011) os objetos matemáticos só são acessíveis por meio de suas representações, por isso, a maneira de raciocinar matematicamente está ligada às transformações que podem ser feitas sobre as representações semióticas. Essas transformações são classificadas em tratamentos e conversões. A primeira é relativa a transformações dentro de um mesmo sistema de representação semiótica o que ocorre, por exemplo, ao resolver uma equação do 1º grau. A segunda se dá pela mudança de sistema de registro, como passar da representação algébrica de uma função à sua representação gráfica.

Os conhecimentos relacionados às operações numéricas, ao preenchimento de tabelas, à elaboração de representações algébricas, à representação cartesiana entre outros mencionados por Martins (2006) são/deveriam ser trabalhados nos anos finais do ensino fundamental. Afirmamos isso, pois segundo os PCN (BRASIL, 1998) ao longo do 3º ciclo os alunos trabalham com as diferentes ideias da álgebra que “a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos” (BRASIL, 1998, p. 51). Ideias que devem estar articuladas com os demais campos da matemática.

Em se tratando dessa articulação, percebemos que no campo geométrico os alunos têm contato com o estudo das formas, mas também com noções relativas à posição, à localização de figuras, à deslocamentos no plano e a sistemas de coordenadas. Nas situações envolvendo noções de grandezas e medidas os alunos têm oportunidade de explorar situações do cotidiano o que, segundo os PCN (BRASIL, 1998), propiciam melhor compreensão para conceitos relativos ao campo geométrico e servem de contextos para interdependência entre grandezas possibilitando expressá-las algébrica e geometricamente. Nesse sentido De Paula (2011) desenvolveu uma pesquisa com o objetivo de investigar a mobilização e a articulação de conceitos de Geometria Plana e de Álgebra em estudos da Geometria Analítica por alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. Para tanto, o autor aplicou uma sequência didática na qual os sujeitos de pesquisa deviam mobilizar tanto conceitos algébricos de funções, equações e inequações como conceitos de Geometria Plana como ponto, reta e propriedades geométricas da circunferência e da elipse. Nas atividades sobre funções o autor abordou conceitos algébricos e geométricos relacionados às funções polinomiais do 1º e 2º grau e funções modulares. Em suas análises destacou que todos os alunos tiveram dificuldade para tratar algebricamente uma função afim principalmente em relação à inclinação da reta. Isso o levou a concluir que mesmo se tratando de um conceito mais elementar, bastante trabalhado desde o final do ensino fundamental, não é realizado, nas escolas, um estudo de conversões entre os registros gráficos e algébricos da função afim.

Com apoio dos Registros de Representação Semiótica como referencial teórico o autor conclui que

> um trabalho que explore a Geometria Analítica em estreita relação com a Álgebra e a Geometria, levando os alunos a praticarem transformações do tipo tratamento e conversões deve levar a uma melhor apreensão dos objetos da Geometria Analítica. Entretanto, apesar do trabalho desenvolvido algumas dificuldades persistiram até o final. Acreditamos que há necessidade de realizar trabalhos da mesma natureza da desenvolvida nessa pesquisa, mas que tenha maior duração. (DE PAULA, 2011, P. 168)

Melo (2010), com apoio nos trabalhos de Lins e Gimenez (2006) e Douady (1986), afirma que a articulação entre quadros[3] é um fator que favorece a construção de conceitos. Segundo ele, quando o aluno for capaz de utilizar diferentes quadros matemáticos para resolver problemas, terá dado passos em direção ao desenvolvimento do seu conhecimento. Com essa premissa Melo (2010) realizou uma pesquisa com o objetivo de estudar os procedimentos de verificação de igualdades de expressões

[3] Douady (1986, p. 389) *apud* Melo (2010, p. 34) caracteriza um quadro como constituído de ferramentas de uma parte da matemática, de relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações.

algébricas mobilizados por alunos do 9º ano do ensino fundamental, ao realizarem cálculo algébrico utilizando os quadros aritmético, algébrico e geométrico. Ao elaborar as atividades de sua sequência didática o autor optou por explorar atividades que contivessem situações que contemplassem pelo menos dois quadros matemáticos possibilitando aos alunos transitarem e perceberem relações entre os quadros. Na realização dessa sequência didática o autor detectou que alguns alunos manifestaram dificuldades nas resoluções.

Os erros cometidos pelos alunos são para o autor consequência de dificuldades ligadas a conhecimentos anteriores que lhes possibilitariam interagir com as atividades. Considerando que, independente do quadro, os conceitos contém elementos invariantes que constituem o conhecimento sobre tal objeto matemático o autor caracteriza os erros em três grupos:

> [...] a primeira categoria, de erros aritméticos, a segunda, de erros algébricos e a terceira, de erros geométricos. Os erros aritméticos envolvem o uso de parênteses e o erro de troca de operações (multiplicação-potenciação). Os erros algébricos envolvem os erros da letra como número indeterminado e os erros que envolvem a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Os erros geométricos envolvem o reconhecimento de propriedades geométricas de figuras retangulares e distinção entre comprimento de segmento e superfície de quadrado. (MELO, 2010, p. 119)

Alguns desses erros foram superados ao longo da realização da sequência didática, outros, segundo o autor, necessitam de um trabalho mais detalhado com a proposição de situações que levem à superação de suas dificuldades. Tal superação poderia levá-los a construir novos conhecimentos a serem utilizados na verificação das igualdades por meio da interação e/ou mudança de quadros matemáticos. Podemos citar como exemplo de interação entre os quadros a associação entre a representação geométrica para a compreensão ou verificação de algumas propriedades aritméticas e até mesmo algébricas que poderiam permitir que os alunos compreendessem o significado de expressões como 3^2, x^2 e $(x + 2)(x + 4)$.

A leitura dessas pesquisas e dos Parâmetros curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1998) dão indícios de uma insatisfação com o ensino de matemática que preza o repetir e o ensinar o conteúdo pronto e acabado. Notamos, nesses textos, a preocupação em fazer agir, operar e construir conhecimentos a partir da realidade dos alunos, professores e sociedade em geral. Podemos considerar essas pesquisas frutos do que Becker (2009) chama de tendências atuais do pensamento educacional que, reunidas, podem ser entendidas como construtivismo educacional. Portanto, “a educação deve ser um processo de construção de conhecimento” (BECKER, 2009, p. 3) no qual professor, alunos e sociedade com seus problemas e conhecimentos já produzidos se complementem.

Acreditar na concepção de conhecimento por uma visão construtivista requer reconhecer o aluno como integrante de uma sociedade que interage com seu meio (cultural, político, econômico, etc.) e não um aluno sem qualquer tipo de conhecimento, como um “CD virgem” para o qual o professor ensinará o conteúdo e exigirá que o mesmo o grave e repita da mesma forma, sem que isso interfira em suas relações sociais e pessoais. Essa visão de aluno ou processo de produção de conhecimento é chamada de empirismo. Outra visão é a apriorista, na qual se considera que o conhecimento acontece no aluno porque ele já traz em si o necessário para produzir o conhecimento, já foi herdado, precisando apenas ser abastecido (BECKER, 2009). O rompimento com as visões empiristas e aprioristas acontece, segundo Becker (2009), se o professor para a sua prática e reflete sobre ela. Por essa reflexão o professor se dá conta de sua prática, podendo (re)construí-la. Para esse autor isso é possível tendo-se a prática e também a apropriação de teorias críticas que dão conta da qualidade e dos limites de sua prática.

Partilhamos da afirmação de Becker (2009) que o processo de construção do conhecimento deve impregnar o sistema educacional em geral e que a sala de aula deve ser inserida na História e no espaço social, o que nos leva a acreditar que os alunos dos anos finais do ensino fundamental têm conhecimentos matemáticos já produzidos e que esses devem ser complementados/aplicados com/em situações de nossa realidade na construção do saber matemático função.

O estudo desses trabalhos deixa clara a presença de dificuldades desde a elaboração de uma expressão algébrica, bem como em argumentar sobre as características de uma representação gráfica, mesmo já tendo contato com esse conceito. Acreditamos que esses conhecimentos estão sempre em construção ou em reconstrução e isso deve ser levado em consideração no ensino do conceito de função, especialmente na educação básica nos contatos iniciais dos estudantes com esse objeto matemático. Deste modo buscamos, nos PCN, os objetivos que têm alguma ligação com o desenvolvimento do conceito de função e que contribuem com sua apreensão.

O ensino de Matemática nos anos finais do ensino fundamental visa o desenvolvimento dos pensamentos algébrico e geométrico, do raciocínio proporcional e de outros, todos esses importantes para a construção e o desenvolvimento do conceito de função. Nessa fase da escolaridade, tomando como ponto de partida as atividades desenvolvidas no que se chama de “pré-álgebra”, um dos objetivos do trabalho com a álgebra é levar o aluno à

> compreensão de conceitos como o de variável e de função; a representação de fenômenos na forma algébrica e na forma gráfica; a formulação e a resolução de problemas por meio de equações (ao identificar parâmetros, incógnitas, variáveis)” (BRASIL, 1998, p. 84)

Esse ensino visa, por meio de situações de aprendizagem, levar os alunos a:

- reconhecer que representações algébricas permitem expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas, traduzir situações-problema e favorecer as possíveis soluções;
- **traduzir informações contidas em tabelas e gráficos em linguagem algébrica e vice-versa, generalizando regularidades e identificar os significados das letras;**
- utilizar os conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias de cálculo algébrico;
- resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas;
- **observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade;**
- observar regularidades e estabelecer leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis;
- interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;
- representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional. (BRASIL, 1998, p. 64-65 e p.87, grifo nosso)

Percebemos nesse excerto a importância acordada à compreensão de diferentes representações e ao trânsito entre elas. Os alunos devem perceber a articulação entre os campos matemáticos e uma maneira de se fazer essa articulação é o estudo de situações proporcionais e não proporcionais. Essas situações oportunizam a representação da variação de grandezas por meio de tabelas, de representações algébricas e de gráficos no plano cartesiano.

Em especial nos dois últimos anos do ensino fundamental, devido ao nível de desenvolvimento cognitivo dos alunos, é preciso “mostrar que a Matemática é parte do saber científico e que tem um papel central na cultura moderna” (BRASIL, 1998, p.80). No entanto, segundo os PCN a ênfase desse ciclo recai muitas vezes no estudo dos conteúdos algébricos, abordados de forma mecânica, distanciando ainda mais os conteúdos das situações-problema do cotidiano. A fim de superar essa barreira esse documento sugere que para os novos conteúdos a serem estudados, os alunos deveriam ser estimulados a estabelecer relações com os conhecimentos anteriormente construídos.

Do que foi apresentado, percebemos que as dificuldades de aprendizagem referentes ao conceito de função estão presentes em todos os níveis de ensino o que gera preocupação por parte da comunidade que investiga o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos. Nesse cenário, e tendo em vista nossa experiência como docente, acreditamos ser importante realizar estudos dirigidos à aprendizagem do conceito de função que levem em consideração os resultados apresentados por pesquisas anteriores buscando alcançar melhores resultados no que diz respeito à aprendizagem desse conceito.

Visando contribuir para a melhoria do ensino e da aprendizagem do conceito de função, propusemos a realização de uma pesquisa que possa favorecer a aprendizagem do conceito de função, por alunos do 9º do ensino fundamental. Acreditamos que ao iniciar o estudo formal desse conceito, deve-se:

- levar em consideração o desenvolvimento epistemológico desse conceito, bem como os conhecimentos prévios dos alunos;
- articular os campos algébrico, geométrico e aritmético;
- propiciar aos alunos a percepção da relação de dependência entre duas grandezas em diferentes situações e em diferentes formas de representação;
- fazer uso de softwares e outros materiais que contribuam com a construção do conhecimento desejado;
- propor situações que favoreçam o uso de diferentes estratégias, pelos alunos.

Com a realização dessa pesquisa queremos responder a seguinte questão:

Quais as possibilidades de contribuição de um ensino articulado da álgebra com a geometria analítica para a aprendizagem do conceito de função?

Para responder tal questão elencamos alguns objetivos a serem atingidos ao longo do desenvolvimento desse trabalho, discutidos a seguir.

1.4 Objetivos da pesquisa

Essa pesquisa tem como objetivo geral **Investigar o processo de aprendizagem de função por alunos do 9º ano do ensino fundamental por meio de situações didáticas que articulem a álgebra e a geometria analítica.**

Para atingir o objetivo geral elencamos os seguintes objetivos específicos:

- Analisar conceitos e procedimentos utilizados por alunos na resolução de atividades relacionadas ao conceito de função.
- Investigar dificuldades de articulação entre os campos algébrico e geométrico em atividades sobre função.
- Investigar contribuições da mobilização de diferentes representações relacionadas ao conceito de função para o processo de construção do conhecimento desse conceito.

Temos, por hipótese, que os alunos do 9º ano do ensino fundamental já tiveram algum contato com diferentes representações, conceitos matemáticos e procedimentos de resolução de atividades que podem ser utilizados na construção do conceito de função.

A identificação e análise dos conceitos matemáticos e dos procedimentos de resolução adotados pelos estudantes na resolução das situações propostas devem nos ajudar a compreender tanto suas dificuldades como a compreensão que eles têm dos conceitos envolvidos nas atividades. Deste modo poderemos melhor estudar como os alunos mobilizam e articulam conceitos da álgebra e da geometria analítica na resolução de problemas envolvendo o conceito de função.

Historicamente o processo de construção desse conhecimento foi marcado por dificuldades. Isso não é diferente em um ambiente de ensino como observado nas pesquisas já mencionadas. Identificar dificuldades que os alunos podem ter, bem como estratégias que possam ajudá-los a superar essas dificuldades, é de suma importância na investigação do processo de construção de conhecimento desse conceito matemático. Dificuldades relativas à articulação entre conceitos da álgebra e da geometria analítica podem prejudicar a construção do conceito de função. Assim acreditamos ser pertinente uma investigação sobre o que pode comprometer o processo de articulação desses conceitos para pensar como favorecer essa articulação.

Acreditamos que diante de uma situação matemática a ser resolvida pelos alunos eles procuram trabalhar com uma representação que lhes seja mais familiar a fim de solucionar o problema proposto. Desta forma queremos investigar contribuições da mobilização de diferentes representações para o desenvolvimento da aprendizagem desse objeto matemático e de suas propriedades, uma vez que a atividade matemática consiste em transformações de representações semióticas dadas ou obtidas no contexto da atividade em outras representações semióticas (DUVAL, 2011).

Capítulo II: Escolhas teóricas e metodológicas

Nesse capítulo apresentamos a fundamentação teórica de nossa pesquisa formada por documentos oficiais e pesquisas que versam sobre o conteúdo de função e por teorias que contribuem tanto com a elaboração e análise de situações a serem vivenciadas em sala de aula quanto à compreensão do processo de aprendizagem do conceito de função. O objetivo deste capítulo é apresentar os estudos referentes à epistemologia do conteúdo de função, ao seu ensino atual, além de dificuldades que podem ser enfrentadas por alunos do 9º ano do ensino fundamental~~.~~

2.1 Pesquisas e documentos oficiais

Para melhor compreender o cenário das pesquisas que tratam do ensino e da aprendizagem do conceito de função realizamos inicialmente uma busca, na internet, por artigos, dissertações, teses e livros que abordam o ensino e a aprendizagem de função. Trazemos aqui um detalhamento de pesquisas, algumas delas já apresentadas no item 1.3, que fomentam a construção de nosso trabalho.

Uma das preocupações concernentes ao processo de construção do conceito de função é a ausência de significado que o conceito tem para uma parcela dos estudantes que não compreendem quando esse está presente em enunciados de exercícios de várias áreas do conhecimento. Essa ausência de significado implica em não compreensão desse conceito como uma ferramenta na resolução de atividades (MARTINS, 2006). Para esse autor alguns alunos desenvolvem um mecanismo no qual compreendem o conceito de função apenas como a entrada de um valor em uma dada regra que por sua vez produz a saída de outro valor.

$$\boxed{\text{entra } x \longrightarrow \text{Regra} \longrightarrow \text{sai } y \text{ ou } f(x)}$$

Segundo ele, esse mecanismo é fruto do tratamento dado ao conceito no ensino fundamental, no qual se trabalha função como a relação entre dois conjuntos numéricos.

A pesquisa desenvolvida por Martins (2006) teve por objetivo verificar a validade de uma proposta baseada na dialética ferramenta-objeto (DOUADY, 1984). O objetivo de Martins (2006) foi criar condições para que o conceito de função se torne uma ferramenta na resolução de problemas permitindo uma melhor compreensão do objeto matemático por parte dos alunos. Para esse autor os conhecimentos antigos dos alunos servem de ferramenta a partir da qual o professor prepara a aquisição de um novo conceito, que passa a ser objeto de estudo e que, uma vez apreendido, torna-se ferramenta para a aquisição de novos conceitos, novos objetos.

Martins (2006) desenvolveu sua pesquisa com um grupo de alunos voluntários do 9ª ano do ensino fundamental. A análise da sequência didática aplicada a esse grupo de alunos permitiu ao autor concluir que os mesmos conseguem estabelecer a variação e a dependência entre grandezas a partir dos conhecimentos mobilizados pelas situações propostas. No entanto, a proposição de situações envolvendo função em diferentes representações levou alguns alunos a acreditarem que estavam estudando as tabelas, gráficos e equações ao invés da variação e dependência entre as variáveis. Na pesquisa de Martins (2006) notamos o papel do professor como mediador do processo que visa a mobilização de conhecimentos pelos alunos e a aquisição de novos conceitos.

Percebendo a importância do papel do professor na construção do conhecimento de um conceito Bassoi (2003) constata que grande parte das pesquisas sobre funções investiga a concepção e as dificuldades apresentadas pelos estudantes, porém, poucas se debruçam sobre o conhecimento dos professores, ou como eles trabalham esse assunto. Nesse sentido desenvolveu uma pesquisa que visou analisar o diálogo entre uma professora e seus alunos em aulas sobre funções na 8ª série do ensino fundamental, atual 9º ano, e a forma que essa professora utilizou e mobilizou as representações do objeto matemático em questão. Bassoi concluiu, por meio da entrevista realizada com a professora, que a articulação entre as representações algébrica e gráfica de uma função requer um software que permita aos alunos visualizar de forma conjunta as modificações produzidas no gráfico e nas expressões algébricas.

No mesmo sentido de Bassoi (2003), Maggio (2011) investigou o ensino de função desenvolvido por uma professora de matemática que conhecia a Teoria dos Registros de Representação e constatou que mesmo conhecendo essa teoria e a necessidade de mobilização de diferentes representações para o conceito de função a professora conduz o processo de ensino de função por meio de tratamentos no registro tabular, com o preenchimento de tabelas, e no algébrico ao resolver equações para determinar valores do Domínio ou da Imagem de uma função.

Com o objetivo de compreender a forma como o conceito de função está sendo trabalhado no ensino fundamental Martins (2006) realizou uma análise em seis coleções de livros didáticos do ensino fundamental. O autor se propôs a analisar a sequência adotada pelo livro para a definição e o desenvolvimento do conceito, a presença ou não de referências a fatos relacionados ao cotidiano, bem como ao desenvolvimento histórico para a construção do conceito e, por fim, as conversões entre os registros de representação utilizados. Nessa análise o autor identificou duas tendências adotadas por autores de livros didáticos no que se refere à forma de apresentação do conteúdo de função:

> Uma linha mais tradicional em que o autor procura reformular sua proposta para se adequar aos PCNs. Entretanto acaba por voltar ao modelo parecido com o anterior, em que o uso do diagrama é o ponto central da definição.
> Na segunda linha já temos a presença do uso de situações-problema cujo objetivo é o aluno construir o conceito de função. (MARTINS, 2006, p. 48)

O autor encontrou, assim, alguns livros que têm preocupação em tornar o aluno agente de sua própria aprendizagem possibilitando-o trabalhar com relações funcionais. No entanto, mesmo os livros que adotam essa postura e utilizam exemplos do cotidiano na introdução do conceito, os deixam quase imediatamente de lado em prol de atividades de repetição e memorização de técnicas e algoritmos. Essa abordagem é criticada pelos PCN, uma vez que:

> as situações de aprendizagem precisam estar centradas na construção de significados, na elaboração de estratégias e na resolução de problemas, em que o aluno desenvolve processos importantes como intuição, analogia, indução e dedução, e não atividades voltadas para a memorização, desprovidas de compreensão ou de um trabalho que privilegie uma formalização precoce dos conceitos (BRASIL, 1998, p. 63)

Com o objetivo de inserir o conhecimento matemático no contexto social dos alunos, alguns dos livros analisados utilizam exemplos de situações como a corrida de táxi e relações proporcionais. Martins (2006) critica essa abordagem por não ser da realidade dos alunos e ter variação constante, como considerado na maioria do livros didáticos. Concordamos com essas críticas, pois a atividade do táxi pode levar os alunos a uma incompreensão desse problema, uma vez que a modelagem dessa situação deve considerar diversas variáveis como o tempo em que o veículo permanece parado e a distância percorrida pelo mesmo, o que, em geral, são deixadas de lado pelos autores de livros didáticos. Com relação à segunda crítica acreditamos que os alunos devem ter contato com situações que, ao longo de um período de análise, mudem de variação o que permite reconhecer uma função dada por mais de uma sentença matemática. No entanto vale ressaltar que algumas relações funcionais são difíceis de representar e analisar, como é o caso da situação “corrida de táxi”.

O uso quase que exclusivo de situações descritas apenas por uma sentença matemática pode fazer surgir uma dificuldade que dificulta o reconhecimento, pelos alunos, de uma função dada por mais de uma sentença como observado por Oliveira (1997) ao relatar que, em geral, os alunos reduzem o conceito de função a alguns exemplos de função no caso, as funções de 1º e 2º graus.

Ao investigar o uso da evolução histórica desse conceito nos livros didáticos Martins (2006) encontrou coleções que dão indícios de preocupação com a necessidade de conhecer a história e as dificuldades enfrentadas ao longo da construção do conceito. No entanto das seis coleções analisadas quatro coleções parecem não considerar esse desenvolvimento.

> Todas apresentam uma situação em que procuram destacar o papel da variação como elemento importante na formulação do conceito, mas via de regra propõem apenas uma, mesmo que informal, seguidos de exemplos e exercício de fixação, logo após a situação proposta. (MARTINS, 2006, p. 52)

Com relação às representações das relações funcionais nos livros analisados Martins (2006) observou que as mesmas são dadas prontas em tabelas e gráficos, não favorecendo a descoberta da relação de dependência entre as variáveis, nem a construção dessas representações. O autor identificou uma predominância da conversão no sentido do registro algébrico para o gráfico sendo que a conversão no sentido contrário só foi identificada em uma coleção. Todas as coleções fazem uso da representação gráfica que é construída a partir de pontos obtidos por meio de valores atribuídos às variáveis nas sentenças matemáticas. Dependendo da forma como essas representações são apresentadas podem gerar dificuldades na apreensão desse conceito levando os alunos a acreditar que a existência de uma expressão algébrica ou curva seja suficiente para afirmar que essa representa o gráfico de uma função produzindo equívocos como considerar que uma circunferência representa o gráfico de uma função.

De modo geral o autor considera que a maioria dos livros didáticos não está levando em consideração os conhecimentos prévios dos alunos na construção do conceito de função e, além disso, a ênfase do ensino está na aplicação do conceito no cálculo de imagem de um determinado elemento do domínio.

Os PCN (BRASIL, 1998) também nos auxiliam a compreender alguns elementos dos processos de ensino e de aprendizagem além de propor meios de construir novos conhecimentos que podem vir a contribuir com a superação de algumas dificuldades referentes à aprendizagem do conceito de função. Esse documento destaca a capacidade dos alunos em relacionar ideias matemáticas entre si e reconhecer princípios gerais incluindo os conceitos básicos para a construção do conceito de função.

Como observado nas pesquisas e nos PCN (BRASIL, 1998), abordagens realizadas em sala de aula pautadas na repetição e memorização têm se mostrado ineficientes. Discutindo a respeito das relações entre professor-aluno e aluno-aluno os PCN (BRASIL, 1998) colocam como fundamental o papel do professor no sentido de mediador, organizador, promovedor de diálogos compreendendo o papel do aluno como agente da construção dos seus conhecimentos. Uma forma de colocar o aluno no papel de agente ativo é confrontá-lo com situações-problema. Para os PCN essas devem servir para elaborar e construir novos conhecimentos à medida em que os alunos criam estratégias para solucioná-las e não para a aplicação de conhecimentos vistos anteriormente. Como proposto por Martins (2006) a resolução de problemas pode ser um ponto de partida de uma atividade matemática que permite que os alunos mobilizem conhecimentos e desenvolvam a capacidade em gerenciar informações que estão ao seu alcance. A articulação entre a situação-problema e os conhecimentos prévios dos alunos, realizada perante uma série de retomadas e generalizações possibilita a construção de novos conceitos matemáticos (BRASIL, 1998). Partilhamos de tal proposta, pois ela favorece a construção do conceito matemático função, como mostra Martins (2006).

Como um dos nossos objetivos é analisar dificuldades de articulação entre os campos algébrico e geométrico em atividades sobre função realizamos um levantamento sobre pesquisas que apresentam algum estudo sobre dificuldades enfrentadas por alunos no estudo de função. Nesse sentido encontramos a pesquisa de Ardenghi (2008) que teve como objetivo identificar dificuldades e os fatores que poderiam causar as mesmas, bem como as formas de intervenção no ensino que poderiam contribuir com a superação dessas dificuldades. Para tanto o autor realizou inicialmente um mapeamento de quarenta e seis pesquisas produzidas no Brasil com foco no ensino e na aprendizagem de função no período de 1970 a 2005, por fim realizou a seleção e análise de nove trabalhos tendo como critério as questões orientadoras de pesquisa que deveriam tratar das dificuldades de aprendizagem do conceito de função. Também foram analisados dois artigos de periódicos internacionais e um capítulo de livro devido à relevância para área de Educação Matemática. Essa relevância se deu pela quantidade de citações desses textos nas pesquisas analisadas.

Após analisar esses doze trabalhos o autor apresentou algumas dificuldades de alunos e professores relacionadas ao conceito de função e observou a presença dessas dificuldades em diversos níveis de ensino. Além disso, identificou uma grande quantidade de pesquisas que citam dificuldades na conversão entre os registros gráfico e algébrico.

O quadro 1, a seguir, contém algumas dificuldades identificadas por Ardenghi (2008) que podem ser vivenciadas em uma sala de aula ordinária do ensino fundamental e servirão de apoio para a elaboração das atividades da nossa sequência didática.

Quadro 1: Dificuldades na aprendizagem do conceito de função

Esboçar gráficos com os pontos obtidos em uma tabela acreditando que esses são os únicos que satisfazem a função.
Confundir a representação, no plano cartesiano, do ponto (x , y) com a representação do ponto (y , x)
Não reconhecer função constante como função.
Confundir função com equação.
Incluir a noção de continuidade ao conceito de função.
Não compreender os registros de representação utilizados para representar esse conceito.
Dificuldade em trabalhar com conjuntos discretos em atividades envolvendo o conceito de função.
Utilizar ideias de proporção para resolver problemas funcionais.
Dificuldade na interpretação de problemas na forma de texto.
Acreditar que uma relação ou correspondência deve ser expressa por uma expressão algébrica.
Não reconhecer relações não funcionais
Dificuldades na conversão de representações do registro gráfico para o algébrico
Dificuldade em localizar elementos do domínio e da imagem de uma função em representações gráficas.
Dificuldades em obter imagens e pares (elemento do domínio, elemento da imagem) para funções na forma algébrica.
Crer que toda função é uma função linear.

Fonte: Adaptado de Ardenghi (2008)

As dificuldades apresentadas nesse quadro podem/devem ser consideradas ao se desenvolver o estudo do conceito de função independente do nível de ensino. Conhecendo essas dificuldades o professor pode propor atividades que levem à superação de tais dificuldades. Nesse sentido, o quadro a seguir apresenta algumas alternativas/estratégias para a superação de dificuldades.

Quadro 2: Sugestões para superação de dificuldades referentes ao conceito de função

Ter conhecimento da evolução histórica do conceito de função buscando reconhecer a existência de obstáculos na aprendizagem desse conceito.
Mudar a forma de apresentar o conceito fazendo com que ocorra a participação ativa dos alunos na construção desse conceito.
Iniciar o processo de ensino de função a partir da realidade e do conhecimento do aluno
Propor situações que exijam a conversão entre os diferentes registros de representação utilizados para representar o conceito.
Realizar atividades em grupos para que ocorra a troca de ideias
O professor deve usar uma linguagem mais acessível aos alunos, não fazendo uso apenas das definições e nomenclaturas utilizadas no estudo desse conceito.
Utilizar recursos computacionais principalmente para estudo das representações gráficas e algébricas.
Incluir no estudo de funções lineares algumas funções não lineares.

Fonte: Adaptado de Ardenghi (2008)

Dada nossa preocupação com as possíveis dificuldades a serem enfrentadas pelos alunos do 9º ano do ensino fundamental ao iniciarem o estudo formal do conceito de função acreditamos ser importante levar em consideração as sugestões elencadas nos quadro anterior reconhecendo que muitas dessas também estão nas orientações dos PCN (BRASIL, 1998).

2.2 Registros de Representação Semiótica

Com o intuito de entender o funcionamento cognitivo em matemática Raymond Duval (2003) desenvolveu estudos sobre registros de representação semiótica. Para o autor as dificuldades de compreensão de um conceito não devem ser buscadas somente nos conceitos matemáticos e em sua epistemologia, mas sim no campo cognitivo.

Ao caracterizar a atividade matemática por um ponto de vista cognitivo Duval (2003) apresenta características que diferem a atividade cognitiva exigida pela matemática daquela exigida em outras áreas do conhecimento. Segundo ele uma das características é a importância das representações para a compreensão dos objetos matemáticos que não podem ser acessados de forma empírica ou instrumental como são os objetos da física, da química ou da biologia. A segunda característica é a variedade de representações semióticas utilizada em Matemática. A diversidade de tipos de representação e o modo de funcionamento de cada um desses tipos são, para Duval (2011), questões importantes para a análise cognitiva da atividade matemática e, portanto dos processos de compreensão em Matemática.

Com o intuito de elaborar uma ferramenta de análise da atividade cognitiva em Matemática, Duval (2011) distingue e classifica os tipos de representações semióticas utilizadas nessa disciplina. Essas representações recebem o nome de Registros de representação semióticas e se diferenciam de outros sistemas de representação pela capacidade de produção de novas representações específicas de cada sistema e por não serem utilizados apenas como transmissor e comunicador de informações.

Como o acesso aos objetos matemáticos se dá necessariamente por meio de representações semióticas e, ao mesmo tempo, o objeto matemático não pode ser confundido com sua representação, a apreensão ou aprendizagem de um conceito matemático supõe a capacidade de reconhecer esse conceito em suas diferentes representações, e ainda, a mobilização de ao menos dois tipos diferentes de registros de representação relacionados ao conceito. Para analisar a aprendizagem matemática deve-se distinguir dois tipos de transformações de representações semióticas: os tratamentos e as conversões.

> Os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo registro: por exemplo [...] resolver um sistema de equações. [...] As conversões são transformações de representações que consistem em mudar de registro conservando os mesmos objetos denotados: por exemplo, passar da escrita algébrica de uma equação à sua representação gráfica. (DUVAL, 2003, p.16)

Um exemplo de tratamento pode ser visto na resolução da equação $2x + 3 = x + 4$. Para resolver essa equação são feitas transformações sempre no registro algébrico. Entretanto se o problema tivesse sido enunciado em língua materna, seria preciso fazer a conversão desse registro para o registro algébrico.

Pesquisas como as de Maggio (2010; 2011) e de Dominoni (2005) mostram que, em geral, no ensino de funções, há privilégio no tratamento algébrico e as conversões, quando ocorrem, geralmente são em um único sentido, da língua materna para o registro algébrico e do registro algébrico para o registro gráfico. Citamos como exemplo as seguintes atividades, elaborada por nós.

1) Uma empresa de táxi cobra R$ 3,40 a bandeirada e mais R$ 1,20 pelo quilômetro rodado. Escreva de forma geral a lei que representa essa situação.

2) Represente graficamente as funções:
a) $y = 3x + 2$
b) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Além disso, os diferentes registros utilizados para representar esse conceito são trabalhados separadamente, sem que se incentive a coordenação entre os mesmos. Com base nos estudos de Duval acreditamos que a falta de articulação entre os registros de representação e a predominância em um único sentido de conversão compromete a capacidade dos alunos em utilizar seus conhecimentos e suas possibilidades de construir novos conhecimentos. Mais ainda, compromete a própria apreensão do objeto, pois o aluno não identifica o mesmo objeto em suas diferentes representações: por exemplo, ele não consegue identificar a expressão algébrica da função tendo sua representação gráfica.

Assim sendo, um ensino que leve em consideração essas questões cognitivas deve propor situações que promovam a mobilização de diferentes registros, pois “É enganadora a ideia de que todos os registros de representação de um mesmo objeto tenham igual conteúdo ou que se deixem perceber uns nos outros.” (DUVAL, p. 31, 2003). Com relação às conversões essas devem ser realizadas em ambos os sentidos o que geralmente não é feito no ensino que privilegia apenas um sentido de conversão. Entretanto, o fato de saber realizar a conversão em um sentido não significa saber realizar o sentido inverso dessa conversão (DUVAL, 2003).

As transformações, tratamentos ou conversões, “marcam a atividade cognitiva que um aluno deve empregar, seja para poder ter sucesso na solução de uma tarefa matemática, seja para compreender a solução” (DUVAL, 2011, p.56). Para a compreensão de uma atividade matemática é preciso reconhecer as informações matemáticas pertinentes e também saber realizar algum tipo de transformação sobre essas informações para, caso essa situação seja um problema a ser resolvido, encontrar sua solução. Essas informações são, para Duval, as unidades de sentido específicas de cada sistema semiótico. Devido ao surgimento das equações algébricas, das fórmulas em física e das representações gráficas, Duval (2011) utiliza o termo representação semiótica referindo-se às frases, equações, esquemas e gráficos; para palavras, algarismos, letras, pontos e traços esse autor usa o termo unidades elementares de sentido que precisam ser agrupadas para produzirem significado. Reconhecer as unidades de sentido e delinear as transformações dessas unidades, seja por meio de tratamentos ou conversões, são, para Duval, condições preliminares e indispensáveis para a compreensão em Matemática.

Partindo do princípio de que todo conceito matemático necessita de uma representação, desde os primeiros estudos formais do conceito de função os alunos devem ser apresentados a situações que favoreçam o reconhecimento das unidades de sentido, bem como as transformações sobre essas. Desse modo a compreensão do conceito de função deve se dar pela mobilização de diferentes registros de representação uma vez que duas representações diferentes não apresentam, ou não explicitam, as mesmas propriedades do objeto que elas representam.

Concluímos assim que não se pode, de forma alguma, confundir o objeto matemático função com uma de suas representações. Para evitar essa confusão é preciso dispor de outra representação com conteúdo diferente que mobiliza unidades de sentido diferentes da primeira. Reconhecer o objeto função representado por duas representações requer, segundo Duval (2011), a correspondência das unidades de sentido das duas representações. Essa operação de colocar em correspondência é a única que permite retirar propriedades de um objeto ou ter acesso a novos objetos do conhecimento. Segundo Duval (2011) a importância, em Matemática, de colocar em correspondência apareceu, particularmente, com o desenvolvimento da análise e da emergência da noção de função que faziam escritas simbólicas como uso de equações algébricas e das representações gráficas. Para ilustrar essa importância o autor cita, como exemplo, a seguinte questão: “existem mais números naturais que números pares ou tantos números pares quanto números naturais?”. Com essa questão o autor mostra que a representação simultânea das sequências de números naturais e a sequência de pares sobre duas linhas e a correspondência entre os elementos das sequências possibilita a descoberta da noção de infinito.

Com o exposto sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica entendemos que para investigar o trabalho matemático de um aluno precisamos analisar as transformações de representações semióticas realizadas por ele durante sua atividade matemática. Ao analisarmos a compreensão do conceito de função o faremos tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista cognitivo conforme os seguintes critérios:

> Do ponto de vista matemático, a compreensão começa com o que denominamos, conforme os níveis sobre os quais colocamos, “justificação”, “validação”, “prova”, “demonstração”. Do ponto de vista cognitivo, duas condições maiores são necessárias para que possamos falar em compreensão. De um lado, para que possamos reconhecer os objetos estudados por meio de suas múltiplas representações ou manifestações possíveis e, de outro lado, para que possamos por nós mesmo tomar a iniciativa de exploração dos objetos estudados e controlar sua pertinência. (DUVAL, 2011, p. 65)

Para possibilitar a compreensão desse conceito acreditamos que além do exposto anteriormente, é importante/necessário criar condições para que isso aconteça. Uma teoria que possibilita estudar o tipo de situação que favorece essa aprendizagem é a Teoria das Situações Didáticas - TSD (BROUSSEAU, 2008) que, ao se referir à concepção de ensino, relata a necessidade de o professor escolher “bons problemas” que são situações que podem despertar o interesse dos alunos pela busca de solução para o problema proposto.

No próximo tópico apresentamos as principais ideias dessa teoria que nos auxiliam no desenvolvimento dessa pesquisa.

2.3 Conceito e situações *adidáticas*

Quando falamos em conceito matemático o pensamos em uma acepção ampla, não reduzindo à sua definição. Entendemos conceito no sentido atribuído por Vergnaud (1996) na Teoria dos Campos Conceituais. Assim, o conceito de função é composto por três conjuntos $C = (S, I, L)$:

> *S* é o conjunto de situações em que o sentido é constituído (referência);
>
> *I* é o conjunto de invariantes operatórios, conceito-em-ação e teoremas-em-ação que intervêm nos esquemas de tratamento dessas situações (o significado);
>
> *L* é o conjunto de representações linguísticas e não linguísticas que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades. (FRANCHI, 2008, p.211)

Desse modo, para que um determinado conceito possa adquirir significado para o aluno é preciso confrontá-lo com diferentes situações que fazem uso desse conceito permitindo-lhe (re)construir conhecimentos ao se valer de diferentes esquemas. Esse aluno também deve ser estimulado a reconhecer esse conceito e suas diferentes representações a fim de evitar associar o conceito a uma única representação.

Cabe ressaltar que situação para Vergnaud, na Teoria dos Campos Conceituais (TCC), e para Brousseau, na Teoria das Situações Didáticas, não tem exatamente o mesmo significado. Para Brousseau a situação envolve todo o trinômio aluno-professor-saber, dessa forma, a situação no sentido atribuído por Vergnaud pode fazer parte da situação tal como Brousseau a define. A maior diferença é o foco das duas teorias: na TCC o foco é a importância da variedade de situações por meio das quais o conceito adquire significado. Na TSD ao se analisar uma situação está-se analisando um conjunto de elementos que envolvem professor e aluno, ou seja, uma situação didática é entendida como todo o contexto que cerca o aluno, incluindo o professor .

A TSD, desenvolvida por Brousseau (1986), tem, segundo Almouloud (2007), o objetivo de caracterizar um processo de aprendizagem por meio de uma série de situações, naturais ou didáticas, reprodutíveis em sala de aula que conduzem os alunos à respostas frente à situação.

Essa teoria centra seus estudos nas situações didáticas nas quais estão presentes as interações entre professor, aluno e saber. Essas situações didáticas podem ser entendidas como um conjunto de relações estabelecidas entre um aluno ou grupo de aluno que estão em um ambiente formado por instrumentos didáticos organizado pelo professor que, por sua vez, pretende com isso, fazê-los adquirir um conhecimento ou construí-lo. Em nossa pesquisa buscamos propor um tipo especial de situação didática, as situações *adidáticas.* Nesse tipo de situação didática, o aluno até sabe que o professor quer lhe ensinar algo, mas esse algo não é revelado pelo professor. O professor elabora a situação possibilitando condições que favoreçam a construção do saber que deseja ensinar.

Para que o aluno possa viver esse tipo de situação é necessário que haja a *devolução*: o aluno deve tomar para si o problema que lhe foi proposto e querer resolvê-lo. Para que isso ocorra o papel do professor é de suma importância na escolha de bons problemas que levem em consideração os conhecimentos prévios dos alunos e que sejam de seu interesse estimulando-os a buscarem resolver o problema proposto. A escolha desses problemas deve levar em conta a possibilidade de o aluno agir, falar, refletir e evoluir por si próprio. Como o objetivo dessas situações é a construção de um novo saber, os conhecimentos prévios devem ser aplicados possibilitando aos alunos um ponto de partida que permita dar continuidade à resolução do problema proposto.

As situações *adidáticas* são subdivididas em três tipos de situações. A primeira delas é a de *ação,* na qual o aluno, com o conhecimento que já possui, age sobre o problema buscando formas de resolvê-lo. Para isso é importante que o problema elaborado pelo professor permita que esse conhecimento produza uma resposta, que deve se mostrar rapidamente inadequada, pois o objetivo desse tipo de situação é desenvolver a autonomia intelectual do aluno, que deve buscar verificar a validade da solução que propôs. Caso uma estratégia se mostre ineficiente esse aluno deve sentir a necessidade de substituí-la por outra/as. Para Almouloud (2007) a situação de ação deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroações do ambiente organizado por este. É de se esperar que em determinada situação surjam perguntas do tipo “está certo o que eu fiz?”, “essa é a resposta certa?”; frente a esses questionamentos o professor pode intervir com bons questionamentos utilizando os recursos por ele organizados a fim de provocar uma desestabilização cognitiva no aluno.

A segunda situação é a de *formulação* quando o sujeito comunica suas estratégias e formula conjecturas que solucionam o problema proposto. Esse tipo de situação pode ser favorecido com a realização de atividades em grupo, debates sobre o problema e a necessidade de comunicação da solução encontrada. Nesses debates podem aparecer conhecimentos utilizados na resolução apresentados de forma oral ou escrita tanto em língua materna quanto em língua matemática. Nessa situação o aluno tenta refinar sua solução afim de que esta seja compreendida por todos. Para que ocorra essa compreensão o aluno pode lançar mão de conhecimentos utilizados e de linguagem oral, escrita ou matemática.

A terceira situação é a de *validação* quando ocorre o posicionamento do aluno ou de um grupo de alunos em relação a uma estratégia; caso haja desacordo os envolvidos devem ser convencidos por meio de argumentos de que tal estratégia é válida ou inválida, custosa ou não. Enquanto o objetivo principal da situação de formulação é a comunicação das estratégias, a validação busca o debate sobre a certeza da validade dessas estratégias formuladas nas situações de ação e de formulação (ALMOULOUD, 2007).

Essas três situações não ocorrem em uma ordem predeterminada e podem ser observadas diversas vezes ao longo da resolução de um problema. Para manter o funcionamento dessas situações, o professor atua como um mediador que questiona e estimula a busca por estratégias de resolução e em nenhuma hipótese fornece a resolução do problema ou dicas sobre o conteúdo ou estratégia matemática a ser mobilizada. O professor age, assim, diretamente sobre a situação, e a produção do conhecimento deve ser feita pelos alunos que assumem papel ativo nesse processo. O professor é o provocador das situações, aquele que estimula o debate, levanta dúvidas, faz com que o aluno continue no jogo. E, nesse tipo de situação o aluno é co-responsável pela produção do saber.

Se a situação ocorrer como previsto, ou seja, for *adidática*, novos conhecimentos - relacionados às estratégias formuladas e/ou validadas - poderão ser produzidos. Esses conhecimentos deverão ser *institucionalizados* para adquirirem o status de saber e passarem, assim, a fazer parte do rol de conhecimentos produzidos no processo de ensino tornando-os disponíveis para utilização na resolução de outros problemas. Nesse momento a situação deixa de ser *adidática*, pois cabe ao professor o papel de estabelecer o status de saber a esses conhecimentos.

Guiados pelos estudos realizados até o momento, entendemos que a aprendizagem de um determinado conceito, seja ele matemático ou não, deve ocorrer por meio de situações que tenham significado para os estudantes, que tenham um vínculo com o que já seja de seu domínio. Acreditamos que são essas situações que possibilitam aos alunos vivenciarem o papel de investigador, estimulando a criatividade, a investigação e a argumentação contribuindo para que esses resolvam os problemas e interpretem as informações dadas e/ou obtidas. Dessa forma, a aprendizagem do conceito de função não se restringe a compreender a definição apresentada nos livros, mas sim em utilizar as suas diversas ideias para resolver situações que envolvam as noções de variável, dependência, regularidade e generalização desenvolvidas com suas diferentes formas de representação. Assim uma sequência didática proposta aos alunos que vise a aprendizagem do conceito de função deve levar em consideração esses aspectos.

A seguir apresentamos nossas escolhas metodológicas, os sujeitos de pesquisa e a sequência de atividades que busca levar os alunos a transitarem entre os diversos registros de representação semiótica relacionados ao conceito de função sem privilegiar um único sentido de conversão. Iniciaremos a sequência com uma situação que permite colocar o aluno em situação de investigação: a discussão sobre planos de telefonias celulares. Essa situação funcionará como disparadora para todo o estudo de funções de nossa sequência didática.

2.4 Caminhos metodológicos

Como nosso objetivo é investigar a aprendizagem de função por alunos do 9º ano do ensino fundamental, propusemos realizar uma sequência didática em uma sala de aula com todos os alunos da turma, em seu “ambiente natural”, levando em consideração as condições que um professor tem ao desenvolver suas aulas com os alunos. No momento da realização dessa sequência didática assumimos também o papel de professor regente da turma. Para tanto escolhemos uma metodologia de pesquisa que leve em consideração realizações didáticas em sala de aula e que permita prever dificuldades e possíveis estratégias (ou atividades) para superação de tais dificuldades.

Para atingir nosso objetivo propusemos uma sequência de ensino estruturada nos moldes da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) para poder investigar nossa proposta de articulação dos registros algébrico e geométrico para a aprendizagem do conceito de função. Acreditamos que essa metodologia de pesquisa pode nos auxiliar uma vez que se caracteriza por um “esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino.” (ARTIGUE, 1996, p. 196).

A Engenharia Didática se divide em quatro fases: análise preliminar, concepção da sequência de ensino e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*. Cabe ressaltar que essas fases são distintas, porém estão relacionadas e não se seguem, necessariamente, uma após a outra.

A análise preliminar serve de apoio para a concepção da sequência de ensino. Esta fase pode ser constituída da análise:

- epistemológica do conteúdo visado pelo ensino,
- do ensino atual e seus efeitos,
- das concepções dos alunos, dificuldades e obstáculos que marcaram sua evolução desse conteúdo.
- do ambiente em que ocorrerá a realização da sequência de ensino (ARTIGUE,1996).

Em nossa pesquisa essa fase se deu inicialmente pela análise de artigos, dissertações, teses, livros e documentos oficiais que abordam o conteúdo de função. Essa análise está apresentada no Capítulo II dessa dissertação e constitui parte do quadro teórico da nossa pesquisa. Nessa análise procuramos identificar possíveis dificuldades relacionadas à compreensão do conceito, bem como estratégias de ensino já utilizadas por outros autores para a superação das mesmas. Também nos preocupamos em compreender como vem sendo ensinado o conceito de função e as sugestões de novas abordagens de ensino relacionadas a esse objeto matemático.

A segunda fase, concepção e a análise *a priori* da sequência didática, tem como base os estudos realizados na fase anterior. A partir desse estudo o pesquisador escolhe agir sobre um determinado número de variáveis do sistema de ensino. A escolha dessas variáveis se dá pela possibilidade de alteração nas estratégias de resolução das atividades da sequência didática, cujo objetivo é favorecer a construção de um conhecimento. A elaboração dessa sequência de ensino (sequência didática) comporta uma parte descritiva e outra hipotética. Desse modo, nessa fase

> -descrevem-se as escolhas efetuadas ao nível local [...] e as características da situação adidática que delas decorrem,
> -analisa-se o peso que o investimento nessa situação pode ter para o aluno, particularmente em função das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele dispõe, uma vez operada a devolução, num funcionamento quase isolado do professor,

> -preveem-se os campos de comportamentos possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efetuada permite controlar o sentido desses campos e assumir, em particular, que os comportamentos esperados, se intervierem, resultarão claramente da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem (ARTIGUE, 1996, p. 205)

Levando em consideração as possíveis dificuldades a serem enfrentadas pelos sujeitos da nossa pesquisa, as alternativas de superação dessas e os registros a serem mobilizados elaboramos uma sequência didática constituída de 8 sessões de atividades divididas em 4 blocos.

Salientamos que, apesar de a análise a *priori* ser feita, inicialmente, antes do desenvolvimento da sequência com os alunos, ela pode ser retomada a qualquer momento da pesquisa, como afirma Bittar (2014, p.6):

> A análise a priori não é uma "receita" a ser seguida e sim um exercício de reflexão e preparo para a atuação do pesquisador no momento da realização das atividades com os alunos. Nesse sentido, quaisquer mudanças, na sequência didática, que se façam necessárias para favorecer a aprendizagem dos alunos são bem vindas desde que apoiadas nos estudos realizados.

Na experimentação, 3ª fase dessa metodologia, o pesquisador aplica a sequência didática construída na fase anterior e sobre a qual realiza a quarta fase da engenharia, a análise *a posteriori*. Essa análise se apoia no conjunto de dados recolhidos durante a experimentação formada por:

> [...] observações realizadas nas sessões de ensino, mas também nas produções dos alunos na sala de aula ou fora dela. Esses dados são frequentemente completados por dados obtidos através da utilização de metodologias externas: questionários, testes individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou no final. (ARTIGUE, 1996, p.208)

É pelo confronto dessas duas análises que se fundamenta a validação das hipóteses envolvidas na investigação (ARTIGUE, 1996). Esse confronto deve ser realizado ao final de cada sessão para possíveis alterações nas sessões posteriores. Esse confronto sendo realizado constantemente possibilita ao pesquisador, caso necessário, planejar outra situação ou alterar uma situação planejada (BITTAR, 2014). Esse replanejamento pode ser feio perante a apresentação, por parte dos alunos, de concepções erradas ou dificuldades já apresentadas em outras pesquisas. Percebemos assim, que o confronto entre as análises a *priori* e a *posteriori* é realizado ao longo do desenvolvimento da sequência e não ao final do processo, o que impossibilitaria "correções de rumo".

2.5 Sujeitos de pesquisa

Para realização dessa pesquisa necessitávamos de uma turma de 9º que ainda não tivesse tido contato formal com o conteúdo de função para respondermos nossa questão de pesquisa. Necessitávamos também, da disponibilidade de um professor em ceder suas aulas para que assumíssemos o papel de professor dessa turma de alunos. Em uma conversa informal com um professor de Matemática da rede municipal de Campo Grande/MS esse se dispôs a ceder suas aulas a partir do mês de maio de 2013. Esse professor lecionava para duas turmas de 9º ano no período vespertino, período no qual realizaríamos a pesquisa. Foi sugerido que escolhêssemos a turma do 9º C, pois acreditava ser uma das mais participativas. Essa turma possuía 28 alunos matriculados.

No mês de abril desse mesmo ano entramos em contato com a direção da Escola Municipal Professor Vanderlei Rosa de Oliveira que autorizou nossa pesquisa na turma desse professor, mediante a autorização do secretário municipal de educação. Nessa escola, como nas demais da rede municipal, as turmas do ensino fundamental contam com quatro aulas de matemática semanais com duração de uma hora cada. No caso dessa turma, divididas em dois dias por semana.

No dia 15 de maio de 2013 fizemos o primeiro contato com a turma do 9º C dessa escola, momento no qual o professor regente nos apresentou aos alunos. Nessa oportunidade tivemos uma conversa com os alunos sobre o que pretendíamos realizar e explicamos que durante a realização dos nossos trabalhos eles estariam sempre em grupos, e que esses grupos deveriam se manter até o final da pesquisa. Explicamos também que os dados seriam coletados mediante a gravação de áudio, vídeo e material escrito por eles. Ao final dessa breve conversa distribuímos aos alunos a seguinte atividade (anexo):

Escolha do plano correto de celular pode gerar economia de R$ 1 mil, disponível em http://g1.globo.com/sao-paulo/noticia/2012/05/escolha-do-plano-correto-de-celular-pode-gerar-economia-de-r-1-mil.html acessado em 13/05/2013.

Solicitamos que os alunos realizassem a leitura do texto buscando destacar o que achavam mais importante e elencar algumas dúvidas para iniciarmos uma conversa sobre essa situação na aula seguinte. Esse texto teve por objetivo iniciar as discussões da 1ª sessão de nossa sequência didática.

Capítulo III: Construção e análise da sequência didática

Nesse capítulo apresentamos a elaboração e o desenvolvimento de nossa sequência didática composta pela análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* de 5 sessões. A análise *a priori* das três últimas sessões se encontram nos apêndices. Não realizamos a análise *a posteriori* dessas sessões por elas não tratarem diretamente do nosso objeto de pesquisa. Inicialmente apresentaremos as variáveis didáticas sobre as quais agimos no momento da realização da sequência didática.

3.1 Variáveis didáticas

Variáveis didáticas são os “elementos da situação que, ao serem alterados implicam em mudanças de estratégias de resolução por parte dos alunos” (BITTAR, 2014). A escolha das variáveis didáticas deve, assim, ser feita cuidadosamente para que os objetivos de cada atividade possam ser alcançados. Nesse parágrafo apresentamos e justificamos as variáveis didáticas com as quais trabalhamos na elaboração da sequência didática.

3.1.1 Sentido da conversão

Como já mencionado, geralmente um sentido de conversão é privilegiado no ensino, aquele que causa menos dificuldades para os alunos. Em se tratando do conceito de função, podemos citar como exemplo a conversão do registro algébrico para o registro gráfico. Uma das explicações para isso é o fato de que “nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada” (DUVAL, 2003, p. 20). Sabemos também que ao se manter um único sentido de conversão podemos estar impedindo o aluno de reconhecer o mesmo objeto matemático em registros de representações com conteúdos diferentes o que, segundo Duval (2003), limita a capacidade dos alunos em utilizar conhecimentos já adquiridos. Dessa forma, propor situações em que há variação do sentido de conversão deve possibilitar aos alunos a mudança de estratégias para resolver o que foi proposto. Essa mudança de estratégia pode exigir a elaboração ou utilização de conhecimentos diferentes para cada sentido de conversão.

Acreditamos que os conhecimentos mobilizados na conversão do registro tabular para o algébrico não sejam sempre os mesmos conhecimentos mobilizados ao se efetuar a conversão do registro algébrico para o tabular.

3.1.2 O contexto da atividade

A escolha do contexto da atividade permite que os alunos utilizem seus conhecimentos advindos de suas vivências práticas e de suas interações sociais prévias, dando significado às suas ações e validando ou não suas estratégias de resolução. No entanto existe, segundo os PCN (BRASIL, 1998), uma distorção perceptível no que se refere à interpretação equivocada da ideia de contexto, referindo-se apenas a trabalhar com o que se supõe fazer parte do dia-a-dia do aluno.

> é importante considerar que esses significados podem ser explorados em outros contextos como as questões internas da própria Matemática e dos problemas históricos. Caso contrário, muitos conteúdos importantes serão descartados por serem julgados, sem uma análise adequada, que não são de interesse para os alunos porque não fazem parte de sua realidade ou não têm uma aplicação prática imediata (BRASIL, 1998, p. 23).

Desse modo acreditamos que variar o contexto da atividade, irá permitir aos alunos atribuir significado ao conteúdo de função. A mudança da maneira de expor as informações de um problema pode gerar diferentes interpretações como, por exemplo, *listar em ordem a sequência de números pares* e obter os valores de y com *y = 2.x e x sendo um número natural*. Essas duas formas de se referir a sequência de números pares utilizam conhecimentos distintos. A mudança do valor dessa variável didática ora exige conhecimentos de âmbito social, ora conhecimentos de âmbito matemático.

Deste modo acreditamos na importância de se variar o contexto relacionado a um conteúdo, afim de que os alunos possam estabelecer relações entre os diferentes campos do conhecimento matemático e sua realidade.

Nossa sequência didática está dividida em dois blocos de atividades, e é composta, no total, por cinco sessões. Apresentaremos as análises *a posterori* logo após as análises *a priori* de cada sessão. Ao final de cada bloco tecemos alguns comentários sobre a realização das atividades realizadas.

3.2 Bloco 1: Institucionalização do saber matemático função

Este primeiro bloco de atividades é composto pelas sessões 1, 2 e 3. Nas 1ª e 2ª sessões são propostas atividades que acreditamos ser de interesse da maioria dos alunos, pois tratam de situações envolvendo planos de telefonia celular que a maioria deles possuem. Nessas sessões propõe-se a análise de planos pós-pagos de duas operadoras de linhas de celular com a intenção de que os alunos observem as grandezas envolvidas nessa situação, a dependência entre elas e como elas se relacionam. Elaboramos essas duas sessões de modo que tal análise seja feita nos registros tabular, da língua materna e gráfico. Pela dificuldade de expressar essa relação por meio de expressões algébricas, não exigimos dos alunos a sua formulação nesse registro, no entanto realizamos alguns questionamentos que podem vir a contribuir com algum tipo de generalização. Na 3ª sessão retomamos as discussões e exemplos das sessões anteriores para construirmos a definição de função. Tendo identificado a relação entre as grandezas e observado a dependência do valor a pagar em relação ao tempo de utilização, o objetivo é construir, junto com os alunos, a definição dada por Dirichlet deixando claro que essa relação é um exemplo entre tantas outras que podem ser consideradas como funções. Aproveitamos a discussão para observar os conjuntos que são denominados Domínio, Contra domínio e Imagem da função, que não definimos formalmente. Busca-se assim, levar os alunos a reconhecerem esses conjuntos nas atividades realizadas.

Na escolha dessa situação-problema levamos em consideração algumas dificuldades apresentadas no quadro 1, que podem surgir durante a realização das atividades, tais como as seguintes:

- não compreender os registros utilizados para representar o conceito, bem como realizar conversão entre eles;
- crer que toda função é uma função linear;
- dificuldade em localizar elementos do domínio e imagem de uma função nos eixos em representações gráficas;
- confundir representações de pontos no plano cartesiano;
- utilizar ideias de proporcionalidade para resolver problemas funcionais.

Acreditamos que a escolha dessa situação-problema, bem como as sugestões de superação contidas no quadro 2, apresentado no capítulo II desse trabalho, favorecem a superação dessas dificuldades.

3.2.1 Análise *a priori* da 1ª sessão: entrando no jogo

Na primeira sessão devem ser estabelecidas relações entre duas grandezas. É apresentada uma situação envolvendo planos de telefonia móvel para que os alunos relacionem **o valor total a pagar** com os **minutos de ligações realizadas.** Para tanto apresentam-se os seguintes planos de telefonia móveis

Quadro 3: Dados da operadora C no registro tabular

OPERADORA C			
Plano (min.)	**Valor por minuto excedente (Vme)**	**Franquia de minutos locais para fixo e outras operadoras/mês**	**Valor mensal do plano com torpedos, internet e minutos em ligações para celulares "C" ilimitados (Vm)**
60	R$ 0,95	60	R$ 82,70
100	R$ 0,95	100	R$ 97,90
200	R$ 0,95	200	R$ 135,90
400	R$ 0,75	400	R$ 211,90
600	R$ 0,75	600	R$ 287,90
1000	R$ 0,75	1000	R$ 439,90
2000	R$ 0,75	2000	R$ 819,90

Fonte: Adaptado de uma operadora de telefonia.

Quadro 4: Dados da operadora O no registro tabular

OPERADORA O			
Plano (min.)	**Valor por minuto excedente (Vme)**	**Franquia minutos locais para fixo e outras operadoras/mês**	**Valor mensal do plano com torpedos, internet e minutos em ligações para celulares "C" ilimitados (Vm)**
60	R$ 0,83	60	R$ 96,00
110	R$ 0,72	110	R$ 112,00
220	R$ 0,67	220	R$ 142,00
400	R$ 0,62	400	R$ 172,00
600	R$ 0,62	600	R$ 212,00
800	R$ 0,62	800	R$ 262,00
1250	R$ 0,62	1250	R$ 362,00

Fonte: Adaptado de uma operadora de telefonia.

A escolha dessa atividade deve-se à necessidade de levar em consideração os conhecimentos prévios dos alunos e especialmente de despertar seu interesse em resolver as atividades para que possa ocorrer a devolução (BROUSSEAU, 2003). O objetivo é possibilitar o debate crítico e a análise de informações em um registro conhecido pelos alunos para representar a relação entre duas grandezas. Essas escolhas consideram o desenvolvimento epistemológico do objeto matemático o que justifica a opção pelo registro tabular para representar a relação entre duas grandezas. Pesquisas como a de Martins (2006) mostram que iniciar o estudo de funções por situações que relacionam conjuntos numéricos compromete e limita a apreensão desse conceito, por esse motivo a primeira atividade da sequência aqui proposta relaciona grandezas.

A discussão com os alunos sobre qual plano contratar deve promover o debate crítico, uma vez que o trabalho em grupos favorece a troca de conhecimentos que culmina com a observação de que há planos mais vantajosos economicamente. Os alunos devem observar a necessidade de realizar uma pesquisa entre operadoras e de realizar alguns cálculos para a obtenção do valor total referente a contratação de determinado plano. O encaminhamento do professor nesse momento é manter o diálogo em torno da resolução dessa atividade. Como o objetivo é escolher um plano e uma operadora o debate é direcionado para uma única escolha que deve ser aceita pela totalidade dos alunos da sala. Nesse momento os alunos devem vivenciar a situação de validação de suas estratégias tentando convencer os demais de sua validade.

As atividades a seguir se baseiam na análise dessas tabelas e devem ser realizadas em grupos, pois acredita-se que o debate coletivo favorece o surgimento de diferentes pontos de vista. Além disso, o grupo deve buscar uma solução comum (única para o grupo) o que contribui para as situações de ação, formulação e validação das situações *adidáticas.*

ATIVIDADE 1: Qual seria o melhor plano para uma pessoa que utiliza normalmente:

a) 400 minutos por mês para falar com outras operadoras ou fixo?
b) 150 minutos por mês para falar com outras operadoras ou fixo?
c) 700 minutos por mês para falar com outras operadoras ou fixo?

Registre o que o grupo fez para chegar à resposta.

Nessa primeira atividade a variável didática Contexto assume o “valor”: contexto do cotidiano e a variável didática sentido da conversão assume o “valor” conversão do registro língua materna para o registro numérico.

A escolha de 400 minutos para o item *a* deve-se ao fato de esse dado ser facilmente localizado nas tabelas. Já as quantidades dos itens *b* e *c* não constam diretamente nas tabelas, o que deve fazer com que os alunos estabeleçam estratégias para encontrarem o melhor plano. Na realização desses itens espera-se que os alunos coloquem questões do tipo “ela deve contratar o plano com franquia superior?”, “como faço quando a quantidade que ela vai usar não consta na tabela?”. Frente a esses questionamentos o papel do professor não é o de dar indícios de como resolver as questões, pois os alunos devem elaborar seu conhecimento. Assim, o professor deve mediar a realização da atividade, propondo questões e esclarecendo dúvidas que não sejam relativas ao saber matemático em jogo. Essa atividade favorece o aparecimento de situações de ação e formulação, pois exige a elaboração de alguma estratégia para determinar o melhor plano que pode ser compartilhada com os demais colegas a fim de avaliar sua veracidade permitindo assim vivenciar o momento de validação de uma estratégia.

No momento da realização das atividades o professor é responsável por mediar os diálogos e as contribuições entre os participantes dos grupos e entre os grupos em momentos de exposição de estratégias. A seguir são apresentadas algumas estratégias para a resolução da *atividade 1*.

No caso específico do item *a*, basta localizar o plano referente à utilização de 400 minutos presente na tabela das operadoras o que acreditamos não caracteriza uma dificuldade para os alunos. Para os itens *b* e *c* podem surgir resoluções utilizando cálculos numéricos o que caracteriza um tratamento nesse registro.

Minutos excedentes 150 – 60 = 90 Valor total = 82,70 + 90.0,95 = **168,20**

Item b, utilizando o plano de 60 min. da operadora C

Essa estratégia envolve a interpretação dos dados expressos no registro tabular e a conversão desse registro para o registro numérico. Para essa estratégia os alunos devem encontrar inicialmente a quantidade de minutos excedentes e combiná-la com dados expressos na tabela. Como essa conversão utiliza conhecimentos de interpretação de dados expressos em tabelas acredita-se que podem surgir algumas dificuldades. Realizada a conversão há a necessidade de um tratamento numérico. Essa resolução não exige uma notação algébrica, mas os cálculos de multiplicação e adição serão necessários para a obtenção do resultado final. Para que os alunos não percam o foco da atividade, será permitido o uso de calculadoras para a realização dos cálculos mencionados, uma vez que um cálculo incorreto pode prejudicar a compreensão da relação entre as grandezas bem como levá-los a escolha incorreta do plano de telefonia.

Na busca do menor valor mensal, as tabelas podem levar os alunos a concluírem que os planos com franquia de 60 minutos de ambas operadoras são os melhores economicamente até mesmo desconsiderando os minutos excedentes. Outra estratégia é utilizar o plano com franquia mais próxima tanto inferior quanto superior à quantidade de minutos utilizados em cada caso.

Para os dados das tabelas e os valores propostos nessa atividade a estratégia de contratar um plano cuja franquia seja superior a quantidade utilizada é considerada a ideal porque é a que resulta no menor valor total a ser pago, permitindo assim escolher a melhor operadora e seu respectivo plano.

A próxima atividade tem o objetivo de discutir a escolha pela estratégia de contratar o plano de menor valor mensal de uma operadora e continuar a discussão sobre a escolha de um plano mais vantajoso economicamente. A *atividade 2* se diferencia da anterior por sua resposta ser um plano com franquia inferior à quantidade utilizada.

ATIVIDADE 2: Com as informações da atividade anterior responda as questões:

a) É vantajoso para uma pessoa que utiliza 250 minutos de ligações para fixo e outras operadoras contratar o plano com franquia de 60 minutos oferecidos pelas operadoras **C** ou **O**? Justifique sua resposta.

b) Pensando em economizar dinheiro qual plano essa pessoa deve escolher? E em qual operadora?

Aqui as variáveis didáticas assumem os mesmos valores da atividade 1, contexto do cotidiano e conversão do registro língua materna para registro numérico.

O item *a* dessa questão pretende levar os alunos a perceberem que há uma grande diferença entre a franquia oferecida pela operadora e a quantidade utilizada pelo usuário, o que torna essa escolha não vantajosa. As estratégias mencionadas para a *atividade 1* podem ser empregadas nessa atividade o que levaria à observação de que o plano que oferece o menor valor para a utilização de 250 minutos é o plano com franquia de 220 minutos oferecido pela operadora **O.**

Para o encerramento da 1ª sessão, são apresentados na lousa as respostas dos alunos e os procedimentos usados para obter tais respostas. Ao final dessa sessão espera-se discutir, junto com os alunos, as seguintes questões:

O que precisamos fazer antes de contratar um plano de telefonia móvel?
Quais os cálculos que precisamos realizar?

3.2.2 Experimentação e análise *a posteriori* da 1ª sessão

A primeira sessão contou com a participação de 24 alunos. Iniciamos a sessão discutindo a atividade "Escolha do plano correto de celular pode gerar economia de 1 mil reais", entregue aos alunos na semana anterior à realização dessa sessão. Nesse momento pretendíamos ouvir o que os alunos consideravam importante na leitura que haviam realizado. Nesse diálogo percebemos os planos e as promoções que os alunos utilizavam o que possibilitou um direcionamento para o que nos interessava, os planos pré pagos e pós pagos e as estratégias mencionadas no texto para economizar dinheiro na hora de contratar um plano de telefonia móvel. Ao serem questionados sobre a forma de cobrança realizada nos dois tipos de plano, grande parte dos alunos expuseram as suas opiniões das quais destacamos a participação do aluno Adriano[4], que compreendia corretamente o funcionamento de um plano pós pago e o procedimento para se efetuar a cobrança por este tipo de serviço.

Na continuação do diálogo os alunos foram questionados sobre quais estratégias utilizadas para economizar dinheiro ao se utilizar o celular e no momento de se contratar um plano de telefonia móvel. Para essa questão surgiram como resposta algumas estratégias, entre elas a de usar mais de um chip e pesquisar os planos e as promoções oferecidas pelas operadoras. Essas respostas foram usadas como ponto de partida para iniciarmos as atividades. Antes disso, retomamos uma frase do texto em que o autor menciona o desafio de escolher e entender qual é o melhor plano para uma determinada pessoa e que hoje em dia existem simuladores para isso na internet.

O início da *atividade 1* se deu com a formação dos grupos, denominados de G1, G2, G3, G4, G5 e G6, e com a distribuição das tabelas com dados dos planos das operadoras O e C para que analisassem as informações fornecidas. Após alguns minutos questionamos a turma sobre possíveis dúvidas referentes aos dados dessa tabela. Nesse momento Adriano disse que ao realizar o cálculo 60 x 0,95 não obteve R$82,70 conforme consta na tabela.

[4] Usaremos nomes fictícios para os alunos dessa turma.

Quadro 5: Dados utilizados pelo aluno Adriano.

OPERADORA C			
Plano (min.)	Valor por minuto excedente (Vme)	Franquia de minutos locais para fixo e outras operadoras/mês	Valor mensal do plano com torpedos, internet e minutos em ligações para celulares "C" ilimitados (Vm)
60	R$ 0,95	60	R$ 82,70

Fonte: Adaptado de uma operadora telefônica.

Diante de tal afirmação colocamos o cálculo no quadro e iniciamos um debate com a turma:

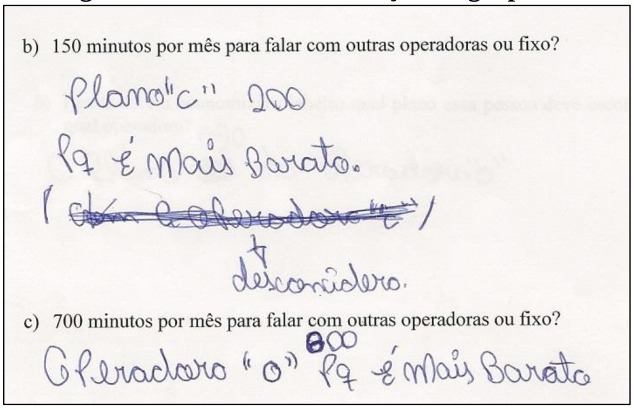
Professor: Por que será que o cálculo do colega de vocês deu um valor diferente do valor mensal da tabela? Vocês entenderam o cálculo que ele fez?
Adriano: Eu multipliquei a quantidade de minutos pelo valor de cada minuto!
Professor: Na tabela, o que corresponde ao valor de R$ 0,95?
Alunos: Minutos excedentes
Professor: Qual o significado de minuto excedente?
Alunos: Após o plano, uma hora.
Professor: Então, esse valor, R$ 0,95, só será cobrado após o uso da franquia oferecida pelo plano.
Professor: O que está incluso no valor mensal do plano? O que ele paga?
Alunos: Torpedos, internet e ligações para a mesma operadora.
Professor: ...E a franquia para minutos locais para fixo e outras operadoras?
Alunos: Também!

Ao percebermos que Adriano não havia interpretado corretamente os dados, tentamos ajudar, entretanto, nesse momento, a situação deixou de ser *adidática*, pois fornecemos imediatamente a resposta (linha 8 do excerto).

Tendo realizado as devidas observações e esclarecimentos acerca do significado dos dados, distribuímos as questões da *atividade 1* ao grupo. Para melhor análise do material produzido pelos alunos, sugerimos que as resoluções fossem feitas a caneta, dessa forma não perderíamos as tentativas de resolução e nem a evolução das mesmas até a obtenção da solução.

No momento da resolução dessa atividade observamos que alguns grupos utilizavam apenas o registro tabular para justificar as resoluções. Ao serem questionados sobre o motivo de um plano ser vantajoso destacamos o argumento utilizado pelo grupo G2.

Figura 1: Protocolo de resolução do grupo G2


b) 150 minutos por mês para falar com outras operadoras ou fixo?

Plano "c" 200

R$ é Mais Barato.

(~~[illegible]~~)

desconsidero.

c) 700 minutos por mês para falar com outras operadoras ou fixo?

Operadora "O" 800 R$ é Mais Barato

Fonte: Dados da pesquisa

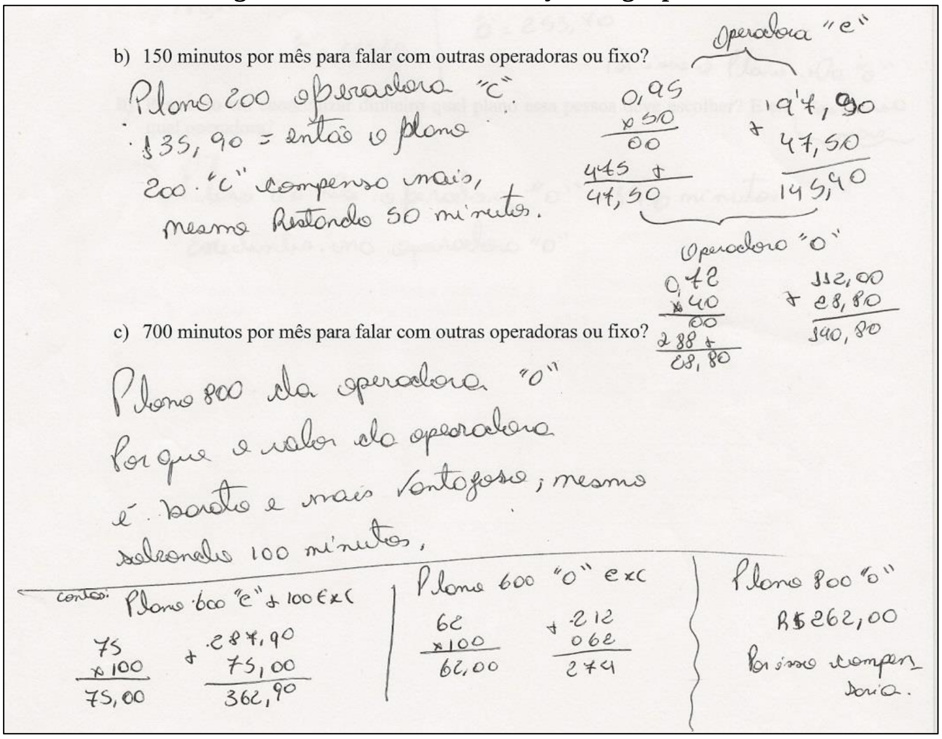
A resolução apresentada por este grupo indica a opção por um plano com franquia excedente à quantidade de minutos utilizados. A princípio desconsidera-se a hipótese de que um plano com franquia inferior à utilizada possa resultar em um valor mensal menor. Essa justificativa pode estar relacionada à comparação com o valor mensal da franquia de 220 minutos da operadora O – R$ 142,00 – bem como o valor mensal da franquia de 1000 minutos da operadora C – R$ 439,90.

Para alguns grupos a percepção da necessidade de se comparar dois planos de uma mesma operadora, um com franquia superior e outro com franquia inferior ao necessário na atividade, não foi imediata. Citamos como exemplo o grupo G1. Aparentemente suas estratégias eram de análise sobre os valores expressos na tabela: escolhiam o plano que superava a franquia exigida na atividade e que também era mais barato comparado a outros planos. Ao serem questionados sobre a possibilidade de se contratar um plano com franquia inferior à utilizada no item *b*, os alunos analisaram a tabela e disseram ser possível sim, porém necessitariam de alguns cálculos para determinar o valor total a pagar.

O grupo G5 também mobilizou os dois registros: um de seus integrantes considerou a necessidade de comparar os planos com franquia inferior e superior à utilizada na atividade. Esse integrante apresentou sua estratégia aos demais e argumentou que isso era necessário para identificar o plano mais barato.

Esses dois grupos usaram a mobilização dos dois registros para comparar os valores totais a pagar de planos com franquia superior e inferior aos minutos utilizados.

Figura 2: Protocolo de resolução do grupo G5


b) 150 minutos por mês para falar com outras operadoras ou fixo?

Plano 200 operadora "C". 135,90 = então o plano 200 "C" compensa mais, mesmo restando 50 minutos.

Operadora "C"

0,95 x 50 = 47,50

197,90 + 47,50 = 145,40

Operadora "O"

0,72 x 40 = 28,80

112,00 + 28,80 = 140,80

c) 700 minutos por mês para falar com outras operadoras ou fixo?

Plano 800 da operadora "O" Porque o valor da operadora é barato e mais vantajoso; mesmo sobrando 100 minutos.

contas: Plano 600 "C" + 100 exc

75 x 100 = 75,00

287,90 + 75,00 = 362,90

Plano 600 "O" exc

62 x 100 = 62,00

212 + 062 = 274

Plano 800 "O"

R$ 262,00

Por isso compensaria.

Fonte: Dados da pesquisa

No momento da resolução dessa atividade realizamos alguns questionamentos que possibilitassem aos alunos a busca de outras maneiras de justificar a resolução para a atividade. Naquele momento procuramos não direcionar para a escolha de uma operadora de telefonia e sim para o debate entre o grupo sobre ideias que possibilitassem chegar a uma conclusão.

Dando continuidade aos trabalhos apresentamos aos grupos a *atividade 2* cujo principal objetivo era a mobilização dos registros tabular e numérico. Tal objetivo não foi atingido pelos grupos G2 e G6 que mantiveram seus argumentos levando em consideração somente os valores expressos na tabela. Os outros grupos, como já haviam percebido a necessidade de utilizar alguns cálculos, realizaram essa atividade da mesma maneira que a atividade anterior.

Apresentamos a seguir a resolução do grupo G3. Um integrante desse grupo realiza os cálculos em outro local e escreve na folha seus argumentos bem como os valores obtidos nos cálculos.

Figura 3: Protocolo de resolução do grupo G3

ATIVIDADE 2: Com as informações da atividade anterior responda as questões:

a) É vantajoso para uma pessoa que utiliza 250 minutos de ligações para fixo e outras operadoras contratar o plano com franquia de 60 minutos oferecido pelas operadoras **C** ou **O**? Justifique sua resposta.

Não, por que o consumidor ~~foi~~ vai acabar estorando o valor e vai ficar no prejuiso, por que ele não vai conseguir pagar a conta no futuro, por que ela vai pagar mais 190 que vai resultar num valor de 180,5 reais que vai pesar para ela, na operadora C, e na operadora O ela vai pagar 157,7, qualquer valor desse vai pesar para ela de qualquer jeito.

b) Pensando em economizar dinheiro qual plano essa pessoa deve escolher? E em qual operadora?

O melhor sera o da operadora O o plano 220, por que se ela estorar ela pagará mais 20,10reais a mais que ficara mais perto do que o 400, e a operadora C, também não tem um plano que supere ele, por que se for o plano 200, ela pagaria mais 87,5 que ficaria mais facil, então será o plano 220 da operadora O.

Fonte: Dados da pesquisa

Por meio de debate com o grupo, entendemos que *estourar* significava para eles ultrapassar a franquia do plano. Os valores presentes nessa resolução foram feitos em outras folhas ou até mesmo nas mesas.

Faltando 20 minutos para o final da sessão realizamos o encerramento das atividades anotando no quadro as ideias dos alunos para resolver as atividades e solicitando que os mesmos explicassem os seus procedimentos. Essa exposição, bem como o diálogo estabelecido entre os integrantes dos grupos, possibilitou que alguns alunos que não haviam adotado a estratégia de comparação entre os planos com franquia inferior e superior à dada na atividade, percebessem a sua necessidade. Esses momentos, ocorridos nos grupos e posteriormente na turma de alunos caracterizam-se como validação de determinadas estratégias uma vez que a turma as consideraram verdadeiras e aceitáveis para as situações. Mesmo com esse debate percebemos, por meio dos materiais escritos, que parte dos alunos não alterou suas respostas.

Ao final dessa aula questionamos os alunos sobre o que devemos fazer para contratar um plano de telefonia móvel obtendo como respostas: pesquisar, comparar e realizar alguns cálculos de multiplicação e adição.

Diante do material analisado percebemos que o trabalho em grupo favoreceu a troca de ideias e o debate buscando a resolução da atividade. No entanto, integrantes de um mesmo grupo apresentaram respostas completamente distintas. Isso nos dá indícios que não houve, nesses grupos, a validação de uma estratégia que permitisse resolver essa atividade. Tendo esclarecido alguns termos usados na tabela alguns alunos mobilizaram os registros tabular e numérico o que possibilitou a criação de uma estratégia de resolução para as atividades.

Acreditamos ter atingido o objetivo para a sessão uma vez que foi observada, por parte dos alunos, a necessidade de se estabelecer uma relação entre grandezas envolvidas no problema além de realizar uma comparação entre planos e operadoras antes de contratar um serviço.

3.2.3 Análise *a priori* da 2ª sessão: Apresentando outras formas de representar a relação entre duas grandezas

Nessa sessão trabalha-se outros registros para representar a relação entre **quantidade de minutos de ligações** e **valor total a pagar**: língua materna, tabela e gráfica. Nosso objetivo é levar os alunos a analisar e reconhecer informações referentes ao plano de telefonia móvel nos diferentes tipos de registros de representação semiótica.

A sessão teve início com a apresentação de uma situação na qual um funcionário de uma operadora de telefonia móvel teve de apresentar um plano de telefonia, inicialmente escrito em língua materna, nos formatos de tabela e de gráfico. O plano telefônico é o seguinte:

> A nossa companhia, STAR, oferece um plano de telefonia móvel de 100 minutos locais para fixo e qualquer celular à R$ 86,00 mais R$ 1,00 o minuto excedente. Esse plano dá direito a serviços ilimitados como internet, torpedos e ligações para outros aparelhos da STAR.

A partir disso, levanta-se a discussão sobre a representação do plano nesses três registros e suas características particulares de cada registro. Essa discussão deve promover uma investigação a respeito de como determinar valores referentes a um determinado tempo de utilização do telefone. Além disso, possibilita ainda questionamentos sobre a inexistência de valores negativos e sobre a existência (ou não) de um número máximo de minutos a serem utilizados e vantagens e desvantagens de se utilizar uma determinada representação. Essa proposta pode favorecer a conversão entre os registros gráfico e de tabela, e a conversão desses para a língua materna, levando-os a perceberem que ambas as representações tratam do mesmo conceito, podendo valer-se de qualquer um dos registros na resolução de futuras atividades.

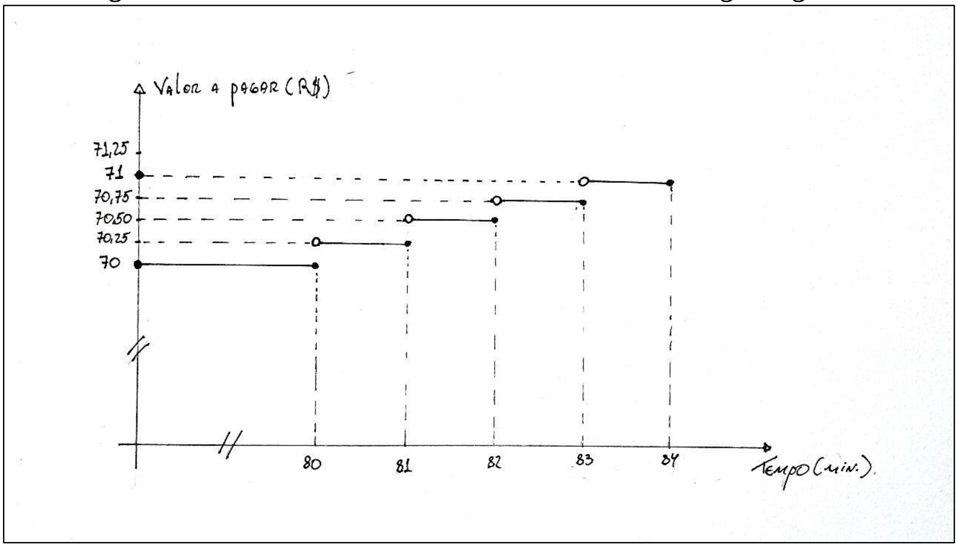
Na continuidade da sessão são distribuídos, para os mesmos grupos da sessão anterior, o Plano A, representado na forma de tabela, e um Plano B, na forma de gráfico, para que realizem as atividades a seguir.

Quadro 6: Dados do Plano A de telefonia móvel no registro tabular

Plano A	
Minutos Utilizados	**Valor a pagar**
1	40
2	40
3	40
4	40
...	...
50	40
50’01” a 51’	40,50
51’01” a 52’	41
52’01” a 53’	41,50
53’01” a 54’	42

Fonte: Autor da pesquisa.

Figura 4: Dados de um Plano B de telefonia móvel no registro gráfico



Fonte: Autor da pesquisa.

Junto com os dois planos é proposta a seguinte atividade:

Atividade 1: Observe os dados do plano de telefonia da operadora que vocês receberam e realizem as seguintes atividades: a) Represente o plano de telefonia móvel na forma gráfica. b) Represente o plano de telefonia móvel na forma de tabela. c) Descreva esses planos de telefonia móvel por meio de um pequeno texto ou frase.

As variáveis didáticas em jogo nessa atividade são o contexto cujo valor se mantém como contexto do cotidiano e a variável didática, sentido da conversão, cujos valores são a conversão do registro tabular para o registro gráfico, a conversão do registro gráfico para o registro tabular e a conversão dos registros tabular e gráfico para o registro língua materna.

Para realização dessa atividade são disponibilizadas folhas quadriculadas, folhas de sulfite e réguas para auxiliar a construção da representação gráfica com a escolha de uma escala e a localização de pontos. Espera-se que os alunos esbocem essas representações e consigam analisar os dados expressos nesses dois formatos sem perder a noção de relação entre variáveis e de dependência. Na realização dessa atividade os alunos podem apresentar dificuldade na construção do gráfico devido à escolha de escalas e a compreensão do tipo de gráfico exigido para a situação. A intenção com essa atividade é levá-los a compreender e analisar as informações referentes à franquia que seriam o valor do minuto excedente, valor a pagar por determinado tempo de utilização e a localização dessas nos diferentes registros de representação.

As conversões aqui exigidas poderiam ser realizadas fazendo uso de outras relações, mais simples, como uma relação proporcional ou entre conjuntos numéricos. Porém o abandono da situação que motivou o início das investigações prejudica a construção do conhecimento em jogo como observa Martins (2006).

O objetivo dessa atividade é levar os alunos a realizarem a conversão entre os registros de representação para essa relação levando-os a perceberem que esses registros representam o mesmo plano, ou seja, a mesma relação. A apresentação dessa situação e dos registros gráfico e de tabela devem contribuir para a validação das representações a serem realizadas pelos alunos.

Nesse momento considera-se que os alunos já tenham tido algum tipo de contato com coordenadas cartesianas e construção de gráficos e tabelas. Devido à complexidade dos dados nessas representações é necessária a mediação do professor com algumas considerações sobre escalas, truncamentos e intervalos (abertos e fechados). Nesse sentido escolheu-se valores para os minutos excedentes que não dificultem tais conversões.

Com a *atividade 1* todos os grupos deverão ter dois planos de telefonia expressos na forma de tabela e de gráfico a serem utilizados na atividade seguinte:

Atividade 2: Com os dados por vocês produzidos na atividade anterior respondam as questões deixando anotadas qual representação foi utilizadas para respondê-las.

a) Quanto pagará uma pessoa que utiliza 20 minutos no **Plano A**?
b) Quanto pagará uma pessoa que utiliza 50 minutos no **Plano B**?
c) Quanto pagará uma pessoa que utiliza 100 minutos no **Plano A**?
d) Quanto pagará uma pessoa que utiliza 150 minutos no **Plano B**?
e) Quanto tempo uma pessoa pode falar nos **Planos A e B** e pagar somente o valor fixo do plano?
f) Ao analisar essas representações qual a "abordagem" adotada pela operadora para valores "racionais ou fracionários"?
g) Com R$ 120,00 uma pessoa pode utilizar quanto tempo em ligações no **Plano A**?
h) Com R$ 50,00 uma pessoa pode utilizar quanto tempo em ligações no **Plano B**?

Nessa atividade estão presentes as mesmas variáveis didáticas da atividade 1. No entanto, a variável sentido da conversão pode assumir o valor da conversão dos registros tabular e gráfico para o registro numérico.

Nessa atividade os alunos devem reconhecer informações em diferentes representações de uma mesma relação. É necessário analisar as representações apresentadas e/ou construídas na atividade anterior buscando relacionar as grandezas envolvidas na situação para encontrar o valor a pagar por determinado tempo e também o tempo que se pode falar por determinado valor.

Com o intuito de que haja a mobilização dos dois registros de representação os itens da atividade foram elaborados de forma a favorecer a busca em ambas as representações, havendo ainda a necessidade de compreender a relação de dependência entre as grandezas para se chegar à solução por meio de algum tipo de tratamento.

A seguir estão algumas estratégias que permitem responder a *atividade 2.*

Para os itens *a* e *b* basta analisar um dos registros localizando seus respectivos valores, obtendo R$ 40,00 como resposta para o item *a* e R$ 70,00 para o item *b*.

Os itens *c* e *d* apresentam certo grau de dificuldade, pois o que se pede não é dado diretamente na tabela ou no gráfico o que pode necessitar da mobilização de outro registro de representação. Há, dessa forma, a necessidade de se realizar uma investigação sobre os dados da tabela e/ou do gráfico. Levando isso em consideração tem-se as seguintes estratégias de resolução.

E1) **Proporcionalidade**

Essa estratégia é frequentemente utilizada em situações do cotidiano, porém para essa atividade ela não fornece resultados válidos, pois as grandezas envolvidas não são proporcionais. Nesse momento a mediação do papel do professor com perguntas que levem os alunos a se questionarem e tentarem validar seus resultados é fundamental

Essa estratégia consiste em observar, na tabela, que o valor correspondente a 50 minutos é de R$40,00 e daí concluir que como 100 é o dobro de 50, para falar 100 minutos, deverá pagar R$80,00.

Resolução para o item c.

E2) **Utilizando a relação entre as grandezas**

Essa estratégia leva em consideração a relação discutida na sessão anterior; sua utilização dá indícios que os alunos de alguma maneira compreenderam a relação dada, o que caracteriza a mobilização e a coordenação de, no mínimo, dois registros.

Essa estratégia consiste em observar, na tabela ou no gráfico, que o valor do minuto excedente, R$ 0,50 é acrescentado a partir de 50 minutos de utilização. Em seguida determina-se a quantidade de minutos excedentes para realização do cálculo Vt = 40 + 50 . 0,50 obtendo assim Vt = 65,00.

Resolução para o item c.

E3) **Continuar o preenchimento da tabela**

Essa estratégia permite encontrar a resposta para os itens *c* e *d*. Ela necessita da compreensão da forma como as tabelas são construídas, para obtenção das próximas linhas e colunas dessa. Essa estratégia é considerada “custosa” por demandar uma série de cuidados e tempo com seu preenchimento.

Nessa estratégia, deve-se encontrar o valor do minuto adicional, R$ 0,50, que pode ser observado a partir de 50 minutos de utilização. Em seguida os alunos continuam o preenchimento da tabela.

Quadro 7: Possível estratégia para resolver a atividade 2 da 2ª sessão

Plano A	
Minutos Utilizados	**Valor a pagar**
1	40
...	...
50	40
50’01” a 51’	40,50
51’01” a 52’	41
52’01” a 53’	41,50
53’01” a 54’	42
...	...
98’01” a 99’	64,50
99’01” a 100”	65,00

Fonte: Autor da pesquisa

E4) **Proporcionalidade (tempo X valor do minuto excedente)**

Essa estratégia também leva em consideração a relação discutida na sessão anterior; sua utilização dá indícios que os alunos compreenderam a relação dada o que caracteriza a mobilização e coordenação de no mínimo dois registros. A obtenção do valor total a pagar se dá em partes: primeiro obtém-se o valor a ser pago pelos minutos excedentes, utilizando proporcionalidade, que será adicionada ao valor fixo.

Como o valor do minuto excedente é de R$ 0,50 podem resolver da seguinte maneira:

10 min.__________R$ 5,00
20 min.__________R$ 10,00
40 min.__________R$ 20,00

Dessa forma encontra-se o valor referente aos 50 minutos excedentes, R$ 25,00, e acrescenta-se ao valor fixo R$ 40,00 obtendo como resposta final R$ 65,00.

Resolução item c.

Para responder o item *e* os alunos devem fazer uso de uma das representações para encontrar o intervalo de tempo no qual o valor do plano se mantém fixo, obtendo como resposta 50 minutos para o Plano A e 80 minutos para o Plano B.

O item *f* chama a atenção para valores que não estão destacados nas representações que só expressam algumas quantidades inteiras de minutos. O gráfico e a tabela foram elaborados para mostrar uma das possíveis “abordagens” das operadoras em considerar o tempo utilizando sempre o maior inteiro, ou seja, se uma pessoa utilizou o celular por 67,50 minutos o seu valor será calculado para 68 minutos. Isso deve ser discutido desde o início da sessão.

A questão *g* traz a informação de um valor não explicitado nas representações. Essa atividade exige a percepção de que os elementos de um conjunto dependem dos elementos do outro conjunto e o reconhecimento da relação matemática que possibilita relacionar tais elementos, favorecendo o uso das estratégias E1, E2, E3 e E4 descritas a seguir:

Resolução utilizando a estratégia E1

Essa estratégia consiste em observar, na tabela, que a quantidade de minutos correspondentes a R$ 40,00 é de 50 minutos e, a partir daí, pensar que, como R$ 120,00 que corresponde ao triplo de R$ 40,00, basta multiplicar 50 por 3 para obter os minutos totais.

Resolução utilizando a estratégia E2

Quadro 8: Possível estratégia para resolver a atividade 2 da 2ª sessão

Plano A	
Minutos Utilizados	**Valor a pagar**
1	40
...	...
50	40
51	40,50
...	...
209	119,50
210	120

Fonte: Autor da pesquisa

Resolução utilizando a estratégia E3

Substituindo algumas dessas variáveis por alguns valores conhecidos se constrói a equação 120,00 = 40 + me.0,50, ao resolve-la obtém-se como resultado me = 160. Como o plano tem uma franquia de 50 minutos, o total de minutos a ser utilizado com o valor de R$ 120,00 é de 210.

Resolução utilizando a estratégia E4

120,00 – 40 = 80,00 que corresponderia ao valor gasto somente com os minutos excedentes. Como cada minuto excedente corresponde a R$0,50 realizarão a divisão 80,00 ÷ 0,50 e obterão 160 como resposta para a quantidade de minutos excedentes. Por fim irão unir a quantidade de minutos da franquia com a quantidade de minutos excedentes e obterão como resposta final 210 minutos.

Com as representações os alunos podem observar a existência de elementos de grandezas que não são satisfeitas por essa relação, objetivo do item *h.* Esses elementos não fazem parte de conjuntos definidos como domínio e imagem da função. Não pretende-se definir matematicamente esses conceitos, mas deve-se observar a existência ou não desses elementos nessa e em outras relações

A disposição da sala em grupos e as escolhas realizadas na elaboração dos itens dessa atividade devem favorecer os momentos de ação, formulação e validação da situação *adidática* bem como a superação de dificuldades que possam a vir surgir durante a realização dessa sessão. Para tanto é fundamental o professor manter os alunos no jogo questionando-os sempre que necessário promovendo o diálogo em torno da resolução da atividade sem antecipar as respostas.

Ao final dessa sessão se realiza a institucionalização das estratégias que tem como objetivo escolher a/as menos custosa/as para a obtenção das respostas de cada item que fará parte dos conhecimentos a serem construídos e reutilizados na realização da sequência.

A verificação da mobilização e coordenação dos registros na resolução das atividades dá indícios da construção do conhecimento referente à relação entre grandezas uma vez que é observada a dependência entre seus elementos nas discussões e resoluções das atividades em suas diferentes representações. O debate entre os alunos e a escolha de alguma estratégia para a resolução das atividades também podem dar indícios da construção desse novo saber.

3.2.4 Experimentação e Análise a *posteriori* da 2ª sessão

A 2ª sessão iniciou com a participação de 19 alunos; aqueles que não estiveram presentes na 1ª sessão foram incluídos em um dos seis grupos formados na sessão anterior. Iniciamos a sessão apresentando aos alunos, na forma de slides, as três representações de um mesmo plano de telefonia. Essa forma de exposição chamou a atenção da turma e possibilitou a participação de alguns alunos que em determinados momentos se dirigiam à projeção dos slides para apontar as respostas para os questionamentos realizados por outros colegas e pelo professor.

A nossa companhia, STAR, oferece um plano de telefonia móvel de 100 minutos locais para fixo e qualquer celular à R$ 86,00 mais R$ 1,00 o minuto excedente. Esse plano dá direito a serviços ilimitados como internet, torpedos e ligações para outros aparelhos da STAR.

Plano apresentado no 1º slide

Na apresentação do 1º slide fizemos questionamentos referentes à franquia do plano, valor do minuto excedente e do plano e quanto tempo uma pessoa teria utilizado esse plano. A análise, pelos alunos, da representação em língua materna se mostrou satisfatória para responder os questionamentos. O que indica uma boa interpretação dos dados dessa situação nesse registro de representação. Antes de prosseguir questionamos se seria possível contratar esse plano e utilizar mais de 100 minutos de ligações para outras operadoras. Prontamente os alunos responderam que sim.

Figura 5: Exemplo de um plano representado no registro tabular

Plano de 100 minutos	
Minutos utilizados	Valor a pagar (R$)
1	86
2	86
3	86
4	86
5	86
...	...
100	86
100’01” a 101’	87
101’01” a 102’	88
102’01” a 103’	89
103’01” a 104’	90

Fonte: Autor da pesquisa

Com a tabela, exposta no segundo slide projetado, realizamos o seguinte questionamento:

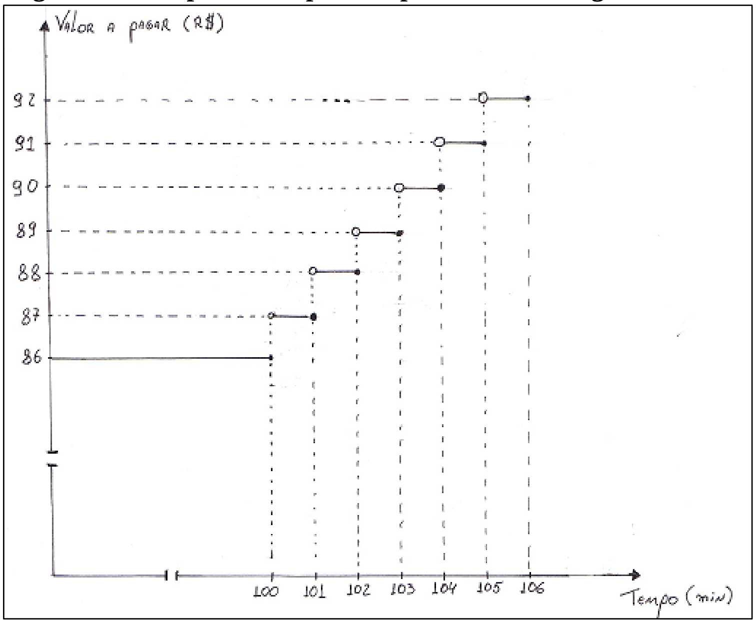
Professor: Alguma dúvida?
Isabel: Eu tenho. Do 1 ao 100 são os mesmos valores?
Professor: Alguém saberia explicar?
Carlos: Eu. Como o plano é de 100 minutos, até você usar 100 minutos irá pagar R$ 86,00. Não importa se você falar só 1 minuto com outra operadora, de um jeito ou de outro você vai pagar R$ 86,00.
Professor: Vocês entenderam a ideia do colega? Vocês concordam com ele?
Isabel: Eu concordo.

Ao devolver a dúvida de Isabel com uma pergunta, favorecemos a situação *adidática*, pois não demos a resposta, apenas mediamos a situação.

No momento desse diálogo um integrante do grupo G5 questionou sobre o significado dos três pontos na tabela. Outro integrante desse mesmo grupo explicou o seu significado. Aproveitamos essa discussão para explicar para a turma o significado desse símbolo e dos símbolos (’) e (’’) que foram reconhecidos pelos alunos para simbolizar os minutos e segundos, respectivamente. Ao serem questionados sobre o que achavam das duas representações apresentadas até então os alunos dos grupos G1 e G5 afirmaram que a tabela explica mais sobre o plano, dizendo que ela “é mais clara”.

Diante disso pudemos perceber que os alunos que participaram do diálogo apresentaram indícios de compreensão ao analisar os dados expressos na tabela e reconheceram a situação, plano de 100 minutos, nos dois registros de representação.

Figura 6: Exemplo de um plano representado no registro tabular



Fonte: Autor da pesquisa.

Na apresentação do plano no registro gráfico, após alguns instantes de observação, estabelecemos o seguinte diálogo:

Professor: Uma pessoa que usa 90 minutos vai pagar quanto?
Alunos: Oitenta e seis.
Emerson: 86, por que até chegar a 100 minutos ela vai pagar isso.
Professor: Alguém poderia dizer, ou localizar o 90 minutos ali na projeção?
Carlos: Um pouco antes do 100.
Pesquisador: E como você faria para descobrir quanto ela iria pagar?
Alunos: Até o 100 é 86.

Diante dessa última resposta percebemos que os alunos poderiam não estar usando o gráfico para responder, mas sim as discussões sobre o plano realizada nos outros registros. Essa situação mostrou que os alunos estavam em processo de aprendizagem. Percebendo isso, os questionamos sobre o total a ser pago por uma pessoa que usa 102’30”, o que provocou diferentes respostas e, então, Carlos, do grupo G1, tentou explicar seu raciocínio.

Carlos: 102’30” vai estar no meio de 102’ à 103’. Daí olhando no gráfico... Eu posso mostrar lá? (referindo-se à projeção)
Professor: Sim!
Carlos: Como você vai usar de 102’ à 103’ você vai pagar R$ 89,00 (essa argumentação foi realizada através de indicações no gráfico projetado)

O questionamento realizado para essa quantidade de tempo levou Emerson, do grupo G5, a questionar o porquê de não se pagar R$ 88,50 ao invés de R$ 89,00. Esse questionamento é de fácil compreensão uma vez que o minuto excedente custa R$ 1,00. O argumento utilizado por esse aluno nos dá indícios da utilização de estratégias proporcionais em problemas funcionais. Para explicar ao colega que isso não é possível um integrante do grupo G1, Pedro, vai à projeção e localiza os pontos (102’30” , 89) e (102.5 , 88.50). Nesse momento questionamos a turma sobre a existência do ponto (102’30”5 , 88.50) no gráfico apresentado e se esse satisfaz as informações apresentadas por ele.

Professor: Esse ponto, (102’30” , 88,50), estava marcado no gráfico apresentado pelo funcionário?
Turma de alunos: Não!
Professor: Para esse plano, oferecido por essa operadora, a pessoa irá pagar quanto por utilizar 102’ 50?
Turma de alunos: Também (R$ 89,00)

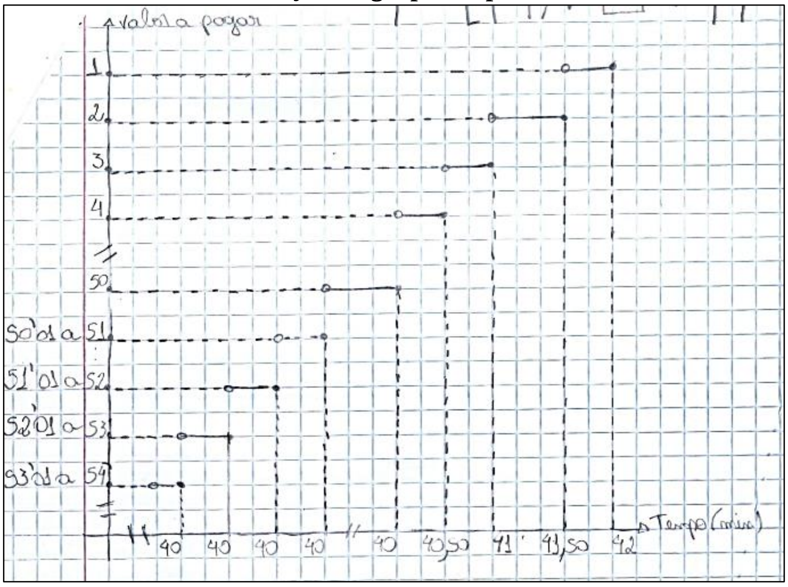
Essa discussão permitiu identificar uma das práticas das operadoras: aproximar o tempo utilizado para o maior inteiro. Essa discussão é importante para responder um item da *atividade 2* dessa sessão. A análise dessa representação também nos permitiu inferir que parte dos alunos identificou, para essa situação, os elementos do domínio e da imagem da função nos eixos da representação gráfica.

Com objetivo de observar as potencialidades/limitações visuais dessa representação questionamos a turma de alunos sobre a quantidade máxima que uma pessoa poderia falar e o valor máximo que ela pagaria. Aparentemente os alunos que participavam das discussões não se valeram simplesmente dos valores assinalados nas representações respondendo que ela pode falar “bastante” e que o total a pagar *depende de quanto ela fala.* Ao questionarmos se “bastante” seria os últimos números marcados nas representações eles afirmam que não, que poderia ter valores maiores que 106 minutos. Com isso percebemos que os alunos não consideram apenas os valores expostos nas representações gráficas ou tabular dando indícios da compreensão da relação entre as variáveis presente nessa situação.

Após a discussão sobre as formas de apresentar um plano de telefonia, foi distribuído aos grupos a primeira atividade dessa sessão, que exigia a conversão entre os registros tabular e gráfico e a conversão desses para o registro em língua materna.

Ao longo dessa sessão percorremos todos os grupos buscando, sempre que necessário, questionar sobre as informações listadas e como essas eram representadas no registro de partida e no registro que estavam construindo, o de chegada. Alguns alunos apresentavam mais dificuldades como podemos notar na resolução a seguir.

Figura 7: Protocolo de resolução do grupo G2 para a atividade 1 da 2ª sessão



Fonte: Dados da pesquisa

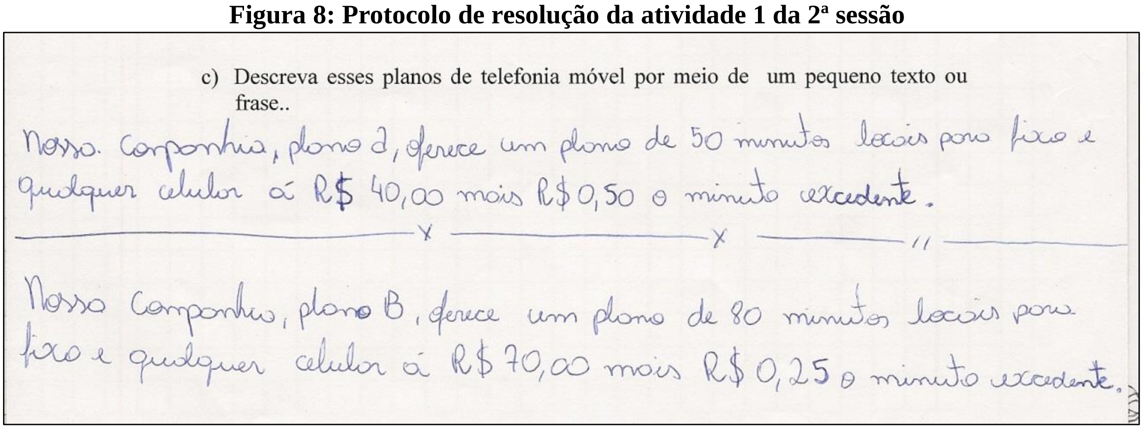
Da resolução analisada conjecturamos que a incompreensão pode estar relacionada ao conceito de plano cartesiano, uma vez que o aluno apresenta incorreções na orientação dos eixos e na localização de pontos no plano, mantendo simplesmente a estrutura do gráfico apresentado no exemplo e na atividade. A localização desses pontos indicaria que o aluno compreendeu a relação entre as grandezas da situação, o que não ocorre nesse caso, pois para 1 minuto de utilização o valor não é R$ 42,00 nem tão pouco um real para 42 minutos, levando em conta que os nomes dos eixos, ou seus elementos estão invertidos.

Na análise da construção do gráfico dos grupos G1, G3 e G5 nota-se a distribuição e a localização dos elementos expressos no registro tabular. Isso indica que esses alunos percebem a relação entre as variáveis *quantidade de minutos de ligações* e *valor total a pagar* e como essa relação pode ser representada no registro gráfico. Esses grupos são formados pela maioria dos alunos que participaram das discussões iniciais da sessão. No entanto, em alguns momentos, percebemos que esses alunos apresentavam dificuldades em construir os eixos cartesianos: eles reconheciam os elementos e sua relação, mas não se atentavam para a escolha de uma escala.

A construção da tabela que exigia a conversão do registro gráfico para o registro tabular não apresentou muitas dificuldades para os alunos. No entanto a interpretação do gráfico no que se refere ao intervalo de tempo de 0 a 80 minutos provocou, inicialmente, construções de tabelas iniciadas em 80 para minutos utilizados e 70 para valor a pagar. Para auxiliar a compreensão e correção da representação tabular realizamos questionamentos sobre o valor a ser pago por quantidades inferiores a 80 minutos de utilização e como se obteria essa resposta olhando para a tabela que haviam acabado de construir. Devido à interpretação do plano no registro gráfico e a compreensão do problema de forma geral foi possível levá-los a compreender a relação para esse intervalo de tempo e a reelaboração da tabela. E assim, ao serem questionados se a tabela não deveria conter esses valores, os alunos perceberam que faltavam esses dados uma vez que a tabela e o gráfico tratavam a mesma situação..

A conversão para o registro da língua materna não foi feita por todos os alunos, mas os que a fizeram se basearam no exemplo dado no slide que permaneceu exposto até o fim da aula. Na análise desses textos percebemos que os alunos mantiveram a estrutura do texto apresentado no slide, mas trocaram de forma correta os dados (franquia, valor do minuto excedente e valor do plano) o que indica a percepção dos elementos principais dessa relação.

Figura 8: Protocolo de resolução da atividade 1 da 2ª sessão


c) Descreva esses planos de telefonia móvel por meio de um pequeno texto ou frase..

Nossa Companhia, plano A, oferece um plano de 50 minutos locais para fixo e qualquer celular á R$ 40,00 mais R$ 0,50 o minuto excedente.

Nossa Companhia, plano B, oferece um plano de 80 minutos locais para fixo e qualquer celular á R$ 70,00 mais R$ 0,25 o minuto excedente.

Fonte: Dados da pesquisa

Diante da análise da primeira atividade fica evidente que a conversão do registro gráfico para o registro tabular foi melhor apreendida pela turma e que a conversão no sentido contrário é fonte de dificuldades por uma parte dos alunos principalmente com relação à necessidade da escolha de uma escala. A percepção dessas dificuldades nos levou a reelaborar nossa sequência didática: escolhemos não continuar com a segunda atividade dessa sessão e elaborar uma aula com atividades referentes ao conceito de plano cartesiano. Assim, na aula seguinte, abordamos questões referentes às convenções necessárias para a orientação dos eixos e a escolha de escalas para localizar as coordenadas sobre esses eixos. A seguir apresentamos o desenvolvimento dessa aula e a atividade realizada, porém antes é importante salientar que a mudança nos "planos iniciais" foi possível justamente pela escolha da engenharia didática como metodologia de pesquisa, uma vez que ela permite a confrontação entre a análise a *priori* e a análise a *posteriori* ao longo da sequência e não somente ao final.

Construindo um plano cartesiano

A inserção dessa aula em nossa sequência didática tem o objetivo de levar os alunos a compreender como se dá construção de um plano cartesiano e que condições devem ser estabelecidas para que este seja um sistema de localização que nos permita tirar conclusões por meio de intepretações geométricas ou gráficas. Ao final dessa aula pretendia-se apresentar alguns exemplos das construções gráficas realizadas na aula anterior, sem identificar os autores, para que se analise o que foi feito e se esses estão de acordo com o que foi definido como plano cartesiano.

Essa sessão contou com a participação de 18 alunos. Alguns desses não haviam participado da sessão anterior, início da sessão 2. Iniciamos dialogando com os alunos sobre o sistema de localização terrestre. Pelas falas dos alunos percebemos que eles apresentavam noções do funcionamento desse sistema de coordenadas. Diante disso propusemos a construção de um sistema semelhante ao qual damos o nome de Plano Cartesiano cujo nome faz referência à René Descartes.

Iniciamos a construção do plano com o eixo horizontal e a localização de sua origem na lousa da sala de aula. Enfatizamos a necessidade de escolher uma escala que deve ser respeitada sempre. Ao questionarmos sobre o que iríamos localizar nesse eixo alguns alunos responderam prontamente "números". Diante dessa resposta os questionamos sobre quais números iríamos localizar à direita da origem. Nesse momento um dos alunos da turma diz: "isso aí é a reta numérica?!", " a direita do zero são os positivos e a esquerda são os negativos!?". Esse comentário mostra conhecimento sobre a representação gráfica dos números na reta numérica. Com isso escolhemos como escala 10 cm e marcamos no eixo alguns números inteiros. Por fim construímos o outro eixo, perpendicular ao 1º passando pela origem, para o qual também escolhemos o sentido. Nesse momento afirmamos que esses eixos podiam receber nomes que dependem do que estamos querendo representar. Mencionamos como exemplo o plano de telefonia analisado anteriormente e que agora chamaríamos de *x* e *y*.

Tendo construído o plano cartesiano questionamos a turma sobre a localização do ponto P(3 , 2). A discussão entre os estudantes possibilitou localizar esse ponto também no que seria o ponto P'(2 , 3). Essa atividade proporcionou o diálogo sobre a convenção adotada para as coordenadas - P(x , y) - com a qual podemos diferenciar a localização dos pontos P e P'.

Na sequência solicitamos que os alunos sugerissem alguns pontos para que os localizássemos no plano seguindo as suas orientações. Após a localização de alguns pontos as atividades foram interrompidas devido a um evento na escola. Esse evento durou aproximadamente 40 minutos o que comprometeu o desenvolvimento do que foi planejado para uma única sessão de duas horas, porém isso mostra a importância de se realizar pesquisas no ambiente natural, pois assim os resultados são mais próximos do que pode ser vivenciado pelos professores.

Retornando para a sala de aula solicitamos como atividade a construção, na malha quadriculada, de um plano cartesiano e a localização dos alguns pontos. O objetivo dessa atividade foi de analisar a construção de conhecimentos referente ao tema da aula e proporcionar momentos de reflexão sobre o mesmo afim de que os alunos superassem as dificuldades apresentadas na aula anterior. Os pontos a serem marcados no plano cartesiano foram os seguintes:

A(1 , 2) B(3 , 1) C(-1 , 4) D(2 , 1) E(-2 , -3) F(2 , -5) G(0 , 2) H(-3 , 0) I(4 , 0) J(0 , -1)
$K(\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$ $L(-\frac{3}{2},\frac{3}{4})$

Ao iniciar a construção do plano cartesiano na folha muitos alunos questionaram onde deveriam fazer a marcação dos eixos. Diante desse questionamento e tendo em vista os pontos a serem localizados, solicitamos que marcassem a origem no meio da folha. Essa solicitação pode ter levado alguns alunos a acreditar que a quantidade de um lado do eixo deveria ser a mesma do outro lado e usarem a escala de 0,5cm em torno da origem do plano cartesiano e de 1cm para os demais elementos dos eixos. Percebendo esse equívoco salientamos a todos os alunos que era “melhor” (mais prático), mas não necessário, localizar os eixos sobre as linhas da própria folha e usar as marcações da mesma como uma escala já estabelecida.

Ao percorrer os grupos, percebemos que alguns alunos escolheram escalas diferentes, uns utilizando 1cm (medida do lado do quadrado da malha quadriculada) e outros 2cm. No grupo G3 um dos integrantes havia escolhido a escala de 2cm. Percebendo isso questionamos os outros integrantes desse grupo que haviam escolhido a escala de 1cm se o seu colega estava fazendo de forma correta. De imediato um deles afirmou que não, pois teria de ser 1cm. Mas logo em seguida, conversando com os outros colegas, percebeu que não teria problema desde que mantivesse essa mesma escala. A escolha da escala de 2cm impossibilitava, no caso do grupo G3, a localização dos pontos C e F o que foi discutido pelo grupo que percebeu a necessidade de diminuir a escala para que os pontos ficassem “dentro” na folha.

As principais dificuldades dessa atividade foram a localização de pontos que estão sobre os eixos e dos pontos $K(\frac{1}{2},-\frac{1}{3})$ e $L(-\frac{3}{2},\frac{3}{4})$. Já prevíamos essa dificuldade e deixamos que os alunos tentassem localizar esses pontos para que depois tentássemos todos juntos, localizar corretamente. Na localização dos pontos com coordenadas na forma fracionária, percebemos que os alunos faziam a conversão para representação decimal. Essa estratégia foi compartilhada entre os grupos formados na sala de aula.

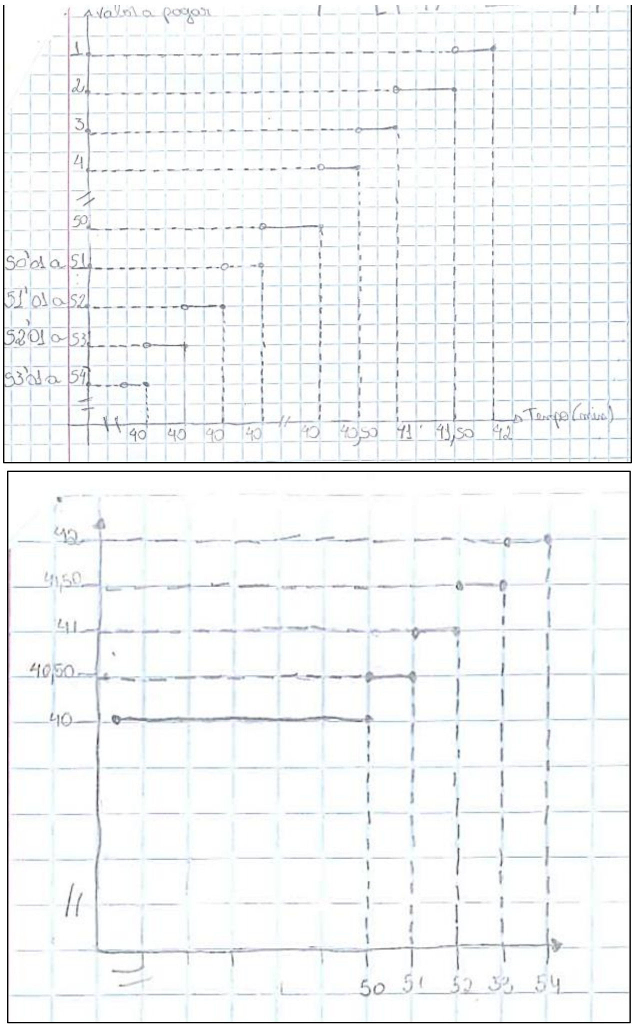
Percebendo a incompreensão do significado ou de como localizar os pontos do tipo P(0 , y) e Q(x , 0) fomos localizar no quadro, que tinha um plano cartesiano desenhado, alguns exemplos de pontos utilizando a estratégia de encontrar a localização dos mesmos na intersecção das retas pontilhadas paralelas aos eixos que passam pelo valor das coordenadas x e y do ponto em questão. Com esses exemplos alguns alunos perceberam que em certos casos as retas se confundiam com um dos eixos, ou não apareciam percebendo que a intersecção de uma reta pontilhada com um dos eixos também poderia localizar um ponto.

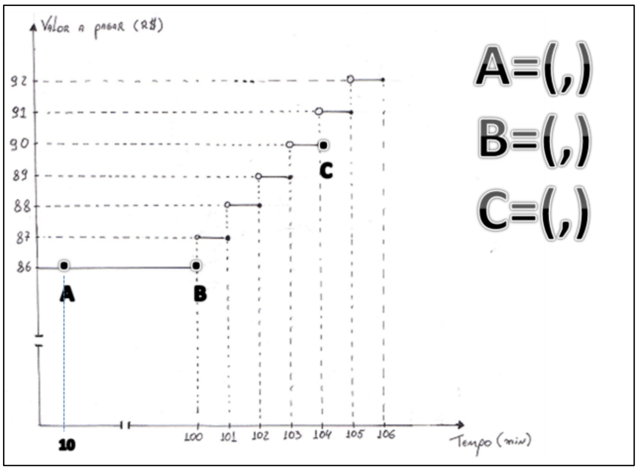
Devido ao tempo que restou após o evento realizado na escola essa atividade não pode ser finalizada nesse dia, o que ocorreu 8 dias mais tarde com a participação de 25 estudantes. Como alguns não participaram da aula anterior distribuímos-lhes a folha quadriculada e as coordenadas dos pontos para que também realizassem a atividade.

Para finalizarmos essa atividade solicitamos que os alunos nos ajudassem a localizar os pontos da atividade no plano construído na lousa. Alguns alunos ainda apresentavam dificuldades em localizar alguns pontos principalmente aqueles com uma das coordenadas zero ou valores fracionários. Percebemos assim a importância do trabalho com o plano cartesiano, pois o conhecimento sobre esses tipos de pontos serão necessários para a interpretação de relações funcionais expressas no registro gráfico.

Após a discussão sobre plano cartesiano, expusemos as seguintes representações gráficas de planos de telefonia para serem analisadas pela turma para que identificassem os “erros” cometidos e os corrigissem.

Figura 9: Representações gráficas a serem analisadas pelos alunos





Fonte: Dados da pesquisa

Antes de apresentarmos a 1ª imagem recordamos a atividade da aula anterior que exigia a representação dos dados da tabela na forma gráfica. Com nosso questionamento sobre o que percebiam na representação os alunos notaram diversas irregularidades como a existência de vários valores 40, os nomes dos eixos trocados e a ordem dos elementos do eixo nomeado *valor a pagar*. Com a projeção da 2ª imagem os alunos perceberam a falta do nome dos eixos e que os espaçamentos e a ordem dos elementos de cada eixo estavam corretos. Nesse momento fizemos a observação de que os espaçamentos dos eixos não precisavam ser referentes a um mesmo valor, no caso da 2ª imagem no eixo x a escala é de 1 para 1 e no eixo y 1 para 0,50.

Ao projetarmos a terceira imagem queríamos avaliar se os alunos conseguiriam identificar as coordenadas dos pontos A, B e C. Essa atividade foi realizada sem dificuldades pelos alunos. Ao serem questionados sobre o valor da coordenada y ser a mesma para os pontos A e B um dos alunos da turma afirmou “ por que de 0 a 100 é o mesmo valor a pagar”. A resposta desse aluno indica a mobilização do conhecimento sobre a situação envolvendo o plano de telefonia ou até mesmo sobre o plano cartesiano como “é o mesmo porque está sobre uma linha imaginária que passa pelo ponto (0 , 86) e é paralela ao eixo x”.

Na análise dessa imagem também os questionamos se as coordenadas do ponto C eram (90 , 104). Um dos alunos afirmou que não, argumentando que o primeiro valor é da abscissa x e o segundo da ordenada y conforme havíamos combinado.

Ao final dessa discussão distribuímos a *atividade 1* à turma de alunos para que, se achassem necessário, realizassem algum tipo de correção tanto na representação gráfica quanto na representação tabular. Com isso percebemos que alguns alunos refizeram suas construções gráficas, no entanto os alunos que apresentaram mais dificuldades na realização da conversão entre os registros não compareceram nessas duas aulas referentes ao plano cartesiano o que nos preocupou devido a utilização desse conhecimento em atividades futuras.

O fato de alguns grupos já terem construído corretamente as representações nos levou a distribuir a *atividade 2* para que esses não ficassem ociosos durante o restante da aula. Solicitamos que utilizassem as representações construídas na *atividade 1* para responderem a *atividade 2.*

Ao analisarmos as produções dos grupos G1, G2 e G3 para a *atividade 2* percebemos que não houve dificuldades em responder os itens *a* e *b*. Já para o item c, *Quanto pagará uma pessoa que utiliza 100 minutos no Plano A?,* tivemos diferentes maneiras de se chegar à resposta correta. Inicialmente os integrantes do grupo G1 utilizaram a estratégia E1 descrita a seguir.

Observando na tabela vemos que o valor correspondente a 50 minutos é de R$ 40,00 e como 100 é o dobro de 50, ela deverá pagar R$ 80,00.

Tentando provocar um desequilíbrio cognitivo nos integrantes desse grupo e levá-los a perceber que essa estratégia não poderia ser utilizada nesse exemplo, usamos o registro tabular e a seguinte questão:

Professor: Olhando na tabela, quanto uma pessoa irá pagar se usar, por exemplo, 8 minutos?
G1: R$ 40,00.
Professor: Se eu usasse a estratégia de vocês eu poderia obter a quantidade de 8 minutos usando que valores presentes na tabela?
G1: O número 4.
Professor: Fazendo isso qual seria o valor que ela iria pagar?
G1: 40 mais 40 que dá 80.
Professor: Então, qual desses valores é o correto?
G1: O 40.
Professor: então será que eu posso utilizar essa ideia de vocês para descobrir o valor a pagar por ter utilizado 100 minutos?

Com essa mediação pretendíamos instigar os alunos a buscar respostas; não demos as "dicas" o que caracteriza uma situação *adidática*. Com esses questionamentos percebemos que os alunos não tinham mais certeza sobre sua resposta e tentaram buscar outra forma de obter a solução para essa atividade. Com algumas discussões chegaram à conclusão de que para até 50 minutos o valor seria de R$ 40,00 e que ainda faltaria pagar por 50 minutos (excedentes). Nesse momento os alunos usaram novamente a estratégia da proporcionalidade:

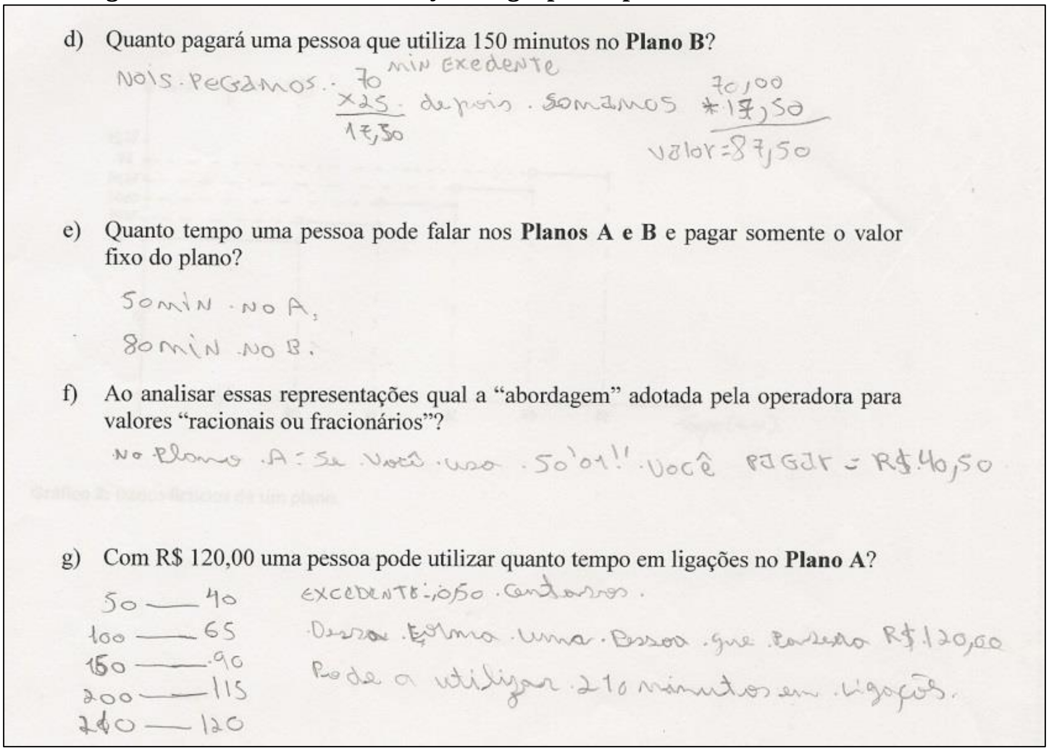
Se o valor do minuto excedente fosse R$ 1,00 ela pagaria R$ 50,00. Como o valor é de R$ 0,50 irá pagar a metade, R$ 25,00.

E assim chegaram a seguinte resposta:

50 (minutos) – 40 (reais) 100 (minutos) – 65 (reais) A pessoa pagará R$ 65,00

Percebemos que esse grupo utilizou essa mesma estratégia para resolver o item *g*, mas não a utilizou na resolução do item *d* dessa atividade.

Figura 10: Protocolo de resolução do grupo G1 para a atividade 2 da 2ª sessão



d) Quanto pagará uma pessoa que utiliza 150 minutos no **Plano B**?

NOIS PEGAMOS 70 MIN EXEDENTE x25 17,50 depois SOMAMOS 70,00 + 17,50 valor = 87,50

e) Quanto tempo uma pessoa pode falar nos **Planos A e B** e pagar somente o valor fixo do plano?

50MIN NO A,
80MIN NO B.

f) Ao analisar essas representações qual a "abordagem" adotada pela operadora para valores "racionais ou fracionários"?

No Plano A: Se Você uso 50'01!! Você PAGAR = R$ 40,50

g) Com R$ 120,00 uma pessoa pode utilizar quanto tempo em ligações no **Plano A**?

50 — 40
100 — 65
150 — 90
200 — 115
210 — 120

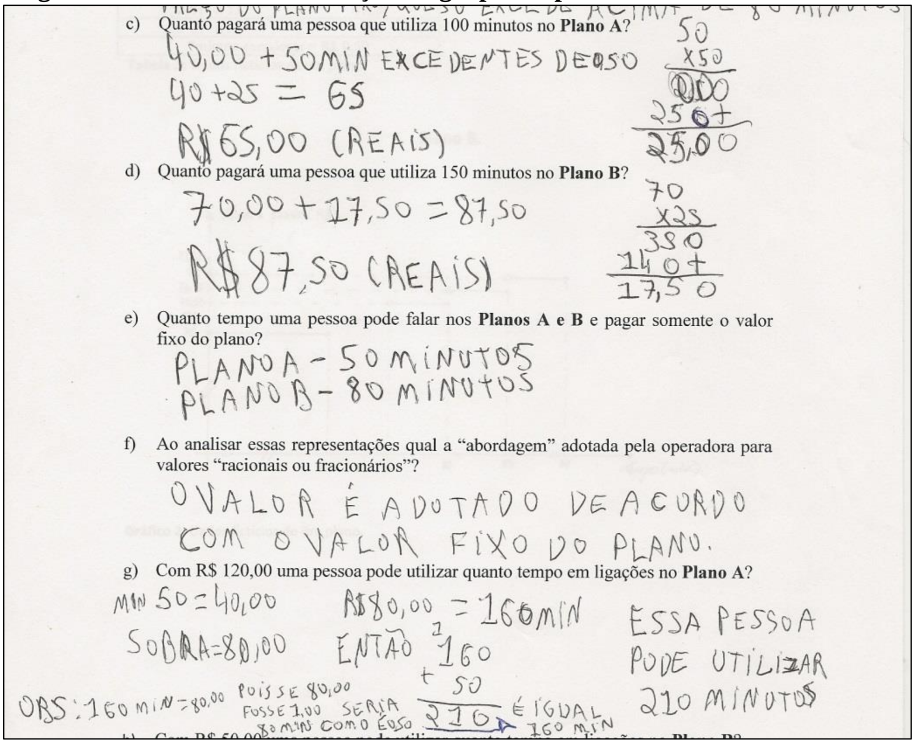
EXCEDENTE: 0,50 centavos.
Dessa forma uma pessoa que tiver R$ 120,00 pode a utilizar 210 minutos em ligações.

Fonte: Dados da pesquisa

O grupo G3 deixou a resolução do item *c* a cargo de Beto que já havia utilizado a estratégia E2 nas atividades da 1ª sessão: *observar, na tabela ou no gráfico, que o valor do minuto excedente, R$ 0,50 é acrescentado a partir de 50 minutos de utilização. Em seguida determina-se a quantidade de minutos excedentes para realização do cálculo Vt = 40 + 50 . 0,50 obtendo assim Vt = 65,00*. Porém, Beto continuou o preenchimento da tabela para obter as respostas para os itens *c*, *d* e *g* da atividade 2. Como previsto essa estratégia possibilita a resolução desses itens; no caso desse grupo as respostas obtidas estavam incorretas por erro de algum cálculo. Percebemos isso no decorrer da sessão, porém optamos por discutir essa estratégia ao final da atividade, na tentativa de levá-los a validar essa estratégia observando o custo de sua utilização.

O grupo G5 utilizou corretamente a estratégia E2 na resolução dos itens *c*, *d* e *g*

Figura 11: Protocolo de resolução do grupo G1 para a atividade 2 da 2ª sessão



c) Quanto pagará uma pessoa que utiliza 100 minutos no **Plano A**?

40,00 + 50MIN EXCEDENTES DE 0,50

40 + 25 = 65

R$ 65,00 (REAIS)

50 x 50 = 000 / 250+ / 25,00

d) Quanto pagará uma pessoa que utiliza 150 minutos no **Plano B**?

70,00 + 17,50 = 87,50

R$ 87,50 (REAIS)

70 x 25 = 350 / 140+ / 17,50

e) Quanto tempo uma pessoa pode falar nos **Planos A e B** e pagar somente o valor fixo do plano?

PLANO A - 50 MINUTOS

PLANO B - 80 MINUTOS

f) Ao analisar essas representações qual a "abordagem" adotada pela operadora para valores "racionais ou fracionários"?

O VALOR É ADOTADO DE ACORDO COM O VALOR FIXO DO PLANO.

g) Com R$ 120,00 uma pessoa pode utilizar quanto tempo em ligações no **Plano A**?

MIN 50 = 40,00 — SOBRA = 80,00

R$ 80,00 = 160 MIN — ENTÃO 160 + 50 = 210

ESSA PESSOA PODE UTILIZAR 210 MINUTOS

OBS: 160 MIN = 80,00 POIS SE 80,00 FOSSE 1,00 SERIA 80 MIN COMO É 0,50 É IGUAL 160 MIN

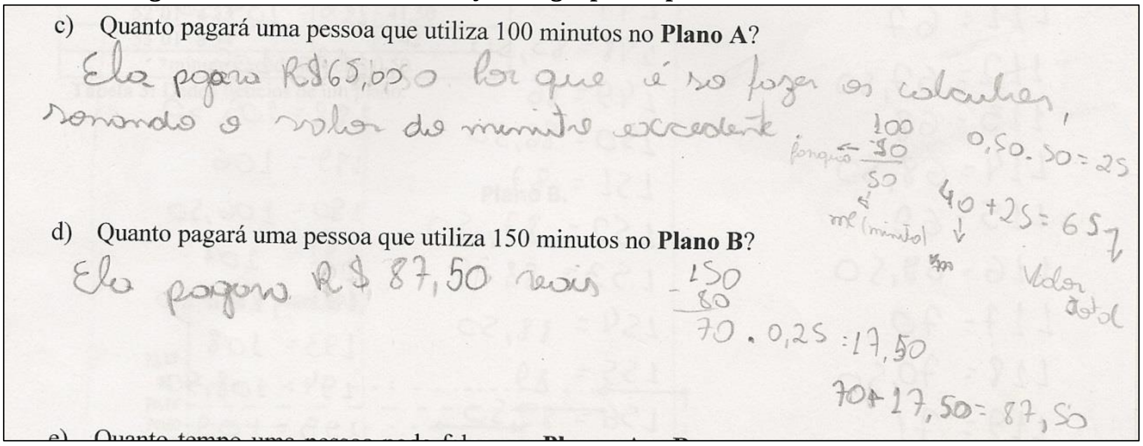
Fonte: Dados da pesquisa

Diante do material escrito por esses grupos concluímos que eles analisaram informações presentes nas representações tabular e gráfica e as manipularam para realizar as atividades propostas.

A discussão sobre a resolução da *atividade 2* só ocorreu na aula seguinte que contou com a participação de 20 alunos. A correção da segunda atividade teve a participação de integrantes de três grupos dos quais dois tiveram integrantes que foram ao quadro expor suas ideias para a resolução da atividade. Os itens *a* e *b* foram respondidos pela maioria dos alunos dessa turma sem dificuldades e sua justificação se deu pela análise das representações.

Para o item *c*, bem como para os itens *d* e *g*, deixamos um espaço na lousa para que os integrantes dos grupos apresentassem suas soluções. Nesse momento dois integrantes do grupo G1 apresentaram sua resolução para o item *c*. Nosso papel nesse momento foi de explicar/explicitar melhor alguns cálculos realizados pelo grupo e questionar a turma se a resolução respondia o que foi questionado na atividade. A maioria dos alunos da turma concordou com a estratégia desse grupo e a utilizaram como resposta para esse item como observado na resolução do grupo G3.

Figura 12: Protocolo de resolução do grupo G3 para a atividade 2 da 2ª sessão


c) Quanto pagará uma pessoa que utiliza 100 minutos no **Plano A**?

Ela pagara R$65,00 so porque é so fazer os calculos, somando o valor do minuto excedente.

d) Quanto pagará uma pessoa que utiliza 150 minutos no **Plano B**?

Ela pagara R$ 87,50 reais

Fonte: Dados da pesquisa

No momento dessa correção tivemos que apresentar a resolução do grupo G3 que não quis se dirigir à lousa, mas ditou os passos para o preenchimento da tabela. Logo que iniciamos a construção da tabela questionamos a turma se essa ideia poderia nos levar a encontrar a resposta para a atividade. Alguns alunos afirmaram que sim, mas demoraria muito para encontrar o valor a pagar por 100 minutos. Como a resposta do grupo G3 estava incorreta, por algum cálculo errado ao preencher a tabela, seus integrantes adotaram a estratégia apresentada pelos integrantes dos grupos G5 e G1.

O trabalho iniciado nessa sessão com a apresentação do exemplo do funcionário de uma empresa de telefonia e o diálogo estabelecido sobre essa apresentação permitiu que os alunos compreendessem as atividades propostas e buscassem por sua solução. Em geral os alunos não tiveram dificuldades em reconhecer as informações referentes ao plano de telefonia nos três registros apresentados. As dificuldades se voltavam para noções de plano cartesiano principalmente na localização de pontos e escolha de uma escala.

A sequência dos itens da atividade 2 e as discussões sobre o plano de telefonia nas diferentes formas de representá-lo possibilitou aos alunos entrarem no jogo criando estratégias para resolverem os itens da atividade. Para os itens *c, d* e *g* foram formuladas, nessa turma de alunos, quatro estratégias diferentes. Como algumas eram errôneas intervimos em diferentes momentos buscando desestabilizá-los cognitivamente e levá-los a perceberem que essa estratégia resulta em uma resposta incorreta perante a situação apresentada.

A apresentação dessas estratégias de resolução na lousa permitiu tanto aos alunos desses grupos como aos demais vivenciar a situação de validação, pois ocorreram momentos de questionamentos e argumentação sobre o processo/cálculo que os possibilitaram chegar à resposta da atividade reconhecendo dessa forma três estratégias de resolução.

Com a resolução dos grupos G1 e G5 pudemos chegar a uma regra para se determinar o valor a pagar por uma determinada quantidade de minutos utilizados. Além da percepção dessa regra foi possível levá-los a reconhecer a relação entre valor a pagar e minutos utilizados nos três registros de representação apresentados até o momento o que nos leva a acreditar que o objetivo para essa sessão de levar os alunos a analisar e reconhecer informações referentes ao plano de telefonia móvel nos diferentes tipos de registros de representação semiótica foi alcançado.

3.2.5 Análise *a priori* da 3ª sessão: Definindo função

O objetivo da 3ª sessão é realizar a institucionalização do objeto matemático função. O conceito de função é apresentado e é realizado o reconhecimento de elementos do domínio e da imagem de uma função procurando utilizar uma linguagem acessível aos alunos não fazendo uso apenas das definições e nomenclaturas utilizadas no estudo desse conceito. Para tanto utilizamos as atividades das sessões anteriores.

Valendo-nos dos três registros utilizados na sessão anterior para representar a relação entre minutos utilizados e valor a pagar apresentamos aos alunos o conceito de função. Utilizamos a definição semelhante à dada por Dirichlet, na qual se entende função como a relação de dependência entre duas variáveis x e y em que cada valor de x está associado a um único valor de y.

Até o momento não foi utilizada a representação algébrica para descrever a relação entre os minutos utilizados e valor total a pagar; tal representação não será cobrada dos estudantes no presente momento uma vez que ela não é necessária para a definição adotada. Acreditamos que essas escolhas devem evitar o surgimento da dificuldade em acreditar que uma relação ou correspondência deva ser expressa por uma expressão algébrica ou por representação gráfica.

A análise das representações possibilita a identificação das variáveis dependentes e independentes e com isso a identificação dos elementos do domínio e da imagem dessa função. Essa análise retoma a discussão sobre as limitações de cada registro no que diz respeito a elementos aparentemente ausentes e a como encontrá-los.

Ao final das discussões foi proposta a resolução da seguinte atividade a ser desenvolvida em grupos.

Atividade 1: Observe a tabela e responda as questões.

Plano Z	
Minutos excedentes	**Valor a pagar, em R$, pela quantidade de minutos excedentes**
1	0,95
2	1.90
3	2,85
4	3,80
5	4,75
...	...
x	y

a) Qual o valor a pagar por 6 minutos excedentes?
b) Qual o valor a pagar por 8 minutos excedentes?
c) Quanto se deve pagar por 50 minutos excedentes?
d) Como poderíamos encontrar o valor a pagar por 200 minutos excedentes?
e) Poderíamos representar o tempo em minutos pela letra **x** e o valor a pagar por **y** e relacionar y e x? Como você escreveria essa relação?

Nessa situação joga-se com as variáveis contexto da atividade, cujo valor assumido é contexto do cotidiano, e também com a variável sentido da conversão, que assume o valor conversão do registro tabular para o registro numérico e algébrico.

Essa atividade contém uma tabela semelhante à apresentada e analisada na 2ª sessão. No entanto, nessa atividade, a relação é proporcional o que deve ser observado para que não se confunda essa tabela com as apresentadas anteriormente. Nosso objetivo, com essa atividade, é introduzir a representação algébrica e posteriormente instituí-la também como uma representação para o conceito de função. Para tanto optou-se em usar somente a parte da situação do plano de telefonia que pode ser expressa por uma única expressão algébrica, pois seria a primeira atividade da sequência didática em que eles teriam de realizar a conversão do registro tabular para o registro algébrico.

Nesse nível de escolaridade os alunos já tiveram algum contato com representações algébricas, no entanto as pesquisas analisadas observam que há dificuldades na conversão entre os registros de representação envolvidos bem como no tratamento algébrico. Nesse momento desejava-se promover um diálogo que consideramos importante, pois a representação algébrica é ponto chave no desenvolvimento do conceito de função, como observa Duval (2011).

O enunciado da atividade remete à situação do plano de telefonia discutido ao longo da experimentação o que deve permitir aos alunos reconhecerem alguns elementos bem como a relação entre eles. Como os alunos já resolveram atividades semelhantes a essa podemos analisar se os conhecimentos produzidos anteriormente são reinvestidos nessa atividade. Desse modo os alunos podem apresentar uma das seguintes estratégias de resolução para os itens dessa atividade.

Os itens *a* e *b* permitem que seja realizado um tratamento no registro tabular no qual os alunos, tendo compreendido a relação entre as colunas, obtêm as próximas linhas e colunas.

6 minutos custam R$ 5,70 fazendo 4,75 + 0,95.
7 minutos custam R$ 6,65 fazendo 5,70 + 0,95.

Resolução do item a e b respectivamente.

Outra forma de obter esses resultados é realizar a conversão para o registro numérico e multiplicar o valor unitário, R$ 0,95, pela quantidade de minutos excedentes exigido pelo enunciado. Essa estratégia pode levar à construção da relação algébrica que relaciona as colunas.

6 minutos custam R$ 5,70 fazendo 6 x 0,95.
7 minutos custam R$ 6,65 fazendo 7 x 0,95.

Resolução do item a e b respectivamente.

Os itens *c* e *d* exigem uma estratégia mais elaborada, como a citada anteriormente. Dada a discussão sobre estratégias custosas na sessão anterior, acredita-se que a primeira estratégia apresentada seja pouco utilizada na resolução desses itens.

Pode-se chegar as soluções ao fazer 50 x 0,95, assim como 200 x 0,95.

Resolução dos itens c e d.

O objetivo dos itens de *a* até *d* é possibilitar que os alunos ajam sobre a situação e formulem algumas estratégias para resolvê-los. Os itens *c* e *d* devem colaborar para que as estratégias iniciais sejam substituídas por uma menos custosa direcionando para um procedimento que permita reconhecer a relação entres as variáveis e expressar essa relação por uma expressão algébrica.

O item *e* requer a conversão para o registro algébrico, o que exige a utilização do conhecimento sobre expressões algébricas e equações o que vem sendo construído ao longo da vida escolar do aluno. Levando em consideração as possibilidades de superação das dificuldades relacionadas à obtenção de uma expressão algébrica propusemos a resolução dos itens anteriores uma vez que as discussões realizadas ajudariam a compreender que *x* pode assumir o lugar dos valores para os minutos excedentes assim e *y* pode assumir o lugar dos valores a pagar.

Caso não haja um consenso na turma sobre a expressão algébrica, uma solução pode ser a exposição no quadro de uma tabela a ser preenchida com a colaboração de todos destacando a relação entre minutos excedentes e valor a pagar. Por meio do preenchimento dessa tabela é possível levar os alunos a perceberem o padrão de cálculo utilizado e sua escrita. Isso deve possibilitar o reconhecimento dos elementos de suas variáveis e uma possível troca pela notação algébrica de *x* e *y*.

Quadro 9: Generalização da relação entre as variáveis presentes na atividade 1 da 3ª sessão

Plano Z		
Minutos excedentes	**Como obter o resultado**	**Valor a pagar em R$**
1	**1 . 0,95** = 0,95	0,95
2	**2 . 0,95** = 1,90	1,90
3	**3 . 0,95** = 2,85	2,85
4	**4 . 0,95** = 3,80	3,80
5	**5 . 0,95** = 4,75	4,75
6	**6 . 0,95** = 5,70	5,70
7	**7 . 0,95** = 6,65	6,65
...	...	...
50	**50 . 0,95** = 47,50	47,50
200	**200 . 0,95** = 190	190
x	**x.0,95** = y	y

Fonte: Autor da pesquisa.

Essa intervenção pode ser necessária, pois os alunos muitas vezes conseguem encontrar a regularidade dos dados da tabela, mas podem ter dificuldades para representar esta regularidade por meio de uma expressão algébrica, ou seja, de realizar a conversão do registro tabular para o registro algébrico.

Ao final dessa sessão deve-se institucionalizar o fato de que o registro algébrico também pode ser utilizado para representar uma função.

3.2.6 Experimentação e análise *a posteriori* da 3ª sessão

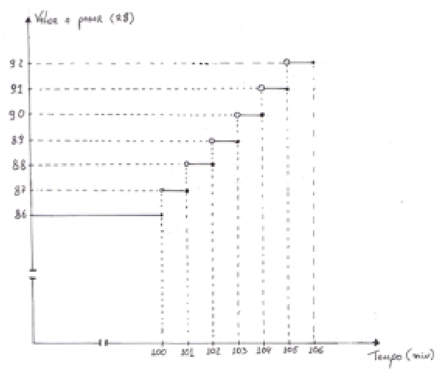
Iniciamos a 3ª sessão logo após o final da *atividade 2* da segunda sessão. Para tanto apresentamos as seguintes imagens em slides:

Figura 13: Registros utilizados para representar um plano de telefonia

*O Plano

A nossa companhia, STAR, oferece um plano de 100 minutos locais para fixo e qualquer celular à R$ 86,00 mais R$ 1,00 o minuto excedente. Esse plano da direito a serviços ilimitados como internet, torpedos e ligações para outros aparelhos da STAR.

Plano de 100 minutos	
Minutos utilizados	Valor a pagar (R$)
1	86
2	86
3	86
4	86
5	86
...	...
100	86
100'01" a 101'	87
101'01" a 102'	88
102'01" a 103'	89
103'01" a 104'	90



1) Existe uma relação entre o **valor a pagar** e **tempo utilizado**?
2) Quais são os valores que o **"tempo utilizado"** pode assumir?
3) Quais são os valores que o **"valor a pagar"** pode assumir?
4) Responda:

a) Uma pessoa pode pagar R$ 80,00 nesse plano?

b) Uma pessoa pode pagar R$ 90,50 nesse plano?

c) Uma pessoa pode pagar R$ 124,00 nesse plano?

Fonte: autor da pesquisa

Com a apresentação desse slide recordamos a situação trabalhada no início da segunda sessão e as três maneiras de representar a relação entre os dois conjuntos. Em seguida dissemos que a situação em questão é um exemplo do que matematicamente chamamos de função, apresentando a seguinte imagem.

Figura 14: Slide apresentado contendo à definição de função

> Se uma variável **y** está relacionada a uma variável **x** de tal modo que, sempre que é atribuído um valor numérico a **x**, existe uma regra segundo a qual um valor único de **y** fica determinado então podemos dizer que **y** é **FUNÇÃO** de **x**.

Fonte: Boyer (1974,p. 405)

Apresentada essa definição exploramos os significados de algumas palavras, como o de variável que foi caracterizada como algo que pode mudar de valor. Ao serem questionados sobre qual seria, nesse problema, a variável *x* e a variável *y* os alunos apresentaram diferentes classificações, ora considerando *x* como o tempo, ora como o valor a pagar. Isso não está errado, porém o tempo não está em função do valor a pagar. Dessa forma consideramos a variável *x* como sendo o tempo e a variável *y* como o valor a pagar.

Com a projeção das representações do plano questionamos os alunos sobre a unicidade e a regra que possibilita determinar o valor a pagar dada uma quantidade de tempo. Essas representações e a situação problema possibilitaram aos alunos argumentarem sobre esses questionamentos:

Professor: Sempre que eu lhe der um valor para o tempo você acha o valor a pagar?
Alunos: sim!
Professor: Para esse tempo que eu te der, você vai encontrar quantos valores a pagar?
Alunos: Um só!
Professor: Quais são os valores de tempo que uma pessoal pode falar?
Alunos: Um monte... 5000 mil...
Professor: Ela pode falar quantidades negativas?
Alunos: Não! Só os positivos...
Professor: Vocês já ouviram falar em números reais?
Alunos: Sim.
Professor: Então, poderíamos falar que os valores da variável x são todos os números reais positivos.
Professor: E com relação ao valor a pagar ele pode ser qualquer número?
Alunos: Só os para cima do valor mínimo do plano.
Professor: Vamos olhar para o plano A. Com R$ 40,25 ela pode falar quanto tempo? Vamos lá peguem o Plano A e observem quais são os valores a serem pagos.
Alunos: 40; 40,40; 41;...Ela não pode pagar esse valor (R$ 40,25)
Professor: Ela pode pagar R$ 90,00? Quanto tempo ela pode falar?
Alunos: De 103 minutos até 104 minutos.

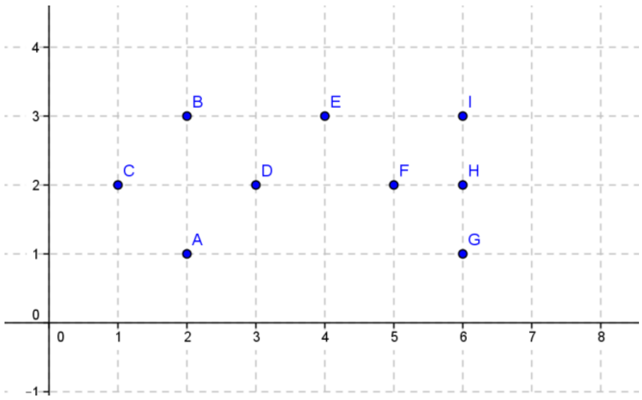
Por esse diálogo é possível notar que há, por parte dos alunos, o reconhecimento, mesmo que inicial, de elementos dos conjuntos Domínio e Imagem dessa função tanto no registro gráfico quanto no tabular.

Nos momentos finais da aula solicitamos que os alunos anotassem em seus cadernos que as variáveis *x* e *y* eram, respectivamente, o tempo e o valor a pagar, que existia uma regra, a conta que eles haviam realizado na *atividade 2* da sessão 2, com a qual podem obter o valor a pagar dada uma quantidade de minutos além de que, para cada tempo dado só existe um valor a ser pago e por isso podemos considerar essa situação um exemplo de função.

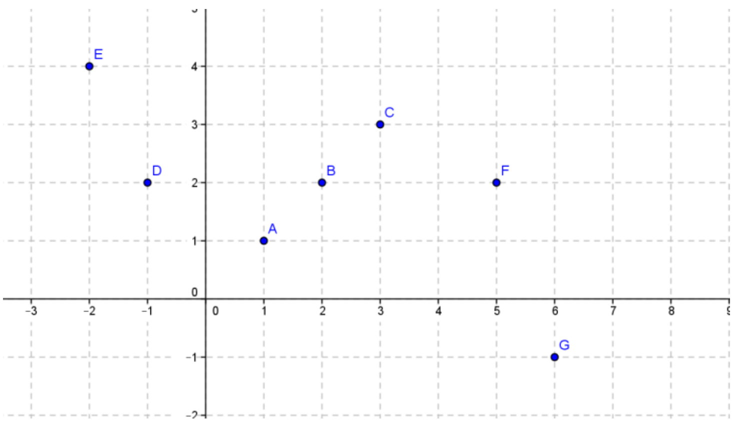
Ao iniciarmos a aula seguinte ainda referente à 3ª sessão, contamos com a participação de 24 alunos para os quais apresentamos a seguinte atividade solicitando que classificassem as relações em funções e não funções argumentando sobre suas escolhas.

Figura 15: Representações a serem classificadas em funções ou não funções

Variável A	Variável B
1	3
3	7
5	4
7	6
9	8



X	Y
2	5
4	6
6	7
4	8
7	9



Fonte: Autor da pesquisa

Essa *atividade* não estava prevista em nossa sequência didática. O objetivo dessa atividade era trabalhar com a definição de função, reconhecendo as variáveis e seus elementos, compreendendo a relação entre as variáveis presentes nas representações e argumentando se a relação poderia ser considerada como função segundo a definição apresentada. Optamos por relações funcionais que não têm uma regra clara, mas que permitem reconhecer a correspondência entre os elementos das variáveis. Essa escolha teve como objetivo evitar que os alunos acreditassem que toda função tem uma regra ou um cálculo que permite estabelecer uma correspondência entre as variáveis. Também pretendíamos levá-los a observar que nem toda relação representada por uma tabela ou um gráfico pode ser considerada função.

A maioria dos alunos não teve dificuldades em reconhecer a relação entre as variáveis em cada um dos quatro exemplos. Entretanto, em alguns momentos, tivemos de questioná-los sobre os elementos das variáveis envolvidas nessa relação, como ocorreu no diálogo estabelecido na análise do último gráfico:

Professor: E esse gráfico representa uma função?
Alunos: Sim.
Professor: Vamos iniciar identificando as variáveis? Quais são os valores assumidos pela variável x?
Beto: Do -2 ao 5.
Professor: Para x = 0 qual o valor do y?
Beto: zero
Professor: O ponto (0 , 0) está marcado aí no gráfico?
Alunos: Não! Tem que estar marcado com um ponto.
Professor: O que representa o ponto?
Beto: Variável?
Professor: E aí pessoal é variável ou relação?
Emerson: É relação.
Professor: Então pessoal, como já havíamos discutido nas aulas passadas o ponto P (x , y) tem dois valores o que mostra a relação ou correspondência entre o valor de x e de y assim como na tabela.
Professor: Quais são os valores assumidos pela variável y?
Beto: -1 ao 4 menos o zero
Professor: E nesse caso para cada valor de x temos apenas um valor para y.
Isabel: Aqui sim.
Professor: Então podemos dizer que esse gráfico representa uma função?
Alunos: Sim.

Mesmo após as discussões sobre plano cartesiano, alguns alunos não compreenderam que um ponto no plano simboliza a relação ou correspondência entre os eixos cartesianos. No entanto Beto, que apresentou inicialmente uma dificuldade, reconheceu corretamente os valores da variável *y* apresentada no gráfico.

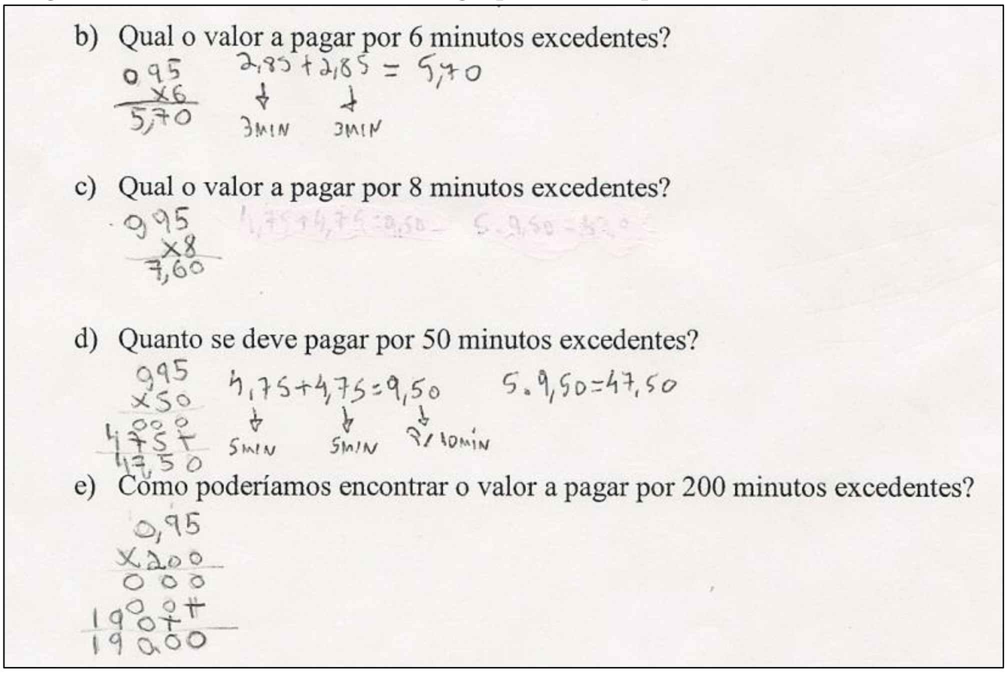
Tanto no primeiro gráfico como na segunda tabela um dos alunos do grupo G1, Carlos, apresentou, sem dificuldades, o motivo para a relação não ser uma função dando exemplos de elementos da variável *x* que estavam relacionados a mais de um elemento da variável *y*.

Ao finalizarmos a análise dessas quatro representações questionamos a turma se sempre que tivermos uma relação representada por uma tabela ou um gráfico essa relação será uma função. Carlos respondeu prontamente que não, e ao ser solicitado um exemplo citou a primeira tabela. Desse modo acreditamos que nosso objetivo com essa atividade foi alcançado, uma vez que esse e outros alunos não confundiram o conceito de função com uma de suas representações, ou que para considerá-la como tal fosse necessária uma regra pré-determinada.

No entanto, mesmo com essas discussões um integrante do grupo G5 – Adriano – nos questionou sobre o que seria função. Nesse momento utilizamos as atividades que havíamos desenvolvido, tanto do plano de telefonia como as análises das quatro representações juntamente com a definição, para tentar explicar o que estávamos chamando de função. Preocupados com a compreensão desse aluno bem como de outros que poderiam estar em dúvidas e não se manifestaram, questionamos os alunos se o quilograma e o valor a pagar poderiam ser considerados como variáveis e se eles conheciam alguma relação entre essas variáveis. Nesse momento um integrante do grupo G1 – João – cita o exemplo da situação do açougue reconhecendo a presença das grandezas nesse “ambiente”. Nesse instante atribuímos o valor R$ 15,00 para o quilograma de um tipo de carne e iniciamos o preenchimento de uma tabela. Esse exemplo possibilitou o diálogo entre grande parte dos alunos em torno de diferentes estratégias para determinar o valor a pagar por 2,5 kg, 7 kg e 22 kg que culminou no reconhecimento da regra (Valor a pagar é igual a 15 vezes a quantidade de carne) e de que essa relação também poderia ser considerada como um exemplo de função, pois para cada “peso” de carne marcado na balança só aparece um valor a ser pago. É oportuno dizer que esses alunos também consideraram a possibilidade de se representar essa relação no plano cartesiano.

Finalizado esse debate distribuímos aos integrantes dos grupos a atividade planejada para essa sessão, os quais não apresentaram dificuldades em resolver os itens *b*, *c*, *d* e *e* dessa atividade. Para os itens *b* e *c*, os grupos analisados propuseram diferentes estratégias de resolução como se observa nos protocolos a seguir:

Figura 16: Protocolo de resolução dos grupos G1 e G3 para a atividade 1 da 3ª sessão



b) Qual o valor a pagar por 6 minutos excedentes?

0,95 x 6 = 5,70   2,85 + 2,85 = 5,70 (3MIN, 3MIN)

c) Qual o valor a pagar por 8 minutos excedentes?

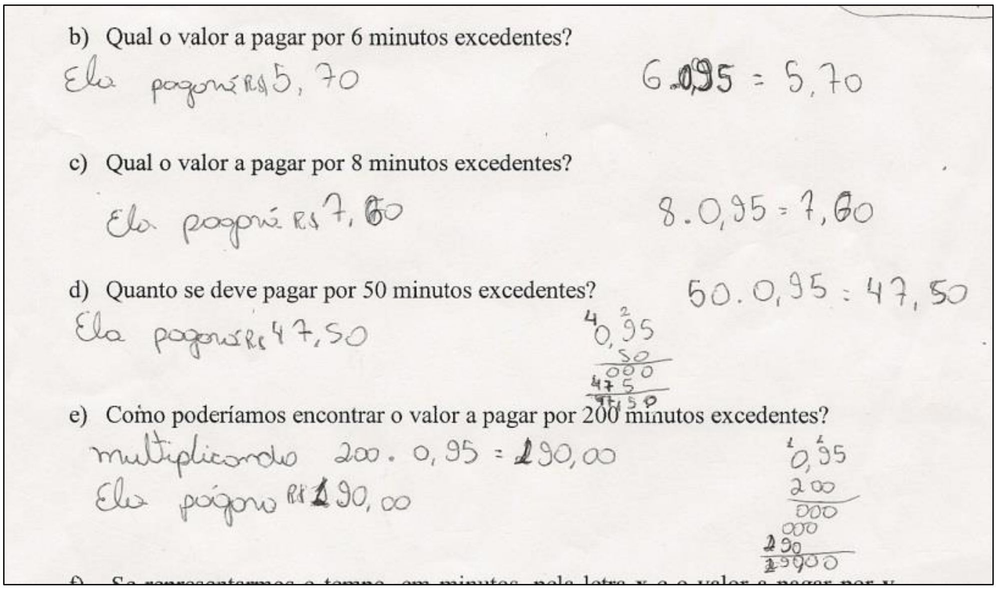
0,95 x 8 = 7,60

d) Quanto se deve pagar por 50 minutos excedentes?

0,95 x 50 = 47,50   4,75 + 4,75 = 9,50 (5MIN, 5MIN, 9,10MIN)   5 . 9,50 = 47,50

e) Como poderíamos encontrar o valor a pagar por 200 minutos excedentes?

0,95 x 200 = 190,00



b) Qual o valor a pagar por 6 minutos excedentes?

Ela pagará R$ 5,70   6 . 0,95 = 5,70

c) Qual o valor a pagar por 8 minutos excedentes?

Ela pagará R$ 7,60   8 . 0,95 = 7,60

d) Quanto se deve pagar por 50 minutos excedentes?

Ela pagará R$ 47,50   50 . 0,95 = 47,50

e) Como poderíamos encontrar o valor a pagar por 200 minutos excedentes?

multiplicando 200 . 0,95 = 190,00

Ela pagará R$ 190,00

Fonte: Dados da pesquisa

Na primeira imagem nota-se a utilização de duas estratégias. Uma delas faz uso dos dados expressos na tabela com ideias de proporcionalidade. Devido aos valores presentes nos itens *d* e *e* esses grupos mudaram de estratégia e passaram a usar o que seria a ideia inicial para a expressão algébrica. Nessas estratégias adotadas por eles, fica evidente a percepção da relação entres as variáveis o que possibilitou a elaboração de uma estratégia menos custosa para obtenção da solução.

Da resolução desses itens destacamos a realizada por Beto do grupo G3. Em um diálogo inicial para explicar ao seu colega o que está representado nessa tabela, item *a* dessa atividade, Beto afirmou que na representação tabular existem duas variáveis, entendendo variável como sendo o que muda de valor identificando como tal *o tempo* e o *valor a pagar*. Esse aluno também observa que existe uma relação entre essas variáveis, pois, segundo ele "cada minuto é R$ 0,95 e, por exemplo, 4 x 0,95 dá 3,80".

Recordamos que esse aluno, na sessão anterior, ao se deparar com uma representação tabular não utilizou a relação entre as variáveis, que possibilitava determinar valores que não estavam presentes nessa representação por meio de uma "regra" ou cálculo. Naquela situação ele continuou o preenchimento da tabela e por algum erro de cálculo não encontrou a resposta correta. Inferimos que a discussão sobre estratégias custosas, realizada ao final da segunda sessão, o fez mudar de estratégia frente a uma atividade semelhante.

Com a observação do desenvolvimento dessa atividade percebemos algumas dúvidas com relação ao item *f*. Desde a análise *a priori* prevíamos que alguns alunos poderiam ter dificuldade em representar a relação entre as variáveis por meio de uma expressão algébrica. Frente a essa dificuldade tentamos recordar alguns termos presentes no enunciado desse item como *expressão*. Nesse momento discutimos o que é uma *expressão numérica* e *expressão algébrica*, e como se elabora essas expressões frente a algumas situações que envolviam quantias em dinheiro. Ao serem questionados sobre como representar a soma, em reais, da quantia de dois colegas da sala, integrantes do grupo G3, afirmaram ser necessário usar as letras x e y. Lembrando-os que nessa situação queríamos a soma das quantias, Beto disse poder representar por $x + y$. Beto disse que sabia a resposta, no entanto, como já era final da aula tivemos de continuar essa atividade na aula seguinte.

A fim de levá-los a generalizar essa relação por meio de uma expressão algébrica iniciamos a aula seguinte com a discussão sobre a forma de se representar algebricamente as informações "o dobro de um número" e "o triplo de um número menos quatro". No diálogo estabelecido com a turma percebemos que alguns alunos confundiam dobro de um número com o quadrado desse número. Visando provocar reflexões sobre esse conhecimento, perguntamos se o dobro de três seria 2x3 ou 3x3. Esse exemplo possibilitou a uma parte dos alunos responder que o dobro de um número poderia ser representado por $x + x$ ou $2x$.

Tomamos como exemplo, também, o cálculo da área e do perímetro de um retângulo com dimensões x e y e solicitamos que nos dissessem como representar algebricamente essas relações. Nesse exemplo percebemos algumas confusões com relação à definição de perímetro e área de um polígono. Alguns alunos sabiam enunciá-las, porém não conseguiam fazer a conversão para o registro algébrico. Com algumas observações sobre a definição enunciada por um grupo de alunos, e anotada na lousa, conseguimos escrever algebricamente a expressões $x + x + y + y$ ou $2x + 2y$ para o perímetro e $x.y$ para a área do retângulo.

Ao propormos esses exemplos pretendíamos fazer surgir conhecimentos que eles deveriam ter sobre expressões algébricas para serem mobilizados na atividade que estavam realizando. Percebemos que alguns alunos, como Emerson do grupo G5, esboçava, com certa dúvida, as respostas $y = 4x$ e $x + 5 = 9,50$. Nesse momento poderíamos ter solicitado que testasse essas expressões para alguns dados presentes na tabela afim de validar sua resposta, mas não o fizemos.

Como planejado resolvemos realizar a correção da atividade solicitando que os alunos expusessem suas estratégias de resolução para que com isso tentássemos chegar a uma generalização da relação entre as variáveis presentes na situação por meio de uma expressão algébrica.

Com a correção do item *a* percebemos que grande parte dos alunos percebeu que na tabela estavam representadas as variáveis e a relação entre elas. Nesse momento surgiu uma discussão sobre a afirmação feita por Beto que diz existir uma regra entre os elementos dessa tabela. Querendo saber qual seria essa regra João questiona Beto que a cita da seguinte forma: “multiplica a quantidade de minutos pelo valor a pagar”. Nesse momento fizemos uma intervenção questionando sobre o que seria esse valor a pagar, ao que Beto respondeu ser o valor por minuto, R$ 0,95. Diante disso anotamos no quadro a regra e comentamos que a mesma se dá pela multiplicação da quantidade de minutos excedentes pelo valor do minuto excedente. Percebemos que João, assim como a turma de alunos, aceitou como verdadeira a resposta apresentada pelo colega.

Ao serem questionados sobre o que mais essa tabela representa, Beto interveio e afirmou ser uma função, pois tem variáveis, relação entre elas e uma regra e nada afirmou sobre a unicidade entre as variáveis. Diante disso precisamos realizar um questionamento para a turma sobre a necessidade ou não de um único valor a pagar para cada quantidade de tempo utilizado excedido. Sobre esse questionamento e pelo que se observou na tabela os alunos responderam que existe essa unicidade.

O debate sobre a resolução dos itens *b, c, d* e *e* fez surgir diferentes estratégias, todas anotadas no quadro, apresentadas pelos grupos G1, G3 e G5 e a estratégia apresentada por uma aluna do grupo G6 que continuou o preenchimento dessa tabela para encontrar a resposta para o item *c*. A resolução dessa aluna possibilitou novamente discutirmos sua validade e utilização para responder o próximo item. Os alunos que acompanhavam e participavam das discussões recordaram e validaram essa estratégia, porém a chamavam de "muito demorada" para resolver o item seguinte. Consideramos esse momento como as situações de *formulação* e *validação*, pois os alunos apresentaram suas estratégias aos demais colegas da turma e por meio de seus conhecimentos de interpretação de dados em tabelas bem como sobre operações numéricas validaram as estratégias dos colegas.

Ao final da apresentação das estratégias os alunos reconheceram que não havia uma única estratégia; todas elas eram válidas na resolução dos itens apresentados. Diante disso direcionamos nossa discussão para a regra percebida por Beto e suas resoluções listadas na lousa:

Professor: qual o número que apareceu em todas as soluções do colega (Beto)?
Alunos: 0,95
Professor: No item f o exercício te dá o valor de minutos excedentes como fazia nos itens anteriores?
Alunos: Não, ele pede para usar a letra x.
Professor: Vocês perceberam que seu colega só usou uma conta para achar as respostas? Que conta foi essa?
Alunos: Multiplicação.
Professor: Qual a multiplicação que seu colega está fazendo?
Alunos: 0,95 vezes os minutos.
Professor: Mas qual é o valor dos minutos agora?
Alunos: x
Professor: Então como fica a conta?
Alunos: x vezes o 0,95.
Professor: Então o que dá, no que resulta essa conta?

Nesse momento percebemos que muitos alunos tentaram, de alguma forma, resolver a expressão *x.0,95* até que Carlos diz *"Coloca aí...igual a y".*

Com essa discussão obtivemos a expressão *x.0,95 = y* que foi testada para obter os valores dos itens dessa atividade. Não podemos garantir que os alunos compreenderam a conversão do registro tabular para o algébrico, mas podemos afirmar que reconheceram a relação entre os elementos dessas colunas e que poderiam encontrar alguns valores nos registros tabular sem muitas dificuldades.

Ao final dessa atividade questionamos os alunos se a expressão algébrica obtida representaria a mesma situação da tabela considerando que a variável *x* poderia assumir os valores {1,2,3, ...}. Após alguns instantes de análise alguns alunos afirmaram que sim, o que nos leva a acreditar que esses alunos perceberam a relação entre as variáveis por meio dos dois registros de representação utilizados nessa sessão. Com isso dissemos a eles que uma função pode ser representada na língua materna, por meio de tabelas e/ou gráficos como fizemos nos problemas das operadoras e como fizemos agora utilizando expressões algébricas.

3.2.7: Considerações sobre o desenvolvimento do Bloco 1 de atividades

Ao levar em consideração a sugestão de iniciar o processo de ensino de função a partir da realidade e do conhecimento do aluno conseguimos, por meio das situações propostas, identificar nesse primeiro bloco de atividades o uso pelos estudantes dos seguintes conhecimentos e estratégias ao resolver as atividades:

- Interpretação de dados expressos em textos, tabelas e gráficos;
- Uso de operações numéricas básicas em cálculos envolvendo os dados de textos, tabelas e/ou gráficos indicando o reconhecimento de uma relação entre os elementos presentes nesses registros;
- Utilização de conhecimentos sobre conjuntos numéricos e suas representações;
- Noções sobre expressões numéricas e algébricas.

A identificação desses conhecimentos foi possível devido aos momentos de participação ativa dos alunos no ambiente desenvolvido e organizado em torno deles. Esse ambiente foi pensado a fim de levá-los a vivenciar as situações de ação, formulação e validação de suas ideias/estratégias no desenvolver das aulas. No entanto observamos que parte dos alunos se importava simplesmente em dar respostas, na maioria das vezes sem justificativas: queriam terminar o mais rápido possível as atividades. Desse modo ressaltamos a importância da presença do professor para mediar a situação, estimulando o diálogo a fim de obter, por parte dos alunos, uma justificativa para determinadas afirmações.

Até o final desse bloco presenciamos a existência das seguintes dificuldades referentes a atividades envolvendo o conceito de função:

- Utilização de ideias de proporcionalidade em situações não proporcionais;
- Não compreensão, no sentido de construir, o registro gráfico utilizado para representar esse conceito.

- Elaboração de uma expressão algébrica para determinada situação.

A nossa escolha metodológica nos possibilitou antecipar o aparecimento de tais dificuldades e assim elaborar estratégias que levasse a superação dessas. Isso foi feito em diferentes momentos, no instante da resolução das atividades em conversa individual com os alunos como no caso da segunda dificuldade quanto de forma geral, para toda a turma de alunos, realizando um trabalho voltado para os conhecimentos referentes ao plano cartesiano e expressões algébricas.

O trabalho envolvendo a mobilização de diferentes representações relacionadas ao conceito de função até esse bloco pode ter contribuído no sentido de evitar o aparecimento de dificuldades como confundir o objeto matemático com uma de suas representações, incluir a noção de continuidade a esse conceito, ter a concepção de que toda função é uma função linear e que toda função deve ter uma regra "bem definida" entre os elementos do seu Domínio e Imagem.

Essa mobilização se mostrou fonte de dificuldades com relação as conversões, se entendidas como construções, tendo como registro de chegada os registros gráfico e algébrico. Acreditamos que essas dificuldades estão relacionadas a conhecimentos sobre plano cartesiano e generalizações por meio de expressões algébricas e que essas podem ser trabalhadas ao longo das sessões nas quais exigiremos novas conversões para esses registros. Esse trabalho não tem o objetivo de levar os alunos a decorar os procedimentos, mas sim de discuti-los e mobilizá-los novamente em outras situações.

3.3 Bloco 2: Atividades Matemáticas envolvendo o conceito de função

O segundo bloco é composto pelas sessões 4 e 5. Nessas sessões são utilizadas situações que relacionam outras grandezas entendendo que isso é necessário para evitar que os alunos confundam função com apenas um tipo de relação. Essas relações servem também para promover a discussão sobre quais relações podem ser ou não função e analisar que critérios os alunos utilizam para fazer tal classificação.

Com as atividades desenvolvidas nessa sessão pretende-se levar os alunos a construírem critérios ou condições gráficas e algébricas para que um ponto pertença ao gráfico de uma função. Com isso é esperado que os alunos realizem algum tipo de conversão entre os registros gráfico, tabular e algébrico para responderem as atividades propostas.

No desenvolvimento dessas atividades podem surgir dificuldades que se referem a:

- Esboçar gráficos com pontos obtidos em uma tabela acreditando que esses são os únicos que satisfazem a função;
- Incluir a noção de continuidade ao conceito de função;
- Utilizar ideias de proporção para resolver problemas funcionais;
- Conversão de representações tendo como registro de chegada o registro algébrico;
- Localizar elementos do domínio e da imagem de uma função em representações gráficas.

3.3.1 Análise *a priori* da 4ª sessão: Aplicando o conceito de função

Nessa sessão são abordados os conhecimentos de dependência entre duas variáveis e a definição de função, que estão sendo construídos ao longo da sequência didática. Pretende-se com isso dar continuidade à construção de conhecimentos referentes à representação da relação entre duas grandezas nos registros algébrico e gráfico, observando as condições necessárias para que tal relação seja funcional.

A escolha de atividades que relacionam grandezas discretas e contínuas a serem analisadas nas suas representações gráficas dá-se pela necessidade de uma discussão sobre a possibilidade de união dos pontos marcados no plano cartesiano e a percepção de dificuldades em classificar tais relações como funções. Com essa discussão pretende-se evidenciar a importância de se reconhecer os elementos do domínio de uma função, através da análise do enunciado do problema. O contexto da situação proposta deve permitir aos alunos utilizarem seus conhecimentos a fim de superar a dificuldade de incluir a noção de continuidade ao conceito de função, caso essa venha aparecer nas atividades.

Atividade 1. Chegado o início do ano, uma loja querendo renovar o seu estoque realiza uma queima de estoque de televisores. Para incentivar a venda desses aparelhos a empresa fez a proposta de pagar a cada funcionário R$ 50,00 reais por televisor vendido. Considerando essa situação responda as questões.

a) Com o que você observa no enunciado da atividade complete a tabela que se refere às vendas de um funcionário.

Nº de televisores vendidos	1	2	3	4	5	6	7	8
Valor a receber								

b) Existe uma relação de dependência entre a quantidade de televisores vendidos e o valor a receber?
c) Qual o valor que o funcionário receberá ao vender três televisores? Como você obteve essa resposta?
d) Qual o valor que ele receberá ao vender doze televisores?
e) Represente graficamente os dados obtidos na tabela.
f) Poderíamos ligar os pontos obtidos no gráfico? Justifique sua resposta.
g) Podemos dizer que o valor a receber está em função do nº de televisores vendidos? Por quê?
h) Se por acaso esse vendedor ao fim do mês tiver vendido 60 televisores quanto ele irá receber? Como você obteve esse resultado?
i) Existe alguma expressão algébrica que permite obter o valor a receber? Que expressão seria essa?

Nessa atividade joga-se com as variáveis contexto da atividade cujo valor assumido é contexto do cotidiano e também com a variável sentido da conversão, cujos valores são a conversão do registro língua materna para o registro tabular, a conversão do registro tabular para o registro gráfico e a conversão dos registros tabular e gráfico para o registro algébrico.

Essa atividade explora os quatro registros de representação do objeto matemático função e as questões demandam algum tipo de conversão entre esses registros. Ao representar graficamente a relação entre o número de televisores vendidos e o valor a receber, exige-se uma justificativa para a possibilidade ou não de se ligar os pontos obtidos.

Para responder o item *a* pode-se observar que o valor a receber é 50 vezes o número de televisores vendidos. Ao responderem esse item pode-se afirmar que houve uma conversão entre os registros tabular e língua materna. Essa tabela pode ser usada tanto para auxiliar a representação gráfica quanto para determinar a expressão algébrica exigida nos itens seguintes.

Quadro 10: Resolução item *a* da atividade 1 da 4ª sessão

Nº de televisores vendidos	1	2	3	4	5	6	7	8
Valor a receber	50	100	150	200	250	300	350	400

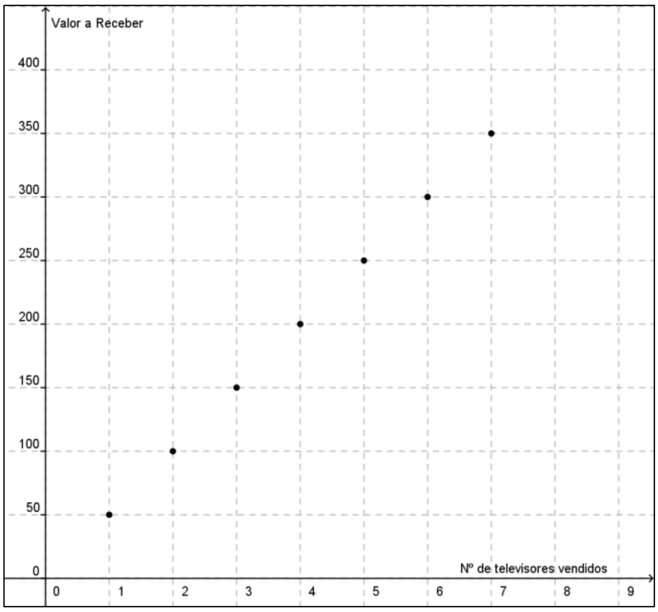
Fonte: Dados do pesquisador

Pela interpretação do enunciado da atividade e pelo preenchimento dessa tabela pode-se perceber a existência de uma relação de dependência entre a quantidade de televisores vendidos e o valor a receber, uma vez que para cada televisor vendido o funcionário recebe R$50,00.

Para responder os itens *c* e *d* os alunos podem fazer uso da tabela, ou realizar a multiplicação do número de televisores vendidos por 50, que corresponde ao valor de venda de um televisor o que indica a compreensão da relação entre as grandezas e o reconhecimento dessa relação em dois registros diferentes.

O gráfico a seguir representa a construção esperada como resposta ao item *e* o que caracteriza uma conversão do registro em língua materna ou tabular para o registro gráfico. Essa construção é realizada com os dados obtidos no item *a* e sua localização no plano cartesiano. Podem ocorrer situações em que os eixos fiquem invertidos. Esse item permite investigar as ações dos alunos frente a uma situação que se apresenta como fonte de dificuldades em sessões anteriores. Por essa atividade pode-se investigar se os alunos esboçam somente os pontos cujas coordenadas estão presentes na tabela.

Figura 17: Gráfico, resposta ao item *d* da atividade 1 da 4ª sessão



Fonte: Autor da pesquisa

O objetivo do item *f* é provocar uma análise, por parte dos alunos, da (não) possibilidade de haver quantidades não naturais de televisores vendidos. Caso algum aluno tenha ligado os pontos do gráfico deve perceber que isso não é possível uma vez que não faz sentido pensar em 2,5 televisores vendidos, por exemplo. Na análise preliminar constata-se que muitos alunos cometem esse erro, pois durante um período escolar foram levados a acreditar que sempre, independente da situação, pode-se traçar uma reta pelos pontos marcados no plano.

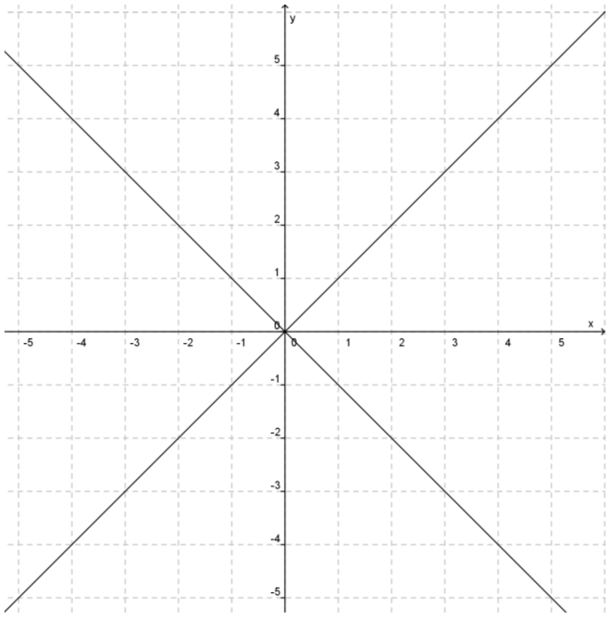
Nas respostas para o item *g* pretende-se analisar se os alunos são capazes de argumentar sobre uma relação ser ou não uma função. Desta forma espera-se encontrar como resposta: Sim, pois para cada quantidade de televisores vendidos existe apenas um valor a receber. Essa resposta leva em consideração o conhecimento institucionalizado na aula anterior. Nesse item pode-se questionar quais seriam os elementos dos conjuntos domínio e imagem dessa função e instigar a análise dos dados, por exemplo: quantos televisores um funcionário vendeu para ter recebido R$ 180,00?

Nas sessões anteriores foram discutidas algumas estratégias custosas, assim acredita-se que essa atividade pode ser realizada por meio de uma conversão para o registro numérico obtendo como resposta 60.50 = 3000 para o item *h*. No entanto não se deve descartar a estratégia de preenchimento da tabela, ou algo semelhante, e a utilização de ideias de proporcionalidade.

10 televisores_________ R$ 500,00
20 televisores_________ R$ 1000,000 e assim por diante até chegarem à:
60 televisores _________ R$ 3000,00.

Com o desenvolvimento dessa atividade pode-se encontrar a lei de formação ou algo que se assemelhe a relação: *Valor a receber é igual a 50 vezes a quantidade de televisores vendidos* o que dá indicio de uma conversão para o registro algébrico. Com as discussões realizadas nas sessões anteriores pode-se analisar se os alunos estão construindo conhecimentos necessários para elaborar essa escrita algébrica para relações entre duas grandezas.

Atividade 2. Observe a representação gráfica de uma relação entre x e y.



a) Complete a tabela com valores obtidos a partir do gráfico.

x	-5	-4	-3	-1	1	2	3	4	5
y									

b) O elemento -2 da grandeza x está relacionado com o elemento -2 da grandeza y? e com o elemento 2 da grandeza y?

c) Podemos dizer que y está em função de x? Por quê?

Para essa atividade joga-se com a variável contexto da atividade cujo valor assumido é contexto matemático e também com a variável sentido da conversão que assume o valor conversão do registro gráfico para o registro tabular.

O objetivo dessa atividade é provocar a reflexão sobre o fato de a relação entre as variáveis *x* e *y* ser ou não uma função. Para tanto optou-se pelo confronto com uma relação entre duas grandezas expressa no registro gráfico. Estudos como o de Martins (2006) apontam que muitos alunos consideram uma relação como função por apresentar-se em um gráfico e/ou tabela. As questões dessa atividade assim como as apresentadas na sessão anterior tentam evitar o provocar uma possível superação de tal dificuldade. Outro objetivo dessa atividade é levar os alunos a realizar a conversão no sentido gráfico para tabular o que possibilita investigar se eles reconhecem a relação entre as grandezas no registro de partida e quais conhecimentos eles mobilizam nessa conversão.

Ao completarem a tabela os alunos podem perceber que os valores de *x* estão relacionados com dois valores de *y*. O preenchimento dessa tabela se dá por meio da conversão entre os registros gráficos e tabular o que necessita de uma interpretação dos dados expressos no registro gráfico. Nessa sequência didática já foram realizadas algumas análises gráficas, assim, pode ser que os alunos não encontrem dificuldade em determinar os pares ordenados (x , y).

Quadro 11: Reposta ao item *a* da atividade 2 da 4ª sessão

x	-5	-4	-3	-1	1	2	3	4	5
y	-5 e 5	-4 e 4	-3 e 3	-1 e 1	-1 e 1	-2 e 2	-3 e 3	-4 e 4	-5 e 5

Fonte: Autores da pesquisa

O questionamento feito no item *b* chama a atenção para o fato de um valor de *x* estar associado a dois valores de *y*, o que pode contribuir com o preenchimento da tabela.

As respostas dos itens anteriores devem permitir a percepção de que a relação entre *x* e *y* não é uma função, pois pode-se notar, tanto na tabela quanto no gráfico, que os elementos da grandeza *x* estão associados a dois elementos da grandeza *y*.

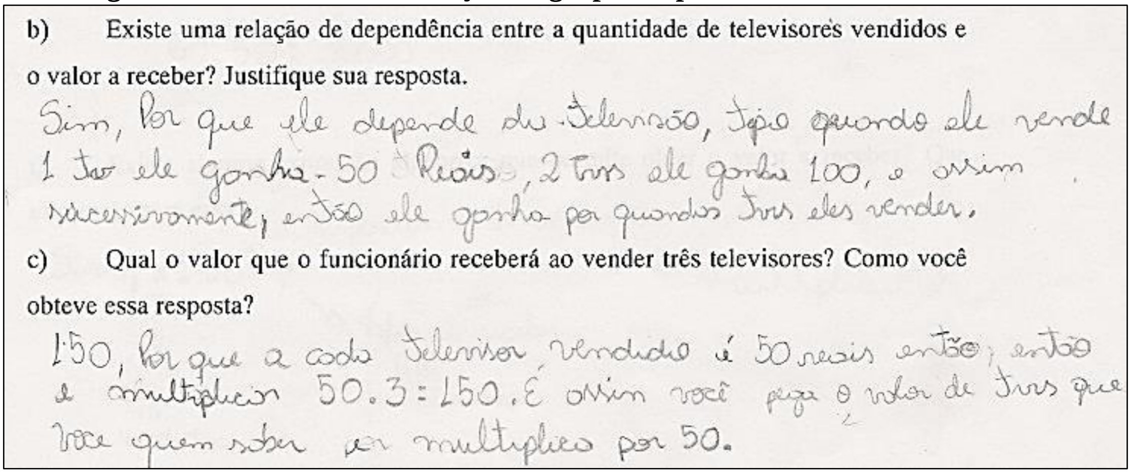
Percebendo que essa relação não é uma função no fechamento das atividades pode-se levantar a questão de uma possível restrição aos conjuntos que representam as variáveis. Outra questão a ser proposta é "quais mudanças eles fariam no gráfico ou na tabela para que a relação se tornasse uma função"? Também deve-se observar que na última atividade temos uma relação entre dois conjuntos contínuos ao contrário da primeira.

3.3.2 Experimentação e análise *a posteriori* da 4ª sessão.

Demos início à 4ª sessão logo após a discussão da última atividade da sessão anterior. Distribuímos a primeira atividade para os grupos solicitando que os mesmos realizassem a leitura da atividade e, caso ficassem com alguma dúvida, nos solicitassem explicação. A princípio todos os alunos entenderam a atividade e iniciaram imediatamente a resolução dos seus itens.

Ao percorrermos os grupos percebemos que os mesmos não encontraram dificuldades em realizar os itens *a*, *b*, *c*, e *d*. Destacamos as respostas para os itens *b* e *c* dadas pelo grupo G3 .

Figura 18: Protocolo de resolução do grupo G3 para a atividade 1 da 4ª sessão


b) Existe uma relação de dependência entre a quantidade de televisores vendidos e o valor a receber? Justifique sua resposta.

Sim, Por que ele depende da televisão, tipo quando ele vende 1 tv ele ganha 50 Reais, 2 tvs ele ganha 100, e assim sucessivamente, então ele ganha por quantas tvs eles vender.

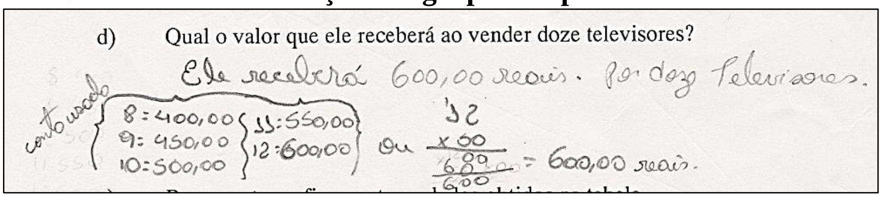
c) Qual o valor que o funcionário receberá ao vender três televisores? Como você obteve essa resposta?

150, Por que a cada televisor vendido é 50 reais então, então é multiplicar 50.3 = 150. É assim você pega o valor de tvs que você quer saber e multiplica por 50.

Fonte: Dados da pesquisa

Por essas respostas podemos inferir que esse grupo reconheceu a relação de dependência entre as variáveis envolvidas na situação, ao fazer a correspondência 1 para 50, bem como uma maneira de se obter o valor da variável (valor a receber) dado o valor da variável (nº de televisores vendidos). Foi possível encontrar alunos que reconhecem outras estratégias para responderem o item *d* dessa mesma atividade. Essas estratégias são reconhecidas como verdadeiras pelos colegas de seus grupos, mas não adotadas pelos mesmos. Apresentamos como exemplo a estratégia de um aluno do grupo G5.

Figura 19: Protocolo de resolução dos grupos G5 para a atividade 1 da 4ª sessão


d) Qual o valor que ele receberá ao vender doze televisores?

Ele receberá 600,00 reais. Por doze Televisores.

contando
8: 400,00
9: 450,00
10: 500,00
11: 550,00
12: 600,00
ou 12 x 50 = 600,00 reais.

Fonte: Dados da pesquisa

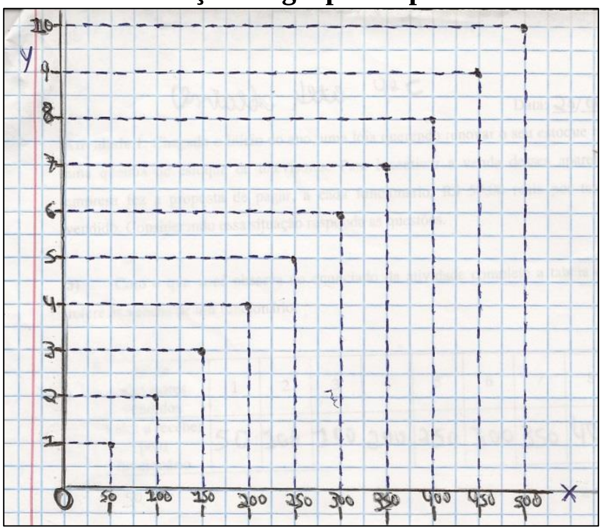
Esse aluno percebeu que dando continuidade a tabela é possível obter a resposta para a pergunta. O diálogo estabelecido com os seus colegas de grupo o levou a reconhecer outra estratégia, 12 . 50 = 600. Pela análise do material escrito por esse grupo percebemos que a primeira estratégia foi abandonada no item *h*, na qual todos os alunos realizaram o cálculo 60 . 50 = 3000

Ao observar a realização da construção do gráfico, item *e*, notamos que alguns grupos ainda apresentavam dificuldades em construir a representação gráfica para uma relação. A mais comum se dava na escolha de uma escala para os eixos do plano cartesiano principalmente ao iniciar a marcação dos elementos dos eixos em torno da origem. Pelo diálogo estabelecido com alguns alunos podemos dizer que essa "dificuldade" parece estar ligada à estética do gráfico. Ao questionarmos por que escolhem escalas diferentes para essa região do plano cartesiano os alunos respondem que fazem isso porque se fizessem de "um em um" ficaria muito apertadinho. Outro "erro" se dá ao ligarem, por meio de segmentos, os pontos do plano cartesiano com as suas respectivas coordenadas nos eixos. Diante dessa situação optamos por não interferir na resolução da atividade incentivando-os a discutirem entre si e usarem o que havia sido discutido em aulas anteriores sobre a construção de planos cartesianos e a localização de pontos nesses.

Com relação ao item *e,* um aluno apresentou o seu gráfico e declarou: "não cabe mais!" referindo-se a localização de outros pontos no plano cartesiano. Frente a esse posicionamento questionamos se houvesse mais espaço poderia continuar. Prontamente o aluno respondeu que sim e deu continuidade às suas atividades.

Dois alunos do grupo G5 também não se mostraram presos somente aos valores da tabela ao apresentar o seguinte gráfico:

Figura 20: Protocolo de resolução do grupo G5 para a atividade 1 da 4ª sessão



Fonte: Dados da pesquisa

Isso demonstra que esses alunos não enfrentam a dificuldade de esboçar gráficos utilizando somente os pontos obtidos em uma tabela acreditando que esses são os únicos que satisfazem a função. Como havíamos previsto, nessa resolução houve a inversão dos eixos cartesianos.

Todos os alunos que apresentaram uma possível construção da representação gráfica não ligavam os pontos marcados no plano cartesiano. Esses só sentiram necessidade, ou pensaram nessa hipótese, ao se deparar com o item *f.* Diante desse item a grande maioria argumentava que sim, pois bastaria pegar a régua e ligar os pontos. Isso demostra, novamente, que alguns alunos têm dificuldades relativas à compreensão do significado de segmentos representados no plano cartesiano.

Ao tentar responder o item *g* grande parte dos alunos solicitava ajuda. Frente a isso propusemos que o grupo olhasse em seu caderno a atividade realizada na aula anterior na qual discutimos e definimos quando uma relação entre duas variáveis representa ou não uma função. Como respostas destacamos as seguintes:

Figura 21: Protocolo de resolução dos grupos G5, G3 e G1 para a atividade 1 da 4ª sessão

g) Podemos dizer que o valor a receber está em função do número de televisores vendidos? Por quê?

Sim, porquê para cada valor de X existe um unico y, ou seja, para cada TV vendida tem o valor unico a receber

g) Podemos dizer que o valor a receber está em função do número de televisores vendidos? Por quê?

Sim, porque quanto mais TVs ele vender mais ele ganhará. Porque televisor vendidos tem um valor único a receber.

g) Podemos dizer que o valor a receber está em função do número de televisores vendidos? Por quê?

SIM. PORQUE TEM QUE SABER QUANTOS TELEVISORES FORAM VENDIDOS PARA SABER O VALOR A RECEBER.

Fonte: Dados da pesquisa

A maioria dos alunos demonstrou insegurança frente essa questão. As duas últimas imagens levam mais em consideração a noção de dependência deixando de lado a noção de unicidade. Um fato importante e positivo é que não encontramos resposta que tivesse como argumento um dos registros de representação como afirmação para ser ou não uma função. Isso dá indícios de que esses alunos não estão confundindo o conceito de função com uma de suas representações. Sempre que encontrávamos como respostas "sim, para cada valor de x existe um único y" questionávamos sobre o significado das letras *x* e *y* o que pode ter contribuído para a resposta do grupo G5 e G3 apresentada anteriormente.

Em relação ao item *i* foi possível presenciar o diálogo entre os integrantes do grupo G5 na busca da resolução dessa atividade. Essa resolução teve como base a atividade desenvolvida na 3ª sessão. Um dos integrantes desse grupo argumentou com seus colegas que aquela atividade se parecia com a que estavam realizando e propôs que fizessem semelhante, apenas trocando os valores. Essa ideia foi aceita pelos integrantes do grupo e quando questionamos se com a expressão elaborada por eles poderíamos encontrar valores presentes e ausentes na tabela os mesmos nos mostram alguns exemplos.

Como a maioria dos alunos havia respondido quase toda a primeira atividade, demos continuidade à sessão distribuindo a segunda atividade. Ao percorrer os grupos percebemos que os alunos não tiveram dificuldade para entender o que era para ser feito no item *a* da *atividade 2*. A dificuldade demonstrada por alguns grupos se deu na interpretação do gráfico dessa relação como observado no seguinte questionamento: "Professor, eu sei que tenho que preencher essa tabela, mas não tem nada marcado para eu achar o valor." Em outro grupo, G3, em um momento do diálogo sobre essa atividade ao questionarmos um de seus integrantes se o elemento 1 do eixo *x* estava associado/relacionado aos elementos 1 e 3 do eixo *y* recebemos como resposta sim para ambos. Frente a essa resposta e fazendo uso da representação gráfica da atividade anterior (atividade sobre a venda de televisores), estabelecemos o seguinte diálogo:

Professor: No seu gráfico (atividade 1) o quatro está relacionado com o 100?
Alunos: Não, porque o 4 é com o 200.
Professor: Esse ponto (4 , 100) pertence ao seu gráfico ou à situação apresentada no enunciado?
Aluno: Não!
Professor: Voltando para atividade 2. O que é, para vocês, o gráfico nessa atividade? É tudo o que está representado/desenhado aí? As retas os pontos?

Frente a essa última pergunta os alunos não demonstraram saber, de imediato, a resposta. Com isso percebemos que a alteração do valor da variável didática contexto da atividade permite aos alunos interpretar o gráfico da primeira atividade levando em consideração sua interpretação da situação envolvida. Já na leitura do gráfico da segunda atividade, esses alunos precisavam formular novas estratégias ou conjecturas de análise gráfica para responderem as questões.

O modelo do gráfico utilizado na *atividade 2* parece interferir na interpretação dos alunos no que se diz respeito à relação entre os elementos dos eixos *x e* y, uma vez que esses alunos, em atividades anteriores, reconhecem a relação entre os elementos dos eixos e identificando as coordenadas dos pontos marcados como por exemplo no gráfico do plano de telefonia. Deste modo formulamos a hipótese de que alguns alunos não reconhecem a existência de infinitos pontos sobre uma reta e nem que esta representa a relação entre as grandezas envolvidas na atividade.

O esboçado anteriormente reforça, para essa turma de alunos, a presença de dificuldades relacionadas à representação gráfica de uma relação seja ela funcional ou não. Poucos são os alunos que conseguem analisar essa atividade, reconhecer a relação entre os elementos dos eixos cartesianos e completar a tabela.

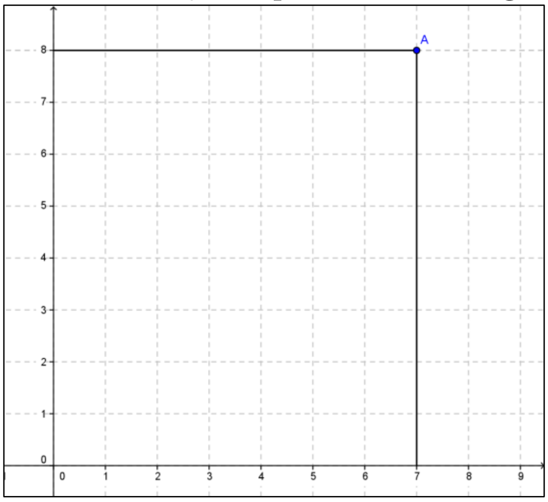
Nesse momento tivemos de interromper nossas atividades, pois a aula já chegava ao seu fim. De posse desse material resolvemos iniciar a próxima aula com alguns comentários sobre plano cartesiano para que os alunos pudessem analisar as relações no registro gráfico. A aula seguinte contou com a participação de 21 alunos, e foi iniciada com a apresentação de um plano cartesiano no qual as coordenadas de cada eixo não passavam da quinta unidade. Em seguida questionamos a turma se ele, o plano cartesiano, já representava um gráfico. Percebemos que para alguns alunos a resposta era sim, mas para outros a resposta era não. Com esse impasse prosseguimos com o diálogo.

Alunos: [...] Não, tem que mostrar as variáveis e os pontos.
Professor: O que seria esses pontos?
Alunos: Relações
Professor: Isso que o colega de vocês disse já está aqui no plano cartesiano?
Alunos: Não!
Professor: Outra pergunta. Quantos pontos podemos marcar nesse plano cartesiano?
Alunos: Vários!
Professor: Como eu descubro as coordenadas desse ponto? Indicando um ponto qualquer no gráfico, a saber (7 , 8).

Alunos: Aí você tem que aumentar as linhas (eixos).[...] Você vai ter que subir ou descer uma linha reta. Você vai andando em linha reta do ponto na direção do x e depois do ponto na direção do y.

Seguimos as instruções dos alunos e fizemos a seguinte representação:

Figura 22: Localização do ponto A usando segmentos



Fonte: Dados da pesquisa

Professor: Agora eu gostaria de saber de vocês qual a diferença do traço pontilhado para o traço contínuo?

Os alunos ficaram em silêncio e alguns sussurraram “nenhum”.

Professor: Vamos conversar um pouco. Vamos recordar algumas coisas da Geometria.

Ao apresentarmos na lousa um segmento questionamos quantos pontos ele teria. Inicialmente os alunos tentaram “chutar” algumas quantidades até que se convenceram de que são vários. Frente a essa resposta afirmamos que estavam certos e que seria essa mesma a resposta, vários pontos, na verdade infinitos pontos.

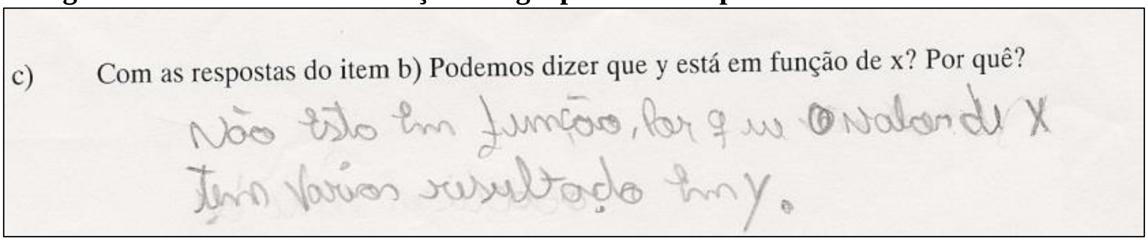
Voltando as atenções para o ponto A (7 , 8) localizado anteriormente questionamos a turma sobre quantos pontos estão marcados nesse plano. Pelo que havíamos acabado de afirmar, rapidamente vários alunos respondem “um monte” . A partir dessa resposta questionamos se seria isso o que queríamos fazer, marcar um monte de pontos ou só o ponto A, obtendo como resposta “não era só o A”.

Após esses comentários solicitamos que os alunos continuassem a resolver as atividades da sessão passada para que pudéssemos fazer o fechamento das mesmas levando em consideração o que tínhamos acabado de discutir.

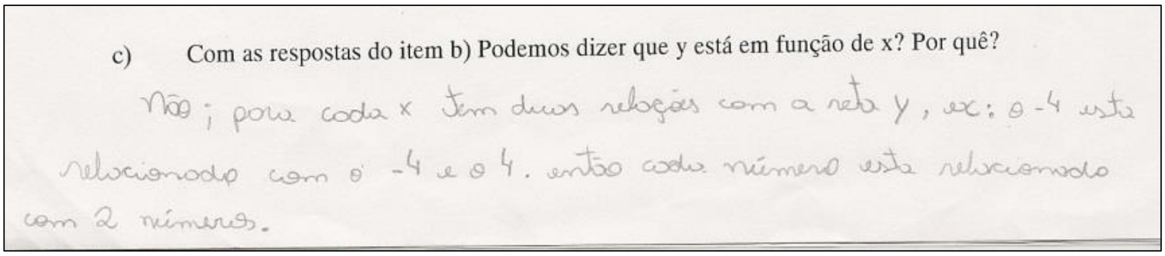
Ao percorrer os grupos nos deparamos com um diálogo entre os alunos do grupo G3 frente à dificuldade de Caio em preencher a tabela da *atividade 2*. Nesse grupo, Beto faz a afirmação “aqui a regra são as linhas. Você tem que ir subindo ou descendo e parar nas linhas”. Após essa fala percebemos que o aluno que estava com dúvidas adotou a ideia do colega e realizou a atividade fazendo as marcações dos pontos no gráfico e preenchendo corretamente a tabela. Com essa afirmação, Beto aparentemente formulou uma estratégia para localizar os valores correspondentes a uma dada ordenada ou abscissa. Não podemos afirmar que houve uma situação de validação, pois Caio não exigiu uma explicação do seu colega.

Na realização do item *b* dessa atividade notamos que os alunos reconheceram que os elementos da variável *x* estão relacionados com dois elementos da variável *y*. Essa possibilidade foi percebida, no entanto muitos alunos vinham nos questionar se era preciso assinalar os dois valores. Essa percepção contribuiu para que muitos voltassem para a tabela e incluíssem outros valores para a coordenada *y*. Porém essa informação não foi utilizada para responder o próximo item dessa atividade que questiona sobre a relação ser ou não uma relação funcional. Quando éramos solicitados, os incentivamos a recordar a aula sobre a qual classificamos as relações como função ou não função que estava em seus cadernos. Como resposta a esse item destacamos as dadas pelos grupos G2 e G3.

Figura 23: Protocolo de resolução dos grupos G2 e G3 para a atividade 2 da 4ª sessão


c) Com as respostas do item b) Podemos dizer que y está em função de x? Por quê?

Não esta em função, por que o valor de X tem varios resultado em y.

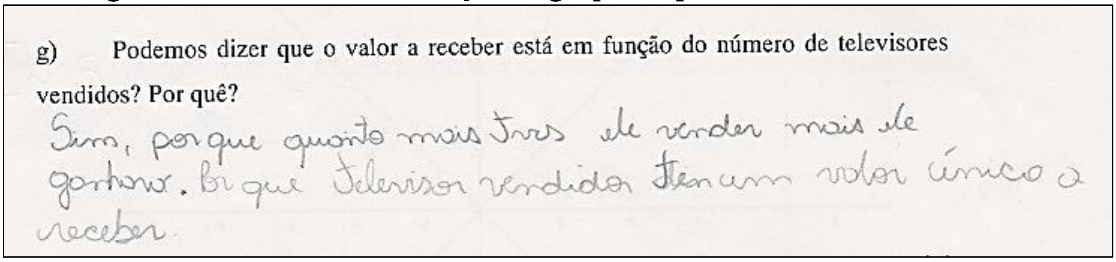

c) Com as respostas do item b) Podemos dizer que y está em função de x? Por quê?

Não; para cada x tem duas relações com a reta y, ex: o -4 esta relacionado com o -4 e o 4. então cada número esta relacionado com 2 números.

Fonte: Dados da pesquisa

Pela última resposta, dada pelo grupo G3, podemos perceber que esses alunos apresentaram argumentos diferentes quando alterado o valor da variável didática contexto da atividade. Eles usaram a definição quando o contexto era matemático e quando era uma situação do cotidiano tentaram usar seus conhecimentos sobre a mesma, como observado na resposta ao item *g* da *atividade 1*.

Figura 24: Protocolo de resolução do grupo G3 para a atividade 1 da 4ª sessão



g) Podemos dizer que o valor a receber está em função do número de televisores vendidos? Por quê?

Sim, porque quanto mais Tvs ele vender mais ele ganhara. Porque Televisor vendidos tem um valor único a receber.

Fonte: Dados da pesquisa

Iniciamos o fechamento das atividades dessa sessão com o diálogo sobre o assunto do problema inicial, *atividade 1*. Com isso, vários alunos mostraram compreender o problema e a relação de R$ 50,00 para cada televisor vendido pelo funcionário.

Como já havíamos observado os alunos não apresentaram dificuldades em realizar os itens *a* e *b*. Ao questionar a turma sobre a resolução do item *c* apresentaram a estratégia que faz uso da multiplicação 50 . 3 e também a de simplesmente observar os dados expressos na tabela. Já para o item *d*, os alunos afirmam não ser possível olhar na tabela, mas poderia ser respondida fazendo 300 + 300, sendo 300 o valor correspondente a venda de 6 televisores observada na tabela. Afirmaram, porém, que o modo mais rápido seria fazendo 50 . 12 = 600. Observa-se, nessa resolução, a presença de ideias proporcionais.

No decorrer da sessão e no fechamento da atividade é possível notar que a situação proposta e os itens *a*, *b*, *c* e *d* favoreceram as situações de *ação* e *formulação* de estratégias. Essas estratégias mobilizavam os registros tabular e numérico, esse último dando indícios de uma possível escrita algébrica. Com o fechamento das atividades e algumas discussões observadas nos grupos pudemos afirmar que ocorrem situações de *validação* de diferentes estratégias, no entanto, para quantidades elevadas de valores vendidos como no *item h*, a maioria dos grupos validou uma única estratégia.

Na discussão do item *e* realizamos, com o auxílio dos alunos, a localização dos pontos que representam a relação entre as variáveis presentes nesse problema. Com a representação gráfica construída na lousa questionamos sobre suas respostas para o item *f*, no qual se questionava sobre a possibilidade de se ligar os pontos marcados no plano.

A maioria dos alunos afirmava que era possível, dizendo: “é só pegar a régua e pronto”. Com essa resposta realizamos o seguinte diálogo:

Professor: O que essa reta ou esses segmentos representam no plano cartesiano mesmo? Vocês se lembram do que discutimos no início da aula de hoje?
Alunos: Um monte de pontos.
Professor: Desenhando essa reta no nosso gráfico o que aconteceu?
Alunos: Enchemos de pontos.

Com isso escolhemos um ponto propositalmente, a saber, P(2.5 , 125) e perguntamos quais seriam os valores de suas coordenadas e como eles leriam essa informação.

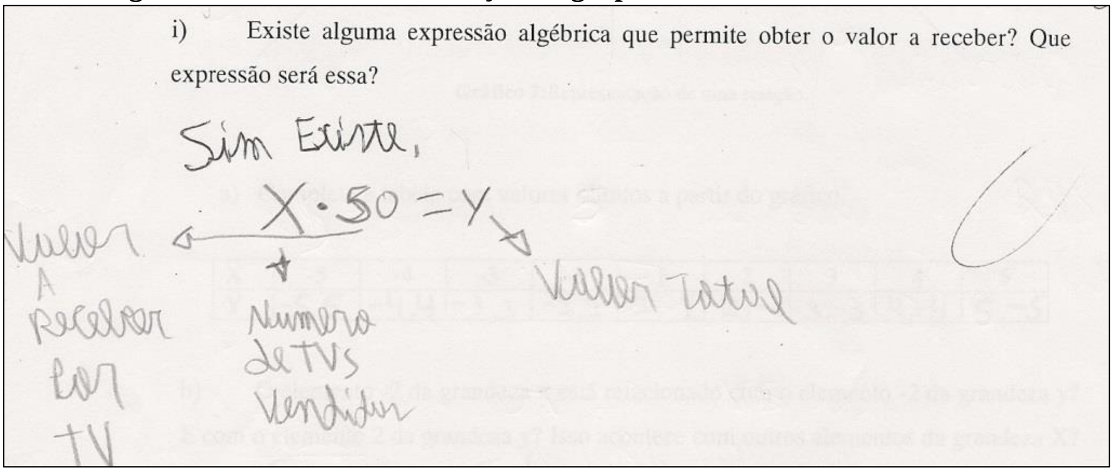
Alunos: Se ele vendesse “duas televisões e meia” ele receberia 125 reais.

Logo em seguida a essa resposta começaram as risadas. Com isso continuamos o diálogo.

Professor: Faz sentido dizer “duas televisões e meia”?
Alunos: Não (risos)
Professor: Por que esse ponto apareceu no gráfico?
Alunos: Porque desenhou a reta.
Professor: O que vocês acham, podemos desenhar essa reta?
Alunos: Não.
Professor: Porque não?
Alunos: Não pode ter valor “quebrado” para o número de televisores.

Aproveitando a resolução do item *h*, perguntamos se o gráfico ou a tabela eram suficientes para responder esse item. Frente a esse questionamento um dos alunos, Beto, respondeu que não, que era preciso fazer uma conta. Aproveitamos essa resposta para questioná-los sobre a resolução do item *i*. Muitos alunos expressaram suas resoluções porém solicitamos uma melhor explicação do significado dos termos usados. Nesse momento Adriano, do grupo G5, tomou a palavra e ditou sua resolução que apresentamos a seguir:

Figura 25: Protocolo de resolução do grupo G5 a atividade 1 da 4ª sessão


i) Existe alguma expressão algébrica que permite obter o valor a receber? Que expressão será essa?

Sim Existe,

$X \cdot 50 = Y$

Valor A Receber por TV

Numero de TVs Vendidas

Valor Total

Fonte: Dados da pesquisa

Com relação a *atividade 2*, iniciamos o seu fechamento com o seguinte diálogo:

Professor: O que está sendo mostrado nessa atividade?
Alunos: Um gráfico
Professor: Mas o que tem nesse gráfico?
Alunos: A relação entre x e y.
Professor: A tabela também mostra essa relação?
Alunos: Mostra
Professor: O que é o gráfico nessa atividade?
Alunos: As linhas retas.

Em seguida solicitamos que os alunos nos auxiliassem a preencher a tabela apresentada na lousa. Nesse momento questionamos se seria possível construir uma tabela para mostrar todas as relações entre *x* e *y* com base na representação gráfica. Imediatamente ouvimos a exclamação de um dos integrantes do grupo G1, João, "Quem vai ser o louco de fazer!" "não tem fim". Ao questionarmos a turma sobre a exclamação do colega aparentemente todos concordaram afirmando que seriam muitos números. Pela exclamação desse aluno é possível dizer que este atribui significado para os segmentos representados no plano e que esses segmentos correspondem à relação entre os eixos cartesianos e que tal relação, nessa situação, não pode ser totalmente representada em uma tabela.

O preenchimento correto dessa tabela possibilitou responderem sem dificuldades o item *b* dessa atividade. Na discussão do item *c* um dos alunos, Beto (G3) se mostrou muito interessado em participar e expôs, inicialmente, a seguinte resposta "*Não. Para cada x tem duas relações com a reta y".* Ao solicitarmos que desse um exemplo o mesmo disse "*o -4 está relacionado com o -4 e o +4. Então cada número está relacionado com 2 números*". a qual foi anotada na lousa, com algumas correções, para que os alunos pudessem observá-la e validá-la.

Ao final dessa sessão pudemos observar que a maioria dos alunos coordenava corretamente os registros língua materna, tabular e numérico o que os permitiu responder as questões sem dificuldades. A proposição de itens com valores ausentes na representação tabular e posteriormente na representação gráfica dessa relação fez com que alguns alunos buscassem por uma generalização, até então numérica ou em língua materna, o que contribuiu para a elaboração de uma escrita algébrica para essa relação.

A conversão do registro língua materna para o tabular e posteriormente para o registro gráfico demonstra que os alunos estavam superando dificuldades encontradas em sessões anteriores e, o mais importante, constroem a representação gráfica sem se restringir a somente aos pares de coordenadas presentes na representação tabular da relação. Outro resultado importante dessa análise é a ausência da dificuldade na qual os alunos, ao marcarem uma quantidade de pontos no plano cartesiano, ligariam os mesmos por meio de um segmento sem discussão sobre o domínio dessa função.

A conversão do registro gráfico para o tabular, exigida na segunda atividade, permitiu que os alunos percebessem que a relação entre as variáveis x e y não satisfazia o critério de unicidade entre elas o que contribuiu para as respostas ao item *b* dessa mesma atividade. Acreditamos que as atividades desenvolvidas até o momento também contribuíram para que os alunos não confundissem o conceito de função com uma de suas representações, o que poderia tê-los levado a responderem que a representação gráfica apresentada nessa atividade seria de uma função.

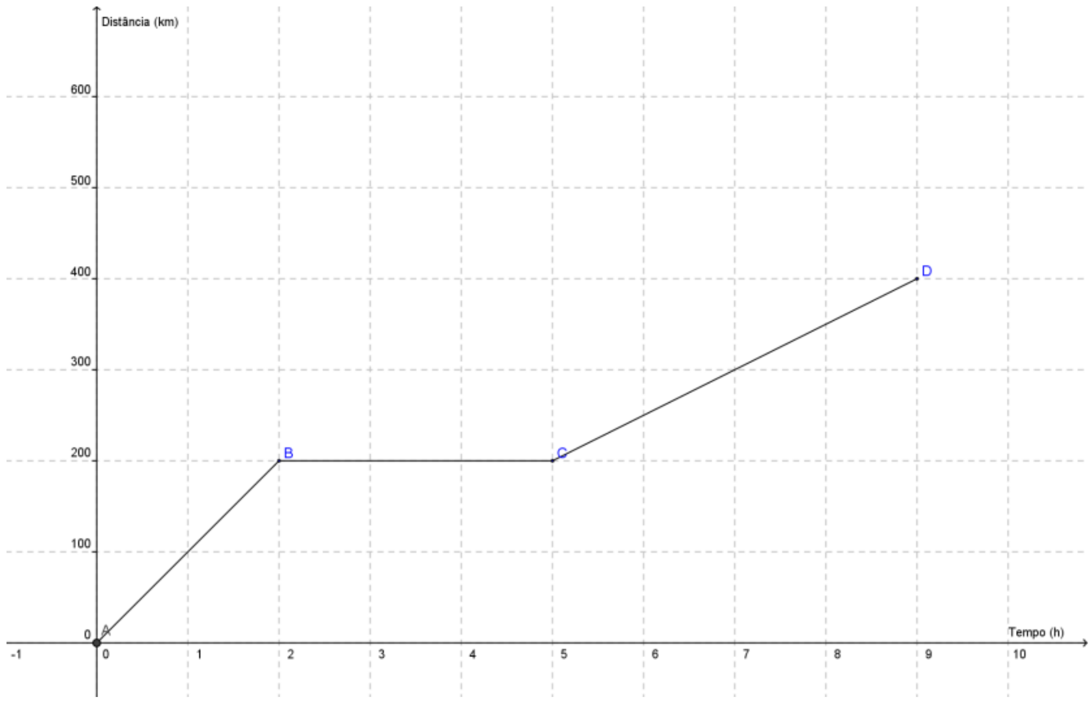
A escolha do tipo da representação gráfica da *atividade 2* fez surgir a dificuldade em localizar elementos dos eixos x e y necessários para o preenchimento da tabela. Acreditamos que essa dificuldade se deu pelo fato de os pontos no plano cartesiano não terem sido destacados. Perante essa situação retomamos alguns conhecimentos relacionados ao campo da Geometria, no caso, a infinidade de pontos sobre um segmento.

3.3.3 Análise *a priori* da 5ª sessão: Critérios

O conjunto de atividades dessa sessão tinha o objetivo de levar os alunos a construírem conhecimentos sobre condições, tanto gráfica quanto algébrica, para que as coordenadas de pontos satisfaçam uma relação. Para tanto é necessária a interpretação de dados expressos em tabelas e gráficos, bem como a coordenação desses registros.

A atividade a seguir, inspirada no trabalho de Martins (2006), relaciona as grandezas de espaço e tempo, o que favorece uma melhor interpretação dos dados pelos estudantes. A escolha dessa atividade se deu pela possibilidade de análise de uma situação em que a relação é definida por mais de uma expressão algébrica. No entanto este gráfico não representa uma situação real que deve levar em consideração a aceleração e desaceleração do automóvel.

Atividade 1. O gráfico abaixo mostra o movimento de um automóvel no decorrer do tempo.



a) O que acontece com a distância quando o tempo varia de 0 a 2 horas?
b) O que acontece com a distância quando o tempo varia de 2 a 5 horas?
c) O que acontece com a distância quando o tempo varia de 5 a 9 horas?
d) Podemos dizer que a distância está em função do tempo? Use a definição de função para justificar sua resposta.
e) Localize o ponto (1 , 100) no gráfico. Ele satisfaz essa função? E o (1.5 , 150)? Justifique sua resposta.
f) Localize os pontos (3 , 200) e (4 , 200) no gráfico. Eles satisfazem essa função? E o (5 , 300)? Justifique sua resposta.
g) Localize os pontos (6 , 290) e (9 , 400) no gráfico. Eles satisfazem essa função?
h) Como podemos saber se um ponto do plano satisfaz uma função olhando para sua representação gráfica? Justifique sua resposta.

Nessa atividade a variável didática, contexto da atividade, assume o valor situação do cotidiano representada no registro gráfico sobre o qual deve-se analisar as informações apresentadas para responder as questões.

Os três primeiros itens dessa atividade têm o objetivo de levar os alunos a perceberem que a distância percorrida pelo automóvel sofre variações distintas nos intervalos o que é importante para a compreensão das expressões algébricas que descrevem esse movimento. Nessa atividade são mobilizados conhecimentos sobre localização de pontos no plano cartesiano e o fato de ele pertencer ou não a um gráfico dado.

Para favorecer a compreensão da questão devem ser realizados questionamentos sobre quanto foi percorrido com o passar de cada uma das horas. Ressalta-se assim, uma vez mais, a importância da mediação do professor, visando levar os alunos à reflexão sobre o fato de que a distância percorrida nos intervalos sofre variações diferentes, chegando a uma resposta como a que segue:

Resposta para os itens a, b e c.

Entre 0 e 2 horas o veículo anda 100 km para cada hora; entre 2 e 5 horas o veículo não se movimentou, se manteve no quilômetro 200; entre 5 e 9 horas o veículo anda 50 km para cada hora.

Nos itens *e*, *f* e *g* deve-se marcar os pontos no plano cartesiano, sendo que alguns deles estão sobre o gráfico que representa a função e outros não. Tendo compreendido a variação em cada intervalo pode-se dizer que o ponto (5 , 300) não satisfaz a função, pois no intervalo de duas a cinco horas a distância permanece em 200 km. Devido à discussão já realizada ao longo da sequência didática em torno das representações gráficas já é possível haver a elaboração de uma conjectura sobre o critério para que um ponto satisfaça uma função. Nesse caso basta observar se o ponto está sobre a representação gráfica da função.

A atividade a seguir visa a mobilização de conhecimentos acerca da descrição de uma situação por meio de expressões algébricas. Desse modo entra em jogo a variável didática Sentido da conversão, que assume o valor conversão do registro gráfico para o registro algébrico.

Atividade 2. Segundo o que você observou na *atividade 1* qual das expressões algébricas melhor representa a distância percorrida por esse automóvel em relação ao tempo? Justifique sua escolha.

a) $$d = \begin{cases} 200t & 0 < t \leq 2 \\ 400 & 2 < t \leq 5 \\ 200 + 50t & 5 < t \leq 9 \end{cases}$$

b) $$d = \begin{cases} 50t & 0 < t \leq 2 \\ 100 & 2 < t \leq 5 \\ 100 + (t-5)50 & 5 < t \leq 9 \end{cases}$$

c) $$d = \begin{cases} 100t & 0 < t \leq 1 \\ 200 & 1 < t \leq 5 \\ 200 + (t-5)50 & 6 < t \leq 9 \end{cases}$$

d) $$d = \begin{cases} 100t & 0 < t \leq 2 \\ 200 & 2 < t \leq 5 \\ 200 + (t-5)50 & 5 < t \leq 9 \end{cases}$$

Nas análises das resoluções dos alunos para atividade semelhante a essa Martins (2006) percebeu que eles têm dificuldades em elaborar a expressão algébrica relacionada a uma função quando ela é definida por partes. Deste modo será solicitada a identificação e não a elaboração de tais sentenças matemáticas o que permite investigar a compreensão da relação expressa no registro gráfico e a sua correspondência com o registro algébrico.

Visando ainda a exploração (e compreensão) de dados fornecidos no registro gráfico, é proposta a atividade a seguir.

Atividade 3. Como você faria para obter a distância exata para 7,25 horas? E qual seria essa distância?

A estratégia esperada para a resolução dessa atividade é a seguinte:

Resolução atividade 3

Sabendo que até o instante de 7h o veículo já havia percorrido 300 km e que a partir de 5h o veículo percorre 50 km/h os alunos podem concluir que 0,25h é "a metade da metade de uma hora", ¼ de hora, o que corresponde a ¼ de 50 km, ou seja, 12,5 km, obtendo como resposta final 312,5 km.

.

Com a utilização dessa estratégia é possível que alunos apresentem dúvidas em relação à representação decimal de hora, caso isso ocorra deve-se tentar ajudar os alunos a compreender essa representação, pois essa mudança de notação não é objeto de nosso estudo e prejudica a compreensão da relação. Não se pode descartar a estratégia de se obter a resposta por meio de uma aproximação gráfica.

A utilização da relação dada por meio da expressão algébrica obtida na atividade anterior permite resolver essa atividade como segue:

Resolução atividade 3.

Utilizando a expressão válida para valores de t maiores que 5, deve-se e substituir t por 7,25 e assim resolver a equação:

$$d = 200 + (7{,}25 - 5)50$$
$$d = 200 + (2{,}25)50$$
$$d = 200 + 112{,}5$$
$$d = 312{,}5$$

O enunciado da próxima atividade traz um contexto exclusivamente matemático, valor assumido pela variável didática Contexto da atividade. Já a variável didática Sentido da conversão assume o valor conversão do registro algébrico para o registro gráfico.

Atividade 4 . Vimos em atividades anteriores que uma função pode ser representada por uma expressão algébrica. Considerando a função $\boxed{y = 2x}$ responda as questões:

a) Se o x = 1 quanto vale o y?
b) Se o x = 2 quanto vale o y?
c) Se o x = 3 quanto vale o y?
d) Quando o x for igual a 5 o valor obtido para y será 11?
e) Os pontos do plano são formados por coordenadas, no caso x e y. Construa um plano cartesiano na malha quadriculada e localize os pontos (x,y) obtidos como resultados dos itens a, b, c e d
f) Os pontos que você marcou no plano são os únicos que satisfazem a função y = 2x? Por quê?
g) O ponto (50,100) pertence ao gráfico dessa função? Explique sua resposta.
h) O ponto (3.5,7) pertence ao gráfico dessa função? Explique sua resposta.
i) O ponto (-1, -2) pertence ao gráfico dessa função? E o Ponto (-4, -8)? Explique sua resposta.
j) O ponto (10,27) pertence ao gráfico dessa função? Explique sua resposta.
k) Dê exemplos de três pontos que não satisfaçam essa função. E explique o motivo para eles não satisfazerem.

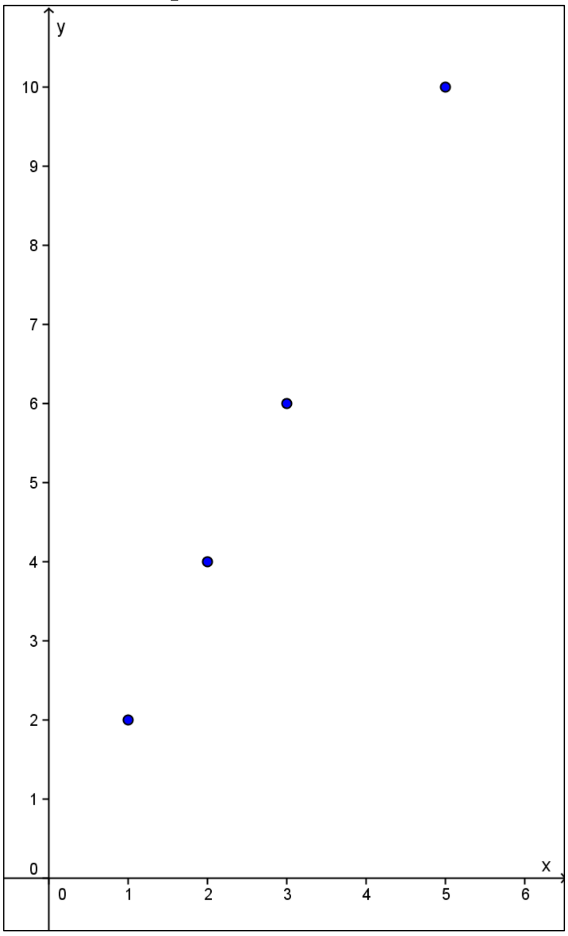
A resolução dos itens *a*, *b* e *c* necessita de uma compreensão do significado da expressão algébrica e para serem resolvidos podem ser necessários alguns conhecimentos referentes a obtenção do valor numérico de uma expressão algébrica o que significa realizar um tratamento nesse registro. O item *d* chama atenção para pares ordenados (x , y) que não satisfazem a função ou regra percebida nos itens anteriores. Para resolver esses itens pode-se realizar uma conversão para o registro numérico como se segue.

Resolução itens a, b, c e d.

y = 2.1 = 2 y = 2.2 = 4 y = 2.3 = 6 y = 2. 5 = 10 ≠11

O gráfico a seguir é o que se espera como resposta ao item *e*.

Figura 26: Gráfico, resposta o item *e* da atividade 4 da 5ª sessão



Fonte: Autores da pesquisa

No próprio enunciado do item *e* é deixado indicado que os pontos do plano são formados por coordenadas e representados por (x , y). Caso seja necessário deve-se intervir e recordar algumas considerações sobre a ordem das coordenadas e os eixos ortogonais. Lembramos que para que uma situação possa ser *adidática* um dos requisitos é que seu enunciado seja bem compreendido e, mais uma vez, ressalta-se o papel do professor no processo de aprendizagem.

Continuando a discussão referente à representação dos pontos no plano cartesiano o item *f* pretende levar os alunos à percepção de que existe uma infinidade de pontos no plano que satisfazem, e outros que não satisfazem, à função dada.

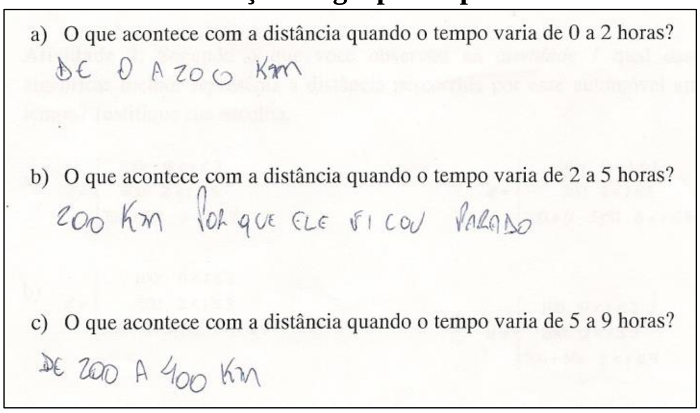
Os itens de *g* a *j* têm por objetivo investigar qual critério – algébrico ou gráfico, - os alunos mobilizam para determinar se o ponto satisfaz ou não uma função. Acredita-se que o critério algébrico será o mais utilizado pela limitação da representação gráfica feita no papel quadriculado. Ao final da atividade deve-se levantar a possibilidade de ambos os critérios, algébrico e gráfico, serem válidos para determinar se um ponto pertence ou não ao gráfico de uma função.

No item *k*, dada a discussão realizada nos itens anteriores, espera-se que os alunos argumentem tanto pela representação algébrica quanto gráfica para dizer que os pontos não satisfazem a lei de formação da função.

3.3.4. Experimentação e análise *a posteriori* da 5ª sessão.

Essa sessão contou com a participação de 21 alunos. Após a distribuição das atividades percorremos os grupos e notamos que os alunos não tinham dificuldade em localizar no gráfico informações referentes aos intervalos de tempo dos itens iniciais da *atividade 1*. No entanto suas repostas para os itens *a*, *b* e *c* eram baseadas nas leituras dos extremos dos intervalos de tempo, como mostra a produção do grupo G1.

Figura 27: Protocolo de resolução do grupo G1 para a atividade 1 da 5ª sessão


a) O que acontece com a distância quando o tempo varia de 0 a 2 horas?

DE 0 A 200 Km

b) O que acontece com a distância quando o tempo varia de 2 a 5 horas?

200 Km POR QUE ELE FICOU PARADO

c) O que acontece com a distância quando o tempo varia de 5 a 9 horas?

DE 200 A 400 Km

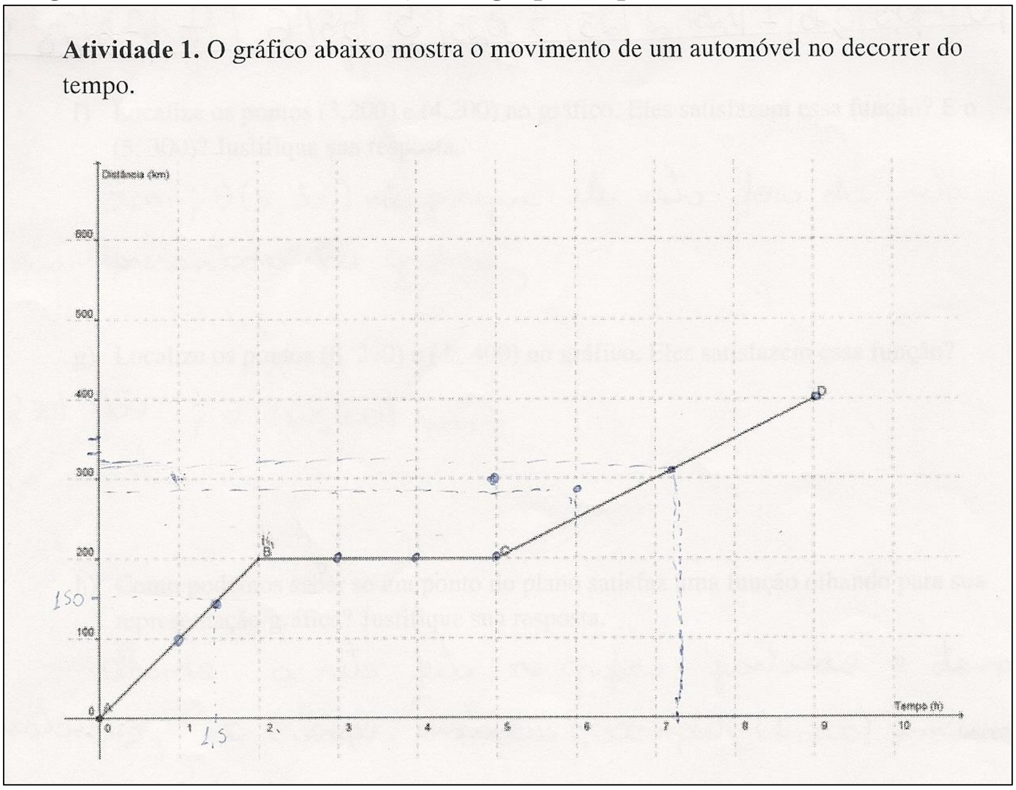
Fonte: Dados da pesquisa

Para esses mesmos itens o grupo G5 apresentou, em suas respostas, a palavra variou, mas também não dá indícios de como foi essa variação. Uma interpretação muito comum nessa turma se deu ao responderem o item *b*: ao analisarem o gráfico, responderam que no intervalo de 2 a 5 horas o carro havia percorrido "mais 200 km".

Com relação ao item *d* percebemos que os integrantes do grupo G5 apresentavam *Não* como resposta. Como esse é um dos grupos que parecia conseguir utilizar a definição de função e analisar se uma relação se caracterizava como tal, fomos questioná-los o porquê dessa resposta. Nesse momento, um dos integrantes do grupo tomou a palavra e disse: *"não é função, porque o duzentos aqui do y (distância) está relacionado com mais de um elemento do x (tempo)"*. A resposta desse aluno é válida, pois analisava se o tempo estava em função da distância. Essa interpretação pode ser fruto das relações estudadas até o momento. Perante essa situação sugerimos que tentassem nos explicar a interpretação deles sobre a definição de função. Desse modo os alunos argumentaram *"tem que ter um y para cada x"*; ao questionarmos quem seria o *x* e o *y* nessa situação conseguiram perceber que para cada valor observado no gráfico para o eixo *x* (tempo) só podiam encontrar apenas um valor correspondente no eixo *y* (distância). Essa discussão foi retomada no momento do fechamento das atividades para que, caso houvesse mais algum aluno com dúvida, fosse possível auxiliá-lo.

Nos itens *e, f, g* e *h* os alunos não encontram dificuldade em responder as questões, no entanto foram poucos alunos que deixaram assinalados no plano cartesiano a localização dos pontos como o fizeram os alunos dos grupos G3 e G5.

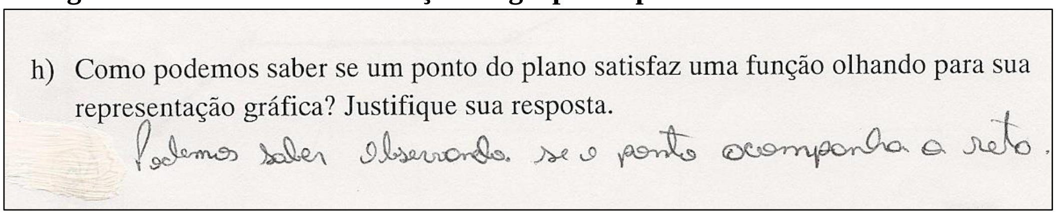
Figura 28: Protocolo de resolução do grupo G3 para a atividade 1 da 5ª sessão



Fonte: Dados da pesquisa

Com a observação das marcações realizadas no plano cartesiano os alunos elaboraram uma resposta ao item *h* sobre a qual podemos inferir que os mesmos reconheceram uma característica para que um ponto pertença a uma relação representada graficamente, como observado no protocolo a seguir.

Figura 29: Protocolo de resolução do grupo G5 para a atividade 1 da 5ª sessão



h) Como podemos saber se um ponto do plano satisfaz uma função olhando para sua representação gráfica? Justifique sua resposta.

Podemos saber observando se o ponto acompanha a reta.

Fonte: Dados da pesquisa

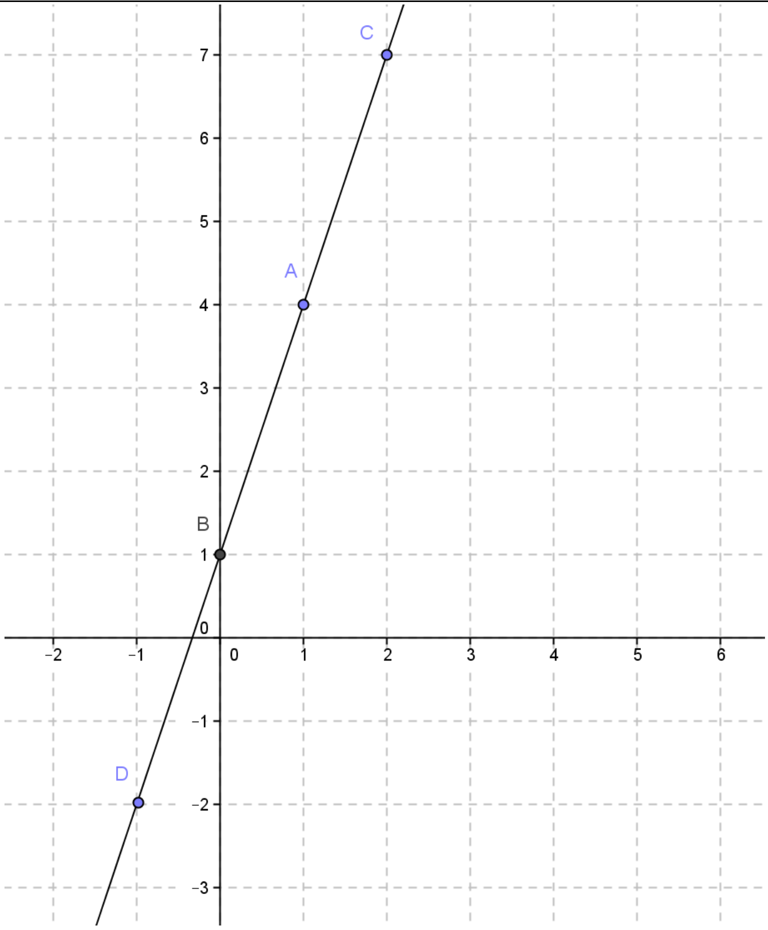
Ao se depararem com a segunda atividade percebemos que os alunos apresentavam dificuldades em interpretar as expressões algébricas propostas. A maioria desses alunos não compreendia os símbolos utilizados nesse registro de representação como, por exemplo, os sinais de desigualdade, gerando dificuldades na realização da atividade. Como a questão era de múltipla escolha, percebemos que muitos simplesmente "chutavam" uma das alternativas sem se preocupar em dar uma justificativa para tal escolha. Percebendo essa dificuldade sugerimos que dessem continuidade e tentassem resolver a próxima atividade.

A maioria dos alunos tentou solucionar a *atividade 3* por meio de aproximações usando a representação gráfica como o fez o grupo G3 na Figura 28. Já o grupo G5 tinha uma estratégia mais elaborada a qual foi escrita da seguinte forma: *"Observando o gráfico e dividindo em 4 partes de 300 a 400 tendo o resultado de 325 km"* Frente a essa justificativa, tentando manter a situação *adidática*, pedimos uma explicação sobre essa estratégia, e o porquê da escolha desses valores. Nesse instante Adriano disse: "*professor, para dar uma hora temos que ter quatro de 25 (0,25) e como em 7h ele já andou 300 km passando mais uma hora ele vai chegar em 400 km*". Nesse momento um dos seus colegas interrompe falando que em mais uma hora (8h) ele não andaria 400 km e sim 350 km. Com isso Adriano rapidamente olhou para seu gráfico e disse que seu colega estava certo, localizando o ponto o (8 , 350) e alterando sua resposta para 312,5 km. Nesse diálogo estabelecido entre nós e os integrantes do grupo pudemos perceber as situações de *formulação* e *validação* de uma estratégia e que essa foi favorecida por nossa postura frente à resposta do aluno.

Como a nossa próxima aula ocorreria somente na semana seguinte e essa seria a última semana na qual poderíamos realizar nossa experimentação antes das férias escolares dos alunos, solicitamos que os mesmos levassem a *atividade 4* para casa e a trouxessem na próxima aula para fazermos apenas os comentários sobre as resoluções deles e assim finalizamos essa aula.

Intrigados com a dificuldade em realizar a *atividade 2*, na qual os alunos demonstraram reconhecer a relação entre as variáveis na representação gráfica, mas não reconheceram a expressão algébrica para essa relação, elaboramos para a aula seguinte uma situação com esse sentido de conversão. Essa situação contém as mesmas questões que a *atividade 1*, porém a representação algébrica se dá por uma única expressão, $y=3x+1$, que deveria ser construída pelos alunos.

Essa segunda aula que compõe a 5ª sessão contou com a participação de 21 alunos. Iniciamos a aula com a apresentação da representação gráfica a seguir, apresentada na forma de slide, seguida das atividades a serem realizadas.



a) Quais as coordenadas (x , y) dos pontos A, B, C e D?
b) O ponto (3 , 10) satisfaz a relação representada no gráfico?
c) O ponto (-2 , -5) satisfaz a relação representada no gráfico?
d) Os pontos (2 , 4), (3 , 8) e (-3 , 4) satisfazem a relação representada no gráfico?
e) Usando a definição de **função** podemos dizer que y **está em função** de x?
f) Qual a expressão algébrica que representa essa relação?

Os alunos dos grupos G1, G3 e G5 reconheceram que a relação entre *x* e *y* estava sendo representada no plano cartesiano por meio da reta. Assim argumentaram que para um ponto (x , y) satisfazer essa relação "é preciso estar sobre essa reta ou fazer parte da reta." Essa estratégia já havia sido observada, nesses grupos, ao resolverem a *atividade 1*, o que indica a aplicação de um conhecimento construído. Como alguns pontos não estavam presentes na imagem anterior, alguns alunos nos questionaram sobre a possibilidade de esses não satisfazerem a função. Outros alunos quiseram saber se seria possível "aumentar o gráfico" o que entendemos como prolongamento dos eixos cartesianos, bem como da representação gráfica da relação. Para essa discussão usamos o *software GeoGebra* e apresentamos a representação gráfica contendo todos os pontos presentes nessa atividade sem destacar os pontos contidos nos itens *b, c* e *d*.

Com essa representação gráfica foi possível perceber que até o momento os alunos utilizavam a estratégia apresentada pelos grupos G1, G3 e G5 para determinar se um ponto pertence ou não a função, o que reforça a validação dessa estratégia.

Com relação ao item *e*, os alunos dos grupos G3 e G5 utilizaram corretamente a condição de unicidade para caracterizar uma relação como funcional ao afirmar que "existe um *y* para cada *x*".

Na resolução do item *f* os alunos apresentaram novamente dificuldades em elaborar uma representação algébrica para a relação expressa graficamente. Percebendo que eles não iriam sair dessa zona de dificuldade, retomamos o exemplo do funcionário da operadora de telefonia móvel da sessão 2. Nessa retomada questionamos sobre as formas de se representar uma situação que relaciona duas variáveis. Diante dessa questão os alunos se recordaram da representação tabular e com isso perguntamos se seria possível montar uma tabela para os dados apresentados no gráfico da atividade. Percebendo essa possibilidade os alunos construíram a seguinte tabela.

Quadro 12: Tabela construída pelos alunos com dados do gráfico da atividade "extra" da 5ª sessão

x	y
1	4
2	7
3	10

Dados da pesquisa

Com isso sugerimos que completassem a seguinte tabela.

Quadro 13: Tabela a ser preenchida pelos alunos com dados do gráfico da atividade "extra" da 5ª sessão

x	y
1	4
2	7
3	10
4	
5	
6	
7	
...	
20	
...	
100	

Fonte: Autores da pesquisa

Os alunos preencheram a tabela sem problemas até x = 7. No entanto alguns alunos se intrigaram sobre a existência de valores, para *y*, correspondentes a valores de *x* maiores que 3 por não estarem presentes no gráfico. Ao serem questionados sobre a existência desses pontos, eles rapidamente se deram conta de sua existência e que só não apareciam pelo "tamanho" do desenho, o qual foi ampliado anteriormente.

Uma estratégia que a maioria dos grupos percebeu foi que para cada valor seguinte de *x*, o valor de *y* aumentava em 3 do anterior, possibilitando-os completar a tabela até x = 7. Com a presença do valor 20, na coluna da abscissa *x*, os alunos começaram a perceber que a estratégia inicial se tornava trabalhosa. Para esse valor os grupos G1 e G3 perceberam que a relação entre as variáveis seguia uma regra, ou seja, x.3 + 1 = y possibilitando-os completar a tabela e escrever a expressão algébrica para o item *f*. Já Emerson, do grupo G5, apresentou a seguinte estratégia para determinar o valor de *y* correspondente ao valor x = 20.

Figura 30: Protocolo de resolução do aluno Emerson para a atividade "extra" da 5ª sessão

Como para x = 7 temos y = 22 então para (7+7+7 = 21) temos (22+22+22 = 66) o que possibilita concluir que para x=21 temos y=66. Como 20 pode ser obtido fazendo 21 - 1, o aluno conclui que para x = 20 (21-1) se tem y = 63 (66-3).

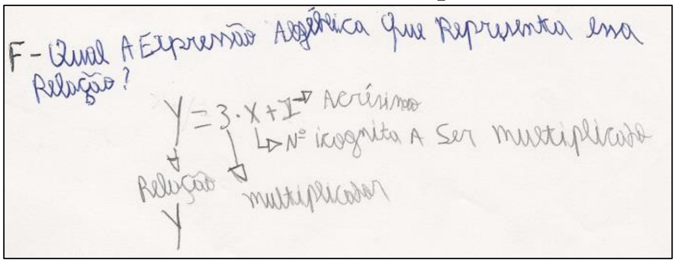
Fonte: Dados da pesquisa

Essa conclusão final toma como base a ideia de que para cada valor seguinte de *x*, o valor de *y* aumenta em 3 do anterior fruto de ideias proporcionais utilizada por esse aluno desde o início de nossa sequência didática.

Intrigado com a resolução do colega outro aluno desse grupo realiza o preenchimento da tabela, um a um, até x = 20 obtendo como correspondente y = 61. Essa resolução desestabilizou esses integrantes do grupo que não conseguiram perceber o porquê de dois resultados diferentes, reconhecendo que y = 61 é o resultado correto. O aluno que realizou a primeira estratégia concordou com a resolução do colega, mas não soube explicar o porquê de dois resultados diferentes acreditando que sua estratégia é verdadeira. A fim de desestabilizar cognitivamente esse aluno pedimos para que ele aplicasse sua estratégia para valores conhecidos, ou seja, encontrasse o valor para *y* correspondente a x = 3, usando x = 2. Ao fazer isso esse aluno encontrou para x = 3 y = 11 o que é diferente do encontrado na tabela e no gráfico. Diante disso os alunos reforçaram a ideia sobre a falsidade da primeira estratégia e se preocuparam em como determinar o valor de *y* para outros números como para x = 100.

Até o momento não percebemos a participação do integrante desse grupo, Adriano, que em sessões anteriores escreveu sem “grandes” dificuldades a expressão algébrica exigida nas atividades. Ao analisar o material escrito por esse aluno percebemos que apresentou a seguinte resposta para esse item.

Figura 31: Protocolo de resolução do aluno Adriano para a atividade “extra” da 5ª sessão



Fonte: Dados da pesquisa

Como os outros grupos já haviam terminado a atividade alguns alunos queriam contribuir com o grupo G5. Sempre que percebíamos alguma tentativa de “dar a resposta” chamávamos a atenção para que deixassem os colegas discutirem entre eles. Porém não podemos afirmar que o grupo G5 elaborou, por si só, a expressão algébrica para a relação entre x e y . No entanto, pela fala de um dos integrantes desse grupo e pela tabela preenchida pudemos notar que compreenderam essa relação e que essa é satisfeita para todos os valores da tabela.

Nessa atividade percebemos que o uso da tabela favoreceu a obtenção da expressão algébrica que relaciona as variáveis x e y assim como fizemos na 3ª sessão. A organização dos dados na forma de tabela possibilitou aos alunos utilizarem seus conhecimentos sobre generalizações e padrões e assim analisar de outra forma a relação apresentada inicialmente na forma gráfica.

Com relação à realização da *atividade 4*, essa não foi desenvolvida por todos os alunos fora do ambiente escolar; apenas dois alunos do grupo G5 nos devolveram essa atividade. Deste modo prosseguimos para o fechamento das atividades 1, 2 e 3 dessa sessão.

Como havíamos percebido que os alunos não estavam se atentando para a variação nos diferentes intervalos de tempo sugerimos que antes de iniciarmos o fechamento das atividades os mesmos completassem a seguinte tabela.

Quadro 14: Tabela a ser preenchida com dados expressos na representação gráfica da 1ª atividade da 5ª sessão

Tabela: Movimento do automóvel																	
Distância																	
Tempo	0	0,5	0,75	1	1,25	2	2,5	3	3,25	5	5,5	6	7	7,5	7,75	8	9

Fonte: Autores da pesquisa

Ao apresentarmos essa tabela explicamos a mudança de unidades de medida pela seguinte regra.

1 hora ---------1 unidade 30 min.--------0,5 unidade (metade) 15 min. --------0, 25 unidade (um quarto) 45 min.--------0, 75 unidade (três quartos) e assim por diante.

Fonte: autor da pesquisa

Propondo o preenchimento da tabela tínhamos como objetivo levá-los a reconhecer a variação da distância nesses três intervalos e ainda auxiliar na busca da expressão algébrica que melhor representa essa variação.

Ao preenchermos essa tabela junto com os alunos fomos questionando sobre a relação entre a quantidade de horas e a distância percorrida pelo automóvel. Nesse momento fomos introduzindo a linguagem de desigualdade que poucos alunos compreendiam corretamente. Assim conseguimos chegar às seguintes conclusões, que foram anotadas pelos alunos assim como o fez Beto.

Figura 32: Protocolo de resolução do aluno Beto para a atividade 1 da 5ª sessão

a) O que acontece com a distância quando o tempo varia de 0 a 2 horas?

a distância aumenta 200 km
o cada hora aumenta 100

Tempo 0 a 2h
1 h -> 100 km
0,5 -> 50 km
0,25 -> 25 km

b) O que acontece com a distância quando o tempo varia de 2 a 5 horas?

ela fica parada

Tempo 2h a 5h
não aumenta fica no
200km

c) O que acontece com a distância quando o tempo varia de 5 a 9 horas?

a distância aumenta mais 200 km

Tempo 5h - 6h + 50
6h - 7h + 50
7h - 8h + 50
8h - 9h + 50

Fonte: Dados da pesquisa

Com a resolução das demais atividades apresentadas pelo grupo de alunos foi institucionalizado que para um ponto pertencer a uma função/relação representada na forma gráfica esse ponto deve estar sobre o “desenho” apresentado no plano cartesiano.

Com a construção da tabela e a discussão sobre a variação em cada intervalo de tempo fomos analisar a *atividade 2* junto com os alunos a fim de encontrar a representação algébrica para essa relação. Deste modo fomos discutindo se um determinado item poderia ser a resposta certa ou não e qual a justificativa para tal. Uma estratégia que utilizamos foi escrever os itens da maneira como fizemos com o item *a*:

Figura 33: Estratégia de escrita para as expressões algébricas da atividade 2 da 5ª sessão

$$d = 200.t \; para \; 0 < t \leq 2$$
$$d = 400 \; para \; 2 < t \leq 5$$
$$d = 200 + 50.t \; para \; 5 < t \leq 9$$

Fonte: Autores da pesquisa

Fomos analisando cada relação e seus respectivos intervalos. No caso dos itens *a* e *b* os alunos disseram ser falsa, pois para o intervalo entre 2 e 5 horas o carro havia percorrido 200 km e não 400 e 100 quilômetros. Já para o item *c* os alunos perceberam que o problema estava nos intervalos e nem se preocuparam em analisar as expressões relativas a cada um desses. Por fim pudemos concluir que a expressão correta seria a apresentada no item *d* na qual atribuímos alguns valores presentes na tabela.

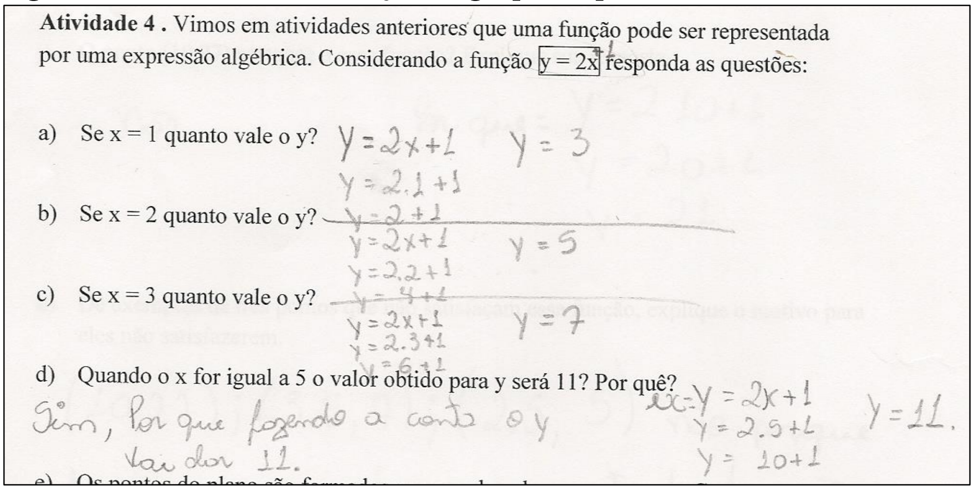
Com relação a *atividade 3*, todas as estratégias propostas pelos alunos eram justificadas por aproximações realizadas no gráfico da *atividade 1.* Nesse momento solicitamos ao grupo G5 que apresentasse, no quadro, sua resolução para os colegas, resolução essa apresentada anteriormente. Ao término da explicação desse aluno notamos que os colegas que acompanhavam a resolução validaram sua estratégia comentando que assim era possível encontrar a resposta certa e não uma aproximada. Nesse momento, coube a nós questioná-los se com a resposta da *atividade 2* também poderíamos encontrar esse valor uma vez que a expressão algébrica também representa a relação expressa na forma gráfica. Com certo receio alguns alunos afirmaram que sim e sem dificuldades encontraram o intervalo de tempo correspondente a 7,25 horas e assim os incentivamos a calcular o valor numérico da expressão para esse valor.

Como consideramos a *atividade 4* importante para nossas análises devido à utilização de conhecimentos algébricos e da Geometria Analítica na resolução dos itens propostos resolvemos aplicá-la novamente ao final de nossa sequência didática. Por isso trazemos aqui sua análise *a posteriori*.

Como havia a possibilidade de os alunos já terem realizado essa atividade e só esquecido de nos entregar durante as outras sessões solicitamos que os mesmos realizassem a atividade considerando a função $\boxed{y = 2x + 1}$.

Pela análise do material escrito pelos alunos percebemos que os mesmos não tiveram dificuldades em realizar os itens *a, b, c* e *d,* apresentando conhecimentos sobre resoluções de equações. A resolução a seguir, apresentada pelo grupo G3, destaca o processo realizado para se obter o valor da variável *y* dado os valores para a variável *x.*

Figura 34: Protocolo de resolução do grupo G3 para a atividade 4 da 5ª sessão


Atividade 4 . Vimos em atividades anteriores que uma função pode ser representada por uma expressão algébrica. Considerando a função $\boxed{y = 2x}$ +1 responda as questões:

a) Se x = 1 quanto vale o y? y = 2x+1 y = 3 y = 2.1+1 y = 2+1

b) Se x = 2 quanto vale o y? y = 2x+1 y = 5 y = 2.2+1 y = 4+1

c) Se x = 3 quanto vale o y? y = 2x+1 y = 7 y = 2.3+1 y = 6+1

d) Quando o x for igual a 5 o valor obtido para y será 11? Por quê?

Sim, Por que fazendo a conta o y vai dar 11. y = 2x+1 y = 2.5+1 y = 10+1 y = 11.

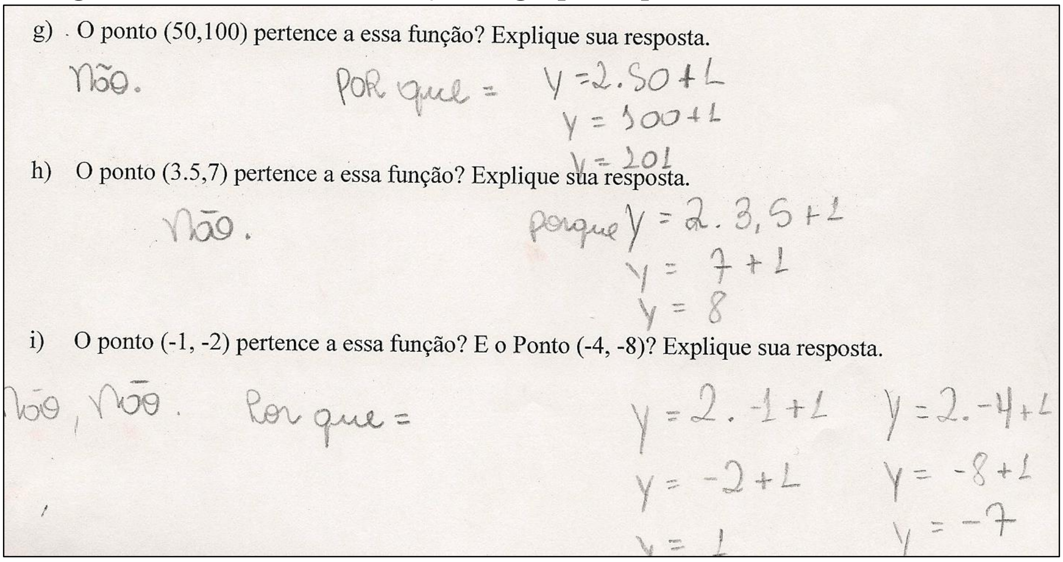
Fonte: Dados da pesquisa

Com relação ao item *e* dessa atividade notamos que os alunos já não apresentaram dificuldades em construir o plano cartesiano e localizar os pontos com coordenadas obtidas nos itens anteriores. Isso nos dá indícios da construção de conhecimentos referentes ao plano cartesiano e da superação de dificuldades apresentadas nas sessões iniciais da sequência didática.

Durante a resolução do item *f* percebemos que o grupo G1 afirmou que existem outros pontos, porém os valores para a variável *y* só poderiam ser impares. Nesse momento chamamos a atenção de todos os alunos para a afirmação do colega e perguntamos a opinião deles sobre a mesma. Frente a essa situação um integrante do grupo G3, Beto, afirmou estar errada, e ao sugerirmos que desse um exemplo o mesmo foi ao quadro e escreveu $\boxed{3{,}5 \cdot 2 + 1 = 8}$ demonstrando que era possível obter um valor par para a variável *y.* Aproveitamos a oportunidade para discutir a afirmação realizada pelo grupo G1 questionando se ela era válida em alguma situação. Com isso os próprios integrantes do grupo G1 afirmaram ser válida para os números 1, 2, 3,... e que para se obter um número par deveriam usar “números quebrados”. Essa discussão possibilitou mais uma vez observar que conjunto numérico estava sendo considerando para os valores da variável *x*.

Nos demais itens dessa atividade, foi possível observar que os alunos realizavam tratamentos algébricos para obter o valor da variável *y* que posteriormente era comparado com o valor apresentado nas coordenadas dos pontos de cada atividade. Essa estratégia pode ser observada na resolução apresentada pelo grupo

Figura 35: Protocolo de resolução do grupo G3 para a atividade 4 da 5ª sessão



g) O ponto (50,100) pertence a essa função? Explique sua resposta.

Não. POR que = y = 2.50 + 1
y = 100 + 1
y = 201

h) O ponto (3.5,7) pertence a essa função? Explique sua resposta.

Não. porque y = 2.3,5 + 1
y = 7 + 1
y = 8

i) O ponto (-1, -2) pertence a essa função? E o Ponto (-4, -8)? Explique sua resposta.

Não, Não. Por que = y = 2.-1 + 1 y = 2.-4 + 1
y = -2 + 1 y = -8 + 1
y = 1 y = -7

Fonte: Dados da pesquisa

Ao final dessa sessão podemos afirmar que os alunos construíram critérios para determinar se um ponto (x , y) pertence a uma função/relação tanto por meio de sua representação gráfica quanto algébrica. Na resolução dessas atividades foi notória a utilização de conhecimentos referentes ao plano cartesiano como na identificação de elementos nos eixos cartesianos e na construção de representações gráficas para algumas relações. Com relação a conhecimentos algébricos percebemos que alguns ainda estão em construção como o observado na resolução da *atividade 2.* Nesse sentido a utilização do registro tabular favoreceu a percepção de um padrão o que possibilitou a alguns alunos generalizar a relação entre as colunas por meio de uma expressão algébrica.

3.3.5 Considerações sobre o desenvolvimento do Bloco 2 de atividades

Com a realização desse bloco de atividade tínhamos como objetivo levar os alunos a trabalharem com outras relações, funcionais e não funcionais, a fim de evitar que confundissem o conceito de função com apenas um tipo de relação. A investigação sobre as condições que os alunos utilizavam para classificar uma relação como função indica que não usam em seus argumentos algum tipo de registro de representação. Os argumentos utilizados nessa classificação fazem uso da própria definição apresentada na 3ª sessão, para a qual exigíamos a identificação das variáveis. Outro objetivo atingindo nesse bloco foi a elaboração de critérios tanto algébricos quanto gráficos para que pontos ou coordenadas de pontos satisfizessem a lei de formação de uma função. Essas atividades proporcionaram momentos de reinvestimentos de conhecimentos referentes à construção e localização de pontos no plano cartesiano, fonte de dificuldades em sessões anteriores. Assim identificamos a presença dos seguintes conhecimentos na realização desse bloco.

- Interpretação de dados expressos em textos, tabelas, gráficos e expressões algébricas;
- Uso de operações numéricas básicas em cálculos envolvendo os dados de textos, expressões algébricas, tabelas e/ou gráficos indicando o reconhecimento de uma relação entre os elementos presentes nesses registros;
- Noções sobre expressões numéricas e algébricas;
- Construção de planos cartesianos e a localização de pontos nesse;
- Uso da definição do conceito de função.

A necessidade da mobilização de conhecimentos algébricos nas atividades desse bloco nos deram indícios de que essa linguagem matemática é fonte de dificuldades por parte dos alunos, principalmente quando os registros envolvidos são o gráfico e o algébrico. Nesse sentido o valor da variável didática contribuiu para uma melhor apreensão da conversão para o registro algébrico. Quando a atividade tinha como registro de partida o registro em língua materna e esse era um problema compreensível aos alunos, esses identificaram as variáveis presentes na situação e a operação realizada entre elas para assim elaborarem uma generalização expressa oralmente e em muitos casos na forma algébrica.

Com relação aos critérios para que pontos do plano satisfaçam a representação gráfica de uma função destacamos a percepção de muitos alunos sobre a limitação do registro gráfico. Percebendo que o critério algébrico era mais eficiente em outras atividades, realizada em sessões anteriores, substituíam a representação gráfica pela algébrica para realizar as atividades.

Com relação às dificuldades que os alunos poderiam apresentar foi possível identificar as seguintes.

- Utilização de ideias de proporcionalidade em situações não proporcionais;
- Elaboração de uma expressão algébrica para determinada situação.
- Localização de elementos do Domínio e Imagem de uma função representada graficamente.

Como já havíamos previsto essas dificuldades elaboramos estratégias que levassem à superação dessas. Isso foi feito em diferentes momentos, durante a resolução das atividades, em conversa individual com os alunos, a proposição de novas atividades e no fechamento das atividades.

Os conhecimentos prévios dos alunos e os em construção ao longo das atividades dessa sequência didática contribuíram para evitar o surgimento de dificuldades no que se refere a esboçar representações gráficas somente com pontos obtidos em tabelas e ligá-los por segmentos de reta, o que os levaria a incluir a noção de continuidade ao conceito de função.

Por fim apresentamos um quadro que traz um panorama das conversões e tratamentos explorados em nossa sequência didática.

Quadro 15: Conversões e Tratamentos explorados na sequência didática

<table>
<tr><th rowspan="2">Sessão</th><th rowspan="2">Atividade</th><th colspan="2">Conversão</th><th rowspan="2">Tratamento</th></tr>
<tr><th>Registro de Partida</th><th>Registro de Chegada</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>1</td><td>RT</td><td>RN</td><td>RN</td></tr>
<tr><td>2</td><td>RT</td><td>RN</td><td>RN</td></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="3">1</td><td>RT</td><td>RG</td><td></td></tr>
<tr><td>RG</td><td>RT</td><td></td></tr>
<tr><td>RT ou RG</td><td>RLM</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>RT ou RG</td><td>RN</td><td>RT ou RN</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1</td><td>RT</td><td>RN e RA</td><td>RN ou RA</td></tr>
<tr><td rowspan="5">4</td><td rowspan="4">1</td><td>RLM</td><td>RT</td><td></td></tr>
<tr><td>RLM ou RT</td><td>RN</td><td>RN, RT ou RA</td></tr>
<tr><td>RLM ou RT</td><td>RG</td><td></td></tr>
<tr><td>RT ou RG</td><td>RA</td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td>RG</td><td>RT</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">5</td><td>1</td><td>RG</td><td>RLM</td><td>RG</td></tr>
<tr><td>2</td><td>RG</td><td>RA</td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td>RG</td><td>RN</td><td>RN,RA ou RG</td></tr>
<tr><td rowspan="3">4</td><td>RA</td><td>RN</td><td>RN</td></tr>
<tr><td>RA</td><td>RG</td><td></td></tr>
<tr><td>RG</td><td>RN ou RA</td><td></td></tr>
</table>

Fonte: Autor da pesquisa

Legenda.

Registro Tabular – RT
Registro Numérico – RN
Registro Algébrico – RA
Registro em Língua Materna – RLM
Registro Gráfico - RG

Considerações finais

Ao realizarmos a revisão de literatura sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de função constatamos que abordagens de ensino pautadas na repetição e memorização são ineficientes para a construção desse saber matemático. Com relação às dificuldades de aprendizagem referentes ao conceito de função, podemos dizer que essas estão presentes em todos os níveis de ensino, o que gera preocupação por parte da comunidade que investiga o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos. Nesse cenário, e tendo em vista nossa experiência como docente, acreditamos na importância de se realizar estudos dirigidos à aprendizagem do conceito de função levando em consideração os resultados apresentados por pesquisas anteriores, bem como as orientações dos PCN (BRASIL, 1998). Por essa razão propusemos a realização de uma pesquisa que pudesse favorecer a aprendizagem do conceito de função, por alunos do 9º do ensino fundamental a fim de compreender possibilidades de contribuição de um ensino articulado da álgebra com a geometria analítica para a aprendizagem do conceito de função.

Como o objetivo geral dessa pesquisa foi *investigar o processo de aprendizagem de função por alunos do 9º ano do ensino fundamental por meio de situações didáticas que articulem a álgebra e a geometria analítica* elaboramos uma sequência didática desenvolvida em oito sessões com todos os alunos de uma turma ordinária de 9º ano de uma escola da rede municipal de Campo Grande/MS. A elaboração dessa sequência didática foi desenvolvida tendo como aporte teórico a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 2008) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003, 2008 e 1988). Ao desenvolver essa pesquisa em sala de aula tentamos possibilitar que os alunos vivenciassem situações *adidáticas* relacionadas ao objeto matemático função a fim de torná-los agentes de sua aprendizagem favorecendo o desenvolvimento de seu raciocínio e a atribuição de significados ao conceito matemático. Como professores/pesquisadores nos preocupamos em possibilitar a mobilização de diferentes registros e conversões entre eles ao longo das 8 sessões. Por diversos momentos tivemos de questionar e incentivar os alunos a recordarem e utilizarem conceitos matemáticos na elaboração e validação de estratégias de resolução nos diferentes registros de representação. Coube a nós também a *institucionalização* do conceito e de suas representações, bem como a discussão e os encaminhamentos frente a estratégias de resoluções adequadas ou não.

Com a realização da experimentação e a análise *a posteriori* de cinco sessões da sequência didática tendo como base o material produzido pelos grupos evidenciamos alguns *conceitos e procedimentos de resolução* que esses alunos utilizavam nas atividades propostas. Nessas atividades percebemos conhecimentos sobre as operações numéricas e suas propriedades para construir estratégias que dão indícios de um processo algébrico. Nas situações propostas esses alunos conseguiram observar a variação entre grandezas e a relação entre elas para construir diferentes estratégias de resolução, que só foram possíveis graças à *mobilização de diferentes representações* para o conceito matemático envolvido nas atividades. Citamos como exemplo a resolução de algumas questões da avaliação (apêndice) requerida pela escola referente ao período que trabalhamos com os alunos. Salientamos que essa forma de avaliar não é a mesma que praticamos em nossa metodologia de pesquisa, na qual a avaliação se dá ao longo do processo pelo confronto das análises *a priori* e *a posteriori*.

As questões presentes nessa avaliação não fazem parte de nossas análises, porém evidenciam a mobilização de diferentes registros de representação na elaboração de estratégias para resolver as atividades.

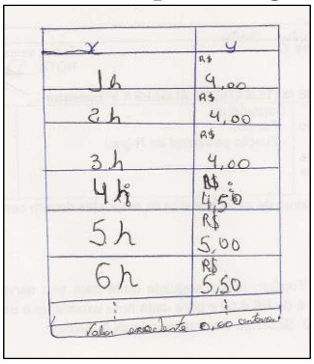
A primeira atividade dessa avaliação foi a seguinte.

O estacionamento para carros, TopCar, tem a seguinte tarifa para seu serviço. Até 3 horas no estacionamento o valor é de R$ 4,00 e para cada hora excedente a esse tempo (3h) é cobrado o valor de R$ 0,50. Sabendo disso responda as questões:

a) Quanto uma pessoa irá pagar por ter permanecido com seu carro estacionado durante 1 hora e 30 minutos?
b) Quanto uma pessoa irá pagar por ter permanecido com seu carro estacionado durante 3 horas e 30 minutos?
c) Quanto uma pessoa irá pagar por ter permanecido com seu carro estacionado durante 5 horas?
d) Uma pessoa que pagou R$ 7,00 ficou com seu carro estacionado por quanto tempo?

Frente a essa questão um dos alunos apresentou a seguinte representação dizendo que assim ele entendia melhor o que está acontecendo. Essa estratégia pode ser considerada como a conversão entre os registros em língua materna e o tabular.

Figura 36: Conversão para o registro tabular



Fonte: Dados da pesquisa

A percepção e a utilização de diferentes representações dão indícios do reconhecimento da relação entre duas variáveis em mais de um registro de representação o que, segundo Duval (2011), é uma das características de apreensão de um conceito matemático.

A construção da representação gráfica, em um sistema de coordenadas cartesianas, da relação entre variáveis se mostrou fonte de dificuldades em algumas atividades analisadas. A presença dessa dificuldade nos fez reestruturar a sequência didática incluindo atividades de construção de plano cartesiano, localização de pontos nesse plano e análise de representações gráficas produzidas pelos alunos. Essa escolha se deu pela possibilidade de comprometimento e apreensão desse conceito, pois alguns alunos não perceberam que a relação entre as variáveis representadas pelos eixos cartesianos se dá pelos pontos ou curvas presentes no plano cartesiano. Com o fim de nossa análise pudemos perceber que a alteração de nossa sequência frente a essa dificuldade teve resultados positivos, pois muitos alunos não tiveram dificuldades na construção de representações gráficas para as novas relações investigadas nem tão pouco na análise dos dados nesse tipo de representação.

A generalização de regularidades por meio de linguagem algébrica também se mostrou problemática para a maioria dos alunos dessa turma. Contudo percebemos que os alunos têm alguns conhecimentos necessários para a realização dessa conversão, reconhecem a regularidade entre os elementos das colunas de uma tabela e podem encontrar alguns valores não representados, porém a escrita algébrica da relação não se deu facilmente. Com alguns questionamentos procuramos estimulá-los a identificar os significados das letras e das operações envolvidas em outras atividades que acreditamos já terem sido trabalhadas ao longo de sua vida escolar. Com a colaboração de alguns alunos fomos aos poucos estruturando uma escrita algébrica para a relação em questão a qual posteriormente foi reconhecida como uma representação para a relação entre as variáveis assim como as representações tabular e gráfica.

Pela análise *a posteriori* de cada uma das sessões pudemos identificar dificuldades relacionadas à construção de um plano cartesiano, ao significado das coordenadas de um ponto ou de uma curva e também à identificação dos símbolos utilizados na representação algébrica de uma relação entre duas variáveis. Prevíamos algumas dessas dificuldades e por isso reestruturamos nossa sequência.

A proposição da situação dos planos de telefonia em diferentes registros de representação foi fundamental tanto para a mobilização quanto para a construção de *conceitos e procedimentos.* Graças a isso conseguimos levar os alunos a perceberem que a relação presente nas atividades desenvolvidas nessas três sessões tem uma característica importante e por isso a denominamos de função.

Ressaltamos também a disposição dos alunos em grupos, o que favoreceu a troca de ideias e a elaboração de diferentes estratégias de resolução. A possibilidade de comunicar as ideias tanto para os colegas do grupo quanto para os demais alunos da sala possibilitou a validação de algumas estratégias e o abandono de outras que chamamos de custosas. Essa comunicação estabelecida entre os alunos colaborou com a construção de conceitos, entre eles a percepção de que pontos no plano cartesiano representam, assim como os valores de cada linha da tabela, a relação entre duas variáveis.

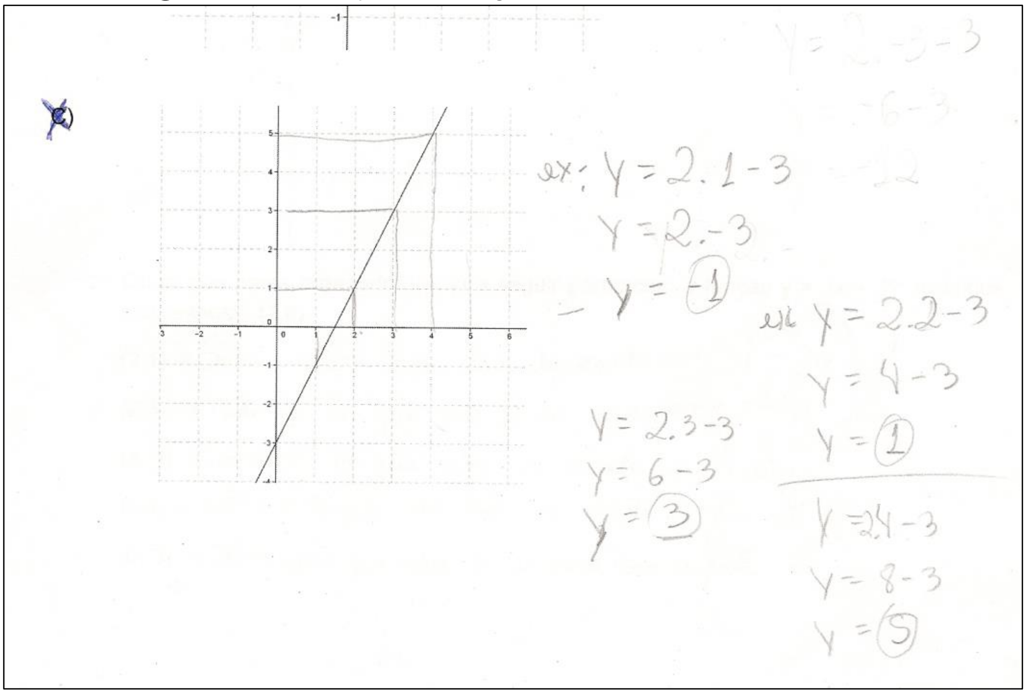
Na análise dessas sessões constatamos *algumas possibilidades de contribuição de um ensino articulado da álgebra com a geometria analítica para a aprendizagem do conceito de função* entre elas a percepção da relação entre as variáveis no registro tabular e gráfico, de que algumas distribuições de pontos no plano cartesiano podem representar uma função mesmo não havendo uma regra ou regularidade explícita que possibilite relacionar as duas variáveis, além de reconhecer esse conceito em diferentes registros de representação. A elaboração de conhecimentos sobre condições tanto gráfica quanto algébrica para que pontos satisfaçam a lei de formação de uma função também se caracterizam como uma contribuição uma vez que foi possível observar a utilização desses conhecimentos na resolução da seguinte atividade presente na avaliação anteriormente mencionada.

Sabemos que uma função polinomial do 1º grau pode ser expressa por uma expressão algébrica. Considerando a função polinomial do 1º grau dada pela expressão y = 2x – 3 responda as questões.

a) Qual dos gráficos a seguir representa a função y = 2x – 3? Justifique sua escolha.

Para responder essa questão um dos alunos apresentou a seguinte argumentação.

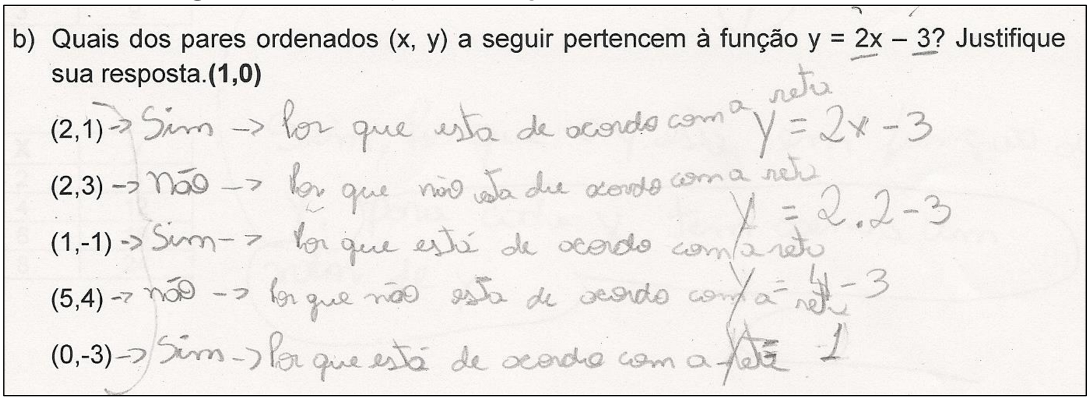
Figura 37: Utilização das conjecturas elaboradas na 5ª sessão



Fonte: Dados da pesquisa

Outra argumentação que reforça a presença desses conhecimentos e a mudança de estratégia são as justificativas para outro item dessa atividade apresentada por esse mesmo aluno.

Figura 38: Utilização das conjecturas elaboradas na 5ª sessão


b) Quais dos pares ordenados (x, y) a seguir pertencem à função y = 2x – 3? Justifique sua resposta.**(1,0)**

(2,1) -> Sim -> Por que esta de acordo com a reta y = 2x - 3

(2,3) -> não -> Por que não esta de acordo com a reta y = 2.2 - 3

(1,-1) -> Sim -> Por que está de acordo com a reta

(5,4) -> não -> Por que não esta de acordo com a reta 4 - 3

(0,-3) -> Sim -> Por que está de acordo com a reta 1

Fonte: Dados da pesquisa

A Teoria das Situações Didáticas nos auxiliou tanto como pesquisador quanto como professor durante a realização dessa experimentação. Os estudos dessa teoria nos permitiram criar condições para que os alunos construíssem seus conhecimentos. Essa teoria também nos fez adotar a posição do professor como mediador no processo de ensino, possibilitando aos alunos momentos de investigação e de reflexão com o objetivo de levá-los a mobilizar e construir novos conhecimentos. Assim pudemos perceber o quão valioso são esses momentos para que os alunos, com suas linguagens próprias, interajam entre si e produzam conhecimentos.

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica nos fez entender que resolver uma atividade matemática vai além de encontrar sua resposta. E nos fez refletir sobre o que torna um aluno capaz de resolver problemas. Com isso percebemos a importância dos registros de representação e das transformações de representações semióticas. Deste modo investigamos os registros utilizados para representar esse conceito, as dificuldades em realizar essas transformações, bem como algumas possibilidades de superação dessas com o objetivo de levar os alunos a compreenderem o conceito de função.

Diante dos resultados apresentados acreditamos ter atingido nossos objetivos. Como professores, vivenciando o processo de construção de conhecimento de conceito em uma sala de aula, nos deparamos com dificuldades tanto referentes ao conceito quanto ao gerenciamento das condições de aprendizagem devido a imprevistos e à frequência de alunos. Acreditamos que nosso trabalho pode contribuir com professores que atuam nesse nível de ensino e também no avanço de pesquisas que versam sobre temáticas relacionadas ao conceito de função.

Para futuras investigações, indicamos nossa preocupação com a apreensão das unidades de significado envolvidas, principalmente, nos registros algébrico e gráfico para o qual empreendemos algumas estratégias de superação. Outra proposta seria pensar em uma investigação mais longa, na qual se pudesse acompanhar alunos durante dois anos, por exemplo, trabalhando sempre na perspectiva da mudança de registros e investigar a aprendizagem desses alunos.

Referências

ALMOULOUD, S. A.. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba, PR: Ed. UFPR, 2007-2010.

ARDENGHI, M. J.. **Ensino Aprendizagem do conceito de função: Pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil**. 2008. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2008.

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: Brun, J.. **Didáctica das Matemáticas**. 1 ed. Instituto Piaget, 1996. P. 193 – 217.

BASSOI, T. S. **Uma professora, seus alunos e as representações do objeto matemático função em aulas do ensino fundamental.** 2006. Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba. 2006.

BECKER, F. O que é construtivismo? In: Curso de Pedagogia à Distância da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, **Desenvolvimento e aprendizagem sob o enfoque da Psicologia II**, 2009. P 1 - 8

BITTAR, M. **Contribuições da teoria das situações didáticas e da engenharia didática para discutir o ensino de Matemática**. (no prelo).

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais de 5ª a 8ª séries - Matemática. Brasília, 1998

BOYER, Carl Benjamin. **Historia da matemática.** Sao Paulo: E. Blücher, 1974/89.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino** / Guy Brousseau; apresentação de Benedito Antonio da Silva; consultoria técnica José Carlos Miguel; [tradução Camila Bogéa]. São Paulo: Ática, 2008.

DE PAULA, A. F**. Mobilização e articulação de conceitos de Geometria Plana e de Álgebra em estudos de Geometria Analítica**. 2011. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. 2011

DOMINONI, N. R. F. **Utilização de diferentes registros de representação : um estudo envolvendofunções exponenciais.** 2005. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Londrina, 2005.

DOUADY, R. **Jeux Cadre et dialectiques outil-objet. Recherche en Didáctique des Mathématiques.** Grenoble. La Penseé Sauvage-Éditions, v. 7.2, p. 5-31. 1986.

DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registro de Representação Semiótica**. 1 ed. São Paulo: PAPIRUS, 2003. p. 11- 33.

DUVAL, R. Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. In: CAMPOS, T. M. M. (Org.). **Ver e ensinar matemática de outra forma**. São Paulo: PROEM, 2011.

FRANCHI, A. Considerações sobre a Teoria dos campos conceituais. In: MACHADO, S. D. A (Org**.). Educação Matemática:** Uma (nova) introdução. 3 ed. São Paulo: Educ., 2008, v. 1, p. 189-232.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J**. Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 2006.

MAGGIO, D. P., SOARES, M. A. S., NEHRING, C. M. **Registros de representação semiótica da função afim: análise de livros didáticos de matemática no ensino médio**. Revemat, Florianópolis, V. 05. Nº 1. P. 38-47. 2010.

MAGGIO, D. P. **Saberes docentes de uma professora que ensina função e conhece a teoria dos registros de representação semiótica**. 2011. Dissertação de mestrado, Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, RS. 2011.

MARKOVITS, Z., EYLON, B. S., BRUCKHEIMER. M., Dificuldades dos alunos com o conceito de função. In: COXFORD, A. F., SHULTE, A. P. (Org.). **as idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995. p. 49-69.

MARTINS, L. P. **Análise da dialética Ferramenta-Objeto na Construção do Conceito de Função**. 2006. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo 2006.

MELO, A. da F. **Estudos de procedimentos de validação de igualdades de expressões algébricas por meio de mudanças de quadros**. 2010. Dissertação de mestrado. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, 2010

OLIVEIRA, N. de. **Conceito de Função:** Uma abordagem do Processo ensino-aprendizagem. 1997. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 1997.

PELHO, E. B. B. **Introdução ao conceito de função: a importância da compreensão das variáveis**. 2003. Dissertação de mestrado. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2003.

PONTE, J. P. da. **O conceito de função no currículo de Matemática**. Educação e Matemática. n. 15, p. 3 – 9. 1990.

VÁZQUEZ, P. S.; REY,G.; BOUBÉE C.. **El concepto de función a través de la Historia**. Revista Iberoamericana de Educación Matemática. N. 16, p. 141 – 155, 2008.

VERGNAUD, G. A Teoria dos Campos Conceituais. In: Brun, J.. **Didáctica das Matemáticas**. 1 ed. Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

ANEXO

Escolha do plano correto de celular pode gerar economia de R$ 1 mil

Pesquisa mostra que 87% das pessoas estão no plano errado.
Veja algumas dicas simples que ajudam a economizar.

É preciso ficar atento na hora de escolher um plano para o celular, seja pré ou pós-pago. O mais importante é revistar o plano depois de um tempo para ver se ele ainda se encaixa no orçamento e na necessidade. Uma pesquisa mostrou que 85% dos brasileiros estão com o plano de celular errado, gastando, em média, quase R$ 1 mil a mais por ano. O levantamento foi feito pela Teleco, empresa de consultoria em telecomunicações, em parceria com a Pricez, responsável pelo portal de consultoria para planos de celulares.

Para ter um melhor custo-benefício, o ideal é pesquisar bastante antes de adquirir um plano. "Se o nível de consumo desejado é super baixo, seria um relacionamento de cliente pré-pago, que coloca R$ 10, R$ 15 por mês de recarga do celular. O adequado é entender quais são as operadoras de seus principais contatos e escolher o chip voltado para esta operadora", explica o consultor Diego Oliveira.

Já para quem procura um relacionamento em longo prazo, é válido rever o plano sempre. "Pro cliente que vai ter um relacionamento em longo prazo com a operadora, não escolhe para quem vai ligar ou tem um consumo mais complexo para telefone, internet e SMS, o ideal é fazer uma revisão anual dos planos."

Outra dica é ter mais de um chip. A cabeleireira Nádia Maria de Oliveira tem três linhas pré-pagas de operadoras diferentes. Um aparelho é para usar a internet. Outro aparelho tem dois chips – um de uma operadora que oferece torpedo barato e o outro para falar à vontade.

"Escolher e entender qual é o melhor plano sempre foi um desafio. Existe no mercado simuladores de melhor plano que você consegue colocar o seu perfil", alerta Daniel.

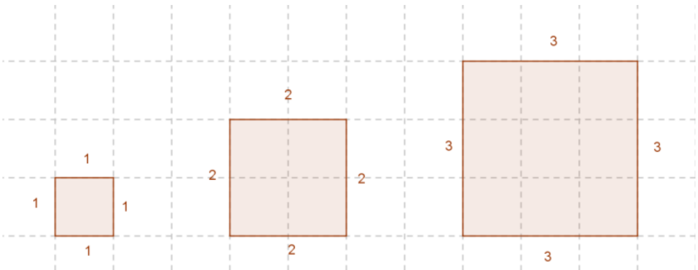
Fonte: http://g1.globo.com/sao-paulo/noticia/2012/05/escolha-do-plano-correto-de-celular-pode-gerar-economia-de-r-1-mil.html acessado em 13/05/2013

APÊNDICES

Análise *a priori* da 6ª sessão

Relacionar o conceito de função com outros conceitos matemáticos é uma das orientações dos PCN (BRASIL, 1998). Para tanto é utilizada uma sequência de atividades elaborada por Castro (2011) que foi adaptada para nossa pesquisa. As atividades são trabalhadas inicialmente no papel e lápis, para dar um enfoque na obtenção dos pares ordenados e da lei de formação e, posteriormente, no software *GeoGebra* no qual serão representados os pontos e a reta obtidos nas primeiras atividades. A utilização desse software permite articular a representação gráfica e algébrica da relação entre a medida do lado de um quadrado e o seu perímetro, bem como a relação entre a medida do lado com sua área. Outro objetivo dessa sessão é levar os alunos a elaborarem uma conjectura sobre a forma/formato da representação gráfica de uma função do 1º grau diferenciando-a de representação gráfica de outras funções.

Atividade 1. Observe as figuras a seguir cujas medidas dos seus lados são dadas em cm e responda as questões.



a) Calcule o perímetro de cada uma das figuras acima.
b) É possível calcular o perímetro de qualquer quadrado, como os que você calculou? Como?
c) O perímetro está relacionado com a medida do lado? Por quê?
d) Podemos dizer que o perímetro está em função da medida do lado do quadrado? Use a definição para justificar sua resposta.

e) De acordo com seu raciocínio anterior, calcule o perímetro dos quadrados cujas medidas dos lados (em cm) estão indicados na tabela abaixo.

Medida do lado	**Perímetro**
1	
2	
3	
4	
5	

f) Registre em forma de multiplicação o que você fez para chegar aos resultados anteriores.

g) Escreva uma expressão algébrica que simbolize as operações acima, ou seja, que simbolize o cálculo do perímetro de qualquer quadrado.

Essa atividade permite a discussão sobre dependência (entre perímetro e medida do lado de um quadrado). As respostas para o perímetro podem ser dadas por adição de parcelas iguais ou podem ser representadas por uma multiplicação. Essas respostas devem permitir a elaboração da lei de formação dessa relação.

Como resposta ao item *a* espera-se que os alunos utilizem seus conhecimentos sobre o conceito matemático perímetro e apresentem como resposta P1=4cm; P2=8cm; P3=12cm. Na resolução dessa parte da atividade deve-se estimular o debate entre os alunos favorecendo assim, que obtenham uma maneira de calcular o perímetro de um quadrado. Espera-se que eles percebam que é possível realizar tal cálculo, somando as medidas dos seus lados ou multiplicando a medida dos seus lados por quatro, conhecimentos esses que fazem parte do repertório de conhecimentos anteriores dos alunos. Dessa forma cremos que eles podem completar, sem dificuldades, a tabela do item *c* como segue:

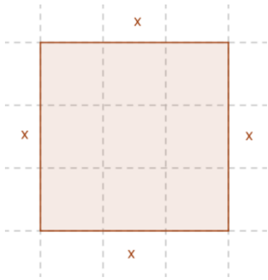
Quadro 16: Resposta ao item *e* da atividade 1 da 6ª sessão

Medida do lado	Perímetro
1	1+1+1+1= 4 x 1 = 4
2	2+2+2+2 = 4 x 2 = 8
3	3+3+3+3 = 4 x 3 =12
4	4+4+4+4 = 4 x 4 =16
5	5+5+5+5 = 4 x 5 =20

Fonte: Autores da pesquisa

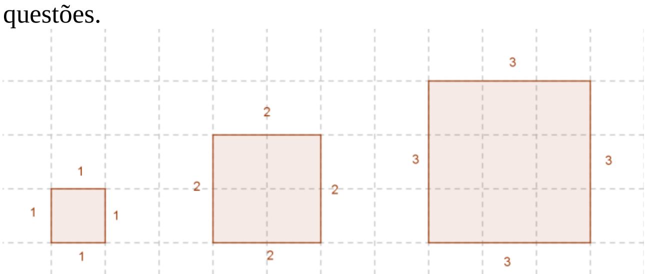
Os itens anteriores têm a intenção de levar os alunos a observarem que no caso de um quadrado, uma outra forma de calcular seu perímetro é multiplicar a medida de um dos seus lados por quatro. No item *f* pede-se a escrita desses cálculos na forma de multiplicação, obtendo como resposta 4 x 1; 4 x 2; 4 x 3; 4 x 4; 4 x 5 para cada linha da tabela, o que deve levá-los a generalizar essa relação por meio de uma expressão algébrica. Caso algum aluno tenha dificuldades com o enunciado pode-se fazer uso da representação tabular ou do próprio quadrado de lado x, para a obtenção da resposta P=4 . x

Medida do lado	Perímetro
1	4 . 1
2	4 . 2
3	4. 3
...	...
25	4. 25
...	...
x	4 . x



A atividade a seguir permite a discussão sobre dependência entre a área de um quadrado e a medida do seu lado. As respostas nessa atividade, devem ser dadas pela multiplicação das medidas dos seus lados e devem permitir chegar à maneira de se escrever a lei de formação que relaciona a área com a medida do lado do quadrado.

Atividade 2. Observe as figuras a seguir cujas medidas dos seus lados são dadas em cm e responda as questões.



a) Calcule a área de cada uma das figuras acima.
b) É possível calcular a área de qualquer quadrado, como os que você calculou? Como?
c) A área está relacionada com a medida do lado? Por quê?
d) Podemos dizer que a área esta em função da medida do lado do quadrado? Use a definição para justificar sua resposta
e) De acordo com seu raciocínio anterior, calcule a área dos quadrados cujas medidas dos lados (em cm) estão indicadas na tabela abaixo.

Medida do lado	**Área**
1	
2	
3	
4	
5	

f) Registre em forma de multiplicação o que você fez para chegar aos resultados.
g) Escreva uma expressão algébrica que simbolize as operações acima, ou seja, que simbolize o cálculo da área de qualquer quadrado.

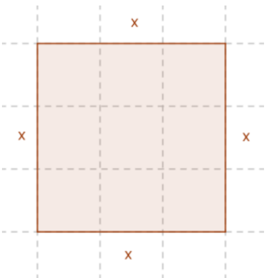
Para obter a reposta para o item *a* os alunos devem utilizar seus conhecimentos anteriores sobre o conceito matemático área e assim obter como resposta para a questão A1 = 1cm² 1; A2 = 4cm²; A3= 9cm². Nessa atividade também deve-se favorecer o debate entre os alunos. A resolução dessa atividade permite observar se os alunos têm o conhecimento desse conceito e, caso necessário, realizar algumas intervenções para que recordem os conhecimentos necessários para o desenvolvimento da atividade.

Com o item *b* é possível que eles percebam a necessidade da multiplicação da medida de dois dos lados perpendiculares do quadrado para obter a medida de sua área, completando, assim, sem dificuldades, a tabela do item *e* e escrevendo, no item *f*, a multiplicação realizada.

Medida do lado	Área
1	1 x 1 =1
2	2 x 2 =4
3	3 x 3 = 9
4	4 x 4 = 16
5	5 x 5 = 25

O objetivo dessa atividade é levar os alunos a generalizar essa relação por meio de uma expressão algébrica. Caso algum aluno tenha dificuldades com o enunciado da questão pode-se fazer uso da representação tabular ou do próprio quadrado de lado qualquer como estratégia de interpretação da atividade.

Medida do lado	Área
1	1 . 1
2	2 . 2
3	3. 3
...	...
15	15 . 15
...	...
x	x . x



Ao final dessa atividade é proposta a realização da seguinte atividade a ser realizada no *software GeoGebra*.

Atividade 3. Com o auxílio do software GeoGebra, desenvolva as atividades abaixo.

a) Marque os pontos do **item e**, da **atividade 1** no plano cartesiano.
b) O que você percebe a respeito da distribuição desses pontos?
c) É possível fazer uma previsão do comportamento destes pontos, ou seja, aqueles pontos que não estão marcados na tabela seguem também uma regra de distribuição? Qual?
d) No software há a opção de representar a expressão algébrica que você escreveu na letra **g** da **atividade 1**por meio do gráfico. Observe o que acontece quando você digita a expressão algébrica no campo **entrada** e aperta a tecla **enter**. O que você notou?

Na resolução dessa atividade iremos novamente localizar pontos no plano cartesiano e levantar questões como: Esses pontos, obtidos na tabela, são os únicos?; O ponto “tal” satisfaz ou não essa função? Isso leva à discussão referente ao domínio da função, no caso os reais não negativos. Essa atividade visa levar os alunos a perceberem um padrão na disposição dos pontos no plano o que se confirma com a ferramenta que permite a construção, no software, da reta que representa o gráfico da função.

No momento da resolução da atividade 3 é apresentado o *software GeoGebra*. Acredita-se que o fato de não o conhecerem não trará prejuízos à resolução das atividades, uma vez que uma rápida explicação dos comandos necessários é suficiente para alcançar os objetivos desejados.

Para marcar os pontos utilizando o *software GeoGebra* podem ser utilizados tanto a ferramenta **novo ponto** quanto a notação **(x , y)** digitada no campo **entrada.** Após realizar a localização desses pontos esperamos que os alunos percebam que estes estão alinhados e que estão sobre uma linha, ou ainda que a coordenada *y* é o quádruplo da coordenada *x*. Se mantiverem os pontos A, B, C e D no plano cartesiano, poderão observar que a representação gráfica dessa relação é uma reta que passa por esses pontos. Cabe nesse momento levantar questionamentos sobre alguns pontos dessa reta, principalmente aqueles com abscissas negativas para, novamente, discutirmos sobre o domínio da função. Pode-se questionar também se pontos tais como (5 , 20), (7 , 25) pertencem a essa função, sempre demandando sempre uma justificativa o que favorece a situação de validação.

A atividade a seguir também é desenvolvida utilizando os recursos do software GeoGebra.

Atividade 4. Utilizando o GeoGebra obtenha as representações das funções considerando que todas elas tenham domínio real.

1) $y = 2x + 1$
2) $y = x^2 + 3$
3) $y = -3 + 4x$
4) $f(x) = -x + 2$
5) $f(x) = \sin(x)$
6) $y = \cos(x)$
7) $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$
8) $y = x - 4$
9) $f(x) = -3x +$
10) $y = 3$
11) $y = x$

Qual a característica das representações gráficas das funções cuja expressão algébrica são da forma y = ax + b ou f(x) = ax + b?

O objetivo dessa atividade é possibilitar que os alunos reconheçam a representação gráfica de uma função do primeiro grau. Nessa atividade o software auxilia na elaboração da conjectura de que a representação gráfica de uma função do 1º grau é uma reta, o que é possível graças a possibilidade de se observar, simultaneamente, os registros algébrico e gráfico de cada função. Nessa atividade os alunos entram em contato com funções polinomiais de vários graus e funções trigonométricas. Eles devem perceber que as representações gráficas para as expressões f(x) = ax + b ou y = ax + b em todos os casos são retas.

Análise *a priori* da 7ª sessão

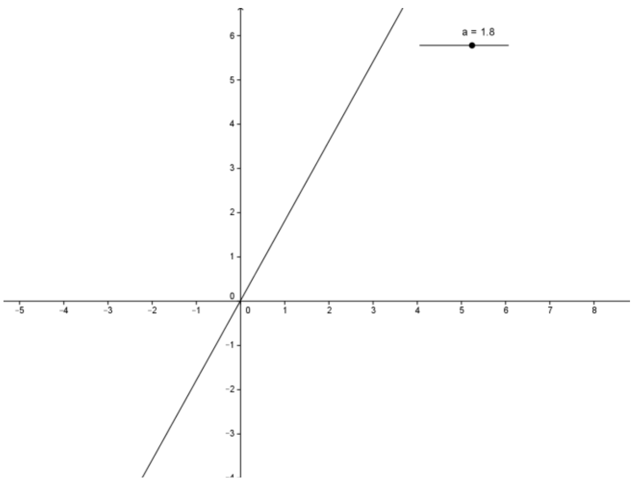
Nessa sessão é explorada outra possibilidade do software, a construção e movimentação dos coeficientes da função por meio chamado *controle deslizante.* A movimentação manual, ou automática, desse parâmetro possibilita a observação de várias posições de uma reta no plano cartesiano e simultaneamente a mudança de sua representação algébrica o que permite relacionar a representação gráfica com a representação algébrica.

As atividades que compõem essa sessão possibilitam a interpretação da conversão, realizada pelo software, entre os registros algébricos e gráficos. Aqui o software é um aliado importante na construção do conceito de função polinomial do 1º grau, pois permite ao usuário observar simultaneamente as representações gráficas e algébricas e assim criar conjecturas sobre os coeficientes em correspondência com as posições das retas no plano cartesiano. A interpretação dessas representações dá significado aos números e símbolos presentes na lei de formação e permite a discussão sobre a sua aplicabilidade em outras áreas da matemática como, por exemplo, o estudo da posição relativa entre retas no plano.

Atividade 1. Abra o arquivo A1 e anote suas observações na folha.

a) Movimentando o “a” construa a representação gráfica para a = 1.
b) Movimentando o “a” construa a representação gráfica para a = -1.

c)	Movimentando o “a” construa a representação gráfica para diferentes valores de a.
d)	O que você pode observar quando o coeficiente “a” assume valores positivos.
e)	O que você pode observar quando o coeficiente “a” assume valores negativos.
f)	O que você pode observar quando o coeficiente “a” assume valores cada vez maiores?
g)	O que você pode observar quando o coeficiente “a” assume valores cada vez menores?
h)	O que você pode observar quando o coeficiente “a” assume valores cada vez mais próximos de zero?

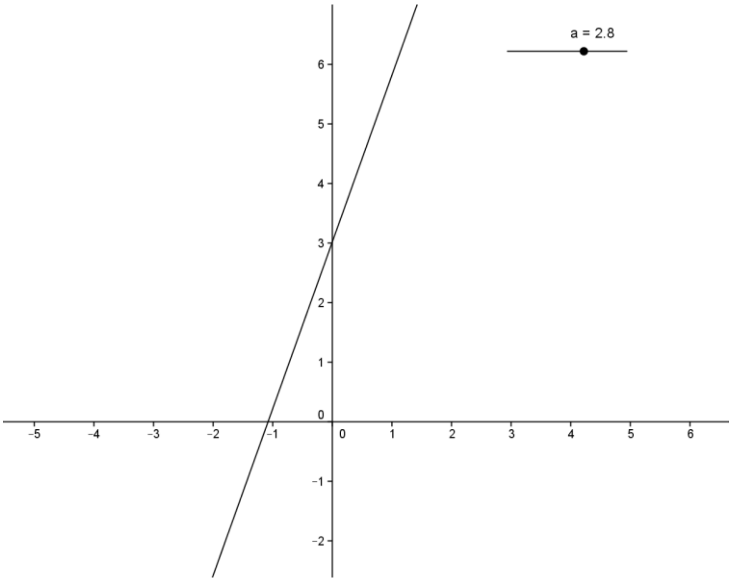


Os itens *a, b* e *c* são de manipulações realizadas em um parâmetro “a”, *controle deslizante*, que varia de -10 a +10 o que possibilita varias posições para a reta no plano. No item *a* esperamos que os alunos observem que a representação gráfica divide ao meio os quadrantes ímpares, ou que “passa pelo meio” desses quadrantes. Da mesma forma, no item *b*, onde sua representação gráfica é a bissetriz dos quadrantes pares. Outra observação importante pode ser feita no item *c*, percebendo que as representações gráficas passam pela origem do plano cartesiano para qualquer valor do coeficiente *a*.

Os itens *d, e, f, g* e *h* possibilitam aos alunos conjecturarem sobre o ângulo formado entre a representação gráfica e o eixo das abcissas bem como se reta sobe ou desce da esquerda para a direita e o quanto essas se aproximam dos eixos *x* e *y*.

Atividade 2. Abra o arquivo A2 e anote suas observações na folha.

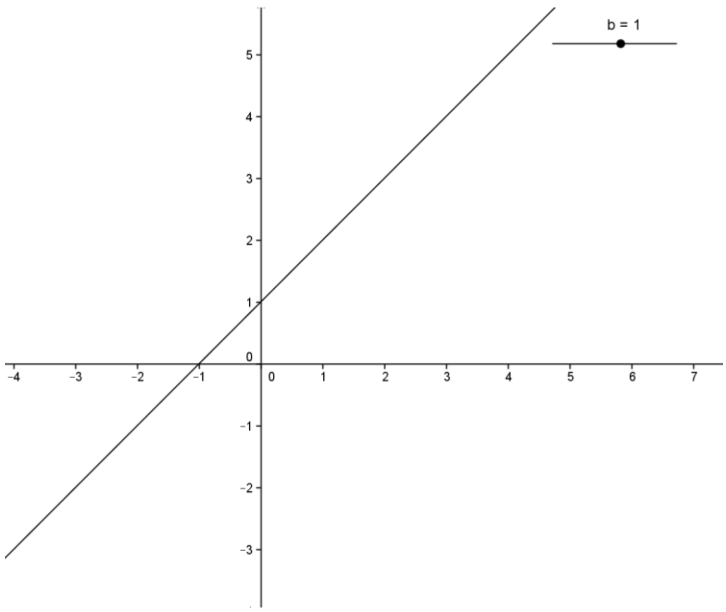
a) Movimentando o “a” construa a representação gráfica para a = 1.
b) Movimentando o “a” construa a representação gráfica para a = -1.
c) Movimentando o “a” construa a representação gráfica para diferentes valores de a.
d) O que você pode observar quando o coeficiente “a” assume valores positivos.
e) O que você pode observar quando o coeficiente “a” assume valores negativos.
f) O que você pode observar quando o coeficiente “a” assume valores cada vez maiores?
g) O que você pode observar quando o coeficiente “a” assume valores cada vez menores?
h) O que você pode observar quando o coeficiente “a” assume valores cada vez mais próximos de zero?



Ao realizarem as manipulações esperamos que os alunos percebam a semelhança entre essa atividade e a anterior e que se diferem pela presença do coeficiente b não nulo. Tal diferença faz com que a reta sempre passa pelo ponto (0 , 2). O objetivo dessa atividade é a percepção de que as características gráficas dadas pelo coeficiente *a* não são alteradas pela presença ou ausência do coeficiente *b*.

Atividade 3. Abra o arquivo A3 e anote suas observações na folha.

a) Movimentando o "b" construa a representação gráfica para b = 0.
b) Movimentando o "b" construa a representação gráfica para diferentes valores de "b".
c) O que você pode observar quando variamos o coeficiente "b"?



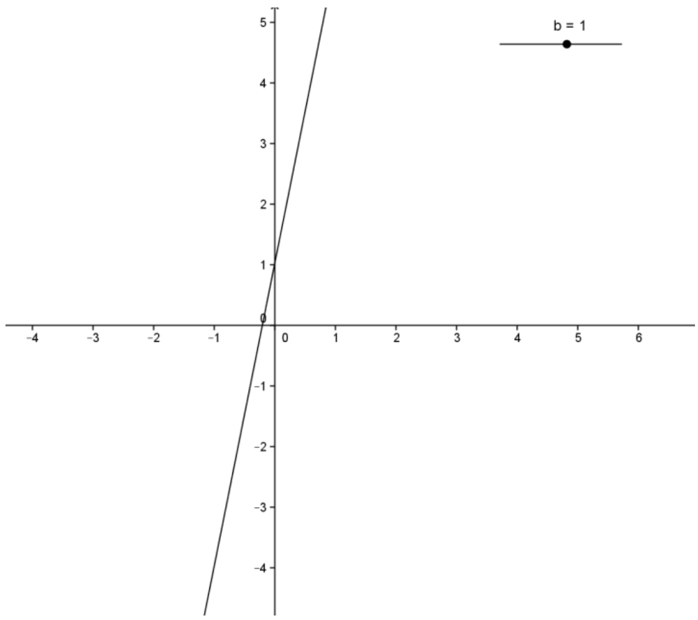
Os itens *a* e *b* são de manipulações realizadas em um parâmetro “b” que varia de -10 a +10 possibilitando varias posições para a reta no plano. No item *a* deve-se observar que a representação gráfica divide ao meio os quadrantes ímpares, ou que é a bissetriz desses quadrantes. Outra observação é a passagem da reta pela origem do plano cartesiano.

O objetivo das movimentações sugeridas no item *b* é levar os alunos a observarem que o coeficiente “b” tem o mesmo valor da ordenada do ponto em que a reta intercepta o eixo *y*. Nesse caso, como o coeficiente angular tem valor unitário, podem observar também que coeficiente “b” tem o valor oposto do valor da abscissa na qual a reta toca o eixo *x*.

No desenvolvimento dessa atividade iremos questioná-los sobre a inclinação da reta em relação ao eixo *x*, acreditamos estar levando-os a perceberem que a mesma não se altera e a argumentação para isso é que o coeficiente a não está sendo modificado.

Atividade 4. Abra o arquivo A4 e anote suas observações na folha.

a) Movimentando o “b” construa a representação gráfica para b = 0.
b) Movimentando o “b” construa a representação gráfica para diferentes valores de “b”.
c) O que você pode observar quando variamos o coeficiente “b”?

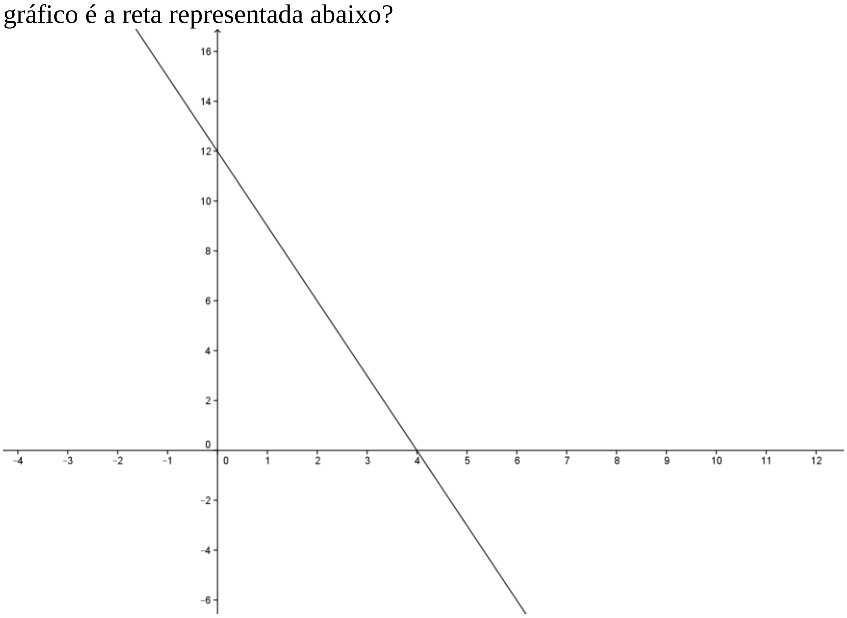


Ao realizarem as manipulações esperamos que os alunos percebam a semelhança entre a atividade 4 e a anterior e que a diferença entre elas é a presença do coeficiente *a*, no caso *a*=10, o que faz com que as retas formadas nessa atividade tenham inclinação diferente das retas da atividade 3. O objetivo dessa atividade é a percepção de que as características gráficas dadas pelo coeficiente b não são alteradas pelas possíveis mudanças no coeficiente a. Além de leva-los a observar que a afirmação de que coeficiente “b” tem o valor oposto do valor da abscissa na qual a reta toca o eixo *x* não é valida para esse caso.

Análise *a priori* da 8ª sessão

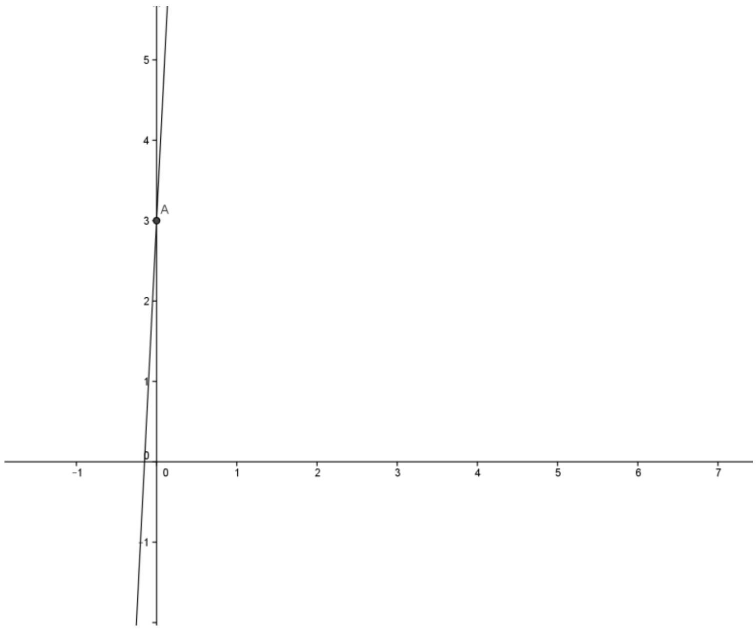
Nessa parte objetivamos o reinvestimento das conjecturas já construídas sobre os coeficientes angular e linear de uma função do 1º grau para determinar a representação algébrica da função cujo gráfico passa por determinados pontos do plano. As atividades têm como objetivo levar à interpretação geométrica do que vem a ser o valor do coeficiente *a* e como encontrá-lo dada a representação gráfica de uma função do 1º grau. Ao final dessa sessão queremos analisar se, e como, tais conhecimentos permitem encontrar a representação algébrica para uma reta passando por dois pontos dados.

Atividade 1. Qual das alternativas a seguir corresponde à expressão algébrica da função do 1º grau cujo gráfico é a reta representada abaixo?



a) y = 4x + 12
b) y = 3x – 12
c) y = -3x – 12
d) y = -3x + 12
e) y = 12x – 4

Atividade 2. Qual das alternativas a seguir corresponde à expressão algébrica da função do 1º grau cujo gráfico é a reta representada abaixo?



a) $y = 2x + 3$
b) $y = -20x – 3$
c) $y = -20x + 3$
d) $y = 20x – 3$
e) $y = 20x + 3$

Avaliação requerida pela escola

CABEÇALHO DA ESCOLA

OBSERVAÇÃO: Para obter o valor máximo de cada questão as respostas devem ser justificadas.

1) O estacionamento para carros, TopCar, têm a seguinte tarifa para seu serviço. Até 3 horas no estacionamento o valor é de R$ 4,00 e para cada hora excedente a esse tempo (3h) é cobrado o valor de R$ 0,50. Sabendo disso responda as questões:

e) Quanto uma pessoa irá pagar por ter permanecido com seu carro estacionado durante 1 hora e 30 minutos?

f) Quanto uma pessoa irá pagar por ter permanecido com seu carro estacionado durante 3 horas e 30 minutos?

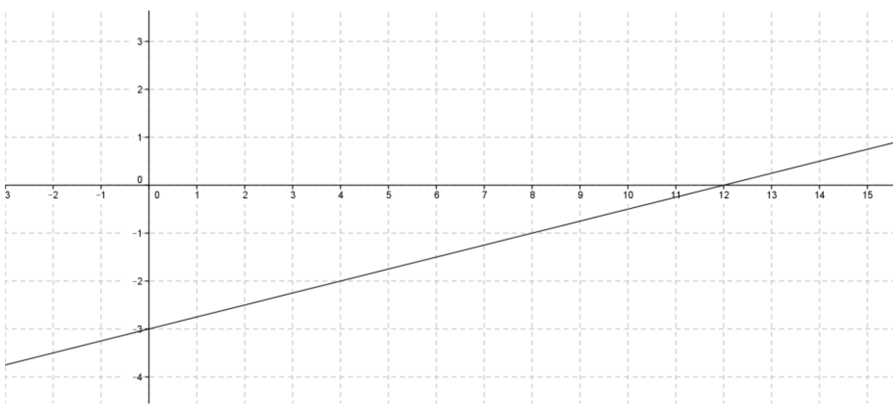
g) Quanto uma pessoa irá pagar por ter permanecido com seu carro estacionado durante 5 horas?

h) Uma pessoa que pagou R$ 7,00 ficou com seu carro estacionado por quanto tempo?

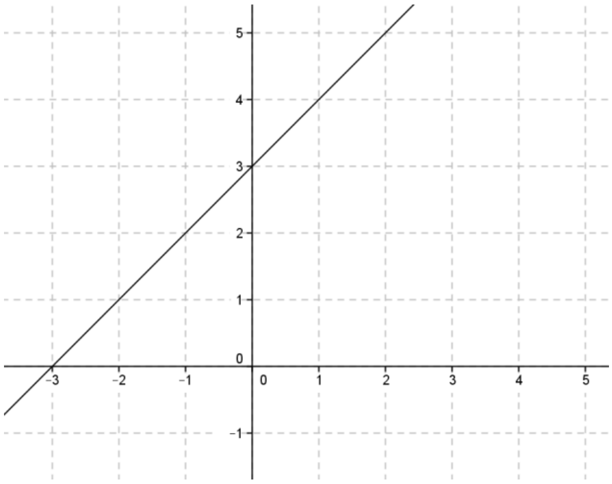
2) Sabemos que uma função polinomial do 1º grau pode ser expressa por uma expressão algébrica. Considerando a função polinomial do 1º grau dada pela expressão y = 2x – 3 responda as questões.

b) Qual dos gráficos a seguir representa a função y = 2x – 3? Justifique sua escolha.

A)

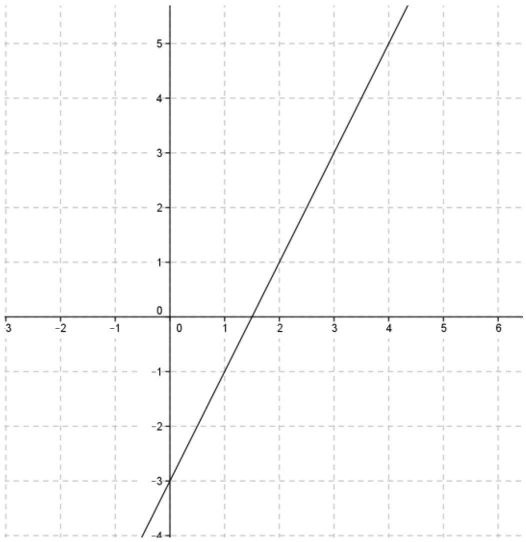


B)



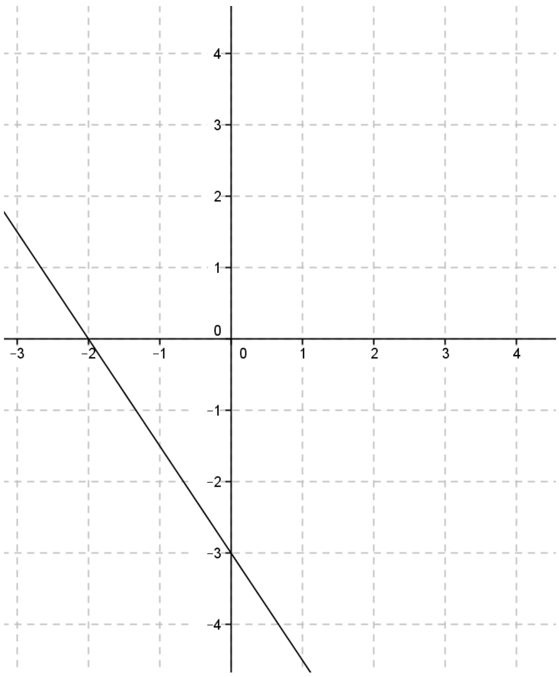
5
4
3
2
1
0
-1
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

C)



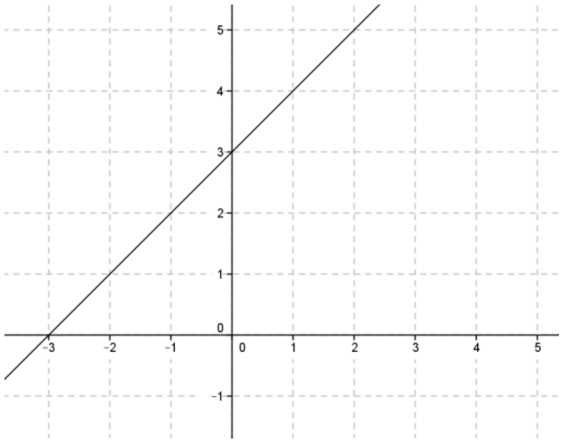
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

D)



4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

E)



c) Quais dos pares ordenados (x, y) a seguir pertencem à função y = 2x – 3? Justifique sua resposta.

(2,1)

(2,3)

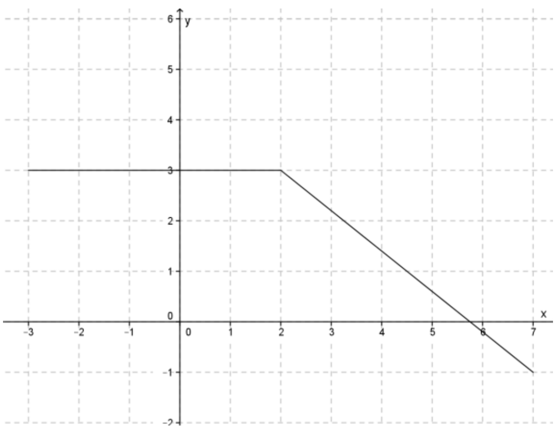
(1,-1)

(5,4)

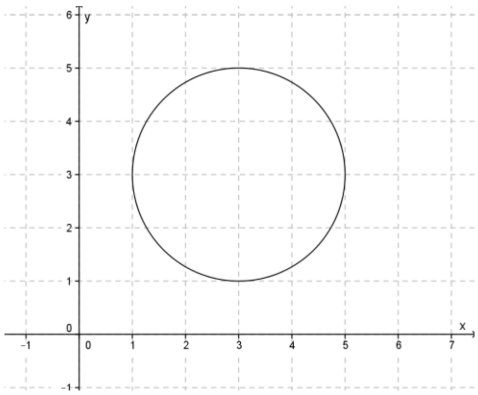
(0,-3)

3) Em quais das representações ***y*** está em função de ***x***? Justifique suas respostas.

a)



b)



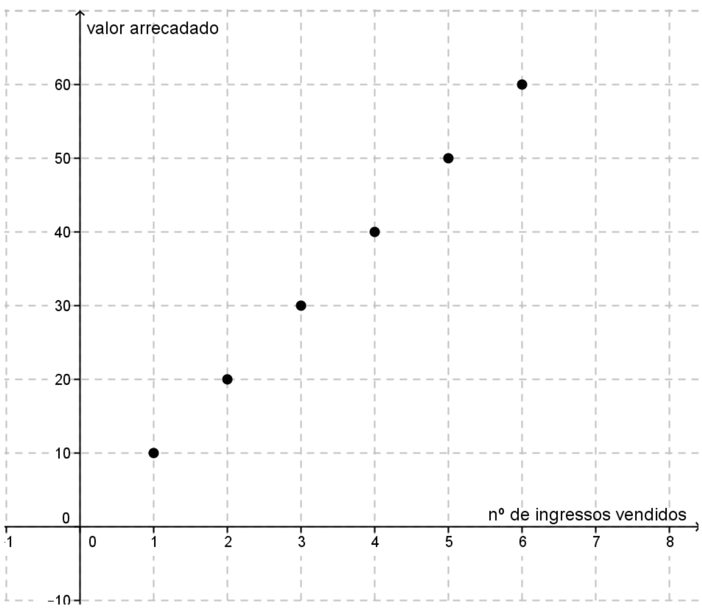
c)

X	y
1	4
3	7
4	8
3	9

d)

X	y
2	6
4	12
6	18
8	24

4) O gráfico a seguir representa a função entre o **número de ingressos vendidos** e o **valor arrecadado.** Analise esse gráfico e responda as questões.



a) Qual o valor arrecadado com a venda de 4 ingressos? Justifique sua resposta.

b) Qual o valor arrecadado com a venda de 6 ingressos? Justifique sua resposta.

c) Qual o valor arrecadado com a venda de 13 ingressos? Justifique sua resposta.

d) Para arrecadar R$ 240,00 quantos ingressos devem ser vendidos? Justifique sua resposta?