

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

Danielly Regina Kaspary dos Anjos

**UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E
SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS
DIDÁTICOS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Campo Grande - MS

2014

Danielly Regina Kaspary dos Anjos

**UMA ANÁLISE PRAXEOLÓGICA DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E
SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS NATURAIS EM UMA COLEÇÃO DE LIVROS
DIDÁTICOS DOS ANOS INICIAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**

**Dissertação apresentada à banca
examinadora, como exigência final para a
obtenção do título de mestre em Educação
Matemática, pela Universidade Federal do
Mato Grosso do Sul – UFMS, sob
orientação da professora Dra. Marilena
Bittar**

Campo Grande - MS

2014

Danielly Regina Kaspary dos Anjos

**ANÁLISE DA PROPOSTA DE ENSINO DE UMA COLEÇÃO DE LIVROS
DIDÁTICOS PARA AS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DOS
NÚMEROS NATURAIS**

Dissertação apresentada à banca examinadora, como exigência final para a obtenção do título de mestre em Educação Matemática, pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS, sob orientação da professora Dra. Marilena Bittar

Campo Grande, MS, 28 de Fevereiro de 2014.

COMISSÃO EXAMINADORA

Profª. Dra. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Profª. Dra. Sandra Maria Pinto Magina
Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC/BA

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

*À minha mãe, pela torcida que tanto me
encoraja.*

AGRADECIMENTOS

A Deus, por sempre me fortalecer.

À minha família, por ser o alicerce da minha vida. *Sou abençoada por ter vocês. Nossa aliança é o que tenho de mais forte e bonito na vida.*

À professora Marilena, por fazer parte dessa conquista de maneira tão especial. *Sinto-me engrandecida por tê-la como orientadora e amiga. Obrigada por todo esse aprendizado.*

Ao Vinícius, por dar mais graça e leveza aos nossos finais de semanas de estudo, por ser o meu refúgio revigorante em momentos de distração e pelo tempo e paciência na construção de algumas imagens presentes nesse trabalho. *Obrigada pelo companheirismo!*

Aos muitos professores que marcaram a minha vida escolar e acadêmica. *Que sorte a minha de poder ter tido vocês nessa caminhada.*

À banca examinadora pela leitura e contribuições. *Professor Zé e professora Sandra, é uma honra poder contar com o olhar de vocês sobre esse trabalho.*

À Capes, pelo apoio financeiro, que possibilitou a minha dedicação exclusiva com as diversas atividades do mestrado.

Aos meus colegas queridos que cresceram junto comigo nesse período. *Até breve! Temos muito ainda o que fazer!*



Joaquín Salvador Lavado

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo caracterizar o ensino das operações de adição e subtração dos números naturais em uma coleção de livros didáticos aprovada pelo PNLD/2013. Para tanto, voltamos-nos para a coleção vigente mais adotada no país que contempla os cinco primeiros anos escolares, quando se prioriza o estudo do conteúdo em questão. A análise é realizada sob a ótica da organização praxeológica, tomando como referencial teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático, que nos oportuniza desvelar aspectos matemáticos e didáticos do ensino investigado. Esse trabalho se fundamenta também em estudos sobre as estruturas aditivas desenvolvidos pelo viés da Teoria dos Campos Conceituais. As análises realizadas evidenciam, entre outras características, a valorização pelo ensino e prática de técnicas de resolução, o processo pela busca da institucionalização dos algoritmos usuais das operações de adição e subtração e o abandono, nesse cenário, de alguns ostensivos em virtude de outros que se mostram mais abrangentes para responder as tarefas propostas e mais econômicos no que tange seu caráter instrumental na atividade matemática.

Palavras-chave: Campo Aditivo. Estruturas Aditivas de Base. Organização Matemática e Organização Didática. Valência Instrumental. Anos iniciais.

ABSTRACT

This work aims to characterize the teaching of addition and subtraction operations of natural numbers in a collection of didactic books approved by the Brazilian Program of Didactic Books (PNLD/2013), to achieve it, we focused in the most used books collection, that contemplates the first five school years, when prioritizing the content in question. The analyze is conducted by a praxeologic organizational view, taking by theoretical and methodological referential the Anthropological Theory of Didactic, which provides opportunities to reveal mathematical and didactical aspects of the analyzed teaching. This work is based also in researches about the addition structures developed with the Theory of Conceptual Fields. The analyses show among other characteristics, appreciation for education and practice solving techniques, a process of searching to institutionalize the addition and subtraction usual algorithms and an abandon, in this scenario, of some ostensive instead others that seems to be more embracing to answer the proposal tasks and more agile regarding their instrumental character in mathematical education.

Keywords: Additive field. Base additive structures. Mathematical Organization. Didactical Organization. Instrumental valence.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Representações das Categorias das Estruturas Aditivas de Base.	22
Figura 2: Categorias propostas por Magina et al. (2001).....	24
Figura 3: Representação do problema 1 referente à Categoria I	25
Figura 4: Extensão da representação de situações de composição de medidas.	26
Figura 5: Representação do problema 2 referente à Categoria I	26
Figura 6: Representação do problema 3 referente à Categoria I	27
Figura 7: Representação do problema 1 referente à Categoria II.....	28
Figura 8: Representação do esquema da operação inversa - transformação positiva	28
Figura 9: Representação do esquema da operação inversa - transformação negativa	28
Figura 10: Representação do problema 2 referente à Categoria II	29
Figura 11: Representação do problema 3 referente à Categoria II	29
Figura 12: Representação do problema 1 referente à Categoria III.....	30
Figura 13: Representação do problema 2 referente à Categoria III.....	30
Figura 14: Representação do problema 3 referente à Categoria III.....	31
Figura 15: Representação detalhada da Categoria III.....	31
Figura 16: Representação do problema 1 referente à Categoria IV	31
Figura 17: Representação do problema 2 referente à Categoria IV	32
Figura 18: Representação do problema 1 referente à Categoria V.....	33
Figura 19: Representação do problema 2 referente à Categoria V.....	34
Figura 20: Representação do problema 3 referente à Categoria V.....	34
Figura 21: Representação do problema 1 referente à Categoria VI.....	34
Figura 22: Representação do problema 2 referente à Categoria VI.....	35
Figura 23: Representações dos tipos de tarefas referentes à Categoria I	36
Figura 24: Representações dos tipos de tarefas referentes à Categoria II.....	36
Figura 25: Representações dos tipos de tarefas referentes à Categoria III.....	37
Figura 26: Representações dos tipos de tarefas referentes à Categoria IV	37
Figura 27: Representações dos tipos de tarefas referentes à Categoria V.....	37
Figura 28: Representações dos tipos de tarefas referentes à Categoria V.....	37
Figura 29: Modelo proposto por Gascón (2003).....	45
Figura 30: Exemplo de tarefas de composição de medidas.....	55
Figura 31: Exemplificação da técnica τ_5	56
Figura 32: Exemplo de atividade que emprega a técnica de contagem apresentando o conjunto união.	59
Figura 33: Exemplo de atividade que emprega a técnica de contagem sem apresentar o conjunto união.	59
Figura 34: Material Cuisenaire na operação de adição.....	60
Figura 35: Técnica τ_1 em uma situação de subtração.....	60
Figura 36: Exemplificação da τ_6	62
Figura 37: Exemplificação da τ_7	62
Figura 38: Exemplificação da τ_8	62
Figura 39: Exemplificação da τ_9	63
Figura 40: Exemplificação da τ_{10}	63
Figura 41: Exemplificação da τ_7	64
Figura 42: Exemplificação da técnica de agrupamento.....	68
Figura 43: Exemplificação da técnica de decomposição.....	68
Figura 44: Cálculo mental livro do primeiro ano.	69
Figura 45: Exemplificação de atividade não considerada no livro do primeiro ano.....	70
Figura 46: Técnica de "andar" na tabela.	71
Figura 47: Tabela de 0 a 29.....	71

Figura 48: Retas numéricas para situações de comparação.	76
Figura 49: Tarefa de comparação respondida com o ostensivo retas numéricas.	76
Figura 50: Ostensivo <i>risquinhos</i> com agrupamento.	77
Figura 51: Atividade que exemplificam uma suposta conjectura.	79
Figura 52: Diferentes maneiras de representar uma adição.	80
Figura 53: Operação inversa.	81
Figura 54: Exemplificação da técnica τ_{17}	82
Figura 55: Material Cuisenaire em uma situação de subtração.	83
Figura 56: Agrupamento de 10 em 10 - completar para a dezena mais próxima.	85
Figura 57: Cálculo mental e tabela com sequência dos números.	86
Figura 58: Adição e subtração com dezenas inteiras.	86
Figura 59: Adições com números maiores que 100 por meio da técnica τ_{18}	87
Figura 60: Material Dourado e valor posicional.	87
Figura 61: Como utilizar as fichas.	88
Figura 62: Material dourado e a ideia de tirar uma quantidade de outra.	90
Figura 63: Material Dourado e a ideia de comparar quantidades.	90
Figura 64: Material dourado e o algoritmo da adição.	91
Figura 65: <i>Bolinhas</i> para o algoritmo da subtração.	91
Figura 66: Algoritmo da decomposição.	92
Figura 67: Técnica τ_{24} para o caso de somar 9.	93
Figura 68: Trabalho com o material dourado.	97
Figura 69: Trabalho de cálculo mental da técnica τ_{19}	99
Figura 70: União de três técnicas.	99
Figura 71: Algoritmo da decomposição e algoritmo usual.	103
Figura 72: Algoritmo usual e descrição dos passos.	104
Figura 73: Justificativa para o “empresta um”.	104
Figura 74: Operação inversa.	104
Figura 75: Composição de milhares.	105
Figura 76: Composição dos números ilustrada pelo material dourado.	106
Figura 77: Composição e língua materna.	106
Figura 78: Técnica de τ_{19} para as centenas.	106
Figura 79: Algoritmo usual acompanhado de elementos tecnológicos.	107
Figura 80: Situações ilustradas, supostamente, pela representação de Vergnaud (1990).	109
Figura 81: Sistema de numeração Maia e a ideia de agrupamento.	113
Figura 82: Material dourado e o algoritmo usual.	115
Figura 83: Justificativa em língua materna da técnica do algoritmo usual.	115
Figura 84: Apresentação da τ_{26}	116
Figura 85: Apresentação da τ_{26}	117
Figura 86: Propriedade associativa e momento de avaliar a técnica.	118
Figura 87: Tipo de tarefa T_{21} e representação semelhante ao do Vergnaud (1990).	119
Figura 88: Exemplo de tarefa do tipo T_{41}	120
Figura 89: Discurso tecnológico da técnica do algoritmo usual.	125
Figura 90: Prova real por meio da propriedade da comutatividade.	125
Figura 91: Exemplo de atividade de cálculo mental.	125
Figura 92: Atividade para aplicar a τ_{26}	126
Figura 93: Atividade que aplica a noção da propriedade comutativa.	127
Figura 94: Atividade que aplica a propriedade do elemento neutro da adição.	127
Figura 95: Exemplo de tarefa do tipo T_{12} envolvendo porcentagem.	129
Figura 96: Exemplo de tarefa do tipo T_{22} envolvendo porcentagem.	129
Figura 97: Organização didática proposta pela coleção segundo o modelo de Gascón (2003).	136

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Síntese dos tipos de situações das Estruturas Aditivas de Base	36
Quadro 2: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do primeiro ano - Parte I	58
Quadro 3: Tipos de Tarefas - Livro do primeiro ano - Parte I	58
Quadro 4: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do primeiro ano - Parte II	65
Quadro 5: Demais Tipos de Tarefas - Livro do primeiro ano - Parte II	66
Quadro 6: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do primeiro ano - Parte II	67
Quadro 7: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do primeiro ano - Parte III	70
Quadro 8: Demais Tipos de Tarefas - Livro do primeiro ano - Parte III	70
Quadro 9: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do primeiro ano - Parte III	72
Quadro 10: Síntese dos tipos de tarefas da parte <i>final</i> do livro do primeiro ano	73
Quadro 11: Síntese das técnicas da parte <i>final</i> do livro do primeiro ano	73
Quadro 12: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do segundo ano	76
Quadro 13: Demais Tipos de Tarefas – Livro do segundo ano - Parte I	77
Quadro 14: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do segundo ano - Parte I	78
Quadro 15: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do segundo ano - Parte II	80
Quadro 16: Demais Tipos de Tarefas - Livro do segundo ano - Parte II	80
Quadro 17: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do segundo ano - Parte II	83
Quadro 18: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do segundo ano - Parte III	84
Quadro 19: Demais Tipos de Tarefas - Livro do segundo ano - Parte III	84
Quadro 20: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do segundo ano - Parte III	85
Quadro 21: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do segundo ano - Parte IV	88
Quadro 22: Demais Tipos de Tarefas - Livro do segundo ano - Parte IV	88
Quadro 23: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do segundo ano - Parte IV	94
Quadro 24: Síntese dos tipos de tarefas da parte <i>final</i> do livro do segundo ano	95
Quadro 25 Síntese das técnicas da parte <i>final</i> do livro do segundo ano	95
Quadro 26: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do terceiro ano - Parte I	98
Quadro 27: Demais tipos de tarefas - Livro do terceiro ano - Parte I	98
Quadro 28: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do terceiro ano - Parte I	98
Quadro 29: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do terceiro ano, Parte II	100
Quadro 30: Demais Tipos de Tarefas - Livro do terceiro ano - Parte II	101
Quadro 31: Relação dos tipos de tarefas e técnicas – Livro do terceiro ano – Parte II	102
Quadro 32: Relação dos tipos de tarefas e técnicas – Livro do terceiro ano – Parte III	108
Quadro 33: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do terceiro ano, Parte III	108
Quadro 34: Demais Tipos de Tarefas – Livro do terceiro ano – Parte III	108
Quadro 35: Síntese dos tipos de tarefas da parte <i>final</i> do livro do terceiro ano	110
Quadro 36: Síntese das técnicas da parte <i>final</i> do livro do terceiro ano	110
Quadro 37: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do quarto ano - Parte I	113
Quadro 38: Demais Tipos de Tarefas – Livro do quarto ano – Parte I	114
Quadro 39: Relação dos tipos de tarefas e técnicas – Livro do quarto ano – Parte I	114
Quadro 40: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do quarto ano - Parte II	118
Quadro 41: Demais Tipos de Tarefas – Livro do quarto ano – Parte II	118
Quadro 42: Relação dos tipos de tarefas e técnicas – Livro do quarto ano – Parte II	119
Quadro 43: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do quarto ano - Parte III	120
Quadro 44: Demais Tipos de Tarefas – Livro do quarto ano – Parte III	120
Quadro 45: Síntese dos tipos de tarefas do livro do quarto ano	122
Quadro 46: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do quinto ano, Parte III	128

Quadro 47: Demais Tipos de Tarefas – Livro do quinto ano – Parte III.....	128
Quadro 48: Relação dos tipos de tarefas e técnicas – Livro do quinto ano – Parte I.....	128
Quadro 49: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do quinto ano - Parte II.	129
Quadro 50: Demais Tipos de Tarefas – Livro do quinto ano – Parte II	129
Quadro 51: Relação dos tipos de tarefas e técnicas – Livro do quinto ano – Parte II	130
Quadro 52: Síntese dos tipos de tarefas do livro do quinto ano.....	131
Quadro 53: Síntese das técnicas do livro do quinto ano	131
Quadro 54: Síntese das técnicas do livro do primeiro ano	135
Quadro 55: Síntese das técnicas do livro do quinto ano	135

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	15
APORTE TEÓRICO E METODOLÓGICO.....	18
1 NOSSO OBJETO MATEMÁTICO: AS ESTRUTURAS ADITIVAS	18
1.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS	18
1.2 UM ESTUDO SOBRE SITUAÇÕES DO CAMPO ADITIVO	22
1.3 SÍNTESE DAS SITUAÇÕES “CONTEXTUALIZADAS” DO CAMPO ADITIVO	35
2 OBJETIVOS E TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO.....	38
2.1 OBJETIVOS.....	38
2.2 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO – TAD.....	39
2.2.1 Noção de Organização Praxeológica e Modelos de Organizações Didáticas.....	39
2.2.2 Ostensivos e Valência Instrumental	47
ANÁLISE DOS DADOS	50
3 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE.....	50
3.1 TIPOS DE TAREFAS ELENCADOS <i>A PRIORI</i>	51
4 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DO LIVRO DO PRIMEIRO ANO.....	54
4.1 PARTE I – PRIMEIROS CAPÍTULOS: ESTUDO DOS NÚMEROS ATÉ 10.....	54
4.2 PARTE II – CAPÍTULO INTITULADO “ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO”	58
4.3 PARTE III – ÚLTIMOS CAPÍTULOS DO LIVRO: ESTUDO DOS NÚMEROS ATÉ 100 ...	68
4.4 ALGUMAS CONCLUSÕES DO LIVRO DO PRIMEIRO ANO.....	72
5 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DO LIVRO DO SEGUNDO ANO.....	75
5.1 PARTE I - PRIMEIROS CAPÍTULOS: ESTUDO DOS NÚMEROS ATÉ 19.....	75
5.2 PARTE II – CAPÍTULO INTITULADO “ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO”	79
5.3 PARTE III – ESTUDO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL	84
5.4 PARTE IV – AMPLIAÇÃO DO ESTUDO DAS QUATRO OPERAÇÕES.....	88
5.5 ALGUMAS CONCLUSÕES DO LIVRO DO SEGUNDO ANO	95
6 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DO LIVRO DO TERCEIRO ANO.....	97
6.1 PARTE I - PRIMEIROS CAPÍTULOS: ESTUDO DOS NÚMEROS ATÉ 99.....	97
6.2 PARTE II – CAPÍTULO INTITULADO “ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO”	100
6.3 PARTE III – SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E RETOMADA DAS QUATRO OPERAÇÕES	105
6.4 ALGUMAS CONCLUSÕES DO LIVRO DO TERCEIRO ANO.....	109
7 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DO LIVRO DO QUARTO ANO.....	112
6.1 PARTE I – SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E NÚMEROS NATURAIS ATÉ O 1000000 (UM MILHÃO).....	112

6.2 PARTE II – CAPÍTULO INTITULADO “ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO COM NÚMEROS NATURAIS”	114
6.3 PARTE III – ÚLTIMOS CAPÍTULOS	120
7.4 ALGUMAS CONCLUSÕES DO LIVRO DO QUARTO ANO.....	122
8 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DO LIVRO DO QUINTO ANO	124
6.1 PARTE I – CAPÍTULO “ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO COM NÚMEROS NATURAIS”	124
6.2 PARTE II – DE MAIS CAPÍTULOS	128
8.3 ALGUMAS CONCLUSÕES DO LIVRO DO QUINTO ANO.....	131
CONSIDERAÇÕES FINAIS	133
ANEXO	138
REFERÊNCIAS	140

INTRODUÇÃO

Época próxima ao vestibular, em momentos de estudos na biblioteca da universidade, uma placa em cima de uma porta me chamou atenção, na qual dizia “Mestrado em Educação Matemática”. Não que isso significasse muito na ocasião, mas era um nome bastante sugestivo àquela que ansiava uma vaga no curso de Licenciatura em Matemática.

Questões sobre o ensino e a aprendizagem desde muito nova me instigavam, mesmo que de maneira muito ingênua ainda no Ensino Fundamental ao dar aulas de reforço à crianças mais novas. Foi com o ingresso no curso de Licenciatura em Matemática e ao fazer parte, logo no segundo ano de graduação, do PIBID - Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência - que tais discussões tomaram corpo e transcenderam aqueles sentimentos enigmáticos. Comecei, então, a atribuir diferentes significados àquela placa, e ao encontro dessa significação veio a vontade de investigar, de fato, tais questões. Confesso que a princípio acreditava que poderia pesquisar de tudo, se não tudo! Mas era preciso delimitar para submeter um projeto de pesquisa e concorrer a uma vaga de Mestrado. Assim o fiz, e apresento aqui o resultado dessa escolha, considerando, é claro, as mudanças que sofreram as primeiras ideias defendidas no projeto.¹

A pesquisa tem sua origem no anseio de analisar livros didáticos: primeiro pelo papel importante que eles têm no cenário educacional brasileiro; segundo por eles serem uma representação daquilo que é proposto para ser ensinado e aprendido nas escolas. Hoje em dia contamos com o Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), que apresenta aos professores e aos interessados uma análise em forma de resenhas das coleções aprovadas pelo Ministério da Educação (MEC). Essa análise busca subsidiar o processo de escolha dessas obras pelas escolas. Nesse sentido, não cabe ao Guia apresentar informações detalhadas do ensino, e é com esse intuito, de analisar de forma minuciosa um certo conteúdo, que nasce a nossa pesquisa.

Em busca do objeto matemático a ser investigado em livros didáticos, nos deparamos com uma literatura rica, no que tange a educação, acerca do conteúdo das quatro operações elementares da Matemática. Frente a esse quadro teórico, sentimos

¹ A partir desse momento o texto deixa de ser escrito na primeira pessoa do singular e passa a assumir a pluralidade, por ele ter sido concebido por meio de uma construção conjunta, oriunda da parceria entre orientanda e orientadora.

falta de pesquisas sobre propostas vigentes de ensino relativas à esses saberes de forma detalhada. Com a decisão de nos limitar às operações de adição e subtração, definimos a nossa questão de pesquisa do seguinte modo: *Como é proposto, em livros didáticos, o ensino das operações de adição e subtração de números naturais?*

Pelo tempo de pesquisa e pelo perfil de análise pretendido, nos voltamos para a coleção de livros didáticos mais adotada² no país dos anos iniciais para então compreender como se dá o ensino, particularmente, das operações de adição e subtração dos números naturais. Para isso, procedemos a análise da coleção sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Chevallard (1999), que nos fornece um quadro teórico-metodológico que acreditamos ser apropriado na busca pela caracterização de uma proposta de ensino, como já fizeram alguns pesquisadores ao analisar livros didáticos (NOGUEIRA 2008; OLIVEIRA, 2010; ARAUJO, 2011).

Os resultados de pesquisas que discutem o ensino e a aprendizagem das operações de adição e subtração também constituem a fundamentação teórica no qual esse trabalho está pautado. São elas, em especial, aquelas que sofreram influência dos trabalhos desenvolvidos por Vergnaud (1990, 2009a) por meio da Teoria dos Campos Conceituais. Desse modo, tomamos também como referência estudos como os de Magina et al. (2001) e Santana (2012) realizados à luz dessa teoria. Esses estudos, bem como os de Vergnaud (1990, 2009a), nos oportunizam reflexões sobre o ensino investigado e nos auxiliam na análise dos livros didáticos.

Os nossos estudos teóricos se deram em todos os momentos da pesquisa, incluindo aqueles em que nos debruçávamos sobre os dados. Desse modo, os momentos analíticos possibilitaram a reflexão sobre elementos teóricos não considerados em momentos mais ingênuos de estudo. A análise, nessa perspectiva, contribuiu para entendermos o que, de cada uma dessas teorias mencionadas anteriormente, faria parte daquilo que nos permite discutir e alcançar nossos objetivos de pesquisa. Ademais, a análise trouxe à tona conceitos teóricos, como o de valência instrumental abordado no capítulo III, que se fizeram necessários após observações promovidas pelo estudo dos dados.

Nosso trabalho é apresentado em duas partes: “Aporte teórico e metodológico” e “Análise dos dados”. A primeira parte contempla os dois primeiros capítulos. No capítulo I apresentamos um estudo acerca do nosso objeto matemático, as operações de

² A coleção mais adotada é a “Ápis” do autor Luiz Roberto Dante, segundo os dados de venda do PNLD 2010 e 2013.

adição e subtração. Para tanto, fez-se necessário uma breve discussão sobre a Teoria dos Campos Conceituais que nos dá suporte para realizar um estudo detalhado das diferentes situações contextualizadas possíveis de serem vivenciadas ao se estudar o conteúdo matemático em questão. No capítulo II apresentamos os nossos objetivos de pesquisa e alguns conceitos da Teoria Antropológica do Didático que se fazem presentes em nossa investigação. A segunda parte do texto, composta por seis capítulos, contempla a análise dos livros didáticos, bem como alguns esclarecimentos metodológicos. Dedicamos um capítulo especial para a análise de cada volume da coleção investigada, que é analisado em partes, segundo divisões propostas por nós, buscando, desse modo o nível de detalhamento exigido pela Teoria Antropológica do Didático. Por fim, em um último capítulo trazemos as considerações finais.

APORTE TEÓRICO E METODOLÓGICO

1 NOSSO OBJETO MATEMÁTICO: AS ESTRUTURAS ADITIVAS

A importância das operações de adição e subtração para qualquer cidadão é justificada pelo aspecto pragmático que esse saber possui, visto que há a necessidade de efetuar e mobilizar conceitos relativos a essas operações para a realização de atividades rotineiras, presentes em toda sociedade. Do reconhecimento da importância das operações de adição e subtração para a formação básica de um aprendiz, emerge a necessidade de estudos que permitem entender e refletir sobre características próprias desse conteúdo e sobre o seu ensino e sua aprendizagem. Diversos pesquisadores já se dedicaram a esses estudos (VERGNAUD, 1985, 1990, 2009a, 2009b, 2011; MAGINA et al, 2001; DAMM, 2003; NUNES et al, 2009; , SANTANA, 2012).

A leitura que segue neste capítulo é um breve estudo de algumas pesquisas que ajudam a justificar e elucidar nossa investigação, fomentando discussões relacionadas ao ensino e à aprendizagem do conteúdo de adição e subtração dos números naturais. Esse estudo visa subsidiar a análise da coleção investigada.

1.1 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES SOBRE A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

As quatro operações elementares foram estudadas, do ponto de vista cognitivo, por Vergnaud (1990), ao desenvolver a Teoria dos Campos Conceituais. Nesse cenário, Vergnaud (1990, p.135, tradução nossa) teve como objetivo, entre outros, o de “explicar o processo de conceitualização progressiva das estruturas aditivas [...]”, ou seja, o de estudar, além do ponto de vista matemático, as situações que “requerem, para sua resolução, uma adição, uma subtração ou uma combinação dessas operações” (FRANCHI, 2010, p. 189).

Considerando que nosso objeto matemático de estudo são as situações que envolvem as operações de adição e subtração, é importante para a nossa pesquisa nos apoiarmos em estudos já feitos sobre esse conteúdo para termos elementos que nos possibilitem discutir a proposta de ensino apresentada pelos livros didáticos.

Sem o intuito de discorrer longamente sobre a Teoria dos Campos Conceituais, mas buscando compreender as estruturas aditivas, faz-se necessária a exposição breve de alguns conceitos dessa teoria. Para tanto, cabe ressaltar de antemão que Gérard Vergnaud é discípulo de Jean Piaget, e a teoria em discussão tem como objetivo analisar a formação e o funcionamento dos conhecimentos, além de buscar subsidiar a compreensão das filiações - o apoio de novas competências sobre as antigas - e das rupturas - o abandono de antigas competências - entre os conhecimentos. Diferente de Piaget, que estudou as estruturas lógicas de maneira geral, Vergnaud faz considerações especialmente sobre os conteúdos e o contexto escolar.

Vergnaud retoma da teoria de Piaget o conceito de esquema como “uma organização invariante da atividade para uma classe de situações dadas” (VERGNAUD, 2009b, p.21). Para ele são os esquemas que organizam o comportamento do sujeito frente a determinadas circunstâncias. Para ilustrar, tomemos como exemplo o esquema da contagem, que é de suma importância no início da compreensão e resolução das operações de adição e subtração:

A competência que consiste em contar corretamente uma coleção supõe o reconhecimento de unidades distintas (cada objeto da coleção), a correspondência destas unidades com unidades perceptivo-motoras (olhos e mão), elas mesmas em correspondência com unidades verbais (a sequência de palavras-números). É necessário, por outro lado, que seja reconhecido o fato de que a última palavra-número pronunciada designa não somente o último objeto (no plano ordinal), mas também o cardinal da coleção (princípio da cardinalização); e é necessário também que o caráter exaustivo e sem repetição da contagem seja assegurado pelos procedimentos de explorações espaciais organizadas e confiáveis. A contagem é evidentemente um esquema complexo [...]. (VERGNAUD, p. 4 - 5, 1985, tradução de Franchi e Carvalho)

Cabe ressaltar que nem todo esquema inicialmente mobilizado pela criança para resolver um dado problema é eficaz, o que a faz mudar de esquema ou modificá-lo. A contagem, como técnica para se obter a soma de elementos de conjuntos, pode ilustrar bem essa situação: ao se depararem com conjuntos que contém muitos elementos as crianças sentirão dificuldades em enumerá-los por meio da técnica de contagem, em consequência buscarão uma estratégia mais “apropriada”, como, a ideia de reagrupar os elementos. É nesse sentido que o esquema de contagem é modificado.

Para que possamos compreender um campo conceitual, em especial, o campo conceitual das estruturas aditivas, é preciso definir o que vem a ser um conceito segundo a Teoria dos Campos Conceituais, o que requer considerar três conjuntos:

S conjunto de situações que dão sentido ao conceito
I conjunto de invariantes operatórios que estruturam as formas de organização da atividade (esquemas) suscetíveis de serem evocados por essas situações
L conjunto das representações linguísticas e simbólicas [...] que permitem representar os conceitos e suas relações, e, conseqüentemente, as situações e os esquemas que elas evocam. (VERGNAUD, 2009b, p.29)

Um conceito consiste na terna desses três conjuntos (S, I, L). Dessa maneira, o conceito de adição, por exemplo, não pode se resumir à definição do que vem a ser a operação de adição, principalmente quando se pensa na aprendizagem desse conceito. É preciso, portanto, que o ensino se preocupe com as situações relacionadas, de algum modo, a esses conceitos; com os esquemas que tornam possíveis *operá-los* e com as diferentes representações que são mobilizadas nessas situações (VERGNAUD, 1990).

Cabe apontar ainda que um conceito remete a muitas situações e em uma situação estão presentes diferentes conceitos (VERGNAUD, 1985). A noção de situação, na Teoria dos Campo Conceituais, tem o sentido de tarefa e considera-se “que toda situação complexa pode ser analisada como uma combinação de tarefas” (VERGNAUD, 1990, p. 146, tradução nossa). Reiterando, “a definição pragmática de um conceito recorre, portanto, ao conjunto das situações que constituem a referência de suas diversas propriedades e ao conjunto dos esquemas utilizados pelos sujeitos nessas situações” (VERGNAUD, 1990 p. 144, tradução nossa).

Frente ao que foi delineado, define-se um campo conceitual como sendo,

[...] ao mesmo tempo um conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações. (VERGNAUD, 2009b, p.29)

Com o intuito de compreender o desenvolvimento e a aprendizagem de determinado conceito, Vergnaud (2009b) afirma que devemos considerar o seu campo conceitual, pois “[...] o desenvolvimento dos conhecimentos de uma criança se faz por meio de um conjunto relativamente vasto de situações entre as quais existe “parentesco” (analogias, contrastes, variações...)” (VERGNAUD, 1985, p. 9 – 10, tradução de Franchi e Carvalho).

Existe um sentido lógico no vínculo do ensino das operações de adição e subtração que se baseia “no fato de que elas compõem uma mesma família, ou seja, [que] há estreitas conexões entre situações aditivas e subtrativas.” (BRASIL, 1997, p.

104). Como apontam os PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997), é possível observar a aplicação de procedimentos aditivos ou subtrativos em uma única situação problema, a depender da estratégia do aluno. Ademais, em relação ao cálculo, tais operações também possuem aspectos bastante semelhantes, o que fundamenta a estruturação de um campo conceitual que contemple situações que envolvam essas operações: o campo conceitual das estruturas aditivas. E são essas as razões que tornam importante o estudo e a pesquisa de tais operações em conjunto.

É conveniente ressaltar, no entanto, que nem sempre o ensino dessas operações esteve vinculado, como é proposto atualmente (BRASIL, 1997). Nunes et al. (2009) observam no livro “Matemática no Curso Primário: Sugestões para a organização e desenvolvimento de programas (Estudo Preliminar)”, publicado em 1952 pelo INEP - Instituto Nacional de Estudos Pedagógicos, a proposta de ensino das quatro operações. Os livros didáticos dessa época inevitavelmente estavam voltados a esses paradigmas de ensino.

Quanto às operações, o trabalho era apoiado nas técnicas operatórias e na simples memorização de resultados. O conceito de operação e suas propriedades não eram enfatizados. Por exemplo, a ideia de adição é ensinada de modo independente da ideia de subtração, embora a proposta indique ser vantajoso memorizar as adições e as subtrações ao mesmo tempo. (NUNES et al, 2009, p.37 – 38).

Via-se os problemas sendo apresentados nos livros didáticos apenas no final das unidades, com a proposta de expô-los para a prática da aplicação das técnicas operatórias e sem a preocupação de justificá-las. A técnica operatória era tratada como objeto de estudo e não como instrumento simbólico de resolução possível de ser empregado em diferentes situações (NUNES et al, 2009).

Ainda segundo Nunes et al (2009), a partir de meados de 1970 a preocupação com a compreensão das ideias envolvidas nos conceitos e propriedades das operações passou a tomar conta do quadro educacional brasileiro. Os questionamentos Piagetianos, assim como em outros países, passaram a provocar discussões sobre o que deve ser ensinado. E a partir da década de 1980, novas perspectivas sobre o ensino e a aprendizagem de diversos conceitos, entre eles, os das operações, passaram a permear as diretrizes curriculares brasileiras, que até hoje se fundamentam nessas ideias, das quais também compartilhamos.

A análise de livros didáticos necessita de um estudo das especificidades do saber matemático investigado para que possamos construir elementos de discussão acerca do

ensino proposto nos livros didáticos. Desse modo, apresentamos, a seguir, um estudo do ponto de vista cognitivo, baseado na Teoria dos Campos Conceituais, sobre situações de adição e subtração

1.2 UM ESTUDO SOBRE SITUAÇÕES DO CAMPO ADITIVO

Para que possamos refletir sobre o ensino e a aprendizagem de conceitos relativos às operações de adição e subtração é fundamental que não desconsideremos certos rudimentos que os alunos concebem antes mesmo de irem à escola e que provavelmente não consigam explicitar, como, a ideia de que o todo é a soma das partes.

Os esquemas em ação a partir dos quais a criança começa a compreender a adição e a subtração são representações das ações de juntar e retirar, respectivamente. Esses esquemas permitem à criança resolver, de modo prático, questões sobre adição e subtração. [...] Esse conhecimento formado a partir da experiência cotidiana é a base sobre a qual o ensino de matemática deve ser construído. (NUNES et al, 2009, p. 46 - 47).

Todavia, há esquemas referentes às ideias de transformar e comparar, por exemplo, que são próprios das estruturas aditivas que podem não ser criados espontaneamente pela criança. Para que haja construção dessas ideias é preciso um envolvimento do aprendiz em situações que exijam dele essa construção. É papel do ensino propiciar essa multiplicidade de significados das estruturas aditivas.

Vergnaud (1990, 2009a) classifica, por meio de considerações psicológicas e matemáticas, seis relações que contemplam os possíveis problemas de adição e subtração, e as chama de “Relações Aditivas de Base”, representadas na figura 1.

Estruturas Aditivas de Base

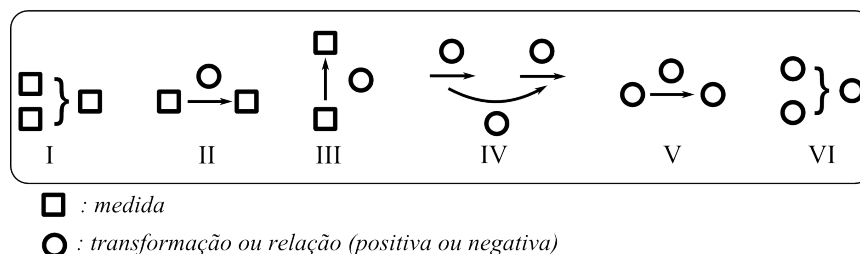


Figura 1: Representações das Categorias das Estruturas Aditivas de Base.

Fonte 1: Esta imagem é uma reprodução feita das imagens expostas em Vergnaud (1990, p. 152).

Para entendermos essas seis relações aditivas de base, faz-se necessário definir os significados das simbologias utilizadas, apresentados em Vergnaud (1990, p. 201), embora esses ganhem realmente sentido no decorrer desse capítulo.

- O quadrado indica um número natural;
- O círculo indica um número relativo;
- A chave vertical e a flecha curvilínea horizontal indicam a composição de elementos de mesma natureza;
- A flecha vertical e a flecha curvilínea horizontal indicam uma transformação ou uma relação, quer dizer, a composição de elementos de natureza diferente.

O quadrado representa as medidas, e ao se falar de medidas estamos falando dos números naturais, os quais, segundo Vergnaud (2009a), são números sem sinal, ou seja, não são positivos e nem negativos. Já o círculo representa um número relativo, ou seja, um número atribuído de sinal. “Esses números representam adequadamente as transformações aditivas (adições e subtrações) que podem ser aplicadas à medida de um conjunto de objetos isoláveis, acrescentando elementos a este conjunto ou deles os retirando” (VERGNAUD, 2009a, p. 199). Os círculos, que são números relativos, além de representarem as transformações, também servem para designar as relações, ou em outras palavras, os estados relativos. O que diferencia as transformações dos estados relativos é que as transformações são dinâmicas “pela sua natureza de proporcionar uma mudança de estado, um movimento” (SANTANA, 2012, p. 56), e os estados relativos possuem uma característica estática.

As seis categorias ilustradas na Figura 1 serão discutidas, a seguir, a fim de abarcar as diferentes situações contextualizadas³ presentes no campo aditivo, possíveis de serem encontradas em nossa análise de livros didáticos. Essas discussões estão pautadas nos estudos de Vergnaud (2009a), Magina et al. (2001), Nunes et al. (2009) e Santana (2012).

Magina et al. (2001) ao analisarem os problemas de composição, transformação e comparação, respectivamente, da 1ª, 2ª e 3ª categoria, elencam cinco classes de situações-problema, pertencentes à essas categorias, dependendo dos conceitos aditivos abordados.

³ Estamos considerando como situações contextualizadas aquelas relacionadas a um contexto extra-matemático.

	Tipo de situação-problema		
	Composição	Transformação	Comparação
Protótipo	<p>Todo desconhecido</p>	<p>Estado Final Desconhecido</p>	
1ª extensão	<p>Parte desconhecido (Problema com inversão)</p>	<p>Transformação desconhecida</p>	
2ª extensão			<p>Referido Desconhecido</p>
3ª extensão			<p>Relação Desconhecida</p>
4ª extensão (inversão)		<p>Estado Inicial Desconhecido (problema com inversão)</p>	<p>Referente Desconhecido (problema com inversão)</p>

Figura 2: Categorias propostas por Magina et al. (2001).
 Fonte 2: Magina et al (2001, p. 60)

As primeiras ideias de adição e de subtração nascem para as crianças, por meio da própria experiência no dia-a-dia. Situações como essas são denominadas por MAGINA et al. (2001) como do tipo protótipo e é a partir delas que o ensino deve propor a introdução do estudo do campo aditivo, para então, poder explorar as demais situações, nomeadas de extensões (MAGINA et al., 2001). As extensões em ordem crescente ordenam as diferentes situações referentes às três primeiras categorias classificadas por Vergnaud (1990, 2009a) conforme a complexidade das situações: quanto maior for o nível de extensão mais difíceis podem ser considerados os problemas. Por exemplo, a quarta extensão é composta por problemas que mobilizam a ideia da operação inversa da que é colocada em jogo na situação, o que normalmente se mostra como um fator de grande dificuldade para as crianças, como evidenciado pela pesquisa de NUNES et al. (2009).

Geralmente esta extensão não ocorre de maneira espontânea. Isto significa que ela deve ser trabalhada sistematicamente em sala de aula, para permitir o desenvolvimento dos alunos neste campo conceitual. Ao contrário das situações protótipos, agora as crianças precisam ser desafiadas com tais tipos de situações-problema, para que possam estender seus conhecimentos sobre as estruturas aditivas. (MAGINA et al., 2001, p. 37)

Essa classificação proposta por Magina et al. (2001) estará presente em algumas das discussões trazidas adiante sobre as categorias aditivas de base, em especial, as três primeiras. No entanto, é importante destacar que apesar de refletirmos sobre os níveis de dificuldades concernentes à essas categorias, a análise que propomos a seguir deve ser reconsiderada diante da facilidade ou dificuldade dos cálculos envolvidos, da ordem como as informações são apresentadas nos problemas, dos tipos de números (natural, inteiro, decimal) e de seus significados (dinheiro, metros, bolinhas de gude) (VERNAUD, 2009a).

Propusemo-nos a discutir as diferentes situações referentes às seis categorias concentrando a atenção apenas nos números naturais, por ser esse o nosso foco de investigação. No entanto, durante essa discussão faremos menção aos números inteiros por analisarmos um modelo matemático que exige a mobilização desse conceito. Os modelos matemáticos apresentados em cada categoria não são necessariamente algoritmos de resolução.

I – Primeira categoria: composição de duas ou mais medidas.

A primeira categoria contempla os problemas em que está presente a ideia de composição de duas medidas resultando em uma terceira medida, ou ainda, a ideia de parte-todo. A seguir apresentamos alguns problemas que ilustram essa categoria, bem como suas representações propostas por Vergnaud (1990, 2009a):

1. Há 5 meninas e 3 meninos sentados em volta de uma mesa. Quantas crianças estão sentadas em volta da mesa?

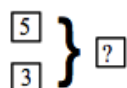


Figura 3: Representação do problema 1 referente à Categoria I

No problema 1 o objetivo é encontrar a medida resultante da união de duas coleções, a de meninas e a de meninos. Nesse sentido, pode-se pedir a soma de mais

que duas coleções, como por exemplo, a união de bolinhas azuis, vermelhas e verdes. E dessa maneira a representação é estendida:

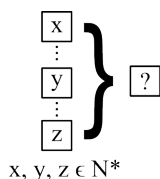


Figura 4: Extensão da representação de situações de composição de medidas.

Situações como essas, segundo Magina et al. (2001), são do tipo protótipo, pois,

São problemas que a maioria das crianças bem novas (crianças com 6 ou mesmo 5 anos) já não apresenta dificuldade em resolver, porque o procedimento requisitado – de juntar as partes para achar o todo – é justamente a primeira situação de adição que a criança compreende, isto é, a primeira representação de adição que ela forma, e sua resolução, em geral, está associada ao processo de contagem. (MAGINA et al., 2001, p. 34)

No entanto, há situações que mobilizam essas mesmas ideias e que se mostram mais complexas:

2. Existe um caminho em que a casa de Pedro está entre a de João e a casa de Lucas. A casa de João está a 5 km de distância da casa de Pedro, que por sua vez está a 8 km de distância da casa de Lucas. Fazendo esse mesmo trajeto, quantos quilômetros João tem que andar para chegar à casa de Lucas?

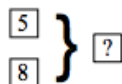


Figura 5: Representação do problema 2 referente à Categoria I

Nota-se a semelhança das situações 1 e 2 quanto à sua representação, porém, é importante atentarmos para a diferença dos significados dos números expostos nesses dois problemas. No primeiro os números representam crianças e no segundo representam distâncias. Por meio de uma pesquisa realizada com alunos dos anos iniciais⁴ de escolas públicas de São Paulo, Nunes et al (2009) mostram que essa diferença resulta em uma variação considerável ao comparar a quantidade de acertos de problemas análogos ao 1 e ao 2. O problema 1 possui um índice de acerto superior a 80% desde o primeiro ano dos anos iniciais. Já o problema 2 não ultrapassa o percentual de 50%, inclusive no último ano dos anos iniciais. No âmbito do nosso trabalho essas diferenças não poderão ser consideradas, em virtude do espaço de tempo destinado à

⁴ O regime vigente na época era de 4 anos escolares para os anos iniciais.

pesquisa. Nos restringimos a investigar a presença desses tipos de situações nos livros didáticos, as quais chamaremos adiante de tipos de tarefas, sem nos importar quanto às variações internas possíveis de serem suscitadas. Todavia, há outro tipo de problema possível de ser explorado nessa categoria e que consideraremos em nossa análise. Para ilustrá-lo, tomemos o problema 3:

3. Hoje na escola 3 colegas da classe não foram uniformizados. Sabendo que a classe tem 25 alunos, quantos alunos estavam de uniforme?

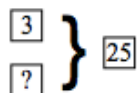


Figura 6: Representação do problema 3 referente à Categoria I

O problema 3 é considerado por Magina et al. (2001) como sendo de 1ª extensão. Problemas como esse se tornam mais difíceis que o primeiro, por exemplo, pelo fato de ele não pedir o resultado da composição das duas medidas em jogo. Portanto, a ideia de “juntar”, natural e oriunda do conceito de composição, não é empregada, embora ainda seja um problema de composição. A diferença entre esses dois tipos de situações pode ser observada também ao notarmos que os problemas 1 e 2 evocam a ideia da adição e os do tipo 3 a ideia da subtração, ou ainda, segundo Mandarino (2011), as ideias, respectivamente, de juntar e de completar, próprias dessas operações.

II – Segunda categoria: uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida.

Nos problemas que constituem a segunda categoria está presente uma ideia temporal de, por exemplo, ganho e perda, que é a transformação que ocorre em uma determinada medida (estado inicial) para resultar em uma outra medida (estado final). Em problemas desse tipo é possível que se peça o estado inicial, o estado final ou a transformação ocorrida. Para ilustrar tomemos os seguintes problemas e suas representações:

4. João acaba de ganhar de presente 6 bolitas de seu avô e agora possui ao todo 15 bolitas. Quantas bolitas tinha João antes de ganhar o presente de seu avô?



Figura 7: Representação do problema 1 referente à Categoria II

Os problemas do tipo 4 possuem um caráter complexo por mobilizarem, em suas resoluções, a ideia inversa da transformação indicada no enunciado, e é por isso que são classificados como de 4ª extensão, o nível que pode ser visto como o de maior complexidade segundo a categorização feita por Magina et al (2001). Podemos observar no problema 4 que o acréscimo de 6 bolitas em uma quantidade desconhecida fez resultar 15 bolitas, portanto, o “decréscimo” de 6 bolitas no total de bolitas ($15 - 6$) levará a encontrar a quantidade desconhecida, ou seja, apesar de o problema expor uma situação de acréscimo, a sua resolução evoca a ideia inversa, a de decréscimo. Embora haja, segundo Vergnaud (2009a), procedimentos alternativos que não promovem a mobilização da operação inversa em jogo, como o de “completamento” - somar de um em um partindo de um primeiro valor até atingir um segundo valor - e o de “estado inicial hipotético” - formulação e correções de um suposto candidato a estado inicial, cabe apontar que tais estratégias possuem um baixo alcance, podendo ser utilizadas com eficácia apenas em situações com números “pequenos” ou que propiciem a estimativa. Os esquemas que ilustram a estratégia de utilizar a operação inversa é proposto por Magina et al (2001, p. 55):

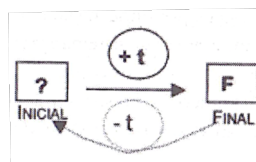


Figura 8: Representação do esquema da operação inversa - transformação positiva
 Fonte 3: Magina et al (2001, p. 55)

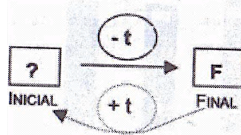


Figura 9: Representação do esquema da operação inversa - transformação negativa
 Fonte 4: Magina et al (2001, p. 55)

Problemas semelhantes ao tipo 4 se mostram sensivelmente mais difíceis pela pesquisa mostrada por Nunes et al (2009) ao comparar com problemas do tipo 5:

5. João tinha 9 bolitas e ganhou 6 bolitas de seu avô. Quantas bolitas João tem agora?

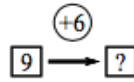


Figura 10: Representação do problema 2 referente à Categoria II

Os problemas como os do tipo 5 demandam a aplicação direta da transformação em jogo no problema: João tem 9 bolitas ganhou 6 bolitas de seu avô, então, João tem “9 + 6” bolitas, ou seja, 15 bolitas. Nesse caso, o ganho representa de fato que é uma “continha de mais”, facilitando o entendimento - ou o acerto - do problema. Esses são problemas prototípicos (MAGINA et al., 2001).

Outra situação, também presente nessa categoria, pode ser ilustrada pelo problema 6:

6. João tem 9 bolitas e ganhou de presente de seu avô algumas bolitas, ficando ao todo com 15 bolitas. Quantas bolitas João ganhou de seu avô?

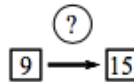


Figura 11: Representação do problema 3 referente à Categoria II

Problemas como esses são classificados como de 1ª extensão (MAGINA et al., 2001). Embora eles possam também ser resolvidos por “completamento”, é importante que a criança elabore o procedimento da diferença entre o estado final e o estado inicial (no qual há uma transformação positiva) ou da diferença entre o estado inicial e o estado final (em que há uma transformação negativa).

III – Terceira categoria: relação de comparação entre duas medidas.

A terceira categoria contempla os problemas que fazem uma comparação entre duas medidas de modo a não considerar as ideias temporais presentes na categoria anterior. Essa questão estática dificulta o raciocínio sobre a operação a ser realizada para responder dada situação (NUNES et al., 2009).

A importância da diferença entre situações que envolvem mudanças na quantidade e aquelas que não envolvem, para o desempenho dos alunos, pode ser testada de uma forma muito simples. Em vez de perguntarmos aos alunos “quantos alunos há a mais do que cadeiras”, podemos perguntar-lhes “quantas cadeiras temos de buscar para que todos os alunos possam sentar-se”. Essa segunda forma de fazer a pergunta transforma uma questão estática em uma questão dinâmica: ao trazermos cadeiras estamos modificando a quantidade de cadeiras. Quando fizemos a pergunta dessa forma, os percentuais de acerto em todas as séries mudaram radicalmente [...]. (NUNES et al., 2009, p. 54)

Na classificação proposta por Magina et al. (2001) as situações-problema dessa categoria perpassam três diferentes extensões, indo da 2ª à 4ª. A informação desconhecida do problema é o que o torna mais ou menos complexo; para ilustrar tomemos os problemas que seguem e suas devidas discussões.

7. Carol tem 5 anos a mais que o seu irmãozinho de 3 anos. Quantos anos tem Carol?

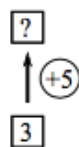


Figura 12: Representação do problema 1 referente à Categoria III

Nesse problema a criança deve encontrar a idade de Carol por meio da idade do seu irmão, sabendo a relação que existe entre as duas idades. Segundo a nomenclatura utilizada por Magina et al (2001), a idade de Carol é o referido, enquanto a idade do seu irmão é o referente, isto é, o referido é indicado por meio de uma relação envolvendo a medida de referência.

Outra situação concernente a essa categoria pode ser exemplificada pelo problema a seguir:

8. Carol tem 8 anos e o seu irmãozinho tem 3. Quantos anos o irmãozinho de Carol tem a menos que ela?

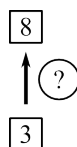


Figura 13: Representação do problema 2 referente à Categoria III

No problema 8 a informação a ser encontrada não é uma medida, isto é, não é o referido nem o referente, mas a relação envolvida entre eles. Situações como essas são classificadas por Magina et al (2001) como de terceira extensão, enquanto as do problema 1 são de segunda extensão.

A seguir apresentamos o problema, que segundo Magina et al (2001), são de 4ª extensão, isto é, são situações com um nível de complexidade alto:

9. Carol tem 5 anos a mais que seu irmãozinho. Sabendo que Carol tem 8 anos, quantos anos tem seu irmãozinho?

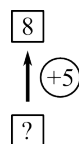


Figura 14: Representação do problema 3 referente à Categoria III

No problema 9 sabe-se que Carol tem 5 anos a mais que o seu irmão, mas não se sabe a idade do irmão, e sim de Carol, o referido. Isto é, a medida de referência, que é a idade do irmão, é a informação a ser encontrada.

Reiterando, essa categoria gera três tipos de problemas conforme o que se busca: a medida referida, a relação entre as medidas ou a medida de referência.

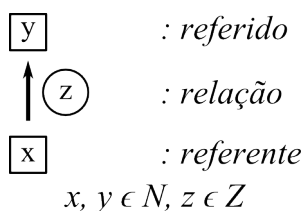


Figura 15: Representação detalhada da Categoria III
 Fonte 5: Esta imagem foi inspirada em Magina et al. (2001, p. 50)

IV – Quarta categoria: composição de duas ou mais transformações.

Os problemas presentes na quarta categoria podem ser divididos em situações que exigem a composta de transformações, que por sua vez também será uma transformação; ou que exigem a descoberta de uma transformação que se compõe com uma ou mais transformações para resultar em uma terceira transformação. Para exemplificar tomemos os problemas que seguem e suas representações:

- Paulo jogou duas partidas de bolinhas de gude. Na primeira partida ganhou 4 bolinhas. Na segunda perdeu 5. O que aconteceu, Paulo ganhou ou perdeu bolinhas de gude ao final dessas duas partidas? Quantas?

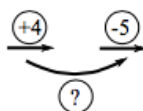


Figura 16: Representação do problema 1 referente à Categoria IV

No problema 10 há duas transformações acontecendo, o ganho e a perda da primeira e segunda partida, respectivamente. Nessa situação não há o interesse em saber quantas bolinhas Paulo ficou no final do jogo, nem quantas tinha no início, isto é, o estado inicial e o estado final não são explorados nessa circunstância. O que deseja-se

saber é o valor resultante da união dessas duas transformações e, para tanto, é importante observar que o aluno, em especial o dos anos iniciais, ao realizar esse problema, por exemplo, não fará conta “ $+4 - 5$ ”. Ele terá que considerar se, ao final das partidas, houve ganho ou perda de bolinhas de gude, e o valor correspondente a essa situação.

Se invertermos os valores no problema 10, de modo que na primeira partida Paulo tivesse perdido 5 bolinhas e na segunda ganho 4, então, provavelmente a expressão matemática natural de ser explicitada seria “ $-5 + 4$ ”, e não “ $+4 - 5$ ”, embora ambas estejam corretas. Reconhecemos que a ordem dos valores acarreta em expressões distintas, e do ponto de vista cognitivo, resolver esses dois cálculos é sensivelmente diferente. No entanto, não iremos levar em consideração essas diferentes circunstâncias pelo mesmo argumento já apresentado: o aluno dos anos iniciais não resolverá tais cálculos; ele terá que analisar de maneira “global” o problema para descobrir se houve perda ou ganho e o seu respectivo valor. Reiterando, o aluno não encontrará, como no problema 10, a resposta “-1”, e sim que houve a perda de uma bolinha.

Acreditamos que estudos de problemas como esses podem auxiliar na construção futura das ideias que envolvem operações de adição e subtração com números inteiros.

A ideia de composição de transformações pode ser trabalhada em outro tipo de situação, tal como:

11. Paulo jogou duas partidas de bolinha de gude. Na primeira partida ele ganhou 7 bolinhas. Ele jogou a segunda partida e fazendo as contas das duas partidas, ele viu que perdeu ao todo 2 bolinhas. O que ocorreu na segunda partida?

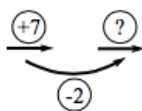


Figura 17: Representação do problema 2 referente à Categoria IV

As discussões realizadas no problema anterior são válidas também nessa situação, considerando que para resolvê-la não se invoca ideias como “qual número somado com 7 resulta em (-2)?”, ao menos nos anos iniciais, pois, afinal, os números inteiros não são trabalhados nesse nível escolar. Nesse sentido, algumas outras ideias/estratégias podem ser mobilizadas: se houve perda no final das duas partidas, então, perdeu-se mais do que ganhou; se na primeira partida teve ganho, então, é na

segunda partida que se perdeu as bolinhas; dessa forma, deve-se descobrir quantas bolinhas foram perdidas na segunda partida; se na segunda partida fossem perdidas 2 bolinhas, por exemplo, não haveria perda ao final dos jogos, então foi mais que 2 bolinhas... E se fosse sete? Precisa ser mais que 7? Quanto?...

Consideramos o problema 2 sensivelmente mais difícil que o problema 1, no mesmo sentido que os problemas de composição de medidas, relativos à categoria I, tornam-se mais complexos quando o que está em jogo não é a composição das medidas e sim uma das medidas que constitui essa composição.

V – Quinta categoria: transformação de um estado relativo (relação).

A quinta categoria apresenta os casos em que uma transformação “transforma” um estado relativo, resultando em um outro estado relativo. É importante lembrar que tanto os estados relativos quanto as transformações são representados pelos números inteiros, o que os diferencia é a ideia estática e dinâmica, presente em cada um deles, respectivamente.

Observemos o problema 12:

12. Pedro devia 3 reais na cantina da escola e ganhou de sua mãe uma nota de 5 reais para pagar a dívida. Após quitar a dívida quanto dinheiro sobrou?

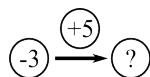


Figura 18: Representação do problema 1 referente à Categoria V.

No problema 12, há um estado inicial, a dívida de 3 reais, uma transformação, o ganho de 5 reais, e o estado final, que pode ser uma dívida ou não. Nesse sentido, o estado inicial e o final são relações, ou ainda, estados relativos, enquanto o ganho de 5 reais é a transformação provocada no estado inicial.

A diferença entre os problemas dessa categoria e os da categoria II é o tipo de número que está sendo “transformado”: na categoria II o trabalho é feito com medidas, ou seja, números naturais, e nessa categoria a transformação acontecerá sobre os números inteiros, por estarmos lidando com estados relativos.

O jogo que acontece nas demais categorias até aqui discutidas que faz engendrar diferentes problemas de diferentes níveis a depender do que se pede, ou ainda, do que se “esconde”, também está presente nessa categoria. Pode-se ter três tipos de problemas pertencentes a essa categoria: os que escondem a transformação, os que escondem o

estado inicial, ou aqueles como o problema 1, em que deve-se encontrar o estado final. Para ilustrar essas situações, apresentamos os seguintes problemas:

13. Pedro devia 3 reais na cantina da escola e ganhou de sua mãe uma quantia em dinheiro para pagar a dívida. Após pagar a cantina Pedro ainda ficou com 2 reais. Quantos reais a mãe de Pedro deu a ele?

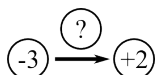


Figura 19: Representação do problema 2 referente à Categoria V.

14. Pedro devia a cantina da escola e ganhou de sua mãe 5 reais para pagar a dívida. Após quitar essa dívida Pedro ainda ficou com 2 reais. Qual era o valor da dívida?

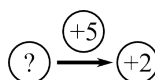


Figura 20: Representação do problema 3 referente à Categoria V.

No problema 13 o que se pede para ser encontrado é a transformação, já no problema 14 é o estado inicial. Na mesma perspectiva analisada na categoria II, em que são discutidas as transformações de medidas sob a ótica da análise de Magina et al (2001), acreditamos que os problemas do tipo 12 são menos complexos que os do tipo 13, que por sua vez, também são menos complexos que os do tipo 14.

VI – Sexta categoria: composição de dois ou mais estados relativos (relações)

Na sexta categoria é trabalhada a composição de estados relativos, isto é, de relações estáticas.

Tomemos um exemplo para ilustrar:

15. João deve 5 reais para Pedro e 2 reais para Ana. Ao todo, quantos reais João deve?

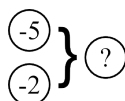


Figura 21: Representação do problema 1 referente à Categoria VI.

No problema 15 há a união/composição de duas dívidas, isto é, de dois estados relativos e não uma transformação.

Nessa categoria podem haver problemas que demandam o estado relativo resultante da composição de dois ou mais estados relativos, como o problema 15, ou

aqueles que demandam um dos estados relativos que se compõe com um ou mais estados relativos, como o seguinte:

16. João tem duas dívidas que totalizam uma quantia de 7 reais. Uma das dívidas é de 5 reais. Qual o valor da segunda dívida?

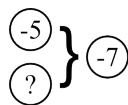


Figura 22: Representação do problema 2 referente à Categoria VI.

A diferença dessa categoria para a IV, na qual é trabalhada a composição de transformações, é que nessa categoria o trabalho é voltado para os números inteiros que representam estados estáticos, e não dinâmicos.

A seguir fazemos uma síntese das possíveis situações presentes nas seis categorias.

1.3 SÍNTESE DAS SITUAÇÕES “CONTEXTUALIZADAS” DO CAMPO ADITIVO

O estudo apresentado nesse texto restringiu-se às situações que relacionam três elementos, isto é, às relações ternárias (VERGNAUD, 2009a). Porém, assim como sugere Santana (2012), podemos nos referir às situações como sendo n-nárias – com mais de três elementos – visto que tais ideias são conservadas também nessas circunstâncias. Por isso, em particular para as categorias que abordam a ideia de composição, podemos nos referir como sendo a composição de duas ou mais medidas, duas ou mais relações, ou ainda, duas ou mais transformações.

As seis categorias das estruturas aditivas de base (VERGNAUD, 1990, 2009a) são concebidas a partir de três ideias, ou ainda, de três tipos de situações, as quais chamamos de elementares, são elas: de composição, de transformação e de comparação. As situações elementares são decompostas em outras situações dependendo do tipo de número que é trabalhado. Por exemplo, a primeira situação elementar é decomposta em situações de composição de medidas, de composição de relações e de composição de transformações. A segunda situação elementar é constituída de situações de transformações de medidas e de relações. Já a terceira situação elementar é apenas relativa à comparação de medidas. Desse modo, tem-se o seguinte quadro síntese:

Quadro 1: Síntese dos tipos de situações das Estruturas Aditivas de Base

Categorias / Situações elementares	Composição	Transformação	Comparação
I	Medidas		
II		Medidas	
III			Medidas
IV	Transformações		
V		Relações	
VI	Relações		

A seguir, de maneira sumária, apresentamos os enunciados dos tipos de situações presentes em cada categoria. Para tanto, a cada categoria, são expostas as situações que a compõem e em sequência são apresentados os seus esquemas na ordem como foram exibidas, de modo que o quadrado ou o círculo preenchido representem o dado que se busca no problema.

I – Primeira categoria: composição de duas ou mais medidas.

- Encontrar o resultado da composição de duas ou mais medidas;
- Encontrar uma medida que se compõe com outra(s) medida(s) conhecida(s), sabendo o valor resultante da composição.



Figura 23: Representações dos tipos de tarefas referentes à Categoria I

II – Segunda categoria: uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida.

- Encontrar o estado inicial (medida) que foi transformado e resultou em um estado final (medida) conhecido;
- Encontrar o estado final (medida) resultante da transformação de um estado inicial (medida) conhecido;
- Encontrar a transformação ocorrida sobre um estado inicial (medida) para resultar em um estado final (medida).

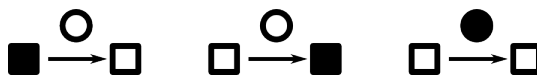


Figura 24: Representações dos tipos de tarefas referentes à Categoria II

III – Terceira categoria: relação de comparação entre duas medidas.

- Encontrar o “referido” de uma comparação de medidas.
- Encontrar a relação de comparação entre duas medidas.
- Encontrar o “referente” de uma comparação de medidas.

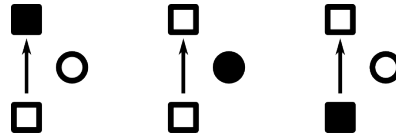


Figura 25: Representações dos tipos de tarefas referentes à Categoria III.

IV – Quarta categoria: composição de duas ou mais transformações.

- Encontrar uma transformação que se compõe com uma ou mais transformações para resultar em uma terceira transformação;
- Encontrar a transformação resultante da composição de duas ou mais transformações.

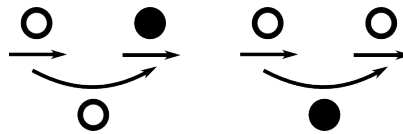


Figura 26: Representações dos tipos de tarefas referentes à Categoria IV

V – Quinta categoria: transformação de um estado relativo (relação).

- Encontrar o estado inicial (relação) que foi transformado e resultou em um estado final (relação) conhecido;
- Encontrar o estado final (relação) resultante da transformação de um estado inicial (relação) conhecido;
- Encontrar a transformação ocorrida sobre um estado inicial (relação) para resultar em um estado final (relação).

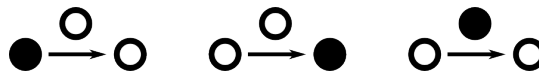


Figura 27: Representações dos tipos de tarefas referentes à Categoria V

VI – Sexta categoria: composição de dois ou mais estados relativos (relações).

- Encontrar o estado relativo resultante da composição de dois ou mais estados relativos;
- Encontrar um estado relativo que se compõe com um ou mais estados relativos para resultar em um terceiro estado relativo.



Figura 28: Representações dos tipos de tarefas referentes à Categoria V.

2 OBJETIVOS E TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

Neste capítulo expomos inicialmente os objetivos que norteiam nosso trabalho e, posteriormente, apresentamos algumas discussões acerca dos conceitos da Teoria Antropológica do Didático que são fundamentais em nossa investigação.

2.1 OBJETIVOS

O “Livro didático e [a] educação matemática⁵ parecem ser elementos indissociáveis” (VALENTE, 2008, p. 143), e é por isso, talvez, que o livro didático, em especial o de Matemática, é reconhecido como um recurso educacional importante. Nessa perspectiva, e frente ao cenário brasileiro atual - numeroso e abrangente - de distribuição de livros didáticos, acreditamos que a prática de analisá-los deve contribuir para a compreensão e reflexão da educação de nosso país.

Atualmente, contamos com as análises de livros didáticos ofertadas pelo Guia do Livro Didático que, diferente de buscar compreender o ensino, visa contribuir com o momento de escolha das coleções pelos professores. Desse modo, essas análises, embora sejam de extrema importância, possuem um caráter diferente daquele que acreditamos também ser fundamental para entendermos, com detalhes, o ensino de uma determinado saber. É na busca por esses detalhes sobre o ensino das operações de adição e subtração que traçamos nosso objetivos da maneira que segue:

Objetivo Geral: Caracterizar o ensino das operações de adição e subtração dos números naturais em uma coleção de livros didáticos aprovada pelo PNLD/2013.

Objetivos Específicos:

- Identificar e analisar algoritmos, conceitos e procedimentos presentes em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais, relativos às operações de adição e subtração de números naturais;
- Investigar escolhas didáticas de uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais, relativas ao ensino das operações de adição e subtração de números naturais.

⁵ Valente (2008) ao dizer “Educação Matemática” refere-se não ao campo de pesquisa, e sim, ao ensino, ao estudo e à aprendizagem da Matemática.

O ensino das operações de adição e subtração é privilegiado nos anos iniciais, e é por esse motivo que decidimos nos voltar para uma coleção de livros didáticos desse nível escolar. A coleção que analisamos contempla, portanto, os cinco primeiros anos escolares e foi escolhida a partir do Guia do Programa Nacional de Livros Didáticos do ano de 2013 (PNLD/2013), o mais recente dos anos iniciais. Por meio dos dados de vendas dos PNLD dos anos de 2010 e 2013⁶, pudemos notar uma discrepância nas vendas de algumas coleções, em especial da “Ápis” do autor Luiz Roberto Dante, que nessas duas edições foi a mais adotada pelas escolas públicas e por isso se fez alvo de nossa investigação.

A análise dos livros didáticos é realizada sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD) desenvolvida por Chevallard (1999, 2001, 2007). Esse autor considera que “toda atividade humana realizada regularmente pode ser descrita como um modelo único, que chamamos resumidamente pela palavra praxeologia” (1999, p.1, tradução nossa). A análise de uma praxeologia matemática se baseia no estudo da organização matemática e da organização didática. A organização matemática é o estudo em torno da Matemática; e a organização didática é o estudo do modo como são apresentados e estruturados os saberes matemáticos que compõem a praxeologia. Em consonância com o quadro teórico da TAD realizamos, seguindo a ordem exposta nos objetivos específicos, uma análise da organização matemática e da organização didática propostas em livros didáticos, o que significa, em resumo, investigar *o que é e como é* proposto o ensino das operações de adição e subtração dos números naturais.

A seguir buscamos discutir mais profundamente alguns dos conceitos da Teoria Antropológica do Didático importantes para o desenvolvimento da nossa pesquisa.

2.2 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO – TAD

2.2.1 Noção de Organização Praxeológica e Modelos de Organizações Didáticas

O conhecimento, na perspectiva antropológica proposta pela TAD, é fruto de alguma atividade humana. Desse modo, conhecimentos matemáticos advêm de atividades matemáticas.

Tanto o conhecimento como a atividade matemática são construções sociais que se realizam em instituições – em comunidade – , seguindo

⁶ O PNLD é realizado para cada nível escolar a cada 3 anos. Desse modo, os de 2010 e 2013 correspondem às duas avaliações mais recentes destinadas aos anos iniciais.

determinados contratos institucionais. Estudar as condições de produção e difusão do conhecimento matemático requer então que sejamos capazes de descrever e analisar determinados tipos de atividades humanas que se realizam em condições particulares [...] (CASABÒ, 2001, p. 15, tradução nossa).

Em nosso trabalho são as atividades matemáticas propostas pelos livros didáticos, no âmbito do estudo do campo aditivo, que nos interessa. Para descrever e analisar essa e qualquer prática matemática, a TAD nos proporciona “instrumentos claramente operatórios” (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 4, tradução nossa), que são resultados da construção de um modelo batizado de organização praxeológica, e para compreendê-lo nos voltemos aos seus componentes, *tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria*, que constituem a anatomia (CASABÒ, 2001) de toda atividade matemática. Para essa discussão, tomemos o primeiro postulado da teoria que diz:

[...] toda prática institucional pode ser analisada de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras por meio de um sistema de tarefas relativamente bem circunscritas que são realizadas no fluxo das práticas sociais. (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 5, tradução nossa)

Entende-se tarefas como situações a serem realizadas que são (re)construídas⁷ por uma certa instituição⁸. Em nosso trabalho preocupamo-nos com as tarefas presentes na proposta de ensino para as operações de adição e subtração com números naturais, que são as situações a serem resolvidas pelo aluno relativas à esse saber matemático. Em torno das tarefas (t), ou de tipos de tarefas (T)⁹, desenvolvidas em uma determinada instituição, nasce uma organização praxeológica (CHEVALLARD, 1998).

Frente às tarefas, busca-se maneiras de resolvê-las e é nesse sentido que surge o segundo postulado da TAD: “a realização de toda tarefa resulta da aplicação de uma técnica [τ]” que a resolve (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p.5, tradução nossa). Para ilustrar, voltamo-nos para uma das situações discutidas no capítulo anterior e que é provável de estar presente na instituição que estamos investigando, ou ainda, em toda

⁷ O prefixo “re” se deve ao conceito de transposição didática, também desenvolvido no âmbito da Teoria Antropológica do Didático. Embora não nos aprofundemos no assunto, cabe dizer que um saber sofre transformações (necessárias e inevitáveis) para que passe de uma instituição para outra. Para exemplificar, imaginemos a praxeologia proposta por um livro e aquela desenvolvida pelo professor em sala de aula com o uso desse livro: há uma transposição didática dos saberes presentes no livro para aqueles que o professor coloca em prática, o que resulta em praxeologias matemáticas diferentes. Leitura sobre transposição didática pode ser encontrada em Bosch e Chevallard (1999).

⁸ Chevallard (1992) considera instituições como sendo, por exemplo, “uma sala de aula”, ou “uma família”, ou seja, um local - não apenas no sentido físico - onde possa ser desenvolvida uma praxeologia. No nosso caso, estamos estudando a instituição “livros didáticos” e a praxeologia que queremos identificar é aquela relativa ao campo aditivo.

⁹ Considera-se t_i elemento de um conjunto T_j .

aquela que se dedica ao estudo das operações de adição e subtração: encontrar o resultado da composição de duas ou mais medidas. Tarefas como essa podem ser respondidas por diferentes maneiras. Uma técnica comumente empregada é o algoritmo usual¹⁰, mas, por exemplo, dependendo das circunstâncias a adição utilizando os dedos ou tampinhas de garrafas pode ser mais profícua, o que caracteriza uma maneira diferente de resolver a situação.

Reiterando, a técnica consiste em como fazer, responder, executar uma certa tarefa. No entanto, essas maneiras de fazer tendem a fracassar em algumas conjunturas, o que é denominado de alcance da técnica. Para exemplificar, retomemos o esquema de contagem exposto também no capítulo anterior: a técnica de unir os elementos de dois conjuntos e realizar a contagem de seus elementos a fim de saber a quantidade total é bastante eficaz quando se tem coleções com poucos elementos, caso contrário, a técnica de contagem não é econômica, favorecendo o erro. Nessa perspectiva é que podemos analisar a “vantagem” (abrangência) de uma técnica sobre uma outra. No entanto, é importante esclarecer que a depender da instituição que vive o tipo de tarefa, as técnicas praticáveis - e naturais de serem praticadas - podem ser diferentes, o que pode tornar complexa a comparação da potencialidade das técnicas ao considerar seus aspectos epistemológicos.

[...] em uma dada instituição *I*, a propósito de um dado tipo de tarefa *T*, existe, em geral, *uma só* técnica, ou ao menos *um pequeno número* de técnicas *institucionalmente reconhecidas*, com a exclusão de técnicas alternativas possíveis – que podem existir efetivamente, mas em outras instituições. Tal exclusão está correlacionada entre os atores de *I*, uma ilusão de “naturalidade” das técnicas institucionais em *I*, – fazer assim é natural – ao contrário do conjunto das possíveis técnicas alternativas, que os sujeitos de *I* ignoram, ou, se confrontados a elas, as olham como *artificiais*, e por isso, “questionáveis”, “inaceitáveis”, etc. Neste contexto, observam-se frequentemente entre os sujeitos de *I*, verdadeiras *paixões institucionais* pelas técnicas naturalizadas nessa instituição. (CHEVALLARD, 1998, p. 3, tradução nossa)

Ademais, em uma mesma instituição, dependendo da matemática até então construída, certas técnicas são mais adequadas que outras, e essas, em momento futuros, podem ser substituídas por aquelas que outrora não eram reconhecidas, mas que vivem melhor conforme a praxeologia evolui; como é o caso do uso dos dedos para efetuar adições e do algoritmo usual quando o trabalho passa a ser também realizado com

¹⁰ O algoritmo usual consiste em armar a operação na vertical respeitando o quadro valor de lugar e efetuar as adições da direita para a esquerda realizando os reagrupamentos de cada casa decimal.

números maiores que 20. Nesse cenário de evolução praxeológica vemos tarefas *problemáticas*, que carecem de trabalho intelectual e exploratório para serem resolvidas, se tornarem tarefas *rotineiras*, que não necessitam de esforços para serem resolvidas por possuírem técnicas bem adaptadas e, por vezes, mecanizadas. (CHEVALLARD, 1998). Nota-se que aprender algo novo está na ação de encontrar/construir técnicas para resolver tarefas *problemáticas*.

As técnicas, entretanto, só existem caso sejam compreensíveis e justificáveis pelos sujeitos que as praticam. Essas funções da técnica são atribuídas ao seu discurso tecnológico, a *tecnologia θ* , outro elemento da praxeologia que vem para responder questões como: o que me garante que a ação do “vai um” ou “empresta um” utilizado no algoritmo usual me leva à solução correta? Por que fazer assim dá certo? Quais os fundamentos matemáticos que legitimam a minha estratégia?

O discurso tecnológico pode variar dependendo da instituição em que estão sendo realizadas as tarefas. O discurso pode parecer “mais racional” a uma instituição que outra (CHEVALLARD, 1998). Há ainda, segundo Chevallard (1998), técnicas que possuem a característica de serem “autotecnológicas”, em que existe uma naturalidade institucionalmente aceita em praticar tal técnica, tornando sua justificativa desnecessária, por essa ser a “boa maneira” de fazer. Juntar os objetos de duas coleções e contá-los para saber a soma resultante da união dessas coleções pode exemplificar esse aspecto autoexplicativo, haja vista que evocar qualquer explicação para tal ação pode aparecer tolo, visto que “fazemos assim porque é assim que se faz, ó: queremos saber o total, juntamos tudo e contamos! É lógico que dá certo!”. Acreditamos que nos anos iniciais, por consequência da imaturidade matemática, discursos como esses podem acontecer com mais frequência que em níveis mais elevados de ensino.

Cabe dizer ainda que a tecnologia também possui a função de produzir novas técnicas (CHEVALLARD, 1998). Isto é, o próprio procedimento do “vai um”, por exemplo, nasce de elementos tecnológicos próprios do sistema de numeração decimal, como os agrupamentos de dez em dez.

“Por sua vez, a tecnologia de uma determinada técnica deve [também] parecer compreensível e justificável: a tecnologia denominada teoria” (CHEVALLARD, 1994, p. 1, tradução nossa). Tem-se então o último elemento da praxeologia, a *teoria θ* , que possui as mesmas funções da tecnologia θ , porém, com um aspecto mais abrangente. No entanto, a “justificação de uma dada tecnologia é, em muitas instituições, tratada pelo simples reenvio a outra instituição, real ou suposta, pensada como possuidora de

uma tal justificação” (CHEVALLARD, 1998, p. 4, tradução nossa), o que torna muitas vezes a teoria abstrata e desconectada das técnicas e tarefas. (CHEVALLARD, 1998). Esse aspecto também pode ser observado ao notarmos a pequena presença de elementos teóricos em níveis mais básicos de ensino, como nos anos iniciais¹¹.

Chevallard (1998) define, por meio dessas ideias, a praxeologia ou organização praxeológica como sendo o quarteto: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria, simbolizado por $[T, \tau, \theta, \Theta]$, que pode ser visto pela composição dos blocos prático-técnico $[T, \tau]$ e tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$.

Ao encontro com o que foi delineado até o momento sobre a noção de praxeologia, cabe discutir mais pontualmente o emprego dado a esse conceito em nossa pesquisa. Para tanto, discutiremos os conceitos de organização matemática e de organização didática.

A análise de uma praxeologia matemática, como já dito, se baseia no estudo da organização matemática e da organização didática de uma dada instituição. A organização matemática é o estudo em torno da Matemática, da identificação da praxeologia matemática, ou seja, é a investigação dos tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias propostas, em nosso caso. Já com a investigação da organização didática nos atemos ao modo como é construída e organizada a praxeologia matemática. Para analisar como uma organização didática apresenta uma organização matemática recorreremos, em nossa pesquisa, aos momentos didáticos ou momentos de estudo discutidos por Chevallard (1998).

Não podemos esperar que um processo de (re)construção de uma organização matemática seja realizada de maneira única. Mas percebemos, no entanto, que seja qual for o caminho do estudo, certos *tipos de situações* estão necessariamente presentes, mesmo que sejam muito variáveis, tanto em termos qualitativos quanto quantitativos. Chamaremos a esses tipos de situações de *momentos de estudo*, ou *momentos didáticos* [...]. (CHEVALLARD, 1998, p. 19, destaque do autor, tradução nossa).

Os momentos didáticos são seis, e, apesar de expostos em uma certa ordem, o autor enfatiza não existir uma realidade cronológica entre eles.

- *O primeiro encontro com a praxeologia proposta*: esse primeiro momento caracteriza-se pelo primeiro contato com a praxeologia visada, ressaltando que

¹¹ Essas e outras informações teóricas são melhor entendidas por meio do próprio estudo da coleção investigada, exposta na parte de análise dos dados desse trabalho.

tal organização praxeológica pode/deve ser revisitada inúmeras vezes ao longo do período escolar. Esse momento pode ser realizado de diferentes maneiras – pode-se por exemplo apresentar a definição de um conceito ou partir de uma situação problema que ponha em jogo alguns saberes matemáticos para a elaboração de outros. Em geral, esse momento didático não tem a função de explorar demasiadamente o objeto matemático, o que poderá ser feito em conjunto com os demais momentos.

- *Exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica que permite resolver tal tipo de tarefa:* Esse momento constitui na ação de experimentar, de estudar uma dada situação em busca de solucioná-la. Chevallard (2008) ressalta que a exploração de um determinado tipo de tarefa por si só não faria sentido se não fosse para a construção de técnicas, que é o objetivo de qualquer atividade matemática.
- *Constituição do entorno tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ relativo a uma ou mais técnicas:* desde o primeiro encontro com a praxeologia há elementos tecnológicos e teóricos anteriormente estudados que são evocados e que, a partir desses, podem, junto ao momento de exploração de um tipo de tarefa e técnica, construir gradativamente o entorno tecnológico-teórico da nova praxeologia. No entanto, há organizações didáticas que elegem esse momento como uma primeira etapa e, a partir dela, o estudo se restringe a aplicação do que foi pré-determinado.
- *O trabalho com a técnica:* esse momento tem como objetivo o de estudar e de explorar a técnica construída a fim de torná-la mais eficiente e confiável.
- *Institucionalização da praxeologia:* momento no qual o saber matemático visado será formalizado, abandonando aqueles que ora ou outra foram mobilizados para a construção da praxeologia e que não se fazem mais necessários.
- *Avaliação da praxeologia construída:* é o momento de reflexão sobre a abrangência e eficiência das técnicas estabelecidas, momento de revitalizar a praxeologia construída.

Em nossa investigação, buscamos identificar a ocorrência desses momentos para a compreensão de como o autor dos livros didáticos propõe a organização do conteúdo

matemático em questão. Para tanto, nos pautamos também em Gascón (2003), um dos precursores da TAD. Esse autor, frente aos momentos didáticos, constrói um modelo que esquematiza possíveis formas de organizações didáticas.

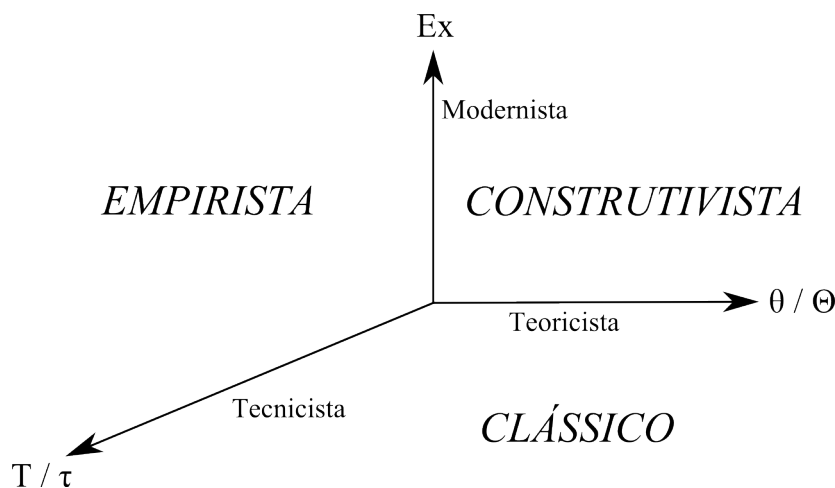


Figura 29: Modelo proposto por Gascón (2003)
Fonte 6: Essa figura é uma reprodução feita de Gascón (2003, p. 21)

Em um espaço tridimensional, Gascón (2003) destaca em cada eixo as três organizações didáticas *ideais*: teoricista, tecnicista e modernista. A primeira delas prioriza a aprendizagem matemática voltada exclusivamente às suas teorias. Trata de uma perspectiva de ensino que secundariza as tarefas matemáticas. O aluno é guiado, gradualmente, por meio de conceitos simples até a elaboração de obras teóricas complexas. A segunda organização didática, a tecnicista, tem como característica principal a supervalorização do momento de trabalho com a técnica. Nesse princípio, aprender significa dominar maneiras de resolução, acarretando em esforços direcionados ao treinamento repetitivo de técnicas e em alunos “autômatos” (GASCÓN, 2003). Com a evidência das limitações, como o fracasso dos alunos em enfrentar problemas matemáticos, advindas das duas organizações didáticas supracitadas, nasce o modernismo com um olhar especial para o momento de exploração de tarefas e elaboração de técnicas. Para isso, propõe-se ao alunos, por exemplo, problemas de diferentes tipos, os quais necessitam de tempo para “testar técnicas diversas, aplicar algum resultado conhecido, buscar problemas semelhantes, formular conjecturas, buscar contraexemplos [...]” (GASCÓN, 2003, p. 25, tradução nossa).

Em síntese, essas três organizações didáticas estão intimamente relacionadas, respectivamente, com “o momento tecnológico-teórico, θ/Θ , o momento de trabalho técnica, T/τ , e o momento exploratório, Ex.” (GASCÓN, 2003, p. 19, tradução nossa)

Notamos, assim como também comenta esse autor, que esses modelos de ensino são extremamente reducionistas. Desse forma, supõe-se também que há praxeologias desenvolvidas no âmbito de mais de uma dessas vertentes. Ao integrá-las dá-se origem à mais três tipos de organizações didáticas formadas pela combinação de cada dupla de eixo. Tem-se então ensinamentos do tipo empirista, clássico e construtivista.

A primeira delas consiste em atribuir maior valorização aos aspectos práticos ou técnicos do estudo da matemática, a segunda se caracteriza pela maior valorização de aspectos teóricos e tecnológicos, e a terceira tendência consiste em priorizar atitudes mais exploratórias ou construtivistas da atividade matemática escolar. (BITTAR, FREITAS e PAIS, 2013, p. 19)

Acreditamos que em algumas instituições vigentes, motivadas por interesses políticos, como a aprovação de livros didáticos pelo Programa Nacional do Livro Didático, há uma intenção de equilibrar, ou ao menos perpassar, esses três campos. Todavia, também é plausível admitir que as organizações matemáticas, ora ou outra, possam demonstrar aspectos mais relacionados a uma dessas perspectivas e, investigar esses aspectos é essencial, visto que as escolhas didáticas que põem em prática a matemática estudada, implicam, inevitavelmente, na matemática apreendida pelo aluno. Desse modo, entender a organização didática proposta pela coleção de livros analisada é fundamental na busca pelo cenário do ensino do campo aditivo.

A análise de como se “ordena” a praxeologia pode ajudar na caracterização dessa organização didática desenvolvida. Por exemplo, a conclusão de que o primeiro momento coincide, recorrentemente, com a institucionalização de saberes matemáticos, como teoremas e propriedades, alerta para um ensino mais teoricista. Além desse aspecto, sob a ótica desse mesmo referencial teórico, Bittar, Freitas e Pais (2013) ressaltam que não é apenas a disposição de como aparecem as atividades em certa instituição que evidencia o tipo de ensino proposto, mas especialmente a ênfase que é dada para, por exemplo, os elementos tecnológicos-teóricos e para as técnicas. Esses mesmos autores apresentam algumas características didáticas que acreditam ser importantes para o ensino das operações elementares da matemática:

[...] não seria aconselhável, nos anos iniciais da escolarização, enfatizar os algoritmos e as propriedades das operações em detrimento da compreensão do sentido destas. Isso não significa, no entanto, que as técnicas e os algoritmos devam estar ausentes da escola, mas simplesmente não devem ocupar lugar central, ou totalitário, na aprendizagem das operações aritméticas. (BITTAR, FREITAS e PAIS, 2013, p. 21).

Por meio dos conceitos apresentados da Teoria Antropológica do Didático demos início à análise da coleção investigada. Frente aos primeiros dados, ao realizar os primeiros exercícios analíticos, sentimos a necessidade de trazer para o nosso trabalho outros conceitos também discutidos pela TAD: o de ostensivo e o de valência instrumental. Desse modo, tecemos, a seguir, alguns comentários sobre eles.

2.2.2 Ostensivos e Valência Instrumental

A atividade matemática, qualquer que seja ela, está imersa em diferentes conceitos, os quais sentimos que estão ali devido aos significados que atribuímos às representações. Foi a quantidade, diversidade e importância dada às representações pela praxeologia estudada que a discussão sobre ostensivos e valência instrumental se tornou fundamental em nossa pesquisa.

Na Matemática há objetos de naturezas e funções distintas e, com o objetivo de diferenciá-los, Bosch e Chevallard (1999) discutem os objetos ostensivos e os objetos não-ostensivos. Um objeto ostensivo é aquele, como seu próprio nome sugere, que é perceptível, que se “faz mostrar” por algum órgão dos sentidos. Os objetos ostensivos possuem uma qualidade material, como os sons, os grafismos e os gestos, o que os tornam possíveis de serem manipulados. Já os objetos não-ostensivos não são dotados dessa característica material; são objetos como as ideias e os conceitos. Os objetos não-ostensivos são acessíveis somente por meio dos objetos ostensivos - que os representam -, pois eles não podem ser vistos ou percebidos por si só. (BOSCH e CHEVALLARD, 1999).

Retornando às noções fundamentais da abordagem antropológica, diremos que a aplicação de uma técnica se traduz pela *manipulação de ostensivos regulada por não-ostensivos*. Os ostensivos constituem a parte perceptível da atividade, isto é, na realização da tarefa esses objetos podem ser vistos tanto pelos observadores como pelos atores. [...] Por contraste, a presença desse ou daquele não-ostensivo em uma prática determinada pode ser apenas induzida ou suposta a partir das manipulações de ostensivos institucionalmente associados. (BOSCH e CHEVALLARD, 2009, p. 11, destaque do autor, tradução nossa).

Nessa perspectiva, os conceitos são construídos a partir da manipulação de ostensivos (CASABÓ, 2001) e, é por isso, que é plausível admitir que diferentes ostensivos podem acarretar apreensões diferentes de objetos não-ostensivos. Esse é o

motivo pelo qual não podemos ignorar a onipresença dos ostensivos na Matemática e, em especial, na proposta de ensino que estamos investigando, haja vista que nela encontramos a manifestação de diferentes maneiras de representar conceitos inerentes ao campo aditivo.

A partir do momento em que são considerados como constitutivos das organizações matemáticas e dos ingredientes primários das tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, os objetos ostensivos se apresentam, em primeiro lugar, como instrumentos da atividade matemática, ferramentas materiais sem as quais não se poderia realizar essa atividade. (CASABÓ, 2001, p.22, tradução nossa)

Frente aos objetos ostensivos, o conceito de valência instrumental nasce do papel de ferramenta que eles têm na atividade matemática. Um dado ostensivo pode ser, ou não, considerado um bom instrumento dependendo das atividades nas quais ele é aplicado. Para ilustrar, tomemos o ostensivo *risquinhos* utilizados pelas crianças para representar quantidades – e sugeridos em livros didáticos - em uma operação de adição, por exemplo. Esse ostensivo pode ser utilizado com eficácia em situações envolvendo números “pequenos”, caso contrário, será custoso e propiciará erros, sendo mais adequada a mobilização de outros ostensivos. Por ser possível de ser empregado apenas em uma quantidade bastante limitada de situações do campo aditivo, as que não envolvem grandes quantidades, dizemos que os *risquinhos* possuem uma baixa valência instrumental. Nesse sentido a valência instrumental viabiliza o debate da potencialidade/rendimento de um determinado ostensivo como instrumento em uma dada atividade matemática (BOSCH e CHEVALLARD, 1999).

Nesse cenário podemos entender também como se dá a substituição de diferentes ostensivos, até então necessários para responder determinada tarefa, por outros ostensivos que os “abreviam”, os “compactam”, de alguma forma. Isso ocorre pois, “toda matematização, geralmente, leva a uma redução ostensiva dos instrumentos do trabalho matemático, que “projeta” os diferentes registros inicialmente ativados sobre aqueles que podem ser colocados por escritos.” (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 20, tradução nossa).

Consideramos o papel do ostensivo, em especial aquele manipulável - no sentido próprio da palavra, ou seja, de manusear, de utilizar as mãos - de extrema importância para o contato e a construção inicial de objetos matemáticos. No entanto, sabemos que é natural da atividade matemática que esses ostensivos sejam abandonados em virtude do pensamento “mais” abstrato, que necessita de uma ativação “quase mínima” de

ostensivos no gerenciamento da atividade (BOSCH e CHEVALLARD, 1999). Manipular o material dourado para compreender as ideias de reagrupamento – por exemplo, a troca de 12 cubinhos por 1 barrinha e 2 cubinhos – é válido e interessante em momentos introdutórios do estudo desse conceito, porém, a ideia contida na ação de reagrupar deve ser interiorizada para que possa ser mobilizada em outros momentos, como ao se utilizar o algoritmo usual.

Considerando as discussões delineadas sobre a TAD e sobre os estudos do campo aditivo pelo viés da Teoria dos Campos Conceituais desenvolvido no primeiro capítulo, damos início, na sequência da leitura, à análise dos dados.

ANÁLISE DOS DADOS

3 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE

A análise da coleção investigada é feita por meio dos cinco volumes que a compõem. Desse modo, apresentaremos a análise de cada livro e as devidas articulações entre elas em busca de revelar como o ensino das operações de adição e subtração se desenvolve ao longo dos cinco primeiros anos escolares. Para tanto, cada livro é analisado em partes, segundo divisões propostas por nós. Essas separações se justificam pela extensão dos livros didáticos e por buscarmos, na análise, o nível de detalhamento exigido pela Teoria Antropológica do Didático.

A investigação, à luz da organização praxeológica, consiste em evidenciar a organização matemática e a organização didática propostas nos livros didáticos para o ensino do campo aditivo. A análise da organização matemática incide sobre a identificação dos tipos de tarefas sugeridos, das técnicas mobilizadas que tornam essas tarefas realizáveis e do entorno tecnológico-teórico que permite justificar o uso dessas técnicas. A análise da organização didática versa sobre a investigação dos seis momentos didáticos no ensino proposto (CHEVALLARD, 1998). Para tanto, consideramos o livro do aluno e o manual do professor, que contém comentários e respostas das atividades, além de sugestões para o uso do livro e para o desenvolvimento do conteúdo em sala de aula, o que nos permite entender mais claramente a proposta do autor da coleção analisada.

Cabe antecipar que por tratarmos de um modelo de ensino voltado aos anos iniciais é natural que elementos tecnológicos, e principalmente teóricos, não sejam alvos de estudo no livro didático e por vezes sejam omitidos por completo. Isso justifica o fato de não apresentarmos as tecnologias e teorias isoladamente, assim como fazemos com os tipos de tarefas e técnicas. No entanto, evidenciamos, quando possível, elementos tecnológicos abordados durante o estudo investigado.

As técnicas propostas pela coleção implicam em mobilizar os ostensivos que instrumentalizam as técnicas. Como a praxeologia investigada em nossa análise atribui grande importância aos ostensivos, quando pertinente, será discutida a valência instrumental desses, a fim de entendermos o quão potencial uma determinada técnica é para o estudo do campo aditivo. O conceito de valência instrumental nos permite

também compreender o progresso e a redução do uso dos ostensivos no estudo das operações de adição e de subtração. Ao longo dos textos de análise são expostas as técnicas mobilizadas conforme elas vão aparecendo nos livros didáticos, de modo que as denominamos como τ_k , com k pertencendo aos números naturais. Desse modo, quanto maior k mais tarde a técnica correspondente aparece na coleção.

Quanto às quantificações feitas na análise, é importante dizer que a contagem dos tipos de tarefas não indica necessariamente a quantidade de atividades destinadas a esse conteúdo nos livros, visto que uma atividade pode demandar a realização de mais de um tipo de tarefa. Por exemplo: “João tem 12 reais e Maria tem 18 reais. Eles juntaram suas quantias para comprar um presente para Aninha. O presente custou 25 reais, quantos reais sobraram?” Essa atividade demanda a realização de dois tipos de tarefas diferentes: a de “juntar quantidades” e a de “retirar uma quantidade de outra”¹². Ressaltamos também que muitos tipos de tarefas poderiam ser resolvidos por diferentes técnicas que não foram consideradas por buscarmos caracterizar a proposta de ensino do autor dos livros didáticos. Nessa perspectiva, na classificação privilegiamos as técnicas apresentadas nas respostas das atividades expostas no livro do professor ou que se mostraram de alguma forma prioritárias para responder determinadas tarefas.

3.1 TIPOS DE TAREFAS ELENCADOS *A PRIORI*

O estudo das estruturas aditivas de base proveniente das investigações de Vergnaud (1990, 2009a) e outros (NUNES et al, 2009; MAGINA et al, 2001, SANTANA, 2012), exposto no capítulo 1, nos permitiu elencar 15 tipos de tarefas possíveis de estarem presentes em instituições que se empenham no ensino das operações de adição e subtração, em especial, em livros didáticos dos anos iniciais. Esses tipos de tarefas caracterizam aquelas do tipo contextualizadas que compreendem as diferentes ideias próprias do campo aditivo, das quais os alunos podem – ou deveriam – se deparar ao estudar o campo aditivo. A presença ou ausência desses tipos de tarefas nos livros didáticos nos possibilita entender parte do ensino proposto.

A seguir, de maneira sumária, apresentamos os enunciados desses tipos de tarefas. Eles foram elencados conforme as categorias das estruturas aditivas de base (VERGNAUD, 1990, 2009a) e foram denominados do seguinte modo: “ T_i ”, com $i \in$

¹² Nota-se que o problema exposto, dependendo da instituição na qual ele viva, pode ser realizado de outras maneiras.

{1, 2, 3, 4, 5, 6}, sendo essa a representação cardinal das categorias das estruturas aditivas de base; e com o índice “j” um número natural que diferencia os tipos de tarefas que compõem cada categoria. Desse modo, se um tipo de tarefa se insere, por exemplo, na segunda categoria das estruturas aditivas de base a sua denominação será do tipo $T2_j$, com j podendo ser 1, 2 ou 3, visto que essa categoria é composta por três tipos de tarefas que são, estão, nomeados como $T2_1$, $T2_2$ e $T2_3$.

I – Primeira categoria: a composição de duas ou mais medidas. ($T1_j$)

- ($T1_1$) - Encontrar o resultado da composição de duas ou mais medidas;
- ($T1_2$) - Encontrar uma medida que se compõe com outra(s) medida(s) conhecida(s), sabendo o valor resultante da composição;

II – Segunda categoria: uma transformação opera sobre uma medida para resultar em outra medida. ($T2_j$)

- ($T2_1$) - Encontrar o estado inicial (medida) que foi transformado e resultou em um estado final (medida) conhecido;
- ($T2_2$) - Encontrar o estado final (medida) resultante da transformação de um estado inicial (medida) conhecido;
- ($T2_3$) - Encontrar a transformação ocorrida sobre um estado inicial (medida) para resultar em um estado final (medida).

III – Terceira categoria: a relação de comparação entre duas medidas. ($T3_j$)

- ($T3_1$) - Encontrar o “referido” de uma comparação de medidas;
- ($T3_2$) - Encontrar a relação de comparação entre duas medidas;
- ($T3_3$) - Encontrar o “referente” de uma comparação de medidas.

IV – Quarta categoria: a composição de duas ou mais transformações. ($T4_j$)

- ($T4_1$) - Encontrar uma transformação que se compõe com uma ou mais transformações para resultar em uma terceira transformação;
- ($T4_2$) - Encontrar a transformação resultante da composição de duas ou mais transformações.

V – Quinta categoria: a transformação de um estado relativo (relação). ($T5_j$)

- ($T5_1$) - Encontrar o estado inicial (relação) que foi transformado e resultou em um estado final (relação) conhecido;
- ($T5_2$) - Encontrar o estado final (relação) resultante da transformação de um estado inicial (relação) conhecido;

- (T5₃) - Encontrar a transformação ocorrida sobre um estado inicial (relação) para resultar em um estado final (relação).

VI – Sexta categoria: a composição de dois ou mais estados relativos (relações).

(T6_j)

- (T6₁) - Encontrar o estado relativo resultante da composição de dois ou mais estados relativos;
- (T6₂) - Encontrar um estado relativo que se compõe com um ou mais estados relativos para resultar em um terceiro estado relativo.

A investigação do ensino das estruturas aditivas não se resume à identificação e análise dessas categorias nos livros didáticos, pois, como já foi dito, elas representam apenas os tipos de tarefas contextualizados. Há tarefas, como realizar a soma de duas medidas ($a + b$, com $a, b \in \mathbb{N}$), que não são contempladas por essa classificação, embora seja essa a *conta* efetuada para responder determinadas situações pertencentes a alguma dessas categorias. Isto é, realizar a tarefa do tipo “ $2 + 3$ ”, por exemplo, é diferente de realizar a tarefa “Tenho 2 bolinhas azuis e 3 vermelhas, quantas bolinhas eu tenho no total?” – situação essa relativa à categoria I –, que por sua vez também é diferente de resolver o problema “João tinha 2 reais e ganhou 3 reais de sua mãe, quantos reais João tem agora?” – exemplo de situação pertencente a categoria II. Nessa perspectiva, buscaremos diferenciar os tipos de tarefas propostos pela coleção investigada, destacando também aqueles que não são considerados nessa primeira classificação *a priori*.

Esses tipos de tarefas elencados *a posteriori* são destacados no texto conforme os seus surgimentos na praxeologia proposta pelos livros didáticos. Para tanto, para identificá-los utilizaremos a nomenclatura T_i , com $i \in \{7, 8, 9, \dots\}$. O índice j utilizado nos tipos de tarefas elencados *a priori* torna-se desnecessário nessa ocasião, visto que da maneira como consideramos, esses “novos” tipos de tarefas não são oriundos de categorias.

Para a continuação da leitura, convidamos o leitor a ter em mãos (no seu formato físico ou exportado em outro documento digital) o anexo que se encontra no final desse trabalho. Com ele é possível, durante a leitura, ter acesso imediato aos enunciados dos códigos dos tipos de tarefas e técnicas. Fizemos essa opção para que o texto não se tornasse carregado e esperamos com isso uma leitura mais fluida.

4 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DO LIVRO DO PRIMEIRO ANO

Para a análise dividimos o livro do primeiro ano em três partes, I, II e III, e sua análise é baseada na junção e articulação dessas partes. A Parte I constitui-se de todos os capítulos anteriores àquele destinado, em particular, a estudar as operações de adição e subtração (páginas 1 à 121); o capítulo dedicado a esse estudo é nomeado de Parte II (páginas 122 à 157); e por fim, a Parte III compreende os capítulos finais do livro (páginas 158 à 217). Cabe pontuar que nas Partes I e II são trabalhados apenas os números naturais de 0 a 10 e na Parte III dá-se início ao estudo dos números naturais até 100. Essa expansão põe à prova muitas das técnicas trabalhadas com os números “pequenos” e faz emergir outras novas, como mostraremos em nossa análise.

4.1 PARTE I – PRIMEIROS CAPÍTULOS: ESTUDO DOS NÚMEROS ATÉ 10.

A Parte I contempla os cinco primeiros capítulos do livro e, conforme o Guia do PNLD (BRASIL, 2012), esses abordam os seguintes assuntos: 1 - localização e deslocamento; 2 e 3 - números até dez (ideia, usos, contagem, registros, ordenação, comparação, antecessor, sucessor e ordinais); 4 - sólidos geométricos; e 5 - valor monetário (cédulas, moedas, composição, registro e comparação de quantias).

A construção dos números naturais de 0 a 10, a sua ordenação e a regularidade de somar consecutivamente mais um para obter o próximo número são alvos de estudo nessa primeira parte do livro, no que se refere ao campo dos números e operações. Esse estudo apresenta informalmente algumas das ideias próprias do campo aditivo que constituem parte do entorno tecnológico-teórico, que fundamenta a elaboração e aplicação de técnicas. Nesse cenário, o primeiro contato mais direto com tarefas do campo aditivo acontece apenas na página 70 do livro (Figura 29, a seguir), o qual é feito de maneira intuitiva por meio de situações que contemplam as ideias de composição de medidas, associadas à primeira categoria elencada por Vergnaud (1990, 2009a), de tipos $T1_j$.

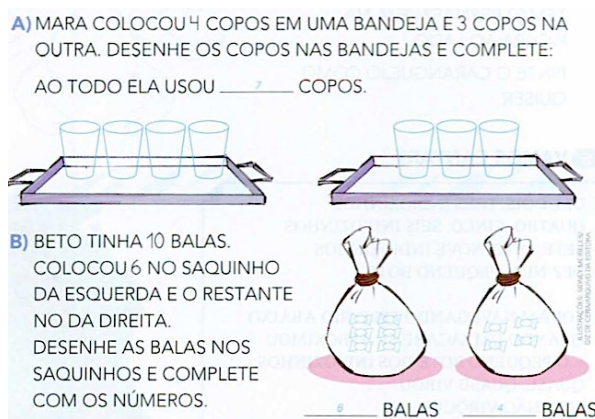


Figura 30: Exemplo de tarefas de composição de medidas.

Fonte 7: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática – primeiro ano, p. 70.

A contagem de objetos de coleções foi um tipo de tarefa bastante trabalhado até essa página do livro para a construção dos números naturais até 10. Com base nesses estudos a atividade “A” convoca a criança a descobrir o valor da medida resultante da união de dois conjuntos, tarefa essa do tipo T₁. Para resolvê-la, o livro do professor indica que se desenhe os copos para então contá-los afim de obter a soma. Desse “modo de resolver” definimos a primeira técnica proposta pela praxeologia investigada do seguinte modo:

τ_1 – Contar ostensivos imagens após desenhá-los para representar as quantidades envolvidas em uma situação

Na atividade “B” é explorada outra ideia de composição de medidas por meio do tipo de tarefa T₂. Para resolver esse problema também é sugerido que se desenhe os objetos em jogo, no entanto, o ato de desenhar não está apenas ligado à representação de quantidades de duas coleções, visto que justamente a quantidade de uma das coleções é desconhecida. Frente a isso, e com os poucos elementos praxeológicos desenvolvidos até o momento para o estudo do campo aditivo, acreditamos que há, na técnica a ser executada, a ideia do “completamento”. O aluno pode, por exemplo, desenhar as 6 balas do saquinho da esquerda e depois ir desenhando e contando gradativamente as balas no saquinho da direita até que tenha, no total, as 10 balas. Definimos com isso a técnica τ_2 :

τ_2 – Completar desenhando os objetos da situação

Sobre as técnicas supracitadas cabe observar que desenhar os próprios objetos de uma situação não é um meio de representação prático ao se comparar com técnicas que

utilizam outros símbolos para tal, como os *risquinhos*. A baixa valência instrumental dos ostensivos empregados nas técnicas τ_1 e τ_2 as tornam inviáveis para um trabalho mais amplo do estudo das operações de adição e subtração, o que justifica o fato de essas técnicas serem utilizadas pontualmente para iniciar esse conteúdo. Elas são prontamente abandonadas após seu breve uso nesses primeiros contatos com a praxeologia proposta - salvo a τ_2 que aparecerá novamente, mas apenas uma vez, na Parte II do livro. Nesse sentido, adiantamos que essas técnicas são substituídas por outras que empregam ostensivos mais fáceis de serem manipulados, como os dedos, a fala e as diferentes formas “gráficas” mais econômicas para representar quantidades.

O capítulo 5 intitulado “Nosso Dinheiro” traz novas ideias a serem estudadas relativas ao campo aditivo. É importante destacar que a contextualização por meio da temática dinheiro possui uma característica privilegiada por remeter à situações que podem ser vivenciadas pela criança e por colocá-la em condição de reflexão e compreensão do sistema monetário de nosso país, oportunizando também a apreensão do sistema de numeração decimal, considerando a similaridade de ambos os sistemas. Nesse cenário são acrescentadas à praxeologia investigada mais três tipos de tarefas e uma técnica. Dois desses tipos de tarefas não foram considerados *a priori* em nossos estudos. Tomemos o primeiro deles:

- *T7 – Contar dinheiro;*

O T7 consiste em somar valores de cédulas e moedas e é o tipo de tarefa mais frequente na Parte I do livro. Nota-se que ao considerar a contagem de dinheiro como uma situação contextualizada, esse tipo de tarefa poderia ser considerada como sendo do tipo T1₁, pois ambos tratam de composição de medidas. Decidimos distingui-los pela temática particular que o dinheiro envolve, pela importância dada a esse tema na coleção analisada e pelas tarefas do tipo T7 não serem expostas exclusivamente por meio de um enunciado em língua materna, assim como acontece em geral nas situações do tipo T1₁. Para ilustrar, consideramos o seguinte excerto do livro que expõe, também, como a técnica proposta para responder a essas tarefas é apresentada.



Figura 31: Exemplificação da técnica τ_5 .
Fonte 8: C.A - Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 114.

Essa maneira de *contar dinheiro* pode ser contemplada pela técnica que nomeamos de τ_3 :

τ_3 – Somar ou subtrair de um em um utilizando a fala partindo do maior valor

Após a apresentação da técnica fica a cargo do aluno praticá-la, o que pode ser evidenciado pelo amplo espaço dedicado ao trabalho com a técnica por meio de tarefas semelhantes às da Figura 30. Nesse sentido, o livro não oportuniza a experiência do aluno de explorar o tipo de tarefa em jogo a fim de uma possível elaboração de uma técnica.

Notemos ainda que essa técnica versa sobre o completamento de um em um e essa *maneira de fazer* é adequada para o trabalho com números naturais iguais ou menores que 10. É importante atentarmos ao fato de que essa técnica é concebida do próprio estudo de estruturação dos números de 0 a 10, que se utiliza das somas consecutivas de um em um. É esse entorno tecnológico-teórico em construção, que apesar de *jovem* e pouco institucionalizado, dá alicerce suficiente para esse tipo de completamento, mas não para outros. Desse modo, tarefas que consistem em contar dinheiro, nesse momento, envolvem cédulas de baixos valores visto que, por meio da τ_3 , algumas tarefas poderiam se tornar bastante custosas, além de propiciar o erro. Em outras circunstâncias, novas técnicas mais abrangentes e elementos tecnológicos-teóricos que as assumem como apropriadas devem ser acrescidas à praxeologia.

A técnica τ_3 também é empregada em outros tipos de tarefas relativos ao tema dinheiro, como o T8, que incide sobre as diferentes maneiras de decompor uma determinada medida.

- *T8 - Decompor uma medida dada em outras medidas;*

Nessa parte do livro esse tipo de tarefa consiste em indicar as cédulas e moedas que compõem um determinado valor em dinheiro, como o valor de 8 reais, que pode ser formado, dentre outras possibilidades, por uma nota de 5 reais e três moedas de 1 real. Esse tipo de atividade oportuniza ao aluno a exploração de diferentes *estratégias pessoais*, considerando que o autor da coleção não determina uma *maneira de fazer* para respondê-las.

É trabalhado também, mas apenas uma vez, o T2₂. Tem-se assim, nessa parte do livro, três tipos de tarefas correspondentes às situações descritas pelos estudos das Estruturas Aditivas de Base (VERGNAUD, 1990, 2009a) e dois outros tipos de tarefas

que foram elencados por meio da análise: o T1₁, o T1₂, o T2₂, T7 e T8. São esses cinco tipos de tarefas em conjunto às três técnicas mobilizadas que ingressam a criança informalmente no estudo das operações de adição e subtração.

Para a síntese e término da análise da Parte I, apresentamos os dois quadros a seguir. O primeiro deles relaciona os tipos de tarefas com as suas respectivas técnicas, para tanto, em destaque preto sinalizamos quais técnicas foram mobilizadas para responder os tipos de tarefas presentes na praxeologia analisada, e em cor cinza apontamos o tipo de tarefa que não é possível definir, por meio da proposta do autor do livro didático, uma estratégia que a resolva. Já o segundo quadro trata especificamente da frequência dos tipos de tarefas.¹³

Quadro 2: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do primeiro ano - Parte I

	T1₁	T1₂	T2₂	T7	T8
τ_1					
τ_2					
τ_3					

Quadro 3: Tipos de Tarefas - Livro do primeiro ano - Parte I

	T1₁	T1₂	T2₂	T7	T8	Total
Total	2	4	1	20	7	34

A importância dada ao tema dinheiro é notada pela grande frequência dos tipos de tarefas T7 e T8, considerando ainda que existem tarefas do tipo T1₂ e T2₂ relacionadas à essa temática. Conseqüentemente, a técnica τ_3 é a mais mobilizada na Parte I. Percebe-se também que nesse primeiro contato com o campo aditivo o estudo volta-se prioritariamente às ideias de composição de medidas, que são mobilizadas pelas tarefas do tipo T1_j e T7.

4.2 PARTE II – CAPÍTULO INTITULADO “ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO”

A Parte II constitui-se do capítulo destinado especificamente ao estudo do campo aditivo com números naturais até 10. É nesse momento que a criança é apresentada formalmente às operações de adição e subtração. Para tanto, são propostas

¹³Não apresentamos, em nossa análise, a quantificação das técnicas devido a dificuldades em fazê-la, haja vista que temos uma quantidade extensa de tarefas ao longo da coleção, bem como a dificuldade de prever, com a exatidão que os números revelam, em quantas situações determinada técnica é aplicada, considerando que há tarefas em que o aluno pode escolher qual técnica utilizar. Todavia, em termos de análise qualitativa, conseguimos entender a proposta do autor quanto a relação dos tipos de tarefas e técnicas, o que é proposto no quadro 2 e em outros demais quadros no decorrer da análise. Ademais, quando possível, discutiremos o quão uma técnica é mobilizada em detrimento de outras.

diversas tarefas ao longo do capítulo, as quais classificamos em 11 tipos. Para respondê-las são mobilizadas 11 técnicas. Cabe dizer que embora a quantidade de tipos de tarefas e técnicas seja a mesma, a sua relação não é biunívoca.

O estudo das operações de adição e subtração é feito separadamente. A primeira metade do capítulo é destinada ao estudo das situações e das técnicas próprias da operação de adição, e só na segunda metade do capítulo o trabalho é voltado à operação de subtração. Essa separação é abandonada ao final dos dois estudos por meio de uma pequena lista de problemas que busca relacionar as duas operações.

A contagem, que tanto foi estimulada no estudo dos números naturais até 10, aparece fortemente como técnica nos primeiros momentos de estudo com cada operação. Contar os elementos de um conjunto se torna natural nessa fase, haja vista que os *ostensivos imagens*¹⁴ são bastante utilizados para expor as atividades propostas e os números ainda não foram operacionalizados, salvo por essas representações figurais. A exemplo, tomemos, inicialmente, um recorte de uma atividade e, em seguida, a técnica que a resolve:



Figura 32: Exemplo de atividade que emprega a técnica de contagem apresentando o conjunto união.
 Fonte 9: C.A - Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 125.

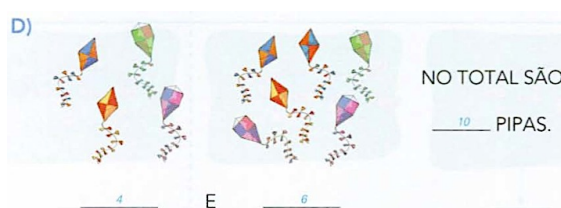


Figura 33: Exemplo de atividade que emprega a técnica de contagem sem apresentar o conjunto união.
 Fonte 10: C.A - Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 125

τ_4 – Contar ostensivos imagens do livro

É importante destacar que no que tange o estudo do campo aditivo a contagem é uma técnica, embora ainda apareça em muitos momentos de estudo do sistema de numeração decimal como um tipo de tarefa. Nesse cenário, o ato de contar elementos de um conjunto necessita de esquemas complexos (VERGNAUD, 1985), precisamente quando a contagem é de elementos resultantes da união de dois ou mais conjuntos. É nesse sentido que o esquema de contagem precisa ser ampliado para poder tornar-se uma técnica no âmbito do campo aditivo. Nessa perspectiva, algumas atividades são

¹⁴ Estamos considerando como *ostensivo imagem* uma descrição figural de uma situação: são as imagens apresentadas pelo livro que ilustram e/ou dão sentido à uma atividade proposta e que podem ajudar ou são até mesmo essenciais na resolução da tarefa em jogo.

propostas para “as crianças perceberem que não é preciso recontar o todo para achar o cardinal de $A \cup B$, se A e B já foram contados” (VERGNAUD, 1990, p. 142, tradução nossa)¹⁵.

Logo após esse contato intuitivo com a operação, são apresentados os símbolos “+” e “-”, da maneira como segue:

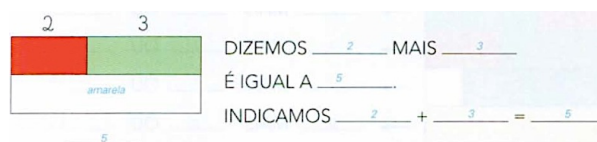


Figura 34: Material Cuisenaire na operação de adição.
Fonte 11: C.A - Alfabetização Matemática, primeiro ano, p. 129.

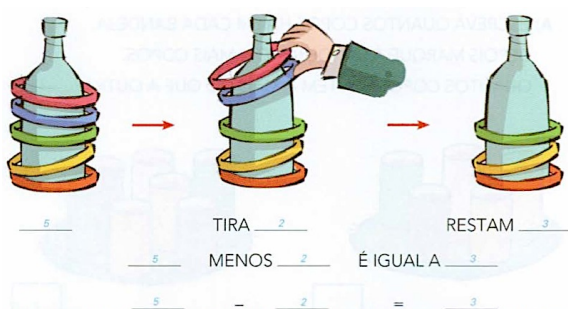


Figura 35: Técnica τ_1 em uma situação de subtração.
Fonte 12: C.A - Alfabetização Matemática, primeiro ano, p. 144

A língua materna, que ajuda a dar sentido à situação exposta em ostensivo imagem, sofre uma redução/substituição para a representação simbólica e matemática da situação. Esses ostensivos e as técnicas utilizadas fazem proveito da noção intuitiva que a criança possui de que o todo é a soma das partes, sendo essa a tecnologia que fundamenta, em especial, a técnica:

τ_5 – Representar uma adição ou uma subtração por meio das “barrinhas” (Material Cuisenaire) e comparar seus “tamanhos” para calcular a soma ou a diferença¹⁶

É por meio dessa técnica que discute-se as diferentes maneiras de compor/decompor os números. Vejamos um exemplo:

¹⁵ Para conjuntos disjuntos.

¹⁶ Cabe pontuar que nesse volume o Material Cuisenaire não é utilizado para representar ou realizar contas de subtração, mas o colocamos na descrição dessa técnica pois ele vai aparecer nos volumes seguintes.

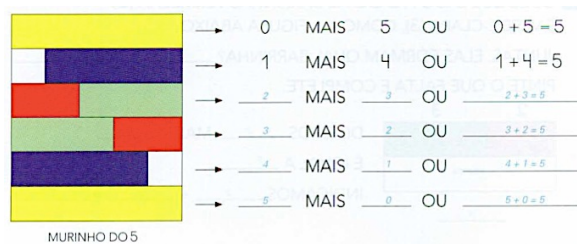


Figura 37: O tipo de tarefa T₁₂₀ e o Material Cuisenaire.
Fonte 13: C.A - Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 130.

Com atividades como essas algumas propriedades, como a da comutatividade e do elemento neutro da operação de adição, são exibidas ao aluno de forma ostensiva e no momento não possuem ainda o caráter e a *ambição* de se tornarem parte do entorno tecnológico-teórico. Todavia, são esses exemplos que oportunizam a construção e o contato intuitivo com o bloco do saber da praxeologia proposta.

Com a representação simbólica do “+” e do “-” institucionalmente implantada, dois novos tipos de tarefas são inseridos ao estudo do campo aditivo. Tanto no estudo da adição quanto no da subtração são apresentados aos alunos diferentes situações por meio de ostensivos imagens e/ou por meio da língua materna, e geralmente nessas circunstâncias, além de resolver a situação proposta o aluno deve também expô-la em ao menos uma expressão matemática que a represente. É nesse contexto que destacamos mais dois tipos de tarefas:

- T9 – Dada uma situação em ostensivo imagem, traduzi-la em expressões matemáticas;
- T10 – Dada uma situação em língua materna, traduzi-la em expressões matemáticas;

Embora o T9 seja respondido, em geral, pela técnica de contagem dos ostensivos imagens, há ainda nesse tipo de tarefa a necessidade da interpretação matemática da representação figural apresentada pelo livro. É nesse sentido que esses dois tipos de tarefas estão relacionados à técnicas não *descritivas*, que não são possíveis de serem delimitadas por uma *maneira de fazer* que revele como deve ser feita a interpretação dos dados expostos em língua materna ou ostensivo imagem para uma tradução matemática.

As diferentes técnicas propostas para encontrar o valor da soma e da diferença estão concentradas em dois tópicos especiais nomeados de “Maneiras de efetuar a adição” e “Maneiras de efetuar a subtração”. A seguir discutiremos as técnicas, os tipos de tarefas que elas respondem e as escolhas didáticas que dão vida à praxeologia desenvolvida. Para essa discussão traremos as técnicas relacionando os ostensivos que elas empregam.

Assim como acontece na Parte I do livro, há a valorização pela prática das técnicas em detrimento da criação delas. Isto é, o momento didático destinado à exploração de um tipo de tarefa e à elaboração de uma técnica não é vivenciado pelo aluno, pois fornece-se a técnica com o intuito que ela seja treinada, evidenciando a prioridade do momento do trabalho com a técnica. Esse fato é confirmado pela grande presença, nessa parte do livro, do tipo de tarefa T11:

- T11 – *Calcular a adição ou a subtração de duas ou mais medidas;*

Esse tipo de tarefa consiste em realizar adições e subtrações de medidas – números naturais – sem evocar uma situação que contextualize essas operações. Ao propor tarefas desse tipo tem-se a finalidade de levar o aluno a praticar as técnicas propostas.

Diversos ostensivos são utilizados no livro para o emprego de técnicas que respondem situações tanto para a adição quanto para subtração. Os ostensivos “risquinho” e “bolinha” dão origem, por exemplo, a três técnicas - uma para a adição e outras duas para a subtração.

τ_6 – <i>Contar “risquinhos” ou “bolinhas” após desenhá-los para representar as quantidades envolvidas em uma situação</i>
τ_7 – <i>Comparar quantidades de “risquinhos” ou “bolinhas” um a um após desenhá-los para representar as quantidades envolvidas em uma situação</i>
τ_8 – <i>Cancelar a quantidade de “objetos” a serem subtraídos excluindo os “risquinhos” ou “bolinhas” após desenhá-los para representar as quantidades</i>

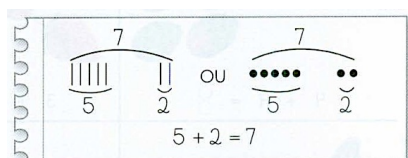


Figura 36: Exemplificação da τ_6 .
Fonte 14: C.A - Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 132.

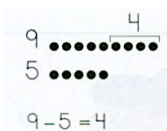


Figura 37: Exemplificação da τ_7 .
Fonte 15: C.A - Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 147.



Figura 38: Exemplificação da τ_8 .
Fonte 16: C.A - Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 147.

Essas técnicas, e principalmente os ostensivos que as viabilizam, se mostram comuns em instituições que se empenham no estudo inicial das estruturas aditivas, e isso não é diferente no livro didático analisado. No entanto, cabe a ressalva de que a valência instrumental desses ostensivos está diretamente relacionada aos números trabalhados nessa parte do livro, isto é, números até 10.

A técnica τ_6 foi aplicada em quase todos os tipos de tarefas propostos até então. A apresentação dessa técnica ao aluno é feita por meio de uma situação problema

envolvendo composição de medidas; em seguida são propostos alguns problemas de composição e transformação de medidas (T_{11} e T_{12}) para a sua aplicação. Como os problemas estão escritos em língua materna, além de resolvê-los o aluno deve indicar a expressão matemática que traduz a situação (T_{10}). Já as técnicas relacionadas à operação de subtração, τ_7 e τ_8 , apesar de também serem apresentadas por meio de situações contextualizadas, sua aplicação, em geral, é restrita ao tipo de tarefa T_{11} , em que o aluno deve apenas resolver, por essas técnicas, “continhas de subtração” sem um contexto em jogo.

Os dedos das mãos, culturalmente famosos em auxiliar na resolução das operações elementares da matemática e, em especial, nas de adição e subtração, também estão presentes no livro. Esse ostensivo é comum de ser utilizado pela praticidade de acesso a ele – os dedos das mãos podem ser utilizados sempre que for conveniente –, e pela facilidade de instrumentalizá-lo, embora sua abrangência se limite também, em geral, ao trabalho com os números de 0 a 10. Com esse ostensivo são propostas uma técnica para adição e uma para subtração, enunciadas como segue:

τ_9 – Completar utilizando a fala e os dedos partindo do maior valor
τ_{10} – Cancelar a quantidade de “objetos” a serem subtraídos abaixando os dedos das mãos após ter representado nos dedos o valor do minuendo



Figura 39: Exemplicação da τ_9 .
Fonte 17: Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 133.



Figura 40: Exemplicação da τ_{10} .
Fonte 18: Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 148.

O uso dessas técnicas restringiu-se, basicamente, às tarefas do tipo T_{11} , o que revela mais uma vez a importância dada pela prática das técnicas e não pelas situações as quais elas podem ser empregadas. Nessa mesma perspectiva outro ostensivo é mobilizado: a reta numérica. Desse ostensivo tem-se mais uma técnica:

τ_{11} – Somar ou subtrair de um em um “andando” ¹⁷ na reta numérica partindo do maior valor
--

¹⁷ O termo “andar” na reta numérica é inspirado no livro didático, que o utiliza ao enunciar tal técnica.

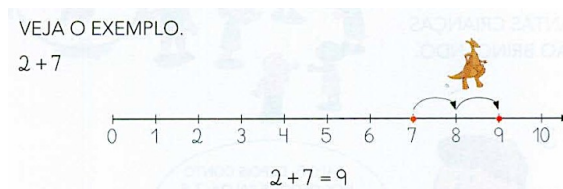


Figura 41: Exemplificação da τ_7 .
Fonte 19: Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 134.

A reta numérica é utilizada para adições e subtrações consecutivas de um em um e dessa maneira os cálculos são viáveis apenas com os números pequenos. Nunes et. al. (2009) discutem uma maneira de se trabalhar com esse ostensivo para efetuar cálculos mais elaborados. Ao contrário do que é proposto no livro, apresentar a reta numérica com o seu início diferente do zero e ainda com espaços vazios apropriados, estimula outros tipos de “completamento” diferentes do “de um em um”. Com os demais ostensivos, anteriormente mencionados, pode-se haver também outras estratégias para que o domínio de aplicação possa ser ampliado. Todavia, a baixa valência instrumental que os limitam tende ao abandono das técnicas que os empregam ao ampliar o estudo do campo aditivo.

Há ainda uma outra ferramenta utilizada para efetuar cálculos – a calculadora - que, embora seja utilizada pontualmente em uma única atividade nessa parte do livro, acreditamos ser importante evidenciá-la em nossa análise. No manual do professor é dito que o seu uso deve se limitar, nesse momento, apenas a conferir resultados. Frente a essa proposta, definimos uma nova técnica e um novo tipo de tarefa:

- *T12: Tirar a prova real;*

τ_{12} – *Efetuar a conta na calculadora*

O tipo de tarefa T12 consiste em validar a resolução de uma tarefa por meio da aplicação de outra técnica. Nesse caso específico, notamos que o uso da calculadora é o que garante a confiabilidade da resposta dada pelo aluno. Há outras maneiras de se tirar a prova real, propostas pelo autor do livro didático, que poderão ser notadas no decorrer da análise com a enunciação de novas técnicas, como a utilização da operação inversa.

Ainda nessa parte do livro vemos proposto um outro tipo de tarefa que ainda não enunciamos em nossa análise, o qual nomeamos de T13:

- *T13: Criar uma situação que envolva noções do campo aditivo;*

Tarefas desse tipo consistem em inventar uma história ou uma situação-problema que evoquem ideias das operações de adição e subtração. A exemplo, é dada a expressão matemática “ $3+4=7$ ” e pede-se para que o aluno crie uma situação que mobilize essa conta. Notemos que nesses casos não há também uma técnica *singular* que descreva o modo como responder a tarefa em questão. É por esse caráter mais pessoal de resolução que nós, e também o autor do livro didático, não elencamos as possíveis maneiras de resolver essas tarefas. Todavia, vale dizer que um fator que influencia a formulação de situações pelo aluno são as próprias situações que o livro apresenta.

Ao longo desse capítulo as noções presentes sobre o campo aditivo são concernentes às ideias de composição, transformação e comparação de medidas, que são os tipos de tarefas relacionadas às Estruturas Aditivas de Base (VERGNAUD, 1990, 2009a) das categorias I, II e III. Cabe destacar que essas categorias não são trabalhadas em sua totalidade, no que se refere aos tipos de tarefas que as compõem, como podemos notar no quadro a seguir.

Quadro 4: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do primeiro ano - Parte II

	T1₁	T1₂	T2₂	T2₃	T3₁	T3₂	Total
Total	21	5	18	2	2	2	50

No quadro 4 fica evidente a valorização por tarefas de composição e transformação (T1₁, T1₂, T2₂ e T2₃), em especial as do tipo protótipo (T1₁ e T2₂), (MAGINA, 2001), que na resolução não mobilizam a operação inversa da que é colocada em jogo na situação. Ou seja, quando as palavras ganho ou perda estão presentes em um enunciado de uma situação-problema, por exemplo, uma solução eficaz é, respectivamente, a realização do cálculo de adição ou subtração dos números presentes na tarefa. Ademais, embora apareçam tarefas relacionadas à ideia de comparação de medidas, elas são escassas. Não entendemos essa característica como negativa, considerando que o livro do primeiro ano é o primeiro contato formalizado da criança com o campo aditivo. Seria prematuro propor o estudo de todas, ou até mesmo muitas, das situações do campo aditivo, bem como seria ambicioso e contraditório com a Teoria dos Campos Conceituais esperar que o aluno compreenda todas elas de uma só vez.

Sobre os demais tipos de tarefas presentes nessa parte do livro, faz-se necessário alguns comentários que ainda não foram explicitados. Para tanto, trazemos, a seguir, a tabela com a sua frequência:

Quadro 5: Demais Tipos de Tarefas - Livro do primeiro ano - Parte II

	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	Total
Total	3	10	40	7	38	4	14	116

Nessa parte do livro outros contextos, diferentes da temática “dinheiro”, ilustraram as situações problemas. Nesse cenário, o T7, valorizado na Parte I, está presente apenas no final do capítulo no tópico “Vamos ver de novo”.

O T9 é consideravelmente mais trabalhado que o T10, e ambos se resumem à tradução matemática de situações dadas. No primeiro tipo de tarefa as situações são apresentadas em ostensivos imagem e no segundo na língua materna. Acreditamos que a justificativa de o T9 se sobressair, quantitativamente, ao T10 esteja relacionada aos ostensivos utilizados em cada um deles, considerando que o registro figural nesse nível de escolaridade pode ser mais fácil de ser compreendido que o registro escrito, uma vez que as crianças estão sendo alfabetizadas.

Nessa parte do livro teve destaque o T11, voltado à prática de efetuar operações de adição e subtração sem um contexto envolvido. Essa presença acentuada desse tipo de tarefa está relacionada à importância dada ao momento do trabalho com a técnica. Cabe dizer, para reforçar, que esse tipo de tarefa foi trabalhado de diferentes maneiras, ou seja, por diferentes técnicas e conseqüentemente por diferentes ostensivos, o que proporciona um “campo fértil” para se trabalhar as operações de adição e subtração, além de também ser uma maneira de abordar as diferentes ideias próprias dessas operações. No entanto, apesar da diversidade de procedimentos de cálculo, a análise nos permite concluir que muitas técnicas são utilizadas localmente, ou seja, são apresentadas isoladamente em uma determinada parte do livro e omitidas nos demais momentos. É nesse sentido que muitas das ideias intrínsecas aos diferentes ostensivos mobilizados não são muito exploradas, como a ideia de ordenação da reta numérica e a de composição de “tamanhos” do material Cuisenaire.

Com o intuito de identificar as principais técnicas propostas e relacioná-las com os tipos de tarefas mobilizados, apresentamos o quadro a seguir no qual a cor preta indica as técnicas que foram utilizadas para responder determinado tipo de tarefa e a cor cinza está presente nos tipos de tarefas que não conseguimos determinar com exatidão as técnicas mobilizadas.

Quadro 6: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do primeiro ano - Parte II

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13
τ_2		■						■	■	■			■
τ_3							■	■	■	■			■
τ_4	■		■					■	■	■			■
τ_5								■	■	■	■		■
τ_6	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		■
τ_7		■			■	■		■	■	■			■
τ_8			■					■	■	■			■
τ_9	■	■				■	■	■	■	■			■
τ_{10}								■	■	■			■
τ_{11}	■							■	■	■	■		■
τ_{12}								■	■	■	■	■	■

Os tipos de tarefas que possuem destaque na cor cinza indicam aquelas não possuem uma técnica algoritmizável/descritível, caso esse particular dos tipos de tarefas T8, T9 e T10.

Cabe pontuar que a técnica τ_1 esteve presente na Parte I do livro e é abandonada na Parte II dando lugar a novas técnicas que mobilizam outros ostensivos que possuem uma *qualidade* instrumental mais abrangente. O mesmo ocorre com a τ_2 , que é utilizada para resolver uma única tarefa nessa parte do livro. Esse evento era previsto pela baixa valência instrumental dos ostensivos utilizados por essas técnicas.

Na praxeologia proposta há poucos momentos destinados à institucionalização. No decorrer dos capítulos não há espaços dedicados a definir elementos da praxeologia, salvo que em cada final de capítulo tem-se o tópico “O que estudamos”, no qual é feito um resumo das técnicas e ideias trabalhadas. Isso talvez se dê pelo perfil desse nível de escolaridade, em que os elementos tecnológicos e teóricos quando não são omitidos em sua totalidade, estão encobertos ao longo do estudo.

O momento dedicado à avaliação das técnicas não foi identificado, visto que elas não são colocadas à prova pelos alunos por meio de atividades, embora consigamos perceber, durante a análise do desenvolvimento da praxeologia proposta, o abandono de técnicas em virtude de outras mais *abrangentes*, com um domínio de aplicação mais amplo. Todavia, essas discussões não são colocadas à tona no estudo do campo aditivo.

A Parte III é analisada a seguir. Nessa parte do livro são apresentados os números naturais até 100, desse modo, nos cabe investigar quais técnicas até então utilizadas irão permanecer, bem como que novas técnicas irão surgir devido a expansão do trabalho com os números naturais.

4.3 PARTE III – ÚLTIMOS CAPÍTULOS DO LIVRO: ESTUDO DOS NÚMEROS ATÉ 100

Na Parte III há a expansão dos números naturais de maneira gradativa até alcançar o número 100. O estudo dos números naturais maiores que 10 produz técnicas que são empregadas em tarefas do campo aditivo, reafirmando mais uma vez que o sistema de numeração decimal fundamenta e engendra as técnicas utilizadas nesses momentos de estudo, o que caracteriza o bloco tecnológico-teórico dessa praxeologia, que é construído, ao longo do volume 1 concomitantemente às diferentes atividades e técnicas sugeridas.

A praxeologia na Parte III ganha mais quatro técnicas e um tipo de tarefa. Em contrapartida, cinco das técnicas presentes na Parte II são abandonadas e o estudo do campo aditivo deixa de acontecer por meio de alguns tipos de tarefas presentes em momentos anteriores de estudo. A seguir, delinearemos com mais detalhes essas observações.

O agrupamento de 10 em 10 e a decomposição dos números em, por exemplo, unidades e dezenas é um tipo tarefa praticado no estudo do sistema de numeração decimal, o que pode ser observado nos seguintes excertos:



Figura 42: Exemplicação da técnica de agrupamento.

Fonte 20: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 167.

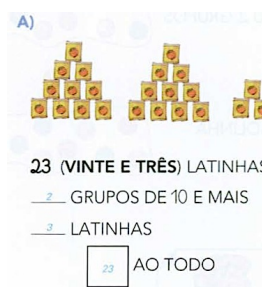


Figura 43: Exemplicação da técnica de decomposição.

Fonte 21: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 176.

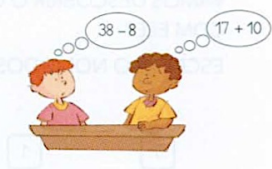
Esses tipos de tarefas tornam-se técnicas eficazes para resolver situações do campo aditivo. Desse modo, as nomeamos, respectivamente, de

τ_{13} - (Para $a \in \mathbb{N}^*$) agrupar de a em a
τ_{14} - Decompor um número em unidades, dezenas, centenas, e etc

É preciso destacar que não estamos considerando a técnica τ_{13} apenas no seu sentido de manipulação de elementos de coleções, mas também nos agrupamentos de 10 em 10, por exemplo, feitos com números, tal como: $10 + 2 + 8 = 10 + 10 = 20$. A aplicação dessas técnicas pode ser observada no *novo* tipo de tarefa:

- *T14 – Calcular mentalmente*

CÁLCULO MENTAL
ATIVIDADE EM DUPLA
 TROQUE IDEIAS COM O AMIGO DO LADO E JUNTOS DESCUBRAM OS RESULTADOS.
 CADA UM ESCREVE NO SEU LIVRO.



A) $38 - 8 = \underline{\quad 30 \quad}$ C) $15 + 5 = \underline{\quad 20 \quad}$ E) $34 - 30 = \underline{\quad 4 \quad}$
 B) $17 + 10 = \underline{\quad 27 \quad}$ D) $20 - 20 = \underline{\quad 0 \quad}$ F) $10 + 20 = \underline{\quad 30 \quad}$

Figura 44: Cálculo mental livro do primeiro ano.
Fonte 22: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 183.

Os cálculos presentes nessa atividade são adequados para a mobilização das ideias de reserva e empréstimo próprias das operações de adição e de subtração, respectivamente, de modo a oportunizar o cálculo mental empregado pelos agrupamentos e decomposição dos números. Nesse sentido, esses cálculos limitam-se ao trabalho entre unidades e unidades e entre dezenas e dezenas. Cabe destacar que a construção do sistema de numeração decimal e de algumas de suas regularidades, presente nessa parte do livro, pode facilitar a aplicação dessas técnicas.

Esse último tipo de tarefa só foi evidenciado na análise nessa parte do livro. No entanto, na parte anterior a essa, há enunciados que fazem referência ao cálculo mental, porém não as categorizamos como tal. Consideramos que nas outras circunstâncias o trabalho matemático estava exclusivamente ligado à exploração e manipulação de ostensivos, não viabilizando, efetivamente, o procedimento mental das técnicas trabalhadas, visto que, “de forma simples, pode-se dizer que se calcula mentalmente quando se efetua uma operação, recorrendo-se a procedimentos confiáveis, sem os registros escritos e sem a utilização de instrumentos” (BRASIL, 1997).

Para exemplificar trouxemos a seguinte atividade presente na Parte II:

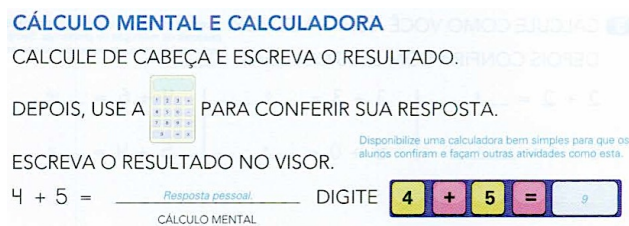


Figura 45: Exemplificação de atividade não considerada no livro do primeiro ano.
Fonte 23: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - primeiro ano, p. 136.

Nessa atividade o cálculo “4 + 5”, com a praxeologia até então desenvolvida, é resolvido, em geral, por meio dos ostensivos dedos e *risquinhos*. Não há, até aquele momento, o desenvolvimento de técnicas que instrumentalizam o aluno a resolver essa conta por meio do cálculo mental.

Para dar continuidade à discussão dos tipos de tarefas e técnicas propostas nessa parte do livro, expomos o quadro com a frequência de cada tipo de tarefa. Pode-se notar que há tipos de tarefas que não aparecem mais nessa parte do livro, como o T9 e o T10. Algumas técnicas também deixaram de ser aplicadas e outras foram agregadas à praxeologia proposta. Essas e outras conclusões sobre a Parte III são detalhadas adiante.

Quadro 7: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do primeiro ano - Parte III

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₂	T3 ₁	Total
Total	14	1	7	2	24

Quadro 8: Demais Tipos de Tarefas - Livro do primeiro ano - Parte III

	T7	T8	T11	T12	T14	Total
Total	6	1	16	2	9	34

Os tipos de tarefas relacionadas às Categorias de Base das Estruturas Aditivas, evidenciados no quadro 7, continuam sendo estudados na mesma perspectiva da Parte II: há a prioridade no trabalho com as ideias de composição e transformação, em particular com as situações que pedem o valor da composição de duas medidas (T1₁) e o estado final de uma transformação (T2₂), ou seja, as situações que mobilizam a estratégia de aplicar diretamente a operação em jogo.

O tipo de tarefa T7 aparece em alguns momentos nessa parte do livro. A variedade de cédulas e as possíveis composições entre elas é ampliada em virtude da expansão dos números naturais, pois, nesse momento o aluno já tem condições de trabalhar com valores de dinheiro maiores que 10. Desse modo, a técnica desenvolvida para a contagem de dinheiro na Parte I do livro (τ_3) é esquecida nessa ocasião por não

ser tão eficiente, diferentemente da técnica τ_{13} que se mostrou presente e adequada para resolver tarefas desse tipo.

O tipo de tarefa T11, relacionado às cálculos de adição e subtração desconectadas de um contexto é aplicado nessa parte do livro apenas para o treino da nova técnica τ_{15} :

τ_{15} – Somar ou subtrair de um em um por meio da fala com o auxílio de uma tabela partindo do maior valor

Essa técnica faz uso de um novo ostensivo, a tabela, que auxilia a realização da operação cuja parcela da adição ou o minuendo da subtração sejam números de duas casas decimais, da maneira como ilustra as seguintes imagens:

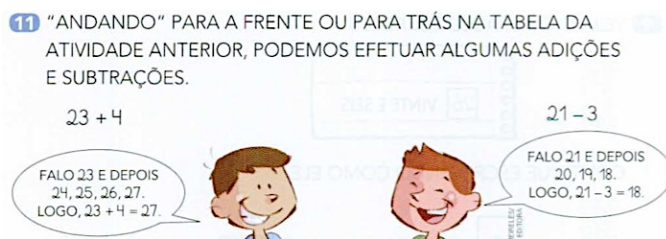


Figura 46: Técnica de "andar" na tabela.

Fonte 24: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - livro do primeiro ano, p. 178.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Figura 47: Tabela de 0 a 29.

Fonte 25: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - livro do primeiro ano, p. 177.

O ostensivo “fala” se mostrou um importante recurso em todas as três partes do livro, considerando que ele auxilia o pensamento e ajuda na organização da ação do aluno na execução de tarefas (VERGNAUD, 1990).

Uma criança de 5 anos enumera contanto em voz alta; um aluno de 12 anos trata uma equação algébrica escrevendo no papel e murmurando. De modo geral, o tratamento de uma situação nova se faz acompanhar por uma atividade linguística e simbólica. Esta atividade é eventualmente interiorizada. Ela é tanto mais importante e manifestada, quanto mais nova é a situação e menos automatizado o tratamento. (VERGNAUD, 1990, p. 168, tradução nossa).

Nesse volume o uso da oralidade como instrumento para efetuar determinados cálculos esteve intimamente relacionado à ideia de completar ou subtrair de um em um. Dependendo da operação a ser efetuada, esse ostensivo é associado a outros, como é o caso da tabela na técnica τ_{15} .

Alguns ostensivos para o trabalho com números maiores que 10, o que justifica a ausência das técnicas τ_5 e τ_{10} , bem como a modesta frequência das técnicas τ_7 e τ_8 e τ_9 . O mesmo acontece com a técnica τ_6 que, apesar de estar consideravelmente presente na Parte III, só é utilizada em tarefas que mobilizam o trabalho com números naturais inferiores a 20 por empregar os ostensivos *risquinhos* e *bolinhas*.

A partir do exposto, no que tange o bloco técnico-prático [T, τ], parte da análise pode ser sintetizada no seguinte quadro:

Quadro 9: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do primeiro ano - Parte III

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₂	T3 ₁	T7	T8	T11	T12	T14
τ_3	■		■			■	■		■
τ_4	■					■			
τ_6	■	■				■			
τ_7			■			■			
τ_8	■		■			■			
τ_{12}						■		■	
τ_{13}	■		■		■	■	■		■
τ_{14}						■			
τ_{15}			■			■	■		

Todavia, cabe considerar que os tipos de tarefas e técnicas que são privilegiadas nessa última parte do livro são os T1₁, T2₂ e T11 e as τ_6 , τ_{13} , τ_{14} , e τ_{15} .

Para concluirmos a análise referente ao livro do primeiro ano do ensino fundamental, a seguir apresentamos uma breve discussão de alguns aspectos levantados com a investigação que tornam possíveis construir um cenário da praxeologia proposta para o ensino das operações de adição e subtração nesse ano escolar.

4.4 ALGUMAS CONCLUSÕES DO LIVRO DO PRIMEIRO ANO

A análise do livro do primeiro ano revela a proposta de ensino para a apresentação do conteúdo de adição e subtração. São, por meio dos estudos de contagem e do sistema de numeração decimal, que notamos o ensino do campo aditivo emergir. É nesse contexto que identificamos as primeiras noções dessas operações, que modelamos por meio de tipos de tarefas, técnicas e tecnologias, embora essas últimas ainda possam ser, matematicamente falando, bastante simples e crédulas devido ao nível de escolaridade a que se destina o livro.

Nesse primeiro contato *escolarizado*¹⁸ das operações de adição e subtração identificamos 12 tipos de tarefas e 14 técnicas. No decorrer das três partes analisadas pudemos notar o abandono e a permanência de certos tipos de tarefas e técnicas, o que ocorre devido a questões *ecológicas*¹⁹ (BOSCH e CHEVALLARD, 1999) que estruturam a praxeologia, e também em virtude de escolhas didáticas do autor da coleção. Para melhor visualização e compreensão do ensino investigado, apresentamos, a seguir, um quadro que visa sintetizar a praxeologia proposta ao final do livro do primeiro ano. Para tanto, consideramos a seguinte legenda:

- Os tipos de tarefas e técnicas *inauguradas* apenas na última parte do livro recebem um *destaque verde*;
- Os *destaques em azul* correspondem aos tipos de tarefas e técnicas propostas em outros momentos e que *permanecem* ainda ao final do livro;
- Os itens com *destaque vermelho* são aqueles que estiveram presentes em outras partes do livro e foram *abandonados* e, portanto, não se encontram mais na última parte do livro;

Quadro 10: Síntese dos tipos de tarefas da parte final do livro do primeiro ano

T1 ₁	T1 ₂	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14
-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----

Quadro 11: Síntese das técnicas da parte final do livro do primeiro ano

τ ₁	τ ₂	τ ₃	τ ₄	τ ₅	τ ₆	τ ₇	τ ₈	τ ₉	τ ₁₀	τ ₁₁	τ ₁₂	τ ₁₃	τ ₁₄	τ ₁₅
----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------

No ensino investigado notamos uma proliferação de diversos ostensivos que, além de evocar diferentes ideias sobre as operações de adição e subtração, também mobilizam diferentes estratégias de resolução. Todavia, ao observarmos o quadro 11 percebemos, já no livro do primeiro ano, uma tendência para o abandono de determinadas técnicas em virtude dos ostensivos nelas empregados. É nesse sentido que os dedos, a reta numérica e o material Cuisenaire não são mais utilizados já ao final do primeiro volume, uma vez que esses têm baixa valência instrumental. Dessa forma, novas técnicas são trazidas ao ensino *substituindo* as que não são mais aplicáveis, isso se deve ao fato de aquelas poderem ser utilizadas em uma gama maior de tarefas. Em meio a essa discussão podemos *sentir* os primeiros sinais de *evolução* da praxeologia quanto à redução dos ostensivos.

¹⁸ Lembramos que a criança, antes mesmo de entrar na escola, já vivencia experiências que envolvem as operações de adição e subtração, construindo intuitivamente alguns dos conceitos empregados no estudo escolar.

¹⁹ Relacionadas às condições que fazem um certo objeto pertencer ou não à uma instituição.

Ainda sobre o uso dos ostensivos, cabe observar a escolha didática do autor em valorizar as técnicas que fazem uso de *risquinhos* e *bolinhas* para representar quantidades, visto que esses possuem uma baixa valência instrumental assim como os demais ostensivos supracitados e ainda assim permanecem ao final do livro para responder situações convenientes ao seu uso, aquelas que envolvem números menores que 20.

A respeito dos tipos de tarefas contextualizadas, percebemos que as principais ideias das situações próprias do campo aditivo – composição, transformação e comparação – foram mobilizadas, sendo ora ou outra, uma mais valorizada que a outra, a depender do objetivo didático do momento. Entretanto, é evidente a pertinência dada às situações canônicas, que são aquelas em que a operação a ser realizada é facilmente identificada por alguma palavra no enunciado da tarefa. Sobre os demais tipos de tarefas, é possível perceber a importância dada à sistematização e à prática das ideias apresentadas pelo autor, promovida pelo momento de trabalho com a técnica por meio da resolução de várias tarefas de um mesmo tipo, o que já nos alerta quanto à um ensino voltado mais para a perspectiva tecnicista (GASCÓN, 2003). Ao encontro dessa análise, notamos que a valorização do ensino sobre as técnicas é sentida também pelo modo isolado como elas são apresentadas: explora-se uma técnica, para depois explorar outra, e assim sucessivamente.

Na sequência do texto apresentamos a análise dos próximos volumes da coleção, em busca de entendermos o desenvolvimento praxeológico para o ensino do campo aditivo no decorrer dos anos iniciais.

5 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DO LIVRO DO SEGUNDO ANO

O livro do segundo ano foi dividido em quatro partes da maneira como segue: a Parte I constitui-se dos capítulos iniciais anteriores àquele destinado, em particular, a estudar as operações de adição e subtração (páginas 1 à 57); a Parte II coincide com o capítulo dedicado a esse estudo com números de 0 a 19 (páginas 58 à 87); a Parte III (páginas 88 à 171) são os capítulos subsequentes ao capítulo da Parte II e anteriores aos capítulos da Parte IV (páginas 172 à 255), sendo esses últimos referentes às quatro operações elementares da matemática, propostos com o intuito de ampliar o estudo de cada uma delas.

5.1 PARTE I - PRIMEIROS CAPÍTULOS: ESTUDO DOS NÚMEROS ATÉ 19

No que tange o campo Números e Operações, de acordo com o Guia do PNL (BRASIL, 2012), a Parte I constitui no estudo dos números até 19, incluindo: a contagem, os algarismos, os registros, as dezenas, os usos, a comparação e a ordenação. Nessa primeira parte acontece a retomada do estudo das operações de adição e subtração dos números naturais por meio de diferentes tipos de tarefas e técnicas presentes no livro do ano anterior.

No total foram consideradas 25 tarefas que enquadramos como próprias do campo aditivo, as quais classificamos em 9 tipos. Nota-se, portanto, que cada tipo de tarefa não foi intensamente trabalhada, o que pode ser justificado pelo papel principal atribuído a elas: o de rever/relembrar as ideias abordadas no ano anterior. Para o trabalho com essas ideias 6 técnicas foram mobilizadas, todas também presentes no livro do primeiro ano. A seguir apresentamos as técnicas utilizadas, os ostensivos que elas empregam, bem como os tipos de tarefas que elas respondem.

Sobre as tarefas contextualizadas relacionadas às Estruturas Aditivas de Base (VERGNAUD, 1990, 2009a) é preciso considerar que no primeiro livro a construção dos números naturais tomava como foco a ideia de composição de medidas, visto que a criança estava sendo apresentada aos números e a ação de enumerar quantidades de objetos de coleções, natural desse estudo, possui em seu âmago a ideia de compor medidas – a composição de um em um. Já no segundo livro esse estudo não é mais priorizado: as crianças estão familiarizadas com os números como sendo uma

representação de quantidades, e é a ordenação deles que ganha destaque nessa parte. Nesse cenário o trabalho de “quem é maior”, “quem é menor” traz à tona a ideia de comparação, o que podemos notar nas frequências dos tipos de tarefas T3₁ e T3₂:

Quadro 12: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do segundo ano

	T1 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	Total
Total	1	1	2	3	7

Para responder a esses tipos de tarefas alguns ostensivos são retomados, como a reta numérica. Sobre esse ostensivo faz-se necessário dois comentários. No livro do primeiro ano a reta numérica foi utilizada apenas para efetuar cálculos sem um determinado contexto, isto é, o seu estudo resumia-se em praticar a técnica em que esse ostensivo é empregado (τ_{11}). Já no livro do segundo ano a reta numérica é utilizada também para discutir a ordem dos números e para resolver situações de comparação por meio do “complemento” de um em um.

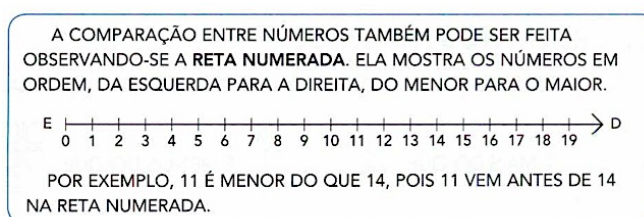


Figura 48: Reta numérica para situações de comparação.
Fonte 26: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - segundo ano, p. 34.

O segundo comentário sobre esse ostensivo é relativo à reta numérica exibida ao aluno, como mostra a Figura 47, e a apresentada na resposta do livro do professor de uma tarefa do tipo comparação de medidas (Figura 48).

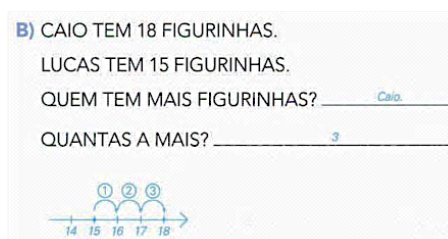


Figura 49: Tarefa de comparação respondida com o ostensivo reta numérica.
Fonte 27: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - segundo ano, p. 34.

A reta numérica, exibida como possível resposta da atividade, não tem o seu início no zero, diferente do que é apresentado ao aluno. Essa adaptação no ostensivo o torna mais abrangente, podendo ser aplicado em mais situações. No entanto, esse

“corte” na reta numérica não foi proposto e dessa forma, dá-se a entender que o autor do livro acredita na espontaneidade dessa adaptação por parte do aluno.

A prática de contar elementos a fim de descobrir a medida resultante da união de dois conjuntos está presente em duas técnicas, a τ_4 e a τ_6 . Situações que podem ser respondidas por meio da contagem e, em particular, por meio dos ostensivos como os *risquinhos* e *bolinhas* são aquelas que trabalham com os números de 0 a 19. Todavia, mesmo que o trabalho se limite a eles, ainda sim desenhar e contar 18 *risquinhos* a fim de responder uma dada atividade, por exemplo, pode ser custoso e acarretar erros, considerando as dificuldades, como a motora, de enumerar uma coleção que contém muitos elementos. Frente a isso, outra técnica é agregada à τ_6 , de modo a simplificar a manipulação dos *risquinhos*, cujo exemplo é dado a seguir.

EXEMPLO: $7 + 6 = ?$  $7 + 6 = 10 + 3 = 13$

Figura 50: Ostensivo *risquinhos* com agrupamento.
Fonte 28: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - segundo ano, p. 27.

Notamos que por meio do trabalho feito com o ostensivo figural é apresentado também o ostensivo numérico que traduz matematicamente a manipulação realizada. Nesse cenário a técnica de agrupar de 10 em 10 oportuniza uma maior valência instrumental dos *risquinhos*. Cabe adiantar que ainda nesse livro o trabalho com essa técnicas oportunizará procedimentos aritméticos do tipo “ $7 + 6 = 7 + 3 + 3 = 10 + 3 = 13$ ”.

A *maneira de fazer* que engloba a τ_6 e a τ_{13} é praticada por meio do tipo de tarefa T11, e é nesse contexto que o aluno se deparara, pela primeira vez, com adições de 3 parcelas. Nessa circunstância a ordem das parcelas não é levada em conta, pois a técnica se concentra na ideia de compor medidas por meio da ação de “juntar os pauzinhos”. Desse modo, não há a necessidade da discussão acerca da propriedade associativa válida na operação de adição.

As frequências do T11 e dos outros tipos de tarefas não contextualizados presentes na Parte I do livro podem ser observadas no quadro a seguir.

Quadro 13: Demais Tipos de Tarefas – Livro do segundo ano - Parte I

	T7	T8	T9	T11	T12	T14	Total
Total	4	1	5	7	1	1	19


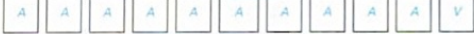


Para responder a esses tipos de tarefas foram utilizadas 6 técnicas; 5 delas respondem também à situações contextualizadas, e portanto, já foram comentadas. A única técnica da qual não nos referimos na análise da Parte I e que se encontra presente nessa parte do livro é a τ_3 . Essa técnica não é abordada de maneira explícita, ou seja, não há momentos em que há a exigência que uma determinada tarefa seja respondida por meio dela. No entanto, com a construção da praxeologia proposta no livro do primeiro ano, acreditamos que algumas das atividades referentes ao campo aditivo nessa parte do livro do segundo ano são propícias de serem respondidas por ela, considerando ainda que, nesses casos, não há evidências de como essas atividades devem ser realizadas ao observarmos o livro do professor e os enunciados. A relação dos tipos de tarefas e técnicas presentes nessa análise pode ser observada no quadro a seguir.

Quadro 14: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do segundo ano - Parte I

	T1₁	T2₃	T3₁	T3₂	T7	T8	T9	T11	T12	T14
τ_3					■	■	■	■		■
τ_4	■	■		■		■	■			
τ_6			■			■	■	■		
τ_{11}				■		■	■			
τ_{12}						■	■		■	
τ_{13}					■	■	■	■		

Considerando que essa Parte I é constituída por 57 páginas, de modo geral, todos os tipos de tarefas são propostos esporadicamente. No entanto, por meio desses tipos de tarefas alguns elementos tecnológicos começam a ser construídos. A exemplo, o trabalho feito por meio do tipo de tarefa T9 oportuniza a conjectura de que ao somar uma dezena inteira a uma quantidade de unidades obtemos um número do tipo “1x”, com x sendo um número natural entre 0 e 9. Como podemos observar:

1 EM CADA LINHA, DA ESQUERDA PARA A DIREITA, PINTE SEMPRE UMA DEZENA DE QUADRADINHOS DE AZUL E O RESTANTE DE VERMELHO.
Faça esta atividade oralmente com os alunos. "dez mais um, onze"; "dez mais dois, doze"; etc.

 10 DEZ
 $10 + 1 = 11$ ONZE
 $10 + 2 = 12$ DOZE
 $10 + 3 = 13$ TREZE

2 OBSERVE E COMPLETE:







 $10 + 4 = 14$ CATORZE OU QUATORZE	 $10 + 7 = 17$ DEZESSETE
 $10 + 5 = 15$ QUINZE	 $10 + 8 = 18$ DEZOITO
 $10 + 6 = 16$ DEZESSEIS	 $10 + 9 = 19$ DEZENOVE

Figura 51: Atividade que exemplificam uma suposta conjectura.
Fonte 29: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - segundo ano, p. 25.

Embora muitas conjecturas como essas não sejam institucionalizadas, elas são utilizadas implicitamente em momentos posteriores para a construção e fundamentação de novas técnicas propostas nas demais partes.

5.2 PARTE II – CAPÍTULO INTITULADO “ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO”

A Parte II é constituída pelo capítulo “Adição e Subtração”. Para introduzir o estudo desse tema o autor apresenta um contexto relativo a compras e comenta da necessidade de efetuar adições e subtrações em situações como essa. Em seguida anuncia a retomada e a expansão do estudo já visto. Em comparação à praxeologia desenvolvida no livro do primeiro ano, apenas um tipo de tarefa e duas técnicas são inseridas no ensino proposto. Vimos, assim, o estudo feito no ano anterior ser trazido nessa parte cujo trabalho se limita aos números de 0 a 19.

O capítulo em questão é estruturado de modo a tornar o estudo da adição separado do da subtração, salvo ao término do capítulo, em que há dois tópicos intitulados “Adição e Subtração: operações inversas” e “Atividades e problemas com adição e subtração”, cuja intenção é relacionar tais operações. No decorrer do ensino de cada uma dessas operações são abordadas, nessa ordem: as ideias da adição/subtração; as maneiras de efetuá-las; e uma lista de atividades e problemas.

Nessa Parte II apresenta-se ao aluno, pela primeira vez, a operação disposta na vertical. Nas respostas do livro do professor são exibidas, em geral, o modo (técnica) de se efetuar a tarefa, a expressão matemática na horizontal e o ostensivo na vertical que representa o algoritmo usual dessas operações. Essa nova maneira de representar a operação também está presente em alguns enunciados de atividades.

2 REPRESENTE AS ADIÇÕES COM DESENHOS E COM NÚMEROS, COMO NOS DOIS EXEMPLOS:

$$5 + 2 \quad \begin{array}{c} 5 \quad 2 \\ \text{|||||} \quad \text{||} \\ \hline 7 \end{array} \quad 5 + 2 = 7 \quad \text{OU} \quad \begin{array}{r} 5 \\ + 2 \\ \hline 7 \end{array}$$

Figura 52: Diferentes maneiras de representar uma adição.
Fonte 30: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática, segundo ano, p. 60.

É importante destacar que esse ostensivo, ainda nesse momento, não é um instrumento para efetuar cálculos; sua apresentação ao aluno possui exclusivamente um caráter semiótico para a representação das operações de adição e subtração.

Nesse cenário algumas tarefas contextualizadas são propostas para mobilizar as ideias próprias dessas operações. Consideramo-nas como sendo de 7 tipos:

Quadro 15: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do segundo ano - Parte II

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₂	T4 ₂	Total
Total	15	2	2	10	1	11	1	43

Observa-se nesse quadro que há a valorização dos tipos de tarefas T1₁, T2₂ e T3₂. Esse fato reafirma os tipos de situações que são priorizadas para o ensino do campo aditivo desde o livro do primeiro ano. Tais tipos de tarefas não mobilizam, em sua resolução, a operação inversa da que é colocada em jogo no enunciado da atividade. Elas são consideradas, nesse sentido, mais fáceis, o que justifica essa maior frequência em detrimento dos demais tipos, visto que, no segundo ano, a criança ainda está sendo apresentada às particularidades dessas operações.

A seguir apresentamos os demais tipos de tarefas presentes nessa parte e, antes da análise das técnicas, faremos alguns comentários que detalham o ensino e fomentam discussões que acreditamos serem necessárias para caracterizar a praxelogia proposta.

Quadro 16: Demais Tipos de Tarefas - Livro do segundo ano - Parte II

	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	Total
Total	3	18	24	118	4	8	2	7	184

O quadro 16 evidencia algumas observações que consideramos importantes: a frequência abusiva do tipo de tarefa T11; a pouca presença nesse estudo do tipo de tarefa T8 e T14; e a notória diferença em quantidade desses tipos de tarefas com as do tipo contextualizadas – as tarefas “sem contexto” são 4 vezes mais trabalhadas que as contextualizadas. Frente a isso, conclui-se que o ensino tem como foco a prática das técnicas, visto que o T11 é geralmente proposto com a finalidade de treinar as técnicas apresentadas no livro.

O T9 e o T10 se mostram presentes sempre em momentos de estudo destinados ao campo aditivo. Reproduzir matematicamente uma situação é fundamental em todo estudo que articula diferentes tipos de ostensivos considerados *não matemáticos*, como a língua materna. Acreditamos que essa tradução matemática não é simples, o que torna a presença dessas tarefas importante. Entretanto, em momentos de estudos *mais maduros* esses tipos de tarefas não aparecem explicitamente nos enunciados das atividades, mas estão interiorizadas nas técnicas utilizadas, haja vista que descobrir e explicitar a operação “eficaz” a ser realizada é a essência do estudo das situações. E é nesse sentido que a diversidade dessas situações se torna fundamental para que tarefas desse tipo sejam *problemáticas* (CHEVALLARD, 1999) – visem a construção de algum conhecimento – ao longo do ensino dos anos iniciais. Caso contrário, se o ensino priorizar sempre situações de enunciados parecidos, então, os dois tipos de tarefas em questão tornam-se mecanismos de resolução e não resultados de um pensamento elaborado, necessário para reconhecer a expressão matemática que traduz situações propostas.

Nessa parte do livro um novo tipo de tarefa é agregado à praxeologia:

- *T15 - Encontrar uma medida – parcela, minuendo ou subtraendo – de uma dada adição ou subtração;*

Esse tipo de tarefa nasce da relação de operação inversa das operações de adição e subtração, que é construída ostensivamente.

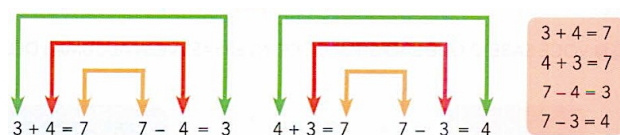


Figura 53: Operação inversa.

Fonte 31: Coleção Ápis - alfabetização matemática - segundo ano, p. 80.

Antes de apresentar ao aluno o esquema ilustrado na Figura 52, o autor propõe uma discussão sobre situações contrárias, como “sobe e desce” e “entra e sai” e expõe

também duas situações por meio de ostensivo imagem e pede para descrevê-las por meio de expressões matemáticas (T9) – essas expressões são, justamente, uma a inversa da outra. Momentos como esse caracterizam, nesse nível de escolaridade, como relativos à construção do entorno tecnológico-teórico. Imediatamente após esse estudo é institucionalizado que as operações de adição e subtração são operações inversas. Essa construção permanece como um resultado próprio do campo aditivo tanto como elemento tecnológico-teórico quanto como técnica:

τ_{16} – Utilizar a operação inversa

A elaboração da técnica é promovida pelo tipo de tarefa T14 e por situações-problema que, para serem respondidas, mobilizam a ideia contrária da que é enunciada, como uma situação de ganho que é resolvida por uma subtração.

Outra técnica nova que aparece nesse capítulo é a seguinte:

τ_{17} – Agrupar parcelas dois a dois efetuando as suas somas

Por meio de uma situação de composição de medidas o autor do livro ilustra, sem mencionar, a propriedade associativa válida na operação de adição, o que origina a técnica em questão.

$$\begin{array}{ccc}
 3 + 1 + 4 = 8 & \text{OU} & 3 + 1 + 4 = 8 & \text{OU} & 3 + 1 + 4 = 8 \\
 \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\
 4 + 4 & & 3 + 5 & & 7 + 1
 \end{array}$$

Figura 54: Exemplificação da técnica τ_{17} .

Fonte 32: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - segundo ano, p. 69.

Observamos, na Figura 53, que são apresentadas todas as possibilidades de se calcular a soma das três parcelas. Nessa circunstância não há mais a discussão sobre como resolver as adições de duas parcelas presentes nessas expressões, acreditamos então que essas tarefas já são consideradas *rotineiras* pelo autor do livro didático (CHEVALLARD, 1998). Na sequência há uma lista de tarefas do tipo T11, que consiste, nessa ocasião, em resolver cálculos de adição de 3 parcelas, em que a criança deve treinar a técnica aprendida. Após esse momento são propostas situações problemas que também empregam a τ_{17} .

As demais e principais técnicas mobilizadas nessa parte do livro do segundo ano também estão presentes no livro do primeiro ano e, portanto, as discussões concernentes a elas não são diferentes das que foram apresentadas na análise anterior. Isso se deve ao fato de esse capítulo se constituir em uma retomada do que já tinha sido proposto. Desse modo, nos cabe lembrar e relacionar as técnicas mobilizadas com os tipos de tarefas propostos.

Quadro 17: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do segundo ano - Parte II

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₂	T4 ₂	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15
τ ₂															
τ ₃															
τ ₄															
τ ₅															
τ ₆															
τ ₇															
τ ₈															
τ ₉															
τ ₁₀															
τ ₁₁															
τ ₁₂															
τ ₁₆															
τ ₁₇															

Alguns dos ostensivos utilizados no livro do primeiro ano voltam a fazer parte do estudo do campo aditivo. Nesse cenário, por exemplo, o material Cuisenaire é retomado e é utilizado também em situações de subtração como ilustrado no excerto a seguir:

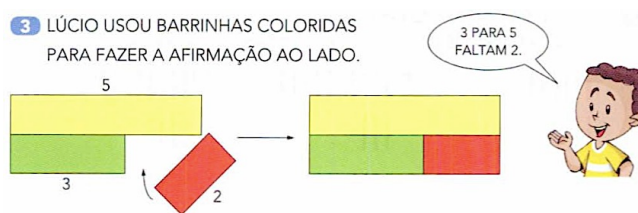


Figura 55: Material Cuisenaire em uma situação de subtração.
 Fonte 33: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - segundo ano, p. 74.

Do mesmo modo quando utilizado em situações de adição, esse material possui uma valência instrumental limitada pelo “tamanho” do número factível de ser representado por ele, o que não diminui a sua importância no ensino proposto, visto que por meio dele uma ideia diferente de medida é abordada ao compararmos aos *significados* atribuídos a outros ostensivos, como quando utiliza-se a reta numérica e os *risquinhos*.

Na continuação da análise das demais partes desse livro poderemos observar as escolhas didáticas que tornam possíveis o estudo com números naturais maiores que 19.

5.3 PARTE III – ESTUDO DO SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL

Na Parte III investigamos como e quais técnicas e tipos de tarefas persistem do ensino proposto pelas Partes I e II, além disso, há novas discussões sobre o sistema de numeração decimal que engendra outras técnicas empregadas no estudo do campo aditivo. Nessa parte alguns números maiores que 100 já são abordados.

Observa-se, nos quadros a seguir, que embora essa parte não seja destinada explicitamente ao ensino das operações de adição e subtração, os tipos de tarefas até então presentes nesse estudo aparecem com grande frequência também nessa parte.

Quadro 18: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do segundo ano - Parte III

	T1₁	T1₂	T2₂	T3₂	Total
Total	16	1	4	6	25

Quadro 19: Demais Tipos de Tarefas - Livro do segundo ano - Parte III

	T7	T8	T10	T11	T14	Total
Total	13	16	4	28	11	72

Mais uma vez os tipos de tarefas contextualizados estão consideravelmente menos presentes que os demais tipos de tarefas, visto ainda que o objetivo da prática/treino permanece. Além disso as tarefas do tipo contextualizadas prosseguem sendo, em sua maioria, de composição de medidas; aquelas que não são desse tipo trazem em seu enunciado alguma palavra que remete à operação a ser usada em sua resolução, como a palavra perda associada à operação de subtração.

O estudo do sistema de numeração decimal para números maiores que 20 oportuniza a construção de algumas regularidades, propiciando também a construção de algumas técnicas adequadas para realizar o cálculo mental e a decomposição de números, o que justifica a maior frequência dos tipos de tarefas T8 e T14 ao se comparar com a Parte II.

A seguir apresentamos, articulando com os tipos de tarefas propostos, as técnicas mobilizadas nesse estudo e tecemos algumas observações sobre elas, em especial acerca das que tiveram origem nessa parte:

τ_{18} – (Para a e $b \in \mathbb{N}^*$, de tal modo que a seja uma dezena/centena/... inteira e b seja de quantidade de casas decimais inferior que a de a) – Compor a e b , o que resulta imediatamente no número do tipo ab
τ_{19} – (Para dezenas/centenas/... inteiras) – Somar/subtrair os algarismos das dezenas/centenas/... inteiras e conservar as casas decimais nulas

Quadro 20: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do segundo ano - Parte III

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₂	T3 ₂	T7	T8	T10	T11	T14
τ_3									
τ_4									
τ_6									
τ_{13}									
τ_{14}									
τ_{15}									
τ_{17}									
τ_{18}									
τ_{19}									

Ao analisar as técnicas propostas nessa parte percebe-se que muitos dos ostensivos trabalhados na parte anterior, tais como, a reta numérica, os dedos, e as barrinhas do material Cuisenaire, foram abandonados devido ao *tamanho* dos números - maiores que 20 - trabalhados nessa ocasião. O estudo começa a se mostrar mais “abstrato”, menos manipulativo. É o caso, por exemplo, da técnica τ_{13} , que possui agora um caráter mais aritmético, ao contrário de antes, que resumia-se em juntar/manusear objetos de coleções.

1 Maria usou agrupamentos de 10 para efetuar adições mentalmente.

Exemplo: $8 + 5 = ?$



Logo, $8 + 5 = 13$.

Figura 56: Agrupamento de 10 em 10 - completar para a dezena mais próxima.
Fonte 34: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - livro do segundo ano, p. 126.

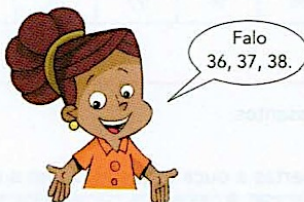
Essa renúncia pela manipulação pode ser percebida também pelo abandono da tabela (Figura 56, a seguir), referente à técnica τ_{15} . O livro sugere que a sequência numérica presente na tabela seja mobilizada mentalmente, bem como a técnica

associada empregada. A frase “Pense na sequência dos números, calcule mentalmente e coloque o resultado” evidencia o fato de que o aluno não deve usar quaisquer ostensivos para efetuar adições e subtrações. Os ostensivos devem ser, assim, *interiorizados* pela criança.

5 Cálculo mental

Caminhando na tabela da página anterior, para a frente e para trás, podemos efetuar mentalmente algumas adições e subtrações. Veja:


$35 + 3$



Falo
36, 37, 38.

Assim, $35 + 3 = 38$.

$60 - 2$



Falo
59, 58.

Assim, $60 - 2 = 58$.

Pense na sequência dos números, calcule mentalmente e coloque o resultado:


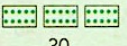
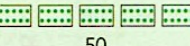
a) $63 + 4 = \underline{\quad 67 \quad}$ d) $71 - 3 = \underline{\quad 68 \quad}$

Figura 57: Cálculo mental e tabela com sequência dos números.
Fonte 35: C.A - Alfabetização Matemática - livro do segundo ano, p. 128.

Nesse cenário, em busca de responder a situações com números maiores que 20, outras técnicas passam a compor a praxeologia proposta. O estudo das dezenas e centenas inteiras faz emergir as duas novas técnicas propostas nessa parte. Discutiremos inicialmente a τ_{19} e, para tanto, analisemos o recorte em que o livro sugere o uso dessa técnica:

1 Já sabemos que $2 + 3 = 5$.
 Observe o que acontece quando juntamos 2 dezenas com 3 dezenas.

2 dezenas + 3 dezenas = 5 dezenas

 junto com  é igual a 

20 + 30 = 50

Figura 58: Adição e subtração com dezenas inteiras.
Fonte 36: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - segundo ano, p. 115.

A estratégia apresentada na Figura 57 consiste em somar ou subtrair os algarismos das dezenas inteiras conservando o zero das unidades. Notemos que não há mais a discussão de como proceder para efetuar as cálculos com números de 1 a 10; essas tarefas se tornaram *rotineiras* na praxeologia atual. Após a exposição da técnica,

como de costume, são sugeridos alguns exercícios para que ela seja treinada, momento didático dedicado ao trabalho com a técnica.

A outra técnica que se origina com o estudo dos números maiores que 20 é a τ_{18} , que versa sobre a ideia de composição dos números. Essa técnica não recebe um espaço especial para que seja discutida e institucionalizada. No entanto, a sua elaboração é oportunizada pela construção de alguns elementos tecnológicos por meio do trabalho de regularidades do sistema de numeração decimal, unido a atividades que objetiva a prática de decompor e compor um número. Nesse cenário a língua materna ganha destaque para responder adições envolvendo centenas:

Veja como se escrevem e como se leem os números obtidos quando acrescentamos um número ao 100:

- $100 + 1 = 101$ (cento e um)
- $100 + 2 = 102$ (cento e dois)
- $100 + 35 = 135$ (cento e trinta e cinco)
- $100 + 80 = 180$ (cento e oitenta)

Figura 59: Adições com números maiores que 100 por meio da técnica τ_{18} .
Fonte 37: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - livro do segundo ano, p. 139.

Cabe pontuar que essas *maneiras de fazer* apresentadas possuem, em sua essência, elementos de cunho tecnológicos, isto é, as técnicas, em geral, são inspiradas no entorno tecnológico-teórico que está em construção, relativo ao próprio sistema de numeração decimal. Essa construção do bloco tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$, relativo ao saber matemático, acontece também em outras ocasiões do livro, em que há a ativação de novos ostensivos, até então não abordados, como é o caso do material dourado.

O material dourado e as fichas são apresentados à criança com o intuito de discutir o valor posicional do sistema de numeração. Esse trabalho visa a fundamentação, compreensão e mobilização dos algoritmos comuns da adição e da subtração, que serão apresentados na próxima parte do livro. Para tanto, é dedicado um espaço, por meio de atividades, para a criança exercitar as trocas de unidades para dezenas inteiras por meio desses materiais.

Para contar mais de 10 unidades, trocamos cada grupo de 10 unidades (cubinhos) por 1 dezena (barrinha) e depois indicamos o total:

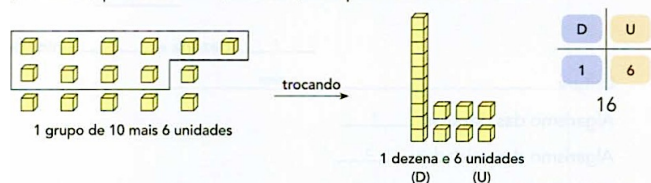


Figura 60: Material Dourado e valor posicional.
Fonte 38: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - segundo ano, p. 119.

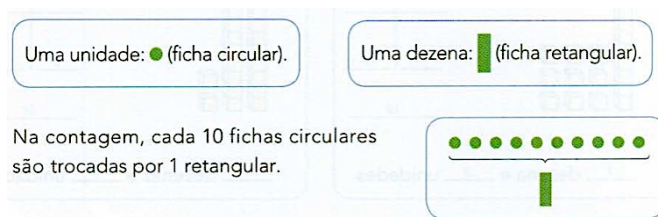


Figura 61: Como utilizar as fichas.
Fonte 39: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - segundo ano, p. 122.

A seguir apresentamos a análise da última parte do livro do segundo ano e buscaremos, por meio dela, compreender, além de outros aspectos, como esses novos ostensivos são utilizados no estudo do campo aditivo.

5.4 PARTE IV – AMPLIAÇÃO DO ESTUDO DAS QUATRO OPERAÇÕES

A parte IV é constituída dos quatro últimos capítulos do livro, destinados à ampliação do estudo das operações de adição e subtração e à introdução formal das operações de multiplicação e divisão. Cada uma dessas operações ganha um capítulo especial e são apresentadas na seguinte ordem: adição, multiplicação, subtração e divisão. Percebe-se, desse modo, que o estudo da adição é, em parte, desvinculado da subtração. No entanto, a ordem escolhida se justifica pelo fato de a adição constituir parte dos elementos tecnológicos empregados no ensino da multiplicação, como a soma de parcelas iguais. O mesmo acontece com a subtração e a divisão. Frente a isso, mesmo que apareçam cálculos de adição e subtração nesses capítulos, analisaremos aquelas que se referem particularmente ao campo aditivo, e não as que serviram de estudo para as demais operações.

A discussão que segue articula o ensino de adição e de subtração, apesar de eles estarem em capítulos distintos. Apresentamos, primeiramente, a frequência dos tipos de tarefas presentes na Parte IV para, em seguida, tratarmos das técnicas mobilizadas, bem como de outros detalhes que fomentam a caracterização do ensino proposto.

Quadro 21: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do segundo ano - Parte IV

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	Total
Total	24	2	1	19	2	2	11	61

Quadro 22: Demais Tipos de Tarefas - Livro do segundo ano - Parte IV

	T7	T8	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16 ²⁰	Total
Total	1	2	7	100	12	2	14	4	1	143

²⁰ O T16 é um novo tipo de tarefa que será detalhado adiante.

As tarefas contextualizadas foram mais abordadas nessa parte, tanto no sentido quantitativo quanto na diversidade dos seus tipos, sendo exclusivamente relacionadas às três primeiras categorias propostas por Vergnaud (1990, 2007). Os tipos de tarefas mais presentes são aqueles em que a escolha da operação a ser efetuada é sugestionada pelo enunciado da atividade. Nesse sentido, a mobilização da operação inversa ainda não ganha espaço, o que é mais um fator que evidencia a pouca articulação entre a adição e a subtração. Em relação aos demais tipos de tarefas, esses continuam sendo abordados na mesma perspectiva que a apresentada em outros momentos na análise: notamos novamente a supervalorização do tipo de tarefa T11 com o propósito de treinar as técnicas apresentadas aos alunos.

Os capítulos destinados ao ensino de adição e subtração iniciam com a apresentação de algumas das ideias próprias dessas operações, tais como, juntar quantidades, acrescentar uma quantidade a outra, tirar uma quantidade de outra e comparar. Para isso, são propostas algumas tarefas contextualizadas e algumas técnicas que empregam os ostensivos *risquinhos*, *bolinhas*, reta numérica e dedos. Nesse cenário são apresentadas também a soma e subtração consecutiva de “um em um”, dessa vez, sem o uso de recursos materiais – sugere-se que se faça mentalmente o que antes se aplicava em muitos dos ostensivos mobilizados. Frente a isso, uma nova técnica é proposta.

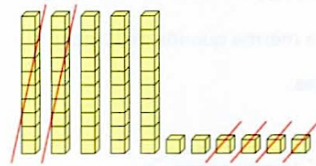
τ_{20} – Somar ou subtrair de um em um mentalmente partindo do maior valor

Enquanto muitos ostensivos estão sendo abandonados, outros ganham destaque, como é o caso do material dourado, que é mobilizado como instrumento para representar e responder situações como mostram as figuras a seguir.

τ_{21} – Representar uma adição ou uma subtração por meio do material dourado ou as fichinhas manipulando-os para encontrar a soma ou a diferença

- 2 Rita efetuou a subtração $56 - 24$ com o material dourado, usando a ideia de tirar uma quantidade de outra. *Desenvolva esta atividade concretamente usando o material dourado.*

Representou 56 e tirou 24.



Ficou com estas peças, ou seja, $56 - 24 = 32$.

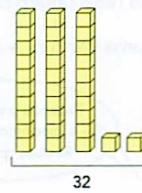
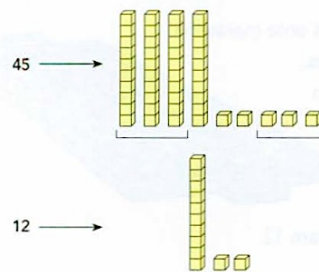


Figura 62: Material dourado e a ideia de tirar uma quantidade de outra.
Fonte 40: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - livro do segundo ano, p. 221.

- 2 Marcos efetuou a subtração $45 - 12$ com o material dourado, usando a ideia de comparar quantidades.



45 tem 33 a mais do que 12.

Portanto, $45 - 12 = 33$.

Figura 63: Material Dourado e a ideia de comparar quantidades.
Fonte 41: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - livro do segundo ano, p. 223.

Observa-se que ainda não há a discussão sobre a troca de uma barrinha por 10 cubinhos, por se tratar de subtrações sem reservas. Desse modo, o ganho no uso do material dourado se justifica pelo aspecto *semiótico* que ele concede à situação e ao estudo do sistema de numeração decimal. Nesse sentido, o material dourado oportuniza a construção da ideia de que uma dezena é composta por 10 unidades e é representada por uma única barrinha, e por isso pode ser indicada pelo número 1 ao se respeitar, é claro, o valor posicional.

Em um segundo momento o livro propõe um tópico para a apresentação *oficial* dos algoritmos usuais das duas operações em questão, e o material dourado novamente está presente nessa discussão, sendo utilizado também para a operação de adição. Para tanto, o quadro valor de lugar também é utilizado.

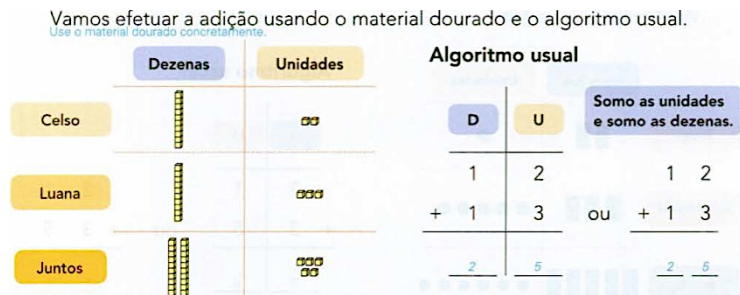


Figura 64: Material dourado e o algoritmo da adição.
Fonte 42: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - livro do segundo ano, p. 177.

τ_{22} - Utilizar o algoritmo usual da adição ou da subtração

A conta resolvida na Figura 63 é referente a uma tarefa de composição de medidas do tipo T1₁. Nesse recorte podemos notar tanto a construção da técnica referente ao uso do algoritmo da adição, a qual nomeamos de τ_{22} , quanto de elementos tecnológicos que justificam o seu uso. De maneira análoga ao trabalho feito com o material dourado, o autor sugere o uso das *fichinhas*, apresentadas na análise da Parte III desse volume.

Nesse cenário de estudo é proposto também o uso *bolinhas* como outra representação para a unidade.

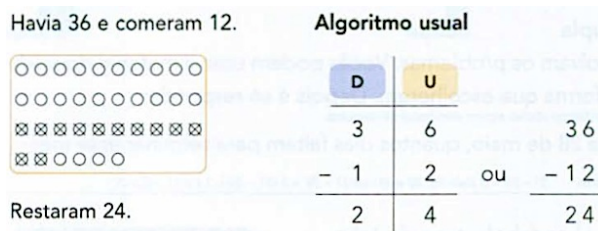


Figura 65: *Bolinhas* para o algoritmo da subtração.
Fonte 43: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - livro do segundo ano, p. 224.

Notemos que esse ostensivo só possibilita a visualização das dezenas e unidades por meio da exposição das *bolinhas* em 10 em 10 na horizontal. Ainda assim, mesmo que cada linha represente uma dezena, como na Figura 64, acreditamos que a passagem desse ostensivo para o algoritmo usual é mais complexa do que quando é utilizado o material dourado, pelo aspecto semiótico que esses ostensivos possuem para representar as casas decimais.

Observa-se que os algoritmos usuais são introduzidos de modo a não considerar as ideias de reagrupamento e de reserva, o que é justificado ao considerar que esse momento visa propor os primeiros contatos com essa nova notação. Desse modo, o trabalho limita-se ainda ao agrupamento de cubinhos e não ao agrupamento e troca de

cubinhos por barrinhas. Então, em situações em que esse conceito é exigido, outras técnicas são aplicadas.

Na discussão desses novos procedimentos de cálculo há sempre uma situação-problema - uma tarefa do tipo contextualizada - sendo explorada. Para resolvê-la é proposta uma sequência de passos, nomeados do seguinte modo: “compreendendo”, “planejando”, “executando” e “verificando”. O item “compreendendo” consiste em extrair do enunciado do problema as principais informações; em “planejando” o aluno deve esboçar ou pensar o que se deve fazer para resolver a situação; no item “executando” aplica-se a estratégia – técnica – de resolução; e, finalmente, no item “verificando” o aluno é levado a usar outra técnica que valide a resolução anterior.

Para resolvê-la é sugerido, em situações que são resolvidas pela adição, o uso do algoritmo da decomposição, o qual nomeado de técnica τ_{23} .

τ_{23} – Utilizar o algoritmo da decomposição

$$\begin{array}{l} 12 = 10 + 2 \\ 13 = 10 + 3 \\ \hline 20 + 5 = 25 \end{array}$$

Figura 66: Algoritmo da decomposição.

Fonte 44: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - livro do segundo ano, p. 177.

Nas situações solucionadas por uma subtração propõe-se, para tirar a prova real, a aplicação da operação inversa (τ_{15}). Essas técnicas são praticadas e exploradas por meio de diferentes tipos de tarefas ao longo dessa parte do livro.

Outras duas técnicas são apresentadas ainda nesse livro. A primeira é construída objetivando tarefas de cálculo mental. Para tanto, o livro apresenta um caso especial para efetuar adições ou subtrações de nove unidades, para depois, por meio de tarefas, expandir a técnica em questão.


5 Cálculo mental: Somar 9

$$37 + 9 = ?$$
$$37 + 10 = 47 \text{ e } 47 - 1 = 46$$

Logo, $37 + 9 = 46$.

$$23 + 9 = ?$$
$$23 + 10 = 33 \text{ e } 33 - 1 = 32$$

Logo, $23 + 9 = 32$.



Para somar 9, posso somar 10 e tirar 1.

Figura 67: Técnica τ_{24} para o caso de somar 9.

Fonte 45: Coleção Apis - Alfabetização Matemática - livro do segundo ano, p. 185.

τ_{24} - Completar para a casa decimal mais próxima e subtrair o excedente ou somar o que foi desconsiderado

A segunda, e última técnica, versa sobre a estratégia de arredondar os números envolvidos em uma situação para descobrir o resultado aproximado referente a soma de duas ou mais medidas.

τ_{25} - (Para $a \in \mathbb{N}^*$) Arredondar a para a dezena/centena/... mais próxima

Tomemos uma situação parecida com a que é abordada no livro para ilustrar o emprego dessa técnica: Se uma camiseta custa R\$ 22,00 e um short R\$ 17,00, o total a ser pago pelas duas peças de roupa é de aproximadamente 40 reais, pois ambas possuem um valor próximo ao de 20 reais. Essa técnica é propícia de ser usada para responder um tipo de tarefa que ainda não elencamos:

- *T16: Estimar o valor da soma ou da diferença de dois números;*

Apesar de o autor do livro didático apresentar desde o volume do primeiro ano atividades que enunciadas como sendo de estimativa, analisamos, no que tange o ensino do campo aditivo, que essas aparecem de fato nesse momento do livro ao se propor o uso da técnica de arredondamento. Essa nossa escolha se justifica pelo fato de o trabalho com estimativas supor a sistematização de estratégias (BRASIL, 1997) e por observarmos que as técnicas propostas até então voltam-se mais diretamente ao cálculo mental pela exatidão exigida nos cálculos²¹, característica essa que acreditamos ser

²¹ Até esse momento considera-se um erro quando a estimativa é diferente da resposta exata.

diferente ao se propor estimativas²². Todavia, é importante salientar que reconhecemos que o trabalho contínuo de cálculo mental e as técnicas nele empregadas possibilitam a prática de estimar.

As demais técnicas presentes nessa parte do livro constituem-se de uma retomada, ou ainda, uma reinvestida de ideias já discutidas em outras ocasiões no nosso trabalho. Frente a isso, concluímos a análise com a tabela que articula os tipos de tarefas e técnicas utilizadas nessa parte do livro.

Quadro 23: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do segundo ano - Parte IV

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₂	T7	T8	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16
τ_2															
τ_3															
τ_4															
τ_6															
τ_7															
τ_8															
τ_9															
τ_{10}															
τ_{11}															
τ_{12}															
τ_{13}															
τ_{16}															
τ_{17}															
τ_{18}															
τ_{19}															
τ_{20}															
τ_{21}															
τ_{22}															
τ_{23}															
τ_{24}															
τ_{25}															

É importante destacar que, apesar das diversas técnicas mobilizadas, a τ_{22} começa a ganhar espaço e já é a mais trabalhada. Isso é consequência da baixa valência instrumental que os outros ostensivos possuem. O algoritmo usual da adição e da subtração, principalmente em se tratando de números maiores que 20, que foram os números trabalhados nessa parte do livro, é a forma mais econômica a ser empregada.

Para finalizar a análise desse volume apresentamos, a seguir, considerações que consideramos importantes para a síntese de algumas características acerca do ensino proposto.

²² O próprio autor do livro didático define no glossário desse volume (p. 259) a estimativa como sendo a “avaliação ou o cálculo aproximado de algo”.

5.5 ALGUMAS CONCLUSÕES DO LIVRO DO SEGUNDO ANO

Pudemos notar a praxeologia desenvolvida no livro do primeiro ano sendo reapresentada. Nesse cenário algumas tarefas tornam-se *rotineiras* e por isso não recebem mais a atenção que antes era atribuída a elas, como é o caso do cálculo com números até 10. É por meio do trabalho com tarefas e técnicas já vistas, bem como com a expansão no estudo do sistema de numeração decimal, que novas noções do campo aditivo são construídas.

A seguir apresentamos as técnicas e tipos de tarefas que persistem de uma parte para outra do livro – em destaque azul -, as que são abandonadas – destaque vermelho – e as que são inauguradas no final do livro – em verde.

Quadro 24: Síntese dos tipos de tarefas da parte *final* do livro do segundo ano

T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₂	T4 ₂	T7	T8
T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16	

Quadro 25 Síntese das técnicas da parte *final* do livro do segundo ano

τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9	τ_{10}	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}
τ_{14}	τ_{15}	τ_{16}	τ_{17}	τ_{18}	τ_{19}	τ_{20}	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}	τ_{24}	τ_{25}	

No segundo quadro notamos a mobilização de diferentes técnicas ainda no final do volume do segundo ano, o que se deve ao fato dessa parte do livro se constituir de uma ampliação das operações de adição e subtração, que foi introduzida por meio da retomada das várias técnicas e ostensivos já trabalhados em outros momentos. Com a expansão dos números naturais os ostensivos de caráter *mais manipulativo*²³ são abandonados pela sua baixa valência instrumental, havendo a necessidade da elaboração de novas técnicas, que se encontram no quadro em cor verde.

No movimento de trabalho com números com duas casas decimais alguns ostensivos sofrem adaptações quanto ao seu uso, como é o caso da reta numérica com início diferente do zero e os *risquinhos* sendo agrupados de 10 em 10 para facilitar a contagem. É nesse contexto também que outros ostensivos, como o material dourado e as *fichinhas*, são apresentados por serem visualmente mais significativos e por serem ferramentas mais econômicas para se efetuar cálculos. Para tanto, antes deles serem utilizados como ostensivos para o trabalho no campo aditivo, o autor do livro didático

²³ Todo objeto ostensivo é manipulativo, portanto, cabe comentar que nesse excerto buscamos destacar aqueles que utilizamos as mãos para instrumentalizá-lo.

propõe tarefas com esse material que mobiliza a ideia de reagrupamento, oportunizando a construção de elementos do entorno tecnológico-teórico que dão aporte para a apresentação do algoritmo usual das operações de adição e subtração.

O algoritmo usual, depois de apresentado, torna-se foco de estudo, sendo utilizado para responder boa parte das tarefas propostas. Todavia, ainda nesse momento, essa técnica não é utilizada para responder situações que necessitem de reagrupamentos. Ademais, quando utilizada, ela normalmente vem acompanhada de outros ostensivos que ajudam a colocá-la em prática, tais como o quadro valor de lugar e o próprio material dourado.

Cabe destacar que o momento de institucionalização de todos esses elementos tecnológicos que estão sendo incorporados à praxeologia é vivenciado pela criança de maneira bastante superficial, o que advém da pouca *maturidade teórica* que ela tem ainda nesse nível escolar. É portanto, talvez por esse motivo, que outros momentos sejam mais explorados, como é o caso dos momentos de exploração de um tipo de tarefa e o do trabalho com a técnica, que põe à tona de maneira prática os elementos tecnológicos em discussão. Nesse cenário, sentimos eventos voltados a um ensino do tipo tecnicista mas também com alguns aspectos modernistas e teoricistas (GASCÓN, 2003).

No próximo capítulo iniciaremos a análise do livro do terceiro ano e buscaremos, dentre outros aspectos, entender como se dá o uso do algoritmo usual como técnica e como e quais outras técnicas são também utilizadas para responder situações do campo aditivo. Acreditamos que com essa análise poderemos entender o percurso do algoritmo usual em se tornar técnica *majoritária*.

6 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DO LIVRO DO TERCEIRO ANO

A análise do livro do segundo ano evidenciou a busca pela introdução da técnica do algoritmo usual das operações de adição e subtração por meio do trabalho conjunto com outros ostensivos. Na análise do livro do terceiro ano buscamos compreender como se dá a oficialização/sistematização dessa técnica. Para tanto, esse volume, que analisamos a seguir, foi dividido em três partes. A Parte I (páginas 1 à 67) incide sobre os dois primeiros capítulos, em que há, entre outros temas abordados, a discussão sobre números, o que ora ou outra traz à tona algumas ideias do campo aditivo. A Parte II constitui-se do capítulo “Adição e Subtração” e de outros quatro capítulos destinados ao estudo das regiões planas, grandezas e medidas e as operações de multiplicação e divisão (páginas 68 à 197). Os capítulos posteriores a esses constituem a Parte III (páginas 198 à 279), onde há o trabalho com o sistema de numeração decimal e a retomada das quatro operações.

6.1 PARTE I - PRIMEIROS CAPÍTULOS: ESTUDO DOS NÚMEROS ATÉ 99

A Parte I, em relação ao campo aditivo, constitui-se de uma breve retomada de algumas das técnicas e tipos de tarefas já vistos nos livros destinados aos 1º e 2º anos. Nesse cenário são levantadas algumas discussões quanto ao valor posicional dos números e a ideia de reagrupar grupos de dez unidades por dezenas inteiras, o que possibilita uma reinvestida na construção de elementos tecnológicos-teóricos que fundamentam o algoritmo usual das operações de adição e subtração.



Figura 68: Trabalho com o material dourado

Fonte 46: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - livro do terceiro ano, p. 23.

São propostas muitas tarefas que mobilizam a troca de unidades por dezenas por meio de diferentes ostensivos. Em meio a esse contexto alguns tipos de tarefas próprios do campo aditivo são sugeridos. A seguir apresentamos a frequência desses tipos de tarefas.

Quadro 26: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do terceiro ano - Parte I

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T3 ₁	T3 ₂	Total
Total	9	1	1	2	2	1	16

Quadro 27: Demais tipos de tarefas - Livro do terceiro ano - Parte I

	T7	T8	T9	T11	T12	T14	T15	Total
Total	11	6	2	45	2	16	7	85

As tarefas mobilizadas seguem a mesma perspectiva apresentada nas demais análises quanto à frequência, à variedade e à valorização dos tipos de tarefas. Esses são resolvidos por técnicas já estudadas em outras ocasiões. Vejamos:

Quadro 28: Relação dos tipos de tarefas e técnicas - Livro do terceiro ano - Parte I

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T3 ₁	T3 ₂	T7	T8	T9	T11	T12	T14	T15
τ_3				■			■	■	■				
τ_6	■							■	■	■			
τ_7						■		■	■				
τ_{10}						■		■	■				
τ_{12}								■	■		■		
τ_{13}	■							■	■	■			
τ_{15}								■	■				
τ_{16}								■	■			■	■
τ_{18}	■	■			■		■	■	■	■			
τ_{19}	■		■	■			■	■	■			■	
τ_{20}			■	■			■	■	■			■	■

Vale destacar que muitas tarefas abordadas nessa parte introdutória do livro do terceiro ano estão se tornando *rotineiras* e por isso, no livro do professor, não é explicitada a maneira como devem ser respondidas, sendo apresentadas apenas as respostas. Desse modo, cabe a nós, em busca da construção do quadro anterior, nos valermos das análises feitas que nos permitem prever algumas técnicas que o autor tende a priorizar em momentos semelhantes aos aqui analisados.

Não são abordados, ainda nessa primeira parte, os algoritmos usuais, mas sim alguns ostensivos e técnicas que tornam possíveis a resolução de cálculos que envolvem números com duas casas decimais, como é o caso da retomada do ostensivo tabela, que contém a sequência dos números, e a técnica τ_{15} . Todavia, embora alguns ostensivos de cunho mais manipulativo ainda vivam na praxeologia proposta, é importante frisar que o seu uso tem o propósito de capacitar o aluno a resolver pela técnica τ_3 e

posteriormente pela τ_{20} . Nesse cenário, por exemplo, a tabela deve viver na praxeologia até que a criança consiga reproduzir mentalmente a sequência dos números, para então poder somar ou subtrair de um em um sem precisar manipulá-la.

O estudo do sistema de numeração decimal também proporciona a mobilização da técnica τ_{19} , que é proposta logo após o estudo das dezenas inteiras para responder tarefas de cálculo mental (T14).



Figura 69: Trabalho de cálculo mental da técnica τ_{19}
Fonte 47: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - livro do terceiro ano, p. 23.

E, com as ideias de composição e decomposição de números, mobilizadas por meio dos tipos de tarefa T8 e T11, é também retomada, implicitamente, a técnica τ_{18} . Essa última, também partilha espaço com duas outras técnicas. A estratégia de representar quantidades por meio dos *risquinhos* e agrupá-los de 10 em 10 oportuniza a prática conjunta e sequencial das técnicas τ_6 , τ_{13} , e τ_{18} , como podemos notar:

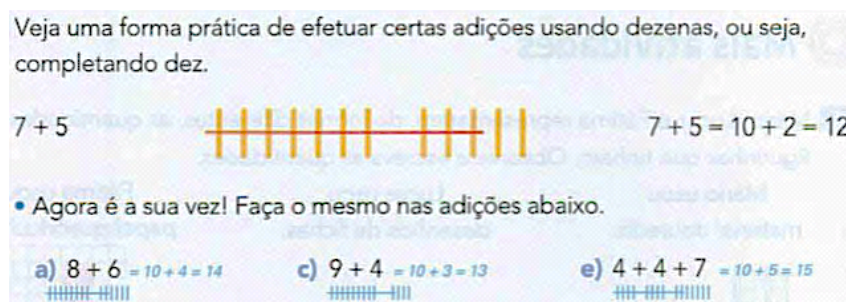


Figura 70: União de três técnicas.
Fonte 48: Coleção Ápis - Alfabetização Matemática - livro do terceiro ano, p. 30.

Todas essas técnicas compõem as principais *maneiras de fazer* mobilizadas nessa primeira parte do livro. Percebe-se, então, que o livro introduz o campo aditivo por meio de uma retomada de técnicas e tipos de tarefas já praticadas em outros momentos. No entanto, essa parte não se constitui apenas de uma revisão, mas

oportuniza a construção de elementos tecnológicos, como a ideia do reagrupamento, que são úteis no estudo formalizado das operações de adição e subtração previsto na próxima parte do livro a ser analisada. É nesse sentido que o sistema de numeração decimal, em estudo nessa parte do livro, torna-se parte importante do entorno tecnológico-teórico da praxeologia proposta.

6.2 PARTE II – CAPÍTULO INTITULADO “ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO”

A Parte II refere-se ao capítulo 3 do livro, intitulado “Adição e Subtração”, e a outros quatro capítulos posteriores a esse, que não têm como propósito o ensino do campo aditivo, mas que colocamos juntos por possuir poucos tipos de tarefas e técnicas de adição e subtração, sendo desnecessário uma parte específica para esses capítulos. O autor indica em nota de rodapé, em relação ao capítulo específico, que tem-se como objetivo: *retomar as ideias da adição e da subtração, compreender os algoritmos dessas operações sem e com reagrupamento e resolver problemas*. Para tanto são apresentados primeiramente os tipos de tarefas e técnicas para a adição, para depois apresentar as de subtração. Decidimos, assim como nas outras análises, apresentar a discussão dos dados articulando o ensino das duas operações; isso se justifica pela metodologia/estrutura de ensino ser a mesma para ambas as operações.

O início de cada um desses estudos é marcado pela presença de tipos de tarefas contextualizados, que abordam algumas das ideias próprias dessas operações. Essas tarefas, que elencamos em cinco tipos segundo o quadro a seguir, também estão presentes em momentos que objetivam a elaboração de técnicas. É importante ressaltar que o aluno participa dessa construção de maneira passiva, isto é, ele não é convidado a pensar sobre uma possível maneira de resolver as situações propostas.

Quadro 29: Tipos de Tarefas contextualizados - Livro do terceiro ano, Parte II.

	T1₁	T2₂	T2₃	T3₁	T3₂	Total
Total	37	27	3	1	20	60

O estudo das situações de adição e subtração volta-se prioritariamente sobre as situações *canônicas*, em que a operação a ser efetuada é evidenciada rapidamente no enunciado do problema, como as do tipo T1₁, T2₂ e T3₂. Desse modo, inferimos, observando a gama de técnicas já mobilizadas, que a praxeologia proposta preocupa-se com o trabalho das diferentes maneiras de se efetuar as operações em questão, e não

necessariamente com as ideias as quais elas podem ser utilizadas, visto que essa perspectiva se mantém sólida ainda no livro do terceiro ano.

Esses tipos de tarefas, inicialmente, envolvem apenas números “pequenos” ou aqueles que favoreçam o cálculo mental, como as dezenas inteiras. Nesse cenário, há a exigência permanente de o aluno explicitar o cálculo a ser efetuado por meio de expressão numérica e do algoritmo usual. Todavia, inicialmente o algoritmo usual é abordado visando apenas o contato com essa maneira de representar a conta a ser efetuada, para posteriormente ser abordado como método de resolução.

Exibimos a seguir a frequência dos demais tipos de tarefas para prosseguirmos com a caracterização dessa parte do livro:

Quadro 30: Demais Tipos de Tarefas - Livro do terceiro ano - Parte II

	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16	Total
Total	2	8	2	12	90	6	3	16	7	3	149

Nota-se que o T10 se sobressai quantitativamente ao T9, o que é justificado pela língua materna ser o meio como as situações problemas estão sendo dispostas nessa ocasião do ensino, o que não era habitual no livro do primeiro ano, em que os alunos estavam vivenciando os primeiros contatos com a matemática concomitantemente ao processo de aprendizagem da leitura e da escrita. O T11 novamente é abordado intensamente e os T12 e T13 oportunizam, embora de maneira escassa, a relação entre as duas operações. No mais, detalharemos o emprego desses tipos de tarefas a seguir, em juntamente com as discussões das técnicas.

O ensino proposto, no momento de retomar as ideias de adição e subtração, importa muitas das técnicas já trabalhadas, o que pode ser observado no quadro a seguir:

Quadro 31: Relação dos tipos de tarefas e técnicas – Livro do terceiro ano – Parte II

	T1 ₁	T2 ₂	T3 ₂	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16
τ_3		■	■	■	■	■	■		■			
τ_4		■	■	■	■	■	■		■			
τ_7		■	■	■	■	■	■		■		■	
τ_8		■	■	■	■	■	■		■			
τ_{12}		■	■	■	■	■	■		■			
τ_{13}	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	■
τ_{16}	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
τ_{17}	■	■	■	■	■	■	■		■			
τ_{18}	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	
τ_{19}	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	
τ_{20}	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	
τ_{21}	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	
τ_{22}	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	
τ_{23}	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	
τ_{25}	■	■	■	■	■	■	■		■	■	■	

Algumas dessas técnicas são prontamente abandonadas após o momento introdutório do capítulo, em consequência do estudo dedicado ao algoritmo usual. A técnica de usar tal algoritmo é revista, primeiramente, sem que haja a necessidade de evocar a ideia de reagrupamento, para então dar-se início à discussão de como proceder quando a soma das unidades, por exemplo, excede o número 9. A manipulação do material dourado, das *fichinhas*, das cédulas e moedas, que possibilitam as trocas de 10 unidades por uma dezena e a visualização da técnica do algoritmo da decomposição (τ_{23}), recebem atenção na construção de elementos tecnológicos. A saber, exibimos um recorte do livro que ilustra um pouco dessa discussão.

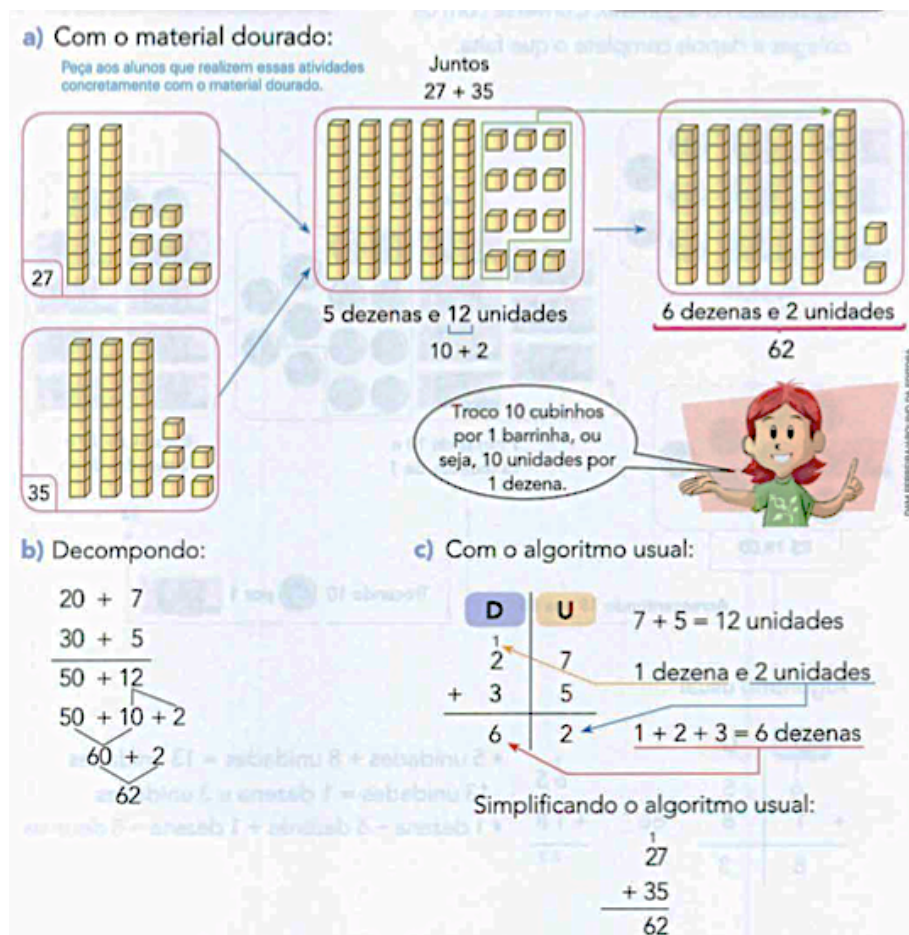


Figura 71: Algoritmo da decomposição e algoritmo usual.

Fonte 49: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – Livro do terceiro ano, p. 75.

No encadeamento o autor do livro propõe a manipulação de outros ostensivos, como dinheiro e as *fichinhas*. Percebe-se, nesse contexto, a importância dada às trocas de unidades por dezenas envolvendo a cédula e a moeda, respectivamente, de 10 e de 1 real. No âmbito desse trabalho, o “vai um” e o “empresta um” é algoritmizado por meio das ideias mobilizadas no emprego desses ostensivos. Cabe destacar que, durante esse estudo, a ideia do reagrupamento é reforçada constantemente. Nessa perspectiva a constituição do entorno tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ é vivenciada de maneira simultânea ao momento destinado à elaboração da técnica. Isto é, a maneira como a técnica é apresentada faz com ela seja autoexplicativa, ou ainda, autotecnológica (CHEVALLARD, 1998), como podemos notar nos excertos:

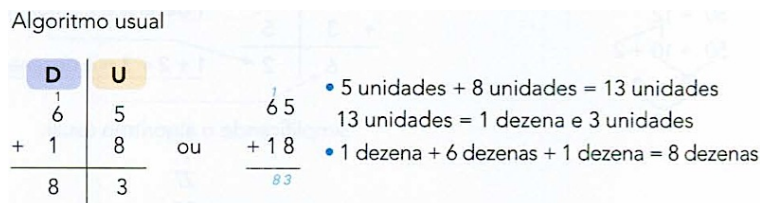


Figura 72: Algoritmo usual e descrição dos passos²⁴.

Fonte 50: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – Livro do terceiro ano, p. 76.



Figura 73: Justificativa para o “empresta um”.

Fonte 51: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – Livro do terceiro ano, p. 90.

As tarefas propostas após a construção da técnica do algoritmo usual, são, em sua grande maioria, respondidas por essa *maneira de fazer*, o que pode ser observado nas respostas do livro do professor. A exemplo de quantificação, mais de 40% das tarefas mobilizadas em toda a Parte II são resolvidas por essa técnica, evidenciando a valorização por essa técnica.

A relação entre as duas operações em questão é brevemente considerada ao final do capítulo específico do campo aditivo por meio do T12 – Tirar a prova real. Para tanto, a técnica de trabalhar com a operação inversa para responder tarefas desse tipo é ostensivamente apresentada ao aluno:

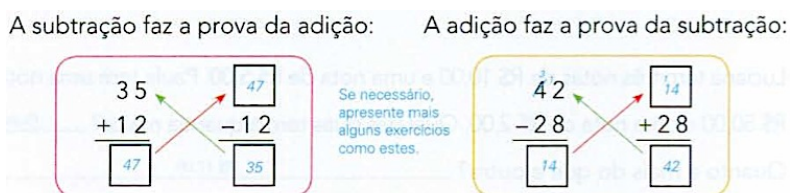


Figura 74: Operação inversa.

Fonte 52: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – Livro do terceiro ano, p. 92.

Na sequência o livro apresenta, como de costume, uma lista de exercícios para que a criança possa praticar a técnica supracitada, momento didático dedicado ao trabalho com a técnica. O capítulo “Adição e Subtração” é então finalizado com

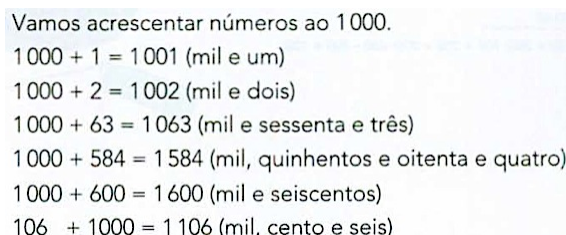
²⁴ Alertamos nesse excerto quanto a mistura de ostensivos matemáticos com a língua materna, o que, salvo pelo nível de escolaridade trabalhado, poderia ser entendido como uma linguagem inadequada.

algumas situações-problema e com uma retomada concisa das principais ideias e técnicas abordadas, no que constitui o tópico “O que estudamos”.

Nos capítulos posteriores àquele dedicado particularmente ao conteúdo investigado, apresenta-se esporadicamente algumas atividades voltadas ao campo aditivo. Essas são também, em geral, respondidas pelo algoritmo usual ou por técnicas que se mostram adequadas para realizar cálculos mentais. Nesse sentido, nota-se que a praxeologia começa a se restringir a procedimentos mais abstratos e para isso há o abandono do trabalho manipulativo e conseqüentemente de alguns ostensivos.

6.3 PARTE III – SISTEMA DE NUMERAÇÃO DECIMAL E RETOMADA DAS QUATRO OPERAÇÕES

Na última parte do livro do terceiro ano é proposta uma retomada das operações de adição e subtração abordando números naturais até 999 e também é feito o primeiro contato com as quatro casas decimais, embora alerte-se em nota de rodapé, que esses serão explorados, de fato, no ano seguinte (4º ano). É nesse cenário que o campo aditivo compõe parte do entorno tecnológico-teórico que justifica a própria construção dos números.



Vamos acrescentar números ao 1000.

$1000 + 1 = 1001$ (mil e um)

$1000 + 2 = 1002$ (mil e dois)

$1000 + 63 = 1063$ (mil e sessenta e três)

$1000 + 584 = 1584$ (mil, quinhentos e oitenta e quatro)

$1000 + 600 = 1600$ (mil e seiscentos)

$106 + 1000 = 1106$ (mil, cento e seis)

Figura 75: Composição de milhares.

Fonte 53: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do terceiro ano, p. 214.

O estudo das casas decimais e suas equivalências – uma centena corresponde a 10 dezenas ou 100 unidades, por exemplo, – apoia-se no material dourado e posteriormente nas *fichinhas*. Por meio deles a ideia da composição dos números²⁵ é estudada e torna-se, antes do algoritmo usual ser retomado, a maneira pela qual a criança realiza adições e subtrações nas condições que são favoráveis à realização desse

²⁵ Ideia que origina a técnica τ_{18} – (Para a e $b \in \mathbb{N}^*$, de tal modo que a seja uma dezena/centena/... inteira e b seja de quantidade de casas decimais inferior que a de a) – Compor a e b , o que resulta imediatamente no número do tipo ab ;

procedimento. A língua materna, já nesse contexto, contribui como uma espécie de elemento tecnológico para a ideia da adição por composição.

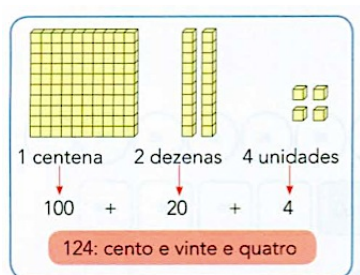


Figura 76: Composição dos números ilustrada pelo material dourado.

Fonte 54: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do terceiro ano, p. 202.

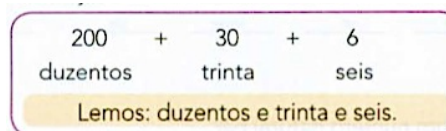


Figura 77: Composição e língua materna.

Fonte 55: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do terceiro ano, p. 210.

Outra técnica possível de ser empregada em situações que abordam centenas é a τ_{19} . Como ela já havia sido abordada em outras circunstâncias e a sua essência permanece para o trabalho com as centenas, essa foi apresentada no corpo de uma atividade. Essa técnica, assim como a proposta anteriormente, são retomadas e treinadas por meio de tarefas, geralmente, do tipo T11.



Figura 78: Técnica de τ_{19} para as centenas.

Fonte 56: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do terceiro ano, p. 205.

No capítulo intitulado “Retomando as quatro operações”, que compõe parte da Parte III do livro do terceiro ano, é revisto o algoritmo usual para a operação de adição e subtração com números até 999. Nessa ocasião o material dourado e outros ostensivos (dinheiro e *fichinhas*) são apresentados apenas com o intuito de exemplificar e elucidar o modo de se efetuar as operações. O livro dedica-se nesse momento ao treino dos procedimentos necessários para se utilizar o algoritmo usual, momento didático que caracteriza o trabalho com a técnica.

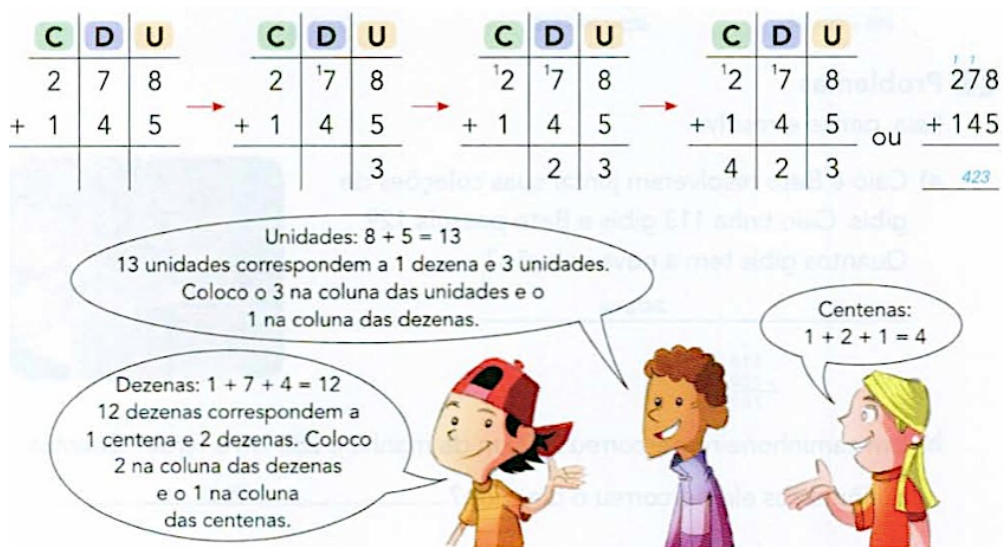


Figura 79: Algoritmo usual acompanhado de elementos tecnológicos.
Fonte 57: C.A – Alfabetização Matemática – livro do terceiro ano, p. 223.

Ora ou outra, assim como ilustra a Figura 77, são apresentados elementos tecnológicos junto à técnica. O próprio quadro valor de lugar acoplado ao algoritmo usual demonstra essa preocupação. Todavia, ao final desse estudo, tem-se a intenção que esses procedimentos sejam automatizados, como mostra a última representação da Figura 77 para a conta que está sendo realizada. Com a análise das demais técnicas presentes nessa parte do livro e das relações entre elas e com os tipos de tarefas propostos, construímos o quadro a seguir. Apresentamos na sequência a frequência desses tipos de tarefas para então trazermos alguns aspectos que acreditamos serem pertinentes para concluirmos a análise do livro do terceiro ano.

Quadro 32: Relação dos tipos de tarefas e técnicas – Livro do terceiro ano – Parte III

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	T7	T8	T9	T11	T12	T13	T15
τ_3	■			■	■		■		■	■	■		■	■
τ_4				■	■				■	■			■	
τ_{12}									■	■	■	■		
τ_{13}	■			■					■	■			■	
τ_{14}				■					■	■			■	
τ_{16}									■	■		■		
τ_{17}				■					■	■			■	
τ_{18}	■			■			■	■	■	■	■		■	■
τ_{19}	■			■			■	■	■	■			■	
τ_{20}	■			■	■			■	■	■	■		■	■
τ_{21}	■							■	■	■			■	
τ_{22}	■	■	■	■		■	■	■	■	■	■	■	■	■
τ_{23}									■	■	■	■	■	
τ_{24}	■						■		■	■			■	

Quadro 33: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do terceiro ano, Parte III.

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	Total
Total	23	2	3	11	2	2	14	57

Quadro 34: Demais Tipos de Tarefas – Livro do terceiro ano – Parte III

	T7	T9	T8	T11	T12	T13	T15	Total
Total	11	1	18	77	14	1	12	130

A importância dada ao algoritmo usual é evidenciada no quadro 32 ao notarmos que grande maioria dos tipos de tarefas propostos já são respondidos por ele. Outro aspecto que confirma essa característica é que as tarefas do tipo T11, que correspondem a pouco mais de 40% das tarefas mobilizadas nessa parte, são respondidas por essa técnica em 65% das vezes. Os demais tipos de tarefas também priorizam tal algoritmo em suas resoluções. Dentre as demais técnicas apenas a τ_{18} e a τ_{19} também têm um destaque considerável nessa parte do livro. Outras tantas, que outrora foram utilizadas, são propostas apenas esporadicamente, não as tornando representativas, em comparação a essas três, para a caracterização do ensino proposto.

A respeito dos tipos de tarefas contextualizados damos destaque, embora essa tenha aparecido apenas em uma atividade, a uma nova representação presente na resposta no livro do professor que acreditamos ser inspirada em Vergnaud (1990), visto que tal bibliografia consta nas referências do livro e se assemelha bastante com a desenvolvida por esse autor.

Leia, pense e resolva.

a) Jairo tinha R\$ 366,00, gastou R\$ 147,00 e ficou com R\$ 219,00.

$$\begin{array}{r} ? - 147 \rightarrow 219 \\ \hline 219 \\ + 147 \\ \hline 366 \end{array}$$

b) Nádia tinha R\$ 192,00, ganhou R\$ 38,00 e ficou com R\$ 230,00.

$$\begin{array}{r} ? + 38 \rightarrow 230 \\ \hline 230 \\ - 38 \\ \hline 192 \end{array}$$

c) Rita tinha R\$ 121,00, ganhou R\$ 59,00 e ficou com R\$ 180,00.

$$\begin{array}{r} 121 + ? \rightarrow 180 \\ \hline 180 \\ - 121 \\ \hline 59 \end{array}$$

d) Paulo tinha R\$ 236,00, gastou R\$ 151,00 e ficou com R\$ 85,00.

$$\begin{array}{r} 236 - ? \rightarrow 85 \\ \hline 236 \\ - 85 \\ \hline 151 \end{array}$$

Figura 80: Situações ilustradas, supostamente, pela representação de Vergnaud (1990).
Fonte 58: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do terceiro ano, p. 230.

Os itens *a* e *b* são tarefas do tipo T2₁, em que há uma transformação de medidas em jogo e pede-se o estado inicial. Observa-se que no primeiro problema é proposta uma transformação negativa e no segundo uma positiva. Já nos itens *c* e *d*, que também são do tipo T2₁, procura-se a transformação ocorrida. Também nesses casos o autor apresenta os dois tipos de transformações possíveis.

Sobre os demais tipos de tarefas cabe dizer que momentos destinados ao trabalho com a técnica são valorizados, e esses tipos de tarefas, em geral, são promovidos com esse intuito. Não há, nesse contexto, comparações entre as técnicas em busca de discutir a eficiência e abrangência delas, ou seja, não é oportunizado ao aluno a experiência da avaliação dos elementos que compõem a praxeologia desenvolvida, em especial das técnicas propostas. No entanto, tem-se implicitamente que o algoritmo usual é o que responde de maneira econômica as mais diferentes situações próprias do campo aditivo, em detrimento de outras técnicas e ostensivos.

6.4 ALGUMAS CONCLUSÕES DO LIVRO DO TERCEIRO ANO

A análise do livro do terceiro ano nos permite evidenciar um ensino *mais abstrato*, com técnicas que evocam diversas tecnologias oriundas da construção do sistema de numeração decimal, que também é foco de estudo.

Para finalizarmos a análise desse volume, propomos as tabelas 35 e 36 que retratam os tipos de tarefas e técnicas que permanecem ou são abandonadas ao final do livro em relação àquelas que já apareceram até o momento. Para tanto, considere em destaque vermelho as que não estão mais presentes no final do livro do terceiro ano e em azul as que permanecem ainda nessa parte do livro.

Quadro 35: Síntese dos tipos de tarefas da parte *final* do livro do terceiro ano

T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	T4 ₂	T7
T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16

Quadro 36: Síntese das técnicas da parte *final* do livro do terceiro ano

τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9	τ_{10}	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}
τ_{14}	τ_{15}	τ_{16}	τ_{17}	τ_{18}	τ_{19}	τ_{20}	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}	τ_{24}	τ_{25}	

Destacamos, primeiramente, que no ensino proposto para o terceiro ano do ensino fundamental, no que tange o campo aditivo, não há a *inauguração* de novas técnicas ou novos tipos de tarefas. Nesse sentido, percebemos a praxeologia referente ao bloco técnico-prático, proposta nos outros dois primeiros anos escolares, sendo empregada e reinvestida, e é também por esse motivo que sentimos a presença e a maior mobilização de elementos voltados ao entorno tecnológico-teórico de modo mais elaborado. Ademais, a expansão do sistema de numeração decimal e a própria oficialização do algoritmo usual tornam imprescindível a construção de certas noções matemáticas que subsidiam a aplicação de *técnicas não empíricas*²⁶. Essas características evidenciam um ensino clássico (GASCÓN, 2003) considerando, é claro, a simplicidade teórica exigida nesse nível de ensino.

Em meio a essa discussão alguns ostensivos tornam-se secundarizados em virtude de técnicas que mobilizam uma aritmética mais *sofisticada*, o que pode ser evidenciado ao notarmos, no quadro 36, que a maioria das técnicas que permanecem no ensino são aquelas que foram elaboradas após o trabalho com números com duas ou mais casas decimais e por isso não fazem uso de diversos ostensivos pela dificuldade em administrá-los nessas condições. É nessa perspectiva que a contagem, mobilizada por diferentes ostensivos, como os dedos e os *risquinhos*, e que tanto foi explorada nos

²⁶Acreditamos que há, em particular no nível escolar investigado, muitas técnicas que são mobilizadas sem a necessidade de um discurso lógico que as justifiquem para que elas sejam utilizadas de forma coerente e convincente de que elas são a *boa maneira* de se resolver certa tarefa, que são as técnicas denominadas autotecnológicas. É no sentido contrário que falamos das técnicas não empíricas, sendo aquelas que não são uma construção tão espontânea para a criança, exigindo que elementos tecnológicos-teóricos sejam evocados de maneira mais explícita.

primeiros contatos com o campo aditivo, tornou-se pouco econômica para ser praticada nas atuais circunstâncias do ensino.

A relação entre a operação de adição e a de subtração começa a se mostrar mais acentuada ao notarmos que ao longo de todo esse volume o autor busca propor tarefas contextualizadas que mobilizam a ideia da operação inversa, que são situações com um nível de dificuldade bem maior do que as do tipo protótipo (MAGINA, 2001), embora essas últimas sejam ainda muito mais trabalhadas por colocarem em jogo as principais e primeiras ideias do campo aditivo.

7 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DO LIVRO DO QUARTO ANO

Para a análise, o livro do quarto ano foi dividido em três partes. A primeira parte (páginas 1 à 111) refere-se aos primeiros capítulos do livro que, no que tange o campo aditivo, trata-se de uma retomada de algumas ideias já trabalhadas nos volumes anteriores. A segunda parte (páginas 112 à 143) consiste no capítulo “Adição e subtração com números naturais”. Já a terceira parte (páginas 144 à 313) incide sobre os sete últimos capítulos do livro que não têm como objeto de estudo o campo aditivo, mas ora ou outra são propostas tarefas que tornam necessária a mobilização de noções relativas às operações de adição e de subtração e, por isso, merecem nossa atenção.

6.1 PARTE I – SISTEMAS DE NUMERAÇÃO E NÚMEROS NATURAIS ATÉ O 1000000 (UM MILHÃO)

A Parte I do livro do quarto ano é composta pelos capítulos “Sistemas de numeração”, “Sólidos Geométricos”, “Grandezas e medidas: tempo e dinheiro” e “Regiões planas e seus contos”. Apesar de a investigação abranger todos esses capítulos, os dados recolhidos neles acerca do ensino das operações de adição e subtração estão mais concentrados no primeiro capítulo.

Esse volume inicia apresentando um pouco da história dos números e aborda muito brevemente alguns sistemas de numeração, o que põe à tona elementos tecnológicos estudados no sistema de numeração decimal, como os reagrupamentos necessários ao se realizar adições. Para ilustrar, apresentamos parte de uma atividade feita com o sistema de numeração egípcia. Nota-se que o autor do livro didático decide mesclar o ostensivo utilizado em cálculos com números indo-arábicos com os signos egípcios.



Figura 81: Sistema de numeração Maia e a ideia de agrupamento
Fonte 59: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quarto ano, p. 13

Cabe comentar que não são propostas discussões que possibilitem compreender melhor o sistema vigente em nossa sociedade, embora alguns de seus aspectos sejam evocados pela similaridade entre os sistemas, como a própria ideia de reagrupamentos. Desse modo, as diferenças entre eles também não são abordadas de maneira explícita, como é o caso da ideia fundamental do valor posicional. É logo após esse estudo, já na página 17, que o sistema de numeração decimal é posto em prática até que se alcance o número 1000000 (um milhão).

O tipo de tarefa T8, que classificamos como sendo inerente ao campo aditivo, se apresenta como uma ferramenta importante para a construção dos números, bem como para a mobilização de elementos tecnológicos. É por meio da decomposição pelas casas decimais, com o auxílio da leitura do número (língua materna) e de algumas representações feitas, por exemplo, com o material dourado, que os números com três e quatro casas decimais passam a fazer parte do domínio de uso do aluno ao se trabalhar as operações.

Além do tipo de tarefa T8, todo esse estudo é promovido por diferentes tarefas próprias do campo aditivo e é por meio delas e pelo trabalho com algumas técnicas já vistas em outras ocasiões, que o entorno tecnológico-teórico da praxeologia proposta para o ensino de adição e subtração é retomado e reinvestido. Lembremos que essa primeira parte antepõe o capítulo destinado ao estudo específico das operações de adição e subtração.

Apresentamos a seguir os tipos de tarefas e técnicas propostas nessa parte:

Quadro 37: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do quarto ano - Parte I

	T1₁	T2₁	T2₂	T2₃	T3₁	T3₂	Total
Total	26	2	8	4	4	7	58

Quadro 38: Demais Tipos de Tarefas – Livro do quarto ano – Parte I

	T7	T8	T11	T12	Total
Total	8	18	31	7	64

Quadro 39: Relação dos tipos de tarefas e técnicas – Livro do quarto ano – Parte I

	T1 ₁	T2 ₁	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	T7	T8	T11	T12
τ_{13}	■						■	■	■	
τ_{17}								■	■	
τ_{18}	■			■		■	■	■		
τ_{19}	■	■					■	■		
τ_{20}	■	■	■				■	■		
τ_{22}	■	■	■	■	■	■		■		■
τ_{24}						■		■	■	

Notamos, por meio dos quadros 37 e 38 que, apesar desse momento do livro não ter como foco o estudo das operações, uma variedade considerável de tarefas são trabalhadas e, conseqüentemente, diferentes ideias são revistas. Entretanto, para respondê-las, percebemos (quadro 39) que as técnicas propostas não são mais tão diversificadas como era de costume nos primeiros volumes da coleção. As *maneiras de fazer* são aquelas que possuem um caráter mais aritmético e que ativam poucos ostensivos para serem instrumentalizadas.

6.2 PARTE II – CAPÍTULO INTITULADO “ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO COM NÚMEROS NATURAIS”

A Parte II constitui-se do capítulo destinado especificamente ao estudo das operações de adição e subtração e nele, segundo nota de rodapé, tem-se os seguintes objetivos: *Compreender os algoritmos da adição e da subtração com números maiores do que 999; explorar informalmente propriedades da adição; ver a adição e a subtração como operações inversas; e resolver situações-problema que envolvem essas operações.*

O capítulo em questão, como de costume nos outros volumes, é dividido em três blocos – um para o estudo de adição, outro para o de subtração e um último que trata das duas operações em conjunto com o intuito de relacioná-las como inversa uma da outra. Buscamos apresentar, a seguir, as principais ideias abordadas nessa parte do livro, dando destaque aos novos elementos que passam a fazer parte da praxeologia proposta para o ensino do campo aditivo.

Para iniciar o estudo de cada uma das operações propõe-se uma retomada de algumas das ideias da adição e da subtração. Para tanto, são apresentadas situações-problema que exploram noções inerentes às categorias I, II e III das estruturas aditivas de base (VERGNAUD, 1990). Nesse primeiro momento, de reencontro com a praxeologia, algumas técnicas e tecnologias são revistas e é nesse cenário que o algoritmo usual é abordado com apoio do material dourado.

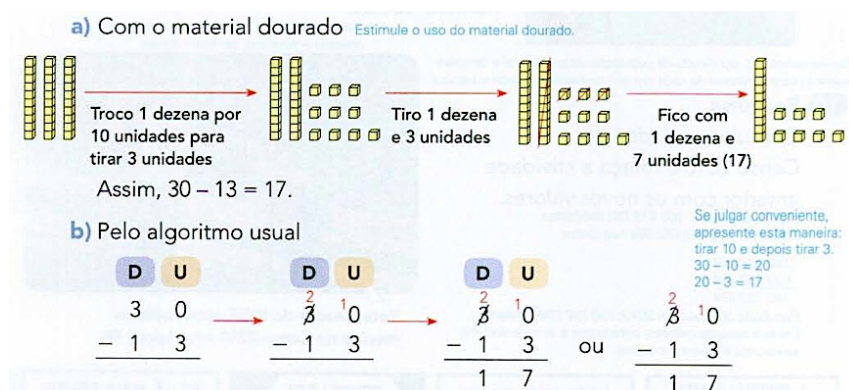


Figura 82: Material dourado e o algoritmo usual
Fonte 60: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quarto ano, p. 126

Percebe-se que por parte do autor, desde o segundo ano, há preocupação com a noção de reagrupamentos, que é justificada pela necessidade de colocá-la em prática ao se utilizar o algoritmo usual. No entanto, no quarto ano e, em especial, nessa parte do livro, o uso de materiais de manipulação diminui e é nesse sentido que o material dourado é ligeiramente abandonado, dando lugar à *discursos* em língua materna que objetivam uma *operacionalização racional* da técnica. Apesar desse registro escrito também viver pouco na praxeologia proposta, esse trabalho vislumbra a compreensão e a legitimidade do algoritmo usual.

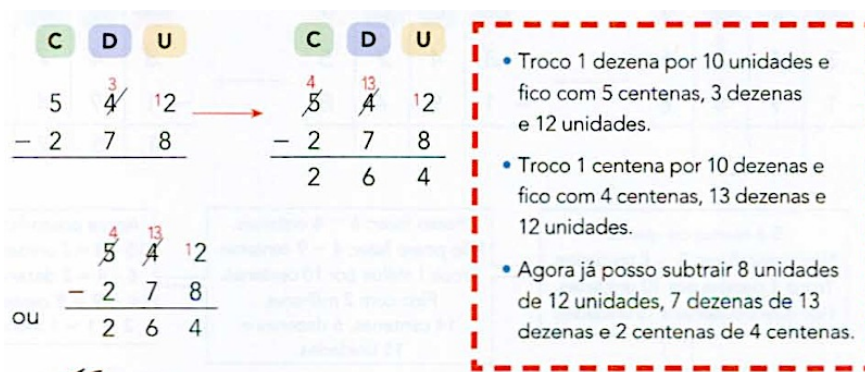


Figura 83: Justificativa em língua materna da técnica do algoritmo usual
Fonte 61: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quarto ano, p. 127

Ainda em relação aos reagrupamentos, é também apresentado ao aluno uma nova maneira de efetuar algumas subtrações que evita a ação de “emprestar um”.

τ_{26} - (Para subtrações em que o minuendo termina em zero ou tem zeros intercalados)
 Subtrair um mesmo valor conveniente do minuendo e do subtraendo e aplicar o algoritmo usual de modo que não haja a necessidade de realizar reagrupamentos

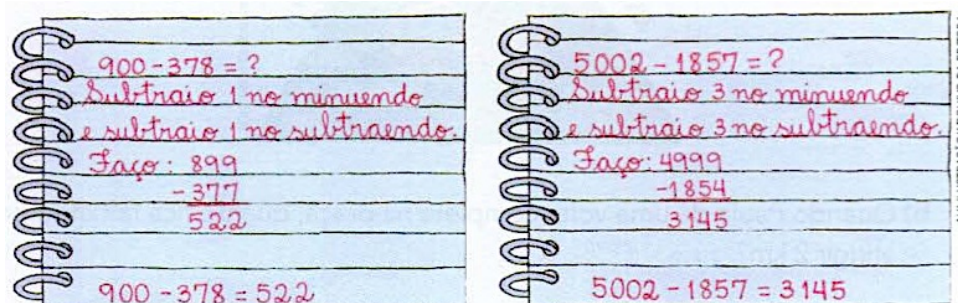


Figura 84: Apresentação da τ_{26}

Fonte 62: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quarto ano, p. 132

A apresentação da técnica é feita por meio de exemplos, como ilustra a Figura 82, e em seguida são propostas algumas atividades para que seja vivenciado o momento de treino e aperfeiçoamento da técnica. Os elementos tecnológicos que permeiam essa maneira de efetuar a subtração e a discussão do porquê esse método é vantajoso fica a cargo do aluno e do professor²⁷. Cabe destacar que essa técnica pode ser aplicada com eficácia somente em algumas situações, além de ser limitada para as subtrações em que o minuendo termina em zero ou tem zeros intercalados. Seu uso também é comprometido por cálculos intermediários realizados sobre as duas medidas em jogo, que devem propiciar o cálculo mental.

Para o cálculo envolvendo números com três casas decimais são também propostas outras técnicas de resolução que motivam o cálculo mental, a estimativa ou as aproximações, tais como as τ_{18} , τ_{19} , τ_{20} , τ_{24} e τ_{25} . Essas técnicas já foram abordadas em outros momentos de estudo e recebem destaque também nesse volume.

A respeito das demais técnicas mobilizadas nessa parte do livro, consideramos importante destacar uma situação que nos indica uma nova técnica, embora essa possa ser vista como a união de outras técnicas já elencadas, como iremos discutir mais detalhadamente a seguir.

²⁷ Em nota para o professor o autor do livro didático apresenta uma justificativa para validar a técnica junto à alguns outros exemplos.

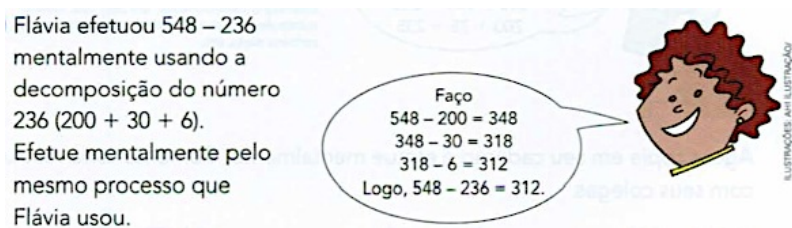


Figura 85: Apresentação da τ_{26}
 Fonte 63: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quarto ano, p. 134

τ_{27} – Decompor uma das medidas envolvidas na situação e efetuar a adição de modo conveniente


Primeiramente, é importante esclarecer que essa maneira de resolver, ilustrada pela Figura 83, não é acrescida à praxeologia apenas nesse momento de estudo. São encontradas resoluções como essas em momentos anteriores, expostas, normalmente, apenas nas respostas das atividades fornecidas ao professor, e não ao aluno. Outrora, analisamos situações como essas por meio das demais técnicas já elencadas. Percebe-se que essa maneira de fazer possui alguns princípios das técnicas, por exemplo, τ_{14} e τ_{19} . Decidimos enunciar essa técnica à parte das demais pelo destaque atribuído a ela nessa parte do livro e por buscarmos caracterizar o ensino proposto, sendo necessário dar destaque às diferentes maneiras propostas de se efetuar as operações de adição e subtração.

Além das duas novas técnicas há, nessa parte do livro, momentos de construção do entorno tecnológico-teórico mais explícitos. O autor propõe atividades que exploram informalmente as propriedades da comutatividade, do elemento neutro e da associatividade da operação de adição. Tais atividades põem o aluno a experimentar, por exemplo, os possíveis resultados ao se trocar a ordem das parcelas, ou ainda, ao se somar o zero com diversos números. Ao final de cada atividade o aluno é questionado sobre as regularidades ocorridas, visando a formulação de conjecturas referentes à essas propriedades. Não há um espaço destinado especialmente ao momento de institucionalização desses elementos tecnológicos-teórico²⁸, salvo a propriedade associativa, que é usada como resultado para o momento de avaliação de técnicas propostas.

²⁸ Esses sejam retomados por meio de exemplos ao final do capítulo no tópico “O que estudamos”.

6

ILUSTRAÇÕES: APH ILLUSTRAÇÃO ARQUIVO DA EDITORA



Na adição com mais de duas parcelas, posso agrupar as parcelas do modo que achar melhor, pois o resultado será sempre o mesmo. Veja como fiz nos exemplos abaixo.

$45 + 3 + 17 = 65$ $550 + 50 + 1237 = 1837$ $995 + 734 + 5 = 1734$

20 600 1000

Copie, agrupe de forma conveniente e calcule a soma mentalmente.

a) $24 + 58 + 6$ d) $5 + 37 + 25 + 3$ Peça a alguns alunos c

Figura 86: Propriedade associativa e momento de avaliar a técnica
Fonte 64: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quarto ano, p. 134

O autor do livro didático não propõe a discussão das vantagens de uma técnica sobre a outra, mas ao pedir que o aluno procure uma melhor maneira de se agrupar as parcelas, acreditamos que há a oportunidade de ele refletir sobre as possíveis situações que fazem uma técnica ser mais profícua que outra.

Para concluir a análise da Parte II do livro do quarto ano, apresentamos a seguir algumas outras características do ensino proposto que acreditamos serem importantes e para isso trazemos também a frequência dos tipos de tarefas e das técnicas, bem como a relação entre elas. Para dar início a essas discussões, apresentamos os quadros 40 e 41:

Quadro 40: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do quarto ano - Parte II.

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	Total
Total	27	2	13	26	3	1	22	92

Quadro 41: Demais Tipos de Tarefas – Livro do quarto ano – Parte II

	T7	T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16	Total
Total	4	1	1	7	122	9	2	72	12	18	248

Notemos, primeiramente, que nessa parte do livro há uma proliferação de tarefas de diversos tipos, todavia, algumas delas são, quantitativamente, pouco exploradas. É nesse sentido que percebemos, mais uma vez, a valorização de tarefas do tipo T11 e as do tipo contextualizadas que não mobilizam a operação inversa da que é exposta no enunciado da atividade (T1₁, T2₂ e T3₂). Entretanto, é importante destacar que a proposta de ensino investigada não nega o estudo da relação entre as duas operações. O fato de a operação de adição ser a inversa da operação de subtração é trabalhado, por exemplo, por meio da tarefa de tirar a *prova real* (T12). Além disso, há um espaço especial para essa discussão, momento em que o T2₁ ganha destaque. É nesse cenário que novamente a representação semelhante ao esquema proposto por Vergnaud (1990) é abordado na resposta ao professor.

c) Ana tinha uma quantia em dinheiro, ganhou R\$ 75,00 e ficou com R\$ 108,00. Quanto Ana tinha? $R\$ 33,00$ $?$ $+ 75$ \rightarrow 108 $\begin{array}{r} 108 \\ - 75 \\ \hline 33 \end{array}$

Figura 87: Tipo de tarefa T2₁ e representação semelhante ao do Vergnaud (1990)
 Fonte 65: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quarto ano, p. 137

Afim de apresentarmos as outras maneiras como todos esses tipos de tarefas são resolvidos, trazemos o quadro a seguir:

Quadro 42: Relação dos tipos de tarefas e técnicas – Livro do quarto ano – Parte II²⁹

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	T7	T11	T12	T14	T15	T16
τ_{12}									■			■	
τ_{14}			■						■		■		
τ_{16}			■						■	■		■	
τ_{17}	■								■		■		
τ_{18}	■			■				■	■		■		
τ_{19}							■	■	■				
τ_{20}				■				■	■			■	
τ_{21}	■								■				
τ_{22}	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
τ_{23}									■				
τ_{24}							■		■		■		
τ_{25}	■								■				■
τ_{26}				■	■		■		■		■		
τ_{27}	■								■		■		

Notemos que as técnicas propostas no início do estudo do campo aditivo para os números naturais até 10, aquelas com índices inferiores a 12 e provenientes do livro do primeiro ano, não estão mais presentes. As operações de adição e subtração estão nesse momento, de modo geral, relacionadas à técnicas próprias para o cálculo mental e também ao algoritmo usual, que se mostra com grande abrangência para responder as tarefas propostas, visto que a τ_{22} é assinalada, no quadro 42, como técnica de grande parte dos tipos de tarefas.

No próximo parágrafo apresentamos a análise dos últimos capítulos do livro do quarto ano, capítulos esses que não tratam especialmente das operações de adição e subtração, mas que, ora ou outra, trazem os estudos já desenvolvidos.

²⁹ Devido as dimensões da tabela não inserimos nela os tipos de tarefas T8, T9, T10 e T13, que deveriam constar na cor cinza.

6.3 PARTE III – ÚLTIMOS CAPÍTULOS

A Parte III corresponde a mais da metade do volume do quarto ano; nela estão inclusos os capítulos 6 ao 12, nos quais trabalha-se as operações de multiplicação e divisão, os números decimais, o bloco grandezas e medidas e diferentes conceitos geométricos. Como pode-se notar, essa parte não é destinada ao ensino do campo aditivo, mas as operações de adição e de subtração aparecem em algumas situações ao longo desses capítulos e são sobre elas que iremos nos voltar na análise aqui apresentada. Para tanto, trazemos inicialmente os tipos de tarefas propostos e a suas respectivas frequências.

Quadro 43: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do quarto ano - Parte III.

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	T4 ₁	Total
Total	33	2	12	1	2	5	1	56

Quadro 44: Demais Tipos de Tarefas – Livro do quarto ano – Parte III

	T8	T11	T12	T13	T14	T15	T16	Total
Total	8	34	3	1	12	4	8	70

Sobre tais tipos de tarefas nos cabe apenas discorrer sobre um aspecto, ainda não suficientemente tratado nas demais análises. Para essa discussão, trazemos o seguinte excerto do livro:

b) No início de maio o sr. Júlio tinha um saldo de R\$ 2 345,00 em sua conta bancária. Durante o mês ele fez uma retirada de R\$ 250,00, outra de R\$ 325,00 e um depósito de R\$ 280,00. Qual foi o saldo de sua conta no final do mês? *R\$ 2 050,00*

2345	250	2825
+ 280	+ 325	- 575
2625	575	2050

Figura 88: Exemplo de tarefa do tipo T4₁

Fonte 66: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quarto ano, p. 234

A situação trata de uma medida dada que sofre algumas transformações e é por meio da resposta apresentada que entendemos mais claramente a praxeologia proposta. Desse modo, debruçamo-nos mais atentamente sobre a resolução fornecida pelo autor do livro didático: primeiramente trabalha-se com o estado inicial (saldo inicial do banco) e com uma transformação positiva (o depósito de 280 reais), o que resulta na

conta $2345 + 280$, obtendo então um estado final de 2625 reais – o que caracteriza uma tarefa do tipo T_2 ; logo depois soma-se as duas retiradas do banco ($250 + 325 = 575$), ou seja, compõe-se duas transformações negativas – tarefa do tipo T_4 ; e por fim, realiza-se a operação de subtração entre 2625 e 575, que são, respectivamente, o estado final da primeira operação, que nessa circunstância é um *novo* estado inicial, e a transformação resultante da união das outras duas transformações – novamente tem-se uma T_2 . Cabe observar que essa atividade poderia ser classificada de outras formas caso não tivéssemos acesso à resposta do autor, o que explicita sua real proposta. Para ilustrar, tomemos uma outra forma de resolver a mesma situação: poderíamos, por exemplo, retirar os 250 reais do saldo inicial de 2345 reais, depois retirar novamente 325 do resultado anterior, e concluir com a soma de 280 reais, oriunda do depósito final. Nessa resolução, proposta por nós, não há o trabalho sobre a composição de transformações, isto é, não é mobilizada a ideia abordada pela quarta categoria das estruturas aditivas de base (VERGNAUD, 1990). É para aspectos como esses que gostaríamos de chamar atenção: ao analisarmos as atividades, algumas delas poderiam ser classificadas de modos diferentes, o que significa que noções diferentes do campo aditivo podem aparecer nas salas de aula que utilizam esse livro didático, no entanto, em nossa pesquisa investigamos a proposta do autor, destacando aquilo que ele evidencia para o ensino do campo aditivo. Cabe destacar ainda que, embora o exemplo discutido evoque uma tarefa referente à quarta categoria das estruturas aditivas de base, mesmo quando possível, são raras as situações que não são respondidas apenas por meio das ideias referente às três primeiras categorias.

Na busca por apresentar a proposta de ensino da coleção investigada não nos deparamos com os elementos praxeológicos de maneira explícita e muitas vezes o exercício analítico é desafiador. Como o foco de estudo da Parte III do livro didático não é o campo aditivo, em muitos momentos são apresentadas apenas as respostas finais ou a operação a ser realizada para responder as atividades, não deixando claro as técnicas a serem empregadas. Desse modo, limitamo-nos apenas a apontar algumas das principais técnicas para se calcular adições e subtrações que acreditamos serem aplicáveis e condizentes com a proposta do autor segundo a nossa análise dessa parte do livro. São elas: τ_{18} , τ_{19} , τ_{20} , τ_{22} , τ_{25} e τ_{27} .

A seguir apresentamos uma síntese de alguns aspectos do volume do quarto ano que são essenciais para construirmos um cenário do ensino proposto pela coleção analisada.

7.4 ALGUMAS CONCLUSÕES DO LIVRO DO QUARTO ANO

A análise do livro do quarto ano revela um ensino bem diferente daquele encontrado nos primeiros momentos de estudo do campo aditivo. Notamos um amadurecimento bastante acentuado no entorno tecnológico-teórico, que influencia diretamente a escolha das técnicas utilizadas. É nesse cenário que o algoritmo usual ganha ainda mais destaque e se torna a principal ferramenta para se resolver as operações de adição e subtração. O ensino também é bastante enriquecido com técnicas que propiciam o cálculo mental, as aproximações e estimativas.

Para apresentar de forma sistematizada o ensino do quarto ano construímos o quadro que ilustra o abandono, a permanência e a inauguração ³⁰ das técnicas no ensino do quarto ano, mas em uma perspectiva um pouco diferente dos outros quadros já apresentados. Visamos apresentar aqui aquelas que efetivamente se mostraram presentes nesse estudo, visto que, eventualmente, algumas das técnicas ditas como abandonadas podem ser utilizadas em alguns (poucos) momentos, no entanto, a sua presença não é significativa na busca pela caracterização do ensino, o que justifica a nossa decisão de classificá-la como “abandonada”.

Quadro 45: Síntese das técnicas do livro do quarto ano

τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9	τ_{10}	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}	τ_{14}
τ_{15}	τ_{16}	τ_{17}	τ_{18}	τ_{19}	τ_{20}	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}	τ_{24}	τ_{25}	τ_{26}	τ_{27}	

Na mesma perspectiva apresentamos o quadro dos tipos de tarefas. Buscamos destacar, em vermelho, aqueles que não aparecem de forma tão expressiva no livro.

Quadro 45: Síntese dos tipos de tarefas do livro do quarto ano

T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	T4 ₁	T7
T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16

Ao longo dos quatro livros analisados, destacamos constantemente a valorização de alguns tipos de tarefas, seja ela contextualizada ou não, tais como a T1₂, T2₂, T3₂, T11 e também a T14, que a cada livro se torna mais frequente. Em contrapartida, há aquelas que raramente foram propostas, como a T4₁ e a T13, e existem também as que vão deixando de ser exploradas em consequência da evolução do estudo, como é o caso da T9 e T10, que, em momentos introdutórios de estudo, foram de extrema importância para a sistematização das primeiras ideias abordadas no estudo das operações de adição

³⁰ O abandono em destaque vermelho, a permanência em azul e a inauguração de técnicas em verde.

e subtração, mas que nesse momento se tornaram *naturais*³¹, fazendo com que o autor não as evoque como uma tarefa a ser feita, pois fazer isso se tornou comum e parte da própria resolução da situação.

A respeito do T7 e do seu abandono, nos cabe fazer um comentário. Esse tipo de tarefa não deixou de viver na praxeologia da coleção analisada, mas deixou de estar presente especificamente na praxeologia referente ao campo aditivo envolvendo números naturais. No livro do quarto ano notamos um trabalho maior com os números decimais e são com esses números que tarefas envolvendo dinheiro são desenvolvidas e, por isso, não nos voltamos a elas por não fazerem parte do nosso foco de investigação.

A organização didática proposta, não estranhamente, se mantém parecida ao longo dos volumes, reforçando a valorização do autor quanto ao momento de treino das técnicas, voltado à um ensino do tipo tecnicista. Todavia, vemos aparecer alguns momentos de exploração nesse volume que não foram sentidos tão acentuadamente nas outras análises, o que se deve talvez à ideia de que o aluno disponha somente nesse nível de um conjunto maior de elementos tecnológicos-teóricos que possibilitem a formulação de conjecturas, caracterizando aspectos do tipo modernista e também clássico (GASCÓN, 2003). No entanto, cabe comentar que muitas institucionalizações de diferentes saberes não são promovidas pelo autor do livro didático, fazendo com que muitos conceitos e noções do campo aditivo estejam vivendo de maneira informal na praxeologia proposta.

³¹ Ressaltamos que traduzir situações dadas em expressões matemáticas, sejam elas expostas em língua materna ou em ostensivos imagens, faz parte de toda tarefa contextualizada.

8 ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA DO LIVRO DO QUINTO ANO

Apresentamos nesse capítulo a análise do quinto e último livro. Com ela poderemos concluir a construção do cenário de estudo promovido pela coleção investigada, buscando entender quê matemática, no que tange o campo aditivo, o aluno que conclui os primeiros anos do ensino fundamental pode levar para a continuação da sua trajetória escolar.

Para essa análise dividimos o volume em duas partes. Na primeira, Parte I (páginas 1 à 73), encontramos alguns capítulos iniciais e um específico para as operações de adição e subtração dos números naturais. Na segunda parte, Parte II (74 à 288) deparamo-nos com algumas retomadas no ensino do campo aditivo.

6.1 PARTE I – CAPÍTULO “ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO COM NÚMEROS NATURAIS”

O capítulo de adição e subtração tem início na página 54, antes dele, nos capítulos intitulados “Sistema de numeração decimal” e “Geometria”, algumas poucas tarefas são abordadas relacionadas à essas operações. Todavia, são nessas primeiras páginas do livro que o aluno é apresentado aos números naturais até a classe dos bilhões e é nesse contexto que há a proposta de trabalho com a composição e decomposição dos números, o que de fato influencia na aplicabilidade de técnicas próprias para somar e subtrair, como as τ_{18} , τ_{19} , τ_{23} e τ_{27} .

A parte dedicada especialmente ao estudo do campo aditivo é introduzida por meio de uma situação-problema envolvendo as ideias de juntar e comparar medidas. Na sequência, dá-se início ao estudo da operação de adição, para depois abordar a operação de subtração.

No manual do professor o autor comenta que tudo o que será visto já foi trabalhado em volumes anteriores, mas que nessa circunstância será ampliado para números maiores. É nessa perspectiva que as primeira tarefas propostas, tanto para a adição quanto para a subtração, são respondidas pelo algoritmo usual, não havendo mais o uso do material dourado, frequente nos anos anteriores. Todavia, ainda há, nesse reencontro com o algoritmo usual, um discurso tecnológico breve que visa a operacionalização da técnica. Para ilustrar, tomemos o caso da subtração:

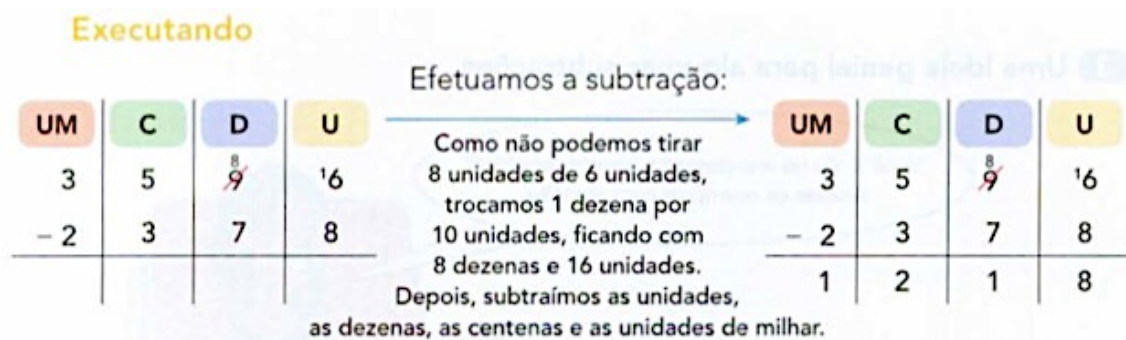


Figura 89: Discurso tecnológico da técnica do algoritmo usual
 Fonte 67: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quinto ano, p. 63

Nesse cenário o autor retoma a ideia das fases de resolução de um problema – compreender, planejar a resolução, executar, verificar e responder. Na fase de verificação, que constitui na nossa tarefa do tipo T12, é proposto que se faça a operação inversa na situação de subtração, e na situação relativa à adição é aplicada informalmente a propriedade comutativa.

Verificando

Para verificarmos se está correto ou para tirarmos a prova, podemos efetuar a adição mudando a ordem das parcelas.

Verifique em seu caderno se o resultado é o mesmo.

$$3127$$

$$+ 1125$$

Figura 90: Prova real por meio da propriedade da comutatividade
 Fonte 68: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quinto ano, p. 56

Após o estudo das primeiras tarefas contextualizadas, apresentadas para cada uma das duas operações, tem-se um tópico destinado à aplicação do algoritmo usual e do cálculo mental. O autor não retoma as possíveis maneiras de se efetuar o cálculo mentalmente, mas as tarefas são adequadas para o emprego de técnicas já vistas como as τ_{18} , τ_{19} , τ_{20} e τ_{27} , como é possível observar no excerto a seguir.

- a) $800 + 100 = 900$ d) $200 + 1000 = 1200$ g) $5 + 1005 = 1010$
 b) $6000000 + 1000000 = 7000000$ e) $70000 + 8000 = 78000$ h) $4000 + 12 = 4012$
 c) $70 + 50 = 120$ f) $998 + 3 = 1001$ i) $5000 + 1281 = 6281$

Figura 91: Exemplo de atividade de cálculo mental
 Fonte 69: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quinto ano, p. 57

No caso da subtração há também a retomada da técnica τ_{26} . Na sequência da sua exposição são propostas, por meio de exemplos, tarefas do tipo T11 para o treino da técnica. Nessa circunstância vemos surgir uma possível tentativa de um momento de avaliação da técnica.

Efetue mais estas subtrações usando o algoritmo mostrado nos exemplos acima. No item **b** use também o algoritmo usual.

a) $40000 - 7258 = 32742$ $\begin{array}{r} 39999 \\ - 7257 \\ \hline 32742 \end{array}$ b) $6001 - 2493 = 3508$ $\begin{array}{r} 5999 \\ - 2491 \\ \hline 3508 \end{array}$ c) $903 - 276 = 627$ $\begin{array}{r} 899 \\ - 272 \\ \hline 627 \end{array}$

enta e quatro Capítulo 3 ←

Figura 92: Atividade para aplicar a τ_{26}
Fonte 70: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quinto ano, p. 64

A vantagem da técnica τ_{26} em relação à não necessidade de realizar empréstimos ao fazer uma subtração pode ser sentida quando a comparamos a outra técnica, em especial a do algoritmo usual, assim como é proposto na atividade para o item *b*. Na sequência há também uma lista de tarefas do tipo T11 e pede-se que se aplica o algoritmo que julgar mais conveniente. Nessa segunda atividade, analisando as respostas fornecidas para o professor, alguns cálculos são feitas pela τ_{22} ou pela τ_{26} , dependendo da situação. Nessas atividades, o autor não promove uma discussão que valorize o momento de avaliação das técnicas, além de não haver orientações para que o professor a faça com seus alunos. É nesse sentido que notamos que os momentos de avaliação são expostos na coleção de maneira muito sucinta, o que pode acarretar no desmerecimento de resultados interessantes acerca das técnicas e de quão potenciais elas são para responder os diferentes tipos de situações do campo aditivo.

Na parte específica do ensino de adição há também um tópico sobre algumas propriedades que merecem nossa atenção. Nessa parte do livro as propriedades comutativa, do elemento neutro e a associativa, que em outros momentos foram mobilizadas de maneira intuitiva e informal, são finalmente institucionalizadas pelo autor. Para tanto, propõe-se atividades que favorecem a formulação de conjecturas e em seguida os saberes em jogo são definidos por meio da língua materna. Essas propriedades já viviam na praxeologia *empiricamente*³², no entanto, após serem institucionalizadas elas passam a ser incorporadas, de fato, ao entorno tecnológico-teórico, fazendo com que algumas técnicas sejam revistas por meio de elementos tecnológicos que as legitimam, como é o caso da τ_{20} .

³² Viviam pela experiência e intuição.

Veja como Maria usou a propriedade comutativa da adição para calcular mentalmente $3 + 748$.
 Calcule mentalmente e registre:

a) $2 + 5788 = 5790$
 b) $4 + 768 = 772$
 c) $3 + 997 = 1000$

Como $3 + 748$ é igual a $748 + 3$, eu falo: $749, 750$ e 751 .
 Logo, $3 + 748 = 751$.

Figura 93: Atividade que aplica a noção da propriedade comutativa
 Fonte 71: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quinto ano, p. 58

Ademais, essas propriedades tornam-se instrumento para resolver tarefas, tanto agregando à técnicas já existentes uma operacionalização mais racional, quanto criando uma nova maneira de se resolver certas situações – é nesse sentido que vemos elementos tecnológicos se tornarem técnicas. Tomemos um exemplo para elucidar essa discussão.

Propriedade do elemento neutro da adição:
 Numa adição, se uma das parcelas é zero, o resultado é igual à outra parcela.

6 Calcule mentalmente e registre:

a) $0 + 1345 = 1345$ c) $365 + 0 = 365$
 b) $12187 + 0 = 12187$ d) $0 + 34125 = 34125$

Não escreva neste livro. Faça todas as atividades no caderno.

Figura 94: Atividade que aplica a propriedade do elemento neutro da adição
 Fonte 72: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quinto ano, p. 59

Apesar de atividades parecidas às da Figura 92 já terem sido propostas em outros momentos e serem respondidas pela noção intuitiva da propriedade do elemento neutro da adição, percebemos que o autor tem a intenção de utilizar o elemento tecnológico da propriedade do elemento neutro da adição como ferramenta de resolução. Nesse sentido, a técnica proposta para responder a atividade é a mobilização da propriedade recém institucionalizada. Sentimos, então, a necessidade de enumerar uma nova maneira de responder tarefas do campo aditivo.

τ_{28} – Aplicar alguma das três propriedades da adição – a comutativa, a associativa e a do elemento neutro

Não havendo mais técnicas e tarefas inauguradas nessa primeira parte do livro do quinto ano, expomos a seguir os quadros que sintetizam o bloco tecno-prático da praxeologia proposta.

Quadro 46: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do quinto ano, Parte III.

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	Total
Total	18	6	10	5	8	6	53

Quadro 47: Demais Tipos de Tarefas – Livro do quinto ano – Parte III

	T7	T8	T11	T12	T13	T14	T15	T16	Total
Total	4	11	129	6	2	41	9	1	203

Quadro 48: Relação dos tipos de tarefas e técnicas – Livro do quinto ano – Parte I

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	T7	T8	T11	T12	T13	T14	T15	T16
τ_{12}														
τ_{14}														
τ_{16}														
τ_{17}														
τ_{18}														
τ_{19}														
τ_{20}														
τ_{21}														
τ_{22}														
τ_{23}														
τ_{25}														
τ_{26}														
τ_{27}														
τ_{28}														

Nota-se, mais uma vez, que a diversidade e permanência dos tipos de tarefas continua ao longo dos cinco volumes, o que não acontece com as técnicas, que tomam características diferentes advindas da expansão do sistema de numeração decimal e da busca pela otimização em se efetuar cálculos.

A seguir apresentamos a análise dos demais capítulos do livro do quinto ano, para então compormos toda a praxeologia proposta pela coleção investigada no que tange o ensino do campo aditivo para os anos iniciais.

6.2 PARTE II – DEMAIS CAPÍTULOS

A Parte II, última parte a ser analisada, é composta por todos os capítulos posteriores ao de adição e subtração, recém analisado, e constitui aproximadamente dois terços de todo o volume (páginas 74 à 288), no entanto, possui uma quantidade expressivamente menor de tarefas que a primeira terça parte investigada. Nessa análise encontramos diversos conteúdos sendo abordados referentes aos diferentes campos de estudo, como o Tratamento da informação e o a Geometria. Nesse cenário, ora ou outra

noções de adição e de subtração são mobilizadas, como no caso do cálculo de perímetro ou da média de um determinado conjunto de medidas. Vamos discutir mais adiante as situações que consideramos pertinentes destacarmos na busca pela caracterização do ensino do campo aditivo. Ademais, cabe comentar que encontramos também nessa parte um capítulo, não muito extenso, dedicado ao ensino de expressões numéricas com as quatro operações, que é alvo do nosso estudo.

Para iniciar a discussão, tomemos os tipos de tarefas presentes nesse momento destacando, a seguir, algumas características que acreditamos ser importantes sobre o ensino de adição e subtração no quinto ano.

Quadro 49: Tipos de Tarefas contextualizados – Livro do quinto ano - Parte II.

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₂	Total
Total	15	19	5	4	11	54

Quadro 50: Demais Tipos de Tarefas – Livro do quinto ano – Parte II

	T7	T8	T11	T12	T14	T15	T16	Total
Total	4	2	63	2	12	5	3	91

Por diversos conteúdos estarem sendo estudados nessa parte do livro, as tarefas próprias do campo aditivo estão presentes, em geral, para caracterizar situações que visam a mobilização de novo conceitos. Para ilustrar, vejamos um exemplo:

b) Em uma cidade, 55% são homens. Então, 45% são mulheres. $(100 - 55 = 45)$

Figura 95: Exemplo de tarefa do tipo T1₂ envolvendo porcentagem
 Fonte 73: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quinto ano, p. 183

A atividade acima não tem como objetivo principal o ensino de noções do campo aditivo, mas objetiva o trabalho de uma das ideias fundamentais de porcentagem, o de o todo ser representado pelo 100%, que possui relação direta com a noção de composição de medidas, em especial relacionada ao tipo de tarefa T1₂. Afim de aclarar ainda mais essa característica no ensino, tomemos um outro exemplo.

b) O salário mensal de Marisa era R\$ 1 800,00 e ela teve 10% de aumento. Qual é o salário atual de Marisa? $R\$ 1980,00 (10\% \text{ de } 1800 = 180; 1800 + 180 = 1980)$

Figura 96: Exemplo de tarefa do tipo T2₂ envolvendo porcentagem
 Fonte 74: Coleção Ápis – Alfabetização Matemática – livro do quinto ano, p. 246

Essa situação, por envolver uma transformação (de 10%) sobre uma medida inicial (de 18000 reais), foi classificada por nós como uma tarefa do tipo T2₂. Todavia, o que queremos enfatizar é que tarefas como essas são um meio para colocar em prática

outros conteúdos, e essa é a principal função das situações de adição e subtração presentes nessa parte.

Há também situações que necessitam da realização de operações de adição e subtração mas que não consideramos como próprias do campo aditivo. Por exemplo, ao se calcular a média faz-se, primeiramente, a soma de todos os valores de um dado conjunto, todavia, não consideramos que a realização da operação de adição faz das atividades sobre média específicas ao ensino que estamos investigando, visto ainda que tais cálculos se tornaram *rotineiras* na praxeologia proposta e por isso podem ser realizadas sem muitas dificuldades na mobilização de outros conceitos matemáticos, em especial o de média aritmética.

Como já dito, há também nessa parte do livro um capítulo em que se estuda as expressões numéricas, e no qual notamos uma grande valorização pelo momento de treino das técnicas de resolução. É nesse cenário que o tipo de tarefa T11 ganha destaque e torna-se numerosa na quantificação feita no quadro 50.

Para responder às situações de adição e subtração propostas algumas técnicas são evidenciadas:

Quadro 51: Relação dos tipos de tarefas e técnicas – Livro do quinto ano – Parte II

	T1 ₁	T1 ₂	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₂	T7	T8	T11	T12	T14	T15	T16
τ_{12}			■				■	■	■			
τ_{16}							■				■	
τ_{17}	■					■	■					
τ_{18}			■				■	■		■		
τ_{19}			■				■			■		
τ_{20}	■	■	■	■	■	■	■	■				
τ_{22}	■	■	■	■	■	■	■	■				
τ_{25}	■						■					■
τ_{27}		■	■				■			■		
τ_{28}							■	■				

Ao final do quinto ano técnicas possuem um caráter mais abstrato, no sentido que notamos apenas a mobilização ostensiva de registros básicos e essenciais, como a língua materna e alguns registros escritos, presentes em toda atividade de estudo, seja ela matemática ou não. Esse aspecto advém da busca por *condições* favoráveis para se efetuar as operações de adição e subtração, envolvendo diferentes situações.

A seguir, buscamos sintetizar brevemente os principais aspectos que caracterizam o ensino do quinto ano, embasando-nos também nos volumes anteriores.

8.3 ALGUMAS CONCLUSÕES DO LIVRO DO QUINTO ANO

O volume do quinto ano é o último livro analisado da coleção e, portanto, nos apresenta a matemática *mais intelectual* proposta para os anos iniciais, consequência da evolução da praxeologia ao longo dos cinco anos. É esse cenário de evolução que corrobora para discussões acerca da redução ostensiva em atividades matemáticas, fomentada pelo abandono de técnicas e pelo enriquecimento do entorno tecnológico-teórico. A seguir, apresentamos os costumeiros quadros que realçam ainda mais tais características no ensino investigado³³.

Quadro 52: Síntese dos tipos de tarefas do livro do quinto ano

T1 ₁	T1 ₂	T2 ₁	T2 ₂	T2 ₃	T3 ₁	T3 ₂	T4 ₁	T7
T8	T9	T10	T11	T12	T13	T14	T15	T16

Quadro 53: Síntese das técnicas do livro do quinto ano

τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9	τ_{10}	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}	τ_{14}
τ_{15}	τ_{16}	τ_{17}	τ_{18}	τ_{19}	τ_{20}	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}	τ_{24}	τ_{25}	τ_{26}	τ_{27}	τ_{28}

A construção desses quadros se deu por meio da observação das técnicas e tipos de tarefas que se mostraram presentes, ou não, de maneira significativa no ensino. Em relação aos tipos de tarefas, notamos que quatro delas não são prestigiadas nesse volume, característica essa comum também nos livros anteriores. Sobre as técnicas, é explícito o abandono de diferentes ostensivos, como os dedos, reta numérica, risquinho e tantos outros, em virtude de um trabalho mais *puro* e aritmético. Nesse sentido, vemos, ao passar dos anos, a permutação de ordem de importância entre objetos ostensivos e não-ostensivos.

No livro do quinto ano é possível perceber também que o campo aditivo é reinvestido com a intenção de aprimorar o entorno tecnológico-teórico, o que acontece por meio da institucionalização de propriedades construídas ao longo dos anos. Também percebemos nesse volume algumas noções das operações de adição e subtração tornarem-se meios para o trabalho com outros conceitos matemáticos.

Sobre a organização didática proposta pelo autor, além de apontarmos durante as análises situações que alertavam quanto às propostas metodológicas de ensino, buscaremos em nossas considerações finais evidenciar de maneira mais sintetizada

³³ Lembramos que a cor vermelha indica o abandono do tipo de tarefa ou técnica, a cor azul a permanência e a cor verde a estreia desses elementos no livro do quinto ano.

como esse ensino investigado tende a *estruturar* a matemática proposta. Todavia, cabe destacar que sentimos mais uma vez, com a análise desse livro, a valorização quanto à importância dada ao trabalho com as técnicas, mas também notamos momentos destinados à avaliação da praxeologia, bem como à exploração de tarefas tem em vista a elaboração de técnicas de resolução, que estão imbricados ao momento de construção do entorno tecnológico-teórico.

Na sequência da escrita apresentamos as considerações finais de nossa investigação e nela buscaremos destacar os principais aspectos identificados sobre o ensino de adição e subtração dos números naturais com a análise dos cinco livros.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o intuito de responder a nossa questão de pesquisa - “Como é proposto, em livros didáticos, o ensino das operações de adição e subtração de números naturais?” – voltamo-nos para a coleção de livros didáticos dos anos iniciais mais adotada nas redes públicas do Brasil. A análise dessa coleção nos revela aspectos significativos para a caracterização do ensino proposto. Apresentamos aqui algumas dessas principais características e no final discutimos alguns pontos que merecem atenção em futuras pesquisas.

Vale dizer, primeiramente, que a Teoria Antropológica do Didático, utilizada como teoria e como metodologia em nossa pesquisa, se fez evidentemente fundamental para a construção e a compreensão da proposta de ensino em discussão. As noções de organização praxeológica e dos momentos didáticos nos permitiram observar a instituição pesquisada de modo a focar nas características que consideramos essenciais para uma visão panorâmica e ao mesmo tempo detalhada da praxeologia. É nesse sentido que podemos responder nossos dois objetivos específicos que se resumem em investigar *que conteúdo* de matemática é abordado e *como* essa matemática é trabalhada. Para tanto, sentimos a necessidade de fazer repartições nos livros afim de mostrar com detalhes a proposta de ensino investigada. Essa escolha metodológica se deve também à extensão que os livros possuem, características essas criticadas pelo Guia do PNLD/2013.

Na análise foram identificadas 18 tipos de tarefas mobilizadas ao longo dos cinco volumes. Oito delas foram consideradas *a priori* por nós em estudos sobre as estruturas aditivas de base desenvolvidas por Vergnaud (1990, 2009a) no âmbito da Teoria dos Campos Conceituais. Essas tarefas foram nomeadas como sendo do tipo contextualizadas, termo esse utilizado apenas para indicar que há nelas um contexto extra-matemático, visto que não nos atemos às diferentes concepções que essa palavra possui em discussões na área da Educação Matemática. Os outros dez tipos de tarefas são aqueles que emergiram da análise dos livros e que não são contemplados pela classificação desenvolvida por Vergnaud (1990, 2009a).

As ideias do campo aditivo são trabalhadas, de modo geral, por meio de tarefas relativas às categorias I, II e III das estruturas aditivas de base relacionadas à

composição, transformação e comparação de medidas, respectivamente. Em relação aos problemas abordados nas outras três categorias, IV, V e VI, Magina et al. (2001, p. 59) comentam que essas situações-problema vão além dos anos iniciais do ensino fundamental devido à sua complexidade, o que justifica a ausência dessas situações nos livros investigados. Todavia, as tarefas contextualizadas que foram efetivamente propostas são aquelas consideradas canônicas, que em sua resolução empregam a operação que é indicada em seu enunciado por meio de alguma palavra que a represente. Nesse sentido, por exemplo, os verbos juntar, acrescentar e ganhar, por levarem consigo a ideia da adição, podem ser vistos como palavras-chave para a descoberta da operação a ser efetuada entre os números presentes no problema. Essa escolha didática causa preocupação, visto que essa estratégia responde corretamente apenas parte das situações possíveis de serem vivenciadas, além de não oportunizar a discussão das diferentes ideias do campo aditivo, visto que não favorecem uma avaliação por parte das crianças das situações apresentadas à elas.

Os demais tipos de tarefas, não previstos na análise *a priori* e que foram elencados no decorrer da análise dos livros, também ilustram algumas preferências do ensino proposto. Observamos, primeiramente, que esses tipos de tarefas estão mais presentes do que aqueles do tipo contextualizados, o que é causado pela quantidade excessiva do T11 – calcular a adição ou a subtração de duas ou mais medidas. Nesse cenário fica evidente a valorização do ensino pelas técnicas de resolução, haja vista que tarefas como essas são empregadas, geralmente, em momentos posteriores ao de apresentação da técnica com o intuito de promover a sua prática.

Sobre as técnicas de resolução foram identificadas no total 28 maneiras de se trabalhar em situações de adição e de subtração. Notamos, em especial nos dois primeiros anos escolares, uma participação importante de diferentes ostensivos que instrumentalizam as técnicas utilizadas. Por exemplo, a ideia de “completar de um em um” partindo do maior valor foi mobilizada por meio da fala, dos dedos, da tabela, dos *risquinhos* e *bolinhas* e da reta numérica. Cada ostensivo desses engendra ideias diferentes do campo aditivo, embora muitas vezes tenham sido mobilizados em momentos pontuais e prontamente abandonados após a apresentação e prática das técnicas relacionadas a cada um deles.

Em meio às discussões dos ostensivos e de seus abandonos no decorrer do ensino percebemos claramente que

[...] à medida que avançamos na construção do conhecimento matemático, há um fenômeno de redução ostensiva que tende a limitar os instrumentos ostensivos usados em virtude daqueles que podem ser registrados por escrito ou, pelo menos, que pode ser posto em papel. Outros registros, embora ainda presentes, são relegados como "acessórios" [...] (CASABÓ, 2001, p. 24, tradução nossa)

Essa característica fica ainda mais evidente ao compararmos as técnicas mobilizadas no primeiro ano e as que estão presentes no último livro da coleção. Percebemos que as técnicas que permanecem no ensino são aquelas que não são comprometidas pela baixa valência instrumental dos ostensivos.

Quadro 54: Síntese das técnicas do livro do primeiro ano

τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9	τ_{10}	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}	τ_{14}	τ_{15}
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------	-------------

Quadro 55: Síntese das técnicas do livro do quinto ano³⁴

τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	τ_9	τ_{10}	τ_{11}	τ_{12}	τ_{13}	τ_{14}
τ_{15}	τ_{16}	τ_{17}	τ_{18}	τ_{19}	τ_{20}	τ_{21}	τ_{22}	τ_{23}	τ_{24}	τ_{25}	τ_{26}	τ_{27}	τ_{28}

Os ostensivos, além de se fazerem úteis e fundamentais como instrumentos de técnicas em momentos introdutórios de estudo, também contribuem para a construção de diversos elementos tecnológicos que se fazem essenciais para o alcance da técnica do algoritmo usual das operações de adição e subtração e para aquelas próprias para o cálculo mental. É nesse sentido que para a oficialização dos algoritmos usuais o material dourado, as *fichinhas*, e as cédulas e moedas ganham destaque, em especial para a explicação de procedimentos como o “vai um” e o “empresta um”. Tais justificativas constituem parte do entorno tecnológico-teórico da praxeologia desenvolvida e advém do sistema de numeração decimal, estudado concomitantemente com o campo aditivo.

A respeito da análise da organização didática que se fundamentou nos seis momentos didáticos descritos por Chevallard (1998), cabe reforçar alguns aspectos trazidos ao longo das análises. Os primeiros encontros e reencontros com a praxeologia são sempre vivenciados por meio de um tipo de tarefa contextualizada, que tinha o propósito de já trazer à tona o momento que consiste na exploração de um tipo de tarefa e na elaboração de uma técnica que permite resolvê-la. Todavia, o aluno atua como expectador dessa exploração e elaboração, ficando a cargo dele o trabalho com a técnica. Esse último é o momento com maior destaque nos livros, dada a importância atribuída ao treino das técnicas, geralmente desconectadas de uma situação

³⁴ Em vermelho destacamos as técnicas que foram abandonadas.

contextualizada. A construção do entorno tecnológico-teórico acontece ao longo dos cinco volumes investigados, todavia, discussões sobre tais elementos praxeológicos se tornam mais robustas a partir do livro do terceiro ano. É nessa mesma perspectiva que são propostos os momentos de institucionalização, o que advém da maturidade teórica construída ao longo dos livros. O momento dedicado à avaliação da praxeologia construída, ou ainda, à reflexão sobre a abrangência e eficiência das técnicas, foi evidenciado de maneira muito superficial. Nesse cenário, ao analisarmos os detalhes da praxeologia proposta, vivenciamos esse último momento ao buscarmos entender o abandono de muitos ostensivos. Avaliamos as técnicas e percebemos que algumas delas deixavam de ser utilizadas devido ao fato de os ostensivos nelas empregados não propiciarem o trabalho com números maiores que 19, por exemplo. Esses tipos de discussões não foram sugeridas ao aluno.

Frente à esses momentos didáticos e inspirados no modelo apresentados por Gascón (2003), construímos uma representação da organização didática da coleção analisada.

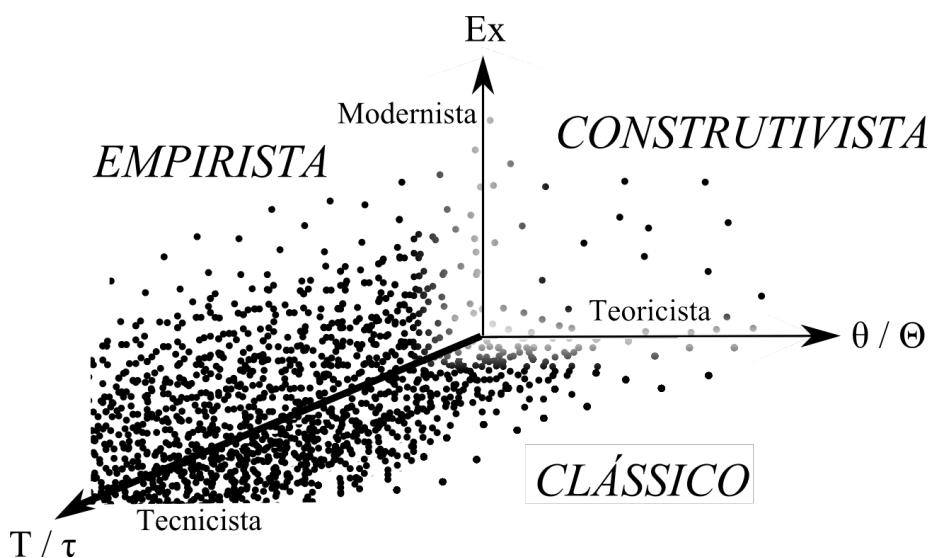


Figura 97: Organização didática proposta pela coleção segundo o modelo de Gascón (2003)

Os pontos em destaque no gráfico simbolizam eventos observados no ensino, sendo eles ora mais do tipo empirista, ora mais voltado ao clássico, e mesmo que esporadicamente, também do tipo construtivista, mas sempre com uma fonte tendência para o eixo tecnicista. Essa sistematização da organização didática proposta se pauta na ênfase dada aos elementos tecnológicos que visam uma melhor e mais consciente operacionalização das técnicas, bem como nas tentativas, mesmo que menos frequentes, de propor situações que levem o aluno a explorar técnicas de resolução, como em

atividades de cálculo mental. Buscamos dar ênfase nesse esquema, sobretudo, à supervalorização das técnicas de resolução, que são o foco do ensino proposto.

Para finalizarmos nosso trabalho, é importante esclarecer que, embora tenhamos buscado apresentar um retrato do ensino proposto pelos livros, sabemos que esse cenário construído não é uma *fotografia em alta definição* da coleção. Podemos dizer, mais justamente, que se trata de *um desenho feito por nós daquilo que vimos e sentimos* nos momentos de análise. A subjetividade da pesquisa de cunho qualitativo está, entre outros fatores, nessa liberdade ética de pintarmos aquilo que nos chama atenção. Todavia, essa impossibilidade de um retrato exatamente fiel nos coloca também em situação de desconforto, visto que é bem provável que em momento futuros outros aspectos que não foram considerados na escrita desse texto nos brotem aos olhos de maneira peculiar. O que queremos, de fato, é ressaltar que esse trabalho pode ser enriquecido por novas reinvestidas, que podem ser feitas em outros trabalhos voltados à questões mais pontuais e ainda mais tênues do ensino de adição e subtração.

Apontamos, já nesse momento, alguns pontos que não puderam ser discutidos nesse trabalho, mas que merecem atenção e podem gerar novas discussões e pesquisas. A exemplo, podemos nos perguntar qual praxeologia, de fato, chega ao aluno, ou qual é aquela que o professor põe em prática com o uso dessa coleção de livros didáticos. Nessa perspectiva, vislumbramos uma discussão acerca do conceito de transposição didática entre instituições, que objetiva o estudo das transformações necessárias que um saber sofre conforme passa de uma instituição para outra, como o livro didático para o professor, e o professor para o aluno. Podemos também nos questionar quanto aos motivos que fazem uma tarefa ou uma técnica viverem em uma certa praxeologia, mesmo que de maneira muito esporádica, como as tarefas de elaboração de situações problemas (T13) e a técnica da calculadora (τ_{12}). Há influências e determinadas condições que as tornam presentes no ensino? O conceito de Níveis de Co-determinação (CHEVALLARD, 2009), por exemplo, que não foi foco do nosso estudo, pode ajudar a responder essa pergunta, por ser um conceito da teoria que visa discutir essas condições e restrições que tornam possíveis a existência de uma praxeologia em uma certa instituição. Há diversas outras questões que poderíamos elencar; para algumas delas construímos hipóteses e conjecturas durante a pesquisa e, se essas tomarem corpo com respaldo teórico que merecem, voltaremos a nos debruçar sobre elas em trabalhos futuros.

ANEXO

Bloco prático-técnico proposto pela coleção “Ápis” para o ensino de adição e subtração dos números naturais

TIPOS DE TAREFAS

T1₁	Encontrar o resultado da composição de duas ou mais medidas.
T1₂	Encontrar uma medida que se compõe com outra(s) medida(s) conhecida(s), sabendo o valor resultante da composição.
T2₁	Encontrar o estado inicial (medida) que foi transformado e resultou em um estado final (medida) conhecido.
T2₂	Encontrar o estado final (medida) resultante da transformação de um estado inicial (medida) conhecido.
T2₃	Encontrar a transformação ocorrida sobre um estado inicial (medida) para resultar em um estado final (medida).
T3₁	Encontrar o “referido” de uma comparação de medidas.
T3₂	Encontrar a relação de comparação entre duas medidas.
T4₁	Encontrar uma transformação que se compõe com uma ou mais transformações para resultar em uma terceira transformação.
T7	Contar dinheiro.
T8	Decompor uma medida dada em outras medidas.
T9	Dada uma situação em ostensivo imagem, traduzi-la em expressões matemáticas.
T10	Dada uma situação em língua materna, traduzi-la em expressões matemáticas.
T11	Calcular a adição ou a subtração de duas ou mais medidas.
T12	Tirar a prova real.
T13	Criar uma situação que envolva noções do campo aditivo.
T14	Calcular mentalmente.
T15	Encontrar uma medida – parcela, minuendo ou subtraendo – de uma dada adição ou subtração.
T16	Estimar o valor da soma ou da diferença de dois números.

Técnicas

τ_1	Contar ostensivos imagens após desenhá-los para representar as quantidades envolvidas em uma situação.
τ_2	Completar desenhando os objetos da situação.
τ_3	Somar ou subtrair de um em um utilizando a fala partindo do maior valor.
τ_4	Contar ostensivos imagens do livro.
τ_5	Representar uma adição ou uma subtração por meio das “barrinhas” (Material Cuisenaire) e comparar seus “tamanhos” para calcular a soma ou a diferença.
τ_6	Contar “risquinhos” ou “bolinhas” após desenhá-los para representar as quantidades envolvidas em uma situação.
τ_7	Comparar quantidades de “risquinhos” ou “bolinhas” um a um após desenhá-los para representar as quantidades envolvidas em uma situação.
τ_8	Cancelar a quantidade de “objetos” a serem subtraídos excluindo os “risquinhos” ou “bolinhas” após desenhá-los para representar as quantidades.
τ_9	Completar utilizando a fala e os dedos partindo do maior valor.
τ_{10}	Cancelar a quantidade de “objetos” a serem subtraídos abaixando os dedos das mãos após ter representado nos dedos o valor do minuendo.
τ_{11}	Somar ou subtrair de um em um “andando” na reta numérica partindo do maior valor.
τ_{12}	Efetuar a conta na calculadora.
τ_{13}	(Para $a \in \mathbb{N}^*$) agrupar de a em a .
τ_{14}	Decompor um número em unidades, dezenas, centenas, e etc.
τ_{15}	Somar ou subtrair de um em um por meio da fala com o auxílio de uma tabela partindo do maior valor.
τ_{16}	Utilizar a operação inversa.
τ_{17}	Agrupar parcelas dois a dois efetuando as suas somas.
τ_{18}	(Para a e $b \in \mathbb{N}^*$, de tal modo que a seja uma dezena/centena/... inteira e b seja de quantidade de casas decimais inferior que a de a) – Compor a e b , o que resulta imediatamente no número do tipo ab .
τ_{19}	(Para dezenas/centenas/... inteiras) – Somar/subtrair os algarismos das dezenas/centenas/... inteiras e conservar as casas decimais nulas.
τ_{20}	Somar ou subtrair de um em um mentalmente partindo do maior valor.
τ_{21}	Representar uma adição ou uma subtração por meio do material dourado ou as fichinhas manipulando-os para encontrar a soma ou a diferença.
τ_{22}	Utilizar o algoritmo usual da adição ou da subtração.
τ_{23}	Utilizar o algoritmo da decomposição.
τ_{24}	Completar para a casa decimal mais próxima e subtrair o excedente ou somar o que foi desconsiderado.
τ_{25}	(Para $a \in \mathbb{N}^*$) Arredondar a para a dezena/centena/... mais próxima.
τ_{26}	(Para subtrações em que o minuendo termina em zero ou tem zeros intercalados) Subtrair um mesmo valor conveniente do minuendo e do subtraendo e aplicar o algoritmo usual de modo que não haja a necessidade de realizar reagrupamentos.
τ_{27}	Decompor uma das medidas envolvidas na situação e efetuar a adição de modo conveniente.
τ_{28}	Aplicar alguma das três propriedades da adição – a comutativa, a associativa e a do elemento neutro.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, Abraão Juvencio de, CÂMARA DOS SANTOS, Marcelo. **Estudo sobre o ensino de equações do 1º grau, na França e no Brasil, à luz da Teoria Antropológica do Didático**. CIAEM – Conferência Internacional de Educação Matemática, Recife, Jun. 2011.

BITTAR, Marilena., FREITAS, José Luiz Magalhães de., e PAIS, Luiz Carlos. **Técnicas e tecnologias com as operações aritméticas nos anos iniciais do ensino fundamental**. In: SMOLE, Katia Stocco, e MUNIZ, Cristiano Alberto (Org.). **A Matemática em sala de aula: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental**. Porto Alegre: Penso, 2013, p. 7 – 48.

BOSH, Marianna., CHEVALLARD, Yves. **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique**. *Recherches em Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.19, n°1, p. 77 – 124, 1999. Acessado no site http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=35 no dia 7 de Fevereiro de 2013, com paginação 1- 37.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica I. **Guia de Livros Didáticos, PNLD/2010**. Brasília: MEC/SEF, 2009.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica I. **Guia de Livros Didáticos, PNLD/2013**. Brasília: MEC/SEF, 2012.

CASABÓ, Marianna Bosch. **Un punto de vista antropológico: la evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad matemática**. Cuarto Simpósio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huelva: Universidade de Huelva, 2001, p. 15 – 28.

CHEVALLARD, Yves. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique**. *Recherches em Didactique des Mathématiques*, v 19, n 2, pp. 221-266, 1998. Acessado no site http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=27 no dia 15 de Maio de 2013, com paginação 1- 29.

_____. **Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique**. Actes du Séminaire *Intervention au Séminaire de l'Associazione Mathesis*, pp. 190-200, 1994. Acessado no site http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125 no dia 15 de Maio de 2013, com paginação 1- 9.

_____. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique**. *A paru dans les actes de ce congrès : L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Éd.), Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctica, Universidad de Jaén*, pp. 705-746, 2007 Acessado no site http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=134 no dia 15 de Maio de 2013, com paginação 1- 41.

_____. **Conceitos fundamentais da didáctica: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica**. In: BRUN, Jean. **Didáctica das**

Matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget. Tradução: Maria José Figueiredo. 1992, p. 115 – 152.

_____. **Quel avenir pour les mathématiques au collège et au lycée ? Les mathématiques dans la cité.** Exposé présenté dans le cadre des conférences de la Famille mathématique le 18 mars 2009 à l'IUFM d'Aix-Marseille. Acessado no site http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=154 no dia 29 de Dezembro de 2013.

CHEVALLARD, Yves., BOSCH, Marianna., GASCÓN, Josep. **Estudar matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

DANTE, Luiz Alberto. **Ápis: Alfabetização matemática.** Obra em três volumes para alunos do primeiro ao terceiro ano. São Paulo: Ática, 2011.

DANTE, Luiz Alberto. **Ápis: Matemática.** Obra em dois volumes para alunos do quarto e quinto ano. São Paulo: Ática, 2011.

DAMM, Regina Flemming. **Representação, Compreensão e Resolução de Problemas Aditivos.** In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica.** 1ª edição. São Paulo: PAPIRUS, 2003, p. 35 – 47.

DUVAL, R. Registros de Representação Semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registro de Representação Semiótica.** 1 ed. São Paulo: PAPIRUS, 2003, p. 11 – 33.

FRANCHI, Anna. **Considerações sobre a Teoria dos Campos Conceituais.** In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação matemática: uma (nova) introdução.** 3ª Edição. São Paulo: EDUC, 2010, pp. 189 – 232.

GASCÓN, Josep. **La necesidad de utilizar modelos em didáctica de la matemáticas.** *Educação Matemática e Pesquisa*, São Paulo, v. 5, n. 2, pp. 11 – 37, 2003.

MAGINA, Sandra. et al. **Repensando adição e subtração: contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.** 1ª ed – São Paulo: PROEM, 2001.

MANDARINO, Mônica Cerbella Freire. **Números e operações.** In: CARVALHO, João Bosco Pitombeira Fernandes (cord.). **Coleção Explorando o Ensino**, v. 17, Matemática, Ensino Fundamental. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, p. 97 – 134, 2010.

NOGUEIRA, Rosane Corsini Silva. **A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise praxeológica.** Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2008.

NUNES, Terezinha. et al. **Introdução à Educação Matemática: números e operações numéricas.** 2ª ed. São Paulo: Cortez, 2009.

OLIVEIRA, Adriana Barbosa de. **Prática pedagógica e conhecimentos específicos: um estudo com um professor de matemática em início de docência.** Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2010.

SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos. **Adição e subtração: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante?** Ilhéus, BA: Editus, 2012.

VALENTE, Wagner. R. **Livro didático e educação matemática:** uma história inseparável. Zetetiké – Cempem – FE – Unicamp, v. 16, n. 30, p. 139-162, jul./dez. – 2008.

VERGNAUD, Gérard. **Conceitos e esquemas numa teoria operatória de representação.** Psychologie Française. nº30 – 3/4: 245-252, p. 245-252, 1985. Traduzido por Anna Franchi e Dione Luchesi de Carvalho, com paginação de 1 a 18.

_____. **A criança, a matemática e a realidade.** Tradução de Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: Ed. da UFPR, 2009a.

_____. **O que é aprender?** In: BITTAR, Marilena e MUNIZ, Cristiano Alberto (Org.). **Aprendizagem Matemática na perspectiva dos Campo Conceituais.** Curitiba: CRV, 2009b, p. 13 – 34.

_____. **La théorie des champs conceptuels.** Recherches en Didactique des Mathématiques. Vol.10, nº23: 1990, p. 133-170.