FRANCIELE RODRIGUES DE MORAES

UM ESTUDO SOBRE ERROS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM O *SOFTWARE* APLUSIX

Campo Grande, MS
2013

FRANCIELE RODRIGUES DE MORAES

UM ESTUDO SOBRE ERROS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM O *SOFTWARE* APLUSIX

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação.

Orientadora: Profa. Dra. Marilena Bittar

Campo Grande, MS
2013

FRANCIELE RODRIGUES DE MORAES

UM ESTUDO SOBRE ERROS NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU COM O *SOFTWARE* APLUSIX

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação.

Campo Grande, MS, ______ de _______________ de 2013.

COMISSÃO EXAMINADORA

____

Profa. Dra. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

____

Profa. Dra. Helena Noronha Cury
Centro Universitário Franciscano - UNIFRA

____

Profa. Dra. Suely Scherer
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

____

Profa. Dra. Luzia Aparecida de Souza
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

A Deus, pelas forças dadas a mim nos momento difíceis, e aos meus pais, pelo apoio.

AGRADECIMENTOS

- ✧ Deus, por não ter me deixado desistir e por nunca ter me abandonado.
- ✧ Marilena Bittar, amiga e orientadora, pela paciência, compreensão e ensinamentos.
- ✧ Professores da banca, Helena Noronha Cury, Suely Scherer e Luzia Aparecida de Souza, pelas contribuições.
- ✧ Professora Suely Scherer, pelo incentivo e apoio na concretização desse sonho.
- ✧ Aos amigos dessa caminhada Ádamo e Claudia, pelo companheirismo e ajuda nas horas difíceis. Aos amigos fiéis Edilson e Lucas.
- ✧ A todos da minha família que acreditaram em mim quando nem eu mesma acreditava.
- ✧ Francieny e Uéliton, pela ajuda em todos os momentos difíceis.
- ✧ Em especial, à minha mãe e amiga Ione, pelo amor incondicional.
- ✧ CAPES, pela ajuda financeira.

Aquele que não está preparado para errar jamais fará algo de original.

Ken Robinson

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo investigar erros no estudo de equações do 1º grau e sua superação por alunos do 1º ano do ensino médio com o auxílio do *software* Aplusix. A pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública de Campo Grande, Mato Grosso do Sul; os encontros ocorreram em semanas alternadas, no laboratório de informática da escola, após as aulas do período matutino, com alunos voluntários. Para este estudo foi usada a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990) como suporte teórico para ajudar a compreender o processo de apreensão de um conceito pelos alunos. A partir de estudos sobre erros e dificuldades de aprendizagem, foram elaboradas atividades para identificar, por meio dos esquemas mobilizados pelos alunos, alguns teoremas em ação falsos utilizados na resolução dessas atividades. Além disso, foram propostas atividades visando à desestabilização desses teoremas, buscando a superação dos erros mobilizados pelos alunos. Para análise dos dados nos baseamos na análise de Conteúdo dos Erros (CURY, 2008), metodologia de pesquisa que nos permitiu uma análise detalhada das respostas dos alunos. A análise dos dados baseou-se nos registros das atividades realizadas e nos registros orais. Foi possível concluir que a validação oferecida pelo *software* contribuiu com o processo de desestabilização dos erros cometidos pelos alunos. As retroações do Aplusix levaram os alunos a analisar e corrigir seus erros que, no decorrer dos encontros diminuíram a frequência de aparição.

Palavras-chave: Erros. Álgebra. Teoremas em ação. Aplusix.

ABSTRACT

The objective of the present work is to investigate mistakes in the study of 1st degree equations and the ability of high school first year students to solve them with the aid of the software Aplusix. The research was conducted in a public school located in Campo Grande, in the State of Mato Grosso do Sul; the meetings took place in alternate weeks, in the school's computer lab, after morning classes, with volunteer students. In this study, the theory of conceptual fields (VERGNAUD, 1990) was used as a theoretical support, to help understand the learning process of a concept by the students. From studies of the mistakes and the learning difficulties, activities were elaborated seeking to identify, through schemes mobilized by the students, any false theorems in action used to solve these activities. Furthermore, activities aiming to destabilize these theorems were proposed, seeking to overcome the mistakes mobilized by the students. The data analysis was based on the Error Analysis (CURY, 2008). This research methodology allowed us to analyze the student's answer in more details. The data analysis was also based on the recorded activities performed and on the oral records. It was possible to determine that the validation offered by the software cooperated with the destabilization process of the mistakes made by the students. The Aplusix retroactions led the students to analyze and correct their mistakes, which decreased in occurrence throughout the meetings.

Key Words: Mistakes. Algebra. Theorems in action. Aplusix.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Em minha[1] formação inicial, tive o primeiro contado com alguns *softwares* que poderiam ser usados no ensino e na aprendizagem da matemática. Confesso que inicialmente fiquei um pouco hesitante perante a proposta de usar um *software* para ensinar um novo conteúdo matemático, pois acreditava, assim como muitos, que as aulas no laboratório de informática serviam apenas para “mostrar” o que se tinha visto em sala de aula.

Participei de projetos e oficinas, no meu curso de graduação, e pude vivenciar como é aprender usando tecnologia digital. Aos poucos, fui percebendo que é possível usar esses recursos para favorecer a construção do conhecimento do aluno.

Tínhamos[2] uma proposta inicial de trabalhar com alunos com dificuldades de apreensão de algum conceito matemático, e, então, nós decidimos usar a tecnologia para estudar se ela poderia contribuir com a superação de erros relacionados a essa dificuldade. Faltava decidir que conceito seria esse.

Muito se discute sobre o desafio de ensinar e aprender conceitos da álgebra, e esse foi um dos motivos que nos levou a estudar erro nessa área.

Historicamente, a álgebra surgiu para resolver problemas com quantidades desconhecidas e permitir a resolução de problemas clássicos, como a quadratura do círculo, impossíveis de serem resolvidos utilizando a álgebra geométrica de Euclides (TELES, 2004). A característica generalizadora da álgebra abriu novas portas à matemática. De acordo com Usiskin (1995), a álgebra tornou-se uma área-chave de estudos da matemática pelos diferentes trunfos que ela oferece e pela matematização crescente da sociedade. Para o autor,

> Já não cabe classificar a álgebra apenas como aritmética generalizada, pois ela é muito mais que isso. A álgebra continua sendo um veículo para a resolução de problemas, mas também é mais do que isso. Ela fornece meios para se desenvolverem e se analisarem relações. E é a chave para a caracterização e a compreensão das estruturas matemáticas. (USISKIN, 1995, p. 21).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998), a álgebra tem sido um dos conteúdos da matemática a que os professores têm dado ênfase no ensino. Entretanto, os alunos não têm alcançado sucesso na aprendizagem dos conceitos algébricos, como podemos observar nos resultados obtidos em avaliações do Sistema Nacional de Avaliação da

---

[1]Ao usar a primeira pessoa do singular nos referimos à autora desta dissertação.
[2]A partir deste momento usaremos a primeira pessoa do plural por se tratar de uma pesquisa realizada em uma parceria entre orientanda e orientadora.

Educação Básica (SAEB): "os itens referentes à álgebra raramente atingem um índice de 40% de acerto em muitas regiões do país" (BRASIL, 1998, p. 115-116). Isso mostra que o baixo rendimento dos alunos não está centralizado em apenas algumas partes do Brasil, mas é um problema que atinge muitos estudantes.

Várias pesquisas (BOOTH, 1995; TELES, 2004; NOGUEIRA, 2008) sobre erros e dificuldades em álgebra estão sendo realizadas, mas ainda são poucos aqueles que mostram um caminho que ajude os alunos a superar esses erros. Surge então nosso primeiro questionamento: Que tipo de ação pode favorecer a superação de erros e dificuldades de aprendizagem em álgebra elementar? A partir dessa questão inicial, buscamos investigações que retratassem, de alguma forma, nossa inquietação, fornecendo, assim, pistas para prosseguirmos o estudo. Encontramos a pesquisa de Bittar (2010) mostrando que a utilização do *software* Aplusix pode contribuir com a autonomia dos alunos, ajudando-os na sua aprendizagem.

Assim, a partir desta questão inicial e de alguns recursos disponíveis para serem utilizados na prática docente, como meio de contribuir com a aprendizagem dos alunos, optamos por usar a tecnologia para nos ajudar tanto na identificação e análise dos erros dos alunos quanto na elaboração de situações que levem à superação de dificuldades de aprendizagem dos alunos provocadas por esses erros.

Escolhemos trabalhar com alunos do 1º ano do ensino médio, pois pesquisas mostraram que as maiores dificuldades em álgebra são decorrentes da álgebra básica, em conteúdos previstos de serem estudados preferencialmente até essa série.

A pesquisa de Booth (1995), sobre erros e dificuldades dos alunos que iniciam seus estudos em álgebra, verificou que os erros cometidos por eles eram semelhantes em todas as séries, e, por conta disso, conclui que aqueles que começarem a estudar álgebra provavelmente encontrarão as mesmas dificuldades. Nogueira (2008), questionando-se sobre a possibilidade de as dificuldades de aprendizagem em álgebra estarem relacionadas à forma como ela é apresentada aos alunos, investigou, em livros didáticos, de que forma o pensamento algébrico é construído pelo autor e como o livro didático apresenta e organiza o capítulo destinado ao estudo da álgebra. Seu estudo foi delimitado ao capítulo de equações do 1º grau em livros do 7º ano, pois constatou que, normalmente, é com esse conteúdo e nesse ano que os livros didáticos começam a trabalhar a álgebra formal.

O trabalho de Nogueira (2008) verificou que a maioria dos problemas apresentados pelos livros didáticos recai em equações do tipo: $ax + b = c$, $ax = c$ ou $x + c = b, com\ a, b\ e\ c\ \in \mathbb{Z}^*$. Apesar do grande enfoque, no ensino, com equações simples e com coeficientes inteiros, a pesquisa de Bittar (2006), que usou o Aplusix com, aproximadamente, 2.400 alunos de 9º ano, mostrou um baixo índice de acerto em equações desse tipo. Por exemplo, a equação $x + 3 = -8$ teve, em média, acerto de apenas 16%.

Diante dessas considerações decidiu-se focar as análises na resolução de equações do 1º grau e definimos a seguinte questão de pesquisa: De que maneira a tecnologia pode favorecer a identificação e a superação de erros no estudo de equações do 1º grau por alunos do 1º ano do ensino médio?

Concordamos com Cury (2008) quando destaca que o erro é um conhecimento; é um saber que o aluno possui e não a falta dele. Além disso, não é um conhecimento falso, uma vez que permitiu produzir respostas satisfatórias ou corretas a determinados tipos de problemas. No entanto, esse conhecimento, ao ser transposto ou aplicado a outras categorias de problemas, produz respostas inadequadas ou incorretas. Então, superar o erro é construir um conhecimento com um domínio de validade total.

De acordo com Cury (2008, p. 13), podemos aprender muito com os erros dos alunos. Ao analisar suas produções, temos a possibilidade de entender como eles se apropriam dos conceitos matemáticos e também de identificar os erros em suas produções. Essa análise pode ser usada para favorecer a construção do conhecimento pelo aluno. A partir da compreensão dos erros dele é possível analisar e compreender suas dificuldades de aprendizagem, o que pode indicar caminhos para a superação delas. Para tanto, queremos identificar e analisar alguns erros no estudo de equações do 1º grau presenciados por alunos do 1º ano do ensino médio e realizar um estudo sobre como o uso do *software* Aplusix pode contribuir para a identificação e superação de erros.

Para este estudo, optamos por usar a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990) por ser uma teoria cognitivista que ajuda a compreender as dificuldades de apreensão de um conceito. Utilizaremos, principalmente, o conceito de invariantes[3], tanto para nos ajudar a compreender e modelar os erros dos alunos quanto para indicar caminhos (situações) na superação desses erros. Alguns estudos das dificuldades de aprendizagem dos alunos, usando a referida teoria, têm sido realizados. Bittar (2009), Bittar, Chaachoua e Freitas (2004) e Burigato (2007) mostram como o estudo dos esquemas mobilizados pelos alunos permite identificar e compreender algumas de suas dificuldades de aprendizagem de conceitos.

Para as situações que podem contribuir para a superação dos erros, utilizamos a teoria construtivista da aprendizagem (PIAGET, 1978), baseada na construção do conhecimento,

[3]Explicados no tópico que trata especificamente do referencial teórico.

que tem como base a problematização matemática e a hipótese de que o aluno aprende adaptando-se a "um meio que é produtor de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, um pouco como o faz a sociedade humana. Esse saber, fruto da adaptação do aluno, se manifesta por meio de respostas novas que são a prova da aprendizagem" (BROUSSEAU *apud* BITTAR; CHAACHOUA, 2004, p. 2). A construção do conhecimento acontece com as interações do aluno com o meio e consideramos que a tecnologia pode contribuir com a constituição de um meio favorável à superação desses erros.

De acordo com Laborde e Capponi (apud BITTAR, 2004, p. 2), os ambientes informatizados podem fornecer ferramentas para constituir um "meio" que favoreça a aprendizagem dos alunos. Pesquisas, como as de Bittar (2004), mostram que o *software* Aplusix tem características para construir um "meio" para a aprendizagem dos conceitos de álgebra. Nesse sentido, Bittar e Chaachoua (2004) e Bittar (2010) indicam como a utilização do referido *software* pode contribuir para a autonomia dos alunos e, consequentemente, para a aprendizagem deles. Esse *software* permite que cada aluno siga seu ritmo de aprendizagem; suas retroações permitem que o aluno reveja sua produção e analise seus erros, corrigindo-os, tornando-se, assim, mais autônomo em sua aprendizagem e consciente dos seus erros. O uso do Aplusix como instrumento na superação dos erros em álgebra pode possibilitar ao aluno caminhar com poucas intervenções do professor que, por sua vez, ganha um papel de mediador do conhecimento e não detentor único do saber.

A fim de responder nossa questão de pesquisa, definimos como objetivo principal: investigar erros no estudo de equações do 1º grau e sua superação por alunos do 1º ano do ensino médio com o auxílio do *software* Aplusix.

A identificação e análise dos erros são fundamentais para dar suporte à elaboração de atividades a serem propostas no Aplusix que visem a contribuir com os alunos a superar seus erros. Além disso, para avaliarmos o trabalho realizado com eles foi necessário conhecer seus erros e estudar como eles evoluíram ao longo da experimentação.

Este trabalho está dividido em cinco partes: Introdução, Referenciais Teóricos, Escolhas Metodológicas, Coleta e Análise de Dados e Algumas Considerações.

Na segunda parte, foram realizados estudos sobre pesquisas que trataram sobre concepções, erro e dificuldades de aprendizagem em álgebra elementar e também tecemos alguns comentários sobre o papel do erro na construção do conhecimento e a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990).

Iniciamos a terceira parte com a apresentação dos nossos objetivos e os caminhos percorridos durante a pesquisa. Tecemos algumas considerações sobre o nosso referencial metodológico, fazendo uma discussão sobre a análise de conteúdo (BARDIN, 2011) e análise de conteúdo dos erros (CURY, 2008). Finalizamos esse capítulo com as escolhas dos sujeitos e uma breve descrição dos encontros ocorridos durante a experimentação.

No quarta parte, apresentamos a análise dos dados coletados. Escolhemos três alunas para fazer as análises dos dados coletados nos seis últimos encontros, pois, nesses encontros, é que foram realizadas atividades relativas ao tema de resolução de equações.

Na última parte, são apresentadas algumas conclusões do nosso trabalho a partir das análises realizadas.

2 REFERENCIAIS TEÓRICOS

Neste capítulo, encontra-se o quadro teórico que compõe nossa pesquisa. Para tanto, apresentamos algumas ideias propostas por pesquisadores que estudaram temas relacionados ao nosso; tecemos alguns comentários sobre o papel do erro na construção do conhecimento e expomos alguns conceitos da teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990).

Pesquisas sobre erros vêm sendo realizadas desde o início do século XX, sob os diversos pontos de vista, e os primeiros estudos foram com alunos e professores das séries iniciais, e, aos poucos, foram atingindo todos os níveis de ensino. Inicialmente, as pesquisas sobre a análise de erros em matemática tinham apenas a preocupação de diagnosticar e classificar os erros para poder apontar caminhos que não levassem os alunos a cometê-los novamente (CURY, 1994). Nessa perspectiva, os erros eram vistos como uma coisa ruim, e, portanto, deveria se buscar uma verdade absoluta, para que eles fossem evitados.

Em um retrospecto histórico sobre a análise de erros, Cury (1995) apresenta outras abordagens e suas diferentes possibilidades de se trabalhar com o erro. No construtivismo, por exemplo, o erro tem papel importante na construção do conhecimento.[4]

Em seus estudos sobre a análise de erros, Cury discute e apresenta a abordagem proposta por Borasi (1994), uma pesquisadora que propõe novos rumos sobre a utilização dos erros no processo de ensino e de aprendizagem: além de usar a análise de erros para identificar e classificar os erros cometidos pelos alunos e ajudar na elaboração de novas estratégias para eliminá-los, os usa como instrumento para ajudar no processo de ensino e de aprendizagem de matemática, como “trampolins para aprendizagem”.

A identificação dos erros em nossa pesquisa é fundamental, mas somente a identificação e classificação não contemplam nossos objetivos de pesquisa; estamos interessados em investigar a superação dos erros e, para isso, Cury (2008) nos mostra possibilidades de se trabalhar com os erros dos alunos. Ao analisar as produções dos alunos, temos a possibilidade de entender como eles se apropriam dos conceitos matemáticos, e, ao identificar erros em suas produções, e compreendê-los, podemos usá-los para favorecer a construção do conhecimento.

Mesmo adotando essa proposta de se trabalhar positivamente com os erros, concordamos com Viola dos Santos (2007) quando ele discorda de como algumas pesquisas caracterizam os erros dos alunos pela falta e não pelo que eles têm. Diante dessa insatisfação

[4]Falaremos mais sobre essa abordagem no próximo tópico.

da leitura pela falta[5], o autor apresenta outra maneira de caracterização do erro: substitui "erros" por "maneiras de lidar", acreditando assim caracterizar os alunos pelo que eles já têm em determinado momento.

Essa perspectiva de se trabalhar com os erros dos alunos, levando em consideração os que eles têm e não o que falta a eles, nos permite um aprofundamento maior nas estratégias e nos procedimentos deles, que deixam de ser taxados por seus erros e analisados em função do que sabem. Concordamos com Viola dos Santos (2007) quando ressalta que cada aluno tem um jeito próprio de resolver um problema e não cabe aos professores ou pesquisadores classificar como certo ou errado. Deve-se tomar como ponto de partida o que os alunos sabem e a partir disso planejar ações que promovam a construção do conhecimento.

Torre (2007, p. 77), fazendo uma comparação do erro com o copo que não está de todo cheio, nos diz o seguinte: "Algumas pessoas perceberão o que falta no copo enquanto que outras, mais otimistas, o que já tem". E nos faz o seguinte questionamento: "Como vemos o erro a partir de uma consideração pedagógica: como um copo meio cheio ou meio vazio?". O autor separa essas diferentes concepções em duas categorias: a pedagogia do êxito e a pedagogia do erro. A pedagogia do êxito olha para o erro como uma coisa negativa que se precisa eliminar e a pedagogia do erro olha para o aluno pelo que ele já tem e, analisando-o, por meio dos erros, o que falta melhorar. A primeira categoria vem ao encontro das primeiras pesquisas realizadas sobre erros, mas, segundo Torre (2007, p. 74, grifo do autor), essa concepção foi "assumida tanto pelos *teóricos* da educação como pelos *profissionais* do ensino, desde as origens da pedagogia até nossos dias".

Uma contribuição fundamental da pedagogia do erro, para Torre (2007, p. 78, grifo do autor), é sua atenção ao processo, pois "o erro é um *indicador* do *processo,* e não um resultado sancionável ou punível", diferentemente da pedagogia do êxito que leva em conta apenas seu produto final. Torre (2007) nos alerta de que a sociedade, em geral (professores, pais, alunos,...), leva em conta somente o produto final, não se questionando sobre como se chegou a esse resultado, dando mais importância à nota da prova do que ao real progresso do aluno. Cury (2008), em seu livro sobre análise de erros, também apresenta algumas questões nesse sentido. Ao corrigir uma prova, teste ou trabalho, nós, professores, costumamos normalmente assinalar os erros e acertos. Concordamos com Cury (2008, p. 13) quando nos chama a atenção, expondo o seguinte: "Mas quem garante que os acertos mostram o que o

---

[5]Leitura pela falta é aquela em que as análises das atividades, dos alunos, são feitas detectando-se o que lhes faltam.

aluno sabe? E quem diz que os erros evidenciam somente o que ele não sabe?". De acordo com Torre (2007), uma alternativa para esse sistema de ensino é a pedagogia do erro.

A pedagogia do erro leva em consideração vários pontos importantes já discutidos durante nosso texto, nos quais acreditamos ser importante considerar como pesquisadores e como professores. Nessa perspectiva, o erro é aceito como fato natural no processo de construção do conhecimento e é visto como uma coisa positiva. Assim como Borasi (1994) e Cury (2008) já haviam nos apontado, o erro pode ser usado como uma estratégia didática para favorecer a aprendizagem dos alunos. Essa pedagogia, assim como defende Viola dos Santos (2007), avaliará o aluno pelo que ele já tem; no entanto, acreditamos que, ao falar de erros cometidos pelos alunos, estamos de alguma forma analisando o que lhes falta melhorar.

Mesmo que alguns trabalhos caracterizem os alunos pela falta, eles nos trazem considerações importantes para o nosso tema de estudo, como é o caso dos vários trabalhos sobre erros com alunos de cálculo diferencial e integral. Cury (2006, 2008) relata que os resultados encontrados mostram que a maior parte dos erros cometidos por alunos de cálculo diferencial e integral não é decorrente de conteúdos específicos do cálculo, como limite, derivadas e integrais, e sim da falta de pré-requisitos, principalmente de conteúdos de álgebra do ensino fundamental e médio, como propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, simplificação de expressões algébricas, resolução de equações polinomiais, produtos notáveis e fatoração. Esses trabalhos, apesar de caracterizarem os alunos pela falta de pré-requisitos, mostram a importância de se trabalhar com os erros dos alunos, caso contrário, esses erros em álgebra, que os alunos encontram no ensino fundamental e médio, irão permanecer por um longo período ou se estendendo até os cursos superiores. Além disso, pesquisas como estas nos revelam como o ensino de conteúdos algébricos tem deixado lacunas na aprendizagem dos alunos, indicando que a matemática que se espera que eles aprendam está distante da que se deseja ensinar.

2.1 O PAPEL DO ERRO NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO E A TEORIA DOS CAMPOS CONCEITUAIS

Para compreendermos o papel do erro no processo de construção do conhecimento é necessário revisitar a teoria de Jean Piaget. Para tanto, trataremos, apenas, dos principais conceitos dessa teoria.

Para Piaget, o conhecimento é construído pelo sujeito e o processo de construção do conhecimento é "um ato de interpretação, porque conhecer significa assimilar o objeto à organização de que a inteligência é dotada" (LA TAILLE, 1997, p.26). O sujeito retira, do meio, informações, interpretando aquilo que seu esquema de assimilação atual possibilita que ele retire. O conhecimento é progressivo e está limitado ao esquema de assimilação disponível naquele momento. Podemos considerar que é por meio dos esquemas que o sujeito assimila um objeto; então, o esquema disponível é decorrente da síntese das assimilações e experiências anteriores, e são os conhecimentos prévios do sujeito, aqueles que estão estabilizados.

De acordo com La Taille (1997), Piaget pensava em estruturas de assimilação não fixas, com capacidade de se transformar. Nas palavras de Piaget (apud LA TAILLE, 1997, p.33, grifo do autor): "Todo esquema de assimilação é obrigado a se acomodar aos elementos que ele assimila, isto é, de *modificar-se em função de suas particularidades*, mas sem perder sua continuidade nem seus poderes anteriores de assimilação".

Quando o esquema de assimilação é insuficiente, ou seja, ele não consegue dar conta do desafio, o sujeito entra em desiquilíbrio ou conflito cognitivo. Para alcançar êxito no desafio é preciso então modificar esses esquemas, que não foram suficientes para resolver o problema. O esquema refeito (agregado de novas experiências) consegue agora retirar do objeto a ser apreendido novas características. Segundo La Taille (1997), quando o objeto é assimilado satisfatoriamente, fala-se que ocorreu um equilíbrio entre assimilação e acomodação. Esse estado de conflito cognitivo, também chamado de perturbação, é dividido em duas categorias. A primeira categoria explica as perturbações que se opõem às acomodações, é quando um esquema não consegue assimilar os objetos por resistência ou por incompatibilidade entre um ou mais esquemas. A segunda categoria refere-se às perturbações advindas de lacunas, e, nesse caso, "não se trata de um conflito entre o que o sujeito faz ou pensa e os objetos, tampouco de contradições entre algumas de suas concepções, mas sim a *falta de alguma coisa*." (LA TAILLE, 1997, p.36, grifo do autor).

Podemos considerar que, "de um modo geral, a *fonte* dos erros reside nos desequilíbrios do funcionamento assimilador dos esquemas de ação" (CASÁVOLA et al., 1988, p. 34, grifo do autor). Portanto, fica evidente a importância do erro na construção do conhecimento, pois é a busca pelo equilíbrio cognitivo que possibilita a evolução dos esquemas.

Concordamos com La Taille (1997, p.31), quando afirma que as análises dos "erros dos alunos podem dar pistas importantes sobre suas reais capacidades de assimilação" porque os erros são indicadores dos limites entre o que cada sujeito pode e não pode fazer naquele determinado momento. Não há dúvida de que o nível estrutural do sujeito seja importante, pois ele influencia diretamente o processo de construção dos conhecimentos. No entanto, somente o estudo das estruturas cognitivas do sujeito, de uma forma geral, não nos permite analisar com maior detalhe as ações do sujeito na resolução de tarefas específicas, por exemplo, ao resolver uma equação do 1º grau em que serão mobilizados conhecimentos específicos.

Nesse sentido, Casávola et al. (1988) alegam que, quando um aluno resolve um tipo de tarefa específica, ele não se limita apenas a aplicar as estruturas que dispõe, mas a resolução da tarefa dada envolve procedimentos específicos que o aluno escolherá para tentar alcançar a solução da tarefa. Ele esquematiza um plano de ação, sempre atento ao objetivo que quer alcançar, e, na execução desse plano, pode fazer alterações decorrentes dos acertos e erros. Não se trata somente de analisar o conjunto de possibilidades de um sujeito naquele momento e sim de analisar as possibilidades que o sujeito usa efetivamente quando tenta resolver uma atividade.

Partindo desse pressuposto, focaremos nosso estudo nas sequências de ações do sujeito ao tentar resolver atividades sobre equações do primeiro grau, sempre buscando investigar os erros e sua superação. Para analisar os procedimentos dos alunos, optamos por usar a teoria dos campos conceituais,

> [...] uma teoria cognitivista que visa fornecer um quadro coerente e alguns princípios de base para o estudo do desenvolvimento e da aprendizagem de competências complexas, notadamente daquelas relevando das ciências e das técnicas. Por fornecer uma estrutura à aprendizagem ela envolve a didática, embora não seja, em si uma teoria didática. Sua principal finalidade é propor uma estrutura que permita compreender as filiações e rupturas entre conhecimentos, em crianças e adolescentes, entendendo-se por “conhecimento”, tanto as habilidades quanto as informações expressas. (VERGNAUD, 1990, p. 135).

Vergnaud, aluno de Piaget, ao desenvolver a teoria dos campos conceituais, amplia e redireciona as estruturas gerais do pensamento que, para Piaget, eram independentes das situações e da forma específicas necessárias para lidar com ela. Ele retoma os princípios de Piaget, porém considerando como referência o conteúdo do conhecimento, trazendo novas contribuições, como as destacadas por Franchi (2008, p. 195, grifo do autor):

> Uma primeira consiste em afirmar que um enfoque mais frutífero para o desenvolvimento é obtido utilizando um sistema *tendo como referência o próprio conteúdo do conhecimento e a análise conceitual do domínio*. Uma segunda consiste em deslocar o interesse das pesquisas do estudo das estruturas gerais de pensamento para o estudo do funcionamento cognitivo do “sujeito-em-situação” [...]

A teoria dos campos conceituais possibilita estudar o comportamento cognitivo dos alunos em situação de aprendizagem e permite ajudar a compreender as dificuldades de apreensão de um conceito. Antes de discorrer sobre a utilização dessa teoria nos estudos dos erros, apresentaremos alguns conceitos-chave, como o de campo conceitual. De acordo com Vergnaud (2009, p. 29), um campo conceitual é,

> [...] ao mesmo tempo um conjunto de situações e um conjunto de conceitos: o conjunto de situações cujo domínio progressivo pede uma variedade de conceitos, de esquemas e de representações simbólicas em estreita conexão; o conjunto de conceitos que contribuem com o domínio dessas situações.

Vergnaud (2009, p. 29) considera que um conceito é formado por três conjuntos, **C= (S, I, L)**:

a) **S**: conjunto das situações que dão sentido ao conceito (a referência);
b) **I**: conjunto dos invariantes operatórios, conceitos em ação e teoremas em ação que intervêm nos esquemas de tratamento das situações (o significado);
c) **L**: conjunto das representações linguísticas e simbólicas que permitem a representação do conceito e de suas propriedades, das situações às quais ele se aplica e dos procedimentos de resolução dessas situações (o significante).

Para estudar o desenvolvimento e a utilização de um conceito é necessário considerar os três conjuntos. Assim, "um conceito não pode ser reduzido a sua definição se estamos interessados na sua aprendizagem e no seu ensino. Através de situações e de problemas é que um conceito adquire sentido para a criança" (VERGNAUD, 1990, p. 135). O conceito de situação aqui tem o sentido de tarefa, e toda situação pode ser analisada como uma combinação de tarefas; por isso, é importante analisar e conhecer as peculiaridades de cada uma. Vergnaud (1990, p. 150) também recorre ao sentido que é atribuído pelo psicólogo ao termo situação: "os processos cognitivos e as respostas do sujeito são função das situações com as quais são confrontadas". Segundo Vergnaud, não é por meio de uma situação-problema ou de poucas situações que o conceito vai se tornar significativo para o aluno; por isso, a importância de analisar os aspectos conceituais contidos nos esquemas utilizados pelos alunos ao lidarem com as situações e de se estudar o conjunto de situações que melhor permitem a construção desses esquemas. São os esquemas que:

> [...] organizam o comportamento do sujeito para uma classe de situações dada, mas também organizam, ao mesmo tempo, sua ação e a atividade de representação simbólica, sobretudo lingüística, que acompanha essa ação. (VERGNAUD, 1990, p. 168).

De acordo com Vergnaud (2009), o esquema é a organização invariante da atividade para uma determinada classe de situações, e o que é invariante são as organizações das ações, não as classes de situações e nem mesmo as ações. Um esquema é formado necessariamente por quatro componentes:

a) invariantes operatórios: conceitos em ação e teoremas em ação. Os invariantes são os conhecimentos contidos nos esquemas;
b) antecipações do objetivo a alcançar, ou seja, o que ajuda o sujeito a definir aonde quer chegar; qual é seu objetivo;
c) regras em ação, tomada de informações e controle;
d) possibilidades de inferências em situações.

As regras em ação, de acordo com Vergnaud (2009), constituem a parte geradora do esquema, e é responsável pelo andamento do procedimento escolhido para a realização da atividade. O controle permite ao aluno ter segurança ao fazer as escolhas e continuar ou não o procedimento escolhido.

Os invariantes operatórios têm um papel fundamental em nosso estudo, pois eles são os conhecimentos contidos nos esquemas e nem sempre são verdadeiros. Os invariantes operatórios com domínio de validade mais restrito são chamados de teoremas em ação errôneos, e, em nossa pesquisa, vamos trabalhar com o erro nessa ótica.

Os conceitos em ação e os teoremas em ação recebem essa denominação inspirados da matemática. Entretanto, um teorema em ação é uma proposição tida como verdadeira na ação em situação, ou seja, ela é verdadeira para o sujeito que a constrói, mas não é, necessariamente, verdadeira ou não é verdadeira sempre. Já o conceito em ação é um conceito considerado pertinente na ação em situação, não se discute seu valor de verdade. Existe uma relação dialética entre conceitos em ação e teoremas em ação, pois os conceitos constituem os teoremas e estes são propriedades que dão aos conceitos seus conteúdos. Mas não se deve confundi-los, pois conceitos não são teoremas e podem ser relevantes ou irrelevantes, enquanto que os teoremas podem ser vistos como proposições verdadeiras ou falsas.

Os conhecimentos em ação (conceitos em ação e teoremas em ação) raramente são explicitados pelos alunos. Eles são construídos por estes na tentativa de resolver uma situação. O estudo desses conhecimentos pode nos permitir identificar e compreender os erros na aprendizagem de um campo conceitual.

Para melhor compreender a forma como utilizaremos a teoria dos campos conceituais em nossa pesquisa, nós estudamos algumas investigações que usaram essa teoria na mesma perspectiva da nossa investigação. Apesar de essas pesquisas não trabalharem diretamente com erros, por meio do estudo dos invariantes operatórios, elas acabaram identificando e analisando os erros dos alunos. As pesquisas de Bittar, Chaachoua e Freitas (2004), Burigato (2007) e Bittar (2009) mostram como a modelagem e o estudo de alguns invariantes operatórios construídos pelos alunos permitem identificar e compreender alguns erros na aprendizagem de um campo conceitual.

Para ajudar a entender como a teoria dos campos conceituais pode ser utilizada no estudo de erros, apresentamos uma síntese da pesquisa de Burigato (2007), cujo objetivo geral foi estudar dificuldades dos alunos na fatoração de expressões algébricas, em uma turma de 8ª série (atual 9º ano). Para realizar esse estudo, a pesquisadora identificou teoremas em ação utilizados pelos alunos e investigou a estabilidades dos teoremas em ação construídos por eles.

Primeiramente foi realizada uma análise de livros didáticos e de pesquisas que tratam de concepções, erros e dificuldades no ensino e aprendizagem do conceito de fatoração, para saber como esse conceito estava presente no ensino. Após essa análise foi elaborado um teste diagnóstico composto de 12 questões de fatoração semelhantes às atividades dos livros didáticos. O teste foi realizado com o *software* Aplusix[6] e aplicado a 54 alunos de duas turmas da 8ª série (atual 9º ano). Com isso a autora buscou verificar se os alunos apresentaram alguma dificuldade em fatorar as expressões algébricas e fez um estudo de teoremas falsos mobilizados por eles na resolução do teste, que teve também como objetivo auxiliar a construção de uma sequência didática.

A sequência didática foi composta de dois grupos de atividades e um teste contendo 13 exercícios. Foi trabalhado o fator comum em evidência e produtos notáveis. A partir da análise das atividades propostas, a pesquisadora elencou os possíveis teoremas em ação que os alunos utilizariam em sua resolução, que foram confrontados com os resultados obtidos.

As análises das atividades foram divididas em duas etapas. A primeira delas buscou identificar os teoremas em ação mobilizados pelos alunos. A segunda teve por objetivo verificar a frequência e a persistência dos teoremas em ação identificados na primeira etapa.

Nosso estudo é similar ao realizado por Burigato, pois, analisando os esquemas mobilizados pelos alunos, inferimos, por meio dos invariantes, quais os conhecimentos que eles possuem e, em seguida, propomos atividades que podem contribuir para a desestabilização dos teoremas em ação falsos. A verificação da frequência e persistência dos

---

[6]Aplusix é um *software* destinado à realização de cálculos algébricos, desenvolvido por pesquisadores da equipe DidaTIC, do Laboratório Leibniz, em Grenoble, França. Falaremos um pouco mais sobre ele no próximo tópico.

teoremas em ação contribuirá na análise da superação, ou não, dos erros dos alunos. Descrevemos uma síntese de análise de Burigato para uma atividade[7], cujo enunciado é: Fatorar os polinômios, colocando em evidência o fator comum, cujo polinômio é $2x + 2x^2$. Os teoremas em ação falsos que o aluno poderia mobilizar durante a atividade, de acordo com Burigato (2007, p. 64), estão descritos na Figura 1.

Expressão	Fator comum	Teoremas em ação falsos
(2) $2x+2x^2$	$2x$	$2x(1+2x)$ [T_1] $2x(1+2x^2)$ [T_4]

Figura 1 - Teoremas em ação falsos possíveis de serem mobilizados pelos alunos.
Fonte: Burigato (2007, p. 64).

A forma geral desses teoremas é conforme a Figura 2.

$x^2-a^2x \rightarrow x(x-a)$ $x^2-a^2x \rightarrow x(x+a)$
$ax^2+ax \rightarrow ax(x+a)$

$x^2+ax \rightarrow x(x+ax)$
$ax^2+a^2x \rightarrow ax(x+a^2x)$
$x^2-ax \rightarrow x(x-ax)$

Figura 2 - Teoremas em ação falsos T_1 e T_4.
Fonte: Burigato (2007, p. 54; 56).

Agora vamos verificar, na Figura 3, as resoluções fornecidas pelos alunos.

[7] Burigato (2007, p. 61).

(2)$2x+2x^2$ forma geral: $ax+ax^2$	**Não transforma em produto**	
	Transforma em produto e não identifica o fator comum	
	TA. Corretos	$ax(1+x)$
		$x(a+ax)$
	TA. Falsos	$ax(x+ax)$ [T_4]
		$a(ax+ax^2)$
		$a(x+b)$ [T_1]
		$x(x+1)$
		$ax(x+x^2)$
		$a(x^2-1)$
		$x(a-ax)$ [T_1]
		$ax(ax+ax^2)$
		$ax(1+ax)$[T_1]
		$x(x+ax^2)$
		$x(x+ax)$
		$x(x+x^2)$
		$a(x+a^2x)$[T_1]
		$x(ax+a^2)$

Figura 3 - Resolução dos alunos das atividades.
Fonte: Burigato (2007, p. 86).

Burigato (2007) observou que os alunos mobilizaram os teoremas em ação T_1 e T_4, previstos em sua análise preliminar, além de outros não previstos. De acordo com a autora, o teorema T_1 foi utilizado algumas vezes e por vários alunos no decorrer das atividades, mas a maior parte só o utilizou uma vez, indicando, talvez, uma simples falta de atenção. Já o teorema T_4 foi mobilizado várias vezes por um mesmo aluno, confirmando o que outras pesquisas já haviam observado, inclusive nas pesquisas de Cury, que esse erro de distribuição da multiplicação com relação à adição é bem comum.

A autora pode constatar diversas dificuldades na aprendizagem da fatoração, a maioria delas relacionada aos conhecimentos envolvidos na formação desse conceito, como: divisão e multiplicação numérica e algébrica, fatoração numérica, fator comum de uma expressão, redução de termos semelhantes, quadrado perfeito e raiz quadrada. Foram identificados também vários teoremas em ação falsos mobilizados pelos alunos ao resolver as equações, e alguns desses teoremas continuaram sendo mobilizados pelos alunos, mesmo depois de todo o trabalho com esse conceito realizado pela pesquisadora.

Enfim, com a pesquisa de Burigato (2007) pode-se verificar melhor como podemos usar essa teoria para estudar os erros na resolução de equações do 1º grau. As dificuldades de apreensão de determinados conteúdos, muitas vezes, continuam por vários anos, como confirmam os estudos de Cury ao encontrar esses mesmos erros nos cursos de cálculo, como é o caso de alguns conceitos da álgebra.

Encontramos diversas pesquisas mostrando a importância de se trabalhar com o erro. Apesar de muitas pesquisas ainda serem apenas diagnósticas, elas podem nos ajudar a pensar em estratégias para contribuir com esses alunos a superarem esses erros. Cremos, portanto, que professores e/ou pesquisadores devem buscar maneiras de auxiliar os alunos a superá-los, mesmo que parcialmente, e assim tentar minimizar os problemas advindos desses erros.

2.2 O ENSINO DA ÁLGEBRA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Uma das principais questões levantadas por Usiskin (1995) sobre o ensino da álgebra é até que ponto nós devemos cobrar dos alunos a capacidade de se trabalhar com diversas técnicas e fórmulas de resoluções. Essa questão está relacionada à finalidade do ensino e da aprendizagem da álgebra e suas diferentes concepções. Concordamos com esse autor quando ele defende que: "**As finalidades da álgebra** *são determinadas por, ou relacionam-se com,* **concepçõe***s diferentes* **da álgebra** *que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos* **usos das variáveis**." (USISKIN, 1995, p. 13, grifos do autor).

Usiskin (1995, p. 20) divide as concepções da álgebra em quatro, relacionando-as com os diferentes usos das variáveis. São elas, resumidamente:

a) aritmética generalizada - faz uso das variáveis como generalizadora de modelos (traduzir e generalizar);
b) estudo de procedimentos - para resolver alguns problemas, uso da variável como incógnita e constantes (resolver e simplificar);
c) estudo de relações - a variável é utilizada como argumento e parâmetro (relacionar e gráficos);
d) estrutural - a variável aqui é usada apenas como sinais arbitrários no papel (manipular e justificar).

Nessa perspectiva, o trabalho com as várias concepções da álgebra ganha um papel fundamental no ensino dela. Propor aos alunos apenas algumas técnicas e regras para a resolução mecânica de atividades é impedir o aluno de conhecer todas as potencialidades da álgebra, influenciando no processo de construção do conhecimento algébrico.

Nos PCN (BRASIL, 1998), a álgebra ocupa um lugar de destaque. Isso é justificado pelo fato de, segundo o texto dos Parâmetros, esse conteúdo ajudar a desenvolver a capacidade de abstração e generalização nos alunos e ainda por ser uma ótima ferramenta para resolver problemas. As orientações dos PCN para os anos finais do ensino fundamental ressaltam que se deve retomar a chamada pré-álgebra – trabalha apenas com as noções algébricas de maneira informal e articulada com a aritmética –, e ser contemplada desde as séries iniciais, com situações-problema, contemplando as diferentes concepções da álgebra, que, conforme os PCN, são: “generalizar padrões aritméticos, estabelecer relação entre duas grandezas, modelizar, resolver problemas aritmeticamente difíceis” (BRASIL, 1998, p. 50). Por meio desse tipo de problema é que devem ser apresentadas as estratégias formais de resoluções de equações.

As concepções apresentadas nas orientações dos PCN são muito parecidas com as quatro citadas por Usiskin, como podemos verificar no Quadro 1, retirado do documento oficial.

Quadro 1 – Resumo das diferentes interpretações da álgebra escolar e as diferentes funções das letras

Álgebra no ensino fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e proce-dimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

Fonte: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental de matemática (BRASIL, 1998, p. 116)

O Quadro 1 mostra as diferentes concepções da álgebra e sua relação com o uso das letras. Podemos observar que a primeira e a última concepção, aritmética generalizada e estrutural, são idênticas aos estudos de Usiskin. A álgebra funcional se assemelha com a álgebra como estudo de relações entre grandezas, de Usiskin. Aqui, diferentemente das demais concepções, as variáveis variam; as fórmulas de cálculo de áreas são um exemplo do uso de variáveis nessa concepção. Na dimensão da álgebra de equações encontramos semelhança com a álgebra no estudo de procedimentos apresentada por Usiskin. Nessa concepção, a generalização é apenas o início do processo: dada uma equação em linguagem materna, deve-se traduzi-la primeiramente para a linguagem algébrica e depois resolvê-la. A letra aqui não aparece como um valor que varia, mas como uma incógnita, um valor que deve ser encontrado. De acordo com Usiskin (1995), os alunos encontram dificuldades em resolver problemas dessa natureza, ao fazerem a passagem da aritmética para a álgebra (Quadro 2).

Quadro 2 - Comparativo entre as concepções de álgebra de Usiskin e as dimensões da álgebra, segundo os PCN

Concepções da álgebra / Uso das variáveis (Usiskin)	Dimensões da álgebra / Uso das letras (PCN)
Aritmética generalizada / Uso das variáveis como generalizadora de modelos	Aritmética Generalizada / Letras como Generalizações do modelo aritmético
Estudo de procedimentos para resolução de alguns problemas / Usa a variável como incógnita e constantes	Equações / Letras como incógnitas
Estudo de relações / A variável é utilizada como argumento e parâmetro	Funcional / Letras como variáveis para expressar relações e funções
Estrutural / A variável aqui é usada apenas como sinais arbitrários no papel	Estrutural / Letras como símbolo abstrato

Apesar de os Parâmetros trazerem a preocupação em se trabalhar com as diferentes concepções da álgebra, o próprio texto adverte que os professores dão preferência ao estudo do cálculo algébrico, contrariando as orientações de se fazer esse estudo por meio de situações-problema, privilegiando a repetição de exercícios que são resolvidos apenas por meio de regras e fórmulas prontas. Além disso, o texto adverte sobre a importância de se trabalhar com os vários significados das letras e assinala que:

> A noção de variável, de modo geral, não tem sido explorada no ensino fundamental e por isso muitos estudantes que concluem esse grau de ensino (e também o médio) pensam que a letra em uma sentença algébrica serve sempre para indicar (ou encobrir) um valor desconhecido, ou seja, para eles a letra sempre significa uma incógnita. (BRASIL, 1998, p. 118).

Essa concepção errônea construída pelos alunos foi também detectada nos estudos de Booth (1995) sobre as dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. Esses estudos apontaram que a noção de variável e o uso de letras para indicar valores em álgebra podem ser um ponto importante a ser considerado quando se trabalha com os tipos de erros que os alunos cometem na resolução de uma atividade de álgebra.

Pensando nessa dificuldade dos alunos em trabalharem com a álgebra e em agregarem significados ao uso das letras, Cruz (2005) estudou a maneira como os conteúdos algébricos estão sendo trabalhados no ensino fundamental, mais especificamente nos 3º e 4º ciclos. Seu objetivo foi investigar como a noção de variável tem sido abordada nos livros didáticos destinados a esses ciclos. Para essa investigação, a pesquisadora escolheu as quatro coleções mais adotadas no Estado de São Paulo. A fim de nortear essa análise, Cruz (2005) elaborou três aspectos a serem investigados:

a) os PCN e os livros didáticos − Aqui o objetivo era analisar de que maneira os livros didáticos incorporam os objetivos sugeridos pelos PCN, uma vez que as quatro coleções se dizem coerentes com as orientações dos parâmetros;
b) as abordagens para introduzir e desenvolver a álgebra − Esse estudo visava a analisar, nos livros didáticos, o tipo de abordagem utilizado para introduzir e desenvolver a álgebra e, caso fossem abordadas mais de uma, como elas se inter-relacionam. A autora alega que as várias maneiras de se introduzir a álgebra estão relacionadas com as concepções de Usiskin; logo, o trabalho com as diferentes abordagens de certo modo podem determinar como será o desenvolvimento da álgebra para o aluno.
c) os diferentes usos dados à ideia de variável − Nesse item, o objetivo foi analisar os diferentes usos das variáveis presentes nas coleções. Cruz (2005) seguiu as orientações dos PCN e de outros autores como Usiskin, que afirmam que o trabalho com as diferentes funções das letras e sua relação com as diversas concepções da álgebra favorecem o desenvolvimento do pensamento algébrico, o que foi utilizado em suas análises.

As coleções foram analisadas verificando-se em quais livros apareciam esses critérios e de que forma estes eram contemplados. Um primeiro ponto interessante das análises é a constatação de que nem todas as coleções começam a trabalhar com a pré-álgebra em seu primeiro volume, destinado ao 6º ano; duas coleções o fazem apenas no segundo volume, atrasando esse primeiro encontro com a álgebra, lembrando que os PCN orientam que esse seja feito nos primeiros anos do ensino fundamental.

Segundo a autora, todas as coleções afirmaram seguir as sugestões dos PCN, mas apenas uma coleção utiliza a resolução de problemas para iniciar o conteúdo referente ao pensamento algébrico. Nas demais coleções, a resolução de problemas é destaque no decorrer dos capítulos. Essa abordagem é principalmente usada no estudo de equações, porém muitos dos exercícios são propostos para a utilização de procedimentos mecânicos, distanciando-se da abordagem que utiliza atividades, em que os alunos devem dar sentido às letras.

Ainda segundo Cruz, todas as coleções, de uma forma geral, trabalham com as várias abordagens da álgebra: como generalizadora, para resoluções de problemas, estudo de relações e estruturas. Na abordagem estrutural, a mobilização é feita de forma mecânica com exercícios para aplicações de técnicas e na funcional, tardiamente, somente no último volume, o que poderia ser trabalhada nos volumes anteriores, por exemplo, no estudo de relações entre grandezas.

Cruz afirma que, assim como o trabalho com as várias abordagens da álgebra, os diferentes usos das variáveis também são trabalhados em todas as coleções, seguindo normalmente um padrão que começa no 5º ou 6º ano, com o uso da letra para generalizar padrões; depois, no 7º ano, com o trabalho com incógnitas no estudo de equações; no 8º ano, ressalta-se o uso da letra como sinais no papel, no trabalho com fatoração e produto notáveis; e somente no 9º ano, aparece o uso das variáveis como parâmetro, no estudo de funções. A autora relata que, apesar de as coleções trabalharem com os vários aspectos das variáveis, isso é feito sem relação entre seus diferentes usos, o que pode acarretar, para os alunos, dificuldades em compreender os diferentes aspectos das variáveis.

Indagações sobre dificuldades de aprendizagem em álgebra também motivaram os estudos de Nogueira (2008), por exemplo, se algumas dificuldades dos alunos podiam estar relacionadas com a forma como a álgebra é apresentada a eles. Diante dessas indagações, a autora estudou como se dá o ensino da álgebra no Brasil, delimitando o estudo a livros didáticos do ensino fundamental, analisando, em livros do 7º ano, o capítulo de equações do 1º grau, focando assim sua pesquisa na introdução formal da álgebra.

Para realizar sua investigação, a autora utilizou três coleções aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (BRASIL, 2008), tendo como objetivo analisar de que forma o pensamento algébrico é construído pelo autor e como se apresenta e organiza no livro didático o capítulo destinado ao estudo da álgebra. Além disso, estudou também os exercícios resolvidos e propostos, analisando tanto a abordagem do conteúdo do ponto de vista matemático quanto didático. Os estudos das Organizações Matemática e Didática foram feitos à luz da teoria antropológica do didático[8] (CHEVALLARD, 1998), identificando os tipos de técnicas e tarefas presentes no capítulo destinado a equações do 1º grau.

---

[8]Essa teoria considera que toda a atividade humana consiste em realizar uma tarefa t, que se exprime por um verbo, pertencente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo T, por meio de uma técnica τ, justificada por uma tecnologia θ, que, por sua vez, é justificada por uma teoria Θ. Parte do postulado que qualquer atividade humana põe em prática uma organização, denominada por Chevallard (1998), de praxeologia, ou organização praxeológica, simbolizada pela notação [T, τ, θ, Θ] (NOGUEIRA, 2008, p.38)

Um primeiro ponto interessante ressaltado pela pesquisadora foi o fato de os livros escolherem trabalhar com resolução de problemas tanto para apresentar o conteúdo quanto para trabalhar com a resolução de equações. Como visto anteriormente, a pesquisa de Cruz (2005) havia constatado uma forte tendência em se usar a resolução de problemas para se trabalhar com as equações. O que a pesquisa de Nogueira (2008) traz de novo é o fato de a apresentação desse conteúdo ser feita por meio dessa metodologia, verificando inclusive um padrão nos tipos de problemas apresentados no decorrer do capítulo. Segundo Nogueira (2008), os problemas são apresentados em linguagem natural ou por meio de ilustrações (gráficos) para serem interpretados e, depois de traduzidos para a linguagem algébrica, assumem as formas $ax + b = c$, $ax = c$ ou $x + c = b$.

Em seu estudo, Nogueira (2008) constata o predomínio no trabalho com duas técnicas (procedimentos): operações inversas, que consiste em resolver a atividade aritmeticamente, partindo do valor que se conhece, realizando operações inversas para chegar ao resultado procurado, e algébrica, que valoriza as propriedades das igualdades, fazendo, normalmente, analogia com o equilíbrio de uma balança. Apesar do predomínio dessas duas técnicas, elas não são trabalhadas de modo satisfatório, não lhe sendo dedicado tempo suficiente com o trabalho dessa técnica.

O trabalho com a técnica da transposição – que suprime as passagens do procedimento de efetuar a mesma operação nos dois membros –, segundo a autora, não foi contemplado nas coleções analisadas. Foram feitas algumas ações que poderiam levar os alunos a descartar alguns passos da resolução, com o intuito de preparar o aluno para futuramente compreender e utilizar essa técnica. De acordo com Nogueira (2008, p. 107), é uma técnica "mais econômica e eficaz para ser mobilizada em situações oportunas no decorrer do processo de ensino e aprendizagem, tanto no campo da Álgebra como nas disciplinas que utilizam as equações do primeiro grau como ferramentas.".

Apesar de os estudos de Nogueira constatarem que o trabalho com a técnica da transposição não foi efetivamente contemplado nos livros analisados, ou o fazer de maneira sutil, essa é uma praxeologia proposta[9] e isso não significa que não é feito o trabalho com essa técnica em sala de aula. Ponte, Branco e Matos (2009, p. 95) afirmam que

> O princípio de equivalência que indica que se pode somar ou subtrair a mesma quantidade a ambos os membros de uma equação deixou progressivamente de ser enunciado deste modo, passando a ser substituído pela regra prática de transposição que nos permite mudar um termo de membro trocando-lhe o sinal. [...] No entanto,

[9]Estamos chamando de praxeologia proposta a que está presente no livro didático.

> esta é uma ideia algébrica fundamental que os alunos têm de interiorizar para ter sucesso na sua aprendizagem.

Saber usar regras práticas de resolução de equações é um ponto importante na aprendizagem de resolução de equações, mas se deve tomar cuidado para não enfatizar o trabalho mecânico com tais regras. As pesquisas de Kieran (1995) nos trazem alguns resultados interessantes, citando alguns erros decorrentes do uso indiscriminado do procedimento de transposição.

Em uma experiência de ensino, Kieran (1995) pode constatar que, embora a transposição seja muitas vezes considerada como uma versão abreviada do procedimento de efetuar a mesma operação nos dois membros, para os alunos, esse procedimento pode ser visto de maneira diferente. O método de efetuar a mesma operação nos dois membros é justificado, precisamente, para manter os termos da equação em equilíbrio, mantendo a equivalência entre as etapas durante o processo de resolução; essa ênfase no equilíbrio entre o primeiro e segundo membro não aparece no procedimento de transposição. O outro diferencial nessas duas abordagens é o fato de que o primeiro procedimento envolve a simplificação nos dois membros da equação, enquanto que na transposição isso ocorre apenas em um dos membros.

Kieran (1995) investigou durante três meses seis alunos da sétima série que ainda não tinham começado a estudar álgebra na escola. Os estudantes participaram de algumas sessões de "ensino/aprendizado"[10] em que um dos objetivos era ensinar um procedimento de resolução de equações que explicitasse o equilíbrio entre o primeiro e segundo membro da equação. Apesar de não conhecerem a álgebra, os alunos eram capazes de resolver algumas equações simples. Um grupo de alunos usava as operações dadas para resolver as equações substituindo por tentativa e erro diferentes números até chegarem ao equilíbrio entre os membros da equação; esse grupo foi chamado, pela autora, de grupo da aritmética. Os outros alunos foram colocados em um segundo grupo, chamado de grupo da álgebra, caracterizados pelo procedimento de resolução de equações por transposição de termos para o outro membro.

O segundo grupo, de acordo com Kieran (1995, p. 106), usava esse procedimento inclusive em "equações muito simples, como $4x=20$, na qual diziam que 'x é 20 dividido por 4'". O grupo da álgebra, segunda a autora, apresentou resistência em utilizar os procedimentos de efetuar a mesma operação em ambos os lados; pareciam incapazes de

[10]Assim chamada pela autora.

compreenderem os procedimentos e continuaram usando, sempre que possível, os procedimentos de transposição.

Kieran (1995. p. 107) observou uma “supergeneralização do procedimento de transposição do segundo para o primeiro membro ao lidarem com equações com duas incógnitas no primeiro membro”. Os alunos sempre começavam a resolver a equação transpondo o último termo do segundo membro para o primeiro, tomando as operações inversas à medida que elas apareciam.

Os alunos usavam o procedimento “segundo membro para o primeiro” em equações com várias operações, e então eles não sabiam qual operação inverter. Por exemplo, foi pedido que resolvessem a equação $2 \times c + 5 = 1 \times c + 8$ e, segundo Kieran (1995), os alunos ficavam na dúvida se deveriam fazer 8 menos 1 ou dividir 8 por1. Outro problema destacado pela autora, com o uso desse procedimento, foi a pouca atribuição de significado ao sinal de igualdade durante a resolução das equações.

Freitas (2002) investigou erros cometidos por 104 alunos do 1ª ano do ensino médio, analisando os procedimentos usados por eles, tentando identificar a origem desses erros na resolução de equações do 1º grau. Um dado interessante citado pelo pesquisador foi o fato de que, com exceção de um aluno, todos usaram o procedimento de transposição para resolver as 24 equações propostas. Em sua análise, ele constatou um grande número de erros; houve mais de 68% de erros nas oito equações do tipo $ax = b$ e quase 53% nas 16 equações da forma $ax + b = cx + d$.

A pesquisa de Freitas (2002) constatou que os erros, nas equações da segunda forma, em geral, estavam associados à transposição dos termos sem a alteração do sinal, e que o número de erros em transpor as incógnitas foi praticamente o mesmo dos termos independentes. Ao entrevistar alguns alunos que cometeram erros ao transpor um termo de um lado da igualdade para o outro, Freitas (2002) concluiu que eles transpunham os termos sem compreensão do que significava essa ação. Outro problema levantado pelo autor foi o uso da frase “passa e muda de sinal” para justificar o procedimento, usando muitas vezes a frase como um algoritmo, sem entender o que ela significa.

Freitas (2002) dividiu os erros nas equações do tipo $ax = b$ em três casos: erros na alteração do sinal do coeficiente, na divisão do termo independente ($ax = b \Longrightarrow x = \frac{b}{-a}$); erros na transformação de $ax = b$ em $x = b - a$ e erros ao trocar a posição do coeficiente de x pela do termo independente na divisão ($ax = b \Longrightarrow x = \frac{a}{b}$). Dos 68,27% dos erros, nesse tipo de equação, 36,54% deles fazem parte do primeiro grupo. Erros na transformação de

$ax = b$ em $x = b - a$ tiveram 28,85% e erros ao trocar a posição do coeficiente de x pela do termo independente na divisão, somente 2,88%. O uso da frase "passa e muda de sinal" como algoritmo, independente do tipo de equação a ser resolvida, segundo o pesquisador, pode justificar a grande quantidade de erros do tipo $ax = b \Longrightarrow x = \frac{b}{-a}$.

Freitas (2002) identificou o mesmo problema citado por Kieran (1995) no uso indiscriminado do procedimento de transposição. Os alunos atribuíam pouco significado ao sinal de igualdade, e a maioria deles não relacionava o sinal ao significado de equivalência, atribuindo apenas o significado aritmético de "escreva a resposta" indicando uma ação a ser realizada (BOOTH, 1995). Por exemplo, a equação sem solução $x + 1 = x$ teve 44 tipos de erros, e 26 chegaram à resposta $0 = 1$.

Booth (1995), em seus estudos sobre dificuldades das crianças na aprendizagem da álgebra, identificou os erros e os categorizou em duas categorias: na primeira, descreveu alguns erros na perspectiva das diferenças entre a aritmética e a álgebra. Sabemos que, em muitos casos, não temos como separar a aritmética da álgebra e, segundo o autor, essa também pode ser uma das fontes de dificuldades. Isto porque se os alunos tiverem concepções erradas em aritmética, o desempenho deles em álgebra poderá ser afetado, e, nesse caso, os erros não são erros algébricos e sim problemas de aritmética que não foram superados.

Uma das principais diferenças entre a aritmética e a álgebra é o uso de letras (frequentemente chamadas de variáveis). Os erros relacionados ao uso das variáveis em álgebra já foram discutidos no início deste texto, mas essa não é a única diferença entre esses dois campos. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009. p.96), grande parte dos erros encontrados em álgebra "tem a ver com o facto de os alunos continuarem a usar em Álgebra os conceitos e convenções aprendidos anteriormente em Aritmética". Corroborando essa ideia, Booth (1995. p. 27) explica que boa parte dos erros dos alunos na resolução de equações pode ser por causa da interpretação dos símbolos operatórios: "Em aritmética, símbolos como + e = são interpretados geralmente em termos de ações a serem efetuadas, de maneira que + significa efetivamente realizar a operação, e = significa escrever a resposta". A noção de que o sinal de adição pode tanto indicar o resultado da adição como a ação, juntamente com a noção de que o sinal de igual pode indicar uma relação de equivalência e não somente um símbolo que indique "escreva a resposta", eles são elementos fundamentais para a compreensão da álgebra. Um exemplo de erro decorrente da associação do símbolo de adição à instrução de juntar os termos é indicado por Booth (1995) quando é feita a adição incorreta de termos não semelhantes, por exemplo, $2a + 5b$ resultando em $7ab$.

Nesse mesmo sentido, em Ponte, Branco e Matos (2009), podem-se encontrar alguns exemplos de erros, discutidos no decorrer deste texto, no trabalho com expressões algébricas. Um deles é sobre a adição incorreta de termos não semelhantes, em que um aluno, ao tentar resolver a equação $2x + 3 = 4x - 1$, faz o seguinte: soma de *2x* com *3* dando origem a *5x*.

Todas essas pesquisas, juntamente com o previsto nos PCN, além de nos darem um panorama de como estão sendo apresentados os conteúdos algébricos no ensino fundamental, nos auxiliam na identificação de algumas possíveis causas dos erros em álgebra, focando principalmente nos erros em equações do primeiro grau. Mesmos esses trabalhos que fazem apenas o diagnóstico dos erros nos servem como ponto de partida para começarmos a pensar em estratégias para a superação desses erros.

2.3 O USO DO *SOFTWARE* APLUSIX E A APRENDIZAGEM DA ÁLGEBRA

Alguns dos motivos para a escolha do *software* Aplusix já foram discutidos no decorrer do texto. Nesse tópico, apresentamos pesquisas que usaram esse *software* e algumas de suas potencialidades, reforçando nossa escolha[11].

O Aplusix é um *software* de álgebra destinado à realização de cálculos algébricos, permitindo o trabalho com vários conteúdos, como equações, inequações, sistemas de equações, entre outros. Uma das grandes dificuldades encontradas pelos alunos, ao resolverem um exercício de matemática, é saber se ele está correto ou não e esse *software* permite uma validação constante dos seus cálculos, indicando a equivalência ou não das etapas no desenvolvimento da atividade. Na Figura 4, as primeiras etapas foram realizadas corretamente, porém, a última passagem contém algum erro, por isso o Aplusix indica a não equivalência entre as etapas. Entretanto, cabe salientar que esse *software* não mostra o que está errado, apenas em que etapa está o erro, cabendo ao aluno analisar sua produção e descobrir seus erros.

[11] Para obter mais informações sobre o Aplusix, acessar <http://www.aplusix.com/pt/>.

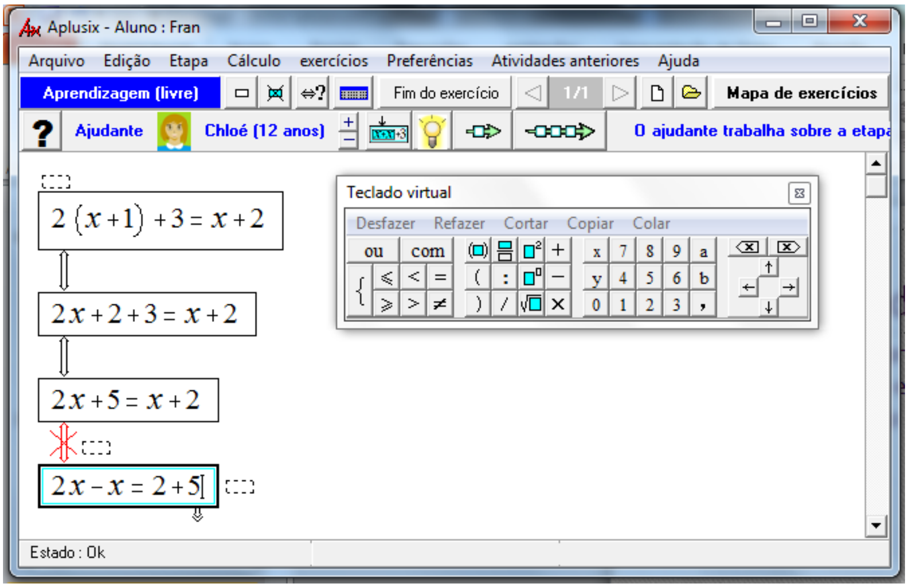


Figura 4 - Tela do Aplusix
Fonte: Aplusix 3

Como relatado, Burigato (2007) utilizou o Aplusix em seus estudos sobre dificuldades dos alunos na fatoração de expressões algébricas. O *software* foi utilizado primeiramente em uma lista de exercícios na forma de teste, sem as retroações, e, posteriormente, na aplicação de sua sequência didática.

Por causa da falta de máquinas disponíveis no laboratório de informática, a sala foi dividida em dois grupos: um grupo resolveu as atividades com papel e lápis e o outro, utilizou o Aplusix. Nas considerações finais, a autora avalia a utilização do Aplusix em comparação ao papel e lápis, e afirma que os alunos se mostraram mais persistentes nas tentativas para resolver as atividades com o Aplusix, em virtude das retroações que o *software* apresentava. Alguns alunos que o usaram não conseguiam usar teoremas corretamente nas primeiras atividades, mas, com as retroações, conseguiram utilizar teoremas verdadeiros. Contudo, alguns teoremas em ação falsos continuaram sendo mobilizados.

O Aplusix, além de possibilitar, ao aluno, validação constante de suas atividades, ajudando-o a não continuar cometendo os mesmos erros e a não persistir no uso dos teoremas em ação falsos, ajuda o professor e/ou pesquisador na hora de analisar as produções dos alunos, armazenando todas as atividades por eles realizadas. Também a ferramenta “videocassete” possibilita o estudo passo a passo de todas as ações realizadas pelo aluno, inclusive as passagens que foram apagadas. Com essa ferramenta é possível estudar e modelar cuidadosamente os erros e dificuldades dos alunos (BURIGATO, 2007).

Quando é realizada uma atividade, no Aplusix, sua resolução é automaticamente armazenada, na forma de vídeo, registrando inclusive o que foi apagado e o tempo de resolução da atividade. E possível visualizar as ações registradas no *software* usando a ferramenta *videocassete*, ajudando a analisar todo o processo de resolução de uma atividade.

Esse *software* contém um "Mapa de Exercícios", dividido em duas categorias, cálculo numérico e cálculo algébrico, com "famílias" de exercícios gerados automaticamente. Cada vez que o usuário pede uma lista de exercícios de uma determinada "família", uma lista de, aproximadamente, 12 exercícios é gerada. O aluno pode ter retroações do *software* durante sua resolução (modo de "aprendizagem") ou fazer a lista de exercícios sem nenhum tipo de retroação do *software* (modo "teste"). No modo "teste", ao final da lista de atividades, o usuário tem sua pontuação e a possibilidade de rever seu teste, corrigindo o que errou (BITTAR, 2006).

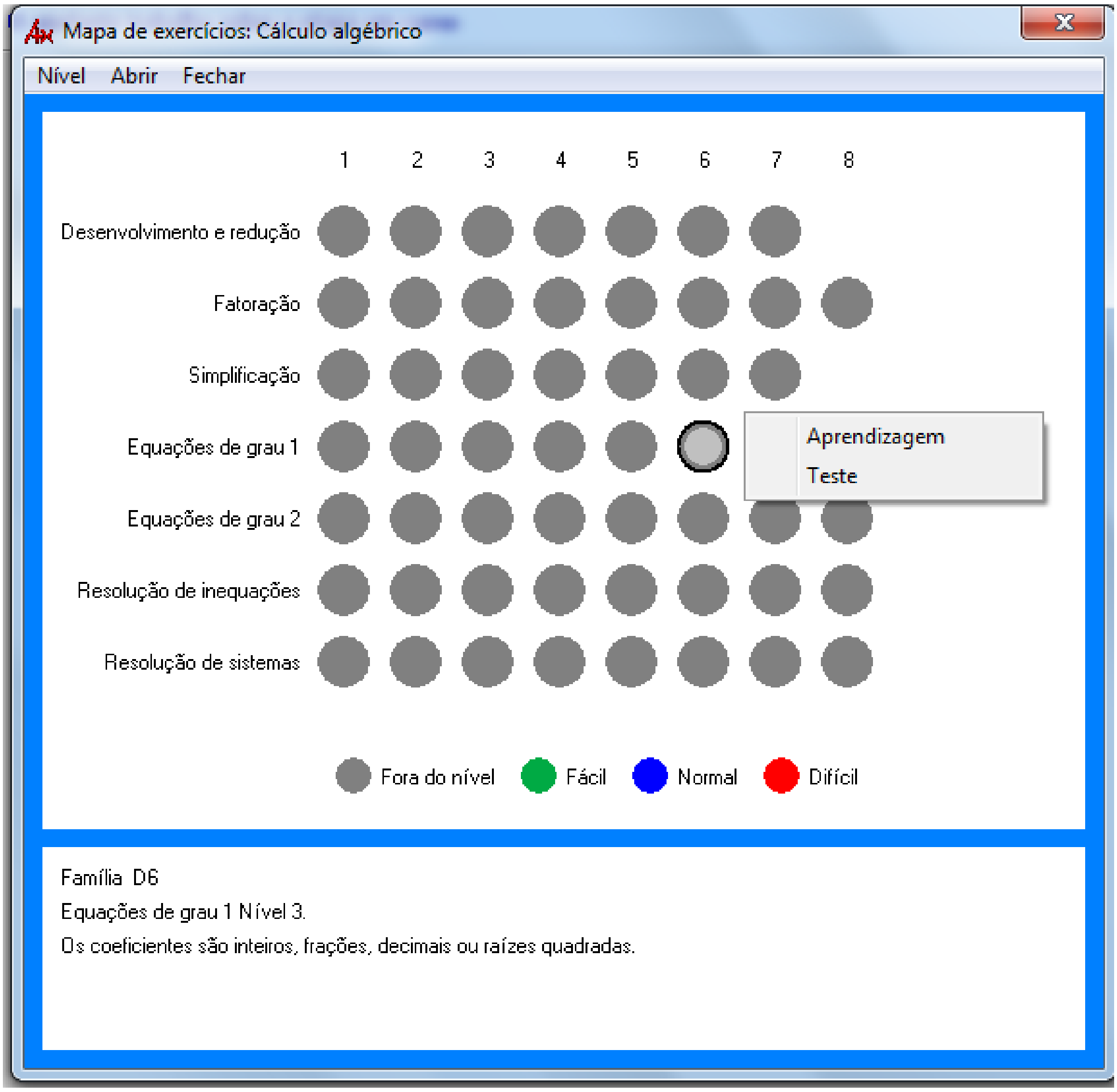


Figura 5: Mapa de Exercícios
Fonte: Aplusix 3.

Bittar (2006) realizou uma pesquisa, na qual usou essa função do Aplusix, que gera automaticamente as listas de exercícios, para analisar a autonomia dos alunos com uma participação mais ativa destes em sua aprendizagem. Essa pesquisa foi realizada com duas turmas do 9º ano. Todos os alunos começaram a pesquisa na "família D1", correspondente ao primeiro nível de equações do 1ºgrau. Foram informados que deveriam resolver algumas listas de exercícios dessa "família" e quando achassem que estavam prontos deveriam fazer uma lista de exercícios dela no modo "teste". Ao final do teste, vendo sua pontuação, cada aluno tomaria a decisão de passar para a próxima sessão ou continuar na mesma "família" até melhorar sua pontuação.

De acordo com Bittar (2006), a autonomia dos alunos foi crescendo a cada sessão, e o professor era chamado somente quando o aluno não conseguia prosseguir sozinho. A pesquisadora observou que na sala de aula, com o grupo todo de alunos, fica difícil para o professor realizar um acompanhamento individual dos alunos e dos exercícios. Consequentemente, os erros são corrigidos sobre a produção do professor no quadro-negro, diferentemente do trabalho com o *software*, que permite a correção a partir dos erros e dificuldades do aluno. As análises das sessões mostraram que os alunos escolheram mudar de família em momentos distintos: uns trabalhavam mais em uma família que outros e atingiram níveis de famílias diferentes. Em uma situação usual, os alunos tinham ficado retidos nas famílias 3 e 4, família que a maioria atingiu, mas alguns atingiram as famílias 4 e 6. O Aplusix permitiu que cada aluno trabalhasse de acordo com seu nível, respeitando o seu próprio tempo, o que dificilmente aconteceria sem o uso do *software*.

As retroações do Aplusix favorecem a autonomia dos alunos e a ferramenta "videocassete" facilita a identificação dos conhecimentos dos alunos, por meio da análise dos invariantes, e, consequentemente, ajuda na elaboração de atividades que levem em conta esses conhecimentos, ajudando-os na aprendizagem da álgebra.

3 ESCOLHAS METODOLÓGICAS

Neste capítulo apresentam-se nossos objetivos de pesquisa e uma descrição de como foi organizada e realizada nossa pesquisa, ou seja, o referencial metodológico utilizado, a escolha dos sujeitos e, por fim, uma descrição dos encontros.

3.1 OBJETIVOS DA PESQUISA

A presente pesquisa tem como objetivo geral investigar erros no estudo de equações do 1º grau e sua superação por alunos do 1º ano do ensino médio com o auxílio do *software* Aplusix. Para conseguir alcançar esse objetivo, definimos os seguintes objetivos específicos:

a) identificar e analisar erros no estudo de equações do 1º grau de alunos do 1º ano do ensino médio;
b) investigar contribuições do *software* Aplusix para a superação de erros visando à aprendizagem de equações do 1º grau.

Definidos nossos objetivos, escolhemos a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990) como suporte teórico, por ser uma teoria cognitivista que ajuda a compreender as dificuldades de apreensão de um conceito. Por meio da análise dos invariantes mobilizados pelos alunos, consegue-se identificar, mesmo que parcialmente, as dificuldades dos alunos, e os erros podem ser modelados no formato de teoremas em ação errôneos. Os invariantes, assim como os erros, não devem ser negados e sim identificados, analisados e usados para o benefício da aprendizagem do aluno. A aprendizagem de um conceito acontece juntamente com os avanços dos invariantes mobilizados pelos alunos. A utilização dos erros como recurso didático pode contribuir para sua superação e, consequentemente, para o desenvolvimento dos esquemas pelos alunos.

3.2 PASSOS DA PESQUISA

Para conseguir alcançar nossos objetivos, primeiramente foi feito o estudo de algumas pesquisas que tratam de concepções, erros e dificuldades no ensino e na aprendizagem de equações do primeiro grau. Dessa forma, conseguimos saber como esses conceitos da álgebra estão sendo tratados no ensino atual e ainda identificar alguns erros e dificuldades de aprendizagem desse conceito. A partir desses estudos, apresentados no capítulo 1, listamos alguns teoremas em ação possíveis de serem mobilizados pelos alunos.

Para compor essa lista, escolhemos três grupos de erros mais comuns no trabalho com equações. Essa lista não tem a pretensão de ser exaustiva, pois contém apenas alguns erros comuns constatados em pesquisas sobre equações.

A lista é composta de seis teoremas em ações errôneos e associamos a cada um deles, um teorema em ação verdadeiro, por exemplo, o teorema **T2.1:**$ax = b \Rightarrow x = b - a$ é um teorema em ação falso e o teorema em ação verdadeiro associado a ele é o teorema em ação **T2:**$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$, assim como o teorema em ação **T2.2:**$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{-a}$ também é um teorema em ação errôneo associado ao teorema **T2**. Não associamos nenhum teorema em ação verdadeiro ao teorema em ação errôneo **T1.1**, pois existem vários teoremas em ação verdadeiros associados ao **T1.1**.

Adição de termos que não são semelhantes (BOOTH, 1995; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

- ○ **T1.1** $ax + b = c \Rightarrow (a + b)x = c$

Resolução incorreta de uma equação do tipo $ax = b$ (FREITAS, 2002; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

- **T2:**$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$
  - **T2.1:**$ax = b \Rightarrow x = b - a$
  - **T2.2:**$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{-a}$
  - **T2.3:**$ax = b \Rightarrow x = \frac{a}{b}$

Transposição incorreta de termos (KIERAN, 1995; FREITAS, 2002; PONTE; BRANCO; MATOS, 2009).

- **T3.** $ax + b = c \Rightarrow ax = c - b$
  - **T3.1**$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$
- **T4.** $ax = bx + c \Longrightarrow ax - bx = c$
  - **T4.1** $ax = bx + c \Longrightarrow ax + bx = c$

Com $a, b\ e\ c\ \in\ \mathbb{R}^*$.

Após esses estudos, elaboramos uma lista de atividades nas quais os alunos poderiam ou não mobilizar esses teoremas em ação falsos previamente listados ou outros. Na resolução dos exercícios, eles utilizaram o Aplusix que, como ressaltado anteriormente, pode trazer ao aluno vários pontos positivos, como contribuir com a autonomia dele, possibilitar a revisão do seu trabalho e análise dos seus erros. Para o pesquisador, o uso desse *software* permite, por meio da ferramenta "videocassete", uma análise mais detalhada das produções dos alunos, ajudando na identificação e no estudo dos esquemas e, assim, investigar a estabilidade de falsos teoremas em ação, além de propor novas atividades visando a sua desestabilização.

Desenvolvemos nossa experimentação em uma escola pública de Campo Grande, Mato Grosso do Sul. Nosso projeto, para a escola, funcionou como uma assessoria aos alunos que tivessem interesse em participar dele. Nossa primeira ação foi a identificação de tais alunos e para isso optamos por apresentar a proposta a uma turma de 1º ano do ensino médio, em sala de aula, e deixar que aqueles que acreditassem ter alguma dificuldade de aprendizagem em álgebra se voluntariassem, ficando em aberto caso outros tivessem interesse em participar do projeto. Optamos por fazer a identificação inicial desses alunos de dois modos: por meio de um questionário (Apêndice A) no qual o aluno, respondendo a algumas questões, podia identificar se tinha ou não dificuldades de aprendizagem e então se candidatava, voluntariamente, a participar de nossa pesquisa. Além disso, discutimos com o professor regente da turma para conhecer suas impressões sobre o grupo de alunos. Nenhum aluno deveria participar da pesquisa por imposição. Apesar de o professor não participar efetivamente dos nossos encontros, seu incentivo para a realização da pesquisa com seus alunos foi fundamental, pois sem sua permissão eles poderiam ficar desmotivados.

Os encontros ocorreram entre setembro de 2011 e julho de 2012. Inicialmente definimos duas modalidades de encontros: presencial, no laboratório de informática da escola, e a distância, com o uso de um ambiente virtual de aprendizagem.

Foi criado um ambiente virtual de aprendizagem que possibilitasse interações síncronas e assíncronas. Para tanto, optamos por usar o Google Docs, por ser um aplicativo gratuito e oferecer diversas possibilidades de uso, e o único requisito para se usar esse recurso é a criação de uma conta no Google. Esse aplicativo permite a criação e o armazenamento de diversos tipos de documentos[12], oferecendo uma opção, de forma fácil e rápida, para seu compartilhamento. Quando um documento é criado e compartilhado no Docs, além de permitir o trabalho em conjunto das pessoas, ao mesmo tempo ou em momentos assíncronos, ele possui uma ferramenta de “bate-papo” (ao lado direito do documento) que aumenta as possibilidades de interação entre os alunos e o professor ou conosco, no caso desta pesquisa. Outra opção interessante é a possibilidade de se inserir uma equação matemática, o que facilita essa interação. Os alunos poderiam então entrar em contato conosco, sempre que sentissem necessidade, usando as ferramentas do Google Docs ou por meio do *e-mail*.

---

[12]Mais informações sobre as potencialidades do Google Docs, acessar: <https://docs.google.com/support/>

No primeiro encontro, apresentamos o ambiente aos alunos, que não tiveram dificuldades em usá-lo. Na semana que não teríamos encontro presencial, foram colocadas, questões sobre o nosso projeto com o objetivo de iniciar uma discussão sobre possíveis dificuldades dos alunos. Sempre depois dos encontros presenciais, reforçávamos que eles poderiam entrar no ambiente para tirar dúvidas, mas, ao longo dos encontros, observamos que quase não houve acesso ao ambiente; mesmo com a nossa insistência em entrarem no ambiente ou em contato conosco por *e-mail* ou *chats*, não houve retorno por parte dos alunos. Em busca de alternativas para fazer esse acompanhamento, localizamos os alunos em uma rede social e passamos a entrar em contato por meio dessa rede. Apesar de passarem a utilizar a rede social para entrar em contato conosco, eles apenas usaram esse meio para fins não pedagógicos, por exemplo, para saber qual seria a data do nosso próximo encontro.

Acreditamos que o uso de ambientes virtuais de aprendizagem ainda é uma boa ferramenta para ajudar no acompanhamento mais constante de alunos; no entanto, o uso de um ambiente não foi aceito por essa turma, talvez ele não fizesse parte do cotidiano deles. Por conta de termos poucos dados referentes a esse acesso ao ambiente, não faremos a análise desses dados.

Os encontros presenciais foram realizados após o quinto tempo de aula, com duração de 50 minutos, conhecido como o sexto tempo de aula. Esses encontros inicialmente aconteceram em semanas alternadas e alguns com um intervalo de tempo maior, totalizando nove encontros presenciais.

3.3 ANÁLISE DE CONTEÚDO DOS ERROS

Para análise dos dados, nos baseamos na análise de conteúdo dos erros, que é uma metodologia de pesquisa que vem sendo usada e desenvolvida por Cury (2008). A autora, ao analisar seus trabalhos e de outros autores que abordaram o tema erros na produção escrita dos alunos, notou que,

> [...] independentemente das teorias que fundamentavam as pesquisas e da forma como as respostas eram apresentadas, eu estava analisando o *conteúdo* da produção, ou seja, empregando uma metodologia de análise de dados conhecida como *análise de conteúdo.* (CURY, 2008, p. 61, grifo da autora).

A análise de conteúdo possibilita a análise de dados, por meio de um conjunto de técnicas, e a interpretação de mensagens produzidas pelo homem, seja ela oral ou escrita. A análise de conteúdo, segundo Bardin (2011, p. 48) é:

> Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) dessas mensagens.

Ao resolver uma atividade, o aluno produz um texto matemático que, segundo Cury (2008, p.62-63),

> [...] pode ser analisado, com base em procedimentos sistemáticos, para inferir conhecimentos sobre as formas com que aquele estudante construiu um determinado saber matemático. [...] Na análise das respostas dos alunos, o importante não é o acerto ou erro em si [...], mas as formas de se apropriar de um determinado conhecimento, que emergem na produção escrita e que podem evidenciar dificuldades de aprendizagem.

Bardin (2011) apresenta três etapas fundamentais para a organização da análise de conteúdo: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados com a inferência e a interpretação. Cury (2008), baseando-se na análise de conteúdo, faz uma adaptação desse método para a análise de erros da produção escrita dos alunos. Em nossa pesquisa, além da produção escrita, temos a gravação em áudio das falas deles, nos fornecendo mais dados para análise.

A primeira etapa, fase da organização dos dados, possui três objetivos: a escolha dos documentos, a formulação de hipóteses e dos objetivos de análise e a elaboração de indicadores. O primeiro contato com os documentos é feito por meio da leitura "flutuante", com o objetivo de conhecer e extrair as primeiras impressões do material. Após essa primeira leitura, determina-se o *corpus*, conjunto de documentos que serão analisados. Escolhidos os documentos, são estabelecidos os objetivos e formuladas as hipóteses, afirmação provisória que se pretende confirmar, ou não, por meio da análise (BARDIN, 2011).

Nessa etapa é que o material escolhido para análise deve ser preparado. No caso do nosso estudo, foram feitas cópias das atividades realizadas no Aplusix, incluindo todas as etapas de resolução das atividades dos sujeitos, assim como a transcrição do áudio dos encontros. As nossas hipóteses são os possíveis teoremas em ação que os alunos podem mobilizar, ou não, durante as resoluções das atividades. Essas hipóteses são sustentadas pelas pesquisas discutidas no decorrer do nosso texto.

A fase de exploração do material, "envolve um estudo aprofundado do *corpus*, com procedimentos de unitarização e categorização. A unitarização é o processo que consiste em reler o material para definir as unidades de análise". (CURY, 2008, p. 64, grifo da autora). Cada unidade é codificada e separada do *corpus*, para a produção das categorias que, de acordo com Bardin (2011, p. 148), "tem como primeiro objetivo (da mesma maneira que a análise documental) fornecer, por condensação, uma representação simplificada dos dados brutos".

De acordo com Cury (2008), na análise das respostas dos alunos, quando já codificadas, por tipos de solução, uma segunda leitura permite destacar as unidades, separando as respostas que receberam o mesmo código e, a partir daí, estabelecer relações entre as unidades, criando assim, as categorias. Após a elaboração das categorias, elas devem ser descritas por meio de tabelas ou quadros com o número de ocorrências de cada uma delas. Recomenda-se a produção de uma síntese que ajude o leitor na compreensão de cada elemento presente nas categorias.

A última etapa, de interpretação dos dados, "a partir do conjunto de categorias, o investigador vai refletir sobre os dados e, com base no referencial teórico e em suas concepções sobre o tema, vai buscar respostas às suas questões de pesquisa" (CURY; KONZEN, 2006, p. 37).

Para compor o nosso *corpus* de análise, foram consideradas as atividades realizadas pelos alunos e os registros orais (diálogos entre os alunos ou conosco). Usando a ferramenta "videocassete" do Aplusix, assistimos a todas as etapas de resolução das atividades, inclusive aquelas que foram apagadas, e assim foram feitas cópias delas, por meio de imagens, obtendo então um conjunto de imagens das soluções das atividades dos alunos. Ao olhar as etapas da resolução das atividades, modelamos os possíveis teoremas em ação mobilizados por eles.

Definimos como tema de análise a resolução de equações e escolheram-se como unidade os diferentes tipos de equações, pois acreditamos que a cada tipo de equação podem aparecer erros diferentes. Separadas as unidades, estabelecemos uma categoria de análise construída por meios dos procedimentos de resolução usados pelos alunos ao resolver as equações.

3.4 QUESTIONÁRIO: ESCOLHA DOS SUJEITOS

Os sujeitos desta pesquisa foram alunos do 1º ano do ensino médio que foram convidados a participar da pesquisa. Primeiramente, explicamos a eles do que tratava nossa pesquisa e aplicamos um questionário a fim de coletar alguns dados e convidá-los a participarem como voluntários da nossa pesquisa. Aplicamos o questionário para duas turmas de primeiro ano, perfazendo um total de cinquenta e seis alunos. Desse total, vinte e dois se voluntariaram a participar, mas destes, Bianca, Emanuela e Ana[13] participaram com maior frequência dos encontros, o que nos levou a escolher essas três alunas, nos fornecendo mais dados para a análise.

O questionário (Apêndice A) contém dez questões, entre elas, a última era referente ao interesse do aluno em participar como voluntário da nossa pesquisa. Apresentaremos apenas as respostas das três alunas escolhidas para análise.

Essas alunas eram de uma mesma sala de aula e nenhuma delas havia ficado para recuperação ou reprovado de ano. Duas responderam acessar frequentemente a internet em casa e as três disseram não conhecer nenhum *software* matemático.

Bianca, que participou de todos os encontros, respondeu que o que mais gosta em matemática são os cálculos, problemas e equações e gosta menos de contas com frações. Ela respondeu ter indiferença com a disciplina de matemática, pois em alguns conteúdos tem facilidade e em outros, não. Respondeu que quando não está entendendo a matéria procura a professora, ou assiste à videoaula na internet e raramente estuda fora do horário escolar.

Emanuela faltou a dois encontros (sexto e nono). Disse que gosta de quase tudo em matemática, exceto dos problemas. Disse ter facilidade com a matemática, pois, com uma explicação, consegue entender o conteúdo. Caso não consiga entender, afirmou que continua prestando atenção, para tentar entender ou tira dúvidas com outras pessoas. Respondeu estudar “mais ou menos” fora do horário de aula.

Ana faltou apenas ao último encontro. Ela gosta de geometria e álgebra e não gosta de montar gráficos e de funções. Respondeu ter facilidade com a disciplina e justifica sua resposta com a seguinte frase: “Eu não gosto, nem paro para estudar, mas entendo o que o professor explica e vou com notas boas”. Quando não está entendendo a matéria, disse pedir ajuda ao professor ou pesquisa na internet. Respondeu que, às vezes, estuda fora do horário de aula.

3.5 ENCONTROS

A seguir apresenta-se uma síntese das atividades realizadas nos nove encontros desenvolvidos durante a experimentação. Em nossa proposta de usar os erros a favor da

[13]Nomes fictícios.

construção do conhecimento, a análise das atividades de um encontro era fundamental para propormos as atividades do encontro seguinte. Assim, as atividades foram planejadas durante a experimentação.

Neste momento, cabe ressaltar que as experimentações foram acompanhadas por mais duas pessoas: uma com conhecimento detalhado do projeto de pesquisa, ajudando a atender os alunos em dúvidas e dificuldades, e outra que nos auxiliou nas gravações dos áudios e com outros problemas de caráter mais técnico, juntamente com o professor da sala de tecnologia que nos ajudou no funcionamento do laboratório em geral.

Quadro 3 – Síntese das atividades dos encontros

1º encontro **- 29/9/2011** Apresentação do ambiente Google Docs	Apresentação do ambiente, aos alunos. Para acessar o ambiente cada aluno abriu uma conta no Google, para poder utilizar o serviço de e-*mail* Gmail, e o Google Docs. Foram deixadas algumas questões sobre o nosso projeto, com objetivo de iniciar uma discussão sobre possíveis dificuldades dos alunos.
2º encontro **- 4/10/2011** Apresentação do Aplusix	Apresentação do *software* Aplusix e suas potencialidades. Resolução de uma lista de equações da primeira "família", em modo de "aprendizagem". Foram postadas algumas atividades (Apêndice B) no ambiente virtual de aprendizagem sobre equações.
3º encontro **- 8/11/2011** Discussão atividades do ambiente	Houve pouco acesso ao ambiente; então, foi feita a discussão das atividades postadas no ambiente.
4º encontro **- 22/11/2011** Resolução de equações no Aplusix	Resolução das seguintes equações, no Aplusix: • $3\mathrm{x} - 4 = 7$ • $2\mathrm{x} + 4 = 8$ • $5\mathrm{x} = 10$ • $-20\mathrm{x} = 8$ • $\frac{x}{4} = 9$ • $2(\mathrm{x} + 1) + 3 = \mathrm{x} + 4$ • $-2(3 + \mathrm{x}) = \mathrm{x} + 1$
5º encontro **- 29/11/2011** Resolução de equações no Aplusix	Resolução das seguintes equações, no Aplusix: • $\frac{x}{5} = 3$ • $\frac{-x}{6} = \frac{4}{3}$ • $\frac{2x}{3} = -6$ • $\frac{-5x}{2} = \frac{5}{3}$ • $7x + 3 = 3$ • $3(x + 2) = x - 2$ • $4(2 - x) - 6 = x + 12$ • $9 = -3(x - 1)$

6º encontro **- 21/3/2012** Resolução de atividades distintas, usando o Aplusix	A partir desse encontro, planejamos atividades distintas para cada aluno, levando em conta as análises das atividades dos encontros anteriores. Bianca resolveu uma lista com algumas equações semelhantes às anteriores, pois a aluna apresentou alguns erros ao resolver as listas anteriores. Então, propomos uma lista tentando verificar a estabilidade de alguns teoremas em ação mobilizados por ela na resolução das equações. Ana resolveu dois “testes” de equações do 1º grau para testar seus conhecimentos sem as retroações do Aplusix, pois não apresentou dificuldades em resolver as listas de equações dos outros encontros. Como conseguiu um bom desempenho nos “testes” começou a resolver uma lista em modo de “aprendizagem” da 1ª “família” de sistemas de equações.
7º encontro **- 28/3/2012** Resolução de atividades distintas, usando o Aplusix	Bianca começou a resolver algumas atividades sobre frações, por apresentar dificuldades em realizar essas operações, o que acabou influenciando na resolução das equações. Emanuela resolveu um “teste” com equações para testar a estabilidade de alguns teoremas em ação mobiliados por ela ao resolver as equações dos encontros anteriores. Ana resolveu duas listas de sistemas em modo de “aprendizagem”.
8º encontro **- 19/4/2012** Resolução de atividades distintas, usando o Aplusix	Bianca continuou resolvendo atividades com frações. Emanuela resolveu uma lista, em modo de “aprendizagem”, com equações da mesma família do sétimo encontro, pois ela não conseguiu um bom desempenho no “teste”. Ana resolveu uma lista de sistemas de equações com sistemas da mesma família do sétimo encontro, pois apresentou alguns erros ao resolver os sistemas.
9º encontro **- 3//2012** Resolução de equações, usando papel e lápis	Apenas Bianca participou desse encontro. Ela resolveu uma lista de equações usando papel e lápis. Propomos essa lista para tentar verificar a estabilidades de alguns teoremas em ação mobilizados por ela na resolução das equações resolvidas no decorrer da experimentação.

A seguir, é apresentada a análise de dados de três alunas participantes da experimentação. Ressaltamos, novamente, que foram escolhidos os três sujeitos que tiveram mais frequência nos encontros.

4 COLETA E ANÁLISE DE DADOS

Este capítulo destina-se a apresentar a análise das resoluções das atividades de três sujeitos da pesquisa. As análises foram realizadas a partir dos nossos referenciais teóricos, usando os registros do *software* Aplusix e as gravações em áudio dos encontros.

Escolhemos três alunas, Bianca, Emanuela e Ana[14], pois foram as que mais participaram dos encontros, fornecendo assim mais dados para a análise. Foram realizadas as análises dos dados referentes aos dois últimos encontros de 2011 (quarto e quinto encontros) e aos encontros de 2012, todos referentes ao estudo da resolução de equações.

Primeiramente, apresentamos as análises individuais do quarto e quinto encontros, quando foram dadas as mesmas atividades paras as três alunas,. Em seguida separaremos as análises por sujeito, pois, a partir do sexto encontro, foram propostas atividades distintas, sempre levando em consideração os erros das atividades do encontro anterior.

4.1 ANÁLISE DO QUARTO E QUINTO ENCONTROS - BIANCA, EMANUELA E ANA

No quarto encontro, as alunas resolveram uma lista com sete equações, usando o Aplusix, e pedimos a elas que, usando a ferramenta de comentário do *software*, justificassem cada passo realizado durante a resolução das equações, para termos mais elementos que nos ajudassem na identificação das estratégias de resolução dos alunos. Nesse encontro estiveram presentes quatro alunos, que também participaram dos encontros anteriores.

As equações foram as seguintes:

1) $3x - 4 = 7$

2) $2x + 4 = 8$

3) $5x = 10$

4) $-20x = 8$

5) $\frac{x}{4} = 9$

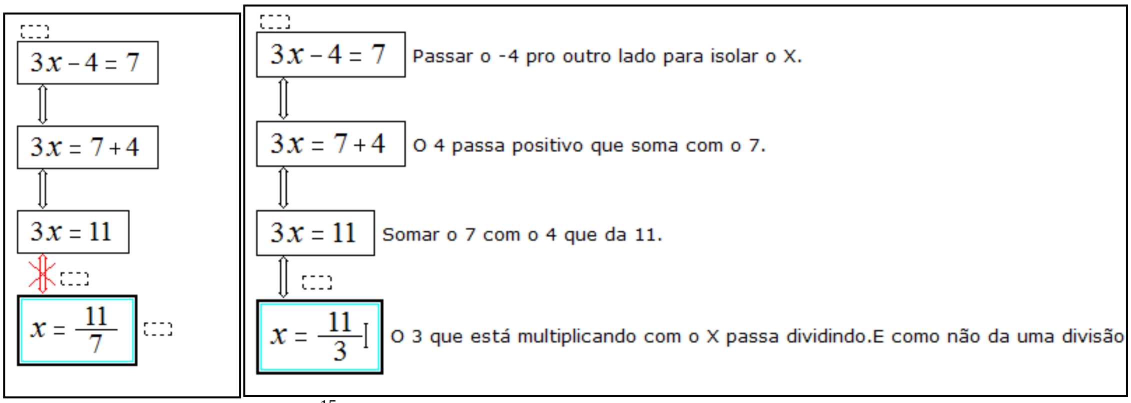
6) $2(x + 2) + 3 = x + 4$

7) $-2(3 + x) = x + 1$

Bianca resolve a lista sem cometer erro significativo. Por exemplo, ao resolver a primeira atividade, ela troca três por sete na terceira passagem, como mostra sua produção na Figura 6.

---

[14]Nomes fictícios.



Figura[15] 6– Resolução, por Bianca, da equação 3x – 4 = 7
Fonte: Aplusix

Ela corrige rapidamente o erro, que pode ter sido ocasionado por falta de atenção ou até mesmo por um erro de digitação.

Ao resolver a primeira equação, Ana erra ao transpor o número quatro do primeiro para o segundo membro da equação. Esse erro de transposição corresponde ao teorema em ação errôneo **T3.1:**$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$ modelado *a priori* . O mesmo teorema poderia ter sido mobilizado por Ana, por exemplo, na segunda equação (2x + 4 = 8), mas não foi.

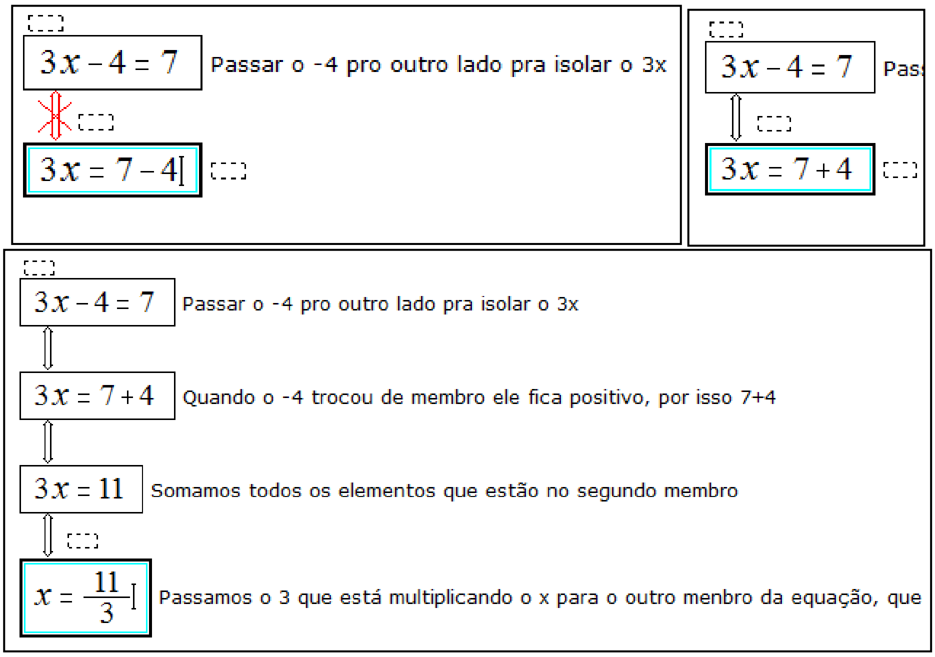


Figura 7 – Resolução, por Ana, da equação 3x – 4 = 7
Fonte: Aplusix

---

15 Os registros das atividades realizadas no Aplusix foram visualizados usando a ferramenta "videocassete". Foram feitas cópia, por meio de imagens, das etapas de resolução das equações. A leitura das imagens, do processo de resolução das equações, deve seguir a seguinte ordem: da esquerda para direita, começando de cima para baixo.
Cabe ressaltar que os comentários que aparecem nas imagens foram feitos pelas alunas.

Assim, nas produções seguintes de Ana, é necessário observar se, diante desse mesmo tipo de situação, esse teorema em ação é ou não mobilizado. Somente então poderemos discutir sobre a estabilidade (ou não) dele. Esse foi o único erro que Ana cometeu nesse encontro.

Emanuela também cometeu um erro ao resolver a primeira equação, quando tenta transpor o número três para o outro membro da equação. Esse erro foi modelado, *a priori*, pelo teorema em ação errôneo **T2.1**: $ax = b \Rightarrow x = b - a$. Como a aluna resolveu as equações seguintes mobilizando o teorema em ação correto **T2:**$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$, isso indica que o teorema em ação falso pode não estar arraigado, sendo necessárias mais situações em que pode (ou não) ser mobilizado.

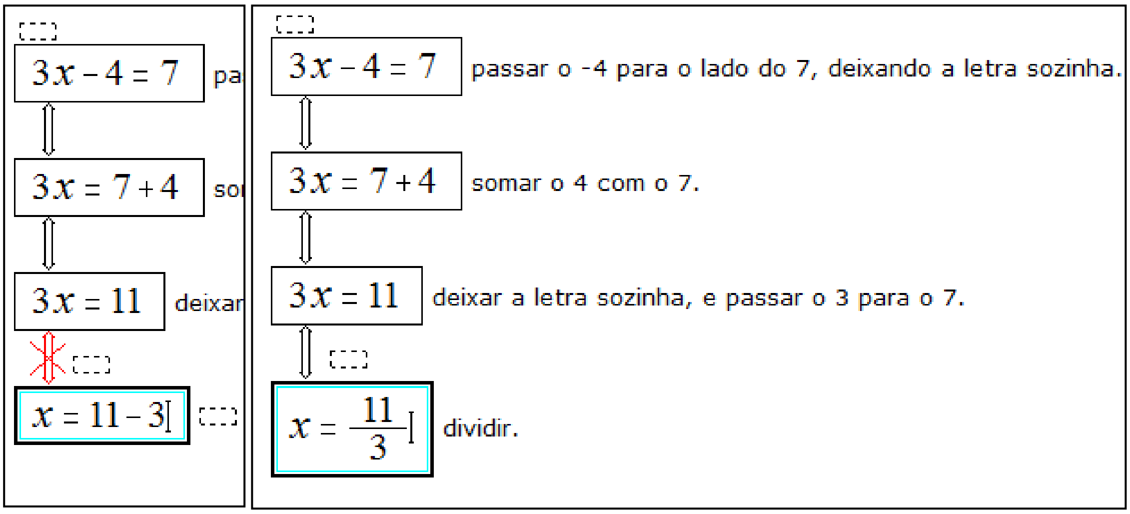


Figura 8 – Resolução, por Emanuela, da equação $3x - 4 = 7$
Fonte: Aplusix

Emanuela comete outros erros ao resolver a quinta equação. Primeiramente, parece que tenta usar, segundo o que ela afirma, o mínimo múltiplo comum (MMC), mas faz erros aritméticos e não consegue chegar a uma equivalência. Então muda de estratégia e consegue resolver a equação.

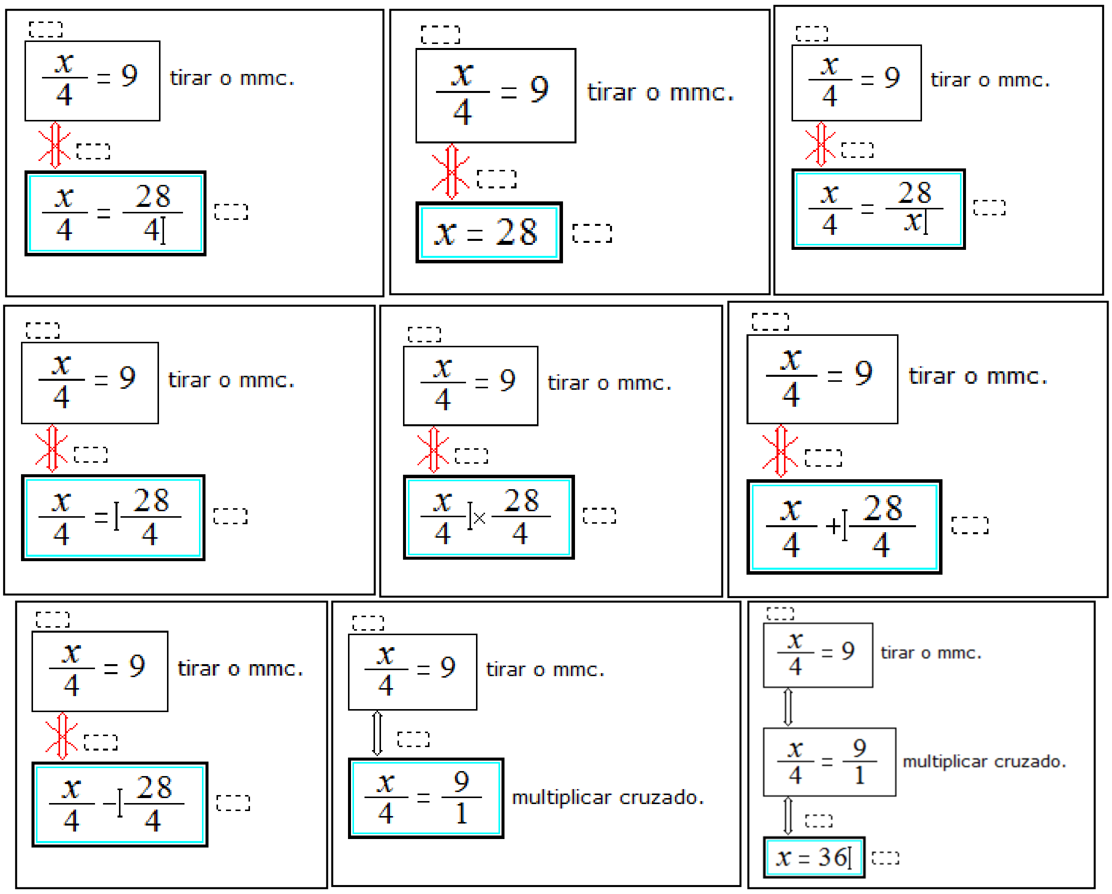


Figura 9 – Resolução, por Emanuela, da equação **5)** $\frac{x}{4} = 9$
Fonte: Aplusix

Emanuela comete outros dois erros ao tentar resolver a última equação, quando tenta “separar as letras dos números”: ela transpõe corretamente a incógnita, que está no segundo membro, mas ao transpor o (-6) para o outro membro da equação, inverte o sinal do segundo termo independente que já estava no segundo membro da igualdade. Na segunda tentativa, ela apenas inverte o sinal do número seis. Esses erros se enquadram no grupo da transposição incorreta de termos independentes.

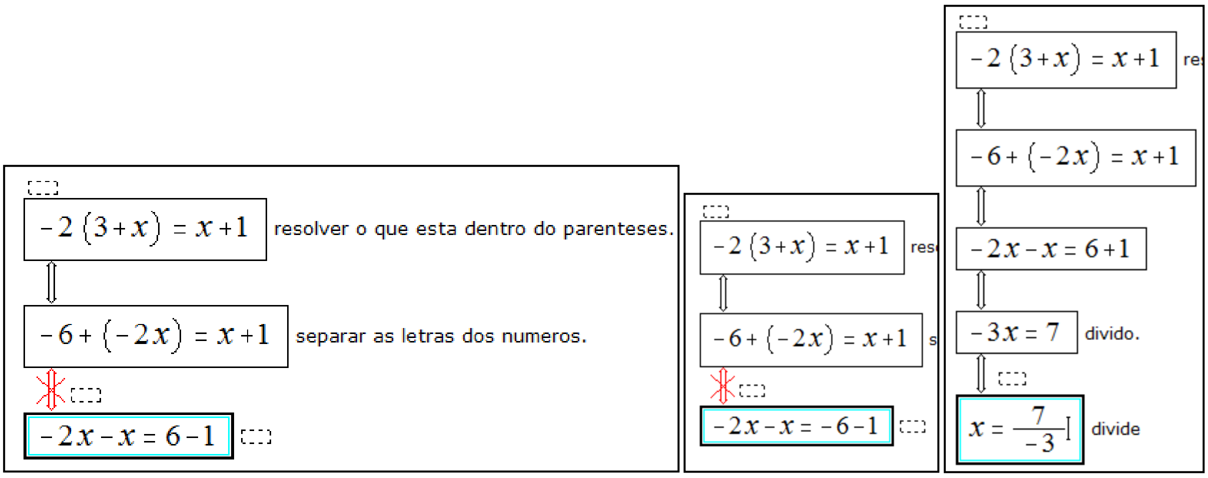


Figura 10 – Resolução, por Emanuela, da equação $-2(3 + \mathrm{x}) = \mathrm{x} + 1$
Fonte: Aplusix

Diante desses erros e de outros cometidos pelos outros alunos presentes, resolvemos que, no quinto encontro, iríamos trabalhar com mais equações para tentar compreender os erros dos alunos, verificando a ocorrência ou não dos teoremas em ação errôneos identificados nesse encontro. Assim, as equações propostas nessa lista são semelhantes às da primeira lista com predomínio de equações do tipo $\frac{ax}{b} = c, com\ b \neq 0$ ou que se reduzem a essa forma.

As equações foram as seguintes:

1) $\frac{x}{5} = 3$

2) $\frac{-x}{6} = \frac{4}{3}$

3) $\frac{2x}{3} = -6$

4) $\frac{-5x}{2} = \frac{5}{3}$

5) $7x + 3 = 3$

6) $3(x + 2) = x - 2$

7) $4(2 - x) - 6 = x + 12$

8) $9 = 3(x - 1)$

O quinto encontro foi o último de 2011 e nele estiveram presentes os quatro alunos do encontro anterior.

Bianca cometeu alguns erros ao resolver a sétima e oitava equação. Vejamos primeiramente os procedimentos usados pela aluna ao resolver a sétima equação.

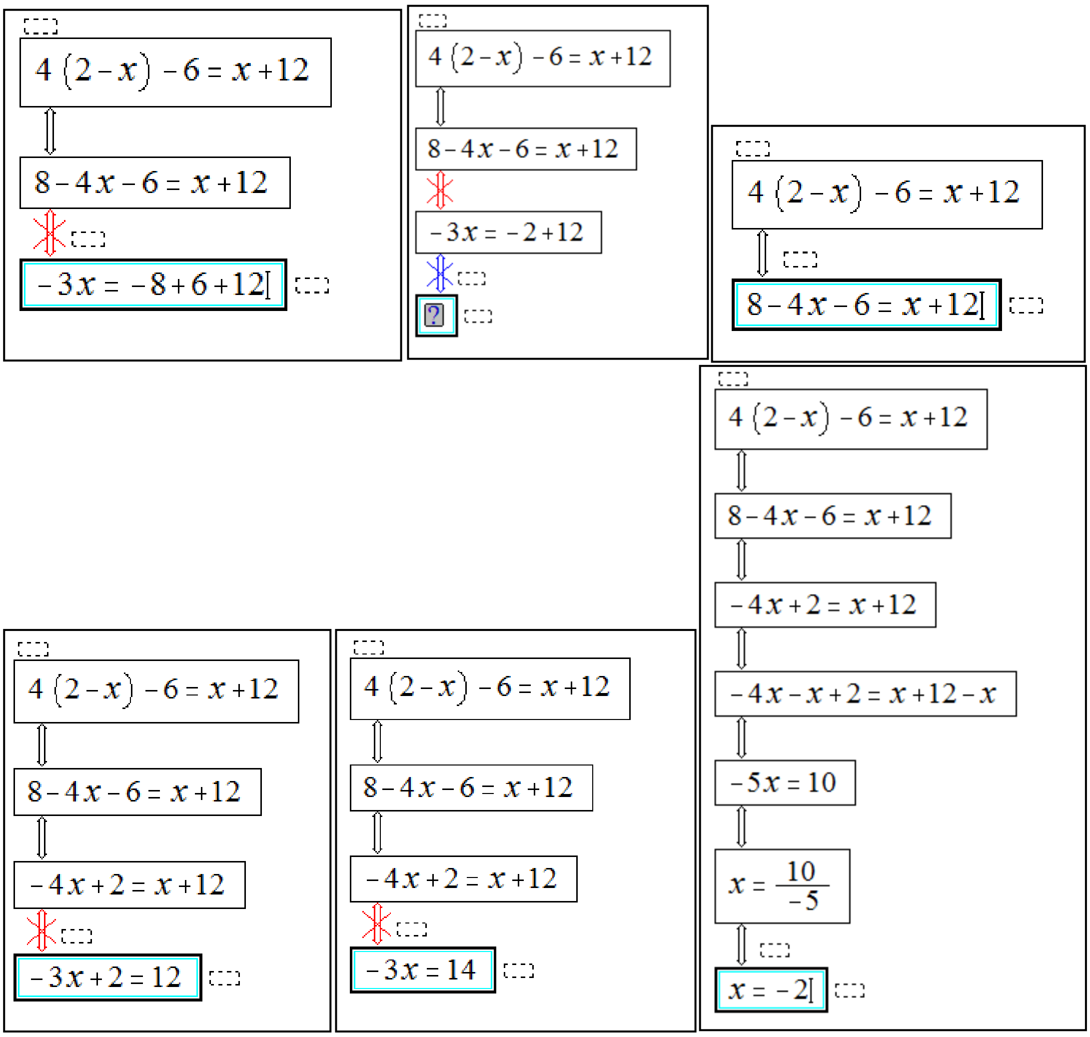


Figura 11 – Resolução, por Bianca, da equação $4(2 - x) - 6 = x + 12$
Fonte: Aplusix

Na primeira imagem, ela transpõe corretamente os termos independentes, que estavam no primeiro membro da equação para o segundo, mas erra ao transpor a incógnita, que estava no segundo membro para o primeiro, resultando assim em $(-3x)$. Em seguida, adiciona corretamente os números (*-8*) e *6*, continuando com a não equivalência entre as etapas; mas Bianca apaga a etapa, e começa a resolver a equação voltando àquela que não continha erros. Resolve primeiramente a soma entre os termos independentes do primeiro membro. No entanto, ao fazer a transposição da incógnita, que está no segundo membro para o primeiro, comete o mesmo erro. A aluna usa o princípio da equivalência, técnica usada na primeira vez pela aluna, retirando *x* de ambos os lados e assim consegue chegar ao valor (*-5x*).

Bianca já havia resolvido, corretamente, usando a técnica de transposição, outras três equações em que a incógnita estava no segundo membro da equação, a sexta e sétima do quarto encontro e a sexta equação desse encontro. No entanto, a aluna cometeu novamente um erro ao resolver a oitava equação, na qual a incógnita está no segundo membro da igualdade.

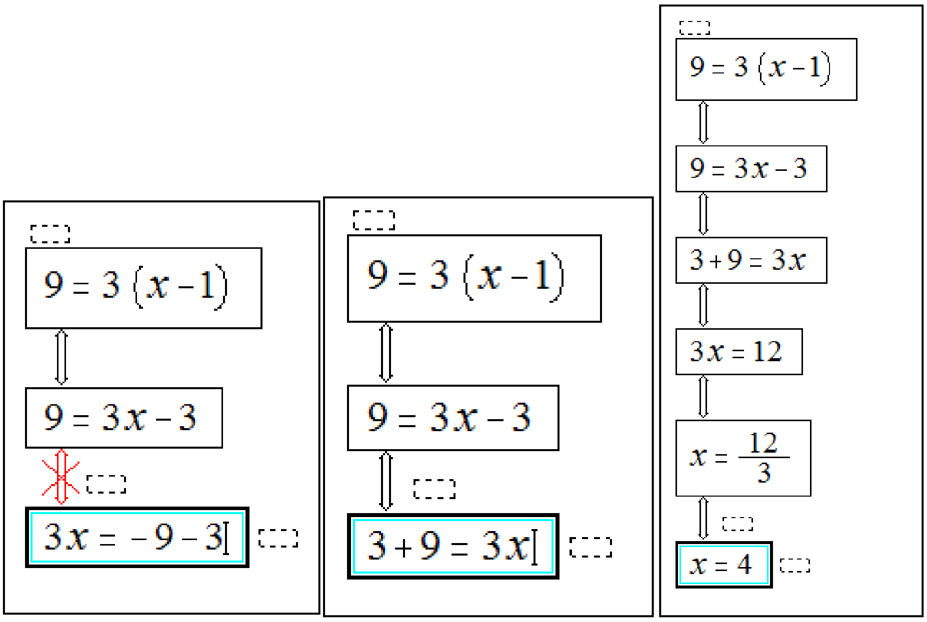


Figura 12 – Resolução, por Bianca, da equação $9 = 3(x - 1)$
Fonte: Aplusix

A aluna transpõe corretamente o número nove para o segundo membro da equação, mas comete um erro ao transpor a incógnita para o primeiro membro.

Observa-se que, nessas duas equações, a aluna teve erros semelhantes: ao fazer a transposição da incógnita, que está no segundo membro da igualdade, não faz a troca do sinal. Esses erros são casos particulares do teorema em ação **T4.1:**$ax = bx + c \Longrightarrow ax + bx = c$, em que, no primeiro caso, o primeiro membro da equação tem também um termo independente, e no segundo, no lugar da incógnita tem-se somente um termo independente.

Até o momento pode-se constatar apenas erros relacionados ao fato de a incógnita estar no segundo membro da equação. Então, para o encontro seguinte propusemos atividades, para Bianca, levando em consideração esses erros.

Emanuela cometeu alguns erros ao resolver quatro equações dessa lista: a segunda, sexta, sétima e oitava equação. Vejamos, primeiramente, os passos da resolução da segunda equação.

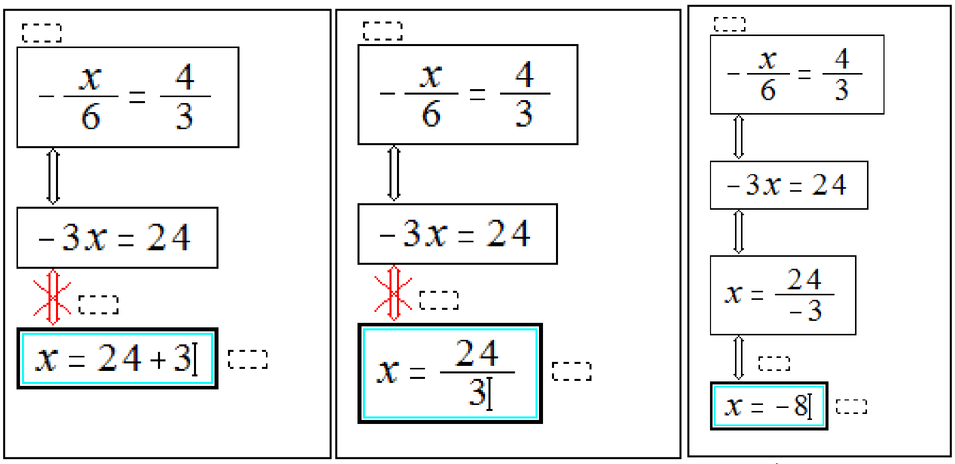


Figura 13 – Resolução, por Emanuela, da equação $\frac{-x}{6} = \frac{4}{3}$
Fonte: Aplusix

Os dois erros foram cometidos ao transpor o número (-*3*) para o segundo membro da equação. Esses erros foram modelados, *a priori*, pelos seguintes teoremas em ação errôneos **T2.1:**$ax = b \Rightarrow x = b - a$ e **T2.2:**$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{-a}$. O teorema **T2.1** já havia sido mobilizado na resolução da primeira equação ($3x - 4 = 7$) do encontro anterior; no entanto, o mesmo poderia ter sido mobilizado mais outras seis vezes, mas não foi.

Com exceção apenas da primeira equação ($\frac{x}{5} = 3$), todas as equações, dessa lista, em algum momento, acabam chegando à forma $ax = b, com\ a \neq 0$ e, em todos os casos, o teorema em ação correto **T2** foi mobilizado. Apesar de o teorema em ação **T2.1** ter sido mobilizado duas vezes, essa quantidade é pouca se comparada às possibilidades de ter sido mobilizado. Inferimos assim que esses erros não estão arraigados, sendo talvez mais fáceis de serem superados pela aluna.

Na Figura 14 observa-se que Emanuela cometeu um erro resolvendo a sexta equação. Ela fez a transposição corretamente do número seis, mas conserva o sinal da incógnita *x* ao transpô-la para o primeiro membro da igualdade.

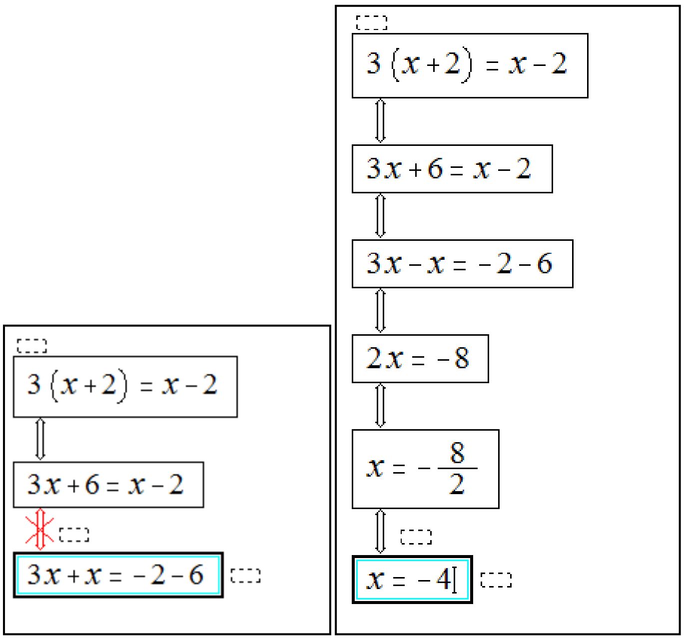


Figura 14 – Resolução, por Emanuela, da equação $3(x+2)=x-2$
Fonte: Aplusix

Esse foi o primeiro erro de transposição de incógnita, mas não foi o único. Como se pode verificar na Figura 15, Emanuela cometeu um erro ao transpor a incógnita, que também está no segundo membro da equação, na questão 8, conservando o sinal do $3x$.

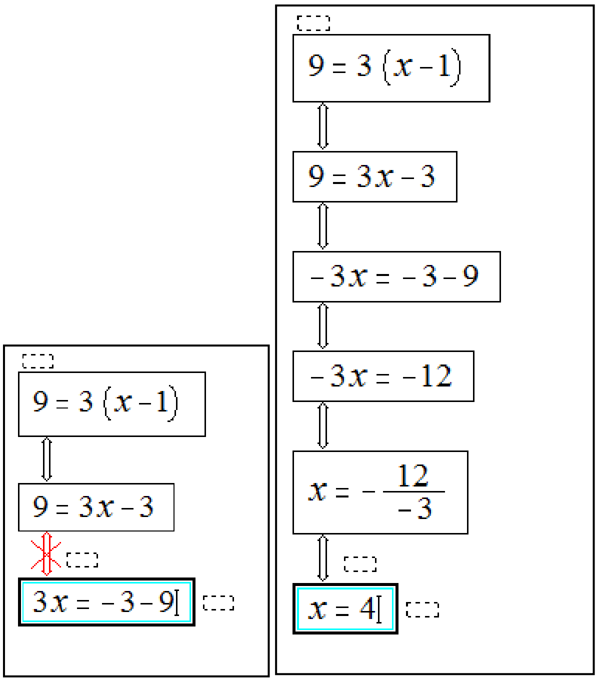


Figura 15 – Resolução, por Emanuela, da equação $9=3(x-1)$
Fonte: Aplusix

Observa-se uma semelhança entre esses dois erros; nos dois, a aluna, ao fazer a transposição da incógnita, que está no segundo membro da igualdade, não faz a troca do sinal.

Esses erros, que foram os mesmos cometidos por Bianca, são casos particulares do teorema **T4.1:**$ax = bx + c \Longrightarrow ax + bx = c$, em que, no primeiro caso, o primeiro membro da equação tem também um termo independente e, no segundo, no lugar da incógnita, tem-se somente um termo independente.

Vejamos o erro de Emanuela ao resolver a sétima equação.

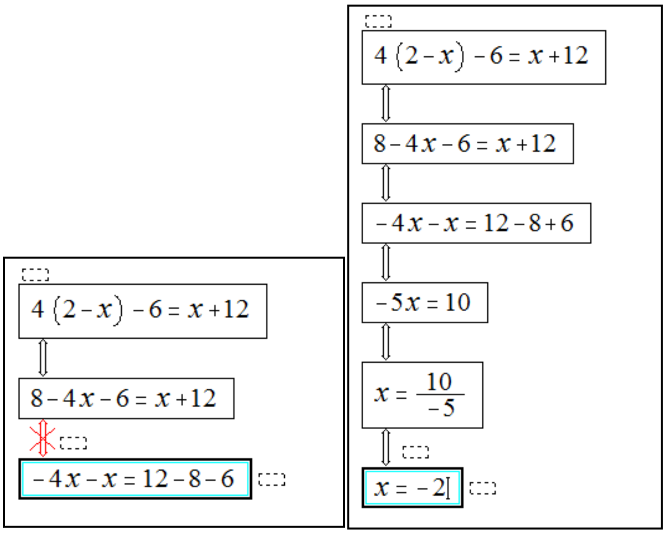


Figura 16 – Resolução, por Emanuela, da equação $4(2 - x) - 6 = x + 12$
Fonte: Aplusix

Apesar de ser um erro de transposição incorreta de termos independentes, a regra usada pela aluna para resolver a equação é diferente das usadas anteriormente para resolver a equação $-2(3 + \mathrm{x}) = \mathrm{x} + 1$ (sétima equação do quarto encontro). Nesse caso, o erro poderia ser modelado pelo teorema em ação **T3.1:**$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$, com o diferencial de que, ao invés de um termo independente, no primeiro membro da igualdade, são dois e, apesar de serem dois termos, ela erra a transposição de apenas um termo, o que pode indicar que tenha sido apenas falta de atenção. Diante disso, inferimos que a aluna, sem saber como resolver as equações desse tipo, usa regras errôneas e, ao verificar a não equivalência entre as etapas, muda de estratégia, mobilizando outras regras, até conseguir chegar ao resultado correto.

Das cinco equações em que aparecem incógnitas em ambos os membros ou apenas no segundo membro da equação, Emanuela resolveu, sem erros, somente uma equação, cometendo, em dois casos, erros ao transpor os termos independentes; e nos outros dois casos, erros ao transpor as incógnitas. Outro aspecto comum a essas quatro equações é a quantidade de termos que, assim como Kieran (1995) já havia observado em seus trabalhos, pode dificultar o uso da técnica de transposição.

Ana, novamente, cometeu apenas um erro ao resolver as oito equações. Ao analisar o erro cometido pela aluna na resolução da sétima equação, e pela quantidade de equações resolvidas sem erros, acreditamos que esse erro pode ser considerado como um erro de digitação, em que ela apenas troca o sinal do número 12.

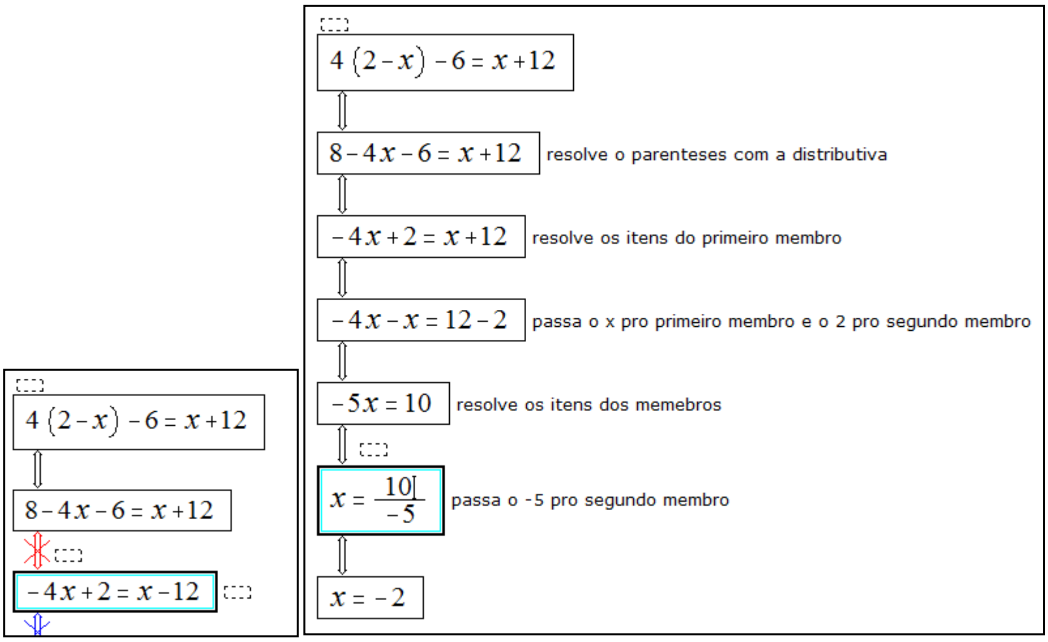


Figura 17 – Resolução, por Ana, da equação $4(2-x)-6=x+12$
Fonte: Aplusix

Todas as alunas cometeram erros nas resoluções das equações com incógnitas em ambos os lados da igualdade. Kieran (1995) já havia apontado alguns erros em equações desse tipo, quando se usa sem compreensão a técnica da transposição, e Freitas (2002) verificou em seu trabalho que os alunos têm um índice de erro muito maior em equações desse tipo.

Com a análise individual, percebem-se poucas semelhanças na resolução das equações. A quantidade e o tipo de erros cometidos por elas não foram os mesmos, o que nos levou a planejar atividades diferentes para cada aluna, levando sempre em conta as análises realizadas anteriormente.

Bianca mobilizou duas vezes o teorema em ação errôneo **T4.1** $ax = bx + c \Longrightarrow ax + bx = c$, em duas equações (sétima e oitava) do quinto encontro. As duas equações, em que foi mobilizado o teorema em ação falso, apresentam incógnitas no segundo membro da igualdade. Por conta disso, para o próximo encontro, propusemos atividades que levassem em consideração esse fato.

Ana cometeu apenas dois erros ao resolver as 15 equações do quarto e quinto encontro. Um deles foi modelado pelo teorema em ação errôneo **T3.1:** $ax + b = c \Rightarrow ax =$

$c + b$, mobilizado, uma única vez, na primeira equação do quarto encontro. Ana poderia ter mobilizado outras vezes o teorema em ação errôneo, mas não o mobilizou, indicando certa instabilidade do teorema. Nos próximos encontros, com a resolução de outras equações com incógnitas no segundo membro da igualdade, pode-se verificar essa inferência.

Emanuela cometeu alguns erros ao resolver três equações do quarto encontro. Mobilizou o teorema em ação errôneo **T2.1:**$ax = b \Rightarrow x = b - a$, na primeira equação desse encontro. No quinto encontro cometeu erros ao resolver quatro equações. Mobilizou novamente o teorema em ação **T2.1,** ao resolver a segunda equação do quarto encontro, e ainda mobilizou o teorema em ação falso **T2.2:**$ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{-a}$ na mesma equação. Quase todas as equações acabam chegando à forma $ax = b, com\ a \neq 0$, caso em que poderia ter sido mobilizado os teoremas em ação **T2.1** e **T2.2**; no entanto, eles foram mobilizados somente nessas duas equações. Emanuela mobilizou duas vezes o teorema em ação falso **T4.1** $ax = bx + c \Longrightarrow ax + bx = c$, nas sexta e oitava equação do quinto encontro. E ainda cometeu dois erros na transposição de termos independes, em que um erro foi modelado pelo teorema em ação errôneo **T3.1**$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$, mobilizado uma única vez na sétima equação do quinto encontro. Os erros na transposição incorreta de termos podem estar relacionados à quantidade de termos das equações. Por conta disso, para o próximo encontro propusemos algumas equações com vários termos.

Para continuar as análises dos encontros do ano de 2012, como foram propostas atividades distintas para cada sujeito, iremos prosseguir com a análise das atividades separando-a por aluna. Primeiramente, vamos analisar as atividades de Bianca.

4.2. PRODUÇÃO DE BIANCA

Vamos dividir a análise das produções de Bianca em duas etapas: inicialmente fazemos a identificação dos teoremas em ação mobilizados pela aluna nas atividades sobre equações do 1º grau e, em seguida, procedemos a uma análise desses dados em termos da análise de erros, buscando identificar e analisar os erros e sua superação.

4.2.1 Teoremas em Ação Mobilizados por Bianca

Para o sexto encontro, o primeiro de 2012, elaboramos, para Bianca, uma lista com algumas equações um pouco mais complexas que as propostas nos encontro anteriores. Dessa vez, os coeficientes são frações ou números inteiros e, em grande parte, as incógnitas estão em ambos os membros da equação ou apenas no segundo, casos em que foi mobilizado o teorema em ação falso **T4.1**. Propusemos essa lista para investigar a estabilidade desse teorema em ação errôneo e ainda verificar se a aluna comete outros tipos de erros, ao resolver outros tipos de equações.

As equações propostas foram as seguintes:

1) $\frac{x}{8} = 3$

2) $15 - x = 5(x + 3)$

3) $1 = \frac{1}{4}(x - 8)$

4) $\frac{2}{3}(x - 1) = -9$

5) $12 = -16x$

6) $3(5 - x) - 5 = 7 + 2(4 + x)$

7) $\frac{1}{2}(x - 4) = 10 - \frac{3}{2}(x + 2)$

8) $\frac{3}{2}(x - 4) = 2 - 14$

9) $3 - 4(x + 3) = x + 2$

Nesse encontro, Bianca resolveu sem erros apenas as duas primeiras equações, resolveu três com alguns erros, não resolveu três equações e interrompeu a resolução de outra. As três equações que a aluna não resolveu foram a quarta, sétima e oitava e a que parou de resolver foi a terceira. Todas essas equações contêm frações, ou seja, para resolvê-las é preciso conhecer alguns conceitos sobre frações, principalmente realizar operações com frações. As três equações que Bianca resolveu com alguns erros foram a quinta, sexta e nona. Investiguemos os erros dessas três equações.

Ao resolver a quinta equação, ela comete o seguinte erro.

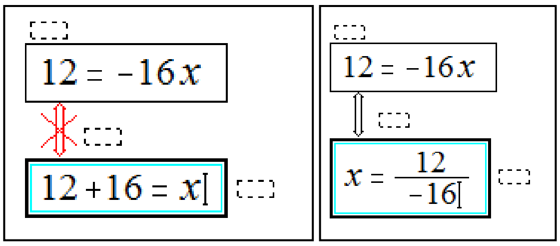
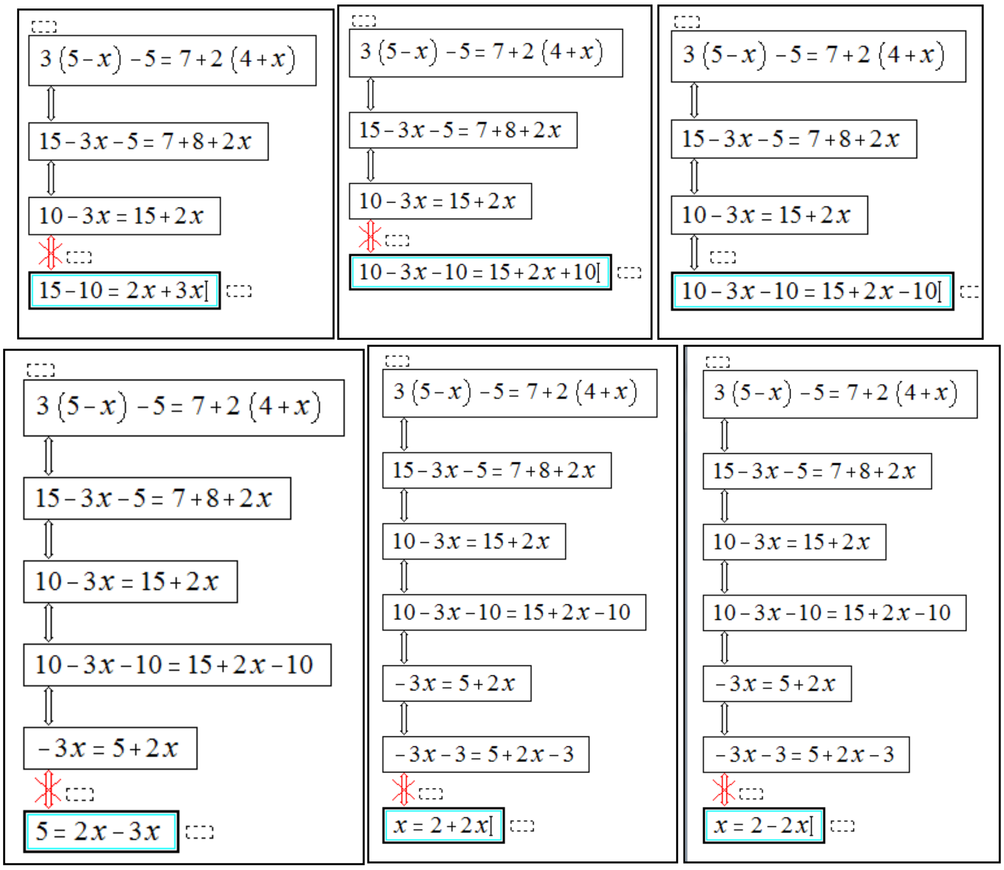


Figura 18 – Resolução, por Bianca, da equação $12 = -16x$
Fonte: *Aplusix*

Esse erro pode ser modelado pelo teorema em ação errôneo $b = ax \Rightarrow b - a = x$, e esse mesmo teorema poderia ter sido mobilizado ao resolver a equação $9 = 3(x - 1)$ (oitava equação do quinto encontro). Nota-se que esse teorema é o **T2.1:**$ax = b \Rightarrow x = b - a$, trocando primeiro e segundo membros. Como temos apenas essas duas equações resolvidas, em que a incógnita está somente no segundo membro da igualdade, as separamos em dois teoremas para verificar se esse fator pode ser um dos motivos dos erros.

Vejamos os procedimentos usados pela aluna ao resolver a equação $3(5 - x) - 5 = 7 + 2(4 + x)$, sexta equação.



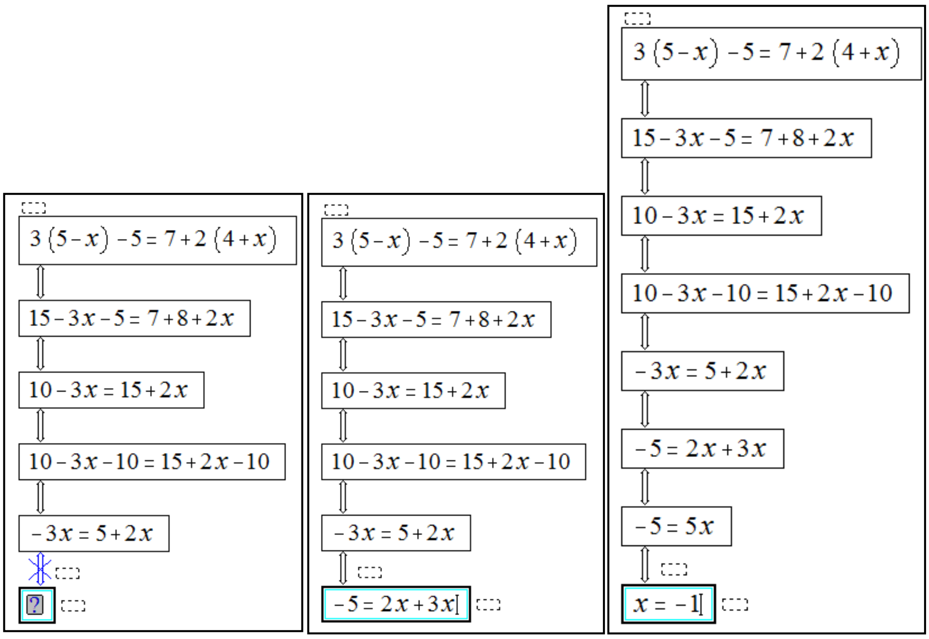


Figura 19 – Resolução, por Bianca, da equação $3(5-x)-5=7+2(4+x)$
Fonte: Aplusix

Durante a resolução dessa atividade, Bianca nos chama, pois não estava conseguindo interpretar seus erros, e então começamos a discutir com ela sua resolução. Observemos alguns trechos desse diálogo.

> ***Bianca****: Por que está errado?*
> ***Pesquisadora****: O que você fez para tirar o 15 daqui?*
> *Pausa*
> ***Bianca****: Passei para cá.*
> ***Pesquisadora****: Tirou o 15 desse lado. O que você tem que fazer desse outro lado para manter a igualdade? Se eu tiro 15 daqui, o que eu tenho que fazer desse outro lado?*
> *Pausa sem falas.*
> ***Pesquisadora****: Lembra, em equação tudo o que você tem que fazer de um lado você tem que fazer do outro lado para manter a igualdade. Você queria tirar o 15 daqui, o que você fez, você tirou o 15, somando com -15, certo?*
> ***Bianca****: Hã...hã.*
> ***Pesquisadora****: O que você tem que fazer do outro lado?*
> *Pausa sem falas.*
> ***Bianca****: Não sei, é só passar o 15 positivo.*

Nesse momento, tentando ajudá-la a resolver a equação, acabamos influenciando no processo de resolução, pois, como se observa nas sequências de imagens (Figura 19), ela acaba tentando usar o princípio aditivo para resolver a equação, e essa foi a única vez em que a aluna usa o princípio da equivalência para resolver uma equação.

Vejamos outro trecho da conversa: quando questionada sobre como fará para resolver a equação, e então responde que tem que “tirar o 10”. Foi perguntado como ela fará para “tirar” o dez do primeiro membro da igualdade.

> **Bianca**: Tiro 10.

> **Pesquisadora**: O que você vai fazer do outro lado para manter a igualdade?
> **Bianca**: Tirar o 15?
> **Pesquisadora**: Não, você tirou quanto daqui?
> **Bianca**: Tirei 10.
> **Pesquisadora**: Você tirou 10 daqui, não foi? O que você tem que fazer desse lado?
> **Bianca**: Tirar o 15, ou colocar o 10?
> **Pesquisadora**: Se desse lado você tirou 10, você tem que fazer a mesma coisa do outro lado, para manter a igualdade, senão você está mexendo na equação. Entendeu?
> **Bianca**: É isso que eu...acho difícil...a equação é muito grande.
> **Pesquisadora**: Então, você tem a equação aqui, você tirou o 10 daqui, assim para manter a igualdade o que você faz de um lado você tem que fazer do outro, então você tirou 10, o que você vai fazer do outro lado? Pausa. Tirar o 10 também. Pensa em partes, se você acha que ela está muito grande.
> **Bianca**: Mas é isso...dai eu fico perdida.

Nesse trecho, juntamente com os passos da resolução, fica evidente que a aluna tem dificuldades em atribuir significado ao sinal de igualdade, não compreendendo o princípio da equivalência. Observando a não compreensão dos procedimentos durante a conversa, fornecemos algumas respostas, o que acabou reforçando nossas interferências na resolução da atividade.

Podemos inferir, tanto pela quantidade de erros quanto pela fala dela, que o "tamanho" da equação pode ser um causador de dificuldade, para a aluna. Ela tenta várias estratégias e, quando não obtém êxito, muda de estratégia, até conseguir resolver, cometendo assim vários erros e só consegue resolver a equação com nossa ajuda.

Em várias falas, fica claro o uso do procedimento de transposição de termos para resolver equações, por exemplo, faz o uso das frases "passei para cá" e "passa ele negativo". O uso mecânico desse procedimento pode ser um dos fatores que contribuíram para os erros. De acordo com Kieran (1995), quando se usa esse procedimento sem ter claros os princípios de equivalência, isso pode gerar vários erros, principalmente em equações com vários termos, como foi o caso da equação analisada.

Modelamos somente os teoremas em ação errôneos que não estão ligados a erros no uso do princípio aditivo, pois essas regras errôneas foram usadas para resolver essa equação e foram usadas, talvez, somente por influência nossa.

Na quarta imagem da Figura 19, Bianca cometeu dois erros: um ao transpor o (*-3x*) para o segundo membro da igualdade e, simultaneamente, outro erro ao transpor o *5* para o primeiro membro da equação. Esses dois erros podem ser modelados por um único teorema em ação errôneo $ax = bx + c \Longrightarrow c = bx + ax$. Esse é o primeiro caso em que ela comete um erro de transposição do termo independente e é a primeira vez em que transpôs a incógnita para o segundo membro. Não conseguindo identificar seu erro, Bianca apaga essa etapa e tenta outra estratégia, também errônea. Nesse momento, questionamos sobre a retirada do três e ela responde:

> ***Bianca****: Para isolar o x.*
> *Pausa sem falas.*
> ***Pesquisadora****: Mas quando você resolver desse lado da equação, -3x-3, quanto vai dar? Você vai conseguir isolar o x assim?*
> ***Bianca****: Vai.*
> *Pausa sem falas.*
> ***Pesquisadora****: Quando você resolve -3x-3, vai dar...?*
> *Pausa.*
> ***Bianca****: Nem eu estou entendo o que é que eu fiz.*
> *Pausa.*

Fica assim evidente que para a aluna, $ax - a = x, para\ \forall a \neq 0$.

Como ela só conseguiu concluir a atividade com nossa ajuda e com muita influência nos procedimentos, não podemos afirmar que os teoremas em ação mobilizados estão estáveis. Para poder verificar a consistência desses teoremas seria preciso mais atividades.

O erro cometido na última equação foi um erro referente à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, erro cometido essa única vez.

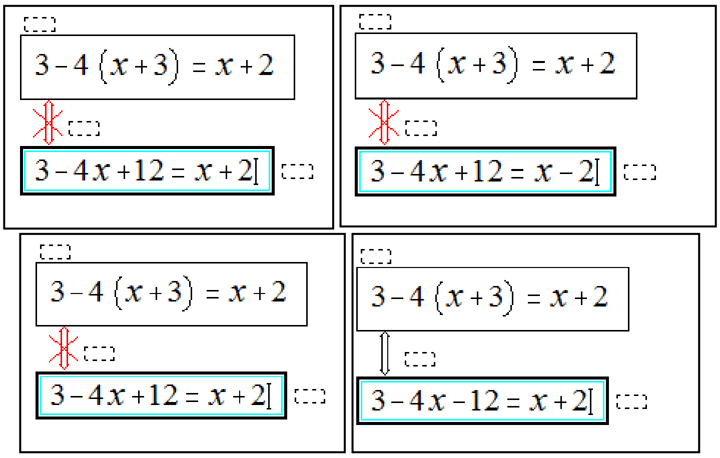


Figura 20 – Resolução, por Bianca, da equação $3 - 4(x + 3) = x + 2$
Fonte: Aplusix.

Uma dificuldade que não está diretamente relacionada à resolução de equações, mas que acabou influenciando em nosso estudo, foram as operações com frações. Vimos que das nove atividades propostas nesse encontro, a aluna não resolveu três equações e parou de resolver uma, e todas elas envolviam operações com frações. Diante dessas dificuldades em resolver operações com frações, elaboramos uma sequência para trabalharmos as propriedades e operações com frações e, somente depois, prosseguir com o nosso estudo com equações.

Bianca trabalhou com essas atividades no sétimo e oitavo encontro. Pretendíamos realizar mais encontros, para poder trabalhar com mais equações e assim verificar a estabilidade dos teoremas em ação mobilizados nos encontros anteriores. Como não conseguimos marcar mais encontros, para o nono e último encontro, que aconteceu quase três meses após o oitavo encontro, resolvermos entregar uma lista com dez equações para que ela resolvesse usando papel e lápis.

As equações foram as seguintes:

1) $15 = -10x$

2) $5 - 2x = 7 + 3x$

3) $-4x = 14 + 3x$

4) $7 = 3(2 - 2x)$

5) $-3(x + 1) = 6 + 3$

6) $6 = 2(x + 3)$

7) $2 - 5(x + 2) = 4 + x$

8) $2(3 - x) + 4 = 6 + 2(x - 5)$

9) $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$

10) $\frac{3x}{2} = -3$

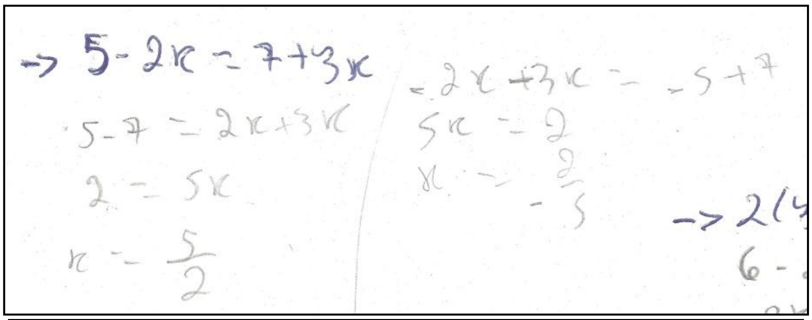
Elaboramos essa lista com equações semelhantes àquelas nas quais a aluna cometeu algum tipo de erro durante a resolução. São equações com incógnitas em ambos os lados ou apenas no segundo membro da equação e as duas últimas equações, mais simples, com os coeficientes fracionários.

Optamos por escolher que a aluna resolvesse as equações usando o papel e lápis, pois queríamos verificar a estabilidade de alguns teoremas mobilizados, pela aluna, durante todo o processo de experimentação. Verificar como ela resolveria as equações sem as retroações do *software* Aplusix, pois o que se espera é que os alunos criem certa autonomia e não fiquem dependentes das retroações do *software* para analisar os seus erros. No entanto, esse processo é contínuo e precisaria de um tempo maior para obter mais resultados. Cabe ressaltar que essa lista poderia ter sido resolvida usando o Aplusix em modo de "teste".

Ao resolver as equações, Bianca, na angústia de saber se sua resolução estava correta, nos perguntava se ela estava correta. Dizendo ainda que, com o Aplusix, ela tinha esse retorno, indicando uma dependência com as retroações fornecidas pelo *software*. Como ela não conseguia prosseguir com as atividades, resolvemos informá-la apenas se o seu processo estava correto ou não, não informando em qual etapa estava o erro. O Aplusix informa em qual etapa está o erro, e decidimos não fornecer essa informação para podermos analisar se a aluna conseguiria identificar entre as etapas de resolução o seu erro, ajudando-a a criar alguma autonomia.

Bianca resolveu todas as equações da lista e cometeu algum erro ao resolver três equações: a segunda, sétima e oitava equação.

Vejamos a resolução da segunda equação, em que a aluna cometeu um erro aritmético e um algébrico, e, depois na segunda tentativa, ela corrige os dois erros.



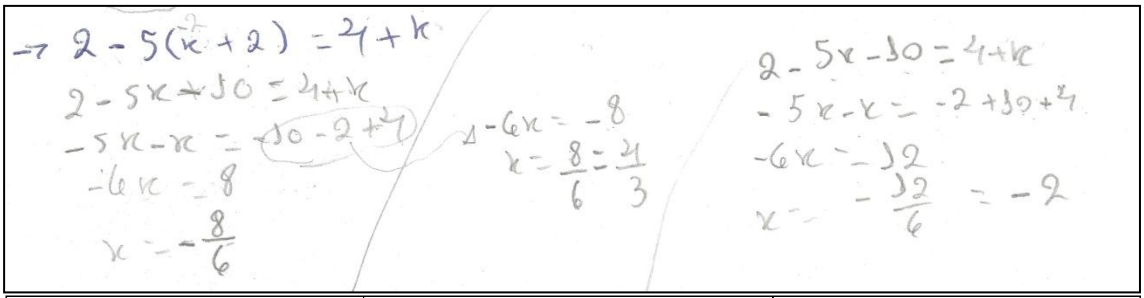
$5 - 7 = 2x + 3x$ $2 = 5x$ $x = \frac{5}{2}$	$-2x + 3x = -5 + 7$ $5x = 2$ $x = \frac{2}{-5}$

Figura 21 – Resolução, por Bianca, da equação $5 - 2x = 7 + 3x$
Fonte: Dados da pesquisa

Efetua a soma de *5 + (-2)* e erra ao transpor o 5 para o outro membro da equação, o que pode ser modelado pelo teorema em ação errôneo $b = ax \Rightarrow x = \frac{a}{b}$. Foi a primeira vez que a aluna mobilizou esse teorema e ele poderia ter sido mobilizado outras duas vezes, nos encontros anteriores, ao resolver a oitava equação do quinto encontro ($9 = 3(x - 1)$), a quinta equação do quinto encontro ($12 = -16x$) e ainda a primeira equação desse encontro. No entanto, esse é o segundo erro com equações desse tipo $b = ax$, e o primeiro foi com a equação $12 = -16x$.

Para conseguir resolver corretamente a sétima equação, Bianca fez três tentativas. Na primeira tentativa, ela transpõe corretamente a incógnita *x* para o primeiro membro da igualdade, mas erra ao transpor o número (*-10*) que estava no primeiro membro para o segundo, e em seguida comete um erro ao efetuar a soma dos termos independentes. Esse erro de transposição pode ser considerado um caso particular do teorema em ação **T3.1:**$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$, só que havia dois termos independentes no primeiro membro da igualdade e a aluna erra a transposição de apenas um termo.

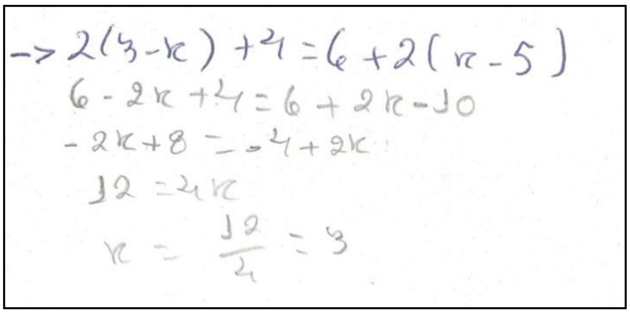
Na segunda tentativa, ela corrige apenas o erro aritmético, e como informamos que sua resolução não estava correta e não dissemos em qual etapa estava o erro, ela conseguiu identificar somente o erro aritmético. Na terceira etapa, ela consegue fazer as transposições corretamente, conseguindo chegar ao resultado final.



$2-5x-10=4+x$	$2-5x-10=4+x$	$2-5x-10=4+x$
$-5x-x=-10-2+4$	$-5x-x=-10-2+4$	$-5x-x=-2+10+4$
$-6x=8$	$-6x=-8$	$-6x=12$
$x=-\frac{8}{6}$	$x=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$	$x=-\frac{12}{6}=-2$

Figura 22 – Resolução, por Bianca, da equação $2-5(x+2)=4+x$
Fonte: Dados da pesquisa

Na oitava equação, temos o segundo caso em que a aluna preferiu fazer a transposição da incógnita para o segundo membro da igualdade, e aqui ela o faz corretamente. O erro na resolução dessa equação foi um erro de adição, em que *4+6* resultou em *8*. Como ela não solicitou que conferíssemos a sua resolução, ela finaliza a atividade sem corrigir o erro aritmético.



$$6-2x+4=6+2x-10$$
$$-2x+8=-4+2x$$
$$12=4x$$
$$x=\frac{12}{4}=3$$

Figura 23 – Resolução, por Bianca, da equação $2(3-x)+4=6+2(x-5)$
Fonte: Dados da pesquisa

No decorrer das análises das resoluções das equações, modelamos alguns possíveis teoremas em ação mobilizados pela aluna, alguns presentes na lista de teoremas listados *a priori* e outros, não. Obtivemos assim uma lista com os possíveis teoremas em ação mobilizados pela aluna.

A lista é composta de nove teoremas em ação, entre eles teoremas corretos e errôneos. Associamos cada teorema em ação falso a seu teorema em ação verdadeiro correspondente, pois percebemos que a aluna corrige seu erro mobilizando o teorema em ação correto.

Quadro 4 - Lista dos possíveis teoremas em ação– corretos e errôneos - mobilizados por Bianca

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^*$
T3: $ax + b = c \Rightarrow ax = c - b$
T3.1:$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$ (uma variação)
T4:$ax = bx + c \Longrightarrow ax - bx = c$
T4.1:$ax = bx + c \Longrightarrow ax + bx = c$ (duas variações)
T5:$b = ax \Rightarrow x = \frac{b}{a}$
T5.1:$b = ax \Rightarrow b - a = x$
T5.2:$b = ax \Rightarrow x = \frac{a}{b}$
T6:$ax = bx + c \Longrightarrow -c = bx - ax$
T6.1:$ax = bx + c \Longrightarrow c = bx + ax$

Para elaborar essa lista, levamos em consideração os teoremas em ação e algumas variações, por exemplo, o teorema **T3.1:**$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$, foi mobilizado ao resolver a equação $2 - 5(x + 2) = 4 + x$ (sétima equação do nono encontro), mas havia dois termos independentes no primeiro membro da igualdade ao invés de um, como o modelado *a priori* pelo **T3.1**. O erro foi realizar a transposição de um termo independente do primeiro membro para o segundo sem alterar o sinal; por isso, o modelamos como sendo do mesmo tipo do modelado pelo teorema **T3.1**. Esse mesmo fato aconteceu com o teorema em ação **T4.1:**$ax = bx + c \Longrightarrow ax + bx = c$, que foi mobilizado duas vezes, uma vez ao resolver a equação $4(2 - x) - 6 = x + 12$ e outra ao resolver a equação $9 = 3(x - 1)$, ambas as equações do quinto encontro. Em ambos os casos, a aluna, ao fazer a transposição da incógnita que está no segundo membro da igualdade, não faz a troca do sinal. Só que no primeiro caso o primeiro membro da equação tem também um termo independente e no segundo, no lugar da incógnita, tem-se somente um termo independente. Então, por ser o mesmo tipo de erro modelado pelo teorema **T4.1**, consideramos para a modelagem e contagem dos erros como sendo o mesmo teorema.

4.2.2 Unidades de Análise: Bianca

Após a identificação dos teoremas em ação, foi realizado o agrupamento das equações por tipos de equações, que são as unidades de análise, obtendo assim sete grupos de equações. O agrupamento foi realizado levando em consideração os erros encontrados durante a resolução das equações e a forma da equação, pois acreditamos que cada tipo de equação influencia no tipo de erro. Levamos em consideração os erros cometidos, pois, por exemplo, para equações classificadas na unidade de análise 3, houve um erro e nas equações classificadas na unidade de análise 2, não houve erros, o que nos levou a separá-las em duas unidades.

O Quadro 5 contém as unidades criadas e as equações presentes em cada unidade, considerando a forma inicial da equação. Sejam $a, b, c \; e \; d \in \mathbb{Z}^*$.

Quadro 5 – Unidades de Análise, atividades Bianca

Unidade 1 $\mathrm{ax} + \mathrm{b} = \mathrm{c}$	• $3\mathrm{x} - 4 = 7$ • $2\mathrm{x} + 4 = 8$ • $7x + 3 = 3$
Unidade 2 $\mathrm{ax} = \mathrm{b}$	• $5\mathrm{x} = 10$ • $-20\mathrm{x} = 8$
Unidade 3 $b = ax$	• $12 = -16x$ • $15 = -10x$
Unidade 4 $\frac{ax}{b} = c, com\ b \neq 1$	• $\frac{x}{4} = 9$ • $\frac{x}{5} = 3$ • $\frac{x}{8} = 3$ • $\frac{2x}{3} = -6$ • $\frac{3x}{2} = -3$
Unidade 5 $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}, com\ \ b, d \neq 1$	• $\frac{-x}{6} = \frac{4}{3}$ • $\frac{-5x}{2} = \frac{5}{3}$ • $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$
Unidade 6 Equações com incógnitas em apenas um membro da equação	• $9 = -3(x - 1)$ • $7 = 3(2 - 2x)$ • $-3(x + 1) = 6 + 3$ • $6 = 2(x + 3)$
Unidade 7 Equações com incógnitas em ambos os membros da equação	• $2(\mathrm{x} + 1) + 3 = \mathrm{x} + 4$ • $-2(3 + \mathrm{x}) = \mathrm{x} + 1$ • $3(x + 2) = x - 2$ • $4(2 - x) - 6 = x + 12$ • $15 - x = 5(x + 3)$ • $3 - 4(x + 3) = x + 2$ • $3(5 - x) - 5 = 7 + 2(4 + x)$ • $5 - 2x = 7 + 3x$ • $-4x = 14 + 3x$ • $2 - 5(x + 2) = 4 + x$ • $2(3 - x) + 4 = 6 + 2(x - 5)$

Separadas as unidades de análise, elaboramos um quadro relacionando os teoremas em ação anteriormente modelados com as unidades. A relação estabelecida entre essas duas entradas foi a seguinte: quantidade de teoremas em ação que poderiam ser mobilizados (n) e quantidade de teoremas em ação efetivamente mobilizados pela aluna (m). Para indicar essas possibilidades, usamos o símbolo $\frac{m}{n}$. Por exemplo, na **Unidade 7** a aluna poderia mobilizar três vezes os teoremas em ação **T6.1** e ela o mobilizou somente uma vez, assim indicamos com essa razão pela fração $\frac{1}{3}$.

Quadro 6: Unidades/Indicadores - Bianca

Indicadores	**T3**	**T3.1**	**T4**	**T4.1**	**T5**	**T5.1**	**T5.2**	**T6**	**T6.1**
Unidade 1 $ax + b = c$	$\frac{3}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 2 $ax = b$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 3 $b = ax$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 4 $\frac{ax}{b} = c, com\ b \neq 1$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 5 $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}, com\ \ b, d \neq 1$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 6 Equações com incógnitas em apenas um membro da equação	$\frac{1}{1}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 7 Equações com incógnitas em ambos os membros da equação	$\frac{8}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{1}{3}$

Temos que, dentre as 11 equações com incógnitas em ambos os membros da igualdade, Bianca optou por fazer a transposição da incógnita que estava no primeiro membro para o segundo em três equações: na segunda (Figura 21) e oitava (Figura 23) equação do nono encontro e na sexta equação (Figura 19) do sexto encontro. Então havia três possibilidades de mobilizar o teorema em ação **T6.1:** $ax = bx + c \Longrightarrow c = bx + ax$; no entanto, ele foi mobilizado apenas uma vez: na sexta equação do sexto encontro.

Para realização desse Quadro 6, consideramos também as possíveis variações dos teoremas em ação para fazer a contagem. Por exemplo, para fazer a contagem das possibilidades de mobilização do teorema **T3.1:**$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$, consideramos todas as equações que tinham ao menos um termo independente no primeiro membro e que foi feita a transposição para o segundo membro da igualdade. Assim, inferimos que o teorema em ação **T3.1** tinha a possibilidade de ser mobilizado em 12 equações e somente em um caso foi feita a transposição sem a inversão.

Já o teorema em ação **T4.1:**$ax = bx + c \Longrightarrow ax + bx = c$ (tinha ao menos uma incógnita no segundo membro e transpôs para o primeiro membro da igualdade) tinha dez possibilidades e fez a transposição sem alterar o sinal em duas equações. Em um caso não mobilizou o teorema **T4**; usou o princípio aditivo para resolver.

Os teoremas em ação **T5.1:**$b = ax \Rightarrow b - a = x$ e **T5.2:**$b = ax \Rightarrow x = \frac{a}{b}$, tinham, cada um, cinco possibilidades de serem mobilizados e foram mobilizados cada um, uma única vez.

De forma geral, os erros de Bianca poderiam ser agrupados em erros ao transpor (termo independente e incógnita) para o outro membro da equação, conservando o mesmo sinal, entrariam nesse grupo os teoremas em ação falsos **T3.1**, **T4.1** e **T6.1** e erros ligados à transposição envolvendo a multiplicação e divisão; nesse caso, os teoremas em ação errôneos **T5.1** e **T5.2**.

A maior incidência de teoremas em ação errôneos foi encontrada na Unidade 7, cujas equações têm incógnitas em ambos os membros da equação. Com exceção do teorema **T4.1**, que foi mobilizado duas vezes, os outros teoremas em ação errôneos foram mobilizados uma única vez, o que mostra instabilidade nos teoremas.

Acreditamos que houve uma evolução no decorrer dos encontros. Se observarmos, por exemplo, o processo de resolução das atividades do sexto encontro, com a do último, temos equações semelhantes e com menos erros no último encontro e, ainda, equação em que foram cometidos erros, nos encontros anteriores e que, nesse último, foi resolvida sem erros. Por exemplo, temos a sexta equação do sexto encontro, que é semelhante a oitava equação do nono encontro: comparando os erros cometidos ao resolver essas duas equações, percebemos uma superação em alguns erros, que pode estar relacionada ao fato de as atividades terem sido resolvidas no Aplusix e, as retroações do *software* podem ter ajudado na desestabilização desses erros mobilizados.

4.3 PRODUÇÃO DE EMANUELA

A análise das produções de Emanuela também foi feita em duas etapas: inicialmente fazemos a identificação dos teoremas em ação mobilizados pela aluna nas atividades sobre equações do 1º grau e, em seguida, procedemos a uma análise desses dados em termos da análise de erros, buscando identificar e analisar os erros e sua superação.

4.3.1 Teoremas em Ação Mobilizados por Emanuela

Emanuela havia cometido alguns erros, nos encontros passados: erros na transposição incorreta de termos (independente e incógnita) para o outro membro da equação, conservando o mesmo sinal, e entrariam nesse grupo os teoremas em ação falsos **T3.1** e **T4.1**. Também apresentou erros na resolução incorreta de equações do tipo $ax = b, com\ a \neq 0$, modelados pelos teoremas em ação errôneos **T2.1** e **T2.2.**

Emanuela faltou ao primeiro encontro de 2012. Então, para o sétimo encontro, o segundo de 2012, orientamos para que ela pedisse um "teste" da segunda "família" de equação do Aplusix. Ressalta-se que, em modo de "teste", a aluna não tem as retroações do *software* que, ao término do "teste" mostra quantas equações foram resolvidas corretamente e pergunta, no caso de erros, se o usuário deseja fazer a correção do "teste". Sem as retroações do *software*, é possível verificar como a aluna toma suas decisões e realiza o controle da resolução da atividade. Os controles é que permitem ter a segurança no caminho escolhido, optando por continuar ou não naquele caminho. Assim, consegue-se analisar se a aluna sozinha, sem as retroações do Aplusix, mobiliza, ou não, os teoremas em ação mobilizados nos encontros anteriores. A "família" escolhida tem equações com coeficientes inteiros, frações ou decimais.

A lista gerada pelo Aplusix foi a seguinte:

1) $1{,}7x + 1 = 0$

2) $10x - 7 + 10x + 9 = 0$

3) $-x = 0$

4) $1{,}4x + 2{,}7 = 0$

5) $x - 8 + x - 2 = 0$

6) $-\frac{1}{6}x = 0$

7) $8x + 6 - 7x + 2 = 0$

8) $0{,}7x + 2{,}5 = 0$

9) $1{,}4x + 6 = 0$

10) $3x + 3 = -3x + 9$

Nesse encontro, Emanuela resolveu corretamente apenas três equações: a terceira, sexta e décima. Usando a opção “Correção de teste”, a aluna corrigiu as sete equações. Um dado interessante é que ela demorou 13min49s para fazer o “teste” e para fazer a correção, demorou 51min47s, o que indica que ela tentou corrigir seus erros a partir das retroações do *software*.

Emanuela cometeu um mesmo erro em todas as sete equações: adicionou termos não semelhantes. Dividindo as equações em quatro grupos, temos: três equações em que todos os coeficientes são números inteiros; duas equações em que um dos coeficientes é um número inteiro e o outro são um número decimal e duas equações, em que ambos os coeficientes são números decimais. Como os erros foram os mesmos, apresentaremos um exemplo de cada tipo de equação.

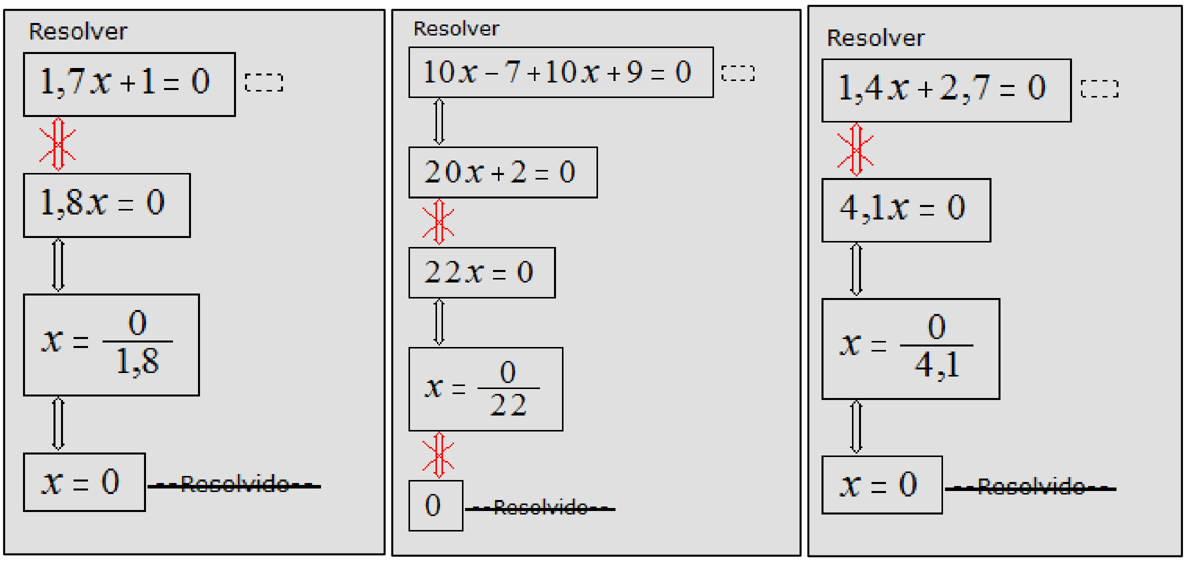


Figura 24 – Resolução, por Emanuela, das equações $1{,}7x + 1 = 0$; $10x - 7 + 10x + 9 = 0$ e $1{,}4x + 2{,}7 = 0$
Fonte: Aplusix

Nota-se que em todos os casos foi mobilizado o teorema em ação errôneo **T1.1:**$ax + b = c \Rightarrow (a + b)x = c$, pertencente à lista dos teoremas modelados *a priori*. No caso em que um coeficiente é um número inteiro e o outro um decimal, ela também cometeu um erro ao somar os coeficientes, o qual foi cometido nas duas equações desse grupo.

Ao pedir a correção do “teste” (nesse momento a aluna tem as retroações do *software*), ela cometeu alguns erros ao refazer as sete equações. Corrigiu as equações sem cometer erros na quinta, sétima, oitava e nona equação e cometeu erros aritméticos na primeira e quarta equação, relacionados a operações com números racionais. Ela cometeu apenas um erro algébrico na segunda equação, omite incógnita x deixando somente o coeficiente 10. Além disso, erra ao transpor os termos independentes para o segundo membro da equação, mantendo-os com o mesmo sinal. Emanuela já havia cometido um erro de transposição incorreta de termos independentes ao resolver a equação $4(2-x)-6=x+12$ (sétima equação do quinto encontro), erro esse que foi modelado pelo teorema em ação **T3.1:**$ax+b=c \Rightarrow ax=c+b$. No caso da segunda equação, há mais termos no primeiro membro e $c=0$.

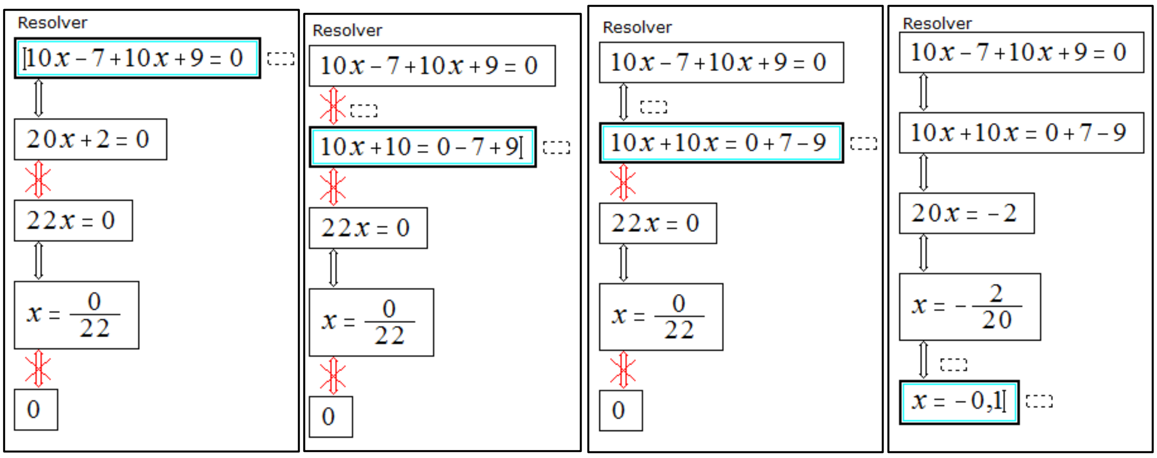


Figura 25 – Resolução, por Emanuela, da equação $10x-7+10x+9=0$
Fonte: Aplusix

Nesse encontro, Emanuela mobilizou dois teoremas em ação errôneos, o teorema **T1.1**, mobilizado sete vezes, e o teorema **T3.1**, mobilizado pela segunda vez, a primeira vez foi no quinto encontro (sétima equação). Diante disso, para o oitavo encontro, último do qual Emanuela participou, ela resolveu uma lista da mesma "família" de equações, mas agora em modo de "aprendizagem", ou seja, com retroações. Ela escolheu em modo de "aprendizagem", pois não conseguiu um bom desempenho no "teste" resolvido no sétimo encontro. Quando se pedem listas de exercícios de uma mesma família, elas terão as mesmas características, portanto, a lista de equações, gerada automaticamente pelo *software*, desse encontro terá equações com as mesmas características do encontro anterior. O que nos possibilitou verificar se os teoremas mobilizados anteriormente foram mobilizados novamente.

A lista gerada pelo Aplusix foi a seguinte:

1) $\frac{8x}{3}=5$

2) $2{,}5x-1{,}9=0$

3) $x+1-9x-5=0$

4) $-\frac{9}{5}x=-\frac{1}{9}$

5) $16x+8+16x+2=0$

6) $19x - 7 + 19x + 6 = 0$

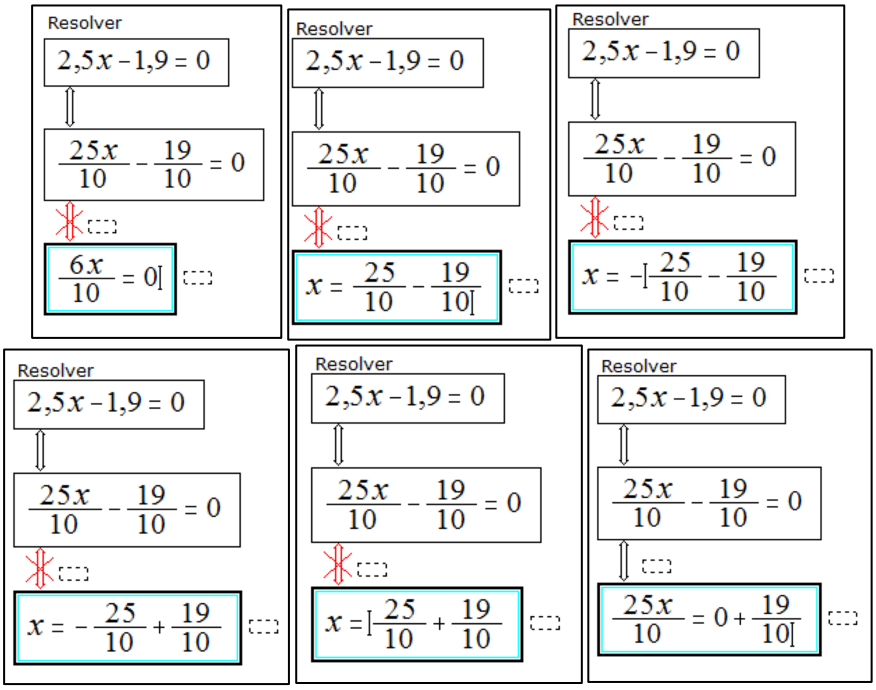
7) $\frac{3}{9} = \frac{1}{2}x$

8) $2x = 8x - 18$

9) $5x + 6 = -2x + 1$

10) $\frac{8x}{5} = 3$

Nesse encontro, Emanuela resolveu com erros apenas duas equações, a segunda e quarta. Vejamos primeiramente a resolução da segunda equação.



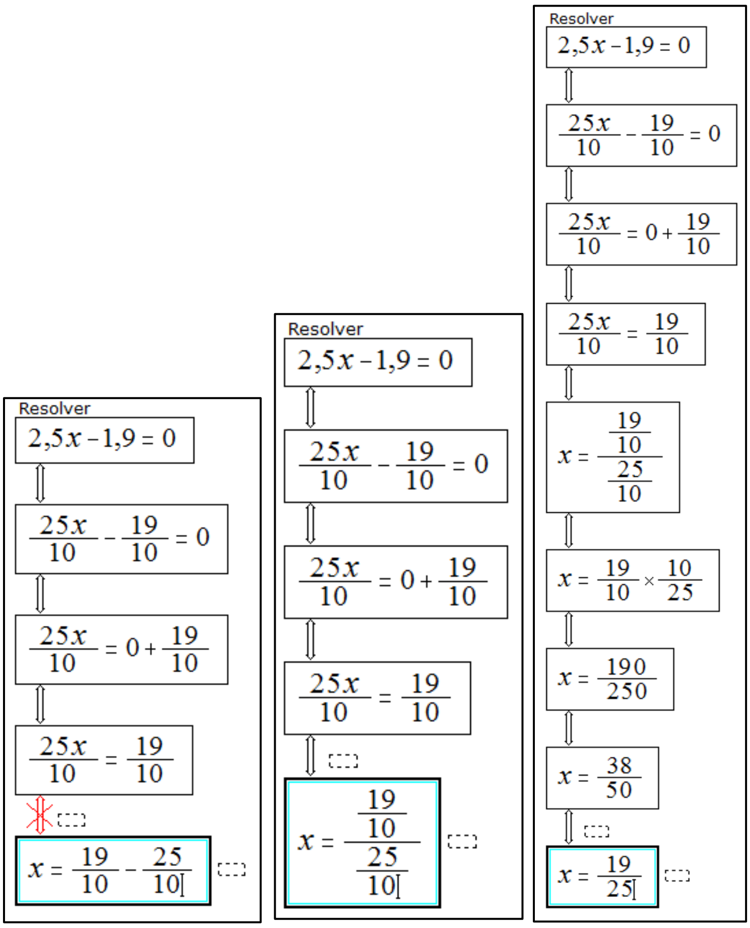


Figura 26 – Resolução, por Emanuela, da equação 2,5x − 1,9 = 0
Fonte: Aplusix

Observa-se que a aluna cometeu vários erros no decorrer do processo de resolução. Na primeira imagem, ela fez, novamente, a adição de termos não semelhantes, só que, nesse caso, ela transforma primeiramente os coeficientes fracionários em decimais, para depois fazer a soma. Esse erro foi modelado pelo teorema em ação **T1.1:**$ax + b = c \Rightarrow (a + b)x = c$, nesse caso a e b são frações e $c = 0$. Ao mobilizar esse teorema, Emanuela nos chama, dizendo não saber o que tem que fazer, “Eu diminuo?”; perguntamos então o que ela achava que devia ser feito para resolver a equação, e ela disse: “Multiplico elas”. Repetimos a pergunta, e ela respondeu “Separar o x”, e então perguntamos como ela faria para “separar o *x*” e a resposta é indagativa: “Não vai ter que diminuir? Subtrair 25-19!?”. Fica assim evidenciado o quanto esse teorema em ação está arraigado, uma vez que ele foi mobilizado várias vezes, e, mesmo com as retroações do Aplusix e nossas intervenções, ela ainda continuou mobilizando o teorema.

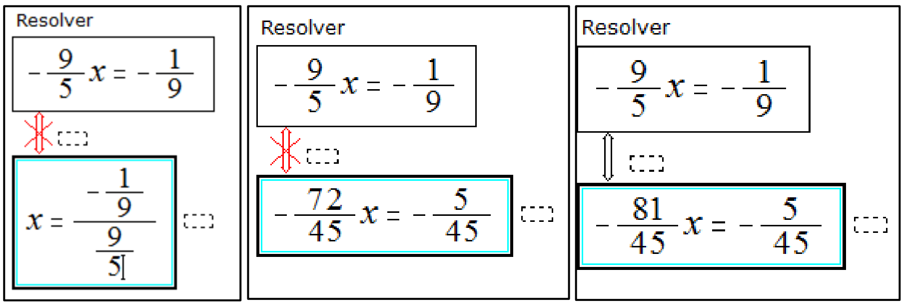
Emanuela apaga essa etapa e faz outras tentativas errôneas. Na segunda imagem da Figura 26, ela mobiliza, ao mesmo tempo, dois teoremas em ação errôneos: o teorema em ação **T3.1:**$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$, em que a e b são frações e $c = 0$, ao transpor a fração

$(-\frac{19}{10})$ para o segundo membro da equação e mobiliza o teorema em ação **T2.1:**$ax = b \Rightarrow x = b - a$, em que a e b são frações, ao transpor a fração $\frac{25}{10}$ para o segundo membro da equação. Os próximos três erros consistem de inversão dos sinais das frações.

Questionada sobre o que ela está fazendo, ela responde que estava “separando o x” e para isso ela disse que “trocou o sinal”. Então, pedimos que ela resolvesse a seguinte equação $2x - 3 = 0$, no papel, e ela o fez corretamente; orientamos assim que ela esquecesse que a equação do Aplusix tem coeficientes fracionários e que tentasse resolver novamente a equação da tela do Aplusix. Ela conseguiu resolver mobilizando o teorema em ação verdadeiro **T3.** $ax + b = c \Rightarrow ax = c - b$, em que a e b são frações e $c = 0$.

Em seguida, na sétima imagem da Figura 26, comete outro erro ao transpor a fração $\frac{25}{10}$ para o outro membro da equação, mobilizando, novamente, o teorema em ação errôneo **T2.1:**$ax = b \Rightarrow x = b - a$, em que a e b são frações. Esse mesmo teorema já havia sido mobilizado outras duas vezes, uma no quarto encontro e outra, no quinto.

Ao resolver a quarta equação, Emanuela comete três erros: um ao multiplicar dois números inteiros; um erro ao transpor a fração $(-\frac{9}{5})$, para o segundo membro da equação e outro, ao tentar dividir duas frações. O erro de transposição pode ser modelado pelo teorema em ação **T2.2**: $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{-a}$, em que a e b são frações. Esse mesmo teorema já havia sido mobilizado outra vez (quinto encontro), com coeficientes inteiros.



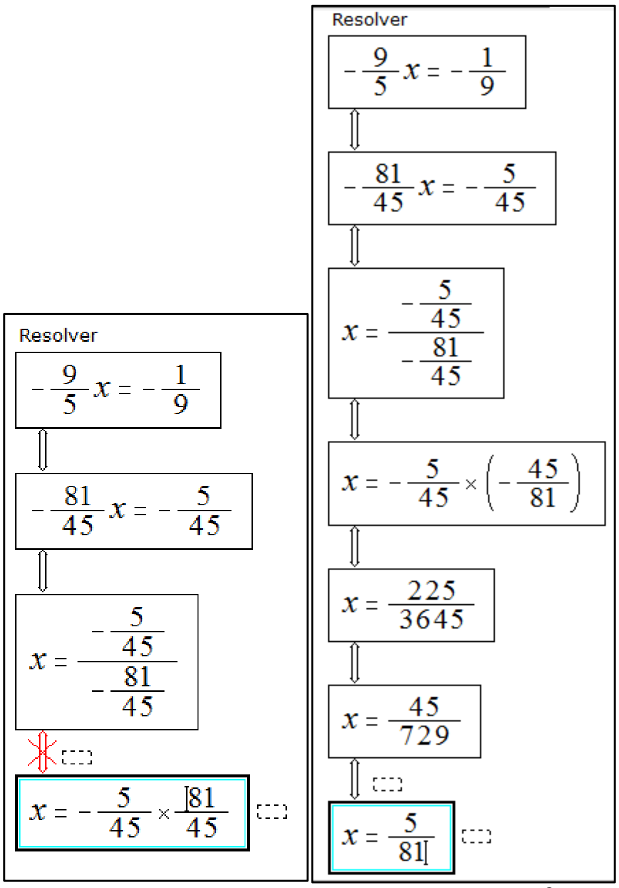


Figura 27 – Resolução, por Emanuela, da equação $-\frac{9}{5}x = -\frac{1}{9}$
Fonte: Aplusix

Na análise do processo de resolução das equações resolvidas por Emanuela, modelamos possíveis teoremas em ação mobilizados por ela, e alguns deles estavam presentes na lista de teoremas modelados *a priori* e outros, não. Obtivemos assim uma lista com os possíveis teoremas em ação mobilizados pela aluna.

A lista é composta de oito teoremas em ação, entre eles, teoremas corretos e errôneos. Associamos cada teorema em ação falso ao seu teorema em ação verdadeiro correspondente, pois percebemos que a aluna corrige seu erro mobilizando o teorema em ação correto.

Quadros 7 - Lista dos possíveis teoremas em ação – corretos e errôneos - mobilizados por Emanuela

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}^*$

T1.1: $ax + b = c \Rightarrow (a + b)x = c$

T2: $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$

T2.1: $ax = b \Rightarrow x = b - a$

T2.2: $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{-a}$

T3: $ax + b = c \Rightarrow ax = c - b$

T3.1: $ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$ (duas variações)

T4:$ax = bx + c \Longrightarrow ax - bx = c$
T4.1:$ax = bx + c \Longrightarrow ax + bx = c$ (duas variações)

Essa lista é composta de teoremas em ação e algumas variações, por exemplo, o teorema **T3.1:**$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$ foi mobilizado duas vezes: uma, ao resolver a equação $4(2 - x) - 6 = x + 12$ (sétima equação do quinto encontro) e outra, ao resolver a equação $10\text{x} - 7 + 10\text{x} + 9 = 0$ (segunda equação do sexto encontro). No primeiro caso, havia dois termos independentes no primeiro membro da igualdade ao invés de um, como o modelado *a priori* pelo **T3.1,** e no segundo caso, a existência de mais membros e com $c = 0$. O erro, em ambos os casos, foi a transposição do termo independente do primeiro membro para o segundo sem alterar o sinal, por isso modelamos como sendo do mesmo tipo que o erro modelado pelo teorema **T3.1**. Esse mesmo fato aconteceu com o teorema em ação **T4.1**: encontramos duas variações do mesmo teorema, mas, por ser o mesmo tipo de erro modelado pelo teorema **T4.1**, consideramos para a modelagem e contagem dos erros como sendo o mesmo teorema.

4.3.2 Unidades de Análise: Emanuela

Após a análise das trinta e cinco equações resolvidas nos quatro encontros analisados e da identificação dos teoremas em ação, realizamos o agrupamento por tipos de equações, que são as unidades de análise, obtendo assim seis grupos de equações. O agrupamento foi realizado levando em consideração os erros encontrados durante a resolução das equações e a forma da equação, pois acreditamos que cada tipo de equação influencia no tipo de erro. Levamos em consideração os erros cometidos, porque, por exemplo, na Unidade 4, temos equações do tipo $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{b} = \frac{cx}{d}$, pois, para a aluna, não tinha diferença se o x estivesse no primeiro ou no segundo membro da equação, o que nos levou a deixar essas equações em uma mesma unidade.

O Quadro 8 contém as unidades encontradas e as equações presentes em cada unidade, considerando a forma inicial da equação. A frase “2 vezes” foi colocada ao lado das sete equações que foram resolvidas erroneamente, no “teste”, e posteriormente foram corrigidas no modo de “Correção de teste”. Sejam $a, b, c\ e\ d\ \in\ \mathbb{R}^*$.

Quadro 8 – Unidades de Análise - Emanuela

Unidade 1 $ax + b = c$ Em que *c* pode ser igual à zero	• $3x - 4 = 7$ • $2x + 4 = 8$ • $7x + 3 = 3$ • $1{,}7x + 1 = 0$ (2 vezes) • $1{,}4x + 2{,}7 = 0$ (2 vezes) • $0{,}7x + 2{,}5 = 0$ (2 vezes) • $1{,}4x + 6 = 0$ (2 vezes) • $2{,}5x - 1{,}9 = 0$
Unidade 2 $ax = b$ Em que *b* pode ser igual à zero	• $5x = 10$ • $-20x = 8$ • $-x = 0$
Unidade 3 $\frac{ax}{b} = c, com\ b \neq 1$ e c pode ser igual à zero	• $\frac{x}{4} = 9$ • $\frac{x}{5} = 3$ • $\frac{2x}{3} = -6$ • $-\frac{1}{6}x = 0$ • $\frac{8x}{3} = 5$ • $\frac{8x}{5} = 3$
Unidade 4 $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{b} = \frac{cx}{d}$ com $b, d \neq 1$	• $\frac{-x}{6} = \frac{4}{3}$ • $\frac{-5x}{2} = \frac{5}{3}$ • $-\frac{9}{5}x = -\frac{1}{9}$ • $\frac{3}{9} = \frac{1}{2}x$
Unidade 5 Equações com incógnitas em apenas um membro da equação	• $9 = -3(x - 1)$ • $10x - 7 + 10x + 9 = 0$ (2 vezes) • $x - 8 + x - 2 = 0$ (2 vezes) • $8x + 6 - 7x + 2 = 0$ (2 vezes) • $x + 1 - 9x - 5 = 0$ • $16x + 8 + 16x + 2 = 0$ • $19x - 7 + 19x + 6 = 0$
Unidade 6 Equações com incógnitas em ambos os membros da equação	• $2(x + 1) + 3 = x + 4$ • $-2(3 + x) = x + 1$ • $3(x + 2) = x - 2$ • $4(2 - x) - 6 = x + 12$ • $3x + 3 = -3x + 9$ • $2x = 8x - 18$ • $5x + 6 = -2x + 1$

Separadas as unidades de análise, organizamos um quadro relacionando os teoremas em ação, anteriormente modelados, com as unidades de análise (Quadro 9). A relação estabelecida entre essas duas entradas foi a seguinte: quantidade de teoremas em ação que poderiam ser mobilizados e quantidade de teoremas em ação efetivamente mobilizados pela aluna.

Quadro 9: Unidades/Indicadores - Emanuela

Indicadores	T1.1	T2	T2.1	T2.2	T3	T3.1	T4	T4.1
Unidade 1 $ax + b = c$ Em que *c* pode ser igual à zero	$\frac{5}{8}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{0}{12}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 2 $ax = b$ Em que *b* pode ser igual à zero	$\frac{0}{0}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 3 $\frac{ax}{b} = c, com\ b \neq 1$ e b pode ser igual à zero	$\frac{0}{0}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 4 $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{b} = \frac{cx}{d}$ com $b, d \neq 1$	$\frac{0}{0}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 5 Equações com incógnitas em apenas um membro da equação	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{0}{10}$	$\frac{0}{10}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$
Unidade 6 Equações com incógnitas em ambos os membros da equação	$\frac{0}{7}$	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{6}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{7}$	$\frac{1}{7}$

Para a elaboração do Quadro 9, foram consideradas, para contagem, duas vezes as equações que foram primeiramente resolvidas de forma errônea, no modo de “teste”, e depois foram corrigidas no modo de “correção”, pois, ao corrigir um erro, podem-se cometer outros; logo, essas equações devem ser contadas duas vezes. Exemplo: na Unidade 1, a aluna poderia mobilizar doze vezes o teorema em ação T2 e ela assim o fez. Essa unidade contém oito equações, entre elas, quatro foram refeitas, por isso o total de doze possibilidades.

Levamos em consideração também as possíveis variações dos teoremas em ação para fazer a contagem. Por exemplo, para fazer a contagem das possibilidades de mobilização do teorema em ação **T4.1:**$ax = bx + c \Longrightarrow ax + bx = c$, consideramos todas as equações que continham ao menos uma incógnita no segundo membro e que foi feita a transposição para o segundo membro da equação. Assim, inferimos que Emanuela tinha oito possibilidades de mobilizar o teorema em ação **T4.1**, entretanto ela o mobilizou em apenas duas equações, uma pertencente à quinta unidade e outra, à sexta unidade.

Para fazer a contagem das possibilidades de ser mobilizado o teorema **T3.1.**$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$, consideramos todas as equações que continham ao menos um termo independente no primeiro membro da equação e foi feita a transposição para o segundo membro da equação. Assim, esse teorema tinha a possibilidade de ser mobilizado em 21 equações e foi feita a transposição sem a inversão do sinal em três equações.

Os teoremas em ação **T2.1**: $ax = b \Rightarrow x = b - a$ e **T2.2**: $ax = b \Rightarrow x = \frac{b}{-a}$ tinham cada um 34 possibilidades de serem mobilizados. O teorema **T2.2** foi mobilizado duas vezes, ambos os teoremas em equações da Unidade 4, e o teorema em ação **T2.1**, mobilizado quatro vezes, sendo duas vezes na mesma equação, a segunda equação do oitavo encontro.

O teorema em ação errôneo **T1.1** foi mobilizado oito vezes, em um total de quinze possibilidades. O que nos permite inferir, por causa de sua frequência, que esse teorema está arraigado e, apesar de sua presença ter diminuído ao longo das sessões, não podemos inferir que ele foi totalmente desestabilizado. Podemos inferir que pode ter havido alguns desequilíbrios momentâneos, porém, é preciso um trabalho mais longo e com mais sessões para poder haver a desestabilização desse conhecimento.

Modelamos cinco teoremas em ações errôneos mobilizados por Emanuela, todos mobilizados mais de uma vez, o que mostra certa estabilidade nos teoremas. Apesar do trabalho com o Aplusix, fornecendo um *feedback* quanto aos erros, eles ainda continuaram a se repetir, necessitando de um trabalho mais intensivo com equações.

Mesmo constatando certa estabilidade nos teoremas em ação errôneos, percebemos que eles foram diminuindo a frequência ao longo dos encontros. No último encontro, por exemplo, foram mobilizados quatro teoremas em ação falsos, entre eles, uma única vez o teorema em ação **T1.1**, que já havia sido mobilizado outras sete vezes, quando a aluna estava resolvendo uma lista de equações sem as retroações do *software*. Isto nos permite inferir que, ao fazer as correções das equações do “teste”, ela pode ter refletido sobre os seus erros, visto que cometeu somente mais uma vez o mesmo erro. Talvez as retroações do Aplusix possam estar contribuindo com a desestabilização dos teoremas em ações errôneos.

4.4 PRODUÇÃO DE ANA

A análise das produções de Ana foi feita da mesma forma da de Bianca e Emanuela, dividida em duas etapas: primeiramente, identificando os teoremas em ação mobilizados por ela na resolução das atividades e, em seguida, afinando essa análise buscando as unidades de análise para melhor compreender os erros e possibilidades de superação.

4.4.1 Teoremas em Ação Mobilizados por Ana

Vimos que, nos encontros anteriores, Ana mobilizou apenas o teorema em ação errôneo **T3.1:** $ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$, ao resolver as duas listas de equações. Para o sexto encontro, ela pediu um "teste", da segunda "família" de equações, e dos dez exercícios tratados, ela resolveu corretamente oito. Não satisfeita com a sua pontuação, pediu outro "teste", da mesma "família", e, no segundo teste, ela obteve a mesma pontuação. A realização dos testes possibilitou que ela testasse seus conhecimentos e nos permitiu verificar se o teorema em ação **T3.1** seria ou não mobilizado novamente, visto que havia possibilidades de mobilização desse teorema nas equações das listas. Vejamos as duas listas geradas automaticamente pelo Aplusix.

Lista de equações, primeiro teste:	Lista de equações, segundo teste:
1) $4x - 1 + 8x - 3 = 0$	**1)** $\frac{x}{9} = 6$
2) $-x + 4 = 7x - 4$	**2)** $1{,}4x - 1{,}4 = 0$
3) $2{,}1x + 9 = 0$	**3)** $\frac{2x}{5} = 7$
4) $-4x + 8 = -3x + 2$	**4)** $\frac{7}{5}x = -\frac{8}{5}$
5) $-0{,}5x + 0{,}3 = 0$	**5)** $\frac{2x}{3} = 7$
6) $8x = 0$	**6)** $\frac{4}{12} = \frac{4}{8}x$
7) $-2x + 7 = -5x - 4$	**7)** $4x - 6 + x - 8 = 0$
8) $-1{,}6x - 0{,}5 = 0$	**8)** $-2x + 5 = -x - 3$
9) $6x = 0$	**9)** $-\frac{6}{3}x = \frac{5}{3}$
10) $\frac{2x}{9} = 8$	**10)** $\frac{7x}{4} = 2$

No primeiro teste, Ana cometeu um erro ao resolver a segunda equação e o outro, ao resolver a sétima equação. No segundo teste, errou as resoluções da quarta e décima equação. Investiguemos as resoluções das quatro equações.

Na segunda equação, ela cometeu um erro ao transpor o número 4 para o segundo membro da equação, conservando o sinal dele. Esse erro de transposição corresponde a uma variação do teorema em ação errôneo **T3.1:**$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$ modelado *a priori* . O mesmo teorema já havia sido mobilizado uma vez, ao resolver uma equação do quarto encontro.

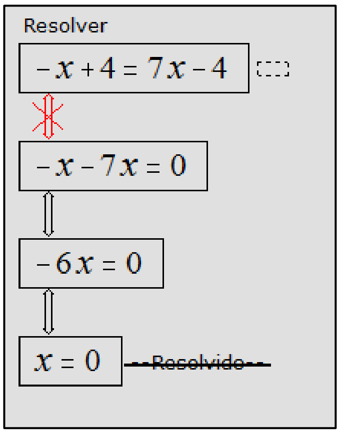


Figura 28 – Resolução, por Ana, da equação $-x + 4 = 7x - 4$
Fonte: Aplusix

Na sétima (primeiro teste) e na quarta (segundo teste) equação, ela apenas não coloca o sinal de menos na frente dos números. Esse tipo de erro já havia ocorrido na resolução da sétima equação do quinto encontro.

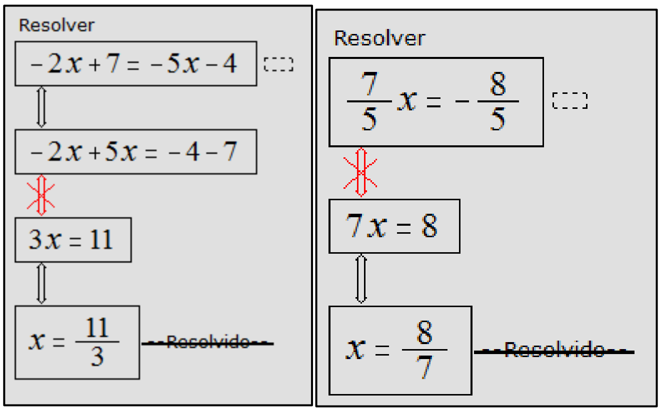


Figura 29 – Resolução, por Ana, das equações $-2x + 7 = -5x - 4$ e $\frac{7}{5}x = -\frac{8}{5}$
Fonte: Aplusix

Ao resolver a décima equação do segundo teste, Ana comete um erro ao fazer a multiplicação de dois números inteiros.

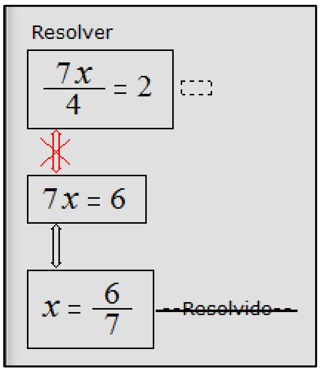


Figura 30 – Resolução, por Ana, da equação $\frac{7x}{4} = 2$
Fonte: Aplusix

Ao pedir a correção dos "testes", ela cometeu erros ao refazer as duas equações, que continham erros do primeiro "teste", e não cometeu nenhum outro erro ao refazer as equações do segundo "teste".

Ao corrigir a segunda equação, Ana, que havia cometido um erro de transposição de um termo independente, agora comete um erro ao dividir dois números negativos.

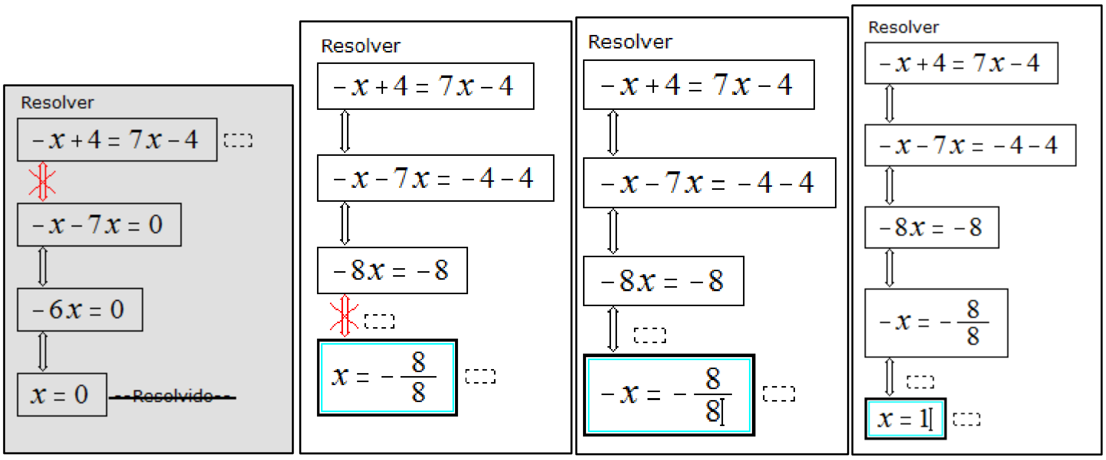


Figura 31 – Correção, feita por Ana, da equação $-x + 4 = 7x - 4$
Fonte: Aplusix

Ao refazer a sétima equação, tendo tido apenas um erro de troca de sinal, ela erra a transposição do termo (-5*x*), cometendo o primeiro erro de transposição de incógnita que pode ser modelado pelo teorema em ação **T4.1:**$ax = bx + c \Longrightarrow ax + bx = c$, com a variação de que, no primeiro membro da equação, tem também um termo independente.

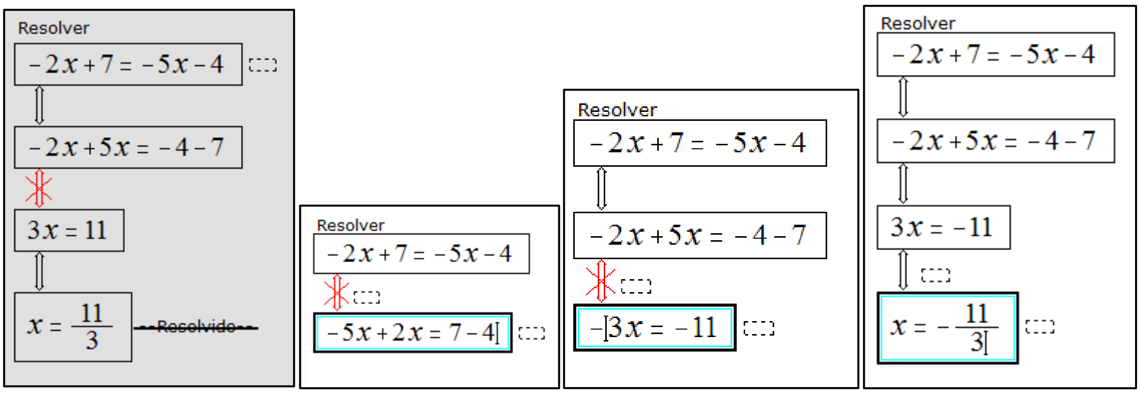


Figura 32 – Correção, feita por Ana, da equação $-2x + 7 = -5x - 4$
Fonte: Aplusix

Ana conseguiu um bom aproveitamento nos “testes”, cometeu poucos erros e em sua maioria foi de troca de sinal, ou erros aritméticos básicos, indicando talvez apenas a falta de atenção ao resolver as equações.

Sugerimos a Ana que escolhesse uma lista de equações mais complexas ou uma lista de sistema; ela decidiu pedir uma lista, em modo de “aprendizagem”, da primeira “família” de sistemas de equações. Essa “família” tem sistemas simples com duas equações, duas incógnitas e todos os coeficientes sendo números inteiros. A aluna resolveu dois sistemas da lista pedida, antes de terminarmos o sexto encontro, que são os seguintes:

1) $\begin{cases} 7x - 3y = 6 \\ -4y = -3 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -3x = 2 \\ -2x - 5y = 8 \end{cases}$

A aluna teve algumas dificuldades iniciais em resolver os sistemas usando o Aplusix, pois ele não permite que a estrutura do sistema seja desfeita, como geralmente é feita quando se utilizam papel e lápis. Diante disso, foi explicado a ela como proceder com a resolução e então não houve mais dúvidas quanto às estruturas do sistema.

A análise das atividades de resolução de sistemas foi realizada com foco na resolução de equações, observando como Ana usou a resolução de equações para resolver os sistemas. Queríamos analisar se ela teria alguma dificuldade em usar o seu conhecimento conceitual de equações ao resolver um sistema de equações, já que ela não apresentou dificuldades em resolver equações.

Ao resolver o primeiro sistema (Figura 33), a aluna cometeu alguns erros ao realizar a multiplicação entre um número inteiro e uma fração ($3 \times \frac{3}{4}$), e após conseguir resolver corretamente a multiplicação, comete um erro ao transpor o número (-9) para o segundo membro da primeira equação. Esse erro de transposição já havia ocorrido outras duas vezes, e corresponde ao teorema em ação errôneo **T3.1:** $ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$.

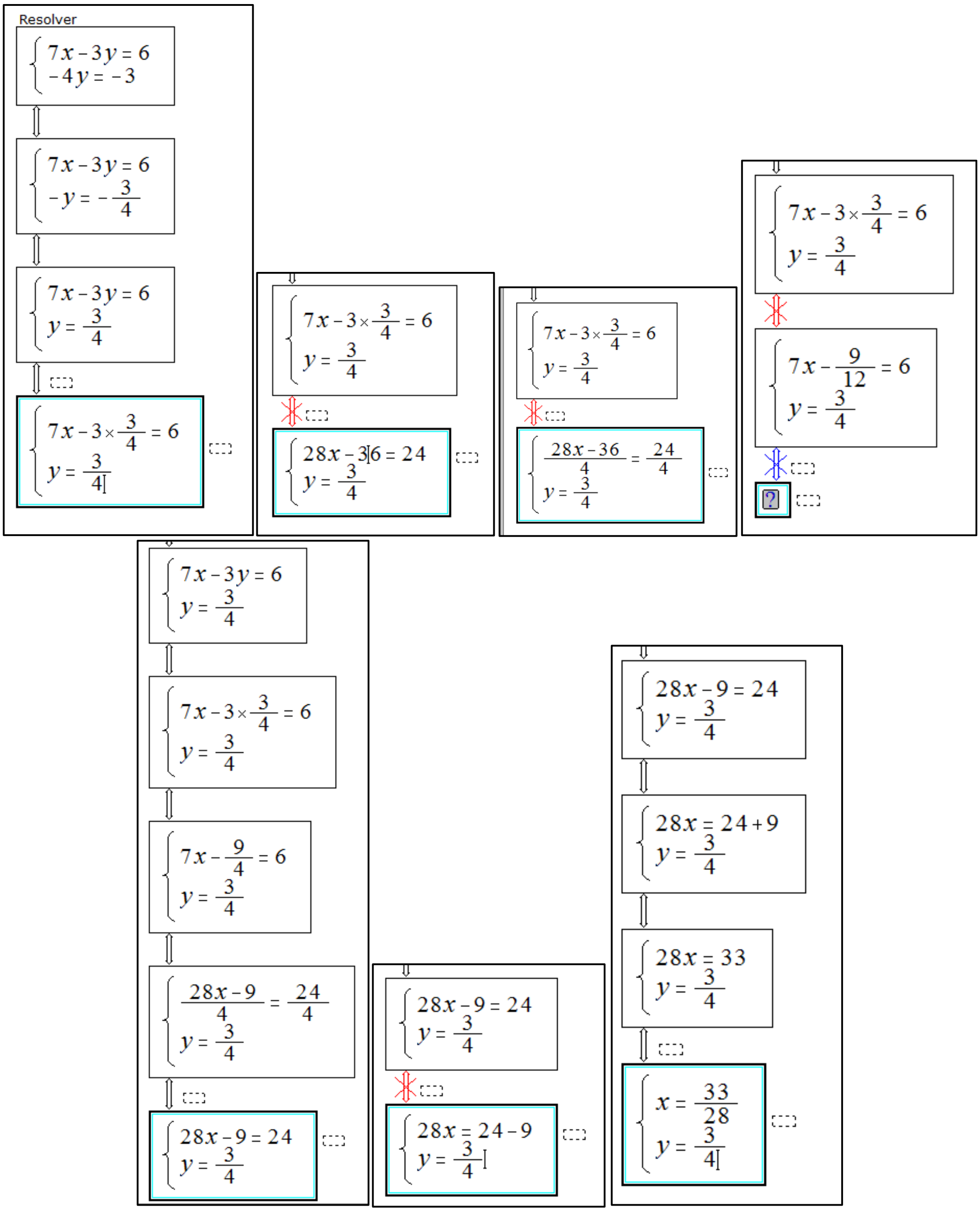


Figura 33 – Resolução, por Ana, do primeiro sistema
Fonte: Aplusix

Ao resolver o segundo sistema, Ana cometeu apenas um erro, o mesmo de multiplicação entre um número inteiro e uma fração, mas desta vez o corrigiu rapidamente (Figura 34).

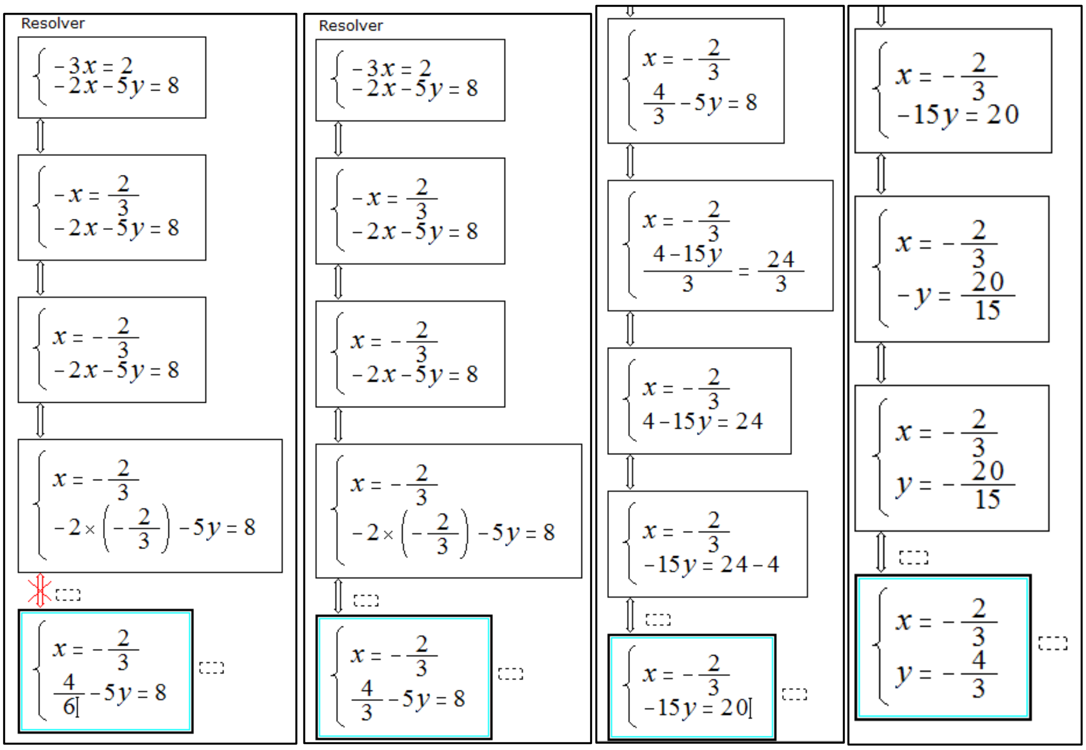


Figura 34 – Resolução, por Ana, do segundo sistema
Fonte: Aplusix

No sétimo encontro, Ana resolveu duas listas de sistemas, da mesma "família", também em modo de "aprendizagem", em que se têm as retroações do *software*. A aluna resolveu oito sistemas da segunda lista pedida antes de terminarmos o sétimo encontro.

Vejamos as duas listas de sistemas resolvidas por Ana, nesse encontro.

Primeira lista de sistemas	Segunda lista de sistemas
1) $\begin{cases} 6x + 4y = -4 \\ 4y = -8 \end{cases}$	**1)** $\begin{cases} 8y = -9 \\ -2x + 8y = 0 \end{cases}$
2) $\begin{cases} -x - 3y = 8 \\ 4y = 4 \end{cases}$	**2)** $\begin{cases} 7y = -1 \\ -5x + 3y = -6 \end{cases}$
3) $\begin{cases} 9x = -4 \\ -4x + 7y = -9 \end{cases}$	**3)** $\begin{cases} -3x + 6y = 8 \\ -2y = 2 \end{cases}$
4) $\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$	**4)** $\begin{cases} -5x = -8 \\ -2x - 7y = 0 \end{cases}$
5) $\begin{cases} 2x + 8y = 6 \\ 8y = 9 \end{cases}$	**5)** $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -7x = -5 \end{cases}$
6) $\begin{cases} -6x - y = -1 \\ 8y = 7 \end{cases}$	**6)** $\begin{cases} x = 3 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$
7) $\begin{cases} -x = -4 \\ -9x - 2y = 5 \end{cases}$	**7)** $\begin{cases} -3y = -3 \\ -9x + 8y = -3 \end{cases}$
8) $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ -2y = 4 \end{cases}$	**8)** $\begin{cases} 9y = 6 \\ -x + 6y = 4 \end{cases}$

9) $\begin{cases} -2x - 2y = 8 \\ 2x = -3 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} 4x - 7y = -4 \\ 6y = -9 \end{cases}$	

Nesse encontro, Ana resolveu com erros de transposição o segundo, terceiro e sexto sistema da primeira lista. Cometeu três erros de troca de sinais, no primeiro, nono e décimo sistema da primeira lista e no segundo sistema da segunda lista. No nono e décimo sistema, da primeira lista, ela inverte o sinal ao fazer a multiplicação entre um número inteiro negativo e uma fração, também negativa. O interessante, nesses dois casos, foi que ela errou apenas o sinal, e, nos sistemas resolvidos no encontro anterior, ela havia errado a multiplicação e o sinal. Já no primeiro (primeira lista) e segundo (segunda lista) sistema, ela apenas inverte o sinal de um termo.

Vejamos os erros de transposição, na resolução do segundo sistema.

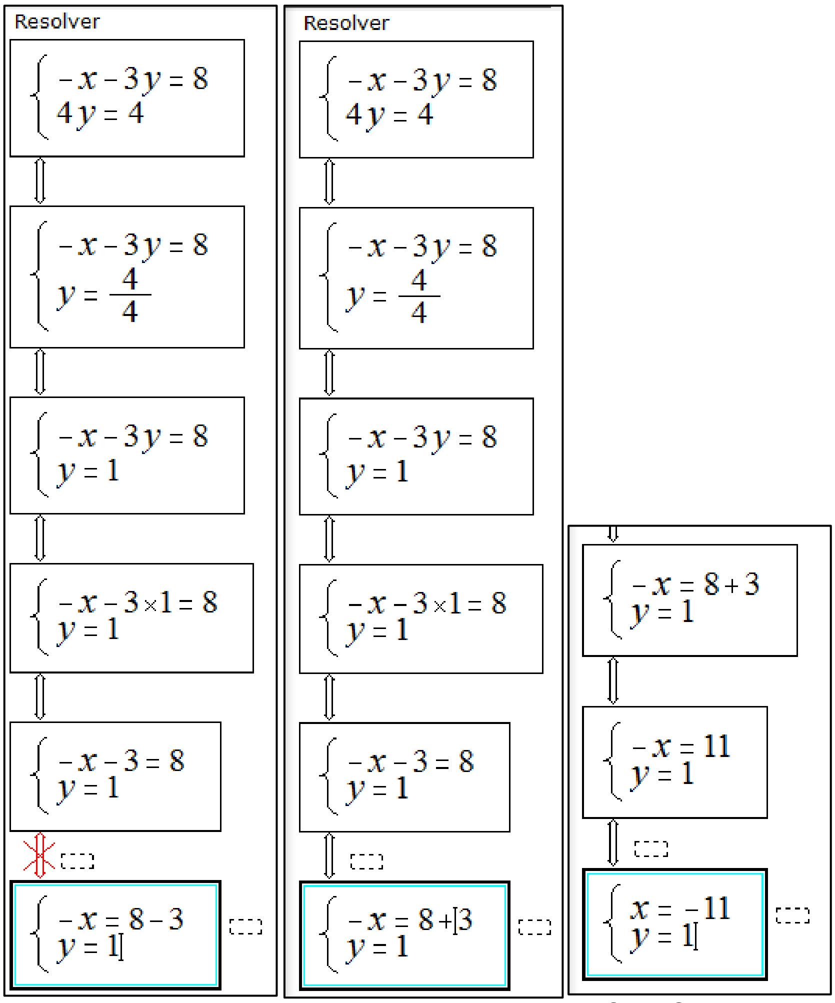


Figura 35 – Resolução, por Ana, do sistema $\begin{cases} -x - 3y = 8 \\ 4y = 4 \end{cases}$

Fonte: Aplusix

Ana erra ao transpor o número (-3) para o segundo membro da primeira equação do sistema, mobilizando, novamente, o teorema em ação errôneo **T3.1:** $ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$. A aluna mobiliza o mesmo teorema ao resolver o terceiro e sexto sistema de equações.

Nesse encontro, Ana mobilizou apenas um teorema em ação errôneo, o teorema **T3.1**, mobilizado três vezes. Esse mesmo teorema já havia sido mobilizado outras três vezes: duas, ao resolver equações e uma, ao resolver um sistema, indicando estabilidade. Outros erros cometidos, várias vezes, foram de troca de sinal e ao multiplicar dois números negativos.

No oitavo encontro, o último do qual Ana participou, ela resolveu uma lista, da mesma "família" de sistemas, em modo de "aprendizagem", o que nos permitiu verificar a estabilidade do teorema em ação **T3.1** e a persistência de erros aritméticos básicos, como trocas de sinais e na multiplicação.

A lista de sistemas resolvida por Ana foi a seguinte:

1) $\begin{cases} 6y = -6 \\ -2x + 7y = 7 \end{cases}$

2) $\begin{cases} -9x = -4 \\ -5x - y = -5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x = 1 \\ -5x + 2y = 7 \end{cases}$

4) $\begin{cases} -4x + 3y = -3 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x = -6 \\ 8x - 4y = 9 \end{cases}$

6) $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ -4y = -2 \end{cases}$

7) $\begin{cases} 4y = -3 \\ -9x - 9y = 9 \end{cases}$

8) $\begin{cases} y = 3 \\ -6x + 7y = -2 \end{cases}$

Nesse último encontro, Ana resolveu os sistemas cometendo apenas erros aritméticos, não mobilizando nenhuma vez o teorema em ação errôneo **T3.1**, mobilizado várias vezes nos encontros anteriores. Notamos que a presença desse teorema foi diminuindo ao longo das sessões. No entanto, os erros aritméticos continuaram a aparecer durante o processo de resolução de sistemas. Ela cometeu um erro de multiplicação entre dois números inteiros no terceiro sistema, e inverte o sinal, ao multiplicar dois números negativos, ao resolver o sétimo sistema. Inverte o sinal de um termo ao resolver o quinto sistema. Vejamos os passos da resolução do quinto sistema.

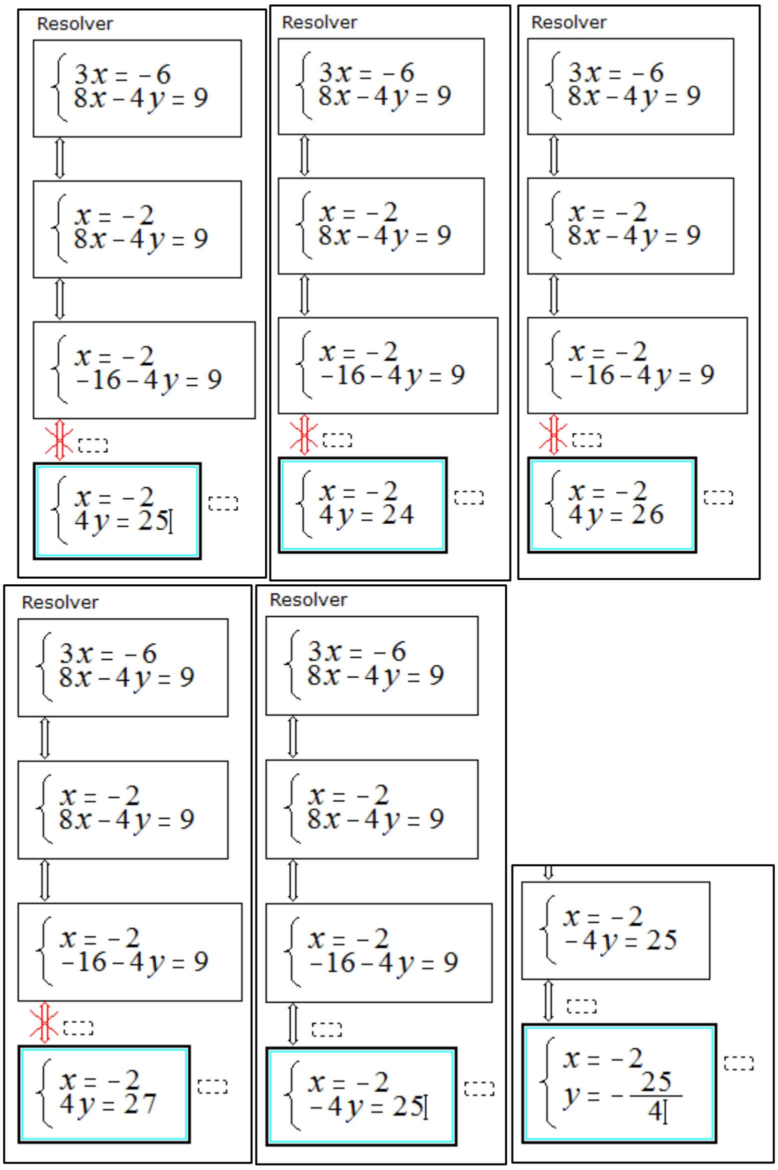


Figura 36 – Resolução, por Ana, do sistema $\begin{cases} 3x = -6 \\ 8x - 4y = 9 \end{cases}$

Fonte: Aplusix

Ana realiza corretamente a transposição do (*-16*) que somado com o número *9*, que já estava no segundo membro da equação, resulta em 25. No entanto, inverte o sinal do (*-4y*). Pelas sequências das imagens, percebe-se que a aluna acha que o sinal está correto e o erro foi decorrente da soma, pois fez várias tentativas errôneas para o resultado da soma *9+16*, até perceber que o erro estava na troca do sinal do (*-4y*). Esse foi apenas um exemplo em que ela inverte o sinal de algum termo, que ocorreu várias vezes, persistindo ao longo de todas as sessões de atividades.

Ao analisar os processos de resolução das atividades resolvidas por Ana, modelamos apenas dois teoremas em ação errôneos: **T4.1:**$ax = bx + c \Longrightarrow ax + bx = c$ e **T3.1:** $ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$, sendo os dois da lista de teoremas listados *a priori*. Tivemos uma variação de cada teorema em ação errôneo. Foi mobilizado **T4.1**, uma vez, ao resolver uma equação em que no primeiro membro da equação também continha um termo independente, e o teorema **T3.1** foi mobilizado, uma vez, em uma equação com uma incógnita também no segundo membro.

4.4.2 Unidades de Análise: Ana

Ana resolveu, ao longo dos cinco encontros analisados, trinta e cinco equações e vinte e oito sistemas de equações. Após a análise dessas atividades e identificação dos teoremas em ação, agrupamos as atividades em nove unidades de análise. Agrupamos em seis unidades as equações, levando em consideração os erros encontrados durante a resolução delas e a sua forma inicial.

Os sistemas foram divididos do seguinte modo: primeiramente dividimos os sistemas em dois grupos: o primeiro grupo em que as duas equações têm duas incógnitas e o segundo, em que uma equação tem duas incógnitas e a outra somente uma. As equações com uma incógnita são da forma $\mathrm{ax} = \mathrm{b}$, com $a \neq 0$, e, então, nós fizemos uma segunda divisão, nos sistemas do segundo grupo. Separamos as equações em que *a* divide *b* das que *a* não divide *b*. Essa segunda divisão foi feita porque, quando o valor de uma incógnita for uma fração, ao tentar encontrar o valor da segunda incógnita, do sistema, será necessário trabalhar com operações com frações, e vimos, durante a análise que a aluna cometeu alguns erros ao realizar essas operações.

O Quadro 10 contém as unidades encontradas e as atividades presentes em cada unidade. A frase “2 vezes” foi colocada ao lado das quatro equações que foram resolvidas erroneamente, nos dois “testes”, e posteriormente foram corrigidas no modo de “Correção de teste”. Sejam $a, b, c\ e\ d\ \in\ \mathbb{R}^*$.

Quadro 10 – Unidades de Análise - Ana

Unidade 1 $ax + b = c$ Em que *c* pode ser igual à zero	• $3x - 4 = 7$ • $2x + 4 = 8$ • $7x + 3 = 3$ • $2{,}1x + 9 = 0$ • $-0{,}5x + 0{,}3 = 0$ • $-1{,}6x - 0{,}5 = 0$ • $1{,}4x - 1{,}4 = 0$
Unidade 2 $ax = b$ Em que *b* pode ser igual à zero	• $5x = 10$ • $-20x = 8$ • $8x = 0$ • $6x = 0$
Unidade 3 $\frac{ax}{b} = c, com\ b \neq 1$	• $\frac{x}{4} = 9$ • $\frac{x}{5} = 3$ • $\frac{2x}{3} = -6$ • $\frac{x}{9} = 6$ • $\frac{2x}{9} = 8$ • $\frac{2x}{5} = 7$ • $\frac{2x}{3} = 7$ • $\frac{7x}{4} = 2$ (2 vezes)
Unidade 4 $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{b} = \frac{cx}{d}$ com $b, d \neq 1$	• $\frac{-x}{6} = \frac{4}{3}$ • $\frac{-5x}{2} = \frac{5}{3}$ • $\frac{7}{5}x = -\frac{8}{5}$ (2 vezes) • $\frac{4}{12} = \frac{4}{8}x$ • $-\frac{6}{3}x = \frac{5}{3}$
Unidade 5 Equações com incógnitas em apenas um membro da equação	• $9 = -3(x - 1)$ • $4x - 1 + 8x - 3 = 0$ • $4x - 6 + x - 8 = 0$
Unidade 6 Equações com incógnitas em ambos os membros da equação	• $2(x + 1) + 3 = x + 4$ • $-2(3 + x) = x + 1$ • $3(x + 2) = x - 2$ • $4(2 - x) - 6 = x + 12$ • $-x + 4 = 7x - 4$ (2 vezes) 2 • $-4x + 8 = -3x + 2$ • $-2x + 7 = -5x - 4$ (2 vezes) 2 • $-2x + 5 = -x - 3$

Unidade 7 Sistema com duas equações e duas incógnitas em que uma das equações tem duas incógnitas e a outra somente uma. Seja $ax = b$, com $a \neq 0$ a equação com apenas uma incógnita, assim a não divide b	• $\begin{cases} 7x - 3y = 6 \\ -4y = -3 \end{cases}$ • $\begin{cases} 2x + 8y = 6 \\ 8y = 9 \end{cases}$ • $\begin{cases} -6x - y = -1 \\ 8y = 7 \end{cases}$ • $\begin{cases} 4x - 7y = -4 \\ 6y = -9 \end{cases}$ • $\begin{cases} 8y = -9 \\ -2x + 8y = 0 \end{cases}$ • $\begin{cases} 7y = -1 \\ -5x + 3y = -6 \end{cases}$ • $\begin{cases} 9y = 6 \\ -x + 6y = 4 \end{cases}$ • $\begin{cases} 4x + 2y = 2 \\ -4y = -2 \end{cases}$ • $\begin{cases} 4y = -3 \\ -9x - 9y = 9 \end{cases}$ • $\begin{cases} -3x = 2 \\ -2x - 5y = 8 \end{cases}$ • $\begin{cases} 9x = -4 \\ -4x + 7y = -9 \end{cases}$ • $\begin{cases} -2x - 2y = 8 \\ 2x = -3 \end{cases}$ • $\begin{cases} -5x = -8 \\ -2x - 7y = 0 \end{cases}$ • $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ -7x = -5 \end{cases}$ • $\begin{cases} -9x = -4 \\ -5x - y = -5 \end{cases}$ • $\begin{cases} 6x = 1 \\ -5x + 2y = 7 \end{cases}$
Unidade 8 Sistema com duas equações e duas incógnitas em que uma das equações tem duas incógnitas e a outra somente uma. Seja $ax = b$, com $a \neq 0$ a equação com apenas uma incógnita, assim a divide b	• $\begin{cases} 6x + 4y = -4 \\ 4y = -8 \end{cases}$ • $\begin{cases} 3x = -6 \\ 8x - 4y = 9 \end{cases}$ • $\begin{cases} -x - 3y = 8 \\ 4y = 4 \end{cases}$ • $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ -2y = 4 \end{cases}$ • $\begin{cases} -3x + 6y = 8 \\ -2y = 2 \end{cases}$ • $\begin{cases} -3y = -3 \\ -9x + 8y = -3 \end{cases}$ • $\begin{cases} 6y = -6 \\ -2x + 7y = 7 \end{cases}$ • $\begin{cases} y = 3 \\ -6x + 7y = -2 \end{cases}$ • $\begin{cases} -x = -4 \\ -9x - 2y = 5 \end{cases}$ • $\begin{cases} x = 3 \\ 2x + y = -5 \end{cases}$
Unidade 9 Sistema com duas equações e duas incógnitas em que as duas equações tem duas incógnitas.	• $\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ -x + 2y = 0 \end{cases}$ • $\begin{cases} -4x + 3y = -3 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

Separadas as unidades de análise, organizamos o Quadro 11 relacionando os teoremas em ação, anteriormente modelados, com as unidades de análise. A relação estabelecida entre essas duas entradas foi a seguinte: quantidade de teoremas em ação que poderiam ser mobilizados e quantidade de teoremas em ação efetivamente mobilizados pela aluna.

Quadro 11: Unidades/Indicadores - Ana

Indicadores	T3	T3.1	T4	T4.1
Unidade 1 $ax + b = c$ Em que *c* pode ser igual à zero	$\frac{7}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 2 $ax = b$ Em que *b* pode ser igual a zero	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 3 $\frac{ax}{b} = c, com\ b \neq 1$ e b pode ser igual à zero	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 4 $\frac{ax}{b} = \frac{c}{d}$ ou $\frac{a}{b} = \frac{cx}{d}$, com $b, d \neq 1$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 5 Equações com incógnitas em apenas um membro da equação	$\frac{2}{2}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 6 Equações com incógnitas em ambos os membros da equação	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{10}{10}$	$\frac{1}{10}$
Unidade 7 Sistema com duas equações e duas incógnitas em que uma das equações tem duas incógnitas e a outra, somente uma. Seja $ax = b$, com $a \neq 0$, a equação com apenas uma incógnita, assim *a* não divide *b*.	$\frac{14}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 8 Sistema com duas equações e duas incógnitas em que uma das equações tem duas incógnitas e a outra, somente uma. Seja $ax = b$, com $a \neq 0$, a equação com apenas uma incógnita, assim *a* divide *b*.	$\frac{10}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$
Unidade 9 Sistema com duas equações e duas incógnitas em que as duas equações têm duas incógnitas.	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{0}{0}$

Para elaboração do Quadro 11, foram consideradas, para contagem, duas vezes as equações que foram primeiramente resolvidas de forma errônea no modo “teste”, e depois corrigidas no modo “correção”, pois, ao corrigir um erro, podem-se cometer outros; logo, essas equações foram contadas duas vezes.

Para fazer a contagem das possibilidades de ser mobilizado o teorema em ação **T4.1:**$ax = bx + c \Longrightarrow ax + bx = c$, consideramos todas as equações que continham ao menos uma incógnita no segundo membro e foi feita a transposição para o segundo membro da equação. Assim, inferimos que Ana tinha dez possibilidades de mobilizar o teorema em ação **T4.1**; entretanto, ela mobilizou em apenas uma única vez. Inferimos que esse teorema não está arraigado, pois ele foi mobilizado somente uma vez.

Para fazer a contagem das possibilidades de ser mobilizado o teorema **T3.1:**$ax + b = c \Rightarrow ax = c + b$, consideramos todas as equações que continham ao menos um termo independente no primeiro membro da equação e foi feita a transposição para o segundo membro da equação; assim, esse teorema tinha a possibilidade de ser mobilizado em 43 equações, mas foi mobilizado em seis. Comparando a quantidade de possibilidades de mobilização e a quantidade que foi mobilizado, essa quantidade torna-se pequena, mas não podemos deixar de levar em consideração esses seis usos.

Elencamos no decorrer das análises das atividades alguns erros aritméticos, como erros de multiplicação e inversão de sinais. Ao resolver as equações, Ana inverte o sinal de algum termo por seis vezes e, ao resolver os sistemas, faz a inversão em oito casos. Outro erro que teve certa frequência apareceu ao multiplicar um número inteiro com uma fração: presente em seis sistemas da Unidade 7, que é composta de 16 sistemas. Na resolução de três sistemas, ao multiplicar dois números negativos, ela coloca como resultado um número negativo. Em dois casos, ela usa a seguinte regra errônea $a \times \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a \times b}{a \times c}$, e em um desses casos, a e $\frac{b}{c}$ são número negativos e ela obtém como resultado um número negativo.

Ana mobilizou somente dois teoremas em ação errôneos, o teorema **T3.1** e o **T4.1**, sendo esse último mobilizado apenas uma vez. Já o teorema **T3.1** foi mobilizados seis vezes; no entanto, sua presença foi diminuindo ao longo das sessões, e na ultima sessão, ele não foi mobilizado nenhuma vez. Diante disso, inferimos que as retroações do Aplusix podem ter contribuído no processo de desestabilização desse teorema em ação falso, assim como pode ter ajudado no progresso de desestabilização de alguns erros aritméticos, como o caso da regra errônea $a \times \frac{b}{c} \Rightarrow \frac{a \times b}{a \times c}$, usada somente duas vezes e nas primeiras sessões, não persistindo no erro.

No próximo capítulo, apresentaremos algumas conclusões a partir do que foi apresentado no capítulo das análises. Discorreremos sobre o uso dos referenciais teóricos para responder à questão de pesquisa e sobre o alcance dos objetivos.

5 ALGUMAS CONSIDERAÇÕES

A presente pesquisa teve como objetivo principal investigar erros no estudo de equações do 1º grau e sua superação por alunos do 1º ano do ensino médio com o auxílio do *software* Aplusix.

Para atingir esse objetivo, foi usada a teoria dos campos conceituais (VERGNAUD, 1990) como suporte teórico para ajudar a compreender o processo de apreensão de um conceito pelos alunos. Utilizamos principalmente o conceito de invariantes operatórios, que nos permitiram a identificação e análises dos erros, por meios dos teoremas em ação errôneos mobilizados pelos alunos. Ao analisar a frequência dos teoremas em ação falsos, pudemos inferir sobre sua estabilidade.

Os estudos de Cury (1994, 2008), sobre análise de erros, mostraram a possibilidades de se trabalhar com os erros dos alunos. A análise de conteúdo dos erros (CURY, 2008) permitiu uma análise detalhada das respostas dos alunos. Com a análise dos dados foi possível concluir que a validação oferecida pelo *software* Aplusix contribuiu com o processo de desestabilização dos erros cometidos pelos alunos. As retroações do Aplusix levaram os alunos a analisar e corrigir seus erros que, ao longo dos encontros, foram mobilizados cada vez menos, o que mostra sua desestabilização e a substituição por um teorema em ação com domínio de validade mais amplo.

A proposta de usar os conhecimentos de cada aluno para propor as atividades, levando em consideração o que eles sabem e a partir daí planejar atividades que promovam a construção do conhecimento, possibilitou que três alunas de uma mesma sala – Bianca, Ana e Emanuela – trabalhassem em atividades distintas, cada uma delas no seu ritmo de aprendizagem. Com a análise individual dos erros observamos diferentes tipos de teoremas em ação errôneos e diferentes frequências na mobilização dos teoremas. Foi essa análise que permitiu a elaboração de atividades específicas para cada aluna.

Bianca tinha muitas dificuldades no trabalho com manipulações algébricas. No decorrer dos encontros e o trabalho com o *software*, pudemos perceber que ela não tinha um erro fixo, um teorema que se repetia. Ao resolver as atividades, a aluna cometia um erro, e quando via que não dava certo, trocava de estratégia, cometendo outro erro, e quando esse outro caminho não dava certo, cometia outro erro. Com a retroação do *software*, ela percebia que estava errado e tentava outros caminhos. A reflexão que Bianca fazia, no início, era quase imediata, mas ela não conseguia perceber o que tinha que fazer. Com as atividades que foram feitas e com o tempo de duração da nossa sequência, não conseguimos perceber indícios de superação dessas dificuldades. Podemos inferir é que, se ela estivesse fazendo no papel e a lápis, ela não conseguiria perceber o que estaria errado ou que havia algo errado. Com o *software* Aplusix, ela tenta uma estratégia, erra, depois tenta outra e depois outra. Dessa forma, foi possível perceber que ela ainda tem dificuldades e que o *software* teve papel importante na identificação dos erros que Bianca cometia, pois quando ela mobilizava determinado teorema em ação errôneo e recebia a retroação do *software*, ela não voltava a mobilizá-lo.

Acreditamos que um dos fatores que colaboraram para que Bianca não chegasse a elaborar novos teoremas em ação com domínio de validade total tenha sido seu tempo de participação nas atividades. Ela foi a aluna que menos trabalhou com atividades no *software*, e seria necessário um trabalho de longa duração, pois a aprendizagem é um processo, portanto, está em processo de construção do conhecimento. O primeiro passo desse processo foi dado – a tomada de consciência de seus erros. Há então necessidade de continuidade de um trabalho que lhe permita avançar em seus conhecimentos.

Emanuela cometeu vários erros, e estes se repetiam ao longo dos encontros, indicando certa estabilidade. A frequência foi diminuindo no decorrer dos encontros.

Ana cometeu poucos erros. Alguns deles se repetiram, e foram feitos quando a aluna estava resolvendo sistemas de equações, ou seja, aplicando o conhecimento de equações para resolver outras atividades, o que é um avanço no estudo de equações. Assim como os erros de Emanuela, eles foram diminuindo ao longo das sessões. Percebem-se alguns indícios de superação, pois a frequência de mobilização dos teoremas em ação falsos foi diminuindo. Como já dito, é preciso mais tempo de trabalho para que possamos inferir sobre a superação dos erros. Emanuela e Ana também estão em processo de construção do conhecimento relativo a equações.

Se o trabalho com os erros, por exemplo, fosse feito em sala de aula, ao longo de todo o período escolar, elas teriam as retroações sobre seus erros. O problema maior em uma situação ordinária de sala de aula é que os alunos fazem o trabalho e, na maioria das vezes, veem se a solução deles está correta ou não depois de uma semana, quando não mais se lembram do que haviam feito. Além do mais, a correção não é feita sobre o erro do aluno; este vê apenas a solução final e compara se a sua resposta final está correta ou não. Caso esteja incorreta, o aluno apaga tudo e copia a resolução correta e não apaga somente aquela etapa, a que estava errada, pois ele não sabe qual era a etapa errada. Muitas vezes, o aluno não consegue identificar o seu erro, para então corrigi-lo, e o uso do Aplusix possibilita esse trabalho individual sobre o erro, indicando, simultaneamente, em qual etapa este está.

Esse trabalho de analisar os erros individuais dos alunos, olhar todos os passos de resolução das atividades em uma sala de aula ordinária, ficaria complicado, pois exige muito tempo, e, considerando que um professor tem mais de uma turma, esse trabalho minucioso fica inviável. No entanto, é importante realizar trabalhos, em sala de aula, levando em consideração os erros dos alunos, usando-os como algo positivo, a favor da construção do conhecimento; eles não devem ser ignorados ou ser fonte de punição. Nesse sentido, é importante pensar estratégias que sejam possíveis de serem realizadas com toda a sala e é nesse sentido que acreditamos que o Aplusix pode auxiliar. Esse *software* possui uma ferramenta de "estatística" que mostra o percentual de acertos e erros de toda a sala ou de cada aluno, o que possibilita ao professor trabalhar coletivamente os erros mais frequentes dos alunos, ou ainda analisar individualmente alguns deles que estiverem com mais dificuldade.

Segundo Vergnaud (1990), não é por meio de uma situação-problema ou de poucas situações que o conceito vai se tornar significativo para o aluno. É preciso que o aluno resolva várias atividades semelhantes, ou seja, equações da mesma família para possibilitar a construção dos esquemas. Ao gerar as listas, o Aplusix permite realizar esse tipo de trabalho com os alunos.

Ressaltamos que, além de o Aplusix ajudar as alunas a desenvolverem os esquemas para a resolução de equações, nos ajudou na análise detalhada das resoluções das atividades. De fato, sem a ferramenta "videocassete" ficaria muito difícil analisar com detalhes a resolução das atividades, pois, se visualizássemos somente a resposta final de cada atividade, não perceberíamos os erros cometidos durante a resolução; uma vez apagado o que não deu certo, ficaria somente a resolução que leva à resposta esperada.

Assim concluímos que o *software* Aplusix nos ajudou na investigação sobre erros no estudo de equações do 1º grau. Com as atividades realizadas e com a duração da nossa sequência, não conseguimos perceber apenas alguns indícios de superação desses erros. Precisaríamos de mais tempo de trabalho para poder inferir sobre a superação dos erros. Foi possível concluir que com as retroações oferecidas pelo *software,* os sujeitos da nossa pesquisa estão em processo de desestabilização de alguns erros, sendo necessário um trabalho mais longo para poder verificar o avanço em seus conhecimentos.

Podemos afirmar que ainda há muito a se investigar. Apesar de a nossa proposta ter sido de acompanhar os alunos durante um ano, conseguimos marcar poucos encontros com eles, o que nos limitou o trabalho com os erros deles. Fica, então, a seguinte questão: Com mais tempo de trabalho e acompanhamento mais frequente conseguiríamos identificar uma superação desses erros? Outra questão que ficou é a seguinte: Como deve ser pensado o uso de um *software* que permita levar em consideração o trabalho individual dos alunos?

Uma questão para refletir é sobre o uso de um ambiente virtual, para ajudar no acompanhamento individual e constante dos alunos. Nossa proposta inicial foi usar essa ferramenta para realizar esse tipo de acompanhamento; no entanto, o uso desse ambiente não foi aceito pelos alunos participantes da nossa investigação. Como acreditamos que o uso de ambientes virtuais de aprendizagem é uma boa ferramenta para ajudar nesse acompanhamento, fica então essa questão: pensar em um ambiente virtual de aprendizagem que seja ao mesmo tempo interessante para o aluno e que possibilite ao professor ou pesquisador fazer esse acompanhamento, ajudando os alunos em suas dificuldades.

REFERÊNCIAS

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Ed. rev. e amp. São Paulo: Edições 70, 2011.

BITTAR, M. A Incorporação de um software em uma sala de Matemática: uma análise segundo a abordagem instrumental. In: ALLEVATO, Norma Suely Gomes; JAHN, Ana Paula. (Org.). **Tecnologias e Educação Matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores**. 1 ed. Recife: SBEM, , v. 7, p. 209-225, 2010.

BITTAR, M. Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais para o estudo das dificuldades dos alunos na passagem da Geometria Afim à Geometria Vetorial. In: BITTAR, Marilena; MUNIZ, Cristiano Alberto (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. 1 ed. Curitiba: Editora CRV, p. 53–76, 2009.

BITTAR, M. Possibilidades e dificuldades da incorporação do uso de softwares na aprendizagem da matemática. O estudo de um caso: o software Aplusix. In: III SIPEM - **Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, 2006, Águas de Lindóia. Anais do III SIPEM. Recife : SBEM, v. único. p. 1-12, 2006.

BITTAR, M.; CHAACHOUA, H. Integração de um Software para a Aprendizagem da álgebra: Aplusix . Recife. 2004. **Anais VIII ENEM,** Recife – UFPE, 2004.

BITTAR, M.; CHAACHOUA, H.; FREITAS, J. L. M. Aplusix: um software para o ensino de álgebra elementar. Recife. 2004. **Anais VIII ENEM,** Recife – UFPE, 2004.

BOOTH, L. R. Dificuldades das Crianças que se Iniciam em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As Idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, p. 23-37, 1995.

BORASI, R. Capitalizing on errors as "springboards for inquiry": a teaching experiment. **Journal for research in mathematics education.** V. 25, n. 2, p. 166-208, mar. 1994.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto (MEC). Programa Nacional do Livro Didático (PNLD)**. Guia Nacional de Livros Didáticos:** Matemática de 6º ao 9º anos. Brasília, 2008.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BURIGATO, S. M. M. S. **Estudos de dificuldades na aprendizagem da fatoração nos ambientes:** papel e lápis no e *software* Aplusix**.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2007.

CASÁVOLA, H. M.; CASTORINA, J. A.; FERNÁNDEZ, S.; LENZI, A. O papel construtivo dos erros na aquisição dos conhecimentos. In: CASTORINA, J. **A Psicologia genética:** aspectos metodológicos e implicações pedagógicas. Porto Alegre: Artes Médicas, p. 32-44, 1988.

CHEVALLARD, Y. **Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques:** L'approche anthropologique. Actes de l'U.E. de la Rochelle, 1998.

CRUZ, E. S. **A noção de variável em Livros Didáticos do Ensino Fundamental:** Um estudo sob a ótica da Organização Praxeológica. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2005.

CURY, H. N. A análise de erros na construção do saber matemático In**:** Jornada Nacional de Educação Matemática, 1.; JORNADA REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 14., 2006, Passo Fundo. **Anais**. Passo Fundo: Ed. UPF, 2006**.**

CURY, H. N. **Análise de Erros**: o que podemos aprender com as respostas dos alunos. 1 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

CURY, H. N. **As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos**. 1994. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1994.

CURY, H. N. **Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática.** Zetetiké, v.3, n. 4, p. 39-50, nov. 1995.

CURY, H. N.; KONZEN, B. Análise de resoluções de questões em matemática: as etapas do processo. **Educação Matemática em Revista-RS**, v.7, p.33 – 41, 2006.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: MACHADO, Silva Dias Alcântara (Org.). **Educação matemática:** uma (nova) introdução. 3 ed. rev. São Paulo: EDUC, p. 189-232, 2008.

FREITAS, M. A.. **Equação do 1º grau:** métodos de resolução e análise de erros no ensino médio. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2002.

KIERAN, C. Duas abordagens diferentes entre os principiantes em álgebra. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As Idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, p. 104-110, 1995.

LA TAILLE, Y. de. O erro na perspectiva piagetiana. In: AQUINO, J. G. (Org.). **Erro e fracasso na escola**: alternativas teóricas e práticas. 5. ed. São Paulo: Summus, 1997, v. 1, p. 25-44.

NOGUEIRA, R. C. S.. **A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental:** uma análise praxeológica. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2008.

PIAGET, J**. Fazer e compreender.** Tradução por Christina Larroudé de Paula Leite. São Paulo: Melhoramentos, 1978.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. **álgebra no Ensino Básico**. Portugal: Ministério da Educação-BGIdc, 2009.

TELES, R. A. M.. A Aritmética e a álgebra na matemática escolar. **Educação Matemática em Revista**, São Paulo: SBEM, ano 11, n. 16, p. 8 -15, maio 2004.

TORRE, S. de la. **Aprender com os erros:** o erro como estratégia de mudanças. Porto Alegre: Artmed, 2007.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da Escola Média e Utilizações das Variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org.). **As Idéias da álgebra.** São Paulo: Atual, p. 9-22, 1995.

VERGNAUD, G. La théorie de champs conceptuels. **Recherches em Didactique de Mathématiques**, Editora La Pensée Sauvage, Genoble, França, v.10, n. 2.3, p 133-170, 1990.

VERGNAUD, G. O que é aprender? In: BITTAR, M.; MUNIZ, C. A. (Org.). **A aprendizagem matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais**. 1 ed. Curitiba: Editora CRV, p. 13–35, 2009.

VIOLA DOS SANTOS, J. . **O que alunos da Escola Básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. 114 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR, 2007.

APÊNDICES

APÊNDICE A- Questionário para os alunos

UFMS
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

Prezado aluno,

Estamos realizando uma pesquisa cujo objetivo principal é estudar dificuldades de aprendizagem em matemática, mas especificamente em álgebra (equações, inequações, sistemas, função, etc.) e discutir contribuições do *software* Aplusix e de um ambiente virtual de aprendizagem para superação de dificuldades de alunos do 1º ano do ensino médio.

Contamos com sua ajuda, essencial para a realização desse estudo, respondendo a este questionário.

Não divulgaremos a sua identidade.

Nome:____Idade__________

1) O que você mais gosta em Matemática?

____
____
____
____

2) O que você menos gosta em Matemática?

____
____
____
____

3)Em relação à disciplina de Matemática você acha que tem:

( ) Muita facilidade
( ) Facilidade
( ) Indiferença
( ) Dificuldade
( ) Muita dificuldade

Justifique sua resposta.

____
____
____
____

4) Você reprovou de ano alguma vez? Se sim, qual(is) ano(s)?

____
____
____
____

5)Você costuma ficar para recuperação? Em quais disciplinas?

____
____
____
____

6) Você tem acesso à internet?

( ) Frequentemente
( ) Raramente
( ) Nunca

Caso você tenha acesso à internet, em que local isso ocorre?

____
____
____
____

7) Você conhece algum *software* matemático? Se sim, qual(is)?

____
____
____
____

8) Quando você não está entendendo a matéria, o que faz? Procura o professor? Tem alguém em casa que lhe ajuda?

____
____
____
____

9) Você costuma estudar fora do horário escolar?

____
____
____
____

10) Você tem interesse em participar como voluntário da nossa pesquisa?

____
____
____
____

Agradecemos sua participação e colocamo-nos à disposição para quaisquer dúvidas.

APÊNDICE B - Atividades postadas no ambiente virtual de aprendizagem

A primeira atividade trata um problema de equilíbrio em uma balança. Leia com atenção o enunciado e a discussão para entender como o problema foi resolvido.

Atividade 1: Considere uma balança em equilíbrio tendo, sobre o prato da esquerda, uma caixa de chocolate e um peso de dois quilos e, sobre o prato da direita, quatro pesos de dois quilos. Qual o peso da caixa de chocolate?

Discussão sobre a resolução:

- Se retirarmos 2 quilos de cada lado da balança, o equilíbrio se mantém. Assim o peso (massa) da caixa de chocolate será 6 quilos.
- Se traduzirmos o problema para a linguagem algébrica, temos:

$$x + 2 = 8 \Rightarrow x + 2 - 2 = 8 - 2 \Rightarrow x = 6$$

- Como ficaria a forma algébrica e qual seria o resultado da equação se dobrarmos a quantidade de peso em cada lado balança? A balança continuará em equilíbrio?

Na próxima atividade você deve ler o enunciado, a discussão e tentar chegar à solução, certo?

Atividade 2 : Considere uma balança em equilíbrio tendo, sobre o prato da esquerda, duas caixas de chocolate e um peso de dois quilos e, sobre o prato da direita, uma caixa de chocolate e um peso de seis quilos. Qual o peso de cada caixa de chocolate, considerando que elas têm todas o mesmo peso?

Discussão sobre a resolução:

- O que acontece se tirarmos 2 quilos de cada lado da balança? O equilíbrio se mantém?
- Temos então, à esquerda, duas caixas de chocolate e, à direita, uma caixa de chocolate e um peso de 4 quilos. Se tirarmos uma caixa de chocolate de cada prato da balança, esta continua em equilíbrio e teremos, sobre o prato da esquerda, uma caixa de chocolate e, sobre o prato da direita, um peso de 4 quilos. Assim, o peso de uma caixa de chocolate é igual a 4 quilos.
- Como podemos escrever nosso problema na linguagem algébrica?

Atividade 3 : Imaginemos agora que temos uma situação de equilíbrio como a da atividade 1, de tal forma que a equação algébrica correspondente é a seguinte :

$$5x + 2 = 2x + 11$$

Discussão sobre a resolução:

- Como resolveríamos essa atividade?
- O procedimento é o mesmo usado para a situação anterior: tiramos, inicialmente, *2* dos dois membros da equação. Isso é feito subtraindo-se *2* dos dois lados da equação. Em seguida, subtraímos *2x* dos dois lados da equação (mantendo sempre o equilíbrio) e, finalmente, dividimos a equação por 3.

$$5x + 2 = 2x + 11 \Rightarrow 5x + 2 - 2 = 2x + 11 - 2 \Rightarrow 5x = 2x + 9 \Rightarrow$$

$$\Longrightarrow 5x - 2 = 2x + 9 - 2x \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow \frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \Rightarrow x = 3$$

Algumas conclusões...

A resolução de uma equação consiste em determinar o valor da incógnita. Para isto, utilizamos as seguintes algumas regras.

- a solução de uma equação não muda se adicionarmos ou subtrairmos um mesmo número aos dois membros da equação;

- a solução de uma equação não muda se multiplicarmos ou dividirmos por um mesmo número não nulo os dois membros da equação.