MÍRIAM DO ROCIO GUADAGNINI

O USO DA FATORAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU POR ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Campo Grande, MS
2013

MÍRIAM DO ROCIO GUADAGNINI

O USO DA FATORAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU POR ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação, em Educação Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito final à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática**.**

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas

Campo Grande, MS
2013

MÍRIAM DO ROCIO GUADAGNINI

O USO DA FATORAÇÃO NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DO 2º GRAU POR ALUNOS DO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação, em Educação Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito final à obtenção do título de Mestre em Educação Matemática**.**

Campo Grande, MS_______de ________________de 2013

COMISSÃO EXAMINADORA

____
Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

____
Profª. Drª. Marta Maria Pontin Darsie
Universidade Federal de Mato Grosso – UFMT

____
Profª. Drª. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

____
Prof. Dr. Márcio Antônio da Silva (Suplente)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

Este trabalho é dedicado ao meu esposo George, pelo companheirismo, apoio, incentivo, compreensão, paciência, carinho e amor.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por ter concedido a mim a vida e a saúde e por me presentear com o desejo da busca, não me deixando esmorecer nos momentos difíceis.

Aos meus pais, Aparecida e Alcindo, meus primeiros mestres, que me ensinaram o valor da vida e dos estudos.

Aos meus irmãos, Cristina, Celso e Silvio pelo apoio e incentivo que recebi para estudar e com os quais sempre pude contar nos momentos de alegria e cansaço.

Ao meu esposo, por ter me concedido a graça de ser mãe e passar por essa vida conhecendo o mais puro e verdadeiro amor.

A minha filha, Isabela, tão pequenina e com enorme poder. Todo o meu cansaço se dissipa diante do seu sorriso e da sua companhia.

Ao meu orientador, professor Dr. José Luiz Magalhães de Freitas, por aceitar a orientação desta pesquisa, pela disponibilidade prestada, pelas correções, sugestões e discussões, que tanto contribuíram para minha reflexão como professora e pesquisadora, pela paciência, atenção e confiança.

À professora Profª. Drª. Marilena Bittar, por aceitar participar da banca examinadora, pela docente exemplar, pela consideração e pelas valiosas sugestões e críticas realizadas na ocasião da qualificação, bem como durante as disciplinas do Mestrado.

À professora Profª. Drª. Marta Maria Pontin Darsie, por aceitar participar da banca examinadora, pela doação do seu tempo e saber e pelas valiosas contribuições a fim de enriquecer este trabalho.

Aos professores do Mestrado em Educação Matemática da UFMS, Prof. Dr. Luiz Carlos Pais, Profª. Drª. Luzia Aparecida Souza, Prof. Dr. Márcio Antônio da Silva, Profª. Drª. Patrícia Sândalo Pereira, Profª. Drª. Suely Scherer, com os quais tive o privilégio de conviver e aprender; pela grande contribuição em minha formação no Mestrado, pelas críticas e questionamentos que despertaram tantas reflexões e me fizeram amadurecer enquanto educadora. Sem dúvida, cada um a seu modo contribuiu para o meu crescimento intelectual e profissional.

À CAPES, pelo apoio financeiro, pois diante de tantas dificuldades, foi um problema a menos nesta caminhada.

Aos colegas da turma, especialmente Juliana, Isis, Agnaldo, Thiago e Kely pela amizade, carinho, conversas, troca de conhecimentos e experiências e pelo apoio para que eu conseguisse concluir esta grande tarefa.

RESUMO

Esta pesquisa tem como objetivo analisar a mobilização de registros numérico, algébrico e geométrico, por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, ao resolver equações do segundo grau na forma completa por meio de fatoração. Para atingir tal objetivo, utilizamos como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida na França por Guy Brousseau (1986), particularmente as situações adidáticas com ênfase na de validação e a situação de institucionalização e também a Teoria dos Registros de Representação Semiótica concebida por Raymond Duval (1995), tendo como foco os aspectos relacionados ao tratamento e à conversão de registros. Utilizamos alguns erros em álgebra proposto por Booth (1995), Alonso *et al* (1993) e Nguyen (2006). O referencial metodológico no qual nos apoiamos foi a Engenharia Didática, conforme descrição de Artigue, para elaborar, aplicar e interpretar nossa sequência de atividades. Para sua concretização, seguimos as quatro fases denominadas de análise preliminar, concepção e análise a priori, experimentação e análise a posteriori e validação. Na fase da análise preliminar realizamos um estudo bibliográfico sobre a epistemologia e abordagens das equações do 2º grau. Na fase da concepção e análise *à priori* elaboramos uma sequência didática, composta por três blocos de atividades, bem como a descrição e previsão de possíveis ocorrências durante sua aplicação. Na fase da experimentação coletamos os dados por meio de produções escritas e gravações em áudio das discussões dos alunos acerca das atividades aplicadas, para as quais realizamos posteriormente a análise *a posteriori* e a validação. A investigação experimental foi realizada em uma escola pública de Campo Grande – MS, com um grupo de alunos voluntários, no contra turno do horário de suas aulas regulares. As análises mostraram que os alunos resolvem equações do 2º grau por meio da fatoração, tanto utilizando registros algébricos como geométricos. Os resultados da pesquisa sinalizaram que, na resolução das equações do segundo grau completas, os alunos encontraram maior dificuldade no uso do registro de representação geométrica do que com o de representação algébrica. Constatamos que no tratamento algébrico houve erros provenientes da manipulação algébrica e, dificuldade, com a conversão do registro algébrico para o registro geométrico. A utilização numa mesma atividade dos registros algébrico e geométrico contribuiu para verificar a validade do outro registro, como também, para a busca dos erros e de resolução satisfatória, favorecendo o desenvolvimento de situações adidáticas de validação.

Palavras-chave: Fatoração. Registros de Representação Semiótica. Equação do 2º grau. Ensino Fundamental. Educação Matemática.

ABSTRACT

This research aims to analyze the mobilization of records arithmetic, algebraic and geometric for students in 9th grade of elementary school to solve quadratic equations in complete form by factoring. To achieve this goal, we use as theoretical background the Theory of Didactic Situations, specifically the a-didactic situation of validation and the didactic situation of institutionalization developed in France by Guy Brousseau (1986) and the Theory of Semiotic Representation Registers designed by Raymond Duval (1995), emphasizing aspects related to the processing and conversion. We also use the errors in algebra proposed by Booth (1995), Alonso et al (1993) and Nguyen (2006). The methodological framework in which we stand was the Didactical Engineering, as described by Artigue to develop, apply and interpret our sequence of activities. For its realization, we called the four phases of preliminary analysis; design and *a priori* analysis; experimentation and *a posteriori* analysis; and validation. In the preliminary stage of the analysis we conducted a bibliographic study on epistemology and approaches of the equations of the second degree. At the stage of design and *a priori* analysis we created a didactic sequence composed of three blocks of activities, which led to the description and prediction of phenomena. At the stage of trial data was collected through productions written and audio recordings of discussions about the activities of students, for which we performed further analysis and subsequent validation. The experimental investigation was conducted in a public school in Campo Grande - MS, with a group of student volunteers outside their regular classes. The analysis showed that students solve equations of the second degree by factoring, using both algebraic and geometric records. The survey results signaled that, in solving complete quadratic equations, students found greater difficulty in using the geometrical representation of the record than the algebraic representation.

Keywords: Factoring. Semiotic Representation Register. Quadratic equation. Elementary School. Mathematics Education.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE PROTOCOLOS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Durante meus estudos no Ensino Fundamental lembro-me que todos os alunos diziam que a sétima série, hoje oitavo ano, era a série mais difícil, devido a Matemática. Assim, como muitos de meus colegas da escola, também tive dificuldades. Hoje, como professora, vejo que pouca coisa mudou no ensino das primeiras noções algébricas desta série e, aquela dificuldade sentida por mim e meus colegas, continua perpetuando-se. Ao ministrar aulas por anos consecutivos em turmas do último ano do Ensino Fundamental, observamos comportamentos semelhantes entre os alunos com relação à resolução das equações do 2º grau. Percebemos que dada uma equação do 2º grau completa e organizada de acordo com a sua forma geral, o aluno que memorizou a fórmula de resolução conseguiu resolver uma equação como $x^2-6x+9=0$. No entanto, dada uma equação do tipo $(x+2)^2 = 0$ ou $x (x-2) = - 4$, em que o aluno precisava mobilizar alguns conhecimentos algébricos para resolvê-la, havia uma tendência a erros, os quais, para nós, indicam que o conhecimento algébrico dele era insuficiente para a realização dessas tarefas.

Diante dessa constatação, decidimos investigar a abordagem alternativa para o ensino das equações do 2º grau, a resolução pela fatoração, em particular pelo completamento do quadrado, a fim de analisar a mobilização do conhecimento algébrico já estudado por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

Analisamos como o livro didático (DANTE, 2009), adotado pela escola onde ministrávamos aulas, tratou o tema fatoração e completamento do quadrado no volume do oitavo ano, para termos noção de como o ensino vinha sendo proposto. Assim, notamos a ênfase no uso das técnicas de fatoração e a introdução da resolução geométrica para o quadrado da soma e da diferença de dois termos.

Recorremos ainda ao professor desse ano e o interrogamos a respeito de como ensinou a fatoração, em particular o completamento do quadrado. O professor esclareceu que havia trabalhado com todos os casos de fatoração trazidos pelo livro e os produtos notáveis (o livro adotado (DANTE, 2009) não traz a fatoração por meio do completamento do quadrado no oitavo ano). Observou que trabalhou todo o conteúdo utilizando as técnicas lá descritas e que não havia utilizado recursos geométricos, material concreto ou manipulável para o ensino.

Com isso, percebemos que tanto o livro didático como o professor vêm abordando de forma similar as primeiras noções algébricas do conteúdo em questão, trabalhando somente com técnicas e memorização de noções abstratas; pode-se, assim, justificar as dificuldades apresentadas pelos alunos diante da resolução, por exemplo, de um quadrado da soma de dois termos ou da fatoração de um trinômio quadrado perfeito.

Por meio da análise de pesquisas e leituras de textos sobre o tema iniciamos o estudo sobre a resolução das equações do segundo grau. Delimitamos como nosso objeto de pesquisa a resolução das equações do segundo grau completas e incompletas, por meio da fatoração.

Preparamos[1] uma sequência de atividades, com base na Teoria das Situações Didáticas como referencial teórico e na Engenharia Didática como referencial metodológico. Desenvolvemos a sequência de atividades no período de agosto a dezembro de 2011, em uma escola pública da rede municipal de ensino de Campo Grande – MS, em duas turmas de nonos anos em que eu ministrava aulas.

Nossa sequência começava com as equações incompletas dos tipos: $ax^2 = 0$, $ax^2 + bx = 0$ e $ax^2 + c = 0$ e seguia com as equações completas. Primeiro procuramos buscar no aluno formas conhecidas por eles, que resolvessem de forma satisfatória a equação, pois assim eles poderiam perceber que com algum conhecimento matemático era possível encontrar a solução. Percebemos que a estratégia mais usada pelos alunos foi a de tentativa e erro.

Fomos aumentando o nível de dificuldade das atividades a fim de que os alunos pudessem buscar outros conhecimentos matemáticos já estudados e os reinvestissem na resolução das equações. Observamos que quando a equação apresentava somente uma resposta, ocorreu a resolução e possivelmente a compreensão (ex: $x^2 = 0$, $3x^2 = 0$); quando as equações possuíam duas respostas, eles continuavam a apresentar somente uma solução.

Alguns entraves foram seguidamente aparecendo. Inicialmente, muitos alunos demonstravam dificuldades em relação às operações inversas, propriedade distributiva em relação à adição e subtração, potência de números negativos, operações com inteiros, operações com monômios e polinômios, equação do 1º grau, valor numérico de uma expressão algébrica, multiplicação de binômio por binômio. Depois quanto à fatoração: fator comum em evidência, reconhecimento de um trinômio quadrado perfeito e sua forma fatorada, quadrado da soma e sua identidade, quadrado da diferença e sua identidade. Nesse trabalho, em todas as sessões tínhamos que retomar conteúdos, assim, apresentávamos aos alunos por meio de atividades ou exemplos para discussão. Para auxiliar na compreensão da fatoração, utilizamos como recurso didático, figuras e ilustrações com exemplos numéricos e o material dourado.

[1] Usaremos primeira pessoa do plural, pois se trata de um trabalho conjunto entre orientador e orientanda.

Posteriormente, outra dificuldade foi termos alunos em sala de aula com níveis muito diferentes de conhecimentos e de motivação para os estudos; alguns deles com lacunas de aprendizagem, que não permitiam sequer compreenderem os objetivos propostos. Durante esse trabalho percebemos que alunos do 9º ano apresentam dificuldades relativas a conceitos básicos, dentre eles, reconhecer a diferença entre quadrado e retângulo tanto visualmente como por meio da definição e também a soma e multiplicação de monômios como x.x, conhecimentos que acreditávamos que eles possuíam. Essas dificuldades e a apresentação de resistências exigiriam um trabalho de longo prazo, que extrapolava as condições oferecidas pela escola pesquisada.

Para a aprendizagem da resolução de equações do 2º grau por meio de fatoração há um campo de conteúdos envolvendo operações com números inteiros, cálculo literal, fatoração, resolução de equações do 1º grau, entre outros, dos quais os alunos necessitam possuir um nível mínimo de conhecimento. Nossa proposta de atividade exigia dos alunos uma postura ativa que envolvia estudos individuais e em grupo.

Enfim, no mês de dezembro, após análise desses dados coletados, percebendo as dificuldades apresentadas pelos alunos na realização das atividades, e pelo fato de eles não conseguirem realizar as atividades de completar o quadrado numa equação $ax^2 + bx + c = 0$, para obter a fórmula de resolução, concluímos que, completar o quadrado na forma algébrica seria um grande desafio para eles, e como não havia tempo suficiente para superá-lo, decidimos então, pela aplicação de uma nova sequência de atividades, com alunos que tivessem maior conhecimento do conteúdo de fatoração. As limitações oferecidas pela escola pública, as dificuldades de compreensão dos alunos e os prazos a serem cumpridos no desenvolvimento de uma pesquisa de mestrado, foram fatores que definiram esta nossa opção.

Ressaltamos que esta primeira experiência com o desenvolvimento de uma sequência de atividades foi bastante enriquecedora para nossa prática docente e, ajudou-nos a repensar a sequência de atividades apresentada aos alunos, a redefinir nosso objeto de pesquisa e preparar um novo trabalho, que viabilizasse o atendimento dos objetivos de nossa pesquisa.

Com a expectativa de obter novas respostas referentes aos objetivos da pesquisa, delimitamos o trabalho para a "resolução de equações do 2º grau completas por fatoração" e, optamos, por realizar uma segunda sequência de atividades mais focada na mobilização de alguns registros de representação semiótica, no processo de resolução de equações do 2º grau completas, por meio da fatoração. Para esta nova sequência de atividades buscamos um alunado de outra escola, que tivesse maior conhecimento do campo conceitual requerido para a realização da experimentação, em que procuramos analisar os registros mobilizados.

Para a análise teórica das produções dos alunos, durante o desenvolvimento da sequência, utilizamos, além da Teoria de Registro de Representação Semiótica (TRRS), elementos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), que nos auxiliaram no exame das situações adidáticas, particularmente as de validação, nas quais procuramos sempre instigar o aluno a verificar a validade de sua resolução, culminando na situação de institucionalização, que "visa estabelecer o caráter de objetividade e universalidade do conhecimento" (FREITAS, 2010, p. 101).

A Teoria de Registros de Representação Semiótica serviu de guia na elaboração das atividades e, como base para a análise da mobilização de registros numérico, algébrico e geométrico do conteúdo em estudo, privilegiando o estudo de dificuldades na conversão e nos tratamentos dos mesmos. Concordamos com Duval (2010), que enfatiza que as representações semióticas têm um papel relevante na compreensão em matemática e que para tal, é necessária a coordenação de no mínimo dois registros. Assim, acreditamos que a mobilização dos registros propostos em nosso trabalho pôde favorecer a construção do conhecimento pelo aluno.

Como metodologia de pesquisa nos apoiamos na Engenharia Didática para elaborar, realizar e interpretar nossa sequência de atividades. Para sua realização, fez-se necessária a análise preliminar do conteúdo em estudo, a descrição e previsão das concepções e análise *a priori* das atividades, a experimentação e, por fim, a análise *a posteriori* e validação, que foi realizada pelo confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, validando ou refutando as hipóteses levantadas.

A presente pesquisa teve como questão central "Como a mobilização de diversos registros de representação, por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, pode se manifestar na apreensão da resolução de equações do 2º grau completas, por meio da fatoração?" Desse modo, definimos como objetivo geral: "analisar a mobilização de registros numérico, algébrico e geométrico, por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, para resolver equações do segundo grau na forma completa, utilizando o método do completamento do quadrado".

Visando alcançar o objetivo geral proposto em nossa pesquisa, elencamos os seguintes objetivos específicos:

- Investigar e analisar a mobilização de registros numérico, algébrico e geométrico na fatoração por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental;
- Investigar e analisar dificuldades dos alunos quanto ao tratamento e conversão nos registros utilizados na resolução de equações do 2º grau.

- Estudar dificuldades dos alunos em passar de casos particulares à formula geral de resolução da equação do segundo grau, por meio da fatoração.

Nosso trabalho é composto de quatro capítulos. No primeiro apresentamos um levantamento histórico que procurou revelar o porquê da “fórmula geral de resolução da equação do 2º grau” ser denominada de “fórmula de Bhaskara”, uma discussão sobre a contribuição e finalidades do ensino da álgebra, algumas pesquisas sobre o tema e o processo do completamento do quadrado para a resolução da equação do 2º grau nas formas algébrica e geométrica; no segundo, apresentamos uma análise da abordagem das equações do 2º grau nos documentos oficiais, livros didáticos e em documento da escola pesquisada; no terceiro, apresentamos os aportes teóricos que deram suporte para a realização desta pesquisa.

No quarto capítulo, expusemos a escolha das variáveis didáticas e os procedimentos para a realização da pesquisa. Descrevemos a sequência de atividades, as análises *a priori* de cada atividade destacando as principais estratégias de resolução e as análises *a posteriori* das mesmas, confrontando os dados coletados com as estratégias previstas nas análises *a priori*.

Por fim, tecemos considerações acerca desse estudo, onde apresentamos os principais resultados, dificuldades encontradas e algumas sugestões para novas pesquisas.

1 ESTUDOS PRELIMINARES

Este capítulo contribui para cumprirmos uma etapa da Engenharia Didática, denominada de análises preliminares, em que somos chamados a realizar uma análise do conteúdo em estudo e do ensino atual e seus efeitos, dentre outras. Para isso, optamos por iniciar com uma análise da origem da denominação de "*Fórmula de Bhaskara*", no Brasil, para a fórmula de resolução da equação do 2^o grau e as razões para tal. Em seguida, apresentamos opiniões de diversos autores sobre o ensino de álgebra, bem como trazemos à tona um pouco da problemática em que está inserido, atualmente, o ensino desse tema, como ocorre esse ensino na visão dos autores e os problemas gerados por ele. Com isso, procuramos suscitar uma reflexão sobre o ensino de álgebra em vigor e a sua viabilidade, ou talvez, a necessidade da implementação de mudanças neste ensino, colocando nosso trabalho como uma contribuição a mais. Além disso, destacamos algumas pesquisas que mostram os erros e dificuldades mais comuns apresentados pelos alunos, na resolução de equações e equações do 2^o grau.

Evidenciamos, também, o processo do completamento do quadrado para a resolução da equação do 2^o grau, nas formas algébrica e geométrica dos quadrados da soma e da diferença de dois termos, proposto em livros didáticos do ensino fundamental, haja vista que são representações semióticas utilizadas como proposta de ensino neste trabalho.

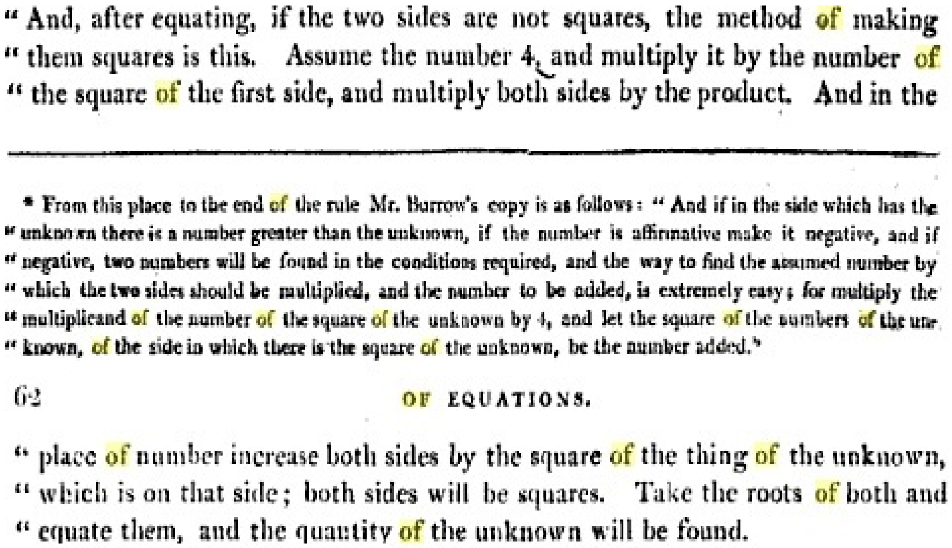
Lembramos que a nossa proposta é analisar a mobilização dos vários registros de representação semiótica, por meio da fatoração, na apreensão da resolução de equações do 2^o grau completas. Ao utilizar a fatoração para resolver equações do 2^o grau, acreditamos que damos sentido à fatoração, usando-a como ferramenta e, ao mesmo tempo, retomando e reinvestindo esse conhecimento na solução das equações.

1.1 A Fórmula de Bhaskara

Na década de 1930, a legislação escolar brasileira manifesta a preocupação de introduzir elementos históricos na matemática escolar. No livro Elementos da Álgebra de André Perez y Marin, de 1928, o autor propôs informar ao leitor a origem de expressões utilizadas em matemática. É neste livro que encontramos, pela primeira vez, referência à atribuição do nome Bhaskara[2] à fórmula geral para resolução da equação do 2º grau.

Neste livro, no item Resolução da Equação Completa do 2º grau, ao obter a fórmula geral de resolução de tais equações por meio de um método algébrico, iniciado pela multiplicação de todos os membros da equação por 4a, depois somando b^2 a ambos os membros da equação, chegou-se a fórmula geral de resolução da equação do 2º grau. (MIGUEL; MIORIM, 2005). O autor colocou uma nota de rodapé, na qual afirmou que "este método de resolução, notável pela sua simplicidade, é devido a Bhaskara", (PEREZ; MARIN, 1928, p. 216 apud MIGUEL; MIORIM, 2005, p. 30).

Fomos buscar fontes que nos garantissem que realmente Bhaskara descreveu este método; assim, encontramos a tradução da Bija Ganita, escrito por Bhaskara.


" And, after equating, if the two sides are not squares, the method of making
" them squares is this. Assume the number 4, and multiply it by the number of
" the square of the first side, and multiply both sides by the product. And in the

* From this place to the end of the rule Mr. Burrow's copy is as follows: " And if in the side which has the " unknown there is a number greater than the unkown, if the number is affirmative make it negative, and if " negative, two numbers will be found in the conditions required, and the way to find the assumed number by " which the two sides should be multiplied, and the number to be added, is extremely easy; for multiply the " multiplicand of the number of the square of the unknown by 4, and let the square of the numbers of the un- " known, of the side in which there is the square of the unknown, be the number added."

62 OF EQUATIONS.

" place of number increase both sides by the square of the thing of the unknown,
" which is on that side; both sides will be squares. Take the roots of both and
" equate them, and the quantity of the unknown will be found.

Figura 1: Método de obtenção da fórmula resolutiva da equação do 2º grau, descrito por Bhaskara

Fonte: Bija Ganita or the Álgebra of the Hindus, Strachey, 1819, p. 61-62

De acordo com o texto acima podemos nos certificar que Bhaskara descreveu este método para determinar a fórmula de resolução da equação do 2º grau, que encontramos em livros didáticos atuais brasileiros.

Contudo, ao que tudo indica, foi devido à nota de rodapé presente na obra de André Perez y Marin, descrita acima, que o nome de Bhaskara ficou atrelado à resolução da equação

[2] Adotaremos esta grafia em acordo com Merzbach; Boyer (2011).

do 2º grau no Brasil[3], porém tratamos como fórmula geral de resolução da equação do segundo grau ou fórmula quadrática, indicado na nomenclatura mais geral.

Em nosso trabalho não nos aprofundamos no estudo da fórmula quadrática, mas mostramos, por meio das análises dos livros didáticos, que aplicando o método do completamento do quadrado na forma geral da equação do segundo grau, obtemos tal fórmula. Propusemos aos alunos, em nossa sequência de atividades, a obtenção da fórmula de resolução da equação do 2º por meio do completamento do quadrado na forma geral. A ideia central que utilizamos é a mesma proposta por Bhaskara, porém realizamos somando $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ nos dois membros da equação para obter um trinômio quadrado perfeito.

1.2 Considerações sobre a Álgebra e as Equações

A resolução de equações era o tema principal da obra *Hisob al-jabr wa'l muqabalah* (ciência da transposição e do cancelamento) de Al-Khwarizmi[4], escrita entre 813 e 833, e representa o ponto inicial de nossa álgebra. O conhecimento da álgebra disseminou-se na Europa por meio de um texto dessa obra que se preservou e foi traduzido para o latim no século XII, séculos das traduções; assim, "a palavra al-jabr ou álgebra tornou-se sinônimo de ciência das equações" (EVES, 2004, p. 266). O al-jabr é bem mais próximo da álgebra elementar atual e sua linguagem é simples e prática.

> Especialistas em história da matemática são unânimes em admitir que foi com este pequeno tratado que se deu o nascimento oficial da álgebra como disciplina e com tudo o que lhe é adjacente: nome, objetos, algoritmos, demonstrações, aplicações etc. (DJEBAR, 1995, p. 7 apud ANDRADE, 2000, p. 46)

Assim, "a preservação da Álgebra de Al-Khowarizmi pode ser tomada como um indício de que era um dos melhores textos típicos da álgebra da época. Foi para a álgebra o que Os elementos de Euclides foi para a geometria". (BOYER, 1974, p. 170)

Depois de passados quase mil anos temos alguns indícios de que as equações do 2º grau passaram a ser ensinadas no Brasil, a partir de 1779 na Academia Real da Marinha no Rio de Janeiro. Segundo Valente (2007, p. 91), o ensino era "composto pelos princípios da

[3] Essa regra não foi descoberta por Bhaskara**,** ao que tudo indica ela era do conhecimento do matemático Sridara, que viveu há mais de 100 anos antes de Bhaskara Acharya.

[4] Adotaremos esta grafia em acordo com Merzbach; Boyer (2011).

álgebra até as equações do 2^o grau, e suas aplicações na aritmética e geometria". A partir de então a álgebra foi tomando lugar no ensino e hoje é conteúdo presente nas escolas brasileiras, iniciando oficialmente no sétimo ano do Ensino Fundamental. Porém, há muita discussão sobre a contribuição da álgebra e as finalidades do seu ensino. Com o fim de entendermos alguns pontos de vista com relação ao ensino da álgebra, destacamos alguns autores que achamos pertinentes para essa discussão.

Com relação à finalidade, Usiskin (1995), descreveu que a principal questão que envolve o ensino da álgebra hoje é a exigência da capacidade do aluno de tratar diversas técnicas manipulatórias e, em razão disso, as primeiras noções de álgebra têm sido dominadas pela prática do uso exagerado de símbolos. Para ele, a álgebra "é a chave para a caracterização e a compreensão das estruturas matemáticas" (p. 21), pois provê meios para se desenvolver e analisar relações. Observa-se uma controvérsia no ensino desta, pois todos almejam que os alunos tenham facilidade com a manipulação do simbolismo algébrico para poderem lidar abstratamente com as técnicas adequadas; no entanto, para que isso ocorra é necessário dar sentido ao ensino de tais técnicas.

Para Post; Behr; Lesh (1995, p. 102), "os alunos devem perceber as conexões entre as equações abstratas da álgebra e o mundo real da aritmética". A introdução à álgebra deve levar em consideração que as variáveis podem ser manuseadas se assemelhando a aspectos do mundo real, partindo dos conhecimentos numéricos, por exemplo. Por isso a álgebra é de suma importância e tem o caráter abstrato. Booth (1995), em sua pesquisa, elencou dificuldades dos alunos na compreensão da álgebra devido a uma má compreensão no campo numérico, que podem ser geradas por essa falta de conexão citada pelos autores Post, Behr e Lesh.

Com relação à contribuição do ensino da álgebra, Castro (2003) destacou que o processo de utilização de simbolismos na álgebra propiciou tantas facilidades em seu ensino que pouco a pouco a álgebra deixou de ser para poucos indivíduos, para se tornar uma disciplina que é considerada requisito para a formação do cidadão comum. Hoje é ensinada formalmente em escolas de todo o Brasil, principalmente nas séries finais do Ensino Fundamental. Porém, segundo a mesma autora, o ensino da álgebra vem apresentando tantos fracassos que passou a ser um elemento de exclusão, uma vez que os alunos não conseguem compreendê-la e acabam realizando as atividades mecanicamente sem entender seu significado, transformando a álgebra num compêndio de sinais, símbolos e regras e, concomitantemente, num pesadelo.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam que “a ênfase que os professores dão a esse ensino não garante o sucesso dos alunos” (BRASIL, 1998, p. 115). Recomendam que é necessário ter clareza de seu papel no currículo, além do conhecimento de como os alunos constroem o conhecimento matemático, devendo considerar a variedade de representações, deixando implícita a importância da teoria proposta por Duval (1995). Com relação ao ensino das equações do 2º grau, os PCN (BRASIL, 1998) recomendam que sejam resolvidas pela fatoração, por meio de resolução de situações de aprendizagem a fim de se discutir o significado das raízes. De acordo com alguns livros didáticos por nós analisados, observamos que o conteúdo referente à fatoração é geralmente trabalhado em um ano escolar enquanto as equações do 2º grau em outro. A fatoração é ensinada como uma técnica, enquanto a equação do 2º grau é por meio de uma fórmula resolutiva. Dessa forma, esses conteúdos são vistos em anos distintos e o aluno encontra dificuldade em reconhecer a forma fatorada na representação de uma equação do segundo grau. Duval (2010) alerta que o aluno deve reconhecer um objeto matemático em pelo menos duas representações para melhor compreendê-lo e acrescenta que a capacidade de compreensão em matemática está ligada à capacidade de mudar de registro.

Contudo, baseando-se na proposta de ensino do Brasil, evidenciado pelos PCN (BRASIL, 1998) e livros didáticos, vemos que um ensino com ênfase na resolução da equação do 2º grau por meio da fórmula resolutiva é limitante, pois foca a aprendizagem de técnicas em detrimento de uma compreensão mais ampla; portanto, trata-se de uma abordagem questionável. É provável que muitas dificuldades que percebemos nos alunos com relação à aprendizagem desses conceitos algébricos sejam resultado de um ensino apenas por regras e procedimentos, não provocando a compreensão dos conceitos e nem das suas diferentes representações. Eisenberg e Dreyfus (1995) dizem que a definição da raiz da equação do 2º grau indica o conhecimento mínimo que um aluno necessita para dar início a um estudo significativo da resolução de equações, no entanto, a maioria dos alunos não sabe achar as raízes de uma equação, pois para eles achar as raízes de uma equação significa pôr números em uma fórmula. Na visão desses autores a perspectiva com relação à aprendizagem de alunos com esse perfil de ensino pode ser muito restrita, tendendo em sua vida escolar a repetir procedimentos mais do que entender o seu sentido, além do que traz em si o perigo do indivíduo passar a enxergar a matemática como um aglomerado de algoritmos inúteis e ficar com sua aprendizagem limitada, bem como dificultar a realização de tarefas de generalizar ou mesmo de reinvestir conhecimentos.

Para esses autores, a solução para o problema ocorrerá por meio da valorização do ensino dos polinômios, pois segundo eles, é possível com o seu ensino realizar a fatoração, determinar raízes racionais, soma e produtos de raízes, traçar gráficos e funções racionais; o raciocínio empregado na resolução de equações polinomiais pode ser empregado em muitas outras situações. Nos parece plausível as ideias dos autores, Eisenberg e Dreyfus, pois teríamos uma abordagem matemática ampla, dotada de sentido e importante na formação matemática dessas pessoas. Assim, as atividades algébricas em nosso trabalho e o uso da fatoração na resolução de equações do 2^o grau, “devem possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações de aprendizagem que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema.” (BRASIL, 1998).

No que concerne às pesquisas relacionadas ao tema, Lins e Gimenez (1997, p. 137), observam que “A atividade algébrica consiste no processo de produção de significados para a álgebra”. É nesse sentido que se entende o estudo algébrico como efetiva construção de conhecimento, capaz de produzir significado. No entanto, diversas pesquisas em Educação Matemática revelam que o ensino e a aprendizagem de álgebra têm corroborado para que “nossos alunos permaneçam impedidos de compreender um aspecto chave de nossa cultura: pensar o mundo em números” (p. 163).

Dentre essas pesquisas, destacamos Nguyen (2006), Burigato (2007), Melo (2010), Rosa (2009) e Dias (2009), que identificaram em suas análises dificuldades de alunos em conceitos algébricos, que por sua vez impedem o aluno de ascender em outros conteúdos importantes para o seu desenvolvimento.

Com base na Teoria Antropológica do Didático, Nguyen (2006) fez um estudo do tratamento dado à resolução das equações do segundo grau no ensino secundário do Vietnã e da França, verificando o que cada programa exigia do aluno e o impacto das diferentes opções de conteúdo visado. Ele observou que, tanto num país como no outro, a álgebra desempenha papel importante na escola de Ensino Médio, porém há uma grande diferença em suas abordagens. Seu estudo tem como base a análise de livros didáticos dos países envolvidos.

Para o ensino de resoluções de equações quadráticas no Vietnã, as técnicas utilizadas foram baseadas em propriedades de fatoração no conjunto dos polinômios; já na França, a solução da equação algébrica foi organizada em torno da fatoração da equação e a técnica gráfica desempenhou papel importante. Nguyen (2006) fez uma síntese dos erros na resolução das equações do 2^o grau, que são:

1. não tem domínio de conhecimentos indispensáveis (manipulação algébrica) para resolução;

2. falha de prioridade de uma operação em relação à outra ou das identidades notáveis;
3. erros diversos de fatoração, exemplo: ab+acd = a(b+c+d);
4. uso de técnicas válidas, mas não adequadas para o objeto em estudo, por exemplo realização de uma determinada técnica de fatoração para obter uma equação do 1º grau[5];
5. extração da raiz quadrada de um quadrado, $\sqrt{a^2} = a$ por exemplo, sem verificar a condição de existência da raiz, exemplo: $\sqrt{\frac{-5x+7}{2}}$, x $\leq \frac{7}{5}$;
6. uso abusivo de técnicas que são válidas para resolver uma equação do 1º grau.

Burigato (2007) fez um estudo das dificuldades na aprendizagem da fatoração, com o objetivo de identificar teoremas em ação utilizados pelos alunos na resolução de equações. Nesse estudo utilizou a teoria dos campos conceituais, Vergnaud (1990) e como metodologia de pesquisa a análise teórica proposta por Henry (2006).

Burigato (2007) constatou que as principais dificuldades levantadas nas análises desses teoremas dizem respeito aos conhecimentos envolvidos na formação do Campo Conceitual da fatoração, destacando a divisão e a multiplicação de expressões algébricas, redução de termos semelhantes e raiz quadrada. Também observou que muitos alunos não relacionavam a fatoração a um produto de fatores. Revelou que a fatoração foi apresentada de forma compartimentada e que não foi aplicada em várias situações que seria pertinente, como na fatoração de trinômios quadrados perfeitos para completar quadrados e no estudo da equação da circunferência.

Melo (2010), em seu trabalho, teve como objetivo estudar procedimentos de verificação de igualdades de expressões algébricas ao realizar cálculo algébrico utilizando os quadros numérico, algébrico e geométrico, com base na Teoria das Situações Didáticas, Brousseau (1986) e Jogo de Quadros, Douady (1986); fez uso da metodologia de Engenharia Didática descrita por Artigue (1996). Ele enfatizou que foi possível observar que parte dos alunos apresentaram dificuldades em atividades que exigiam compreensão de cálculos algébricos, bem como não apresentaram conhecimento mínimo satisfatório sobre perímetro, área e operações com expressões algébricas. Em vários momentos, alguns alunos quiseram realizar soma de termos algébricos não semelhantes; o pesquisador observou certa confusão ao realizar operações com termos semelhantes e dificuldade para realizar a verificação com expressões algébricas.

---

[5] Os erros destacados por Nguyen (2006), elencados como 4, 5 e 6 não foram identificados em nosso trabalho, talvez devido as escolhas didáticas realizadas nestes dois países.

Destacando as dificuldades dos alunos referentes ao tema equação do segundo grau, Rosa (2009), de acordo com a Teoria do Ensino Desenvolvimental formulada por V.V. Davydov, realizou uma pesquisa qualitativa que consistiu num experimento didático-formativo de acordo com os pressupostos de Davydov (1988). Sua coleta dos dados se deu por meio de observações, entrevistas semiestruturadas e instrumentos de avaliação da aprendizagem. Entre outras conclusões, Rosa (2009, p.19) apontou que "o conhecimento numérico dos alunos não era suficiente para que resolvessem as questões e avançassem no conhecimento algébrico".

Dias (2009) teve como objetivo analisar a possibilidade de compreensão das soluções de uma equação do 2º grau utilizando processos geométricos da História da Matemática. Dias teve como base a elaboração e aplicação de um conjunto de atividades de ensino baseada na teoria construtivista formulada por Piaget. A pesquisa fez abordagem metodológica quali-quantitativa, por envolver aspectos qualitativos e quantitativos, enfatizando aspectos qualitativos, uma pesquisa caracterizada de pesquisa-ação. Em sua conclusão, Dias apontou erro como falta de pré-requisitos necessários ao trabalho com o enfoque geométrico dado em sua pesquisa: cálculo de áreas de retângulos, resolução de equações do 1º e 2º graus.

Com relação aos erros em álgebra, em particular na resolução de equações do 1º e 2º graus, destacamos as principais dificuldades enfrentadas por alunos durante o processo de resolução. Entendemos que a aprendizagem da equação do 2º grau não é isolada, pois ela necessita de conhecimentos prévios da álgebra e equações, como por exemplo, ao resolver a equação $x^2+4x+4=0$ pela fatoração, temos $(x+2)^2=0$, que o aluno poderá utilizar o conhecimento sobre as equações do 1º grau para encontrar a raiz. Portanto, a nosso ver, não faria sentido nos restringirmos apenas aos erros nas equações do 2º grau.

Não encontramos na literatura trabalhos que se dedicassem especificamente aos erros e dificuldades dos alunos na resolução de equações do 2º grau; assim, tendo em vista que utilizamos a fatoração e o completamento do quadrado como formas de determinar as raízes reais de uma equação do 2º grau, optamos por analisar erros da álgebra elementar que podem interferir nesse processo.

Para melhor compreender os erros dos alunos, sobretudo nos conteúdos do campo algébrico, levamos em consideração os estudos de Booth (1995); para os erros em equações, Alonso *et al* (1993).

Booth (1995), por meio de um projeto de pesquisa realizada no Reino Unido de 1980 a 1983 com alunos da oitava à décima série (13 a 17 anos) tentou identificar os tipos de erros mais comuns dos alunos e as razões desses erros. Tais alunos já haviam trabalhado com simplificação de expressões algébricas, fatoração, equações do 2º grau, entre outros.

A partir deste estudo, Booth (1995) verificou erros semelhantes em todas as séries, indicando que os erros dos alunos tinham origem nas ideias que eles tinham especialmente sobre alguns aspectos, descritos a seguir:

a) O foco da atividade algébrica e a natureza das "respostas"

Na álgebra, o foco da atividade é, segundo Booth (1995, p. 24), "estabelecer procedimentos e relações e expressá-las numa forma simplificada geral", diferentemente da aritmética que busca respostas numéricas particulares. Em geral, o aluno não percebia esta diferença e continuava se apoiando na aritmética, emitindo respostas numéricas. A pesquisa realizada evidenciou que os alunos não aceitavam respostas como 11xy; diante dessa situação uma aluna justificou: "pensei que fosse para dar uma resposta" (BOOTH, 1995, p. 25 apud BOOTH 1984, p. 35-36), demonstrando claramente a não aceitação de uma resposta não numérica. Outros alunos pareceram aceitar respostas algébricas, porém com um único termo.

Um aluno, ao realizar a soma x+y, indicou como resposta z. Este problema observa Collins (1975, apud BOOTH, 1995, p. 27), "pode ocorrer porque os alunos têm dificuldade cognitiva em aceitar a ausência de fechamento", ou seja, o aluno aceita respostas apenas com um único termo. Para Davis (1975, apud BOOTH, 1995), este problema também pode derivar do dilema nome-processo, pois as expressões algébricas não fechadas não são apenas respostas, como podem também representar uma expressão de instrução ou procedimento.

O exemplo citado por Booth (1995) é n+3, que pode ser uma expressão de instrução ou procedimento, que afirma que se deve somar 3 à variável n: some 3 a n, e também uma resposta, que dá o resultado de ter efetuado uma adição: número que excede n em três unidades.

Embora erros desse tipo sejam mais raros na resolução de equações do 2º grau, eles podem ocorrer durante a resolução, na fase de simplificação. De fato, durante a resolução das atividades, constatamos que o aluno encontra dificuldade devido a resposta ser uma raiz quadrada de um número negativo, por exemplo; ele não compreende a solução, até mesmo, acredita que tal solução esteja errada, por crer que a resposta deve ser um número real.

b) Notações e convenções em álgebra

Segundo Booth (1995), as dificuldades que os alunos têm para simplificar expressões são decorrentes da sua interpretação do símbolo, uma vez que na aritmética, por exemplo, (+) significa realizar a operação e (=) significa determinar uma resposta. A ideia de que o símbolo de adição possa indicar tanto o resultado de uma adição como a ação e a igualdade possa ser vista como indicador de uma relação de equivalência em vez de "escreva a resposta", podem não ser percebidas pelo aluno, causando dificuldades na compreensão algébrica. O aluno pode criar esse tipo de convenção, devido à falta de compreensão dos objetos matemáticos, como por exemplo: a área é entendida apenas como lado vezes lado. Em uma equação do 2º grau a área pode ser expressa pelo termo independente c, ou seja, $ax^2+bx=c$.

Em exemplos como a+b, o aluno tende a juntar os termos resultando em ab, ou 5y, com y = 4, o aluno representa como 54, para y = 23, o aluno escreve 523, ou 28, 5 + 23. Isso aparece em aritmética, frações mistas, por exemplo: $2\frac{1}{2} = 2+\frac{1}{2}$, quanto ao valor posicional, por exemplo: 43 representa 4 dezenas e 3 unidades, pode levar o aluno a resolver de maneira semelhante em álgebra, (BOOTH, 1995). Para tentar amenizar essas dificuldades o autor sugere:

- deixar claro aos alunos que uma soma (2+3) não representa apenas uma instrução (somar 2 com 3), mas também o resultado da adição, lendo a expressão como: 2 mais 3, some 2 com 3 ou o número que é 3 mais que 2.
- trabalhar com o valor bidirecional do símbolo de igualdade tanto exigindo a leitura correta do símbolo de igual, suprimindo a expressão "dá", como proporcionando experiências com expressões como 6 = 4+2, 3+5 = 6+2.
- escrever por exemplo 5n na forma extensa (5 x n) para evitar a tendência de ver isso como soma em vez de um produto.
- por fim, não fazer uso de exemplos do tipo 3b + 2m (3 bananas + 2 maçãs) a fim de evitar erros que fornecem uma visão errada das letras e pode ser usado pelo aluno para justificar a simplificação 5bm (3 bananas + 2 maçãs é igual a 5 bananas e maçãs).

c) Os tipos de relações e métodos utilizados em aritmética

As dificuldades descritas nos itens anteriores provinham das diferenças entre aritmética e álgebra, mas segundo Booth (1995, p. 33):

> a álgebra não é isolada da aritmética; na verdade é, em muitos aspectos, a “aritmética generalizada”. Nisso está a fonte das dificuldades. Para compreender a generalização das relações e procedimentos numéricos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto numérico. Se não forem reconhecidos, ou se os alunos tiverem concepções erradas a respeito deles, seu desempenho em álgebra pode ser afetado. Nesse caso, as dificuldades que o aluno tem em álgebra não são tanto de álgebra propriamente dita, mas de problemas em aritmética que não foram corrigidos.

O autor constatou que das convenções aritméticas mal compreendidas, uma delas é o uso dos parênteses, porque muitos alunos acham que a sequência das operações deve seguir a mesma ordem da escrita e muitos vão mais além ainda, achando que mesmo mudando a ordem dos cálculos de uma expressão, o resultado é o mesmo. Outro fator causador de erros, segundo Booth, é a utilização de outros métodos (métodos informais ou método aritmético) para resolver problemas. Num estudo realizado por Ekenstam e Nilsson (1979) em uma escola sueca, com cerca de 200 alunos com 16 anos de idade, constataram que dos alunos que tinham resolvido a equação: $\frac{30}{x} = 6$, o índice de acerto foi de 82%, no entanto, para a equação estruturalmente semelhante: $\frac{4}{x} = 3$, apenas 48% dos alunos tiveram sucesso, mostrando que eles utilizavam métodos aritméticos para a resolução de equações. “No primeiro caso os alunos foram capazes de resolver a equação por verificação, um procedimento que não poderia ser aplicado de maneira tão imediata no segundo exemplo” (BOOTH, 1995, p.34).

Com relação à resolução das equações, analisamos o trabalho descrito por Alonso *et al* (1993), o qual realizou um estudo com alunos de 14 a 16 anos, em que analisou erros que aparecem frequentemente quando os alunos utilizam métodos formais de resolução de equações.

a) Dificuldade na mudança do conceito do símbolo igual

O símbolo de igual das equações perdeu seu caráter unidirecional, haja vista que até então o sinal de igual era percebido como “determinar uma resposta”, também destacado por Booth (1995); representa agora equilíbrio, que só se mantém para determinado valor da letra.

Isso pôde ser observado na resolução escrita para a equação 4x+3=2x+6 de uma aluna de 13 anos:

> 4x +3 + (-3) = 2x + 6 + (-3) = 4x = 2x + 3
> 4x + (-2x) = 2x + 3 + (-2x) = 2x = 3
> Mistura o igual operacional, próprio da aritmética, com o igual como equilíbrio específico da equação, próprio da álgebra. (ALONSO et al, 1993, p. 91, tradução nossa)

b) Dificuldade com os números racionais

De acordo com o trabalho de Alonso *et al* (1993), as frações e números racionais, são fontes contínuas de erros. Foram observados erros com relação à resolução de uma equação com denominador. Em um dos casos o aluno resolveu como se não existisse denominador; em outros casos, como no exemplo: $8+\frac{7x}{3}=\frac{3x}{2}\Rightarrow 8+14x=9x$, os alunos resolveram o mínimo múltiplo comum somente para os denominadores próximos do sinal de igual.

Diante das dificuldades aqui evidenciadas na resolução de equações fracionárias, em nosso trabalho optamos por apresentar aos alunos equações somente com números inteiros.

1.3 Completamento do Quadrado

Apresentaremos a resolução de uma equação polinomial do 2º grau completa na forma $ax^2+bx+c=0$ e identificaremos uma equação polinomial do 2º grau como um trinômio do segundo grau. Caso o primeiro membro da equação represente um trinômio quadrado perfeito, com todos os coeficientes não nulos, sua resolução se dará pela fatoração e pelo completamento do quadrado, quando o primeiro membro da equação não representar um trinômio quadrado perfeito. Faremos a resolução de uma mesma equação na forma algébrica e geométrica e dos casos de fatoração do quadrado da soma de dois termos e do quadrado da diferença de dois termos. Mesmo quando fazemos referência a autores antigos, estaremos escrevendo em notação moderna para o melhor entendimento do leitor.

1.3.1.Caso 1: Resolução algébrica e geométrica de equações do tipo $ax^2 + bx \pm c = 0$, $b > 0$ e coeficientes não nulos.

1.3.1.1 Resolução algébrica da equação do tipo $a^2 + 2ab + b^2 = 0$, $a>0$, $b>0$, cujo primeiro membro representa um trinômio quadrado perfeito.

Dada a equação $a^2 + 2ab + b^2 = 0$, vamos determinar sua solução.

Para encontrar os termos do binômio, o procedimento é o seguinte:

Extrai-se a raiz quadrada dos termos extremos: $\sqrt{a^2}$ = a; $\sqrt{b^2}$ = b e verifica-se se o termo médio é dado por meio da multiplicação dos dois termos extremos por 2.

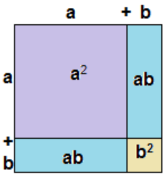
Escreve-se a expressão do primeiro membro na forma fatorada: $(a + b)^2 = 0$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros obtém-se: $(a + b) = 0$

Isolando o termo a, tem-se a solução da equação: $a = - b$

1.3.1.2 Resolução geométrica da equação do tipo $a^2+2ab+ b^2 = 0$ $a>0$, $b>0$, cujo primeiro membro representa um trinômio quadrado perfeito.

Com base na interpretação geométrica dada pelos gregos ao quadrado da soma dos segmentos a e b e usando a notação moderna, temos: (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2009, p.106).



De acordo com a figura, temos que: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, a interpretação geométrica é:

a^2 representa a área do quadrado cujo lado mede a;

2ab representa a área de dois retângulos cujos lados medem a e b;

b^2 representa a área do quadrado cujo lado mede b.

Com base nessa interpretação geométrica faremos o estudo da resolução geométrica de equações do 2º grau completa.

1.3.1.3 Resolução algébrica da equação $x^2 + 6x - 7 = 0$

Temos que:

x^2 representa o quadrado de x

6x representa 2.3.x

– 7 deveria representar o quadrado de 3. Como isso não ocorre, a expressão x^2+6x-7 não representa um trinômio quadrado perfeito. Para resolvê-la, faremos do seguinte modo:

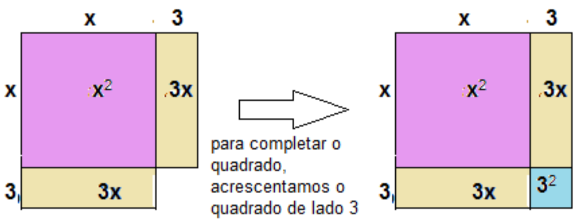
Isolamos o termo independente	$x^2 + 6x = 7$
Para obter um trinômio quadrado perfeito deve ser somado 9 (quadrado de 3) a $x^2 + 6x$, pelo princípio de equivalência das equações deve-se somar 9 aos dois membros da igualdade;	$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$
Fatorando o primeiro membro tem-se:	$(x + 3)^2 = 16$
Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, tem-se:	$\|x +3\|= 16$
Encontramos as raízes:	$x + 3 = 4$ logo $x = 1$ $x + 3 = - 4$ logo $x = - 7$

1.3.1.4 Resolução geométrica da equação $x^2 + 6x - 7 = 0$

Considerando a expressão $x^2 + 6x$, (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2009, p. 106) podemos interpretar: $x^2 + 6x = x^2 + 2(3x)$, onde temos que:

x^2 representa a área de um quadrado cujo lado mede x;

3x representa a área de um retângulo cujos lados medem 3 e x.



Observamos que é necessário acrescentar um quadrado cujo lado mede 3, ou seja, área 9, com o fim de completar a figura para obter um quadrado. Assim obtivemos:

$x^2 + 6x + 3^2$ representa a expressão algébrica correspondente à área do quadrado formado;

$x^2 + 6x + 9$ representa o trinômio quadrado perfeito;

$(x + 3)^2$ representa a forma fatorada do trinômio.

Para a resolução da equação $x^2 + 6x – 7 = 0$, fazemos $x^2 + 6x = 7$.

Temos que a área do quadrado de lado x e os dois retângulos de lado 3 e x têm área total 7, somado com a área do quadrado de área 9, temos área total 7 + 9 = 16. Assim um quadrado de 16 u.a. possui lados de 4 u.c. Como os lados do quadrado medem x+3, temos que x pode ter valor 1, pois 1 + 3 = 4.

Temos como solução, x=1, caso a resolução desta equação fosse dada por meio do registro algébrico, também seria solução a raiz -7.

1.3.2. Caso 2: Resolução algébrica e geométrica de Equações do tipo $ax^2 - bx \pm c = 0$, b>0 e coeficientes não nulos.

1.3.2.1 Resolução algébrica da equação do tipo $a^2 – 2ab + b^2 = 0$, a>0, b>0, cujo primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito.

Dada a equação $a^2 - 2ab + b^2 = 0$, vamos determinar sua solução.

Para encontrar os termos do binômio, o procedimento é o seguinte:

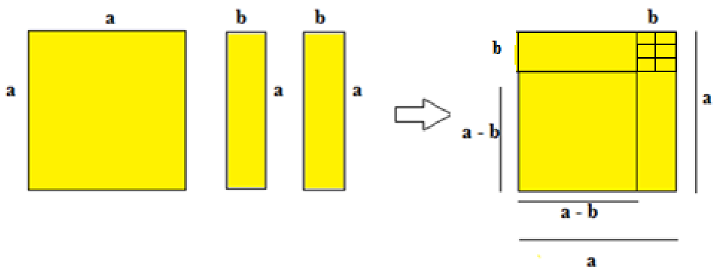
Extrai-se a raiz quadrada dos termos extremos $\sqrt{a^2} = a$; $\sqrt{b^2} = b$ e verifica-se se o termo médio é dado por meio da multiplicação dos dois termos extremos por 2.

Escreve-se a expressão do primeiro membro na forma fatorada: $(a - b)^2 = 0$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros obtém-se: $(a - b) = 0$

Isolando o termo a, tem-se a solução da equação: $a = b$

1.3.2.2 Resolução geométrica equação do tipo $a^2 – 2ab + b^2 = 0$ cujo primeiro membro é um trinômio quadrado perfeito.



Geometricamente, equivale a calcular a área de uma região quadrada de lado (a – b).

Para obtermos a área da região quadrada amarela de lados a-b, determinamos a área total da figura (a^2) e dela subtraímos as áreas dos dois retângulos (2ab), acrescentando a área do quadrado de lado b (b^2). Assim temos: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Escreve-se a expressão do primeiro membro na forma fatorada: $(a - b)^2 = 0$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros obtém-se: $(a - b) = 0$

Isolando o termo a, tem-se a raiz da equação: $a = b$

1.3.2.3 Resolução algébrica da equação $x^2 - 10x - 11 = 0$

Temos que:

x^2 representa o quadrado de x

10x representa 2.5.x

-11 deveria representar o quadrado de 5. Como isso não ocorre, a expressão $x^2 - 10x - 11$ não representa um trinômio quadrado perfeito. Para resolvê-la, procedemos de maneira análoga ao caso 1.3.1.3, observando somente os sinais:

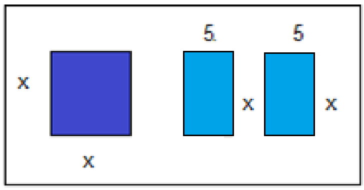
Isolamos o termo independente	$x^2 - 10x = 11$
Para obter um trinômio quadrado perfeito deve-se somar 25 (quadrado de 5) a x^2 -10x, pelo princípio de equivalência das equações deve-se somar 25 aos dois membros da igualdade;	$x^2 - 10x + 25 = 11 + 25$
Fatorando o primeiro membro da equação, tem-se:	$(x - 5)^2 = 36$
Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros, tem-se:	$\|x - 5\| = 36$
Encontramos as raízes:	$x - 5 = 6$, logo $x = 11$ $x - 5 = -6$, logo $x = -1$

1.3.2.4 Resolução geométrica da equação $x^2 - 10x - 11 = 0$

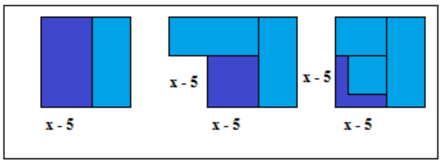
Considerando a expressão $x^2 - 10x$, podemos interpretar: $x^2 - 10x = x^2 - 2(5x)$, em que temos:

x^2 representa a área de um quadrado cujo lado mede x;

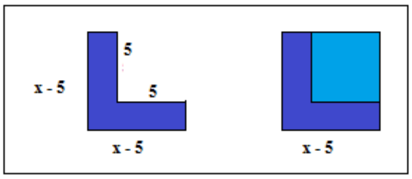
5x representa a área de um retângulo cujos lados medem 5 e x.



A figura ao lado representa um quadrado de lado x e dois retângulos de lados 5 e x.



A partir do quadrado de lado x retiramos dois retângulos de lados 5 e x, em que o excesso de um dos retângulos também é retirado, conforme próxima figura.



A área que sobra (azul escura) acrescida do quadrado azul claro representa um quadrado de lado x–5, a parte azul escura tem área 11, o quadrado azul claro área 25. Somando as áreas 11 e 25 obtemos um quadrado de área 36, em que seus lados tem medida 6. Como a medida dos lados é representada por x – 5, temos x é igual a 11.

Obtemos por meio da solução geométrica raiz 11, caso a resolução fosse obtida por meio algébrico, -1 também seria solução da equação.

Ao finalizar esse capítulo, destacamos as principais ideias que serão utilizadas nesta pesquisa e que contribuíram para o estudo do tema e preparação de uma sequência de atividades: o completamento do quadrado na forma geral da equação do 2º grau, inicialmente proposto por Bhaskara, a ênfase dos PCN (BRASIL, 1998) em relação ao ensino das equações do 2º grau por meio da fatoração, os erros e dificuldades na resolução de equações e equações do 2º grau destacados por Nguyen (2006), Booth (1995) e Alonso *et al* (1993) e a resolução algébrica e geométrica da equação do 2º grau.

2 EQUAÇÕES DO 2º GRAU EM DOCUMENTOS OFICIAIS E LIVROS DIDÁTICOS

A fim de apresentar uma análise das recomendações acerca do ensino da Matemática, do ensino de álgebra e, mais especificamente, do ensino de equações do 2º grau no Ensino Fundamental, utilizamos os PCN (BRASIL, 1998), livros didáticos e o programa de ensino de Matemática da escola pesquisada. Nesse contexto, procuramos evidenciar as competências algébricas descritas pelos PCN (BRASIL, 1998), a apresentação do tema proposto nos livros didáticos e a recomendação do ensino desse tema na escola pesquisada.

2.1 Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)

Os Parâmetros Curriculares Nacionais foram elaborados visando "construir referências nacionais comuns ao processo educativo em todas as regiões brasileiras" (BRASIL, 1998, p. 5). Nesse sentido constata-se que os PCN (BRASIL, 1998) constituem um elemento norteador do ensino e da aprendizagem da Matemática, bem como orienta a elaboração de documentos e de livros didáticos; são determinantes na elaboração de projetos pedagógicos e, consequentemente, na escolha dos conteúdos a serem ensinados em sala de aula.

O currículo de ensino da Matemática no Ensino Fundamental é bastante amplo e, de acordo com os PCN (BRASIL, 1998), vai desde a formação intelectual e moral até a formação para a convivência social; pode contribuir, também, para o estímulo de certas características de comportamento e traços de personalidade, como: sociabilidade, autoestima, persistência e motivação, reafirmando sua importância como disciplina escolar e de formação do cidadão.

Para melhor organizar o ensino da Matemática, os PCN constituíram quatro grandes eixos estruturadores dos currículos de Matemática para o Ensino Fundamental, os quais contemplam o estudo dos números e das operações, do espaço e das formas, das grandezas e das medidas e o tratamento da informação. O documento acrescenta que "O desafio que se apresenta é o de identificar, dentro de cada um desses vastos campos que conceitos, procedimentos e atitudes são socialmente relevantes" (BRASIL, 1998, p.49).

No tocante aos números e operações, os PCN (BRASIL, 1998) observam que durante os anos iniciais do Ensino Fundamental há alguns elementos algébricos, porém seu ensino deve se concentrar nos anos finais, quando o aluno tem mais maturidade para sua aprendizagem. Orienta que o ensino de álgebra deve ocorrer por meio da resolução de situações de aprendizagem, pois considera o estudo da álgebra como "um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas.” (BRASIL, 1998, p.81)

De acordo com os Parâmetros, a capacidade de traduzir simbolicamente problemas encontrados no dia a dia ou provenientes de outras áreas do conhecimento deve ser gradativamente desenvolvida para se chegar ao uso pleno da linguagem e das técnicas da álgebra. O uso da linguagem algébrica, para expressar generalizações que se constituam em propriedades de outros campos da Matemática, é outra função da álgebra que deve ser, pouco a pouco, introduzida. Chamam a atenção, ainda, para a forma como a álgebra vem sendo executada nas salas de aula, pois geralmente não estimula o aluno; assim, o professor deve explorar a construção das ideias algébricas a partir de novas situações. Explicita que, na maioria das vezes, apenas é reproduzido o conhecimento de forma mecânica, sem produzir significado ao aluno. Diante de uma expressão algébrica ou equação, por exemplo, é possível simplificá-la usando as noções de fatoração, encontrar suas raízes, podendo facilitar dessa forma a compreensão pelo aluno.

O documento sugere que, no oitavo e nono anos, os alunos sejam desafiados a resolver problemas na forma algébrica, que aritmeticamente seriam difíceis, fazendo uso de equações, inequações, diferenciando uma variável de uma incógnita e compreendendo as regras para resolução algébrica (sintaxe), pois o ensino de Matemática deve visar ao desenvolvimento do pensamento algébrico, explorando situações de aprendizagem, com o intuito de que o aluno possa “produzir e interpretar diferentes escritas algébricas, expressões, igualdades e desigualdades, identificando as equações, inequações e sistemas” (BRASIL, 1998, p.81).

Os PCN recomendam, no estudo da equação do 2^o grau, a utilização da “resolução de situações-problema que podem ser resolvidas por uma equação do segundo grau cujas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo o significado dessas raízes em confronto com a situação proposta” (BRASIL, 1998, p.88). Essa recomendação vem ao encontro do nosso objeto de estudo. Ressaltamos que, ao resolver a equação do 2^o grau pela fatoração usando o método do completamento do quadrado, não estamos inovando, mas provocando uma prática que há mais de uma década é enfatizada por este documento oficial e, como pudemos observar em alguns livros didáticos, essa técnica vem sendo apresentada, porém ainda sem muita ênfase, perpetuando quase que exclusivamente o ensino por meio da fórmula geral de resolução, valorizando uma abordagem tecnicista com ênfase na memorização da fórmula, não ressignificando os conhecimentos prévios de fatoração e manipulação de expressões algébricas.

Acreditamos que, ao fatorar, coloca-se em prática a discussão do significado das raízes, oportunizando reflexões, conexões e significados em torno dos conceitos matemáticos empregados.

2.2 Apresentação da equação do 2º grau e completamento do quadrado nos livros didáticos do Ensino Fundamental

Para Schubring (2003, p. 3) "O saber matemático é transmitido por dois caminhos privilegiados: pela comunicação pessoal e oral e por textos escritos". Observa-se que a transmissão desse saber matemático ocorre fundamentalmente por meio dos livros didáticos presentes nas escolas públicas em nosso país, avaliados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD), cujos conteúdos são apresentados de forma oral e escrita pelos professores em sala de aula.

Historicamente observamos um avanço nos últimos anos com relação às políticas públicas que envolvem os livros didáticos, estes têm sido avaliados e distribuídos amplamente em todas as escolas, e vem exercendo um papel fundamental na apresentação dos conteúdos aos alunos, pelos professores de Matemática. Para um professor com pouco tempo disponível para estudos, com formação inadequada e devido à grande quantidade de aulas que ministra, o livro didático proporciona um grande auxílio e torna-se um recurso didático quase imprescindível, pois além do conteúdo matemático, também apresenta textos informativos, históricos, curiosidades, desafios, bem como exercícios e atividades. Desse modo, o livro didático torna-se elemento norteador da aula, ou seja, ele exerce o papel de guia para alunos e professores (DANTE, 1996), bem como fonte de estudos e pesquisa para ambos.

De acordo com Dante (1996, p.83) "Na ausência de materiais instrucionais em quantidade e qualidade suficientes que orientassem o trabalho do professor na sala de aula [...] o livro didático passou a ser o principal e, em muitos casos, o único instrumento de apoio ao trabalho docente." Schubring, em um estudo mais recente, reforçou essa ideia dizendo que "praticamente todos os estudos sobre o ensino da matemática, a realidade desse ensino mostra que os livros didáticos constituem para os professores a base principal" (SCHUBRING, 2003, p. 157). Assim, observamos que a atuação de alguns professores está condicionada ao livro didático: os conteúdos que eles vão trabalhar em uma série, a sequência de conteúdos, a forma como vai abordá-los e as atividades propostas; todos esses itens, geralmente, não diferem muito da forma apresentada pelo livro didático adotado.

A visão de Matthias[6] da relação entre professor e livro didático é de que "manuais [...] pretendem apresentar o assunto a ser ensinado aos alunos de maneira fechada e completa, em vez de capacitá-los a descobrir por si próprios - sob a orientação do professor -" (SCHUBRING, 2003, p. 138). Esta visão se opõe à que observamos atualmente em nosso ensino, que seria a falta de autonomia do professor, o nível de conhecimento matemático dos conteúdos, a didática para a apresentação do conteúdo e o processo de atualização do professor, isso pode exigir a dependência do livro didático.

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) dada a importância do livro didático no dia a dia escolar, pontua como objetivos:

> I – melhoria do processo de ensino e aprendizagem nas escolas públicas, com a consequente melhoria da qualidade da educação;
> II – garantia de padrão de qualidade do material de apoio à prática educativa utilizado nas escolas públicas;
> III – democratização do acesso às fontes de informação e cultura;
> IV– fomento à leitura e o estímulo à atitude investigativa dos alunos;
> V–apoio à atualização e ao desenvolvimento profissional do professor. (BRASIL, 2011, p.8):

Contudo, queremos ressaltar que mesmo o livro didático sendo considerado por muitos, como o principal instrumento didático disponível ao professor e aluno em sala de aula, alguns profissionais vão atuar sem conhecer o seu instrumento de trabalho.

Tecemos uma crítica à formação inicial e continuada que nem sempre prepara o professor de maneira adequada para o bom uso deste material, corroborando para que haja um subaproveitamento desse recurso didático, que é extremamente rico. Acreditamos que durante a formação inicial e continuada o livro didático deveria ser esmiuçado, analisado, estudado, discutido, repensado, considerando uma determinada turma ou ano escolar, investigando a pertinência e a forma da apresentação de um conteúdo num dado ano. Isso contribuiria para aprimorar o conhecimento matemático, o senso crítico e dar mais autonomia ao professor para que pudesse fazer escolhas que favorecessem a aprendizagem de seu educando. No momento em que a formação inicial ou continuada não tem essa preocupação, perde-se a chance de preparar o professor para fazer um bom uso de um ótimo material.

De acordo com o Guia do PNLD/2011 "quando o material didático auxiliar é bem utilizado favorece a construção de conceito e procedimentos matemáticos fundamentais".

O guia do livro didático de 2008 destaca a função do livro didático, ressaltando que esse instrumento "contribui para o processo de ensino-aprendizagem como um interlocutor

[6] Johann Andreas Matthias (1761-1837) publicou e reeditou desde 1813 uma obra que pode ser considerada como a primeira Didática e Metodologia alemã para a instrução matemática (manual do professor).

que dialoga com o professor e com o aluno. Nesse diálogo, tal texto é portador de uma perspectiva sobre o saber a ser estudado e sobre o modo de se conseguir aprendê-lo mais eficazmente". (BRASIL, 2008, p. 11)

Com relação à escolha dos livros didáticos, optamos por dois livros aprovados no último PNLD/2011 e muito adotados pelas escolas da rede pública municipal de Campo Grande - MS, e outro livro aprovado pelo PNLD/2008, devido ao trabalho inédito proposto no 9º ano do Ensino Fundamental, o de propor o estudo da fatoração em um capítulo e em seguida apresentar o capítulo de equações do 2º grau, estabelecendo uma conexão entre os dois conteúdos. Procuramos destacar de seus textos os itens que consideramos relevantes para nossa pesquisa, restringindo-nos às páginas sobre o conteúdo de equações do 2º grau. Limitamo-nos a analisar a introdução do conceito de equação do 2º grau, por acreditarmos que essa apresentação pode influenciar o interesse do aluno na busca pela aprendizagem; analisamos também, as páginas dedicadas ao completamento do quadrado como forma de resolução da equação.

Nos livros didáticos escolhidos procuramos analisar o conteúdo de equações do 2º grau, utilizando as lentes do referencial teórico proposto por Duval: Teoria de Registro de Representação Semiótica e também a análise crítica presente no PNLD/2011 que, sem dúvida, é o alicerce na construção de livros mais ricos.

Os livros selecionados compõem as coleções:

Tudo é Matemática, de Luiz Roberto Dante (2009), aprovado no PNLD/2011;

A Conquista da Matemática, de José Ruy Giovanni Jr. e Benedito Castrucci (2009), livro adotado na instituição onde desenvolvemos a pesquisa, aprovado no PNLD/2011;

Matemática hoje é feita assim, de Antônio José Lopes Bigode (2000), aprovado no PNLD/2008.

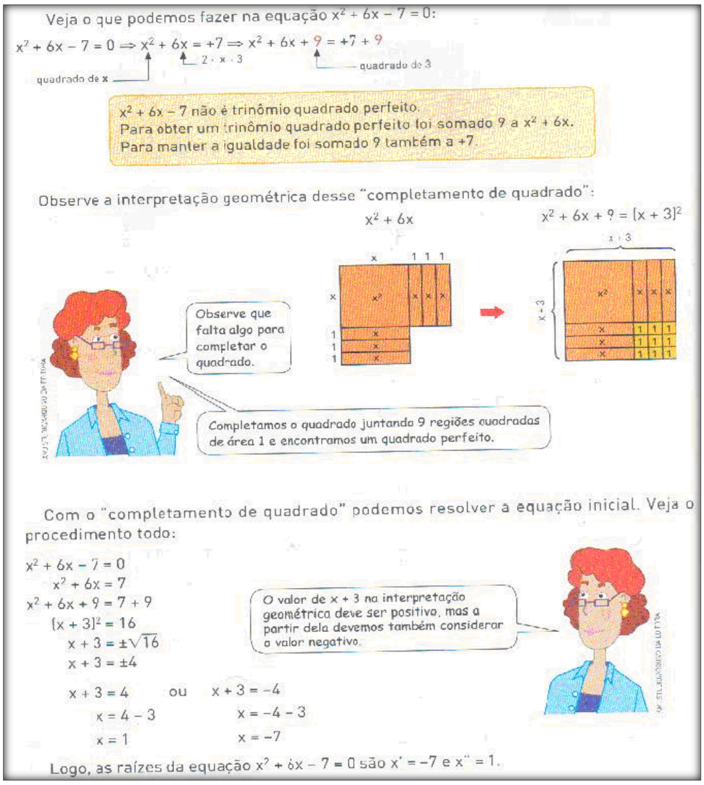
2.2.1 Apresentação das Coleções

2.2.1.1 Livro 1 - Tudo é Matemática

Com o título de "Equações e Sistemas de equações do 2º grau", o autor desse livro introduziu o assunto, explorando diagonais em um polígono convexo e, mostrou vários polígonos com seus respectivos totais de diagonais. Na sequência, generalizou para a fórmula de resolução do número de diagonais até mostrar que em um octógono convexo, a equação de resolução do número de diagonais é uma equação de expoente 2, ou seja, uma equação do 2º grau. O Guia do PNLD (2011, p. 83) salienta que na obra “na apresentação dos conceitos, definições e procedimentos nem sempre a iniciativa do aluno é favorecida”. Isto pode se tornar um elemento neutralizador da curiosidade, assim como pouco favorecer a vontade pela descoberta, não estimulando a aprendizagem.

Para a resolução de equações do 2º grau completas, o livro apresenta uma equação cujo primeiro membro é um quadrado perfeito, procede a resolução na forma algébrica, primeiro fatorando o trinômio quadrado perfeito e em seguida determinando a raiz, sem qualquer explicação ou lembrete do que seja um quadrado perfeito; em seguida, apresenta exercícios resolvidos e, na sequência, uma lista com atividades que priorizam a resolução algébrica.

Com um subitem denominado “Método de Completar Quadrados”, o autor explica quando deve ser usado o completamento do quadrado e o faz, primeiramente, de forma algébrica e, em seguida, geometricamente; termina resolvendo o exemplo algebricamente e obtendo duas raízes reais.


Veja o que podemos fazer na equação $x^2 + 6x - 7 = 0$:

$$\underbrace{x^2}_{\text{quadrado de } x} + \underbrace{6x}_{2 \cdot x \cdot 3} - 7 = 0 \Rightarrow x^2 + 6x = +7 \Rightarrow x^2 + 6x + \underbrace{9}_{\text{quadrado de } 3} = +7 + 9$$

$x^2 + 6x - 7$ não é trinômio quadrado perfeito.
Para obter um trinômio quadrado perfeito foi somado 9 a $x^2 + 6x$.
Para manter a igualdade foi somado 9 também a +7.

Observe a interpretação geométrica desse "completamento de quadrado":

Com o "completamento de quadrado" podemos resolver a equação inicial. Veja o procedimento todo:

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$
$$x^2 + 6x = 7$$
$$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$$
$$(x + 3)^2 = 16$$
$$x + 3 = \pm\sqrt{16}$$
$$x + 3 = \pm 4$$

$x + 3 = 4$ ou $x + 3 = -4$
$x = 4 - 3$ $\quad$ $x = -4 - 3$
$x = 1$ $\quad$ $x = -7$

Logo, as raízes da equação $x^2 + 6x - 7 = 0$ são $x' = -7$ e $x'' = 1$.

Figura 1: Completamento do quadrado
Fonte: Tudo é Matemática, Dante, 2009, p. 58

Observamos a presença de diferentes registros de representação na figura 1, além do registro da língua natural, o registro algébrico e geométrico concomitantemente. Segundo o guia do PNLD (2011, p. 86): "no estudo das equações, são apresentadas diferentes representações e estratégias de resolução, o que é positivo". No entanto, o autor não enfatiza a conversão, apenas apresenta a interpretação geométrica com o intuito de melhor esclarecer o processo do completamento do quadrado. Obtém a solução algebricamente e chama a atenção para o uso da solução negativa na interpretação geométrica. Para encontrar as raízes da equação com base na interpretação geométrica faltaram elementos necessários para que o aluno utilizasse o raciocínio mental.

No manual pedagógico do professor a obra elenca como um dos objetivos gerais, o aprender fazendo e como um dos objetivos específicos, a comunicação das ideias matemáticas de diferentes formas: oral, escrita, por tabelas, diagramas, gráficos, etc. Percebemos a preocupação do autor em apresentar o conteúdo por diversas representações, comungando com as ideias de utilizar diferentes registros de representação, segundo Duval.

O autor reforça a resolução com mais um exemplo, sendo um quadrado da soma, ainda procedendo à resolução na forma algébrica e interpretação geométrica. Em seguida, ele acrescenta outros dois exemplos (quadrado da diferença), que resolve somente algebricamente. O livro não traz qualquer observação sobre a ausência da interpretação geométrica para a expressão $(a-b)^2$, o que ocorre, também, no manual do professor.

Na sequência, o autor apresenta duas atividades para resolução algébrica a fim de determinar as raízes da equação e duas em língua materna, para realizar a escrita algébrica seguida da resolução, totalizando um número de 20 equações. No manual do professor encontra-se a orientação de que só após resolver grande quantidade de equações por fatoração e completamento do quadrado é que será apresentada a fórmula de Bhaskara.

Cumprindo com o objetivo proposto de exercitar a resolução de equações por fatoração e completamento do quadrado, o livro apresenta esse completamento na forma geral da equação do 2^o grau, a fim de obter a fórmula de resolução de uma equação do 2^o grau (fórmula de Bhaskara). E assim inicia a abordagem por meio da resolução com a utilização da fórmula.

De modo geral, com linguagem acessível, a articulação entre os registros algébrico, geométrico e algébrico é utilizada na tentativa de favorecer a compreensão desses conhecimentos matemáticos, mais do que no efetivo uso dos diferentes registros para a resolução das equações do 2^o grau.

2.2.1.2 Livro 2 – A Conquista da Matemática

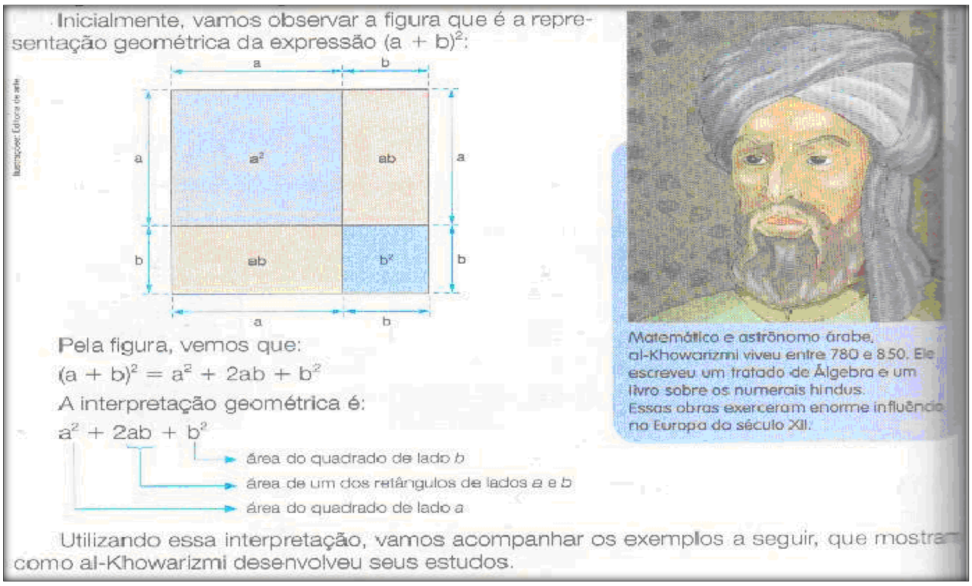
De acordo com o PNLD (2011, p. 41) “Na introdução e no desenvolvimento dos conceitos e procedimentos, a obra recorre a diversos textos de história da Matemática e de outras áreas do saber”. De fato, notamos a importância dada pelos autores a fatos históricos, pois, a página de introdução às equações do 2º grau, apresenta fragmentos de história e fotos de locais importantes no mundo antigo, como a Biblioteca de Alexandria e a Casa da Sabedoria. Na seção denominada “Explorando”, que contém atividades de preparação para o conteúdo a ser estudado, o livro apresenta uma situação-problema sobre área, que necessita de conhecimentos da equação do 2º grau para a sua solução e assim introduz o tema.

O texto possui conceitos e definições, que vêm sempre destacados:

> Denomina-se **equação do 2º grau na incógnita *x*** toda equação da forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que *a*, *b* e *c* são números reais e $a \neq 0$.

Figura 2: Definição de Equação do 2º grau
Fonte: A conquista da Matemática, 2009, p. 96

Fazendo uso da seção “Explorando”, para resolver uma equação completa do 2º grau com uma incógnita, os autores utilizam um problema sobre o recorte de uma cartolina em um quadrado e quatro retângulos. O aluno, com as cinco peças, deve construir um novo quadrado e então responder a alguns questionamentos. A crítica que tecemos é que a atividade não deixa espaço para que o aluno reflita, tente e descubra, ela é mecânica. A partir disso, os autores apresentam o processo do completamento que aborda a resolução geométrica da expressão $(a+b)^2$ dada por Al-Khwarizmi.



Inicialmente, vamos observar a figura que é a representação geométrica da expressão $(a + b)^2$:

Pela figura, vemos que:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

A interpretação geométrica é:

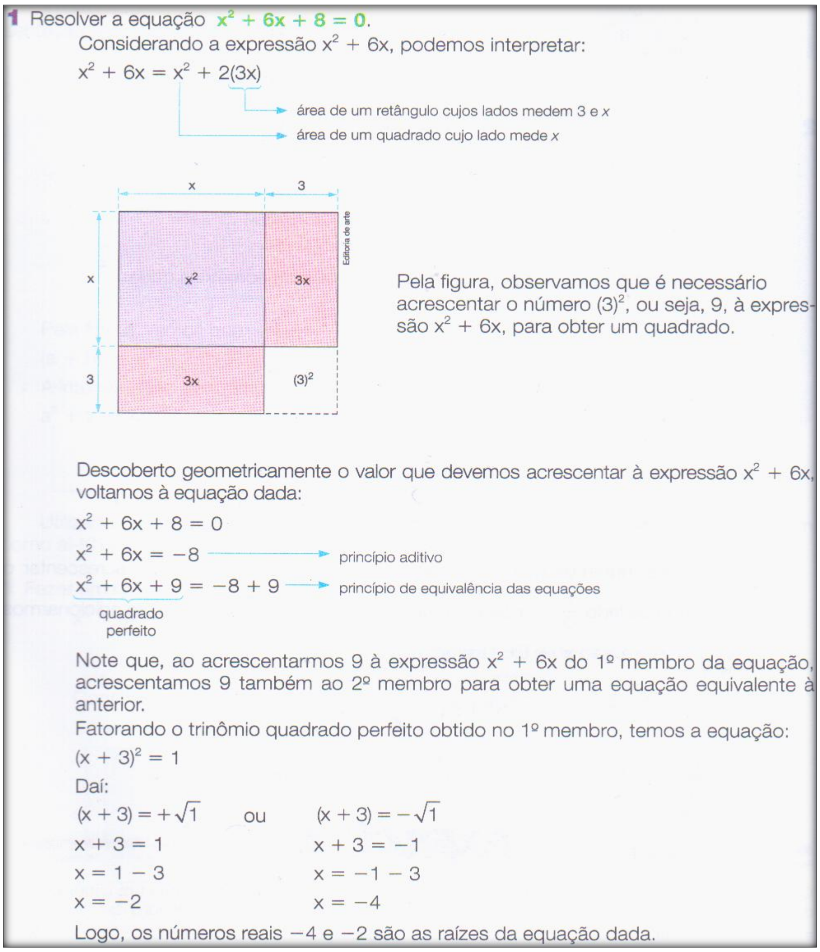
$a^2 + 2ab + b^2$

Utilizando essa interpretação, vamos acompanhar os exemplos a seguir, que mostram como al-Khowarizmi desenvolveu seus estudos.

Figura 3: Representação geométrica de $(a + b)^2$
Fonte: A conquista da Matemática, 2009, p. 106

Esse recorte traz, de forma detalhada, a representação geométrica da expressão $(a+b)^2$ e complementa fazendo a interpretação geométrica, a fim de que fique compreensível; no entanto, os autores cometem erro de revisão ao escrever que a interpretação geométrica é $a^2 +2ab+b^2$, sendo que essa é a interpretação algébrica. Apresentam mais dois exemplos minuciosamente explicados para o completamento do quadrado geometricamente e atividades para que o aluno repita o procedimento, reforçando que, se for necessário, o aluno deve fazer a interpretação geométrica.

Num novo subitem, os autores apresentam como tópico “Resolvendo uma equação do 2º grau pelo processo de Al-Khwarizmi (completando quadrados)”; explicam que, após aprender a completar quadrados, o estudante deverá fazer o completamento do quadrado para resolver equações do 2º grau. Como exemplo, utilizam a equação $x^2 + 6x + 8 = 0$; primeiro fazem a interpretação geométrica dizendo que $x^2 + 6x = x^2 + 2(3x)$, onde x^2 é a área de um quadrado de lado x e 2(3x) área de um retângulo cujos lados medem 3 e x. Apresentam a representação na forma geométrica e em seguida utilizam o princípio aditivo e de equivalência das equações para proceder à resolução algébrica e encontrar as raízes da equação. Ressaltamos que Al-Khwarizmi não conhecia essa linguagem algébrica e que os autores do livro escreveram em notação moderna, para melhor entendimento do leitor.



1 Resolver a equação $x^2 + 6x + 8 = 0$.

Considerando a expressão $x^2 + 6x$, podemos interpretar:

$x^2 + 6x = x^2 + 2(3x)$

$2(3x)$ → área de um retângulo cujos lados medem 3 e *x*

x^2 → área de um quadrado cujo lado mede *x*

Pela figura, observamos que é necessário acrescentar o número $(3)^2$, ou seja, 9, à expressão $x^2 + 6x$, para obter um quadrado.

Descoberto geometricamente o valor que devemos acrescentar à expressão $x^2 + 6x$, voltamos à equação dada:

$x^2 + 6x + 8 = 0$

$x^2 + 6x = -8$ → princípio aditivo

$\underbrace{x^2 + 6x + 9}_{\text{quadrado perfeito}} = -8 + 9$ → princípio de equivalência das equações

Note que, ao acrescentarmos 9 à expressão $x^2 + 6x$ do 1º membro da equação, acrescentamos 9 também ao 2º membro para obter uma equação equivalente à anterior.

Fatorando o trinômio quadrado perfeito obtido no 1º membro, temos a equação:

$(x + 3)^2 = 1$

Daí:

$(x + 3) = +\sqrt{1}$	ou	$(x + 3) = -\sqrt{1}$
$x + 3 = 1$		$x + 3 = -1$
$x = 1 - 3$		$x = -1 - 3$
$x = -2$		$x = -4$

Logo, os números reais -4 e -2 são as raízes da equação dada.

Figura 4: Resolução da equação do 2º grau pelo completamento do quadrado
Fonte: A conquista da Matemática, 2009, p. 108

As raízes obtidas algebricamente para a equação acima são -2 e -4 e, geometricamente, não há solução. Contudo, cremos que os autores tiveram apenas o intuito de evidenciar o completamento do quadrado na forma geométrica e não proceder à resolução da equação geometricamente. Caso eles tivessem a preocupação de resolver a referida equação usando as representações algébrica e geométrica, consideraríamos o exemplo inapropriado, pois as raízes obtidas são negativas; desse modo, sem justificativa geométrica.

Para resolver a equação proposta os autores fizeram a conversão do registro algébrico para o geométrico e retornaram ao registro algébrico para determinar as raízes da equação. Porém, só fizeram para equações cuja fatoração é um quadrado da soma de dois termos.

Em seguida, eles apresentaram um subitem “o processo algébrico de Bhaskara” no qual retomaram os exemplos anteriores do completamento do quadrado explicando que o coeficiente c corresponde à metade do coeficiente b elevado ao quadrado e, acrescentaram que “esse fato foi constatado por Bhaskara ao estudar o processo de Al-khwarizmi. Bhaskara apresentou, então, um processo algébrico que não mais necessitava da interpretação geométrica para a resolução de equações do 2º grau com uma incógnita” (GIOVANNI JR; CASTRUCCI, 2009, p. 113). Para ilustrar esse modo de resolução apresentaram um exemplo dado pela equação $x^2 - 2x - 8 = 0$.

Resolver a equação $x^2 - 2x - 8 = 0$, sendo $U = \mathbb{R}$.

$x^2 - 2x - 8 = 0$

$x^2 - 2x = 8$

$x^2 - 2x + 1^2 = 8 + 1^2 \longrightarrow$ adicionamos em ambos os membros da equação a expressão $\left(\frac{-2}{2}\right)^2 = (-1)^2 = 1^2$

$x^2 - 2x + 1 = 8 + 1$

$(x - 1)^2 = 9$

$x - 1 = \pm\sqrt{9}$

$x - 1 = \pm 3$

Daí, temos:

$x - 1 = 3$ ou $x - 1 = -3$

$x = 3 + 1 = 4$ $\quad$ $x = -3 + 1 = -2$

Logo, os números reais -2 e 4 são as raízes da equação dada.

Figura 5: Processo algébrico realizado por Bhaskara
Fonte: A conquista da Matemática, 2009, p. 115

O manual do professor traz um fragmento histórico que aborda o método geométrico - Método de Al-Khwarizmi, com exemplos e explicação detalhada, que orienta o professor a fazer a crítica deste processo aos alunos, frisando que este não serve para equações incompletas, equações cujas raízes são negativas (pois se trata de área) e para equações cujo coeficiente b seja negativo; para isto, Al-Khwarizmi utiliza outro método, muito mais complicado.

Por meio de um quadro comparativo entre uma equação na forma numérica e na forma geral, os autores propõem trabalhar as mesmas operações a fim de completar o quadrado e obter a fórmula resolutiva da equação do 2º grau.

Processo algébrico de Bhaskara	Dedução da fórmula resolutiva
$x^2 + 4x - 12 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$
	$\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$
	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
	$x^2 + \frac{b}{a}x + \cancel{\frac{c}{a}} - \cancel{\frac{c}{a}} = 0 - \frac{c}{a}$
$x^2 + 4x = 12$	$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$
$x^2 + 4x + \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 12 + \left(\frac{4}{2}\right)^2$	$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{\frac{b}{a}}{2}\right)^2$
	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$
$x^2 + 4x + 4 = 12 + 4$	$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
$(x + 2)^2 = 16$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
$(x + 2) = \pm\sqrt{16}$	$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$
$x + 2 = \pm 4$	$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = -2 \pm 4$	$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x = 2$ ou $x = -6$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Figura 6: Dedução da fórmula resolutiva da equação do 2º grau
Fonte: A conquista da Matemática, 2009, p. 115

Apresentam, de maneira rápida, o completamento do quadrado na forma geral da equação, não dando suporte para a compreensão neste nível. A conversão da representação numérica para a algébrica é uma passagem delicada para alunos; portanto, o completamento do quadrado na representação algébrica deve ser mais enfatizado, a fim de que o aluno tenha condições de deduzir a fórmula resolutiva da equação do 2º grau. Feita a dedução, tem-se início a resolução da equação pela fórmula. Com relação à linguagem algébrica, o guia do PNLD (2011, p.44) destaca que “a transição do raciocínio numérico para o algébrico é feita de maneira mais rápida que o desejável, e o estudo das equações e dos sistemas de equações baseiam-se nos princípios da equivalência”.

O manual do professor enfatiza o objetivo de resolver uma equação do segundo grau completa usando a fatoração e levar o aluno a perceber a dificuldade de se resolver esse tipo de equações por tentativas, abrindo caminho para mostrar os processos geométricos e algébricos de resolução.

Percebemos a articulação entre os registros da língua natural, geométrico e algébrico no texto, na tentativa de favorecer principalmente a compreensão do completamento do quadrado nas representações geométrica e algébrica, mais do que no efetivo uso dos diferentes registros para a resolução das equações do 2º grau.

2.2.1.3 Livro 3 – Matemática hoje é feita assim

O autor inicia o capítulo sobre equações do 2º grau fazendo um paralelo entre a questão: Qual é a cor do cavalo branco de Napoleão e Qual é o número que, elevado ao quadrado, dá 3^2? As perguntas parecem bastante simples e, ao mesmo tempo, estimulantes. A resposta para cada uma parece óbvia e contida na pergunta, no entanto, elas não são nada simples. Mas se a segunda questão fosse: Qual é o número que, elevado ao quadrado dá 9? A questão teria duas respostas: 3 e -3.

A igualdade $x^2=9$ é uma equação do 2º grau simples. Segundo o autor, é objetivo do capítulo discutir, dos casos mais simples aos mais complexos. Em seguida ele apresenta dois exemplos cotidianos, expõe o enunciado e escreve a equação: $x^2 – 14x+24 = 0$ e $7n-n^2-2 = 0$. Para a resolução de tais equações, primeiro tenta isolar o termo x^2, depois tenta isolar os termos com x; em seguida, tenta colocar o fator comum em evidência, ou seja, tenta resolver de várias maneiras e, como não consegue, diz para deixar o problema “pendurado”, pois se trata de uma equação do 2º grau, recomendando ao aluno primeiramente realizar um estudo sobre as mesmas.

A partir disso faz a apresentação formal da equação do 2º grau: forma geral, coeficientes e incompletas. Acrescenta que a “solução ou raiz de uma equação do 2º grau é um valor atribuído à variável, que faz com que o valor numérico da expressão $ax^2+ bx +c$ seja nulo”.

Para a resolução da equação do 2º grau na forma completa, na seção “Voltando ao assunto” retoma a fatoração de um trinômio quadrado perfeito, usando a forma algébrica.

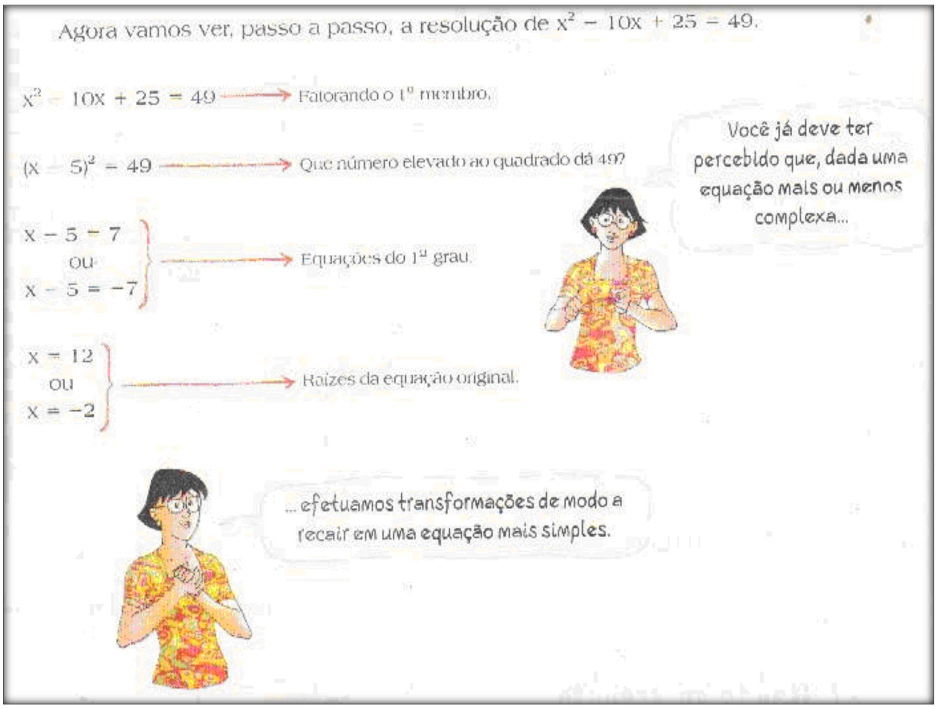
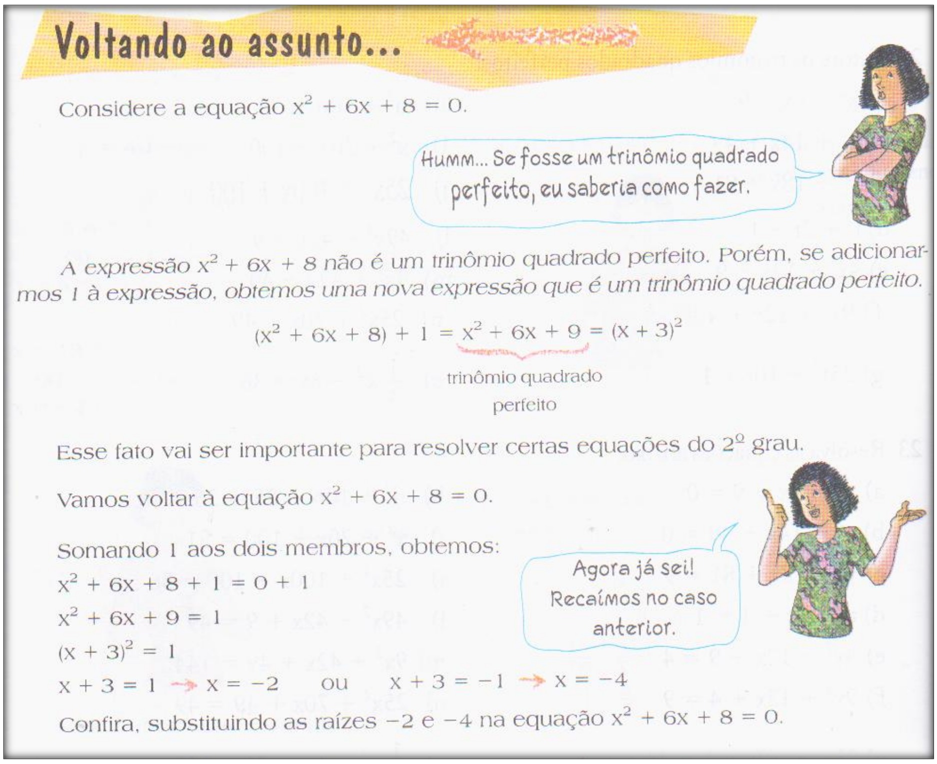


Figura 7: Resolução algébrica de uma equação do 2º grau
Fonte: Matemática Hoje é Feita Assim, 2000, p. 108

Ainda nessa seção, apresenta um exemplo onde a equação não representa um trinômio quadrado perfeito, procedendo à explicação algébrica de sua resolução.



Voltando ao assunto...

Considere a equação $x^2 + 6x + 8 = 0$.

Humm... Se fosse um trinômio quadrado perfeito, eu saberia como fazer.

A expressão $x^2 + 6x + 8$ não é um trinômio quadrado perfeito. Porém, se adicionarmos 1 à expressão, obtemos uma nova expressão que é um trinômio quadrado perfeito.

$$(x^2 + 6x + 8) + 1 = \underbrace{x^2 + 6x + 9}_{\text{trinômio quadrado perfeito}} = (x + 3)^2$$

Esse fato vai ser importante para resolver certas equações do 2º grau.

Vamos voltar à equação $x^2 + 6x + 8 = 0$.

Somando 1 aos dois membros, obtemos:

$x^2 + 6x + 8 + 1 = 0 + 1$

$x^2 + 6x + 9 = 1$

$(x + 3)^2 = 1$

$x + 3 = 1 \rightarrow x = -2$ ou $x + 3 = -1 \rightarrow x = -4$

Agora já sei! Recaímos no caso anterior.

Confira, substituindo as raízes -2 e -4 na equação $x^2 + 6x + 8 = 0$.

Figura 8: Resolução algébrica de uma equação do 2º grau, completando o quadrado
Fonte: Matemática Hoje é Feita Assim, 2000, p. 110

Em seguida, opera algebricamente a forma geral da equação $ax^2 + bx + c = 0$ para obter sua fórmula de resolução. Salienta que “depois de explorar tantos casos particulares, deve estar em condições de acompanhar a resolução de uma equação do 2º grau qualquer e decidir se existem ou não soluções reais”.

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$.

Nessa forma, não podemos garantir que o 1º membro é um TQP. Vamos fazer assim:

1. Multiplicar os dois membros por a:

   $a \cdot ax^2 + a \cdot b + a \cdot c = a \cdot 0$

   $a^2x^2 + abx + ac = 0$

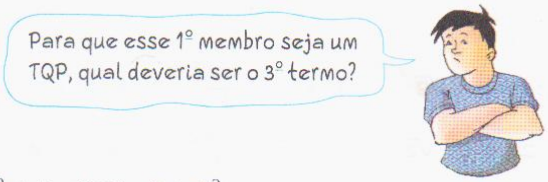
2. Para garantir que seja um TQP, o termo do meio deve ser divisível por 2.

   Multiplicando tudo por 4, o 1º termo continua sendo um quadrado perfeito:

   $4 \cdot a^2x^2 + 4 \cdot abx + 4 \cdot ac = 4 \cdot 0$

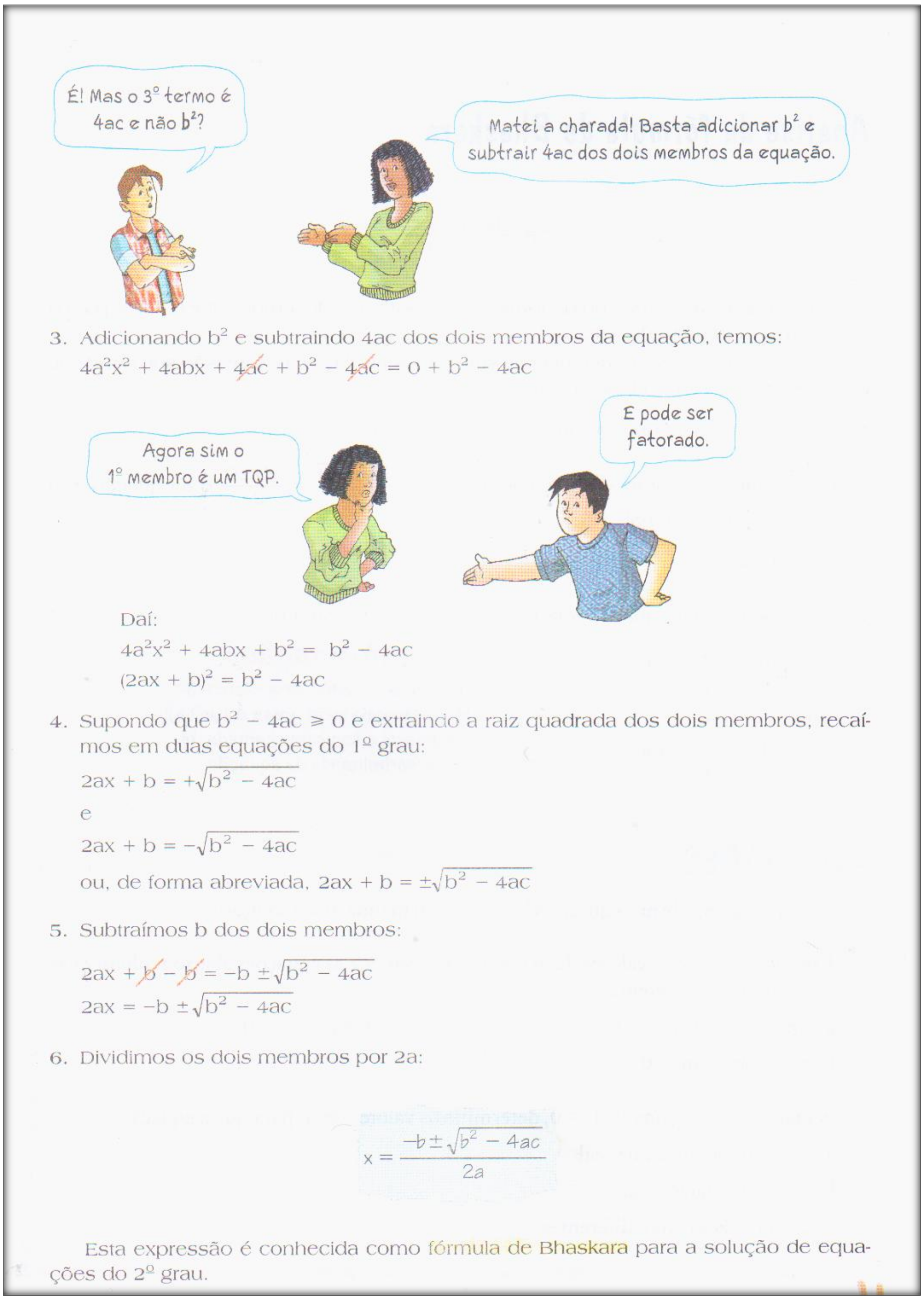
   $4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$

   $(2ax)^2 + 2 \cdot (2ax) \cdot b + 4ac = 0$



Veja: $(2ax)^2 + 2 \cdot (2ax) \cdot b + b^2$

Essa expressão fatorada resulta: $(2ax + b)^2$



É! Mas o 3º termo é 4ac e não b^2?

Matei a charada! Basta adicionar b^2 e subtrair 4ac dos dois membros da equação.

3. Adicionando b^2 e subtraindo 4ac dos dois membros da equação, temos:
   $4a^2x^2 + 4abx + \cancel{4ac} + b^2 - \cancel{4ac} = 0 + b^2 - 4ac$

E pode ser fatorado.

Agora sim o 1º membro é um TQP.

Daí:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$

4. Supondo que $b^2 - 4ac \geq 0$ e extraindo a raiz quadrada dos dois membros, recaímos em duas equações do 1º grau:
   $2ax + b = +\sqrt{b^2 - 4ac}$
   e
   $2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$
   ou, de forma abreviada, $2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$

5. Subtraímos b dos dois membros:
   $2ax + \cancel{b} - \cancel{b} = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$
   $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

6. Dividimos os dois membros por 2a:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta expressão é conhecida como fórmula de Bhaskara para a solução de equações do 2º grau.

Figura 9: Dedução da fórmula resolutiva da equação do 2º grau
Fonte: Matemática Hoje é Feita Assim, 2000, p. 112-113

Para deduzir a fórmula de resolução da equação do 2º grau, o autor utiliza o método descrito por Bhaskara[7]. Utiliza a técnica de primeiro isolar o termo independente, multiplicar por 4a ambos os membros da equação e em seguida somar b^2 a ambos os membros da equação, com o objetivo de obter no primeiro membro da equação um trinômio quadrado perfeito; a partir disso segue com manipulações algébricas até obter a fórmula geral de resolução. Consideramos este método de obtenção da fórmula resolutiva mais simples que o apresentado no livro anterior, no entanto, não o utilizamos em nossas atividades.

Após deduzir a fórmula de resolução da equação do 2º grau, ele retoma o problema que havia deixado "pendurado" quando introduziu a noção de equação do 2º grau, para só agora resolvê-la, deixando algumas reflexões ao leitor: se realmente fez uso da fatoração e do completamento do quadrado com intuito de que o aluno atribuísse significado à fatoração ao encontrar as raízes da equação do 2º grau, ou se, como suporte para exploração da equação na forma geral, a fim de obter a fórmula para resolução.

É apresentado um capítulo sobre fatoração, produtos notáveis e cálculo algébrico, que antecede ao de equações do 2º grau e, segundo o autor, a fim de "desenferrujar", ou seja, fazer uma retomada desses conteúdos com o aluno, preparando-o para utilizar esse conhecimento posteriormente. Ainda neste capítulo ele tem a preocupação de apresentar o completamento do quadrado na forma geométrica, no entanto, só apresenta o completamento do quadrado para uma expressão $a^2+2ab+b^2$, cujos coeficientes são positivos. Salienta que na série anterior o tema foi abordado no livro, porém deixa explícita a necessidade da retomada, por considerar que o aluno não está apto a usar esse conteúdo como ferramenta, na solução de problemas mais complexos. Orienta ainda o professor que, antes de apresentar exercícios de fatoração algébrica, deve explorar a fatoração numérica.

Quanto à resolução de uma equação completa, quando se trata de um trinômio quadrado perfeito o autor recomenda a utilização da fatoração, pois se trata de uma abordagem extremamente rica e permite aos alunos exercitarem suas habilidades.

Observamos, a apresentação da resolução da equação do 2º grau, utilizando o tratamento dentro do registro algébrico, indo na direção contrária da indicada por Duval, quando este enfatiza que é importante criar condições para que o aluno reconheça um mesmo objeto matemático em várias representações, promovendo uma apreensão mais significativa dos conceitos matemáticos. Enfim, podemos dizer que o texto analisado demonstra a

[7] Veja em STRACHEY, Edward. **Bija Ganita or the Álgebra of the Hindus**. Londres: W. Glendinning, 1819. 138 p.

preocupação em explicitar a resolução da equação pela fatoração, não em apresentar diferentes registros de representação.

2.3 Programa de Matemática da escola pesquisada: conhecendo a escola e o conteúdo em questão

Nossa pesquisa foi desenvolvida numa escola pública de Campo Grande - MS. Nessa escola há, no período matutino das 7 às 12 horas, seis aulas de 50 minutos cada. No período vespertino, a partir das 14 horas, há outras atividades como as aulas de educação física, recuperação e apoio pedagógico. As salas de aula são bem iluminadas e ventiladas, possuem quadro branco, computador, *datashow*, lousa interativa e equipamento de som para o uso do professor.

Os professores são concursados e têm regime de dedicação exclusiva. A maioria possui titulação de Mestre.

Os alunos demonstram um bom nível de conhecimento matemático, até mesmo aqueles que apresentam alguma dificuldade de aprendizagem. A escola oferece condições, por meio das aulas de apoio pedagógico, para que estes tenham oportunidades de rever conteúdos prévios importantes ou mesmo conteúdos vigentes em sala de aula em que apresenta pouca compreensão.

A disciplina de Matemática é dividida em duas frentes: Geometria e Álgebra, com professores distintos. A escola possui um documento no qual são descritos os assuntos a serem abordados, objetivos e número de sessões.

No programa de álgebra relativo ao nono ano do Ensino Fundamental consta que, a Unidade Didática "Equações Redutíveis às Equações Polinomiais do 2º Grau", deverá ter carga horária de 28 aulas, e os assuntos a serem ministrados são assim descritos:

1- Conceito e resolução da equação polinomial do 2º grau;
2- Relações entre os coeficientes e as raízes;
3- Equações da forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$;
4- Equações irracionais;
5- Equações fracionárias;
6- Sistemas de equações;
7- Problemas do 2º grau.

Os dois primeiros itens são relacionados à nossa pesquisa, para estes, são destinadas treze aulas e dentre seus objetivos, destacamos, o de identificar a forma fatorada da equação

$ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) com duas raízes reais e obter, se possível, a fatoração de um trinômio do 2º grau.

Acreditamos que, para uma compreensão maior desses conteúdos, seria importante que a escola revisse a apresentação destes, privilegiando primeiro a resolução da equação por meio da forma fatorada, exercitando as habilidades dos alunos e depois o ensino pela fórmula resolutiva.

Quanto ao estudo das equações do 2º grau, a escola está atendendo a recomendação dos PCN (BRASIL, 1998) inserindo tal conteúdo no programa; também notamos a preocupação curricular da escola com a apresentação deste conteúdo, equação do 2º grau, na forma fatorada, atendendo ao que os PCN preconizam.

As principais noções, extraídas desse capítulo, que compõem nosso trabalho são: as recomendações sobre o ensino das equações do 2º grau propostas pelos PCN (BRASIL, 1998), a apresentação por diferentes livros didáticos da fatoração para a resolução de equações do 2ºgrau, que posteriormente será utilizado em sala de aula pelo professor e a proposta de ensino da escola pesquisada, que propõem trabalhar com a forma fatorada das equações do 2º grau.

3 APORTES TEÓRICOS

Apresentamos como referenciais teóricos de nossa pesquisa a Teoria das Situações Didáticas (TSD) proposta por Brousseau (1986), a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (1995), visando atender nosso objetivo geral e os específicos, assim como para dar suporte na elaboração, apresentação e análise das atividades propostas aos alunos durante o desenvolvimento desta pesquisa. Vale ressaltar que as principais ideias que norteiam nossa pesquisa são: a noção de situação de validação e de institucionalização, as conversões e os tratamentos envolvendo registros de representação semiótica, que contribuíram para a elaboração, desenvolvimento e análise da sequência de atividades.

A TSD serve de base para encontrar caminhos para uma postura de professor investigativo, que coloca o aluno para refletir, orientando-o na construção de um saber. Acreditamos que essa teoria possibilita uma reflexão sobre o modelo de aula clássico executado ao longo dos anos; mostra também como pode ocorrer a apropriação de um conhecimento pelo aluno. Já a TRRS nos mostra a importância de diferentes representações para um mesmo objeto matemático, oferecendo, desse modo, alternativas que podem favorecer a aprendizagem. Lembramos que, não utilizamos por completo essas teorias citadas, mas apenas alguns de seus elementos, são eles: da TSD as situações adidáticas de ação, formulação e validação e a situação didática de institucionalização; da TRRS, tratamentos e conversões.

O referencial metodológico no qual nos apoiamos foi a Engenharia Didática, utilizada para elaborar, aplicar e interpretar uma sequência de atividades, ou seja, organizar nossos procedimentos metodológicos, buscando favorecer a mobilização de diversos registros de representação pelos alunos, em torno da resolução da equação do 2º grau pela fatoração, de forma a contribuir para a apreensão desse objeto matemático.

3.1 Teoria das Situações Didáticas e Teoria de Registro de Representação Semiótica

Da TSD utilizamos o conceito de situação adidática, em particular a de validação, em que temos como objetivo verificar a realização das atividades propostas bem como observar como o aluno procede para validá-las. Além disso, utilizamos também a situação de institucionalização.

A Teoria das Situações Didáticas é um modelo teórico desenvolvido na França por Guy Brousseau (1986), que teve início a partir de estudos críticos sobre a teoria da epistemologia genética de Piaget.

> Brousseau desenvolveu um tratamento científico do trabalho didático tendo como base a problematização matemática e a hipótese de que se aprende por adaptação a um meio que produz contradições e desequilíbrios. Observa-se que sua teoria se apresenta como uma contraposição à forma didática clássica, centrada no ensino com ênfase na divulgação de conteúdos sistematizados, incluindo a forma axiomática. (FREITAS, 2010, p. 78)

Essa teoria tem embasamento no tripé: professor, aluno e saber matemático, valorizando igualmente todas as partes envolvidas; atribui ao professor o papel de criar situações que despertem o interesse pela aprendizagem e permita ao aluno construir seu saber e se apropriar de um determinado conteúdo matemático.

Para Brousseau (2008, p. 21) “Uma situação é um modelo de interação de um sujeito com um meio determinado”. O meio é onde ocorrem as mudanças, equilíbrio e desequilíbrio diante de situações propostas e a possibilidade de ocorrer a aprendizagem de um novo conceito ou rever conceitos equivocados, (FREITAS, 2010).

Sabe-se que a forma como um conteúdo matemático é apresentado poderá determinar sua aprendizagem ou não. Segundo Freitas (2010), cabe ao professor estruturar as atividades de forma que haja o envolvimento ativo dos alunos e que permita momentos de investigação e reflexão acerca do objeto matemático, desse modo, contribuindo para a aprendizagem.

Segundo Freitas, (2010, p. 80) “Existirá uma situação didática sempre que ficar caracterizada uma intenção, do professor, de possibilitar ao aluno a aprendizagem de um determinado conteúdo”.

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a esses alunos um saber constituído ou em vias de constituição. (BROUSSEAU, 1986, p.8)

De acordo com a noção de situação didática o professor não transmite o conteúdo, mas transfere ao aluno a responsabilidade da aprendizagem, ou seja, sua intenção de ensinar não é revelada. Segundo Freitas (2010), o professor prepara, organiza a situação e tem o controle sobre o andamento dela e não sobre o saber; os alunos devem vivenciá-la como se fossem pesquisadores que buscam a solução sem a ajuda do mestre.

> Uma situação didática se caracteriza essencialmente pelo fato de representar determinados momentos do processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha de maneira independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto do professor relativamente ao conteúdo matemático em jogo. (FREITAS, 2010, p. 84).

As situações didáticas são momentos ímpares à aprendizagem, pois o sucesso nelas significa que o aluno tomou o problema para si, refletiu, supôs formas de resolução a partir da sua compreensão matemática, independentemente do professor. Essas situações exprimem a autonomia do aluno frente a uma situação de aprendizagem, possivelmente garantindo sucesso no disciplina.

Uma situação didática pode ser de ação, formulação e de validação. Ressaltamos que essas etapas não estão separadas de forma clara, nem acontecem seguindo a mesma ordem de apresentação.

Caracterizamos como situação de ação quando o aluno apresenta uma resolução para um determinado problema, sem se preocupar com uma explicação teórica. Para Freitas (2010, p.95).

> [...] ocorre uma situação de ação quando o aluno, que se encontra ativamente empenhado na busca de solução de um problema, realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional.

Caracterizamos uma situação de formulação quando o aluno utiliza um conhecimento teórico para proceder à resolução em uma linguagem matemática mais formal.

> Numa situação de formulação, o aluno já utiliza, na solução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos, além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada. (FREITAS, 2010, p. 96)

Uma situação de validação se caracteriza quando o aluno é capaz de verificar a validade de sua resolução. Para Freitas (2010, p. 98) “são aquelas em que o aluno já utiliza mecanismos de prova e em que o saber é usado com essa finalidade”. E acrescenta que “um processo de validação se caracteriza, principalmente, como uma atividade que tem por finalidade assegurar a validade de uma dada proposição matemática, podendo ainda consistir na produção de uma explicação teórica” (p. 98). Contudo, utilizamos a situação adidática de validação, procurando analisar como se dá o processo de validação da atividade proposta ao aluno, bem como, instigando-o a realizá-la.

Na resolução de uma equação, se o aluno substitui as raízes encontradas na equação para verificar se ela satisfaz a equação, ele estará realizando uma validação, bem como fazendo uso de um segundo registro, no caso o registro numérico.

Concordamos com Pais (2002, p. 73) quando afirma que "A explicação da validade de uma proposição está condicionada ao plano estrito da compreensão individual". Ao compartilhar sua validação o aluno poderá produzir reflexão, questionamento e contestação, podendo contribuir para a evolução na aprendizagem.

Brousseau (2008, p. 31) enfatiza que "no passado acreditava que ao considerar as situações de ação, formulação e validação dispunha de todos os tipos de situação", porém percebeu a necessidade dos professores ao término de um conteúdo, revisar os pontos mais importantes deste, reforçando as ideias que deveriam ser fixadas pelos alunos, sinalizando a necessidade de institucionalizar o saber.

> As situações de institucionalização visam estabelecer o caráter de objetividade e de universalidade do conhecimento. O saber tem, assim, uma função de referência cultural que extrapola o contexto pessoal e localizado. Portanto, o conhecimento deverá ter, para o aluno e para a sociedade, um estatuto mais universal do que aquela limitação imposta pela particularidade do problema estudado. (FREITAS, 2010, p. 101)

O momento de validação ocorre de forma independente do professor, no entanto, no momento da institucionalização a responsabilidade pelo saber matemático é do professor, embora deva ser realizado com a participação dos alunos, de modo que dialoguem sobre os conhecimentos construídos ao longo da atividade.

Além da TSD, para concepção das atividades e análise dos dados coletados na pesquisa, utilizamos também a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, concebida por Raymond Duval. Com o auxílio da TRRS é possível analisarmos se o aluno mobiliza os diversos registros propostos nas atividades e realiza conversão, mudança de um registro a outro e tratamento, transformação dentro de um mesmo registro e as dificuldades que eles encontram.

Raymond Duval, filósofo e psicólogo de formação, trabalhou no Instituto de Pesquisa de Educação Matemática (Irem) de Estrasburgo, na França, de 1970 a 1995, onde desenvolveu estudos sobre Psicologia Cognitiva. Seus trabalhos tratam principalmente do funcionamento cognitivo dos estudantes, por meio da mobilização de representações semióticas, na atividade de resolução de problemas de matemática.

Em sua obra *Sémiosis et pensée humaine*, publicada em 1995, ele descreve um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento baseado em mudança de registro de representação semiótica. Em geral somos levados a pensar que o aluno frente a um problema dispõe de um único mecanismo de resolução, no entanto há vários. Duval tenta mostrar a importância disso para o processo de aprendizagem.

Duval acredita que a atividade matemática deve ser particularizada e estudada nas suas especificidades e não partindo do mesmo princípio de aprendizagem de outras disciplinas e acrescenta que o "desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático" (DUVAL, 2010, p.13).

Duval (2011) enfatiza que para a análise do conhecimento matemático não se deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas a forma como os objetos são apresentados ou como podemos ter acesso a eles. Dessa forma não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação. Segundo Duval não há conhecimento matemático que possa ser mobilizado por um sujeito sem uma representação. O termo representação está muito ligado ao sentido de concepções prévias que o aluno tem com relação aos conhecimentos escolares.

Devemos considerar que os objetos matemáticos não são perceptíveis ou mesmo observáveis com a ajuda de instrumentos, seu acesso passa impreterivelmente por representações semióticas. Como os alunos, de modo geral, não conseguem perceber o mesmo objeto matemático em diferentes representações, isto se torna um fator limitante para sua apreensão. Daí a importância de criar condições para que o aluno reconheça um mesmo objeto matemático em várias representações, promovendo uma apreensão mais significativa dos conceitos matemáticos. Para Duval (2010) "sem as representações semióticas torna-se impossível a construção do conhecimento pelo sujeito que apreende".

Nesta pesquisa fizemos uso de registros de representação semiótica no estudo da resolução da equação do 2º grau, em particular no método do completamento do quadrado, considerando algumas formas de representação utilizadas por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, durante o desenvolvimento de uma sequência de atividades.

Duval apresenta dois tipos diferentes de transformações entre registros de representação semiótica: os **tratamentos** e as **conversões**.

O **tratamento** de uma representação, para Damm (2010, p. 179) "é uma transformação dessa representação no próprio registro onde ele foi formado, sendo o tratamento uma transformação interna a um registro". A resolução de uma equação, inequação ou sistemas de equações, representa um tratamento: ao resolvê-los continuamos representando-os algebricamente. O tratamento exige regras próprias a cada registro (cálculo numérico, cálculo algébrico, entre outros) e sua natureza varia de um registro a outro. O aluno pode apresentar muita dificuldade no tratamento de um registro, quando não domina a linguagem da qual se trata. Por exemplo, ao resolver uma equação como $x(x+1) - 9 = x$, ao realizar a multiplicação x.x, se ele desconhece a propriedade da multiplicação de potências de bases iguais, poderá escrever 2x, realizando um tratamento e obtendo um resultado errôneo.

O tratamento está relacionado à forma e ao conteúdo do objeto matemático. Dessa forma, ao representar um dado na representação simbólica 25/100 ou mesmo 0,25, o aluno pode não reconhecer o mesmo objeto matemático, números racionais, nestas representações, pois em cada uma delas estão presentes propriedades diferentes, com custos cognitivos diferentes.

O tratamento, segundo Duval (2010, p. 15);

> Quase sempre, é somente este tipo de transformação que chama a atenção porque ele corresponde a procedimentos de justificação. De um ponto de vista "pedagógico", tenta-se algumas vezes procurar o melhor registro de representação a ser utilizado para que os alunos possam compreender.

A **conversão** de uma representação em outra para Damm (2010, p. 179) "é a transformação dessas em uma representação em outro registro, ou seja, a conversão se dá entre registros diferentes", podendo conservar totalmente ou em parte o objeto matemático em estudo.

As representações semióticas podem ser convertidas em representações equivalentes em outro sistema semiótico. Portanto, converter uma representação é mudar a forma pela qual um conhecimento é representado. Do ponto de vista cognitivo a conversão é uma representação fundamental, "porque a atividade matemática requer a mobilização de um segundo registro de representação semiótica" (DUVAL, 2011, p. 121).

Duval explicita que a capacidade de compreensão em matemática está ligada à capacidade de mudar de registro. Segundo Duval (2010, p.15), "a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representações semióticas". As representações semióticas utilizadas em matemática, de acordo com Duval (2010, p. 14) são os "sistemas de numeração, figuras geométricas, as escritas algébricas e formais".

O autor apresenta, ainda, uma classificação para os registros de representação: as representações multifuncionais e monofuncionais e as representações discursivas e não discursivas, conforme o quadro:

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais) Formas de raciocinar: • Argumentação a partir de observações, de crenças...; • Dedução válida a partir de definição ou de teoremas	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0,1,2 ou 3) • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais) Cálculo	Gráficos cartesianos • mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação

Quadro 1: Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividades matemática)
Fonte: Duval, 2010, p.14

Duval (2010) ressalta que a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro de representação e mesmo que numa atividade um registro pareça privilegiado deve sempre existir a possibilidade de mudar.

Nas atividades propostas nesta pesquisa, possibilitamos ao aluno a realização do tratamento e da conversão. Diante do quadro acima exposto, verificamos que nosso trabalho enfatiza a conversão entre os registros multifuncionais, representação não discursiva para os registros monofuncionais, representação discursiva e vice-versa. Duval observa que “em geral a distância cognitiva entre os registros discursivos e os registros não discursivos é sempre maior do que parece” (DUVAL, 2011, p.123). Assim, buscamos investigar e estudar as dificuldades enfrentadas pelos alunos ao longo das transformações nos registros e entre registros, ao resolver equações do 2º grau pela fatoração.

3.2 Engenharia Didática

A Engenharia Didática, desenvolvida na França, surgiu na didática da Matemática no começo dos anos 1980 e recebeu esta denominação por assemelhar-se ao trabalho do engenheiro, que necessita de conhecimentos científicos para aplicar e adaptar a realidade onde vai atuar.

A Engenharia Didática, para Machado (2010, p. 233), "é uma metodologia que se constitui com a finalidade de analisar as situações didáticas, objeto de estudo da Didática da Matemática".

Para Douady a Engenharia Didática é:

> [...] uma sequência de aula(s) concebida(s), organizadas(s) e articulada(s) no tempo, de forma coerente, por um professor-engenheiro com o fim de realizar um projeto de aprendizagem para uma determinada população de alunos. No decurso das interações entre professor e alunos, o projeto evolui sob as reações dos alunos e em função das escolhas e decisões do professor. Dessa forma, a engenharia didática é ao mesmo tempo um produto, resultante de uma análise a priori, e um processo no decurso do qual o professor executa o produto adaptando-o, se for o caso, na dinâmica da classe. (DOUADY, 1995, p. 61)

Conforme descrição feita por Artigue (1996, p. 196) a Engenharia Didática "é uma metodologia de investigação, caracterizada por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino". A Engenharia Didática também se caracteriza pelo registro e pelas formas de validação.

> Considera-se um ponto do sistema didático cujo funcionamento parece, por razões de naturezas diversas, pouco satisfatório. Analisa-se esse ponto de funcionamento e as condições que tendem a encontrar um novo ponto de equilíbrio e, depois, trabalhando com essas condições, busca-se determinar condições de existência de um modo de funcionamento mais satisfatório. (ARTIGUE, 1995, p. 39)

Classificamos nossa metodologia como uma microengenharia, que tem por finalidade o estudo de alguns registros de representação semiótica, relativos ao conceito de fatoração de um trinômio quadrado perfeito e do completamento do quadrado.

Artigue (1990) destacou que é fundamental no trabalho com a Engenharia Didática a importância da realização de um projeto que possua um referencial teórico adequado e que permita a realização de uma prática submetida a um controle sistemático.

Pais (2002, p. 102) chamou a atenção para a importância da sequência didática:

> Uma sequência didática é formada por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática.

Em seguida, ele complementou: "É preciso estar atento ao maior número possível de informações que podem contribuir no desvelamento do fenômeno investigativo" (p. 102). Em nosso caso, são os vários tipos de registros (numérico, algébrico, geométrico) articulados, que podem provocar no aluno a compreensão deste conteúdo, muitas vezes ensinado somente por regras, de forma abstrata, sem significado.

Diferentemente de outras metodologias, a Engenharia Didática possui uma validação interna, que é realizada pelo confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*, por isso é uma metodologia singular, que se diferencia de outras metodologias de pesquisa. Para sua concretização é preciso seguir quatro etapas distintas: análise preliminar; concepção e análise *a priori*; experimentação e, por fim, análise *a posteriori* e validação, expostas a seguir, com a descrição de sua referida sistematização em nosso trabalho.

Análise preliminar

A análise preliminar é realizada observando os objetivos da pesquisa e deve conter uma análise epistemológica do conteúdo, uma análise do ensino atual deste conteúdo e seus efeitos, bem como das concepções e dificuldades dos alunos e dos entraves na dimensão didática e cognitiva. Em nosso trabalho destacamos textos que serviram como norteadores nesta etapa como: o completamento do quadrado nas formas algébrica e geométrica em livros didáticos, as recomendações contidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais e em outros documentos oficiais acerca do ensino deste conteúdo matemático e a descrição de dificuldades apresentadas no processo de aprendizagem de equações do 2º grau, por meio da análise de pesquisas realizadas.

Concepção e análise *a priori*

Nesta etapa é feita uma descrição e previsão em que o pesquisador escolhe as variáveis que considera pertinentes para o problema estudado, analisa o desafio dado aos alunos, descreve o comportamento esperado dos alunos, seus significados e suas expectativas. Isto é feito para cada atividade da sequência. É a fase da construção da sequência didática.

O objetivo da análise *a priori* é determinar como as escolhas realizadas permitem controlar o comportamento do aluno e o sentido desse comportamento. A análise *a priori* abarca descrição e previsão dos fenômenos.

Priorizamos em nossas análises *a priori* um trabalho descritivo e previsivo do papel do aluno diante da resolução da equação do 2º grau, com base nas situações adidáticas de validação e na situação de institucionalização, (BROUSSEAU, 1986) e dos registros de representação semiótica (DUVAL, 1995), tratamento e conversão, considerados na sequência de atividades.

Para a concretização dessa etapa em nossa pesquisa, foi organizada uma sequência didática composta por três blocos de atividades, nas quais previmos possíveis estratégias de resolução, bem como dificuldades dos alunos; foram descritas as variáveis didáticas que julgamos pertinentes, a saber, medidas de lados e área, expressão presente na atividade, por apresentarem características específicas que, dependendo de sua complexidade, podiam provocar alterações nas estratégias de resolução das atividades realizadas pelos alunos.

Segundo Freitas (2010), cabe ao professor estruturar as atividades visando o envolvimento dos alunos, assim, delimitamos como nosso papel principal, possibilitar aos alunos momentos de investigação e reflexão acerca do objeto matemático, questionando-os, orientando-os para que possam mobilizar conceitos, buscar outros, a fim de encontrar nos diferentes registros de representação uma alternativa para resolução e apreensão das equações do 2º grau pela fatoração e validá-las. Nos momentos finais de cada atividade buscamos trabalhar a institucionalização de alguns conceitos e técnicas referentes ao tema, com o objetivo de analisar as produções dos alunos, bem como discutir erros, acertos, ideias equivocadas e estratégias de solução.

Experimentação

Em nosso trabalho, a fase da experimentação, foi materializada pela aplicação de uma sequência de atividades referentes às equações do 2º grau, para a qual foram explicitados aos participantes da pesquisa os objetivos e as condições da realização da mesma.

A cada sessão realizou-se a análise dos dados coletados, com os objetivos de responder as questões propostas na pesquisa, verificar e descrever se houve algum elemento novo, não considerado nas análises *a priori*, que deveria ser revisto nas próximas sessões. Nesta etapa, caso necessário, reformulam-se as questões e a análise *a priori* das sessões seguintes, a fim de abarcar os elementos novos constatados e eventualmente corrigir o rumo previsto, com o objetivo de responder a questão norteadora do trabalho por meio da análise das atividades propostas.

Análise *a posteriori* e validação

É nesta etapa que ocorre a conclusão do trabalho. O pesquisador deve analisar os dados coletados e confrontar com a análise *a priori* para validar ou refutar as hipóteses levantadas. A Engenharia Didática diferencia-se de outras metodologias pelo tipo de registro das ações e pela validação. Em geral, outras metodologias realizam uma validação externa (confrontação/comparação entre grupos experimentais e grupos testemunhas). A engenharia didática faz estudo de caso e possui uma validação interna que se apoia na confrontação entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori.*

Em nossa pesquisa analisamos se os vários tipos de registros de representação contribuíram para a aprendizagem da resolução da equação do 2º grau pelo método da fatoração. Para isso, confrontamos a análise *a priori* e *a posteriori*, objetivando a validação das hipóteses levantadas com o auxílio das teorias propostas por Duval e por Brousseau.

Para Douady (1995, p.37), "A Engenharia Didática é um instrumento privilegiado para considerar a complexidade da sala de aula", pois possui instrumentos que potencializam a análise antes, durante e depois da realização da sequência didática, maximizando a compreensão da aprendizagem matemática, dos desafios e suas soluções e consequentemente contribuindo com a produção de conhecimento.

Neste capítulo procuramos sintetizar os elementos teóricos principais que norteiam nossa pesquisa, são eles: as noções de situação de validação e de institucionalização, de registros de representação semiótica, em particular as conversões e os tratamentos e também elementos metodológicos da engenharia didática, que contribuíram para a elaboração, desenvolvimento e análise das produções dos alunos na sequência de atividades.

4 ELABORAÇÃO, REALIZAÇÃO E ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo apresentamos a escolha das variáveis didáticas, a sequência de atividades, os procedimentos para a realização e a parte experimental da pesquisa, a fim de explicitar os elementos utilizados na elaboração e no desenvolvimento desta, bem como a sequência de atividades, as análises *a priori* de cada atividade, destacando as possíveis estratégias de resolução pelos alunos, e as análises *a posteriori* das atividades propostas, confrontando os dados coletados com as estratégias previstas nas análises *a priori*. Utilizamos nesta análise a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986), buscando analisar as situações de validação e valorizando o diálogo sobre os conhecimentos construídos ao longo da atividade com momentos de institucionalização; utilizamos também, a Teoria de Registro de Representação Semiótica, (DUVAL, 1995), a fim de analisar a mobilização dos diferentes registros, tratamentos e conversões.

Apresentamos as atividades por sessões, de acordo com o desenvolvimento em sala de aula e, ao final de cada uma, registramos as considerações gerais. Realizamos as análises das sessões que se mostraram mais ricas do ponto de vista da mobilização dos registros, tanto nos tratamentos como nas conversões.

4.1 Escolha das variáveis didáticas

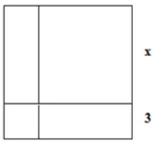
Com relação às variáveis didáticas, Almouloud (2007, p. 36) ressalta que "são aquelas para as quais a mudança de valores provoca modificações nas estratégias ótimas, o que a torna um ponto importante no estudo de modelos de aprendizagem". Em nossa pesquisa, acreditamos que essas mudanças de estratégias contribuirão para o estudo e a compreensão da mobilização dos registros utilizados na resolução de equações do 2º grau pela fatoração.

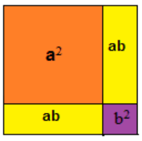
Apresentamos as variáveis didáticas que foram consideradas em nosso trabalho, bem como a maneira que elas poderão influenciar na adoção de estratégias para resolução das atividades pelos alunos. São elas: Medidas de lados e superfície; expressão presente na atividade e registro utilizado no enunciado.

Alguns itens que poderiam representar variáveis didáticas, não variaram ao longo da sequência didática, por escolha nossa, pois entendemos que não prejudicaria os objetivos da pesquisa. São eles: coeficientes da equação, soluções da equação e ambiente proposto. Apresentamos cada item e as razões pelas quais fizemos esta opção.

i) Variável 1 (V_1): Medidas de lados e superfície

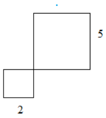
Em algumas atividades a medida dos lados da figura foi dada, mas em outras deveria ser procurado o valor correspondente a partir da medida de superfície ou mesmo de uma expressão. Veja os exemplos:

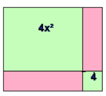




Ao longo da sequência de atividades alternamos os dados, seja para o aluno realizar uma conversão ou um tratamento**.** Assim, acreditamos que a complexidade do termo empregado (algébrico ou numérico) para a medida dos lados ou da área, bem como da expressão proposta pode dificultar ou facilitar a forma como o aluno mobiliza formas de resolução e os diferentes registros.

ii) Variável 2 (V_2): Expressão presente na atividade

Apresentamos atividades em que os alunos deveriam representar dados por meio de uma expressão numérica ou algébrica. De acordo com a expressão presente na atividade, o nível de dificuldade para realização desta tarefa pode variar, exigindo outros conhecimentos ou mesmo outras estratégias para resolução. Por exemplo, dada a figura: 

, escreva a expressão numérica que representa a área do "quadradão" obtido; ou dada a figura: 

encontre a expressão que representa sua área e a escreva na forma fatorada; ou ainda, complete as lacunas: .... – 12y + ... = (..........- 3y)^2.

No primeiro exemplo, os alunos deveriam completar a figura com os retângulos que faltavam e determinar sua área, como também deveriam determinar a área dos quadrados da figura; para obter a área do quadradão deveriam proceder a soma das áreas de cada figura. No segundo exemplo, a partir da área dada, os alunos deveriam determinar a medida dos lados da figura e escrever a equação que representava essa figura na forma fatorada e, no último exemplo, a partir de alguns dados, determinar os termos que completavam as lacunas, escrevendo a expressão e a forma fatorada correspondente.

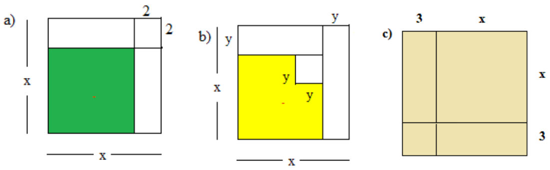
Durante toda a sequência de atividades, o aluno determina uma expressão e trabalha com ela, alternando valores e representações, assim é possível analisar como e quais representações são mobilizadas, as dificuldades presentes, bem como as estratégias utilizadas.

iii) Variável 3 (V_3): Registro utilizado no enunciado

Durante o desenvolvimento de nossa sequência de atividades propusemos atividades que possibilitavam a articulação, pelos alunos, dos registros numérico, algébrico e geométrico.

Dependendo da representação exigida na atividade, esta pode tornar-se mais ou menos difícil. Por exemplo, ao solicitar a resolução algébrica e geométrica da equação $x^2 - 14x = -40$ e $x^2 + 14x = -40$. Na resolução algébrica, o raciocínio empregado será o mesmo, já para a representação geométrica não, dada a natureza do coeficiente b, na primeira equação b<0, e na segunda equação b>0, suas representações são diferentes.

Ao solicitar a conversão do registro geométrico para o algébrico por meio da escrita da expressão da área em destaque como o das seguintes figuras,



, cada uma delas influenciará na mobilização de estratégias diferenciadas e na articulação dos conceitos envolvidos.

A representação geométrica dada ou solicitada pode dificultar ou facilitar a resolução de uma situação proposta e a complexidade ou simplicidade das figuras pode influenciar na mobilização de diferentes estratégias de resolução pelos alunos. Por exemplo, ao solicitar a resolução da equação $4x^2+40x+100=0$ geometricamente, o aluno pode iniciar simplificando a equação por 4 ou não. Na resolução algébrica da mesma atividade, o aluno pode iniciar fatorando ou simplificando por 4, assim a escolha que fizer mudará sua estratégia de resolução resultando numa menor ou maior complexidade de manipulação algébrica.

A complexidade da mudança de registro de uma equação nos fornecerá dados para avaliar as dificuldades, a estratégia de resolução utilizada pelo aluno e se adotarão estratégias diferenciadas diante dessas dificuldades.

iv) Coeficientes da equação

Os coeficientes das equações propostas poderiam ou não ser inteiros e, de acordo Alonso *et al* (1993), as dificuldades com os números racionais são fontes contínuas de erros. Como o foco de nosso trabalho não é o estudo dos números racionais e esta escolha poderia acrescentar dificuldades para o desenvolvimento das atividades pelos alunos, optamos por trabalhar apenas com números inteiros, acreditando que tal escolha não seria prejudicial à nossa pesquisa.

v) Soluções da equação

Como o nosso estudo tem foco na resolução de equações do 2º grau pela fatoração por meio do completamento do quadrado, escolhemos equações com uma ou duas soluções, bem como as que têm solução vazia ou expressa por um número irracional. Fizemos opção por variar a natureza das soluções, a fim de que os alunos pudessem percebê-las ao utilizar os diferentes registros. Por exemplo, uma equação com resolução algébrica em que a solução encontrada é vazia pode ser melhor compreendida pelo aluno ao resolvê-la geometricamente.

De acordo com a atividade proposta, analisamos se as soluções encontradas são respostas aceitas ou não pelo problema.

vi) Ambiente proposto

Propusemos atividades aos alunos que foram realizadas exclusivamente com papel e caneta e durante o desenvolvimento das atividades recomendamos que, caso errassem, deveriam passar um traço e continuar o desenvolvimento da atividade; também não permitimos o uso de rascunho. Desse modo, o aluno não fazia diversas tentativas ou mesmo um pequeno cálculo para nortear a resolução da atividade, refletindo mais para pôr no papel sua resolução e elaborar um procedimento de resolução da atividade que julgasse ser o melhor. Ressaltamos que esta escolha se faz presente em todas as atividades de nossa sequência de atividades.

4.2 Escolha dos sujeitos de pesquisa

O conteúdo de equações do 2º grau normalmente integra o plano de ensino do 9º ano do Ensino Fundamental. Por isso escolhemos como sujeitos de pesquisa alunos desse ano escolar, levando em consideração que eles ainda não tinham recebido a instrução formal sobre a resolução da equação do 2º grau pela fatoração. O critério para a escolha dos sujeitos foi a assiduidade aos encontros.

4.3 A Sequência de atividades

Elaboramos e organizamos uma sequência de atividades, extraídas e adaptadas de livros didáticos e paradidáticos, procurando reelaborá-las de acordo com o referencial teórico utilizado, no caso, a Teoria de Registros de Representação Semiótica: tratamentos e conversões, (DUVAL, 1995) e, a Teoria das Situações Didáticas: Situação de validação e de institucionalização, (BROUSSEAU, 1986).

Para Duval (2010) o domínio do conhecimento matemático reside em duas características primordiais: a importância e a grande variedade de representações semióticas. Ao longo da elaboração de nossa sequência de atividades procuramos favorecer esses aspectos sob a forma de registros numérico, algébrico e geométrico, provocando os alunos a realizarem tratamentos e conversões.

Elaboramos atividades a partir de situações que utilizavam conhecimentos básicos da matemática, na busca da construção de um saber mais amplo e acessível aos alunos, que pudessem culminar na resolução da equação do 2º grau pela fatoração.

Quanto à nossa sequência de atividades, ela foi dividida em três blocos de atividades aqui indicados no trabalho por I, II e III. Durante o desenvolvimento dos três blocos de atividades, identificamos dificuldades manifestadas e conhecimentos mobilizados pelos alunos, bem como os registros de representação que utilizaram e o envolvimento deles em situações de validação.

O primeiro bloco compreende as atividades de 1 a 4. Neste bloco de atividades tivemos como objetivo verificar a mobilização pelos alunos do conceito de área, da propriedade distributiva, do quadrado da soma de dois termos, tanto na forma geométrica, quanto algébrica e aritmética.

O segundo bloco compreende as atividades de 5 a 11. Neste bloco de atividades o objetivo foi a mobilização pelos alunos das representações numérica, geométrica e algébrica na fatoração pelo método do completamento do quadrado.

O terceiro bloco compreende as atividade de 12 a 17. Neste bloco de atividades os objetivos foram: identificar e analisar a mobilização, pelos alunos, das representações algébrica e geométrica presentes na resolução das equações do 2º grau completa pelo método do completamento do quadrado e o reinvestimento do completamento do quadrado na forma geral da equação do 2º grau.

Para melhor compreensão do trabalho realizado em cada uma das seis sessões desenvolvidas com os alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, apresentamos um quadro contendo os conceitos algébricos requeridos ou mobilizáveis nas atividades, a conversão solicitada e o tratamento enfatizado em cada uma das 17 atividades propostas. Ressaltamos que adotamos as seguintes abreviações: **(RA)** para registro algébrico, **(RG)** para registro geométrico, **(RN)** para registro numérico e **(LN)** para língua natural.

Atividade	Mobilização dos seguintes conceitos algébricos	Conversão	Tratamento
1	Área, expressão algébrica e numérica	RG para RA	
2	Quadrado da soma de dois termos e fatoração	RG para RA	RG e RA
3	Potenciação	RA para livre[8]	RA e RN
4	Área, potenciação, expressão numérica e valor numérico de uma expressão algébrica	RG para RA e RA para RG	RA
5	Expressão algébrica, área e medida dos lados	RG para RA	RA
6	Medida de lados, área e fatoração	RG para RA	RA
7	Área, expressão algébrica, fatoração, medida de lado e determinação de incógnita	RG para RA	RA
8	Área, medidas de lados, determinação de incógnita e expressão algébrica	RG para RA	RA
9	Quadrado da soma de dois termos	RA para RG	RA
10	Área e expressão algébrica	RG para RA	
11	Trinômio e fatoração		RA
12	Trinômio	RG para RA	RA
13	Equação do 2º grau	RA para RG	RG e no RA
14	Equação do 2º grau	RG para RA	RG
15	Equação do 2º grau	LN para livre	RA
16	Equação do 2º grau	RA para livre	
17	Equação do 2º grau		RA

Quadro 2: Conteúdo matemático, tratamento e conversão mobilizáveis em cada atividade

[8] Neste caso o aluno poderá utilizar o registro numérico, algébrico ou geométrico.

4.4 Procedimentos para a realização da pesquisa

A pesquisa foi realizada em uma escola da rede pública de Campo Grande – MS. As sessões ocorreram no período vespertino, das 14 às 15h30. Os participantes da pesquisa foram alunos voluntários dos nonos anos do Ensino Fundamental e as atividades foram aplicadas pela própria pesquisadora. Cabe ressaltar que esses alunos tinham aulas durante a manhã, por isso participaram das atividades da pesquisa no período da tarde.

Foi encaminhado um convite aos alunos voluntários, solicitando uma autorização dos respectivos responsáveis para a participação das atividades de pesquisa, assim como para a utilização de recursos de áudio e vídeo, pela pesquisadora.

A sequência de atividades foi apresentada por meio de um *datashow*, instrumento utilizado para agilizar a apresentação das mesmas, bem como para auxiliar na compreensão do que seria proposto.

Durante o desenvolvimento das atividades os alunos foram divididos em duplas ou grupos de no máximo três alunos, com a finalidade de favorecer a troca de ideias entre os mesmos. Cada aluno recebeu a atividade impressa em folha sulfite, o qual deveria respondê-la e entregar à pesquisadora. Os alunos foram orientados a não utilizarem lápis (somente caneta) e, no caso de errar, eles deveriam apenas passar um traço sobre as escritas incorretas e dar continuidade à resolução da atividade.

Os encontros foram gravados em áudio e utilizados apenas para os estudos relativos à pesquisa. Os nomes dos participantes da pesquisa foram mantidos em sigilo. Para a realização do trabalho previmos a realização de 6 sessões de 90 minutos cada, sendo uma por semana.

Depois de compreenderem o enunciado da atividade proposta, os alunos deveriam dar início à resolução da mesma. Após a entrega das suas folhas contendo as respostas, foi feita a discussão de suas produções, com momentos de institucionalização.

4.5 A Parte experimental da pesquisa

A descrição do desenvolvimento experimental da pesquisa está exposta nesse capítulo, no qual apresentamos as atividades realizadas em cada sessão, incluindo a análise *a priori* de cada atividade proposta aos alunos e em seguida, a análise *a posteriori*. Assim, para cada atividade apresentamos o seu objetivo, estratégias e dificuldades esperadas na tentativa de resolução pelos alunos, bem como a descrição do desenvolvimento previsto em sala de aula.

Reafirmamos que as atividades propostas na sequência de atividades foram planejadas utilizando pressupostos da Teoria das Situações Didáticas e da Teoria de Registro de Representação Semiótica.

4.6 Sessão 1

Essa sessão foi realizada no dia 29 de março de 2012, foi composta por três atividades e contou com a participação de dez alunos.

Fizemos nossa apresentação aos alunos e algumas orientações quanto ao nosso trabalho, apresentando informações sobre o desenvolvimento das atividades e sobre o trabalho deles durante a realização das mesmas.

Com os objetivos de introduzir o assunto e conhecer um pouco dos conhecimentos prévios dos alunos em relação ao campo da álgebra, propusemos os seguintes questionamentos para discussão:

1- O que é álgebra?
2- Para que você acha que ela serve?
3- O que é uma expressão matemática?
4- O que é uma equação?
5- O que é uma equação do 2º grau?
6- O que significa a solução de uma equação do 2º grau?
7- O que significa fatorar?

A cada questionamento alguns alunos iam expressando seu entendimento, enquanto outros iam concordando, discordando ou complementando. O nosso papel era de mediação, questionando se todos concordavam com a resposta do colega, fazendo com que cada aluno expressasse seu pensamento a fim de identificar conhecimentos que eles possuíam sobre o tema em questão.

Os alunos tiveram mais dificuldades em responder as questões 2 e 3. Na questão 2, após silêncio geral, transcrevemos algumas falas como:

P[9]: Se você tem 50 reais para dividir entre 3 pessoas: um recebe um valor, o outro a metade do valor e o outro o dobro do valor. Como você pode fazer para descobrir qual o valor que deve dar a cada um? Como resolveria?
Nicole: se os valores fossem iguais colocaria x, y e z, mas nesse caso tem que ser: $x + 1x/2 + 2x = 50$.

[9] Ressaltamos que utilizaremos P para pesquisadora e A para aluno, já que não soubemos identificar todos os alunos pelo nome.

P: Por que estão usando letras?
A: Porque a gente não conhece o valor matemático, não conhece o valor que ele tem então a gente tem que usar letra.

Desse modo, pudemos perceber que os alunos possuem conhecimentos que indicam a necessidade do uso de letras numa equação, como por exemplo, ao se deparar com uma situação onde são atribuídos valores diferentes para as parcelas de um todo.

Na questão 3, quando algum aluno manifestava um conhecimento diferente, os outros não concordavam, porém também não se aproximavam de uma resposta que demonstrasse consenso. Apresentamos alguns questionamentos a fim de que apresentassem novas ideias, mas não houve uma síntese conclusiva das respostas, como mostra o excerto abaixo:

P: Então o que seria uma expressão? Dê um exemplo?
A: 2 + 3 + 4 + 5
P: É uma expressão? Quem acha que ele está correto?
A: Eu acho que não, acho que numa expressão tem que ter mais operações envolvidas, tem que ter soma, multiplicação, divisão, chaves, colchetes.
P: Tem que ter tudo isso para ser uma expressão?
A: Não, mas tem que ter mais de uma operação.
P: Então o problema do exemplo dele é o sinal? Só usa a soma.
A: Tem que ter mais de uma operação.
P: Então poderia ser 2 + 3 – 4....
P: Então o que seria uma expressão?
A: Pode ter vários termos.
A: Pode ter termos literais.

Ao passarmos para a questão 4, observamos que alguns alunos conheciam o conceito de equação e houve progressos no entendimento de uma expressão, conforme pode ser verificado no fragmento abaixo:

Bianca: Tenho ideia do que seja uma equação, mas não sei explicar, sei que tem uma igualdade que quando você substitui um valor, se fizer esta conta tem que dar o mesmo resultado do outro lado.
P: Então para ser uma equação tem que ter uma coisa, um requisito e todos concordam, que coisa é esta?
A: Igualdade.
P: E no caso de uma expressão, é necessário o símbolo da igualdade?
A: Não!
P: Então tem uma diferença entre equação e expressão.
A: Uma tem igualdade e a outra não tem.

A seguir, apresentamos as respostas dadas pelos alunos às questões 5 e 6.

A: Uma igualdade que possui incógnita e essa incógnita está elevada ao quadrado.
A: Elevado a dois.

P: Pode ter expoente maior que dois?
A: Se for maior que 2 ela não é do segundo grau.
P: Vocês já estão estudando a equação do 2º grau?
A: Sim já encontramos os valores a, b e c, o delta e a fórmula de Bhaskara.
P: Haja vista que já resolveram a equação do 2º grau ou outras equações, quando termina a resolução você encontra uma resposta, o que significa aquele valor encontrado?
A: É o valor que você substitui na incógnita.
A: Para tornar a equação verdadeira.
A: Você substitui o valor e vê se deu o número que está do outro lado aí você sabe se está certo ou errado.

Ficou evidente que os alunos estão estudando as equações do 2º grau nas aulas de álgebra e possuem noções acerca do significado da solução de uma equação e também do significado de fatorar, que foi nossa questão 7.

Em seguida, apresentamos o tema do nosso estudo e os alunos puderam compreender, com base no que já tínhamos debatido, o que estaríamos estudando.

Nesta primeira sessão contamos com a participação de dez alunos, cujos nomes são fictícios a fim de preservar a identidade dos sujeitos da pesquisa. Pedimos aos alunos que se organizassem em duplas ou trios; assim, tivemos a formação de quatro grupos, sendo duas duplas e dois trios. As equipes foram compostas do seguinte modo:

Equipes	Componentes
Equipe 1	Nicole, Karol, Bianca
Equipe 2	Mariana, Priscila
Equipe 3	João, Rafaela
Equipe 4	Vinicius, Igor, Will

Nessa sessão desenvolvemos três atividades, as quais foram apresentadas com auxílio de *datashow*, para agilizar a leitura e a participação de todos. Em seguida, indagamos se todos haviam compreendido o que a questão solicitava. Como a resposta foi afirmativa, distribuímos uma folha com a atividade impressa a cada aluno, iniciando assim, o processo de resolução.

Com relação à atividade 1, observamos que os alunos efetuaram a resolução em 5 minutos. Ao perceber que todos haviam terminado, recolhemos as folhas, observamos rapidamente se havia respostas erradas ou diferentes das previstas em nossa análise a priori e iniciamos um processo de discussão sobre cada item da questão.

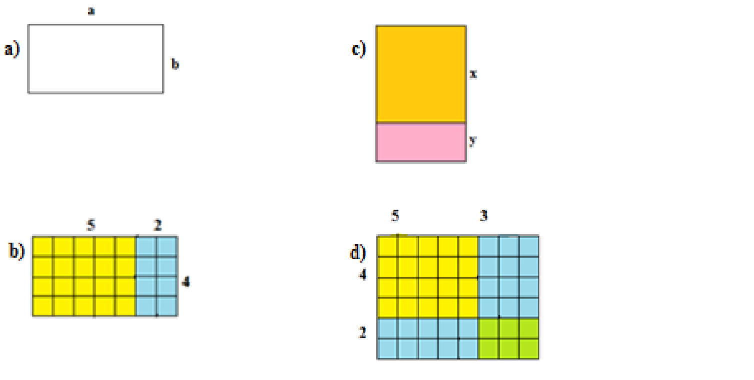
Quanto a atividade 2, os alunos também a responderam rapidamente, demonstrando facilidade tanto na compreensão do exercício como na sua realização.

Na atividade 3, para o item b, os alunos solicitaram a permissão para o uso de régua graduada e como não interferia no que buscávamos investigar, permitimos o uso desse instrumento.

A seguir, apresentamos a primeira atividade da sequência:

Atividade 1

Encontre uma expressão que corresponda à área de cada figura abaixo:



Análise *a priori*

Objetivos: Determinar a expressão que representa a área de cada figura proposta na atividade. Esperamos que os alunos mobilizem a representação algébrica ou numérica para determinar a expressão que represente a área de cada figura, bem como se mobilizam corretamente os conceitos de área de algumas figuras planas e da escrita de uma expressão. Observaremos se o aluno é capaz de representar numericamente e identificar relações entre as expressões, na forma numérica e algébrica, da área das figuras.

Acreditamos que a variável didática que se destaca nesta atividade é V_2: expressão presente na atividade.

Estratégias de resolução

Destacamos possíveis estratégias de solução para esta atividade:

S_1: Multiplicação da medida da base pela medida da altura

Admitimos que o aluno conheça a expressão que representa a área de um quadrado ou retângulo ($A = b.h$ e $A = l^2$). Sendo assim, para cada questão a resposta esperada seria respectivamente: a.b, (5 + 2).4 ou 28, z. (x +y) ou zx + zy e (5 +3).(4+2) ou 48.

Poderá ocorrer dificuldades, pelos alunos, com relação à escrita da expressão numérica e algébrica, sua representação entre parênteses e a noção de área do quadrado ou retângulo. Com base nos estudos de Nguyen (2006) e Booth (1995), essas dificuldades são descritas como: não tem domínio de conhecimentos indispensáveis (manipulação algébrica) para resolução e os tipos de relações e métodos utilizados em aritmética, que envolvem a dificuldade com o uso dos parênteses, já descritas.

Para estudar essas dificuldades, caso surjam, poderemos colocar em debate o que é área de uma figura plana e pedir aos alunos que procurem uma justificativa para explicar para a turma por que a sua expressão está correta.

S_2: Soma dos lados compostos

Neste caso, o aluno poderia resolver somando primeiro o lado composto pela justaposição dos retângulos que formam a figura e multiplicar o resultado pelo outro lado. Caso dos itens (b) e (d) obtendo 7.4 e 8.6. Para o item (c) poderá ocorrer duas situações:

1. Calcular corretamente o produto (x+y). z;

2. Calcular incorretamente, por exemplo, ao adicionar x+y ele obtém x.y que multiplicado por z é igual a x.y.z.

Nesse caso, Booth (1995, p. 33), destaca que "as dificuldades que o aluno tem em álgebra não são tanto de álgebra propriamente dita, mas de problemas em aritmética que não foram corrigidos". Caso essa dificuldade apareça, buscaremos relacionar com atividades que envolvam a resolução de expressões numéricas, por exemplo.

S_3: Confundir área com perímetro

A expressão que representa a área será indicada, pelo aluno, como a expressão que representa a soma dos lados.

No momento de institucionalização poderemos pedir a um dos participantes que diga o que ele entende por área e perímetro, e também pedir a outro aluno que observe se a resposta está certa ou errada e justifique o porquê.

S_4: Atribuindo valores às incógnitas

Neste caso, o aluno poderia substituir valores quaisquer para a incógnita, presentes nas figuras (a) e (c) e escrever a expressão correspondente**.** Caso surja este tipo de resolução, será considerada correta**,** pois atende os nossos objetivos que são relativos ao cálculo da área e a escrita da expressão correspondente.

Validação: A nosso ver, a validação aconteceria quando o aluno testasse a resposta encontrada e conseguisse relacionar a expressão obtida com a área da figura dada. A mudança de registro algébrico para numérico, para os itens (a) e (c) pode ser utilizada como meio de validação.

Análise *a posteriori*

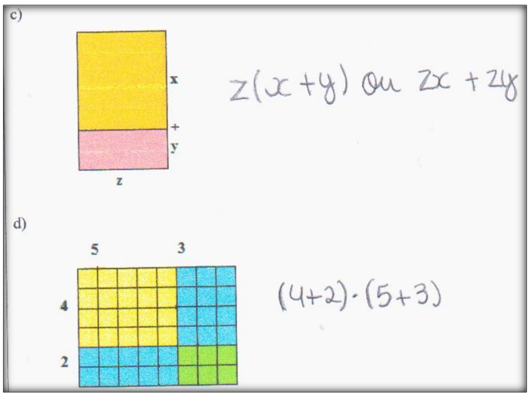
Todos os alunos resolveram essa atividade pela estratégia S_1: multiplicação da medida da base pela medida da altura.

Observamos que eles calcularam a área rapidamente e identificaram as expressões correspondentes em cada uma das figuras. Durante a realização da atividade não houve dificuldades de compreensão e tampouco de mobilização dos conceitos matemáticos necessários para a realização da mesma.

Ao analisar as gravações da discussão, percebemos que os alunos conheciam as fórmulas para o cálculo da área de figuras básicas (retângulo, quadrado e triângulo) de uma figura plana, conforme mostra o excerto abaixo:

P: Então o que seria a área?
A: Base vezes altura.
A: Depende da figura geométrica.
P: No quadrado dá para usar base vezes altura?
A: Sim.
P: No triângulo?
A: Aí é base vezes altura dividido por 2.
P: No quadrado também podemos utilizar outra relação, qual é?
A: l x l ou l^2

Desse modo, verificamos que os alunos mobilizaram os conhecimentos relativos à área para realização da atividade. Com relação ao domínio da escrita de expressões algébricas, do uso dos parênteses e da propriedade distributiva, percebemos que não apresentaram dificuldades, pois todos realizaram os cálculos e indicaram corretamente as expressões correspondentes, como ilustra a produção a seguir:



Protocolo 10: Atividade desenvolvida pela Equipe 4

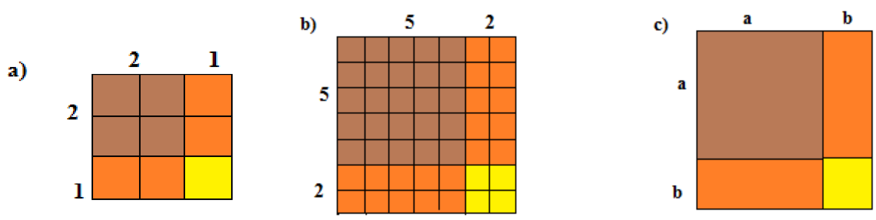
É importante destacar que a validação não ocorreu espontaneamente, foi necessário que questionássemos sobre tal procedimento. Assim os alunos apresentaram formas de verificação, porém oral.

Pesquisadora: Se quiser ter certeza que fez certo, como fazemos? No item (c), (x + y). z, como tem certeza que fez certo?
Nicole: Fazendo z.x + zy.
Pesquisadora: Mas como você sabe que está correto?
Bianca: A área do retângulo amarelo daria zx e do rosa daria zy, como você quer todo retângulo é só você somar zx + zy.
Pesquisadora: E no último caso (item d), como fizeram?
Bianca: Fiz e conferi contando os quadradinhos.

A validação ocorreu tanto algebricamente nos itens (a) e (c), como na observação da representação geométrica nos itens (b) e (d), em que a figura privilegiava a validação por contagem da quantidade de quadradinhos da figura.

Atividade 2

2- Observe a sequência de quadrados abaixo:



a) Tendo em vista os quadrados acima, complete o quadro:

Quadrado a	$(2 + 1)^2 = (2 + 1).(2 + 1) = 2^2 + 1x\ 2 + 2\ x\ 1 + 1^2 = 2^2 + 2.(1\ x\ 2) + 1^2$
Quadrado b	$(\quad)^2 =$
Quadrado c	$(\quad)^2 =$

b) Você consegue dizer se existe alguma propriedade ou regra comum presente nos resultados da resolução acima?

Análise *a priori*

Nosso trabalho tem por base a fatoração, por isso nesta atividade pretendemos verificar se o aluno reconhece a fatoração numérica, geométrica ou algébrica e, além disso, identificar e analisar como ele reproduz e generaliza a forma fatorada do quadrado da soma das medidas dos lados da figura, bem como se consegue obter a forma fatorada e a identidade dos quadrados (b) e (c) e, nesse processo, perceber a existência de uma lei válida ou regra geral para a obtenção da identidade do quadrado da soma de dois termos.

Para Duval (2010), o reconhecimento dos objetos por suas inúmeras representações é uma atividade cognitiva fundamental. Por isso acreditamos que a representação geométrica da área do quadrado possa favorecer a compreensão da identidade algébrica, a partir da articulação desses registros.

No cálculo para obtenção da identidade do quadrado da soma de dois termos, pode-se manifestar diferentes níveis de dificuldades, entre as quais elencamos:

a) a resolução da atividade a partir da propriedade distributiva em relação à adição;

b) na figura do item (c), temos a representação algébrica dos lados do quadrado, exigindo além do conhecimento da propriedade distributiva, o domínio de operações com monômios;

c) a representação do quadrado da soma na forma algébrica pode ser um fator complicador, caso o aluno não saiba operar com termos semelhantes, excluindo qualquer possibilidade de acerto da atividade.

Booth (1995) e Nguyen (2006) observaram em seus estudos estas dificuldades e também outras e as descreveram: o foco da atividade algébrica e a natureza das "respostas", notações e convenções em álgebra, o uso de técnicas válidas, mas não adequadas para o objeto em estudo e não tem domínio de conhecimentos indispensáveis (manipulação algébrica) para resolução.

Esperamos como resposta para o item (a), quadrado a: $2^2 + 2.(1\ x\ 2) + 1^2$, quadrado b: $5^2 + 2.(5\ x\ 2) + 2^2$ e para o quadrado c: $a^2 + 2.(a\ x\ b) + b^2$.

Para o item (b) esperamos que o aluno, ao resolver as atividades do item (a), perceba que existe um padrão comum a todas as resoluções, levando-o a conjecturar a existência de uma regra ou propriedade comum a todas as soluções de um quadrado da soma de dois termos que pode ser usada com o fim de obter o resultado.

Apresentamos as possíveis estratégias de resolução dada pelos alunos, veja:

S_1: Propriedade distributiva

No item (a), os alunos poderão utilizar tal propriedade para desenvolver as atividades propostas e obter o resultado esperado.

Uma possível dificuldade nesta atividade pode ser a falta de conhecimento algébrico para o uso correto da propriedade distributiva. O aluno, com essa dificuldade, poderá iniciar seguindo o modelo proposto desenvolvido para o quadrado (a), podendo nesse caso, anotar valores errados como resolução.

S_2: Utilização das propriedades da potenciação

Os alunos poderão escrever a expressão como o quadrado do primeiro termo somado ao quadrado do segundo termo, obtendo uma expressão que não corresponde à verdade. Esse erro pode aparecer devido a conceitos errôneos em aritmética, que não foram corrigidos, segundo Booth (1995) como, por exemplo, $(8.5)^2$ em que o aluno multiplica 8 por 5 e depois eleva ao quadrado obtendo 1600, como também pode fazer 8^2 e multiplicar por 5^2 e obter 1600.

S_3: Utilizar a representação geométrica

Poderá, a partir da observação das figuras, concluir que são dois quadrados diferentes e dois retângulos iguais, fazendo a anotação da área dos quadrados mais duas vezes a área dos retângulos.

Nessa atividade, elencamos como variável didática: V_2: expressão presente na atividade e V_3: registro utilizado no enunciado.

Durante o momento da discussão da atividade os alunos serão questionados sobre as soluções encontradas para os quadrados (b) e (c). Caso haja divergência entre as respostas, solicitaremos aos alunos que apresentem, no quadro branco, sua resolução e validem suas respostas. Desse modo, poderemos analisar o raciocínio empregado pelo aluno nessa tarefa e discutir sua validade.

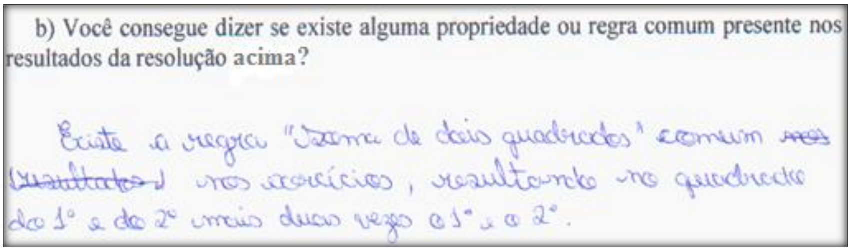
No item (b), para os alunos que não identificaram semelhança entre as expressões obtidas, chamaremos atenção para o fato, para que percebam a existência de uma lei ou regra geral de resolução.

Uma possível validação aconteceria quando o aluno testasse a resposta encontrada, comparando-a com a área da figura dada e observasse se sua resposta corresponde ou não à área total da figura. Caso ele perceba que sua resposta esteja errada, esperamos que o aluno retorne sobre a questão, retomando o problema.

Análise *a posteriori*

Na resolução do item (a), os alunos encontraram corretamente os valores que representavam a identidade do quadrado da soma de dois termos. Todos eles fizeram uso da estratégia elencada por nós como S_1: propriedade distributiva, demonstrando tanto a habilidade numérica como a algébrica na resolução de um produto notável.

Para o item (b), os alunos identificaram a existência de uma regra comum e tentaram nomeá-la.



b) Você consegue dizer se existe alguma propriedade ou regra comum presente nos resultados da resolução acima?

Existe a regra "Soma de dois quadrados" comum ~~nos~~ ~~resultados~~ nos exercícios, resultando no quadrado do 1° e do 2° mais duas vezes o 1° e o 2°.

Protocolo 11: Atividade desenvolvida pela Equipe 1

No protocolo da Equipe 1 notamos que, com dúvida sobre o nome da propriedade, os alunos descreveram a regra geral para a obtenção da identidade. Durante a discussão final da atividade se fez necessária a discussão do nome correto da propriedade: “quadrado da soma de dois termos” e não “soma de dois quadrados”; procuramos evidenciar a diferença entre estes, por meio de exemplos numéricos.

A validação da atividade se deu no campo algébrico, os alunos resolviam a questão do item (a) e confrontavam a expressão com sua identidade. Assim, notamos em diálogo em que os alunos não consideraram a figura para resolver a atividade, nem mesmo como meio para validar as respostas encontradas, ou seja, sua forma de resolução estava embasada no registro algébrico.

P:[...] alguma coisa ao quadrado tem que dar a área de um quadrado.
Mariana: Nossa, é?.... nunca tinha pensado nisso.
P: Se você tem 2^2, quanto dá?

Mariana: Dá 4.
P: [...] que representa a área de um quadrado de lado 2, então quando colocamos a soma de dois termos ao quadrado tem que dar um quadrado por exemplo: $x^2 + 3x + 1$ geometricamente você consegue provar que não é um trinômio quadrado perfeito .... (fomos ao quadro resolver esse exemplo com a ajuda dos alunos).

Buscamos por meio desta atividade verificar se o aluno escreve uma sentença na forma fatorada e determina sua identidade, bem como se reconhece a existência de uma regra geral de resolução e mobiliza os conhecimentos necessários: área, propriedade distributiva, operações com monômios e termos semelhantes para sua realização. Conforme pudemos perceber ao longo do desenvolvimento da atividade, os alunos resolveram com êxito a atividade, apresentando conhecimentos algébricos necessários para o desenvolvimento da mesma, sinalizando a viabilidade do desenvolvimento desse trabalho junto a esse grupo.

Atividade 3

a) Qual o valor de 12^2?
b) Desenhe um quadrado que possua 12^2 unidades de área.
c) 12^2 é equivalente à expressão numérica $(10 + 2)^2$? Por quê?

Análise *a priori*

De acordo com Duval (2010), acreditamos que várias representações podem levar a uma melhor compreensão do objeto matemático em questão; assim, elaboramos essa atividade, em que temos como objetivo verificar se o aluno mobiliza vários registros de representação para representar 12^2 e se durante esse processo busca validar sua resposta. Essa atividade, por ser reflexo da compreensão dos registros numérico e geométrico apresentados nas questões anteriores, é motivo de preocupação.

Ao apresentarmos o item (a), é bem possível que a resolução proposta pelo aluno seja a mais conhecida, ou seja, resolva usando a multiplicação (12.12 = 144 u.a.). Já no item (b), o aluno pode representar um quadrado de lado igual a 12 e utilizando a noção de área de um quadrado ($A = \ell . \ell$ ou, ℓ^2), responder a questão dizendo que o resultado é 144 u.a., ou mesmo, representar um quadrado de 12 cm por 12 cm, graduando de 1 cm em 1 cm e obtendo 144 u.a.

Pensando que o aluno possa por meio de uma figura representar o quadrado do item (b), insistimos no item (c), de modo que ele possa refletir geometricamente e com base na representação geométrica possa representar um quadrado composto por dois quadrados e dois retângulos, justificando geometricamente a indagação. Se isto ocorrer, acreditamos que o aluno fará uma conversão do registro numérico para o geométrico, dessa forma mobilizando registros diferentes e favorecendo sua compreensão. Para o item (c) o aluno poderá utilizar a propriedade distributiva, ou a potência para resolver numericamente a questão; desse modo, realizando um tratamento.

Ao verificar se 12^2 é igual a $(10+2)^2$, acreditamos que o aluno pode refletir num modo de provar esse questionamento seja numérica ou geometricamente, assim podemos verificar seus conhecimentos no campo requerido.

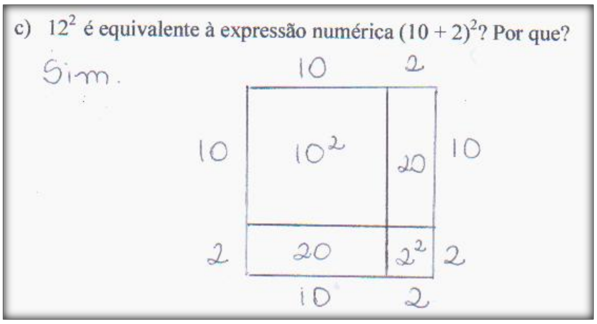
Pensamos que o que varia nessa atividade não é o resultado, mas sim a representação utilizada, portanto elencamos como variável didática as possíveis representações utilizadas pelo aluno, para 12^2, neste caso, V_3: registro utilizado no enunciado.

Análise *a posteriori*

Para o item (a), conforme previmos em nossa análise *a priori*, a resolução apresentada por todos os alunos foi a multiplicação de 12.12 = 144 u.a..

Para o item (b), 6 alunos resolveram fazendo uso da régua, traçando um quadrado de 12 cm por 12 cm para obter geometricamente 144 cm^2 e 4 alunos esboçaram uma figura que representa um quadrado anotando 12 em seus lados e área total 144 u.a.

Para o item (c), seis alunos resolveram a atividade do seguinte modo: $(10 + 2)^2 = 12^2 = 144$ u.a. Três alunos resolveram pelo quadrado da soma de dois termos, aplicando a propriedade distributiva e obtendo sua identidade, conforme descrevemos: $(10+2)^2 = (10+2).(10+2)=10^2+2.10+2.10+2^2=100+ 40+4 = 144$ u.a. e um aluno usou a representação geométrica.



Protocolo 12: Atividade 3, resolução apresentada pela aluna Nicole

Ao resolver a atividade do item(c), notamos que 90% dos alunos não realizam a conversão, somente o tratamento. Para Duval (2003, p. 29) “A compreensão requer a coordenação de diversos registros", por isso insistimos na representação de 12^2 a fim de que os alunos pudessem mobilizar vários registros de representação.

O autor citado ainda alerta que a maioria dos alunos reconhece um objeto matemático apenas em registro monofuncional (único registro), isso pode gerar a falta de significado do objeto matemático, ficando além de sua compreensão.

Pudemos observar diante da resolução da atividade no item (c) que os alunos validaram, utilizando o registro numérico e que somente um aluno fez uso do registro geométrico para validar sua resolução. Conjecturamos então que estes alunos desconhecem o registro geométrico e/ou não possuem conhecimento suficiente para o uso de tal representação.

Considerações gerais sobre a Sessão 1

Como nosso trabalho tem por base a resolução de equações do 2º grau pela fatoração, é necessário para o seu desenvolvimento um nível mínimo de conhecimento do campo conceitual requerido, como: conhecimentos algébricos acerca da fatoração, resolução de equações do 1º grau e manipulações algébricas que envolvem radiciação, potenciação, entre outros. Buscamos, por meio dessa sessão, analisar se os alunos apresentavam o conhecimento exigido para que fosse possível o desenvolvimento de nossa sequência de atividade.

As produções obtidas na aplicação dessa sessão evidenciaram que os alunos conseguem escrever uma expressão numérica ou algébrica a partir de uma figura dada e por meio de um binômio da soma desenvolvem sua identidade, tanto usando a propriedade distributiva como pela regra memorizada. Utilizam quase que exclusivamente a representação/conhecimento algébrico para o desenvolvimento das atividades e as estratégias de validação, ficam restritas à mesma representação.

Em relação às estratégias adotadas pelos alunos, constatamos que foram utilizadas as previstas em nossa análise a priori. No entanto, observamos que houve a predominância da resolução e do entendimento no campo algébrico em detrimento da representação geométrica. De fato, por meio de estudos verificamos que a álgebra vem sendo trabalhada por meio de regras e técnicas, favorecendo o conhecimento em um único registro.

Nesta sessão fizemos uma rápida discussão ao final de cada atividade, com o fim de não ficar cansativo aos alunos haja vista que apresentaram um conhecimento satisfatório em relação aos conteúdos requeridos nas atividades. Como percebemos que todos desenvolveram as atividades corretamente, questionamos como se deu o processo de validação.

Compreendemos que alguns alunos buscaram validar seus resultados utilizando o conhecimento algébrico e que outros não haviam validado suas respostas. Diante desse questionamento, os alunos começaram a explicitar a forma como percebem a atividade como correta. Assim, observamos que na atividade 1 eles fizeram a validação determinando a área de cada figura ou partes da figura, na atividade 2 eles não se reportavam à figura para validar, validavam confrontando a identidade com a forma fatorada e na atividade 3 validaram usando o conhecimento algébrico.

Nesta primeira sessão, verificamos que os alunos apresentaram conhecimentos que permitiam desenvolver nossas atividades junto a esse grupo e também concluímos que não havia necessidade de realizar alterações em nossa sequência de atividades, bem como nas análises a priori. Classificamos esta sessão como exercícios de sondagem.

4.7 Sessões 2 e 3

Essas duas sessões constam no anexo dessa pesquisa. Não apresentamos aqui suas atividades, visto que foram utilizadas para a familiarização dos conceitos necessários à resolução da equação do 2º grau por meio da fatoração. Estes conceitos trabalhados são os de fatoração de um trinômio quadrado perfeito, a identidade de um binômio, o completamento do quadrado, nos quais é feito uso das representações numérica, algébrica e geométrica.

A sessão 2 foi realizada no dia 26 de abril de 2012, três semanas após a primeira sessão por causa de um feriado e da semana de provas bimestrais.

Nessa sessão compareceram 5 alunos, sendo que 3 já haviam participado da primeira sessão: Vinícius, Mariana e Rafaela e dois vieram pela primeira vez: Júlio e Kevin. Pedimos aos alunos que estiveram presentes na primeira sessão que formassem um trio e os outros uma dupla, a fim de identificar em Júlio e Kevin possíveis dificuldades que pudessem surgir devido ao contato inicial com nossas atividades. Nessa sessão desenvolvemos as atividades 4, 5 e 6, as quais tinham os objetivos de completar o quadrado, calcular a área, determinar a medida x do lado do quadrado, ou seja, determinar a raiz da equação, escrever na forma fatorada, mobilizando os registros numérico, geométrico e algébrico e realizar a conversão do registro algébrico para o geométrico.

A sessão 3 foi realizada em 03 de maio de 2012, na qual compareceram 11 alunos, sendo que 2 eram iniciantes: Otávio e Dan. Nessa sessão, devido à falta de aparelhos de gravação, optamos por formar 3 equipes, ficando duas delas com mais alunos do que havíamos previsto para a realização da pesquisa.

A formação das equipes ficou do seguinte modo: Equipe 1: Vinicius, Igor, Otávio e Dan; Equipe 2: Júlio, Rafaela e Will; Equipe 3: Nicole, Raissa, João e Karol. Nessa sessão desenvolvemos as atividades 7, 8, 9 e 10, cujo objetivo foi o de analisar conhecimentos que os alunos tinham de trinômio quadrado perfeito, de área e fatoração de um trinômio quadrado perfeito e de conversão do registro algébrico para o registro geométrico.

Acreditamos que as atividades das sessões 2 e 3, do ponto de vista da mobilização dos diferentes registros, não foram ricas, pois apresentaram um caráter particularmente instrucional, com o fim de estabelecer matematicamente o conhecimento condizente com nossa proposta de pesquisa; sendo assim, decidimos não apresentar as análises a *priori* e *a posteriori*, acreditando que isso não interferiria nos resultados obtidos por esta pesquisa.

5.8 Sessão 4

Essa sessão foi realizada em 10 de maio de 2012, das 14h às 15h30. Nela compareceram 6 alunos, com os quais formamos duas equipes. A equipe 1 foi composta por Mariana, Karol e João e a equipe 2 por Igor, Rafaela e Will. Nessa sessão foram desenvolvidas as atividades 11 e 12.

As atividades tinham como objetivos: analisar a representação utilizada pelos alunos na realização da atividade, que poderá ser algébrica ou geométrica, se eles completam as lacunas corretamente, observando se tratar de um trinômio quadrado perfeito e sua forma fatorada. Além disso, pretendia-se verificar a compreensão do completamento do quadrado para a resolução geométrica de uma equação do 2º grau.

A atividade 11 exigia que os alunos encontrassem os valores que preenchessem as lacunas e para isso teriam que identificar concomitantemente a forma fatorada, satisfazendo os valores propostos. Como os alunos têm a regra memorizada para a fatoração e já haviam trabalhado com a técnica para a obtenção da identidade de um trinômio quadrado perfeito, não foi difícil para eles encontrarem a solução correta. Na atividade 12, propusemos uma identidade cuja representação geométrica, não representava um TQP e com b precedido do sinal negativo.

Atividade 11

Complete as lacunas:

a) x^2 – ....+ 1 = (........... - ....)^2
b) (a + ...)^2 = ... + ... + 121
c) .... – 12y + ... = (..........- 3y)^2

Análise *a priori*

Nosso objetivo é analisar se os alunos conseguem realizar o completamento do trinômio quadrado perfeito e da respectiva forma algébrica fatorada, inclusive com coeficientes negativos. Durante a resolução da atividade observaremos a forma de representação que o aluno mobiliza.

As estratégias de resolução esperadas para os itens (a), (b) e (c) são:

i) a forma geométrica, em que o aluno construiria um quadrado composto por 2 quadrados e dois retângulos, determinaria a área dessas figuras de acordo com alguns valores dados e encontraria os valores que estão faltando. A forma fatorada poderá ser resolvida observando os valores obtidos para o lado do quadrado.

ii) a forma algébrica, onde o aluno sabendo que para obter a identidade do quadrado da soma ou diferença de dois termos segue a regra: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2.a.b + b^2$.

As variáveis didáticas consideradas nesta atividade serão: V_2: expressão presente na atividade e V_3: registro utilizado no enunciado.

Acreditamos que a maior dificuldade presente na resolução pela representação geométrica poderá ser a falta de significado das figuras que completam cada lacuna e o termo algébrico que as representa, a parte literal de cada expressão, além da representação de um quadrado da diferença de dois termos.

Para a resolução por meio da representação algébrica os erros poderão ser decorrentes da regra para realizar a fatoração, elencado por Nguyen (2006) e dos termos empregados nas lacunas, devido a sua complexidade ou a parte literal, já que para todas as atividades elas são distintas. Por exemplo, no item (c) inicialmente completamos com 4 e $9y^2$ utilizamos a representação do trinômio quadrado perfeito para a forma fatorada de $a^2–2ab+b^2$ para $b^2–2ab+a^2$, que poderá provocar erros pela falta de compreensão relativa à forma geral do trinômio quadrado perfeito.

Quanto à validação, caso o aluno preencha as lacunas utilizando o registro algébrico, poderá utilizar o registro geométrico ou numérico para validar, evidenciando a mobilização de um segundo registro. Além disso, poderá ocorrer a não validação da atividade, caso o aluno desconheça outro registro onde possa validá-lo ou mesmo só tenha domínio de técnicas de fatoração memorizada, longe de representar algo funcional para ele.

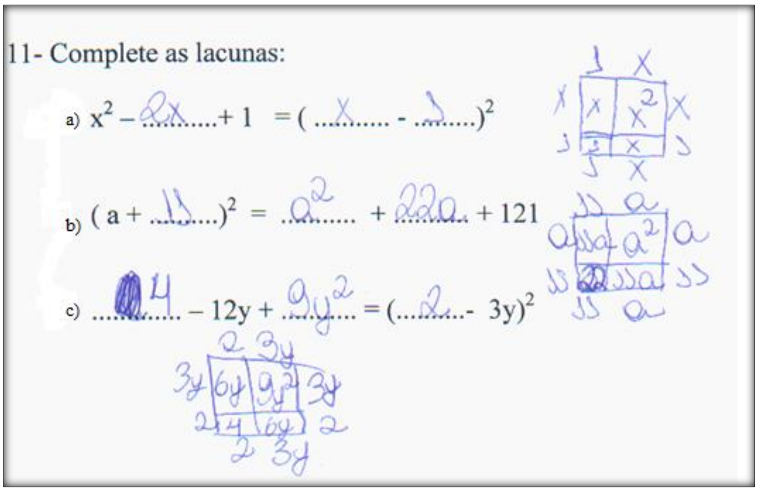
Durante o momento da institucionalização devemos questionar se houve dificuldades com relação à resolução do trinômio quadrado perfeito na forma $a^2–2ab+b^2$, verificar a forma de resolução utilizada pelos alunos, bem como se houve validação e como validaram a atividade e se algum aluno conhecia a representação geométrica de um quadrado da diferença de dois termos. Finalmente, colocar em discussão os erros, acertos e dificuldades nesta atividade pela turma, validando as produções corretas e complementando com a apresentação de conteúdos matemáticos como regra de fatoração e a representação geométrica do trinômio quadrado perfeito pertinentes à atividade.

Análise *a posteriori*

Diferentemente do que prevíamos nas análises *a priori*, não houve dificuldades pelos alunos ao realizar a resolução algébrica e o sinal negativo nas expressões não representou problema, bem como a regra da fatoração para um trinômio quadrado perfeito (TQP) com coeficiente do termo ab negativo, pois utilizaram a regra memorizada da fatoração para resolver.

Mariana: [...] se aqui é x^2 aqui é x aqui é 1, aí é 2 vezes o x vezes o 1, e daí 1ao quadrado;
P: Como você fez? Como pensou?
Igor: $x^2 - 2x + 1 = x - 1$, sei que tá certo porque resolvi $(x-1)^2$.
P: Como você fez com o sinal?
Igor: Eu fiz pensando na regrinha.

Destacamos em nossas análises a priori algumas dificuldades que poderiam surgir dependendo da representação utilizada pelo aluno para a resolução da atividade. Para a representação geométrica de um quadrado da diferença de dois termos, a figura poderia representar dificuldades, assim como a representação algébrica de cada figura geométrica que compõem o TQP; desse modo, o aluno poderia ter dificuldade em reconhecer a figura geométrica que completa cada lacuna. Durante a análise da atividade proposta, encontramos a resolução da aluna Rafaela, que fez uso do registro geométrico para determinar os termos que completavam as lacunas, diferentemente de todos os outros alunos.



Protocolo 13: Atividade desenvolvida pela aluna Rafaela

A aluna utilizou em todos os itens da atividade a representação geométrica para um quadrado da soma de dois termos. Quando perguntamos se tinha alguma ideia de como poderia representar o quadrado da diferença geometricamente, a aluna disse: "*Assim*" e apontou para as suas figuras, levando-nos a crer que desconhecia esta representação. De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), o ensino das primeiras noções algébricas, na maioria das vezes, é reproduzido de forma mecânica, sem produzir significado ao aluno.

Apesar da representação geométrica para os itens (a) e (c) estar errada, os resultados obtidos estavam corretos. Quanto à figura que completava a lacuna, a aluna demonstrou que mobiliza essas noções. Por exemplo, no item (a), a representação geométrica que preenchia a lacuna era composta por dois retângulos e algebricamente é 2x, a qual a aluna representou corretamente. O mesmo ocorreu nos itens (b) e (c) da atividade. Como nos itens (a) e (c) representou corretamente o quadrado menor que compõe o TQP, pensamos que no item (b), ao representar a área do quadrado menor com o valor 22, cometeu um erro de distração.

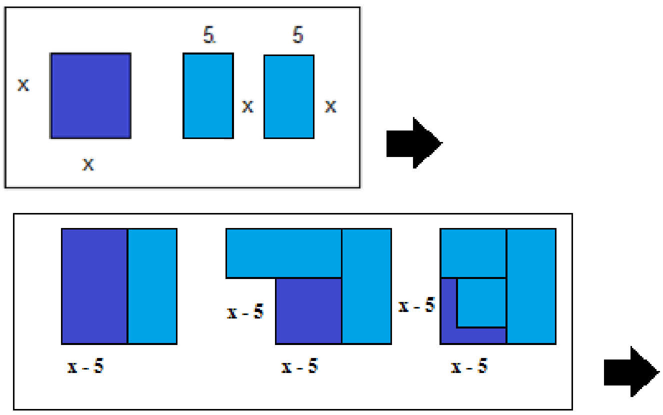
Ainda nessa atividade chamamos a atenção para a parte literal, destacando que todas eram distintas; também utilizamos a representação do TQP para a forma fatorada e o contrário, no item (c): de $a^2 – 2ab + b^2 = 0$ para $b^2 – 2ab + a^2 = 0$. Nenhuma dessas variantes citadas causou confusão à aluna, evidenciando uma noção algébrica sólida e a representação geométrica em vias de constituição, já que reconheceu e significou os objetos matemáticos nas duas representações.

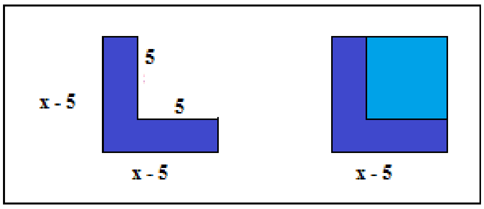
Durante o final de discussão da atividade, com momentos de institucionalização, indagamos se algum aluno tinha ideia de como seria a representação do quadrado da diferença, geometricamente. A aluna Mariana disse que sabia, mas não sabia explicar, então pedimos que viesse até o quadro e representasse. Com a ajuda dos outros alunos, fez uma representação. Desse modo, pudemos verificar que a noção central era percebida pelos alunos: para um trinômio quadrado perfeito, com todos os coeficientes positivos, a partir da representação de a^2, acrescentam-se retângulos e quadrado e quando um TQP com coeficiente do termo ab negativo, sobrepõe, ou seja, diminuem os retângulos e quadrado a partir da figura de área a^2. Pedimos para os alunos representarem a expressão x^2+6x+9 geometricamente, e em seguida $x^2–4x+4$; os alunos Rafaela e Will vieram até o quadro representar algebricamente. Assim, fomos discutindo semelhanças e diferenças entre as representações, o significado algébrico das representações geométricas, como: qual a expressão da parte que sobrou, qual a expressão da parte que nos interessa, qual a expressão de cada figura, entre outras.

Verificamos que os alunos realizaram a validação confrontando o trinômio com a sua forma fatorada, porém mentalmente, não encontrando indícios de validação pelos alunos nesta atividade.

Atividade 12

De acordo com a sequência de figuras abaixo, utilizadas para auxiliar na resolução da equação $x^2 – 10x -11 = 0$, pode-se observar que esta equação pode ser escrita na forma $x^2 – 10x = 11$, assim procedemos à resolução geométrica:





a) Qual a área do quadrado de lado x - 5? Por quê?
b) Quais os possíveis valores que x pode assumir para satisfazer a equação:
$x^2 - 10x = 11$?

Análise *a priori*

Objetivos: Analisar as produções e formulações dos alunos diante da sequência de figuras apresentadas e verificar se eles compreendem o completamento do quadrado para a resolução geométrica de uma equação do 2º grau, sendo o coeficiente b precedido do sinal negativo.

Apontamos como variável didática V_3: registro utilizado no enunciado. A representação geométrica da equação poderá provocar desestabilização no aluno, assim como a mobilização de outras estratégias para a resolução dos questionamentos.

As dificuldades poderão ser decorrentes de insuficiente domínio dos tratamentos. Assim, nesta atividade, acreditamos que seja necessário aos alunos um tempo para a observação e reflexão da atividade. Em seguida, deveremos levantar alguns questionamentos, como: O que vocês entenderam dessa sequência de figuras? O que elas sugerem? É possível determinar a área das figuras, qual ou quais? Será que a equação dada representa um trinômio quadrado perfeito? Em que a resolução difere das outras vistas até o momento?

Estratégias de resolução

Para o item (a) esperamos que os alunos percebam que para obter a área do quadrado de lado x–5 deverão somar as áreas 11 e 25, resultando numa área de 36. Se algum aluno apresentar como resposta somente a área 11 ou 25, poderemos questioná-lo quanto à composição das figuras que determinam o quadrado de lado x – 5, a saber: quantas são as figuras e quais suas respectivas áreas. Esse procedimento é importante para que ele possa refletir que para formar o quadrado de lado x-5 são necessárias duas figuras, uma de área 11 e outra de área 25, totalizando 36.

Para o item (b), esperamos que o aluno compreenda que a área total do quadrado tem valor 36, então a medida do lado tem valor 6, portanto x–5=6, logo x tem valor 11, que representa a medida do lado do quadrado.

O aluno poderá deduzir mentalmente que a raiz da equação ou valor que x pode assumir é 11, ou poderá resolver a atividade escrevendo na forma algébrica a equação $(x-5)^2=36$, chegando à equação x–5=6 e x–5=- 6, portanto x=11 e x=-1.

Confrontaremos as respostas encontradas como solução da equação pelos alunos. Para isso, deveremos questionar o modo como eles obtiveram os resultados e o que os levou a crer que eram soluções que satisfaziam a equação.

Durante a institucionalização, aprofundaremos a discussão sobre o significado de x=11 e x=-1 a fim de verificar a compreensão acerca da raiz da equação, da utilização de valores negativos para área e da validação desses resultados. Com essa reflexão, pensamos que é possível que os alunos estabeleçam matematicamente o conhecimento adequado, ou seja, compreendam que a resolução ocorreu no campo geométrico; desse modo, não é possível aceitar a resposta negativa como solução. No entanto algebricamente as soluções são 11 e -1.

Análise *a posteriori*

Nosso intuito nesta atividade é mostrar a representação geométrica para um quadrado da diferença de dois termos. Pretendemos que o aluno conheça esta representação, compreenda e encontre as raízes da equação proposta.

Entregamos a atividade e deixamos um tempo para reflexão. Em seguida, lançamos alguns questionamentos elencados em nossa análise a priori. Ao iniciar a reflexão, os alunos identificaram que a equação dada era uma equação completa e não representava um TQP, sendo assim, necessário completar o quadrado para determinar suas raízes.

Ao destacarmos a variável didática da atividade (V_3: registro utilizado no enunciado), consideramos que esta poderia provocar desestabilização, assim, constatamos que no item (a) ao qual se referia a área do quadrado de lado x-5, os alunos apresentaram dificuldade no entendimento da figura e em relacionar os dados algébrico com a representação geométrica, dificultando a realização do item proposto. A primeira dificuldade foi identificar as figuras que compunham o quadrado de lado x-5 e qual figura representava este quadrado. Assim, explicitamos que a parte azul não representava um quadrado, por isso completamos com o quadrado azul claro. Outra dificuldade foi a compreensão de que $(x-5)^2$ representa a forma fatorada da equação e x-5, a expressão que representa o lado da figura.

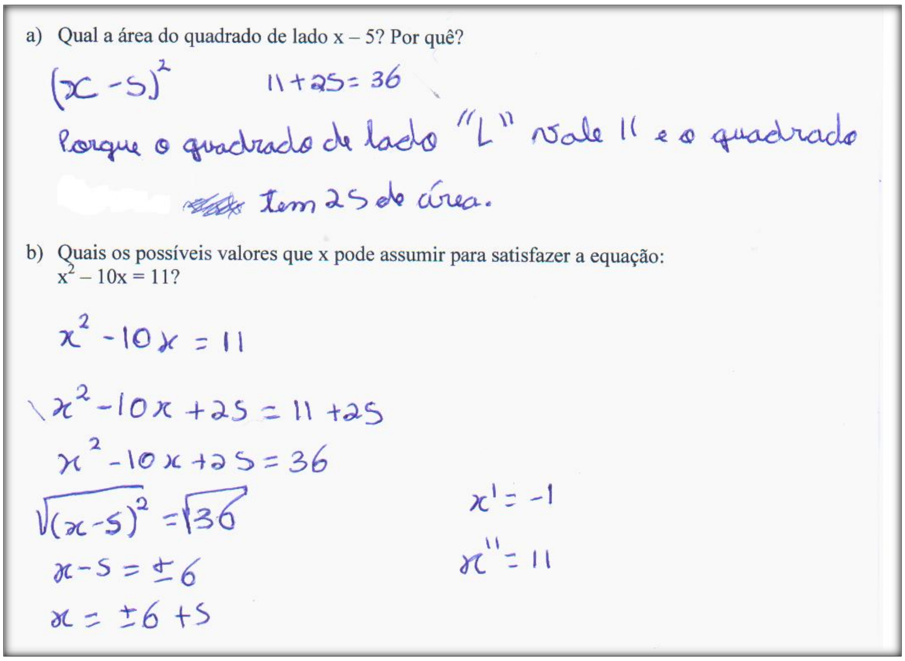
Verificamos o surgimento da mobilização de outra estratégia para resolução do questionamento do item (a) relativo à área do quadrado de lado x-5, percebida na fala da aluna Rafaela, quando disse *"a área desse quadrado é x–5 vezes x-5"*, relacionando a área do quadrado de lado x-5 com a fórmula resolutiva, $A=l^2$. Acreditamos que isso ocorreu devido a não compreensão da atividade, se mostrando como o único conhecimento disponível para solucioná-la. Podemos entender esta resposta como um reflexo da utilização da fórmula $A=l^2$, destacado por Booth (1995), como causa de erros: notações e convenções em álgebra.

Também tivemos a resposta dada pela aluna Karol: $(x-5)^2 - 25$, pois entendeu que o quadrado azul claro não fazia parte do quadrado de lado x-5. Assim, para provocar a reflexão, questionamos se ao retirarmos o quadrado de área 25, a figura de lado x-5 representaria um quadrado. A aluna e sua equipe não chegaram a uma síntese conclusiva das ideias, por isso foi necessária a nossa intervenção, primeiro chamando a atenção para a equação dada no enunciado, em que iniciava com $x^2–10x -11= 0$, em seguida explicando que, isolando o termo independente, temos, $x^2–10x=11$ e complementando, indagamos qual era o significado geométrico disso. A aluna Mariana diz: "*que x^2–10x tem área 11*", assim, a equipe dá início à resolução da atividade.

Em outra equipe, destacamos trecho que evidencia o entendimento da questão pelos alunos:

Will: Hã, aqui então é o quadradão que tira 10x que tem área 11.
Rafaela: Então isso parece um l que tem área 11 mais 25 do quadradinho dá área 36.
Igor: Não entendi nada.
Rafaela: Eu te explico, agora eu entendi. Tudo isso aqui é x^2, aí tira 10x, tira 5x e 5x, e tira esse quadradinho que sobrou que é 5 vezes 5, dá 25, aí esta figura parece um l que tem área 11 mais o quadradinho de 25 dá área 36. Então a área dessa figura é 36.

Com base no excerto apresentado é possível inferir que os alunos Will e Rafaela compreenderam a questão apresentando um raciocínio adequado ao que era solicitado na atividade.



a) Qual a área do quadrado de lado x – 5? Por quê?

$(x-5)^2$ $11+25=36$

Porque o quadrado de lado "L" vale 11 e o quadrado tem 25 de área.

b) Quais os possíveis valores que x pode assumir para satisfazer a equação: $x^2 - 10x = 11$?

$x^2 - 10x = 11$

$x^2 - 10x + 25 = 11 + 25$

$x^2 - 10x + 25 = 36$

$\sqrt{(x-5)^2} = \sqrt{36}$ $x' = -1$

$x - 5 = \pm 6$ $x'' = 11$

$x = \pm 6 + 5$

Protocolo 14: Atividade 12, desenvolvida pela aluno Will

Quanto ao item (b) para determinar o valor de x, os alunos completaram o quadrado e realizaram a fatoração, na forma algébrica, obtendo as resposta 11 e -1; não encontramos cálculos referentes à validação dos resultados, supondo assim que os alunos não validaram a questão. Observamos que dois alunos utilizaram somente o resultado positivo da raiz quadrada e, ao indagarmos o porquê, um disse "*que havia esquecido*" e o outro "*não coloquei, porque eu sempre resolvo a geometria com a parte positiva*". Durante os momentos finais de discussão da atividade, chamamos a atenção para o fato que estamos resolvendo uma equação do 2º grau por meio de uma representação geométrica. As representações geométricas são distâncias ou comprimentos e, portanto, não faz sentido considerá-las como negativas.

Apesar das dificuldades presentes durante a resolução da atividade, verificamos durante a discussão final que todos compreenderam a representação da equação proposta no enunciado da atividade, fato constatado na fala de Mariana "*é de menos porque vai retirando os retângulos*". Verificamos, ainda, o entendimento da situação proposta pela frase de Karol: *"primeiro ele fez um quadrado e dois retângulos, pegou o quadrado e tirou um retângulo e depois tirou outro e sobrou um pedaço que pega e representa por x – 5 [...]",* bem como a área total da figura, obtidos com base nos dados fornecidos pela equação e completamento do quadrado, percebidos na frase de Mariana: *"então a parte azul é 11 e a parte azul clara é 25 pra completar o quadrado, então a área total é só somar".*

Considerações gerais sobre a Sessão 4

Nessa sessão foi possível analisar a mobilização do registro da língua natural, algébrico e geométrico. O registro geométrico ainda pouco presente como forma de resolução da equação do 2º grau, apresentou-se mais como uma representação auxiliar, utilizada para completar o quadrado, determinar a área do quadrado, a forma fatorada, o que para nós indica que os diversos registros de representação semiótica podem facilitar formas de compreensão e validação da atividade, pelos alunos, visto que conseguem pensar a resolução de diferentes formas.

As dificuldades identificadas no registro algébrico são referentes à raiz quadrada de um número positivo e uso do princípio de equivalência. Quanto às dificuldades presentes na atividade 12, estas se restringiram à representação geométrica proposta no enunciado da atividade, a compreensão do processo de dedução geométrica de $(x–5)^2$, à falta de significado geométrico para os elementos algébricos expostos na equação proposta, como, por exemplo, a soma dos termos ax^2+bx, resultar na área dada pelo termo independente, as quais procuramos, ao longo da sequência de atividades, minimizar ou findar. Contudo, consideramos que, a maioria dos alunos conseguiram manifestar compreensão entre a representação algébrica e a geométrica na resolução da atividade 12.

Quanto à validação descrita por Brousseau (2008), verificamos que os alunos pouco se envolvem na busca para se certificarem que a solução encontrada é correta.

Verificamos por meio da atividade 12.b que todos os alunos reinvestiram o conhecimento de fatoração e completamento do quadrado na resolução algébrica desta equação, de forma satisfatória.

Com relação às soluções negativas para uma equação desenvolvida geometricamente, acreditamos que esse é um processo que está em construção ou mesmo aceitação, devido às notações e convenções em álgebra que o aluno traz consigo, descrito por Booth (1995).

Durante a resolução da atividade houve muita discussão entre os alunos, manifestaram muitas dúvidas e fizeram indagações quanto à resolução das questões propostas. Com o fim de esclarecer as dúvidas surgidas, realizamos intervenções durante e ao final da aplicação das atividades, com institucionalização de alguns conceitos referentes ao assunto abordado. O momento de discussão final foi muito rico, pois ocorreu debate sobre dúvidas e houve a participação de todos.

5.9 Sessão 5

Essa sessão foi realizada no dia 17 de maio de 2012 e foi composta por 3 atividades. Nessa sessão compareceram seis alunos: Karol e João formaram a equipe um; Igor e Will, equipe dois e Rafaela e Mariana, a equipe três.

Apresentamos e analisamos as atividades 13, 14 e 15, as quais tinham como objetivos principais investigar a conversão do registro algébrico para geométrico e do registro geométrico para o algébrico e determinar as raízes da equação.

Na atividade 13 os alunos apresentaram bastante dificuldade na compreensão do valor da área do L da figura. Na atividade 14 nenhum aluno apresentou solução geométrica e na atividade 15, a representação utilizada para a resolução ficou a critério dos alunos; eles resolveram algebricamente, a discussão girou em torno das soluções encontradas e se aceitavam a solução negativa.

Atividade 13

Al-Khowarizmi, matemático hindu que viveu no século IX, para resolver a equação $x^2+10x–39 = 0$ (escrita em notação moderna para o melhor entendimento dos alunos), primeiro representou-a da seguinte forma: $x^2 + 10x = 39$, os outros passos você fará:

a) Represente $x^2 + 10x$ por uma figura em forma de L e complete-a para formar um quadrado;

b) Escreva a expressão que dá o valor da área total do "quadradão" obtido. Ela corresponde a um trinômio quadrado perfeito? Justifique;

c) Qual o valor da área do L? E qual o valor do quadrado acrescentado?

d) Qual o valor de x que satisfaz a equação?

Análise *a priori*

Nosso objetivo nesta atividade é oportunizar aos alunos a realização de conversão do registro algébrico para o geométrico, bem como do registro geométrico para o algébrico, durante a resolução da equação $x^2+10x–39=0$ pelo método do completamento do quadrado.

As dificuldades dos alunos no primeiro sentido da conversão possivelmente serão de construção da figura, a medida dos lados e a área da figura correspondente ao L. Enquanto no outro sentido da conversão as dificuldades poderão ser a escrita da equação que representa o “quadradão”, área total e a raiz quadrada de um número positivo que assumirá um resultado positivo e outro negativo gerando duas raízes como resposta para a equação.

A variável didática será V_3: registro utilizado no enunciado. A resolução da atividade implica no uso das duas representações, passando de uma a outra, aumentando o grau de dificuldade para o aluno que só fazia uso de tratamento e não utilizava conversão, assim, outras estratégias de resolução, pelos alunos, poderão ocorrer, tanto no registro algébrico, ou mesmo, nos registros algébrico e geométrico concomitantemente.

Estratégias de resolução

Para o item (a) esperamos que o aluno esboce a figura na forma de um L, sendo composta por um quadrado e dois retângulos, onde a medida do lado do quadrado seja x e as do retângulo 5 e x, que ele complete a figura com um quadrado e verifique que as medidas de seus lados devem ter valor 5, portanto sua área tem valor 25.

No item (b) esperamos que o aluno escreva a expressão que representa a área do “quadradão” obtido como sendo $x^2+10x+25=64$ e justifique se ela é um trinômio quadrado perfeito.

O aluno poderá justificar:

a) dizendo que essa expressão corresponde ao valor da área de um quadrado (fez isto no item a);

b) substituindo um valor qualquer para x, onde sempre encontrará como resultado o quadrado de um número qualquer, ou seja, uma área quadrada. Por exemplo, para x=1, substituindo na expressão terá $1^2+10.1+25=36$, 36 valor correspondente à área de um quadrado de lado 6;

c) fatorando a expressão e encontrando $(x+5)^2$ que corresponde à expressão $x^2+10x+25$.

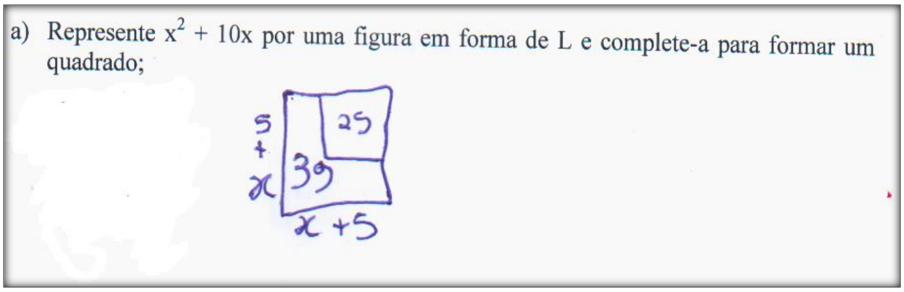
Para o item (c) esperamos que a partir da equação dada $x^2+10x-39=0$, o aluno conclua que a área do L é igual a 39, uma vez que a área do L é dada por x^2+10x, isolando o L temos: $x^2+10x=39$, a área do quadrado acrescentado é igual a 25.

Para o item (d) esperamos que os alunos escrevam $(x + 5)^2 = 39+25$, então $(x+5)^2 = 64$, obtendo $(x+5) = + 8$ e $(x+5) = - 8$, portanto x=3 e x= -13.

O aluno poderá validar os resultados substituindo-os na equação e comprovando que, de fato, eles a satisfazem; deverá observar, também, que não há interpretação geométrica para a solução negativa.

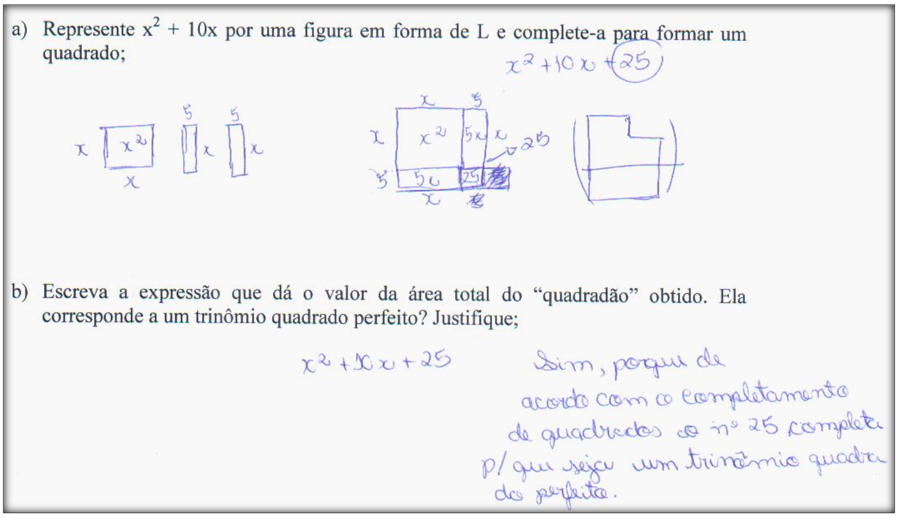
Análise *a posteriori*

Nesta atividade prevaleceram as estratégias de solução elencadas nas análises *a priori*. No item (a) verificamos que os alunos tiveram facilidade em identificar as figuras que compunham o L e determinar a medida dos lados, bem como representar a figura que completava o L e determinar sua área, no caso um quadrado de área 25 u.a.. A representação geométrica realizada pelos alunos não diferiu da apresentada em outras atividades, demonstrando já certo domínio da representação geométrica de um trinômio quadrado perfeito, cujos coeficientes são positivos e da capacidade de realizar a conversão do registro algébrico para o registro geométrico. Destacamos a produção de um aluno, sinalizando que ele relacionou os objetos matemáticos relativos à equação do 2º grau, algébrico e geométrico.



Protocolo 15: Atividade 13, item (a), desenvolvida pelo aluno Will

No item (b), a questão se referia à expressão que dá o valor da área total do quadradão, causando certa confusão aos alunos, pois eles responderam: $x^2+10x+25$ (conforme protocolo apresentado); no entanto, esta expressão representa a área total da figura e não conforme solicitado. Neste caso orientamos que a resposta solicitava a expressão que “dá o valor da área total”, assim, puderam compreender que a expressão correta é: $x^2+10x+25=39+25$. Questionamos se a equação correspondia a um trinômio quadrado perfeito e pedimos que justificassem. Os alunos disseram que sim, que representava um trinômio quadrado perfeito, justificaram pela regra da fatoração e a desenvolveram para demonstrar, o que para nós indicou que ainda encontravam dificuldade em utilizar o registro geométrico para dele extrair possíveis soluções, haja vista que no item anterior haviam representado a expressão $x^2 + 10x$, determinado a medida dos lados e completado o quadrado. Porém, dentre eles, encontramos a justificativa da aluna Karol "*sim, porque de acordo com o completamento de quadrados o número 25 (*leia-se: área 25 u.a.) *completa para que seja um quadrado perfeito"*, a qual não fez referência à regra da fatoração. Cremos que resolveu somente observando a atividade do item (a) evidenciando que já era capaz de utilizar efetivamente o registro geométrico para a resolução da atividade solicitada.


a) Represente $x^2 + 10x$ por uma figura em forma de L e complete-a para formar um quadrado;

$x^2 + 10x + 25$

b) Escreva a expressão que dá o valor da área total do "quadradão" obtido. Ela corresponde a um trinômio quadrado perfeito? Justifique;

$x^2 + 10x + 25$ Sim, porque de acordo com o completamento de quadrados o nº 25 completa p/ que seja um trinômio quadrado perfeito.

Protocolo 16: Atividade 13, itens (a) e (b), desenvolvida pela aluna Karol

Com relação ao item (c), que se refere à área do L, determinar tal área foi motivo de muita discussão entre os pares. Verificamos que os alunos atribuíam a área do L à expressão dada na atividade, conforme fragmento do diálogo a seguir:

Karol: Então, qual a área do L?
João: Não é x^2+10x.
P: Veja bem, x^2+10x é uma expressão, ela representa o que para você?
João: Representa o L.
P: Então é a expressão que representa o L, no entanto a questão solicita o valor da área do L, como podemos encontrá-la?...
Karol: É x+5.
João: Não é, tem que fazer a fatoração, fatorando dá x+5.
P: Olhando na tua figura o que representa para você a forma fatorada x+5?
João: É, são os lados da figura, então não é área.
Karol: Mas como vamos determinar a área do L?
P: A equação representa um TQP?
João: Não.

P: A ideia é pensar como se você fosse completar o quadrado desse trinômio.
Karol: Bom aí tem que isolar o menos 39, fica $x^2+10x=39$.
P: Além de uma equação, tem alguma outra relação que pode tirar daí?
João: Que o quadrado de lado x e os retângulos de lado 5 e x dá 39.
P: Então o que seria esse valor 39? O que ele representa?
Karol: Hã! Fizemos isso na aula passada, o valor do L é o que vem depois da igualdade e depois a gente somava com o quadrado acrescentado e dava a área da figura, lembra?
João: Então aqui a área do L é 39?

Nessa discussão podemos destacar a mobilização dos conceitos de área, fatoração de um trinômio quadrado perfeito e completamento do quadrado. Quando o aluno diz que a forma fatorada é x+5, deixa explícito que sabe que o valor que completa esse trinômio a fim de que seja perfeito é 25, no entanto, ele se esqueceu de mencionar que a forma fatorada é $(x+5)^2$. Também verificamos a presença da mobilização do registro algébrico da equação dada, para o registro geométrico, quando o aluno diz "*a forma fatorada dá x+5, são os lados da figura, então não é área"* e que da expressão x^2+10x representa *"quadrado de lado x e os retângulos de lado 5 e x*", relacionando assim a expressão algébrica com o seu significado geométrico. Concordamos com os PCN (BRASIL, 1998) que enfatizam que o ensino das equações do 2ºgrau pela fatoração pode ajudar a atribuição de significados, pelos alunos, aos objetos matemáticos ali empregados, promovendo a apreensão desse objeto.

Quanto ao item (d), o qual solicita o valor de x que satisfaz a equação, observamos dificuldades apresentadas pelos alunos quanto ao uso do princípio da equivalência, estudado principalmente durante as equações do 1º grau e o resultado de uma raiz quadrada, gerando dificuldades no tratamento do registro algébrico.

Karol: Tem que fazer uma conta, esqueci como faz, e agora? Sei que tem uma hora que faz a fatoração e eleva os dois ao quadrado. Mas não lembro como faz, como vamos achar x?...
P: Qual foi a expressão que obtiveram para esse trinômio?
Karol: Então dá $x^2+10x+25$ igual a que?
João: A 39 + 25 que colocou do outro lado, aí dá 64.
Karol: Aí tem que fatorar, e agora eleva ao quadrado, mas não dá certo...
João: Não, tem que tirar a raiz.
Karol: É mesmo! E agora coloca mais ou menos raiz de 64, ou não?
João: Acho que sim.
Karol: Acho que é só mais, e agora?

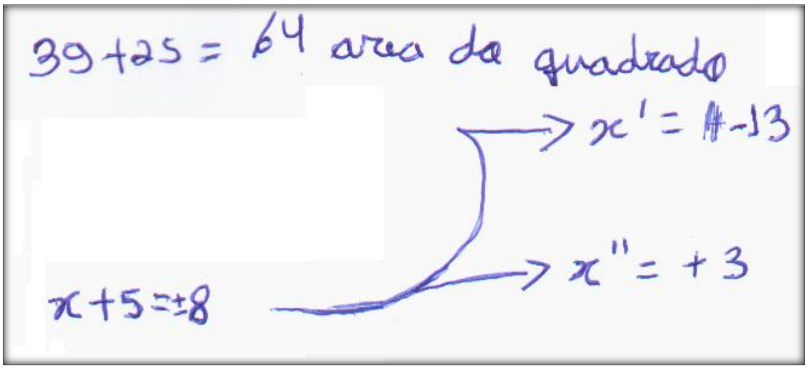
Para direcionar a equipe na reflexão sobre o uso dos sinais positivo e negativo para a raiz quadrada, indagamos qual era o resultado para a raiz de 16 e eles disseram que era +4 e -4; pedimos para que justificassem o porquê e o aluno João disse *"se fizer (– 4) vezes (- 4) dá 16 e (+4) vezes (+4) também dá 16".* Desse modo, percebemos que estes alunos estão confundindo as soluções da equação $x^2=16$, que são +4 e -4, com a raiz quadrada de 16 que é

+4, assim, demonstrando que têm dificuldades em relação ao conceito de raiz quadrada e incompreensão de ideias associadas ao uso do sinal, conforme destacamos na fala de Karol e João: *"acho que é só mais (+), a gente sempre deixa o negativo,... não sei, a gente nunca usa"*. Mas, ao instigarmos os alunos a formular uma explicação do motivo para não usar o sinal negativo, eles disseram: *"acho que porque é um quadrado, seus lados são positivos não pode ser negativo",* demonstrando, assim, conhecimento no trato com medidas de lados e áreas de figuras; no entanto, a má compreensão do significado da não utilização do valor negativo, tornou-se um entrave para a resolução algébrica. Encaminhamos a reflexão para o enunciado da atividade, a fim de que os alunos verificassem se este se referia a cálculo de área ou medidas de lado. Ao observarem que isto não ocorria, os alunos Karol e João concordaram que a equação aceitava a resposta negativa, no entanto, explicitamos que não poderíamos provar isso geometricamente, o que foi logo aceito por eles.

Ainda no item (d), a mobilização do registro geométrico foi determinante para uma resolução rápida e eficiente proposta pelo aluno Will para determinar o valor de x.

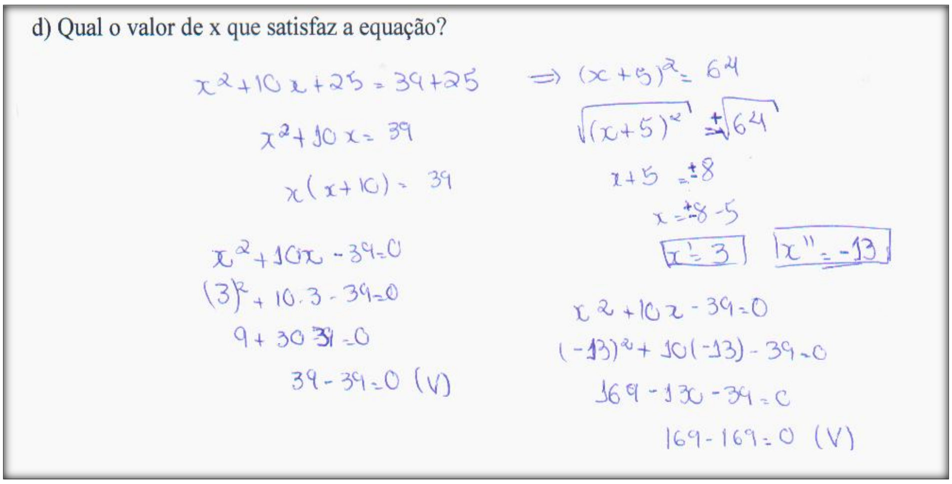
Rafaela: Ela quer saber o x do quadradão?
Will: A área do quadradão é 64, 8. 8 é 64, então pronto, x+5=8 e x+5=-8 então o x dá 3 e -13.

Confirmamos isso observando a resolução da atividade.



Protocolo 17: Atividade 13, item (d), desenvolvida pelo aluno Will

Observamos que alguns alunos mobilizam diversos registros, realizando tanto tratamentos como conversões, levando-nos a crer que tal mobilização possa favorecer a apreensão da resolução da equação do segundo grau pela fatoração, conforme propusemos como questão central neste trabalho.



d) Qual o valor de x que satisfaz a equação?

$x^2+10x+25=39+25 \Rightarrow (x+5)^2=64$

$x^2+10x=39$ $\quad\sqrt{(x+5)^2}=\pm\sqrt{64}$

$x(x+10)=39$ $\quad x+5=\pm 8$

$x=\pm 8-5$

$\boxed{x'=3}$ $\quad\boxed{x''=-13}$

$x^2+10x-39=0$

$(3)^2+10.3-39=0$

$9+30-39=0$

$39-39=0$ (V)

$x^2+10x-39=0$

$(-13)^2+10(-13)-39=0$

$169-130-39=0$

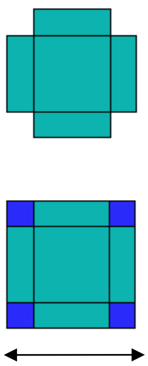
$169-169=0$ (V)

Protocolo 18: Atividade 13, item (d), desenvolvida pela aluna karol

Para a validação, os alunos fizeram uso do registro numérico, substituindo os valores obtidos como resposta na equação e verificando sua veracidade, a dificuldade manifestada foi determinar em qual equação eles deveriam substituir os valores encontrados para x; assim, depois de refletirem sem a nossa intervenção, concordaram que o correto era substituir na primeira equação, cuja explicação foi dada pela aluna Karol *"porque se você pegar aqui (*se refere à equação $x^2+10x–39=64$*) não vai dar certo, se você fez errado aqui, não dá certo, por isso pega a primeira"*. A seguir, informamos aos alunos que substituímos na primeira porque esta é a equação dada e que a equação $x^2+10x+25=64$, obtida após o completamento do quadrado foi a equação equivalente utilizada como estratégia de resolução.

Atividade 14

Resolva geometricamente a equação: $x^2 + 8x – 84 = 0$



Análise *a priori*

Nosso objetivo nesta atividade é provocar o aluno a fazer uso da conversão da forma algébrica para a geométrica, na resolução da equação do 2º grau, pelo método do completamento do quadrado.

A figura geométrica proposta nesta atividade sugere um completamento diferente do ocorrido em outras atividades e em virtude dessa nossa escolha, poderá ocorrer certa desestabilização no aluno, facilitando ou dificultando a resolução, assim, ele poderá resolver utilizando o registro numérico ou algébrico, levando-nos a considerar como variável didática: V_3: registro utilizado no enunciado.

Pensamos que uma das dificuldades apresentadas pelo aluno poderá ser a resolução geométrica proposta na atividade, para identificar o quadrado de lado x e as áreas de cada figura, devido à forma como estão dispostos os retângulos na representação geométrica. A outra dificuldade será perceber que a área do quadrado maior somada com a área dos retângulos totaliza 84 unidades de área, ou seja, $x^2+8x=84$.

Estratégias de resolução

S_1: Resolução somente geométrica

Esperamos como resposta que o aluno complete a área do quadrado maior (interno a cruz) com x^2, a área de cada retângulo com 2x, totalizando 8x e a área de cada quadrado menor (quadrado azul) com 4 u.a.; em seguida, que some 84 + 16 (área total da cruz mais a área total dos quadrados menores (quadrados azuis) e que, a partir daí, deduza que a área do "quadradão" é 100 u.a., concluindo que seu lado tem valor 10. Como o lado do "quadradão" é composto por duas arestas do quadrado menor medindo 2 cada uma e uma aresta do retângulo de medida x, o aluno poderá representar x+4=10, então a raiz da equação é igual a 6.

S_2: Resolução algébrica

Neste caso, o aluno usará a representação geométrica somente como suporte visual para proceder a resolução. Ele fará a resolução de forma algébrica e anotará os resultados na figura. Desse modo, o aluno poderá escrever uma sequência de passos, semelhante à descrita abaixo:

$$x^2 + 8x - 84 = 0$$
$$x^2 + 8x = 84$$
$$x^2 + 8x + 16 = 84 + 16$$
$$(x + 4)^2 = 100$$

$|x + 4| = 10$

$x + 4 = +10$ e $x + 4 = -10$

$x = 6$ e $x = -14$

Assim, o aluno encontrará duas raízes: 6 e -14.

Os alunos que fizerem o uso da estratégia S_1 possivelmente encontrarão somente uma raiz como resposta para a equação, já os alunos que resolverem usando a estratégia S_2 certamente encontrará duas raízes como resposta. Deveremos provocar essa discussão, com o intuito de que os alunos compreendam que a resposta negativa não satisfaz a equação.

Durante a institucionalização deveremos questionar, também, a forma de resolução utilizada nesta atividade, a fim de que os alunos compartilhem o raciocínio utilizado e identifiquem erros e acertos cometidos, bem como a forma de validação de suas respostas. O confronto de ideias e soluções apresentadas é um elemento importante para analisar os tipos de registros de que os alunos se apropriaram e expressaram durante a atividade e as dificuldades presentes nestes.

Análise *a posteriori*

A figura geométrica proposta nesta atividade sugere um completamento diferente do ocorrido em outras atividades, causando dificuldades na compreensão e, consequentemente, na atribuição da medida da área de cada figura que compunha o quadradão. Na fala de Rafaela ficou explícita esta dificuldade. Ao identificar e representar x^2 e 8x na figura do enunciado da atividade ela disse: "*é o quadrado do meio* (se referindo a x^2)*[...] deu nos retângulos 4x e 4x que dá 8x".* Observamos que a aluna só considerou dois dos quatro retângulos da figura, evidenciando a não compreensão da figura. Constatamos, desse modo, que a variável elencada, mudança de registro, mostrou-se como geradora de dificuldades, desencadeando assim, dificuldade em realizar a conversão do registro algébrico para o geométrico e provocando a adoção de estratégias para resolução da atividade. Diante disso, alguns alunos procederam à resolução algébrica.

João: Não tem nenhum número que ao quadrado dá 84.
Karol: E aí como a gente faz, não vejo sentido, droga como se faz isso? Se aqui é x, aqui também, ou tem que por tudo... Ah! Já entendi aqui é $(x+4)^2 = 84 + 16$.
João: Ah! Que fácil.
Karol: Agora que vi também, mas e agora $x + 4 = \pm 10$, então $x = -14$ e $x = 6$. Achei algebricamente agora tem que colocar aqui, vai eu achei, me ajuda e agora? Fizemos algebricamente.

Nas primeiras considerações, observamos que, eles refletiram observando a figura, não conseguindo entender como deviam realizar a resolução geométrica, procedem à resolução algébrica, a partir da equação dada. É possível perceber que os alunos João e Karol demonstram dificuldade em realizar a conversão do registro algébrico para o geométrico, no entanto, mobilizaram o registro algébrico como forma de resolução, evidenciando que eles possuem maior facilidade com o registro algébrico em relação ao geométrico e realizaram corretamente o tratamento nele.

Apesar da questão solicitar a resolução por meio do registro geométrico, eles buscaram apoio na álgebra, em que possuem maior domínio dos conhecimentos. Depois de muitas tentativas de resolução geométrica, os discentes solicitaram nossa intervenção.

P: Qual é a figura que representa o x^2*?*
*Karol: Aqui, (*Mostrou os quadradinhos*).*
P: Então quantos x^2 *daria ao todo?*
Karol: $4x^2$.
P: Mas na equação dada é x^2.
Karol: Então vai ser o quadrado interno maior, esse lado é x e o outro é x.
P: Ok, certo. Na equação é 8x, então qual a figura que representa isso?
Karol: Aqui no retângulo é 2x, são 4 vai dar 8x.
P: Certo, então qual a área de cada quadradinho azul que completa essa figura?
Karol: Aqui é x e aqui é 2, então o quadradinho é, ai que fácil...
P: Qual a expressão que representa essa figura?
Karol: $x^2 + 8x + 16 = 84$.

Observamos que, a partir dessa conversa, cujo fim era manter os alunos na busca, ou seja, em situações adidáticas, segundo Freitas (2010) o objetivo é sempre que o aluno possa reelaborar seu conhecimento. Neste caso, observamos que eles foram capazes de organizar o raciocínio para proceder a resolução geométrica. Notamos que, ao serem instigados, eles conseguem relacionar as figuras com a expressão dada, o que para nós indica que, apesar da dificuldade apresentada, já são capazes de relacionar álgebra com geometria, ou seja, conseguem significar estes objetos, construindo a aprendizagem por meio de uma segunda representação, a geométrica.

Durante a resolução algébrica, determinaram a raiz quadrada do número 100 e na resolução geométrica, o valor numérico 100 representa a área total da figura ou quadradão. Observamos, desse modo, que os alunos apresentaram dificuldade com esse conceito.

P: [...] você acrescentou 16, então qual a área de todo esse quadradão?
Karol: 100.
P: Então quanto mede o lado?

Karol: 100 dividido por 4 é igual a 25.
João: Certo, já foi.
P: Tá certo João? Você concorda? Se a área é 100, quanto mede o lado?
João: 25.
Karol: Tem que ser 25.

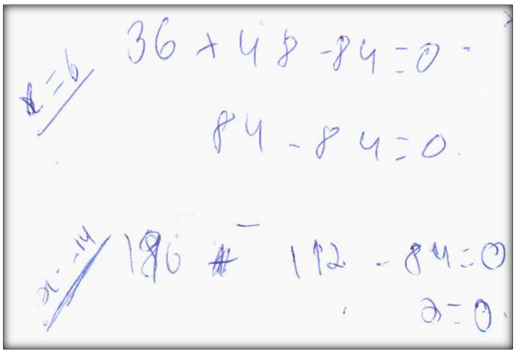
Ao dividir 100 por 4, entendemos que os alunos confundem os conceitos de área com perímetro de uma figura plana, provocando erro no tratamento da resolução geométrica.

Alunos de outra equipe não apresentaram as mesmas dificuldades na conversão do registro algébrico para o geométrico, mas manifestaram dificuldade no completamento do quadrado, conforme a discussão da elaboração da resolução geométrica:

Will: Se aqui fosse 2x aí dava 8x.
Mariana: É mais daí aqui dá 16, 16 vezes 16 não dá 84.
Will: Aí é 2x e 2x e cada quadrado azul dá 4.
Rafaela: Aí um quadradão é um TQP que é igual a 84.
Mariana: $x^2 + 8x + 16 = 84$.
Rafaela: Não vai dar certo.
Will: Se aqui fosse 2, então dá 8x e os quadradinhos 4 de área, que dá 4, 8, 12, 16, então fica $x^2 + 8x + 16 = 84 + 16$.
Rafaela: Então o lado do quadrado fica como?
Will: Fica x +4.
Rafaela: Ah! Então x é 6 e – 14.

Quanto à validação realizada pelos alunos, destacamos a validação por meio do registro numérico proposta pela aluna Mariana que disse: "*É mais fácil fazer* $(6+4)^2=100$ *e* $(-14+4)^2=100$*",* chamando a atenção para o fato que usa a equação da medida dos lados do quadrado (x+4) e a fórmula $l^2= A$, ou seja, $(x+4)^2=100$, para determinar a veracidade de suas respostas.

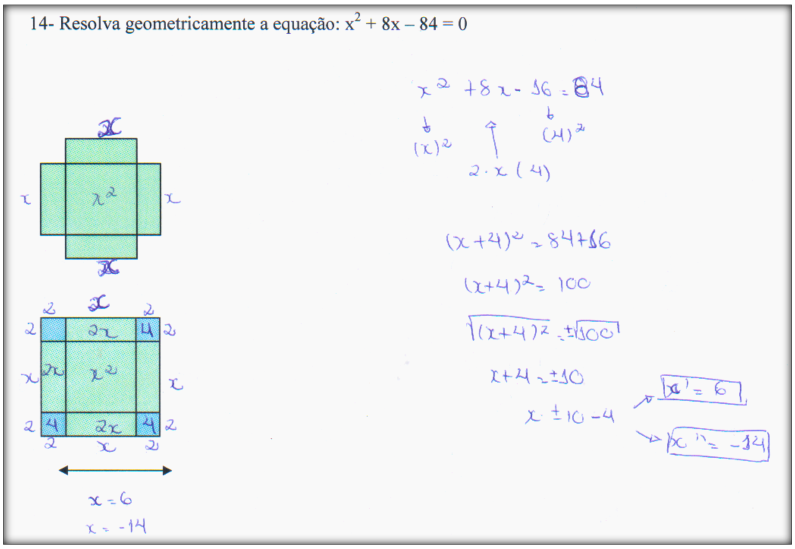
Em outra equipe, também constatamos a validação.



Protocolo 19: Atividade 14, validação desenvolvida pelos alunos Will e Igor

Os alunos, por meio da verificação das raízes, validaram as soluções obtidas, evidenciando, desse modo, a mobilização do registro numérico.

Quanto às estratégias de resolução, na análise *a priori*, destacamos a solução algébrica, em que prevíamos que os alunos fariam esta resolução com suporte visual da figura; no entanto, no momento final de debate da atividade, discutimos sobre a representação geométrica dos termos da equação e questionamos a forma de resolução utilizada nesta atividade pelas equipes. Verificamos, então, que Igor e Will mobilizaram registros algébrico e geométrico, concomitantemente; já a dupla Rafaela e Mariana fizeram geometricamente e utilizaram o registro algébrico e numérico como forma de verificação e, Karol e João resolveram algebricamente, o que forneceu suporte para a compreensão e a realização da solução geométrica.



Protocolo 20: Atividade desenvolvida pelos alunos Karol e João

A resolução apresentada por essa equipe foi importante do ponto de vista da mobilização do registro algébrico, pois os alunos parecem ter maior compreensão da representação algébrica para responder a questão, geometricamente, ou seja, reinvestiram o conhecimento adquirido ou em vias de constituição concernente à resolução da equação do 2º grau pela fatoração com o uso do registro algébrico, representando-o geometricamente com o fim de obter a mesma solução.

Questionados os alunos quanto à resposta negativa e, se nesta atividade, poderíamos aceitar a resposta -14, novamente ficou evidente dificuldades e dúvidas de interpretação. A aluna Karol disse: "*a questão é que não estamos resolvendo área, por isso pode, só estamos resolvendo geometricamente, se fosse medidas de lados, aí negativo não tem".* Esclarecemos que a resolução solicitada era por meio da representação geométrica, neste caso, não temos como justificar uma solução negativa, desse modo, não é possível aceitá-la.

Duval (2010) diz que o aluno precisa reconhecer um mesmo objeto matemático pelo menos em duas representações; assim, acreditamos que o modo como se deu a resolução da atividade pelas equipes foi muito rico aos alunos, pois puderam experienciar a angústia de ter a solução e não saber representá-la do modo solicitado ou mesmo utilizando dois ou mais registros como forma de verificar se resolveram corretamente, levando-os a se apoiar nos conhecimentos possuídos, tentando galgar o novo.

Atividade 15

Qual é o número cujo quadrado, adicionado com seu décuplo, dá 96?

Análise *a priori*

Objetivo: Proporcionar ao aluno a possibilidade da conversão da língua natural para aquela que lhe seja mais conveniente: registro geométrico ou registro algébrico, durante a resolução da equação do 2º grau com uso do completamento do quadrado.

Duval (2003 p. 18) observa que "A passagem de um enunciado em língua natural a uma representação em outro registro envolve um conjunto complexo de operações." Por isso, consideramos a conversão da língua materna para outra representação como a representação algébrica ou geométrica uma variável didática, ou seja, V_3**:** registro utilizado no enunciado. Nosso intuito é proporcionar ao aluno a escolha do registro que lhe pareça mais acessível para a resolução e, com isso, analisar sua estratégia de resolução bem como possíveis dificuldades apresentadas.

Estratégias de resolução

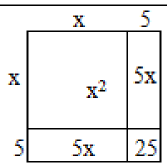
S_1: Utiliza registro algébrico

O aluno escreve a expressão e a resolve algebricamente. Fará $x^2+10x=96$, completando o quadrado obtém $x^2+10x+25=96+25$, fatorando o primeiro membro e realizando a soma no segundo membro, terá: $(x+5)^2=121$, chegando às raízes $x=6$ e $x=-16$.

S_2: Utiliza os registros algébrico e geométrico

O aluno escreve a expressão algebricamente, no entanto utiliza o registro geométrico para encontrar o valor que completa a área do trinômio quadrado perfeito e a forma fatorada.

Representa na forma algébrica a expressão: $(x+5)^2=121$ obtendo as raízes $x=6$ e $x=-16$, ou seja, transita de um registro a outro, conforme lhe seja mais fácil ou conveniente.

<table>
<tr>
<td>


</td>
<td>

$x^2 + 10x + 25= 96 + 25$

$(x + 5)^2 = 121$

$\sqrt{(x+5)^2} = \sqrt{121}$

$|x +5| = 11$

$x + 5 = 11$ e $x + 5 = -11$

$x = 6$ e $x = -16$

$S = \{-16,6\}$

</td>
</tr>
</table>

S_3: Utiliza o registro geométrico

O aluno representará a expressão dada pela área de uma figura em forma de L, completará o quadrado da figura e obterá uma figura quadrada cuja área corresponderá ao trinômio quadrado perfeito. Somará a área do L com o quadrado acrescentado. Observando que a soma dessas áreas é igual a 121, ele deve concluir que o quadrado tem lado 11. Sabendo que o lado do quadradão é representado por x+5, encontrará o valor 6 como resposta. Para encontrar x=-16, o aluno deverá ignorar que o problema se trata de área e para isso deverá aceitar a solução negativa da equação algébrica.

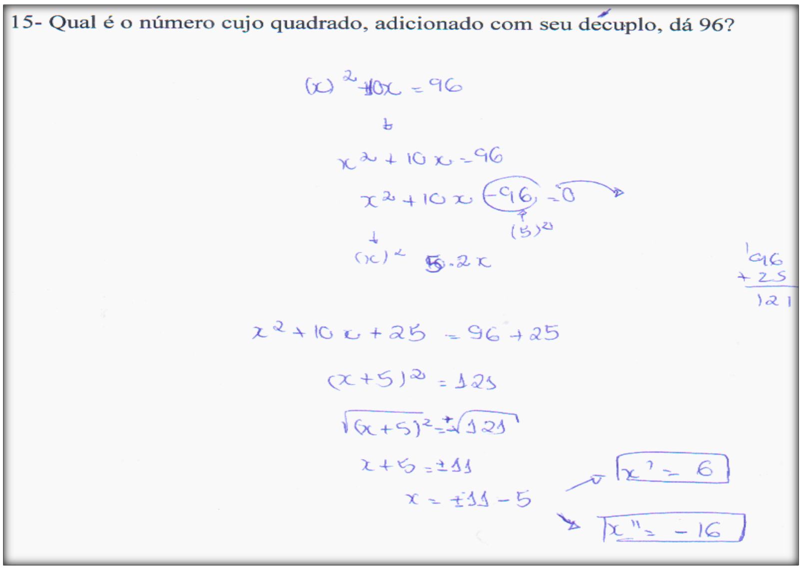
Poderá ocorrer que os alunos não compreendam a linguagem materna ou farão a conversão do registro materno para o algébrico ou geométrico erroneamente, comprometendo a correta realização da atividade.

Quanto a validação poderá ocorrer no registro numérico, algébrico ou geométrico, ou seja, o aluno fará uso de um segundo registro para validação das soluções obtidas.

Institucionalização: Neste momento, serão institucionalizados os registros numérico, algébrico e geométrico que solucionaram a equação. Deveremos observar as soluções produzidas pelos alunos para colocar em debate com a turma as soluções menos utilizadas. Previmos chamar ao quadro, algum aluno para expor sua resolução e a partir daí discutiremos com a turma a pertinência, facilidades e dificuldades no uso desta solução e a validação dos resultados obtidos. Caso não haja nenhuma resolução diferenciada ou menos utilizada, a discussão deverá estar centrada na estratégia S_3, por acreditarmos que este registro é o que apresenta maior dificuldade ao aluno.

Análise *a posteriori*

A solução adotada pelos alunos foi o registro algébrico, considerada em nossas análises *a priori*. Não houve erros no tratamento algébrico utilizado na resolução. Desse modo, pudemos verificar por meio da observação da solução apresentada pelos alunos, que o conceito de resolução da equação do 2º grau pela fatoração foi assimilado e utilizado com êxito. Não detectamos nenhuma dificuldade como a passagem da língua materna para a algébrica, e com relação às manipulações algébricas.


15- Qual é o número cujo quadrado, adicionado com seu décuplo, dá 96?

$(x)^2 + 10x = 96$

$x^2 + 10x = 96$

$x^2 + 10x - 96 = 0$

$(5)^2$

$(x)^2 \quad 5 \cdot 2x$

$96 + 25 = 121$

$x^2 + 10x + 25 = 96 + 25$

$(x+5)^2 = 121$

$\sqrt{(x+5)^2} = \pm\sqrt{121}$

$x + 5 = \pm 11$

$x = \pm 11 - 5$

$\boxed{x' = 6}$

$\boxed{x'' = -16}$

Protocolo 21: Atividade desenvolvida pelos alunos Karol e João

Observamos que os alunos primeiro isolaram o termo independente, por terem convicção de que este não completava um trinômio quadrado perfeito e em seguida, por meio da regra de fatoração, escreveram a equação completando o quadrado e obtendo as raízes 6 e -16.

Quanto à validação, não encontramos indícios de sua concretização.

No momento final de discussão da atividade, observando que nenhuma das equipes realizou a resolução geométrica, propusemos aos alunos que um deles viesse até o quadro para realizar tal resolução. A proposta foi aceita pela aluna Mariana que com a ajuda dos colegas representou um quadrado de lado x e dois retângulos de lados 5 e x, representando, em seguida, o quadrado justaposto com um retângulo do lado esquerdo e o outro embaixo do quadrado, completando essa figura com um quadrado de lados 5. Anotou que o quadrado tinha área x^2 e os retângulos, área 96. Escreveu a equação que representava o trinômio quadrado perfeito e igualou a 121, explicando que era 96+25. Ainda com a ajuda dos colegas disse que a área do quadrado era 121, então, que os lados tinham valor 11. Acrescentou que os lados eram expressos pela expressão x+5 e que é 6 o número que somado a 5 dá 11 e que é -16 o número que somado a 5 dá -11. Salientamos que a resolução estava correta e que com apenas uma linha de cálculo foi possível resolver esta equação, o restante foi raciocínio.

Inferimos, por meio da análise da atividade, que os alunos foram capazes de reconhecer a representação geométrica bem como utilizá-la, quando solicitado; no entanto, até o momento o registro algébrico parecia ter se mostrado mais próximo a eles. Contudo, entendemos que os alunos já mobilizavam conhecimentos algébrico e geométrico para a resolução da equação do 2º grau, requeridos em nossa sequência de atividades.

Considerações gerais sobre a Sessão 5

Na atividade 13, persistiram dificuldades relacionadas ao princípio da equivalência, de uma raiz negativa como resposta à equação proposta e ao reconhecimento da área da figura, no caso o L, composto pelas figuras que representavam x^2+10x, dificuldade essa que pode ser derivada da falta de significado dos objetos matemáticos, destacada por Usiskin (1995) e PCN (BRASIL, 1998).

Verificamos o êxito alcançado pelo aluno Will ao determinar com rapidez e precisão a raiz de uma equação usando a representação geométrica. Isso nos causou imensa alegria, pois o aluno só chegou a esse raciocínio porque teve acesso a uma segunda representação, no caso a geométrica, para a resolução de uma equação do 2º grau. Os PCN (BRASIL, 1998) recomendam que no estudo da equação do 2º grau suas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo seu significado de modo a favorecer sua apreensão.

Na atividade 14, destacamos dificuldades referentes ao conceito de área e perímetro, ao significado do valor 100 algébrica e geometricamente e à resposta negativa como solução. No entanto, a principal dificuldade foi aceitarem a representação geométrica dada, causando estranheza ao aluno e provocando-o a desenvolver estratégias para produzir a solução desejada, o que foi positivo ao processo de resolução de uma equação do 2º grau por meio das várias representações.

Ressaltamos que as equipes utilizaram os dois registros, algébrico e geométrico, para obterem a solução por meio geométrico, conforme solicitado na atividade e o registro numérico como forma de validação. Assim, destacamos a importância da Teoria de Registros de Representação Semiótica que, de acordo com (DUVAL, 2010, p.13), “o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático”. Segundo Duval (2010), a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo momento de registro. Isso foi verificado em vários momentos, por exemplo, durante a resolução da atividade em que o aluno procurava determinar os termos da equação x^2, 8x e 84 na representação geométrica proposta, desencadeando dúvidas e buscando pela compreensão numa segunda representação.

A atividade 15 foi resolvida pela representação algébrica, na qual não identificamos dificuldades e, quando foi solicitada a resolução geométrica, os alunos foram capazes de mobilizá-la e resolver corretamente, fazendo uso adequado de representações desse registro.

Nesta sessão, verificamos avanços quanto à correta utilização da fatoração e completamento do quadrado nas resoluções algébricas e quanto ao envolvimento dos alunos na busca para se certificarem de que a solução encontrada era correta, percebida na mobilização do registro algébrico para a resolução da atividade na representação geométrica, contribuindo, desse modo, para o surgimento de situações de validação, descrita por Brousseau (1986).

A fim de esclarecer as dúvidas surgidas, realizamos intervenções, com institucionalização de alguns conceitos referentes ao assunto abordado.

4.10 Sessão 6

Essa sessão foi realizada no dia 31 de maio de 2012, foi composta por duas atividades e compareceram cinco alunos: Karol e Mariana formaram uma equipe e Vinícius, Will e Rafaela, outra equipe.

Nessa sessão aplicamos as atividades 16 e 17, cujos objetivos foram os de resolver equações do 2º grau dadas pela fatoração e completar o quadrado algebricamente na forma geral da equação do 2º grau.

Na atividade 16 os alunos obtiveram êxito quanto à resolução das equações do 2º grau na forma algébrica, porém foi necessário desafiá-los para que pudessem utilizar a representação geométrica para resolver algumas das equações dadas. Quanto à atividade 17, houve facilidade na compreensão da proposta a ser realizada, no entanto, a dificuldade apresentada ficou restrita aos conhecimentos algébricos, em operações como a manipulação de frações algébricas e operações que envolviam raiz quadrada.

Atividade 16

Resolva as equações, usando a fatoração: 16.a) $(x - 3)^2 = 9$ 16.b) $4x^2 + 20x + 100 = 0$ 16.c) $x^2 + 2x + 3 = 0$ 16.d) $x^2 - 18x + 81 = 16$ 16.e) $x^2 + 4x + 3 = 0$ 16.f) $x^2 - 14x = -40$ 16.g) $y^2 - 2y - 2 = 0$

Análise *a priori*

Objetivos: Analisar se houve aprendizagem dos alunos com relação à fatoração e quais as dificuldades presentes, bem como observar a capacidade de mobilização de diferentes registros e o seu reinvestimento durante a resolução das equações do 2º grau, obtendo suas raízes.

Observaremos se durante o processo de resolução das atividades propostas o aluno fará uso do tratamento (permanecendo no registro algébrico) ou conversão (utilizará o registro geométrico) e se realizará a validação, descrita por Brousseau (1986).

Estratégias de resolução

S_1: Utiliza registro algébrico

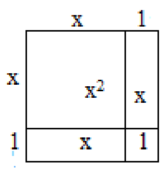
Neste caso o aluno fará a resolução algebricamente, apoiando-se nos conceitos algébricos de fatoração. Por exemplo, ao resolver as equações abaixo:

1) $(x - 3)^2 = 9$	2) $4x^2 + 20x + 100 = 0$	5) $x^2 + 4x + 3 = 0$
$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{9}$ $\|x - 3\| = 3$ $x - 3 = 3$ e $x - 3 = -3$ $x = 6$ e $x = 0$ $S = \{0,6\}$	$x^2 + 5x + 25 = 0$ $x^2 + 5x = -25$ $(x + 5/2)^2 = -25 + 25/4$ $\sqrt{(x+5/2)^2} = \sqrt{-75/4}$ $S = \emptyset$	$x^2 + 4x = -3$ $x^2 + 4x + 4 = -3 + 4$ $(x + 2)^2 = 1$ $\sqrt{(x+2)^2} = \sqrt{1}$ $\|x + 2\| = 1$

		x +2 = 1 e x + 2 = -1 x = -1 e x = -3 S = {-3, -1}

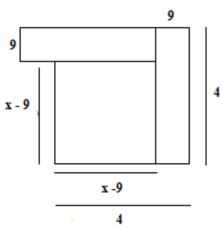
S_2: Utiliza os registros algébrico e geométrico

O aluno utilizará o registro geométrico para encontrar o valor que completa a área do trinômio quadrado perfeito e a forma fatorada. Ele representará, na forma algébrica, a expressão e a resolverá, ou seja, transitará de um registro a outro de acordo com seu conhecimento prévio. Por exemplo, ao resolver a equação: 3) $x^2 + 2x + 3 = 0$

	$x^2 + 2x = -3$ $x^2 + 2x + 1 = -3 +1$ $(x + 1)^2 = -2$ $\sqrt{(x+1)^2} = \sqrt{-2}$ $S = \emptyset$

S_3: Utiliza o registro geométrico

O aluno representará a expressão dada na forma de um quadrado, determinando seus lados e áreas das figuras que o compõem, a fim de encontrar a forma fatorada da expressão, os lados do quadrado e as raízes da equação proposta. Exemplo da equação 4) $x^2 – 18x + 81 = 16$.



$x – 9 = 4$ e $x – 9 = - 4$

$x = 13$ e $x = 5$

S = {5,13}

As dificuldades serão relatadas na análise a posteriori e confrontadas com os erros e dificuldades descritos por Booth (1995), Alonso *et al* (1993) e Nguyen (2006). A variável presente é V_3: registro utilizado no enunciado. O aluno poderá resolver fazendo uso do registro numérico, algébrico ou geométrico, desse modo, nos fornecerá dados para avaliar as dificuldades, a estratégia de resolução utilizada e a capacidade de realizar conversões e tratamentos.

Institucionalização: Serão colocadas em debate somente as questões que, durante o processo de resolução, os alunos demonstrarem dificuldades ou dúvidas quanto à forma de resolução ou procedimentos relativos aos tratamentos ou conversões nos registros numéricos, algébricos e geométricos a serem utilizados.

Análise *a posteriori*

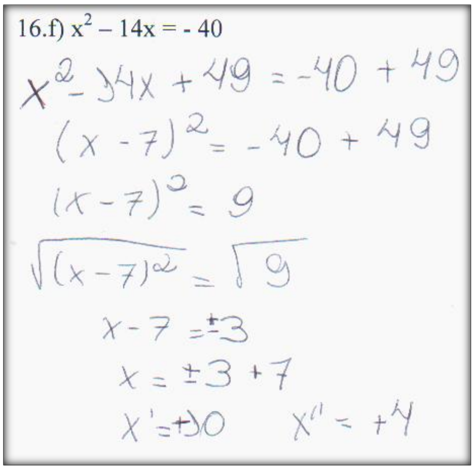
A estratégia utilizada na resolução pelos alunos se ateve àquela descrita por nós como S_1 registro algébrico. Na resolução algébrica das atividades 16.a e 16.d observamos que os alunos não tiveram dificuldade para compreensão e elas foram resolvidas com sucesso. A atividade (16.a) já estava na forma fatorada, e a atividade (16.d) necessitava ser fatorada, bastando em seguida fazer uso de manipulações algébricas para obter as raízes dessas equações, levando-nos a crer que os alunos eram capazes de realizar os tratamentos no registro algébrico para equações que apresentavam baixo nível de complexidade. Apresentamos um trecho em que os alunos demonstram que mobilizam adequadamente o tratamento no registro algébrico.

Mariana: Você lembra como faz a (a)?
Karol: Esse daí tem que tirar a raiz, ele já tá ao quadrado, já tá fatorado.
*Mariana: Aí tira a raiz desse e desse, (*se refere aos dois membros da equação).
Karol: Acho que tá certo, é fácil.

Na resolução algébrica para equações que exigiam o completamento do quadrado como a atividade 16.c, observamos como as alunas Mariana e Karol resolveram.

Mariana: Acho que vai ter que arrumar essa também.
Karol: Como que arruma?
Mariana: Acho que aqui não tem que ser 3, acho que é 1, daí 1 ao quadrado dá 1, 2 vezes 1 vezes 1 dá 2 e x ao quadrado dá $x^{2.}$
P: E agora o que tem que fazer?
*Mariana: Tem que isolar o 3 e somar 1 aqui e aqui (*leia-se: somar 1 nos dois membros da equação*)*
Karol: Tem que por 1 dos dois lados e o 3, coloca?
Mariana: Não você coloca igual a 3 mais 1.
Karol: É o 1 que coloca dos dois lados?
Mariana: É porque foi ele que completou o quadrado, agora tira a raiz dos dois lados.

Observando o raciocínio apresentado na resolução da equação, constatamos que uma das alunas resolveu corretamente no registro algébrico por meio do completamento do quadrado. O mesmo pudemos verificar ao observarmos a resolução da atividade 16.f, por outra equipe.

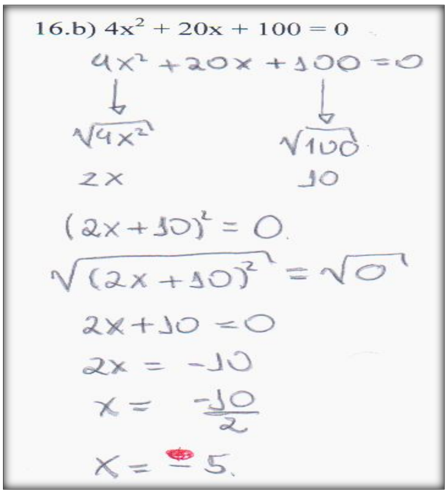

16.f) $x^2 - 14x = -40$

$$x^2 - 14x + 49 = -40 + 49$$
$$(x-7)^2 = -40 + 49$$
$$(x-7)^2 = 9$$
$$\sqrt{(x-7)^2} = \sqrt{9}$$
$$x - 7 = \pm 3$$
$$x = \pm 3 + 7$$
$$x' = +10 \qquad x'' = +4$$

Protocolo 22: Atividade desenvolvida pelos alunos Will, Rafaela e Vinícius

Assim, pudemos inferir que os alunos tiveram condições de resolver a equação por meio da fatoração, quando havia uma expressão, para a qual tinham que perceber a necessidade de completar o quadrado, a fim de torná-la um trinômio quadrado perfeito e em seguida realizar um tratamento no registro algébrico. Nas equações 16.a, 16.d e 16.f não identificamos dificuldades dos alunos com relação aos conceitos algébricos envolvidos.

Destacaremos a seguir erros de resolução, cometidos por alguns alunos. Inicialmente, trataremos de erros no tratamento algébrico, principalmente os erros de manipulação algébrica e erros diversos de fatoração, já destacados por Nguyen (2006).



16.b) $4x^2 + 20x + 100 = 0$

$$4x^2 + 20x + 100 = 0$$

$$\sqrt{4x^2} \qquad \sqrt{100}$$

$$2x \qquad 10$$

$$(2x+10)^2 = 0$$

$$\sqrt{(2x+10)^2} = \sqrt{0}$$

$$2x+10 = 0$$

$$2x = -10$$

$$x = \frac{-10}{2}$$

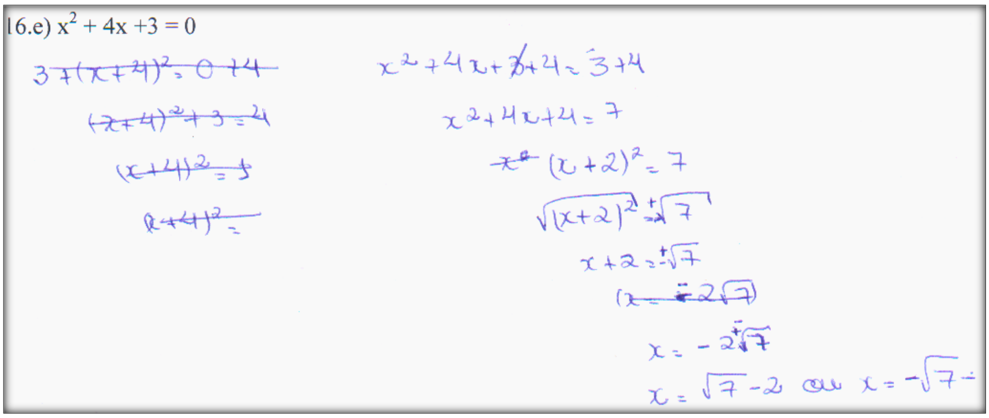
$$x = -5$$

Protocolo 23: Atividade desenvolvida pelos alunos Will, Rafaela e Vinícius

Nessa atividade (16.b), iniciaram fatorando a equação $4x^2+20x+100=0$, obtendo $(2x+10)^2=0$, que não corresponde à equação proposta; destacamos, pois, o erro relativo à fatoração, também elencado por Nguyen (2006). Verificamos que, ao fatorar, eles não procederam a verificação e mesmo ao encontrar a raiz da equação, não a validaram.

Na equação 16.e ($x^2 + 4x +3 = 0$), ao verificarem por meio da regra de fatoração que a equação dada não representava um trinômio quadrado perfeito, as alunas elaboraram algumas reflexões acerca da resolução da atividade.

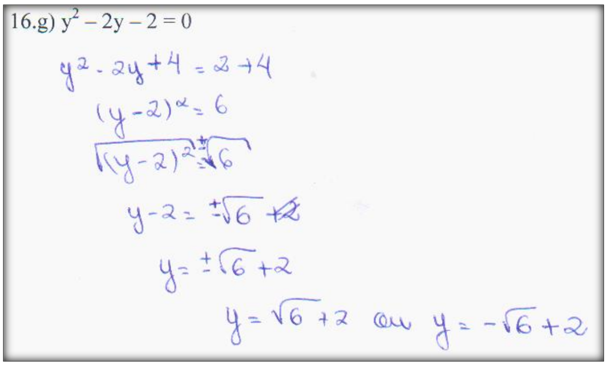
Karol: Tem que arrumar essa equação [...]
Mariana: 2.2 é 4, significa que aqui vai ser 4 (se refere ao completamento do quadrado)*, aqui você escreve somando o 4 dos dois lados, lembra? O 3 não tá aqui, você colocou ele do outro lado.*
*Karol: Então vamos riscar, toda hora eu erro, é horrível fazer de caneta, toda vez eu faço isso esqueço do mais e menos (*se refere aos sinais da raiz quadrada).
Karol: Aí vai ficar raiz de 7 menos 2 e menos raiz de 7 menos 2.
Mariana: Tem que ser mais?
Karol: Aí é menos.



Protocolo 24: Atividade desenvolvida pelas alunas Karol e Mariana

Verificamos que as alunas apresentaram diversos erros de tratamento na resolução algébrica da equação. Ao perceberem os erros, reiniciaram a resolução, no entanto, cometeram erro ao transpor o termo c=3 para o segundo membro da igualdade. Assim, obtiveram raízes erradas, e não procederam à validação por meio da verificação por substituição das raízes na equação dada.

No item 16.g, encontramos erros relativos ao completamento do quadrado.



Protocolo 25: Atividade desenvolvida pelas alunas Karol e Mariana

As alunas deveriam completar o quadrado com o número 1 e não com o número 4, não obtendo a forma fatorada correta, $(y\text{-}1)^2$. Destacamos que realizaram corretamente a transposição do termo independente c=-2.

Ao final da resolução propusemos às alunas que escolhessem ao menos duas das equações propostas na atividade e que resolvessem geometricamente, a fim de analisarmos se mobilizavam este outro registro e as dificuldades que poderiam encontrar. Esse fato causou uma reação inesperada.

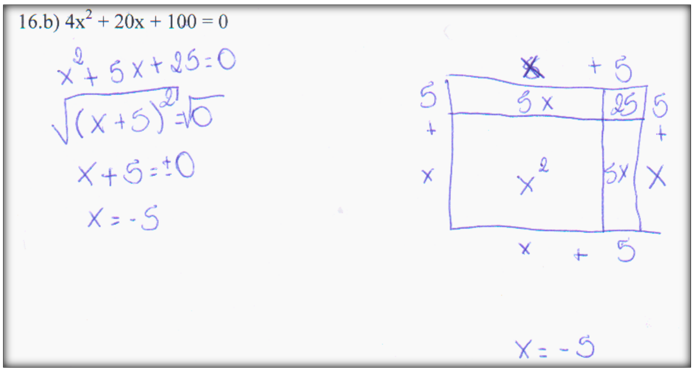
Karol: Só porque a gente não fez nenhuma.
P: Sim.
Karol: Com menos, de jeito nenhum!

Na exposição apresentada ficou explícito o modo de seleção da atividade para a resolução geométrica. Ressaltamos que o mesmo requisito para a escolha das equações foi verificado em outra equipe. Verificamos que, dentre a representação por meio do registro geométrico, a mais acessível aos alunos nos pareceu ser o de um quadrado da soma de dois termos, o que consideramos plausível, pois é o registro mais conhecido por eles.

Analisaremos, na sequência, os erros no tratamento algébrico e geométrico e na conversão para o registro geométrico em algumas atividades. No item 16.b ($4x^2 + 20x + 100 = 0$), as alunas iniciaram a resolução da equação simplificando por 4, a fim de obter uma equação mais simples, assim obtiveram $x^2+5x + 25 = 0$ e só a partir daí fatoraram, obtendo $(x+5)^2 = 0$.

Karol: 10 vezes10, 2 vezes 10 vezes 2 , não dá , tem que arrumar.
Mariana: Acho que é 5^2, ele não é trinômio quadrado perfeito tem que completar [...] dá pra simplificar por 4 [...] ficou $x^2 +5x + 25$, daí dá.

Verificamos que ao utilizarem a regra para fatoração, elas perceberam que a equação não representava um TQP, no entanto, após simplificarem por 4, não voltaram a verificar a nova equação e cometeram o erro ao fatorar.

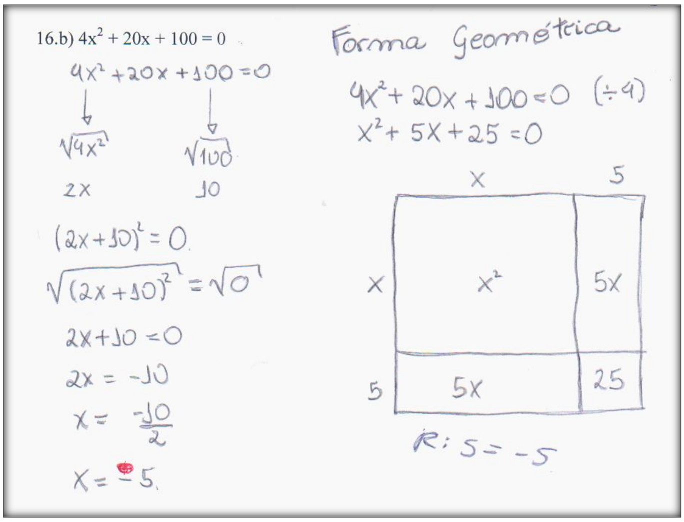


Protocolo 26: Atividade desenvolvida pelas alunas Karol e Mariana

Ao analisarmos a resolução da equação do item 16.b, acreditamos que a equação pode ter induzido ao erro, pois era possível fatorar corretamente os termos a^2 e b^2 do trinômio, no caso, x^2 e 25, levando as alunas a acreditarem que a equação representava um trinômio quadrado perfeito. Contudo, em outras atividades (16.a, 16.d, 16.e), as equipes se mostraram capazes de fatorar corretamente.

As equipes cometeram erros semelhantes, ao resolverem a equação: ao fatorar resolvendo algebricamente e ao representar geometricamente. Quanto ao erro na conversão para o registro geométrico[10], as alunas ao representarem 5x nos retângulos deveriam, escrever 5x/2 ou 2,5x para cada um, o que não ocorreu. Assim, obtiveram a mesma resposta para a solução nas duas representações, levando-as a acreditar que a resolução estava correta.

A equipe formada pelos alunos Will, Rafaela e Vinícius, ao representar a resolução geométrica, verificamos que não possuíam modelo de representação geométrica para $4x^2$, exigindo outra estratégia de resolução, assim eles optaram por simplificar a equação por 4, o que não foi necessário no tratamento algébrico, pois podiam fatorar com facilidade.

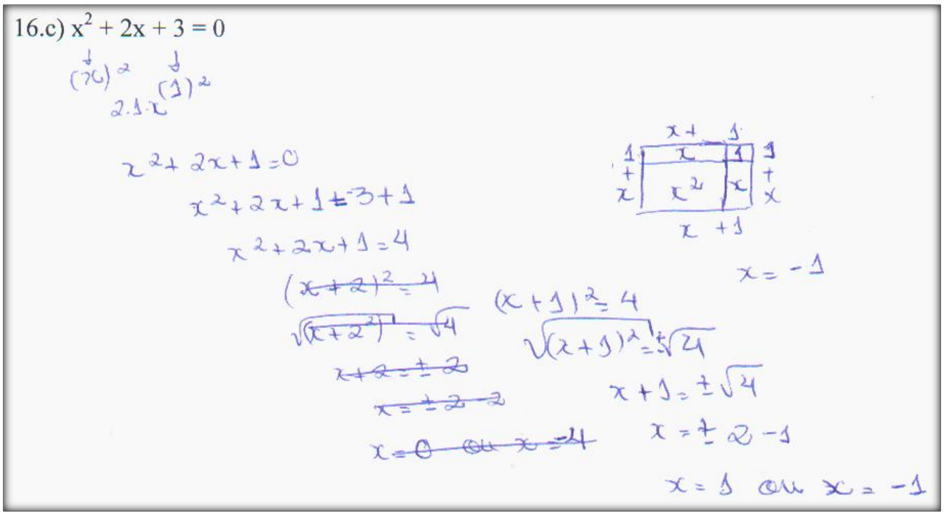


Protocolo 27: Atividade desenvolvida pelos alunos Will, Rafaela e Vinícius

Na atividade 16.c, as alunas Karol e Mariana cometeram erro ao isolarem o termo c=3, que continuava com o mesmo sinal e também ao fatorarem a expressão x^2+2x+1, obtendo $(x+2)^2$. Observamos durante a fala das alunas, constatações como "*Lembra o 3 não tá aqui, você colocou ele do outro lado*"; a ideia expressa foi a de transpor um termo para o outro lado

[10] O registro geométrico foi realizado pelos alunos após solicitação da pesquisadora.

da igualdade, e não o uso do princípio de equivalência. Alonso *et al* (1993) destaca esta dificuldade no conceito do símbolo igual, que numa equação não tem caráter unidirecional, representa equilíbrio, e os alunos muitas vezes custam em perceber isto. Ainda nesta atividade, as alunas, ao perceberem os erros procuram corrigi-los, mas desta vez, fatorando corretamente. No entanto, persistiram no erro ao transpor o termo c.


16.c) $x^2 + 2x + 3 = 0$

$(x)^2$ $(1)^2$ $2.1.x$

$x^2+2x+1=0$

$x^2+2x+1=-3+1$

$x^2+2x+1=4$

$\cancel{(x+2)^2=4}$

$\cancel{\sqrt{(x+2)^2}=\sqrt{4}}$

$\cancel{x+2=\pm 2}$

$\cancel{x=\pm 2-2}$

$\cancel{x=0 \text{ ou } x=-4}$

$(x+1)^2=4$

$\sqrt{(x+1)^2}=\pm\sqrt{4}$

$x+1=\pm\sqrt{4}$

$x=\pm 2-1$

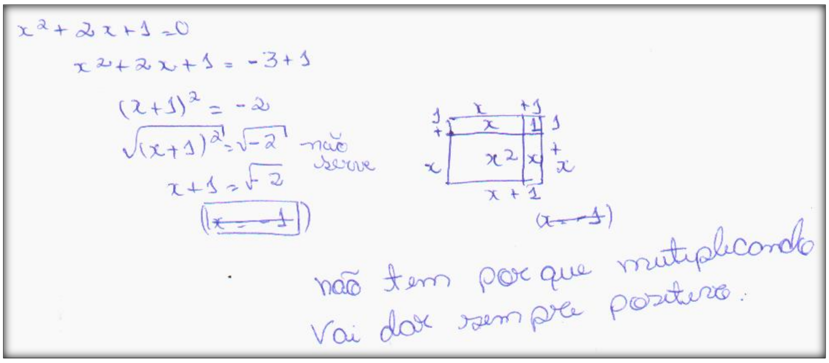
$x=1$ ou $x=-1$

Protocolo 28: Atividade desenvolvida pelas alunas Karol e Mariana

Elas resolveram a equação proposta, incorretamente, fazendo uso do registro algébrico incorretamente e obtiveram como resposta x=1 e x=-1. Ao procederem a resolução geométrica incorretamente, obtiveram como resposta somente x= -1.

Mariana: Esse não é tão difícil.
Karol: Aqui vai ser x, aqui +1.
Mariana: Aqui tem que ser 1, porque 1vezes1 é 1 e aqui 1x + 1x é 2x, x+1 tem que dar zero, então x é -1.
*Karol: Mariana tem coisa errada, aqui deu -1 e 1 (*na resolução algébrica*) e aqui só da -1 (*na resolução geométrica).
Mariana: -1+1 dá zero, -1 +1 dá zero.
Karol: Porque será que agente fez errado aqui?
*Mariana: Professora quando a gente fez aqui (*resolução geométrica*) descobrimos que aqui (*resolução algébrica) *tá tudo errado.*
P: Parabéns meninas, muito bem! Resolver de dois modos está ajudando vocês a descobrirem os erros.
Mariana: Não, aqui não é 3 é -3.
Karol: Então dá 4, aí tá certo.

Contudo, foi percebido pelas alunas que independente da representação utilizada, deviam obter a mesma resposta, o que não aconteceu e, assim, ao procurar os erros, descobriram erros diversos e iniciaram uma nova resolução. O primeiro que encontraram foi com relação ao termo c=3 que, ao transpor, deveria ser -3. Mariana questionou "*mas então porque aqui deu certo"?* Desse modo, a aluna acreditou que a resolução correta era a obtida por meio da representação geométrica.



Protocolo 29: Atividade 16.c desenvolvida pelas alunas Karol e Mariana

Apresentamos um fragmento da discussão acerca dos erros e da solução encontrada pelas alunas.

Karol: Vai dar errado Mariana, deu raiz de -2, não tem, e agora?
Mariana: A*í não vai ter, aí vai ficar -1.*
Karol: Agora deu certo.
P: Raiz de -2 não tem, não serve, e esse menos -1 de onde apareceu?
Karol: Do x que passou pra lá.
P: Então tem que melhorar essa resposta, escreve como se fosse uma raiz irracional, como raiz de 2, por exemplo.
Mariana: Então aqui fica raiz de -2 -1.
Karol: Aí escreve que não serve, não convém.
P: Então se aqui na resolução algébrica não tem resposta, na representação geométrica como fica?
Karol: Também não tem resposta?
Mariana: *Iiii, tudo errado.*
P: Vamos pensar $(x+1)^2$ *é x +1 vezes x +1 concorda?* $(x+1)^2$ *na figura representa o que para nós?*
Mariana: Os lados.
P: Os lados ao quadrado é igual a área, que dá -2. Que número que substitui pelo x que ao quadrado dá -2?
Karol: Ah! Já sei aqui tem que ser -3.
Mariana: D*á 4.*
P: Vamos pensar mais um pouco, se x fosse zero, dá quanto?
Karol: Dá um.
P: Se fosse -1.
Mariana: D*á zero.*

Mariana: Então tem que ser um dado positivo e um negativo.
P: Mas aí não é quadrado, se aqui não tem resposta, como aqui pode ter se é a mesma atividade? Se aqui não tem resposta aqui não tem também, mas por que não tem resposta?
Mariana: Porque isso aqui é problemático.
P: Qual o problema de ter um lado vezes outro que dá -2 vamos pensar.
Mariana: Porque -2 não pode, porque é um quadrado.
P: multiplica 2 números positivos e dois números negativos, qual a natureza das respostas?
Mariana: Vai ser sempre positivo.
P: Então são dois conhecimentos matemáticos, um é dizer que não tem solução nos reais porque não dá para tirar raiz de negativo, outro é dizer que não tem porque dois números multiplicados sempre vai dar resposta positiva.

Na primeira frase do excerto ficou evidente a dificuldade devido à natureza da resposta, destacada por Booth (1995) como a dificuldade em representá-la e a compreensão do seu significado. Em seguida, verificou-se o nosso encaminhamento, com o fim de mantê-las em situações adidáticas, para que as alunas pudessem compreender que as duas resoluções estavam erradas, determinar os erros, buscar a forma correta e chegar a uma resposta satisfatória, conforme visto no protocolo apresentado.

Sintetizando os erros dos itens da atividade, destacamos erros relativos à fatoração, completamento do quadrado, ao transpor um termo de um membro a outro da igualdade, à resolução de raiz quadrada, também ao determinar o valor atribuído a cada retângulo na representação geométrica e à incompreensão da solução vazia e seu significado geométrico.

Outra dificuldade detectada foi relativa ao uso da caneta para a resolução das atividades, observada na frase de Karol: "*toda hora eu erro, é horrível fazer de caneta" e "tá vendo, Mariana, a gente tá errando tudo, nas provas faço tudo a lápis e depois passo a caneta".* Fizemos esta escolha didática conscientes da dificuldade imposta ao aluno, cujo intuito era provocar a discussão da atividade e, com fidelidade, analisar suas produções.

Outro problema verificado foi quanto à validação. Nesta atividade não questionamos sobre a veracidade das respostas e como não encontramos nenhum registro oral ou escrito que sugerissem a validação das respostas obtidas, por meio do registro numérico, acreditamos que os alunos não têm o hábito de verificar se a solução encontrada satisfaz a equação. No entanto, nas atividades resolvidas por meio das representações algébrica e geométrica há a presença da validação, no confronto entre as soluções encontradas, de acordo com as diferentes representações.

Com base nas produções apresentadas pelos alunos foi possível concluir que eles mobilizaram os registros algébrico e geométrico para a resolução de uma equação do 2º grau, realizando tratamentos adequados para a obtenção das raízes da equação. No entanto, dificuldades com tratamentos algébricos, em particular com a fatoração impediram que alguns alunos resolvessem corretamente, mas não impediram a ascensão no nível de mobilização de registros. Duval explicita que a capacidade de compreensão em matemática está ligada à capacidade de mudar de registro. Ao procederem a resolução algébrica e a resolução geométrica da atividade 16.c, ficou evidente a importância dessa noção destacada por Duval.

Atividade 17

Complete o quadrado da equação $ax^2 + bx + c = 0$

Análise *a priori*

Objetivos: Analisar se os alunos reinvestem a técnica do completamento do quadrado, passando de casos particulares à fórmula geral de resolução da equação do segundo grau e identificar as possíveis dificuldades encontradas pelos alunos na realização desta atividade.

A variável didática presente é V_2: expressão presente na atividade, que pode representar uma dificuldade para a resolução, devido à limitação dos conhecimentos do aluno em álgebra, dado o nível de generalidade da equação, pois seus coeficientes são letras e não números.

As dificuldades poderão ocorrer na obtenção do coeficiente 1 para x^2 e ao determinar a expressão da área que completa o trinômio quadrado perfeito. A partir de então, erros diversos de fatoração e nas manipulações algébricas, descritas por Nguyen (2006) poderão ocorrer. Um deles poderá ser a falha de prioridade de uma operação em relação à outra. Por exemplo, o aluno ao iniciar a resolução poderá, simplificar a equação dada a fim de facilitar a resolução ou mesmo durante a resolução ao invés de fatorar, resolverá primeiro o Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C) das frações algébricas.

Estratégias de resolução

S_1: Utiliza registro algébrico

Neste caso espera-se que o aluno resolva algebricamente, apoiando-se nos conceitos algébricos de fatoração.

S_2: Utiliza os registros algébrico e geométrico

O aluno utilizará o registro geométrico para determinar o valor que completará o trinômio quadrado perfeito, bem como sua forma fatorada e, a partir de então, voltará a utilizar o registro algébrico visando obter a fórmula geral de resolução, por meio de manipulações algébricas.

No momento de discussão final as dúvidas percebidas serão colocadas em debate com o intuito de que o grupo possa esclarecê-las e, possivelmente, dirimi-las.

Análise *a posteriori*

Quando analisamos a apresentação da fatoração nos livros didáticos, fizemos uma crítica relativa à rápida passagem que Giovanni Jr. e Castrucci (2009) fazem do completamento do quadrado na representação algébrica de um caso particular para o completamento do quadrado na forma geral da equação, a fim de obter a fórmula geral de resolução da equação. Para não cometermos a mesma inadequação dos referidos autores, antes de iniciarmos esta atividade, expusemos no quadro, exemplos para que os alunos determinassem os termos que completavam o trinômio. Até esse momento trabalhamos com casos particulares de expressões, portanto, iniciamos com expressões algébricas mais gerais, como x^2-x+?, indagando se existia ou não um número que formava o TQP e, se existisse, qual seria?

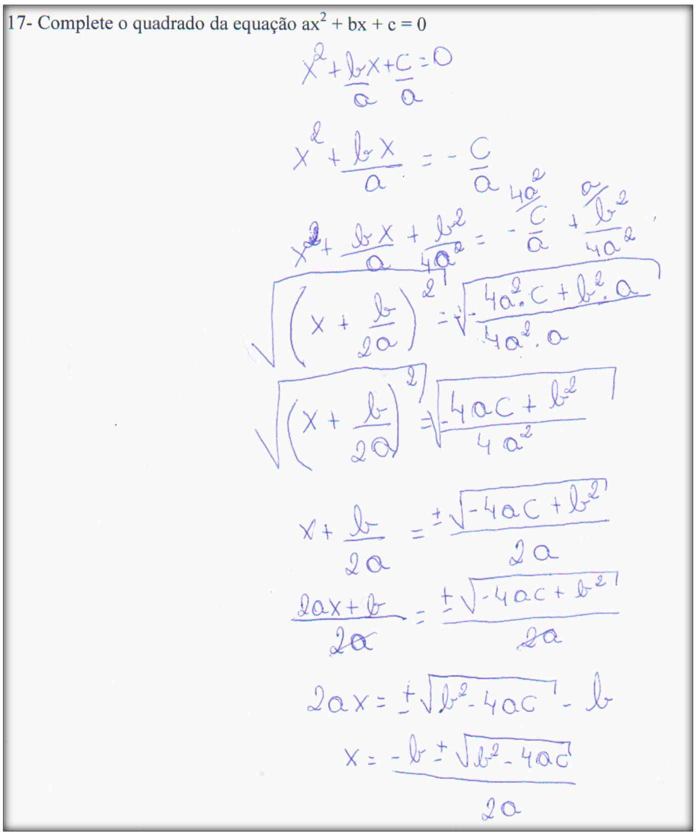
P: Vamos ver, o quadrado do primeiro tem que dar x^2, 2 vezes o primeiro vezes o segundo tem que dar 1x, então qual o valor?
Rafaela: 1 ou 1x.
Will: ½.
P: Então o termo é ½, 2 vezes ½ é um, mais o quadrado do segundo, quadrado de ½ é ¼. Quanto dá $(x - ½)^2$, porque é x - ½?
Will: Porque se fizermos a fatoração dá x - ½ é a forma fatorada.
P: Como você desenvolve isso?
Will: É o quadrado do primeiro, menos 2 vezes o primeiro vezes o segundo mais quadrado do segundo.
P: Certo, parabéns. Acho que esse foi fácil demais, vamos fazer outro.

Observando que os alunos resolveram facilmente a expressão proposta, passamos para outro exemplo, um pouco mais elaborado: x^2+ax+? Repetimos a indagação da questão anterior, se existia ou não um número que formava o TQP e, se existisse, qual seria?

M: ½.
Will: a/2.
Rafaela: 2/a.
P: Ninguém tá conseguindo. Quem quer arriscar mais, vamos pensar, temos que chegar numa coisa mais geral, se fizermos quadrado do primeiro tem que dar x^2, então é x, se fizermos 2 vezes x vezes alguma coisa sabemos que tem que dar ax, qual seria o termo? Qual deve ser o termo que multiplicado por 2 vai dar ax?
Rafaela: a/2.
Will: Então o termo que completa é $a^2/4$.

P: Vamos verificar se fizemos corretamente?

Os alunos apresentaram um pouco mais de dificuldade na expressão $x^2+ax+a^2/4$, no entanto, acreditamos que eles já tinham condições de resolver a equação geral. Desse modo entregamos-lhes a folha contendo a atividade, a qual gerou muito debate.


17- Complete o quadrado da equação $ax^2 + bx + c = 0$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{-4a^2.c + b^2.a}{4a^2.a}}$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \sqrt{\frac{-4ac + b^2}{4a^2}}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{-4ac + b^2}}{2a}$$

$$\frac{2ax + b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{-4ac + b^2}}{2a}$$

$$2ax = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} - b$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Protocolo 30: Atividade desenvolvida pelas alunas Karol e Mariana

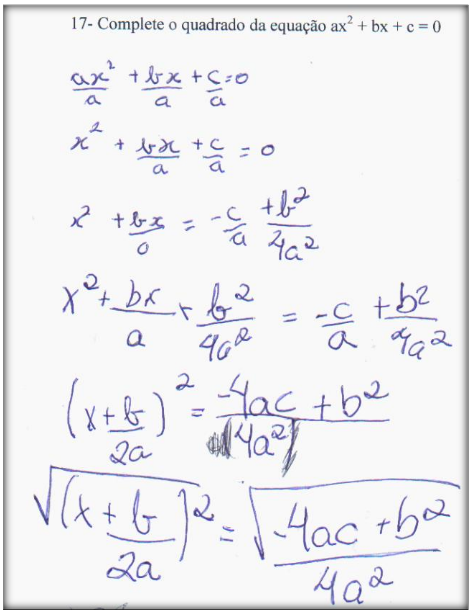
Apresentaremos um fragmento das considerações elaboradas na discussão.

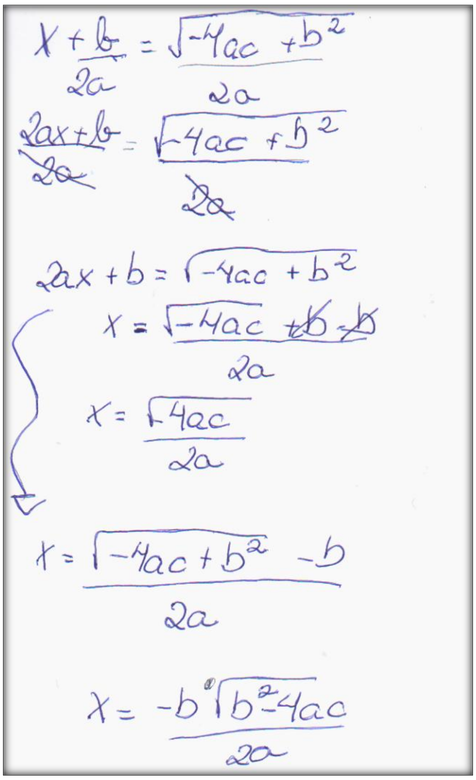
Mariana: Como faz isso?
P: Observe que já resolveram equação semelhante. A equação $4x^2+20x+100 = 0$, como começaram resolvendo?
Mariana: Simplificando por 4 pra ficar com x^2.
P: Então aqui é a mesma coisa.
Mariana: Mas simplificar por a, mas os outros não tem a?
P: Não tem problema, fica fração, aqui é da mesma forma como vocês completavam o quadrado nas equações numéricas, mesmo raciocínio só que algébrico.
Karol: Então aqui fica: $x^2+bx/a = -c/a$.
P: Agora completa o quadrado.

Mariana: Então para dar 2 vezes b/a pra dar b/a tem que ter um 2 embaixo pra cancelar, fica b/2a e o quadrado é $b^2/4a^2$, vai confere aí.
Karol: Fiz, certo. E agora como resolve isso?
Mariana: Tem que tirar o M.M.C, você faz vezes $4a^2 + a$.
Karol: Não é vezes.
P: Certo é vezes, qual o próximo passo?
Mariana: Tira a raiz dos dois lados, [...] tô com dificuldades para chegar no $4ac + b^2$.
Karol: Porque tem que simplificar...
Mariana: Ah, isso aqui é o delta [...] e a gora posso fazer o M.M.C desse lado [...] isso aqui é o x, conseguimos, acabou.

Nossa intenção era manter os alunos em situações adidáticas. Assim, também participamos da realização da atividade, cujo fim era de instigar e possibilitar que encontrassem uma solução para a mesma. Independente dessa colaboração, quanto ao raciocínio empregado para obter a fórmula resolutiva, observamos que as alunas tiveram domínio das manipulações algébricas necessárias à resolução, bem como facilidades ao completar o quadrado na equação.

A outra equipe trabalhou sem a nossa intervenção.





$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{-4ac + b^2}}{2a}$$

$$\frac{2ax+b}{\cancel{2a}} = \frac{\sqrt{-4ac + b^2}}{\cancel{2a}}$$

$$2ax + b = \sqrt{-4ac + b^2}$$

$$x = \frac{\sqrt{-4ac} \cancel{+b} \cancel{-b}}{2a}$$

$$x = \frac{\sqrt{-4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{\sqrt{-4ac + b^2} - b}{2a}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Protocolo 31: Atividade desenvolvida pelos alunos Vinícius, Will e Rafael

Verificamos que os alunos simplificaram a equação, isolaram o termo independente, completaram o quadrado, fizeram o M.M.C corretamente e, ao perceberem que realizaram alguma operação errada, pois o resultado obtido não correspondia à “fórmula de Bhaskara”, eles retomaram a questão, encontraram o erro, corrigiram-no e assim, obtiveram a fórmula geral de resolução.

Relembramos que esses alunos já conheciam a fórmula geral de resolução e quando iniciaram a resolução, logo identificaram-na.

Mariana: Parece o delta.
Will: Essa conta tinha no livro.
Rafaela: Fala sério, é a Bhaskara.

Observamos que a maior dificuldade algébrica para a resolução da atividade foi a resolução do M.M.C. Assim, no momento final de discussão da atividade, ao refazermos a atividade no quadro com a ajuda dos alunos, resolvemos o M.M.C por equivalência mostrando que havia outro meio de resolvê-lo. Depois de terminada a resolução e o debate, solucionando as dúvidas e institucionalizando conceitos necessários à resolução, acrescentamos que a fórmula resolutiva nada mais é que “um completando o quadrado” na forma geral da equação. A fórmula de Bhaskara pode ser usada quando se julgar necessário, mas muitas equações, conforme vimos, podem ser resolvidas só pelo completamento do quadrado, algébrica e/ou geometricamente.

As dificuldades apresentadas foram mínimas diante da complexidade da atividade. Contudo, pelo exposto na atividade analisada, pudemos inferir que os alunos reinvestiram o conhecimento da fatoração, em particular do completamento do quadrado, passando de casos particulares aos mais gerais.

Considerações gerais sobre a Sessão 6

Os resultados obtidos na aplicação dessa sessão evidenciaram que, exceto um aluno, os demais conseguiram resolver algebricamente uma equação do 2º grau por meio da fatoração, apresentando facilidade ao fatorar e completar o quadrado.

Em relação às estratégias adotadas pelos alunos, constatamos que foram utilizadas as previstas em nossa análise a priori. No entanto, observamos que houve a predominância da resolução no campo algébrico, porém, ao solicitar a resolução geométrica, os alunos foram capazes de mobilizar tal representação. Desse modo, consideramos que todos os alunos conseguiram perceber a relação entre a representação algébrica e a geométrica e determinar as raízes da equação.

Na resolução pela representação geométrica, os alunos apresentaram algumas dificuldades quanto a uma equação de solução vazia, erro destacado por Booth (1995) como natureza das “respostas”, derivado de concepções oriundas da aritmética, segundo a qual, todo problema admite uma solução e que, no entendimento dos alunos, tinha que ser numérica e determinada, originando erros no campo algébrico. Identificamos também dificuldade quanto à conversão da representação algébrica para a representação geométrica. Segundo os PCN (BRASIL, 1998), na maioria das vezes, a construção das ideias algébricas é reproduzida de forma mecânica, sem produzir significado ao aluno. Por isso o ensino de equações do 2º grau precisa garantir que os alunos possam identificar relações entre as diferentes representações dos objetos matemáticos ali empregados, a fim de que haja a apreensão desse objeto. Acreditamos que o nosso trabalho cumpriu esse papel e obteve êxito no desenvolvimento da resolução das atividades pelos alunos.

O ponto culminante dessa sessão, foi quando os alunos, ao desenvolverem uma atividade utilizando os registros algébrico e geométrico, verificaram que a resposta não era a mesma e, por meio das duas representações, foram se apoiando ora em uma, ora em outra, para verificarem os erros cometidos e chegarem a uma resolução satisfatória. Desse modo, um registro não só contribuiu para verificar a validade do outro, como também para a busca dos erros, o que para nós indicou que os diversos registros de representação semiótica podem favorecer a atribuição de significados aos objetos matemáticos e facilitar formas de verificação da atividade, levando-nos a crer que a mobilização de diversos registros favoreceu o desenvolvimento de situações adidáticas de validação, nessa sessão, por meio do registro geométrico.

Quanto à institucionalização, esta ocorreu durante e ao final das atividades com o objetivo de esclarecer as dúvidas surgidas. Ela foi realizada por meio de intervenções e ao final, por meio de esclarecimento de alguns conceitos referentes ao tema.

Apesar das dificuldades de resolução na representação geométrica por alguns alunos, consideramos que houve a mobilização de um segundo registro, pois eles relacionavam uma resolução algébrica com uma geométrica, identificando os termos empregados e obtendo a solução.

Ao estudar as dificuldades dos alunos em passar de casos particulares à formula geral de resolução da equação do segundo grau, pela fatoração, por meio da atividade 17, verificamos que as dificuldades apresentadas se restringiram ao Mínimo Múltiplo Comum (M.M.C) dos denominadores de frações algébricas, que consideramos como dificuldades mínimas e pelo fato de os alunos estarem no primeiro semestre do nono ano, talvez pouco tenham estudado esse conceito; assim, diante da complexidade da atividade, consideramos a resolução satisfatória.

Por meio das análises das atividades pudemos destacar a importância da Teoria proposta por Duval (1995).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a revisão da literatura sobre o ensino de álgebra ficou explícito que o ensino da fatoração e da resolução das equações do 2º grau, no Brasil, ainda é guiado por princípios do tecnicismo que se apoia em regras e fórmulas, oferecendo poucas oportunidades para a compreensão do aluno. Segundo Usiskin (1995) a exigência da capacidade do aluno de tratar diversas técnicas manipulatórias, faz com que as primeiras noções algébricas sejam dominadas pela prática do uso exagerado de símbolos sem dar sentido ao ensino de tais técnicas. O ensino da álgebra para Post; Behr; Lesh (1995) e Booth (1995) deve levar em consideração que as variáveis podem ser manuseadas se assemelhando a aspectos do mundo real, partindo dos conhecimentos numéricos, por exemplo. Contudo, ao propormos em nosso trabalho o uso da fatoração na resolução de equações do 2º grau, procuramos nos pautar em (BRASIL, 1998, p. 121-122) que recomenda "possibilitar que os alunos construam seu conhecimento a partir de situações-problema que confiram significados à linguagem, aos conceitos e procedimentos referentes a esse tema" a fim de contribuir para uma melhor apreensão. Assim, recomenda a resolução das equações do 2º grau pela fatoração.

Nos livros didáticos analisados, verificamos que primeiramente é apresentado o completamento do quadrado e depois a "fórmula de Bhaskara"; assim, esses livros já empreendem esforços no sentido de sinalizar que o mais importante neste conteúdo é a compreensão de que a fórmula geral de resolução provém do completamento do quadrado na forma geral da equação. Apesar de pequenas tentativas no sentido de mudança na abordagem por alguns livros didáticos, observamos que de modo geral a fatoração fica esquecida após a dedução da fórmula, não sendo utilizada em situações como a fatoração dos trinômios quadrados perfeitos, para completar quadrados, conforme afirma Burigato (2007), Eisenberg e Dreyfus (1995) e Lima (2001), nem para resolver equações do 2º grau como propusemos neste trabalho. É nítida a fragmentação no ensino da fatoração, particularmente do completamento do quadrado e do estudo das equações do 2º grau, já que no oitavo ano são ensinados os casos de fatoração e os produtos notáveis e no nono ano retoma-se com a fatoração e a resolução da equação. Diante desse tipo de abordagem é de esperar que o aluno não consiga relacionar um conteúdo a outro ou mesmo não tenha conhecimentos suficientes para compreender e associar conteúdos como fatoração e equações do 2º grau, favorecendo a permanência desse aluno em monoregistros e, mesmo neles, apresentando dificuldade em realizar tratamentos adequados. Para Duval (2010), quando o aluno não reconhece o mesmo objeto matemático nas diferentes representações, ele fica limitado na sua aprendizagem matemática.

Acreditamos, com base nesse estudo, que uma forma mais adequada de abordar o conteúdo equações do 2º grau é propor sua resolução por meio da fatoração, pois assim é dada a oportunidade ao aluno de atribuir significado à fatoração e identificar articulações entre conteúdos, pois a fatoração será utilizada para resolver equações e não apenas como regras de utilidade duvidosa, sem sentido para o aluno, que devem ser memorizadas apenas para serem reproduzidas nos exercícios e nas provas.

Como o objetivo geral de “Analisar a mobilização de registros numérico, algébrico e geométrico, por alunos do 9º ano do ensino fundamental, para resolver equações do segundo grau na forma completa, utilizando o método do completamento do quadrado”, preparamos uma sequência didática, composta por 17 atividades as quais desenvolvemos em seis sessões, todas com duração de 1h30min, no período vespertino de uma escola da rede pública de Campo Grande - MS. Assim, um dos procedimentos deste estudo, foi desenvolver atividades que viessem ao encontro das teorias de Situações Didáticas, (BROUSSEAU, 1986) e Teoria de Registro de Representação Semiótica, (DUVAL, 1995), e nosso papel principal, possibilitar aos alunos momentos de investigação e reflexão acerca do objeto matemático, proporcionando o desenvolvimento do seu raciocínio, bem como a atribuição de significados, ao realizar tratamentos em diferentes registros e conversões, alternando a todo momento de uma representação à outra, questionando-os, orientando-os para que pudessem mobilizar conceitos, buscar outros, a fim de que encontrassem nos diferentes registros de representação uma alternativa para resolução e apreensão das equações do 2º grau pela fatoração e pudessem validá-las. Nos momentos finais de cada atividade buscamos trabalhar a institucionalização de alguns conceitos, representações e técnicas referentes ao tema, com o fim de discutir e analisar erros, acertos, ideias equivocadas e estratégias de solução.

As análises *a posteriori* das sessões da sequência de atividades evidenciaram que os alunos da escola pesquisada possuíam conhecimento do campo algébrico requerido, desde as regras para a fatoração de um trinômio quadrado perfeito às manipulações algébricas necessárias à realização das atividades. Ressaltamos que os alunos não tinham conhecimento da resolução de uma equação do segundo grau pela fatoração por meio de registros algébricos e, com relação às representações geométricas, não constatamos evidências de seu efetivo uso ou compreensão trazidos pelos alunos sujeitos de pesquisa. Assim, por meio da resolução das atividades fomos construindo as noções de fatoração e resolução de uma equação do segundo grau, inclusive com a representação geométrica.

Com relação à mobilização dos registros numérico, algébrico e geométrico na fatoração de um trinômio quadrado perfeito, observamos que os registros numérico e algébrico foram utilizados com mais êxito que o registro geométrico. Foi possível perceber que as dificuldades manifestadas pelos alunos se devem, particularmente, ao fato do trinômio quadrado perfeito representar a área do quadrado e a forma fatorada evidenciar a medida dos lados das figuras que compõem o quadrado, bem como a soma dos termos ax^2+bx resultar na área dada pelo termo independente c. No entanto, no decorrer das atividades, essas dificuldades foram sendo sanadas, reforçando a falta de significado atribuída pelo aluno a elementos algébricos, conforme foi descrito por Brasil (1998), Castro (2003) e Booth (1995).

Em relação à obtenção de um trinômio quadrado perfeito, por meio do completamento do quadrado para a resolução da equação do 2º grau, fazendo uso de diferentes registros, observamos que os alunos tiveram facilidade em perceber que o trinômio não correspondia a um quadrado perfeito e conseguiam determinar o valor que o completava, fazendo uso da identidade algébrica ou da representação geométrica. Ao completar o quadrado na forma algébrica para a resolução da equação do 2º grau, foi necessário chamarmos a atenção de alguns alunos para o uso do princípio da equivalência de equações para que pudessem prosseguir e obterem a solução da equação. Os registros numérico e geométrico foram utilizados somente quando a atividade solicitava ou, eventualmente, como forma de validação da resposta encontrada pelo aluno. Assim como identificado por Silvestre (2006), a escolha da estratégia de resolução mobilizada pela maioria dos alunos parece depender dos conhecimentos prévios que eles têm. Verificamos algumas dificuldades descritas aqui e nas análises *a posteriori* de cada sessão, no entanto as discussões entre os pares e conosco encaminhou-os para a compreensão quanto aos erros cometidos, convergindo na ascensão dos alunos à mobilização dos diferentes registros. Concluímos, reafirmando que, quanto a esse objetivo específico, houve a mobilização dos diferentes registros de representação, assim como, a resolução das equações do 2º grau pela fatoração conforme propusemos.

Quanto a identificar as dificuldades dos alunos com relação ao tratamento e conversão nos registros utilizados na resolução de equações do 2º grau, constatamos que no tratamento algébrico houve erros provenientes da manipulação algébrica, destacados por Nguyen (2006). Durante as sessões, a dificuldade com a conversão do registro algébrico para o registro geométrico, foi evidente. Dentre estes, destacamos, conceitos equivocados na compreensão da solução negativa, obtida por meio da resolução pela representação geométrica. Ainda nesse campo os alunos enfrentaram dificuldade em relação ao quadrado da diferença de dois termos. Contudo, consideramos, ter obtido sucesso quanto ao atendimento desse objetivo, pois ao solicitar a resolução algébrica ou geométrica, os alunos foram capazes de mobilizar o registro, realizando o tratamento e/ou conversão requerida na atividade.

Ao estudarmos as dificuldades dos alunos em passar de casos particulares à fórmula geral de resolução da equação do segundo grau, por meio da fatoração, identificamos como essencial o processo de discussão junto aos alunos, questionando-os onde deveríamos chegar e como proceder para atingir esse objetivo. Assim, ao obterem um resultado que não correspondia à “fórmula de Bhaskara”, já conhecida por eles, eles próprios buscavam os erros, dentre estes, destacamos como principal, a resolução do Mínimo Múltiplo Comum de frações algébricas. As equipes desenvolveram a atividade, demonstrando habilidade algébrica e compreensão de seu objetivo, assim, classificamos a atividade como satisfatória, bem como esse objetivo.

Quanto à nossa questão central “Como a mobilização de diversos registros de representação, por alunos do 9º ano do ensino fundamental, pode se manifestar na apreensão da resolução de equações do 2º grau completas, por meio da fatoração?” Constatamos em vários momentos, o êxito alcançando por alguns alunos frente à mobilização dos diversos registros, por exemplo, ao resolverem uma equação do 2º grau com uso do registro geométrico, puderam com rapidez e precisão determinar suas raízes. Outra situação importante, do ponto de vista da mobilização de registros, foi quando ao desenvolverem uma atividade utilizando os registros algébrico e geométrico, verificaram que a resposta não era a mesma e por meio das duas representações, foram se apoiando ora em uma, ora em outra, para verificarem os erros cometidos e chegarem a uma resolução satisfatória. Ressaltamos que, para a resolução de uma equação do 2º grau, o aluno fez uso desse raciocínio por meio do acesso a uma segunda representação, no caso a geométrica. Desse modo, um registro não só contribuiu para verificar a validade do outro, como também, para a busca dos erros. Inferimos que a mobilização de diversos registros favoreceu o desenvolvimento de situações adidáticas de validação e, ressaltamos que o aluno fez uso desse raciocínio porque teve acesso a uma segunda representação, no caso a geométrica, para a resolução de uma equação do 2º grau, também que, os diversos registros de representação semiótica podem favorecer o acesso aos objetos matemáticos e facilitar formas de verificação da atividade, visto que os alunos conseguem pensar a resolução de diferentes formas, transitando de um registro a outro, realizando conversões ou somente tratamentos.

Enfatizamos, ao longo de nosso trabalho, a situação adidática de validação descrita por Brousseau (1986), procurando sempre analisar como se dá o processo de validação da atividade pelo aluno, bem como, instigando-o a realizá-la, pois acreditamos que ao verificar a validade de sua solução, possivelmente mobiliza um segundo registro de representação. Desse modo, observamos durante o desenvolvimento das atividades que, o registro numérico foi o mais utilizado como meio de verificação. Contudo, verificamos que os alunos pouco se envolveram na busca de validação da atividade. Sendo assim, trata-se de um aspecto a ser mais enfatizado e desenvolvido por professores, em sala de aula, a fim de possibilitar mais autonomia do aluno frente a uma solução.

Em alguns momentos, quando solicitada à resolução geométrica, as equipes utilizaram os dois registros, algébrico e geométrico, para obterem a solução por meio geométrico conforme solicitado. Lembramos que os PCN (BRASIL, 1998) recomendam que no estudo da equação do 2^o grau suas raízes sejam obtidas pela fatoração, discutindo seu significado de modo a favorecer sua apreensão. Assim, destacamos a importância da Teoria de Registros de Representação Semiótica, que de acordo com Duval (2010, p.13), "o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático".

Quanto ao trabalho do professor diante do conteúdo de fatoração, nossos estudos indicam que é importante realizar a fatoração numérica, para em seguida explorar a fatoração algébrica, bem como por meio da representação do registro geométrico, pois podem contribuir para a compreensão. Quanto à resolução de uma equação do 2^o grau completa, consideramos que a utilização da fatoração é uma abordagem extremamente rica e permite aos alunos exercitarem suas habilidades, bem como ressignificar objetos algébricos na representação geométrica e consequentemente favorecer a apreensão deste conteúdo.

Diante dos resultados obtidos nesta pesquisa, constatamos que ainda podem ser levantadas novas questões a respeito da mobilização do registro geométrico, investigando o porquê da sua não utilização e, também, se alunos que possuem dificuldades com o conhecimento algébrico, podem se apoiar mais na representação geométrica, analisando se tal aluno evolui na apreensão de conceitos algébricos.

Outra questão que também pode ser investigada é quanto ao ensino proposto por professores que ministram aulas nos nonos anos do Ensino Fundamental, o porquê da não introdução do ensino de equações do 2^o grau pela fatoração, tendo em vista que os livros didáticos destacam essa forma de abordagem da resolução.

Ao término desse trabalho acreditamos ter conseguido atingir satisfatoriamente nossos objetivos. Identificamos, com base nas produções apresentadas pelos alunos, que houve a mobilização de registros numérico, algébrico e geométrico, para resolução das equações do segundo grau na forma completa e a compreensão dessa forma de resolução; porém, observamos certa resistência dos alunos na mobilização do registro geométrico, o que não foi encontrado na mobilização dos registros algébrico e numérico.

Ao concluir esta investigação, acreditamos ter contribuído para a construção de conhecimentos dos alunos participantes, apoiados na compreensão de ideias matemáticas. Aos professores de Matemática que atuam nos oitavos e nonos anos do Ensino Fundamental, oferecemos um subsídio para o trabalho em sala de aula; enfatizamos que esta experiência como pesquisadores enriqueceu nossa prática docente.

Por tratar-se de um tema complexo e abrangente, esperamos que este trabalho contribua com o avanço das pesquisas sobre este assunto.

REFERÊNCIAS

ABNT. **Manual de Trabalhos Acadêmicos**. NBR14724/2011.

ALMOULOUD, Saddo. **Fundamentos da didática da matemática e metodologia de pesquisa.** 1 ed. Curitiba: UFPR, 2007.

ALONSO, Fernando et al. **Ideas y Actividades para Enseñar Algebra**. Madrid: Sintesis, 1993. 201 p.

ANDRADE, Bernardino Carneiro. **A Evolução Histórica da Resolução das Equações Do 2º Grau.** 2000. 116 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Pura). Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Portugal, 2000.

ARTIGUE, Michéle. **Ingénierie Didactique**. Recherches em Didactique des Mathématiques, vol.9, nº3, p. 281-307. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1990.

________, Michéle. Ingenieria Didáctica**.** In: _______, M. et al. **Ingenieria Didáctica em Educação Matemática:** Um esquema para La invetigación y La innovación em La enseñanza y El aprendizage de las matemáticas.Iberoamérica: México, 1995, 129 p.

________, M. **Engenharia Didática**. In: BRUN, J. (Org.). Didáctica das matemáticas. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4, p. 193-217.

Bigode, Antonio José Lopes. **Matemática Hoje é Feita Assim.** 7ª Série. São Paulo: FTD, 2000.

______, Antonio José Lopes. **Matemática Hoje é Feita Assim.** 8ª Série. São Paulo: FTD, 2000.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ensino de quinta a oitava séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_______, Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2008**: Matemática. Anos finais do ensino fundamental. Brasília: MEC, 2007. 100 p.

_______, Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos: PNLD 2011**: Matemática. Anos finais do ensino fundamental. Brasília: Brasília: MEC, 2010. 96 p.

BOOTH, Lesley R. **Dificuldades das Crianças que se Iniciam Em Álgebra.** In: COXFORD, Arthur F., SHULTE, Albert P. As idéias da álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues. 4. ed. São Paulo: Atual, 1995. P. 23-36.

BROUSSEAU, Guy. **Fondements et methods de la didactique des Mathématiques**. Recherches en Didactique de Mathématiques, v. 7, n. 2, 1986, p. 33 –115.

____________ Guy. **Introdução ao Estudo da Teoria das Situações Didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. Trad. Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

BURIGATO, Sonia Maria M. da S. **Estudo de Dificuldades na Aprendizagem da Fatoração nos Ambientes**: papel e lápis e no software Aplusix. 2007. 166 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Ciências Humanas e Sociais, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, MS, 2007.

CASTRO, Monica Rabello de. **Educação Algébrica e Resolução de Problemas:** a proposta de interatividade do salto para o futuro. Boletim GEPEM, n.42, p. 11-25, fev./jul. 2003.

DAMM, Regina Flemming. **Registros de Representação**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). Educação Matemática: Uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010. p. 167-188.

DANTE, Luiz Roberto. **Livro Didático de Matemática:** uso ou abuso? Em Aberto, Brasília, ano 16, n.69, jan./mar. 1996 p. 80-83

_______, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática**. 9º Ano. São Paulo: Ática, 2009.

DIAS, Graciana Ferreira. **Utilizando Processos Geométricos da História da Matemática Para o Ensino de Equações do 2º Grau.** 2009. 166 f. Dissertação (Mestrado em Educação)- Centro de Ciências Sociais e Aplicadas, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

DOUADY, Règine.La ingeniería didáctica y la evolución de su relación com el conocimiento. In: ARTIGUE, M. et al. **Ingenieria Didáctica em Educación Matemática:** Um esquema para La invetigación y La innovación em La enseñanza y El aprendizage de las matemáticas.Iberoamérica: México, 1995, 129 p.

DUVAL, Raymond. **Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão Em Matemática**. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). Aprendizagem em Matemática: Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2010. p. 11-33.

_______. Raymond. **Ver e Ensinar a Matemática de Outra Forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representação semiótica. Tânia M.M. Campos (org). [tradução Marlene Alves Dias]. São Paulo: PROEM, 2011.

EISENBERG, Theodore; DREYFUS, Tommy. **Os Polinômios no Currículo da Escola Média.** In: COXFORD, Arthur F., SHULTE, Albert P. As idéias da álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues. 4. ed. São Paulo: Atual, 1995. p.127-134.

FREITAS, José Luiz Magalhães. **Teoria das Situações Didáticas**. In: MACHADO, S. D. A. (Org). Educação Matemática: Uma (nova) introdução. 3. Ed. São Paulo: EDUC, 2010. p. 77-112.

GIOVANNI Jr, José Ruy; CASTRUCCI Benedito. **A Conquista da Matemática**. 9º Ano. São Paulo: FTD, 2009.

LIMA, Elon Lages. **Exame de Textos***:* análise de livros de matemática para o ensino médio. 470 f. Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBM, 2001.

LINS, Rômulo Campos; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.176 p.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. **Engenharia Didática.** In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). Educação Matemática: Uma (nova) introdução. São Paulo: EDUC, 2010. p. 233-247.

MERZBACH, Uta C.; BOYER, Carl B. **A history of Mathematics**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2011. 668 p.

MELO, Adriano da Fonseca. **Estudo de Procedimentos de Validação de Igualdades de Expressões Algébricas por Meio de Mudanças de Quadros**. 2010. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Campo Grande.

MIGUEL, Antonio; MIORIM Maria A. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. 195 p.

NGUYEN Ai Quoc. **Les apports d'une analyse didactique comparative de la résolution des équations du second degré dans l'enseignement secondaire au Vietnam et en France.** 2006. 344 p. Thèse d'université. Université Joseph Fourier Grenoble, França.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática**: Uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. 128 p.

POST, Thomas R.; BEHR, Merlyn J.; LESH, Richard. **A Proporcionalidade e o Desenvolvimento de Noções Preálgebra**.In: COXFORD, Arthur F., SHULTE, Albert P. As idéias da álgebra. Tradução de Hygino H.Domingues. 4. ed. São Paulo: Atual, 1995. p.89-103.

ROSA, Viviane Mendonça Gomides. **Aprendizagem da Equação do 2º Grau** – Uma análise da utilização da teoria do ensino desenvolvimental. 2009. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Católica de Goiás, Goiânia, GO, 2009.

SILVESTRE, A.I. **Investigações e Novas Tecnologias no Ensino de Proporcionalidade Direta**: uma experiência no 2º ciclo. 2006. 202 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2006.

SCHUBRING, Gert. Análise histórica de livros de matemática: notas de aula. Trad. Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas, SP: Autores Associados, 2003. 175 p.

STRACHEY, Edward. **Bija Ganita or the Álgebra of the Hindus**. Londres: W. Glendinning, 1819. 138 p.

USISKIN, Z. **Concepções sobre Álgebra da Escola Média e Utilização das Variáveis**. In: COXFORD, Arthur F., SHULTE, Albert P. As idéias da álgebra. Tradução de Hygino H. Domingues. 4. ed. São Paulo: Atual, 1995. p. 9-22

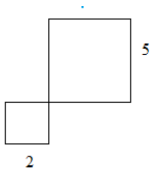
VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma História da Matemática Escolar no Brasil** *(1730-1930)*. 2. ed. São Paulo: Annablume: FAPESP, 2007. 211 p.

ANEXOS

ANEXO A - Sessão 2

Atividade 4

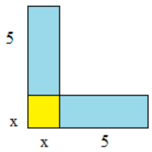
Dados dois quadrados cujos lados medem 2 cm e 5 cm, responda:



a) Qual a área de cada quadrado? Represente-as na forma de potência.
b) Complete esta figura para obter um único quadrado ("quadradão").
c) Escreva a expressão numérica que representa a área do "quadradão" obtido.
d) Se substituirmos o 5 por x, qual seria a expressão que representa a área total da figura "quadradão"? Escreva-a na forma fatorada.
e) Desenhe um quadrado formado por dois quadrados e dois retângulos cuja área total seja dada pela expressão $x^2 + 6x + 9$. Quanto mede o lado desse quadrado?

Atividade 5

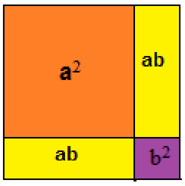
Na figura abaixo temos dois retângulos e um quadrado:



a) Qual a expressão que representa o valor da área total da figura com forma de L?
b) Qual deve ser a área do quadrado que devemos acrescentar à figura em forma de L, para obter um novo quadrado ("quadradão")?
c) Qual será a expressão que representa a área total do "quadradão" obtido?
d) Se a figura em forma de L tem área 56. Qual é a área do "quadradão"?
e) Se o "quadradão" tem área 64, então quanto mede o seu lado? Qual o valor de x?

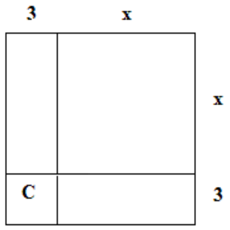
Atividade 6

Determine os lados dos retângulos e, se possível, escreva na forma fatorada a expressão correspondente à área total da figura.



ANEXO B - Sessão 3

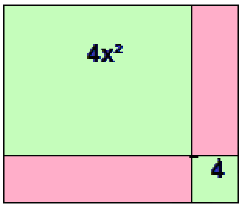
Atividade 7



a) Qual é o valor da área do quadrado C?
b) Qual a forma fatorada dessa expressão?
c) Se substituíssemos o valor 3 por 5, qual deve ser o valor da área do quadrado C para que a expressão que representa o valor da área total da figura seja um trinômio quadrado perfeito?
d) Se a área de C é 16 u.a., qual a medida dos comprimentos dos lados dos dois retângulos? Escreva a expressão que representa a área total do quadrado cujo lado mede (x+4) unidades de comprimento.

Atividade 8

Na figura abaixo a área total é 36 cm^2.



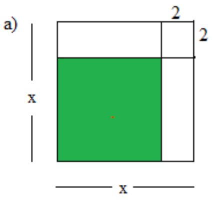
a) Descubra o valor das medidas dos lados dos retângulos e dos quadrados dessa figura;
b) Escreva a expressão que representa a área total da figura, fatore-a;
c) Determine o valor de x.

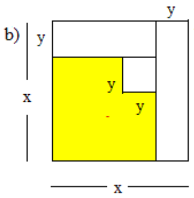
Atividade 9

Dada a expressão $(x + 8)^2$
a) Desenvolva essa expressão algebricamente;
b) Desenvolva essa expressão geometricamente.

Atividade 10

Dadas as figuras abaixo:

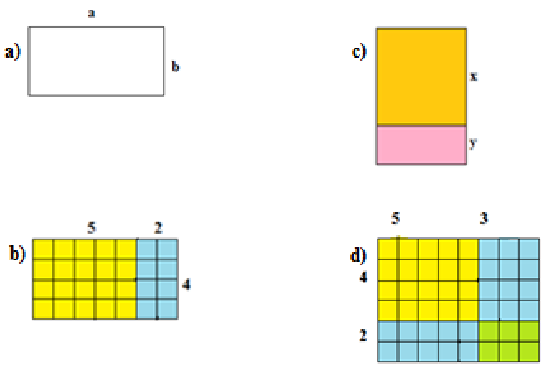




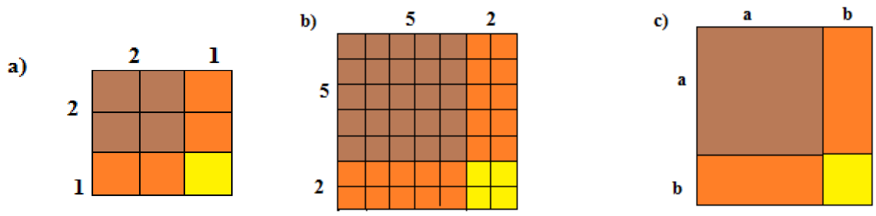
Escreva a expressão que representa a área da parte colorida da figura em cada item. Justifique.

ANEXO C – Atividades da Sequência

1- Encontre uma expressão que corresponda à área de cada figura abaixo.



2- Observe a sequência de quadrados abaixo:



b) Tendo em vista os quadrados acima, complete o quadro:

Quadrado a	$(2 + 1)^2 = (2 + 1).(2 + 1) = 2^2 + 1\text{x } 2 + 2 \text{ x } 1 + 1^2 = 2^2 + 2.(1 \text{ x } 2) + 1^2$
Quadrado b	$(\quad\quad)^2 =$
Quadrado c	$(\quad\quad)^2 =$

b) Você consegue dizer se existe alguma propriedade ou regra comum presente nos resultados da resolução acima?

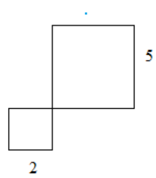
3-

a) Qual o valor de 12^2?

b) Desenhe um quadrado que possua 12^2 unidades de área.

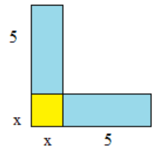
c) 12^2 é equivalente à expressão numérica $(10 + 2)^2$? Por quê?

4- Dados dois quadrados cujos lados medem 2 cm e 5 cm, responda:



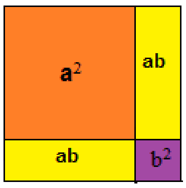
a) Qual a área de cada quadrado? Represente-as na forma de potência.
b) Complete esta figura para obter um único quadrado ("quadradão").
c) Escreva a expressão numérica que representa a área do "quadradão" obtido.
d) Se substituirmos o 5 por x, qual será a expressão que representa a área total da figura "quadradão"? Escreva-a na forma fatorada.
e) Desenhe um quadrado formado por dois quadrados e dois retângulos cuja área total seja dada pela expressão $x^2 + 6x + 9$. Quanto mede o lado desse quadrado?

5- Na figura abaixo temos dois retângulos e um quadrado:

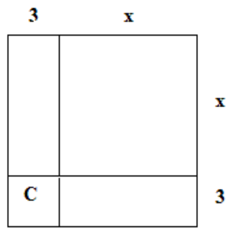


a) Qual a expressão que representa o valor da área total da figura com forma de L?
b) Qual deve ser a área do quadrado que devemos acrescentar à figura em forma de L, para obter um novo quadrado ("quadradão")?
c) Qual será a expressão que representa a área total do "quadradão" obtido?
d) A figura em forma de L tem área 56, qual é a área do "quadradão"?
e) Se o "quadradão" tem área 64, então quanto mede o seu lado? Qual o valor de x?

6- Determine os lados dos retângulos e, se possível, escreva na forma fatorada a expressão correspondente à área total da figura.

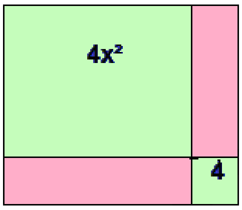


7-



a) Sabendo-se que a expressão que representa o valor da área total da figura acima é um trinômio quadrado perfeito, qual é o valor da área do quadrado C?
b) Qual a forma fatorada dessa expressão?
c) Se substituirmos o valor 3 por 5, qual deve ser o valor da área do quadrado C para que a expressão que representa o valor da área total da figura seja um trinômio quadrado perfeito?
d) Se a área de C é 16 u.a., qual a medida dos comprimentos dos lados dos dois retângulos? Escreva a expressão que representa a área total do quadrado cujo lado mede (x+4) unidades de comprimento.

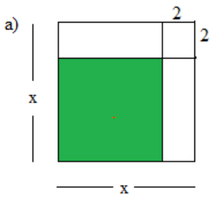
8- Na figura abaixo a área total é 36 cm^2.

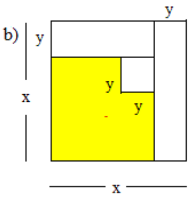


a) Descubra o valor das medidas dos lados dos retângulos e dos quadrados dessa figura;
b) Escreva a expressão que representa a área total da figura e faça a fatoração dela
c) Determine o valor de x.

9- Dada a expressão $(x + 8)^2$
a) Desenvolva essa expressão algebricamente;
b) Desenvolva essa expressão geometricamente.

10 – Dadas as figuras abaixo:



b) 

Escreva a expressão que representa a área da parte colorida da figura em cada item. Justifique.

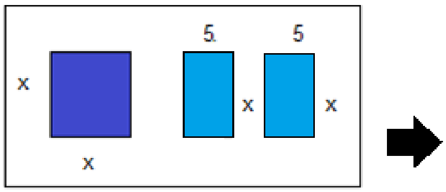
11- Complete as lacunas:

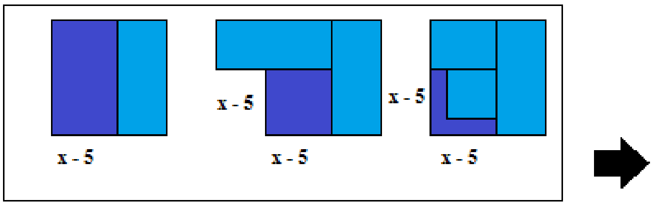
a)x^2 – ....+ 1 = (........... - ....)^2

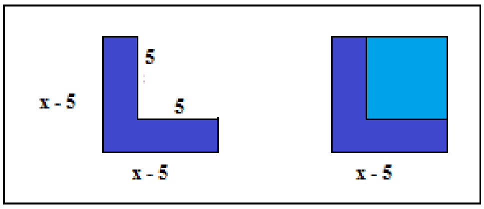
b) (a + ...)^2 = ... + ... + 121

c)............. – 12y + ... = (..........- 3y)^2

12-De acordo com a sequência de figuras abaixo, utilizadas para auxiliar na resolução da equação $x^2 - 10x - 11 = 0$, pode-se observar que esta equação pode ser escrita na forma $x^2 - 10x = 11$, assim procedemos à resolução geométrica:





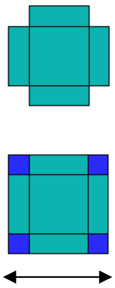


a) Qual a área do quadrado de lado x - 5? Por quê?
b) Quais os possíveis valores que x pode assumir para satisfazer a equação: $x^2 - 10x = 11$?

13- Al-Khowarizmi, matemático hindu que viveu no século IX, para resolver a equação $x^2 + 10x - 39 = 0$, (escrita em notação moderna para o melhor entendimento dos alunos), primeiro escreveu-a da seguinte forma: $x^2 + 10x = 39$, os outros passos você fará:

a) Represente $x^2 + 10x$ por uma figura em forma de L e complete-a para formar um quadrado;
b) Escreva a expressão que dá o valor da área total do "quadradão" obtido. Ela corresponde a um trinômio quadrado perfeito? Justifique;
c) Qual o valor da área do L? E qual o valor do quadrado acrescentado?
d) Qual o valor de x que satisfaz a equação?

14- Resolva geometricamente a equação: $x^2 + 8x - 84 = 0$



15- Qual é o número cujo quadrado, adicionado com seu décuplo, dá 96?

16- Resolva as equações, usando a fatoração:

1) $(x - 3)^2 = 9$
2) $4x^2 + 40x + 100 = 0$
3) $x^2 + 2x + 3 = 0$
4) $x^2 - 18x + 81 = 16$
5) $x^2 + 4x + 3 = 0$
6) $x^2 - 14x = -40$
7) $y^2 - 2y - 2 = 0$

17- Complete o quadrado da equação $ax^2 + bx + c = 0$