**MAYSA FERREIRA DA SILVA**

# DIVISIBILIDADE: PRÁTICAS DE ESTUDO REALIZADAS POR ALUNOS DE UM CURSO PREPARATÓRIO PARA O VESTIBULAR

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**
**CAMPO GRANDE / MS**
**2010**

**MAYSA FERREIRA DA SILVA**

# DIVISIBILIDADE: PRÁTICAS DE ESTUDO REALIZADAS POR ALUNOS DE UM CURSO PREPARATÓRIO PARA O VESTIBULAR

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Educação Matemática, como exigência parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob a orientação do Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL**
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**
**CAMPO GRANDE / MS**
**2010**

# FOLHA DE APROVAÇÃO

Maysa Ferreira da Silva

Divisibilidade: Práticas de Estudo Realizadas por Alunos de um Curso Preparatório para o Vestibular

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em ____/____/ 2010

BANCA EXAMINADORA:

_________________________________________

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas - UFMS

_________________________________________

Prof. Dr. Luis Carlos Pais - UFMS

_________________________________________

Profª Drª Clélia Maria Ignatius Nogueira - UEM

# AGRADECIMENTOS


Ao meu poder superior que tem me sustentado a cada dia.

Ao professor *José Luiz* que, com paciência e respeito, orientou a condução da investigação.

Ao professor *Luiz Carlos*, que pode contribuir grandemente para o delineamento do trabalho.

À professora *Clélia*, que fez parte da banca e trouxe contribuições para o fechamento do texto final.

Aos professores do mestrado, em especial, a professora *Marilena Bittar* que contribuiu com vários questionamentos procedentes ao trabalho, nos fazendo refletir sobre a pesquisa.

Aos participantes do grupo de pesquisa GPHEME (Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática) que muito contribuiu com as reflexões e discussões teóricas.

Aos colegas do mestrado, sobretudo ao *Tarciso, Rúbia e Adriana* que sempre estavam de forma otimista ao meu lado. E, em especial, faço um destaque a companheira de luta Adriana, que leu todo o trabalho e deu importantes contribuições e muita força para chegar a reta final.

À direção do Instituto Lutherking, que permitiu e apoiou a realização da pesquisa nesta instituição.

Aos alunos que fizeram parte da investigação colaborando com o material para análise.

À minha família: mãe, pai, irmãs, sobrinhos, sobrinhas, marido, filho e filha que apoiaram carinhosamente quando muito precisei.

Aos colegas de trabalho da fundação escola de governo, em especial, a *Cristiane* e o *Jesiel* pelo incentivo e colaboração.

À todas as pessoas que, de uma forma ou de outra, fizeram parte de minha história e contribuíram para a realização deste sonho.

*Dedico este trabalho aos meus dois maiores bens:*
*Minha amada filha Ana Clara e*
*Meu amado Filho Lucas, que apesar da pouca idade*
*Foram os meus maiores apoiadores e*
*Ansiosamente desejaram a entrega do texto final...*

# RESUMO

Este trabalho teve como objetivo analisar práticas e argumentos utilizados pelos estudantes de um curso preparatório para o vestibular concernente ao tema divisibilidade, em um contexto de ações afirmativas na cidade de Campo Grande-MS. Investigamos dispositivos didáticos, técnicas e argumentos utilizados pelos estudantes nas resoluções de problemas que envolviam divisibilidade, bem como formas de estudo praticadas pelo grupo, a fim de se apropriarem de saberes matemáticos. A organização da pesquisa foi fundamentada nas diretrizes básicas da abordagem qualitativa cuja opção metodológica foi pela realização da pesquisa por meio da entrevista e caracterização do campo investigado e em elementos praxeológicos conforme Chevallard, Bosch e Gascón, os quais destacamos a organização das tarefas, a organização dos grupos de estudo, a coordenação do estudo e relações entre o objeto, a instituição e o sujeito. Para a análise utilizamos algumas noções da Teoria Antropológica do Didático - TAD, proposta por Chevallard, a qual está inserida no Programa Epistemológico, que considera como objeto primário de investigação da Didática a Atividade Matemática que ocorre em diferentes instituições. Foram considerados a praxeologia, momentos de estudo, objetos ostensivos e não-ostensivos. Para esta pesquisa foi necessária a constituição de um grupo de estudo, a seleção e a apresentação dos tipos de tarefa. Os resultados das sessões demonstraram que os alunos do grupo pesquisado apresentavam algumas dificuldades em relação ao tema divisibilidade como: o domínio das nomenclaturas, a elaboração de definições e a organização formal e a validação dos resultados. Observou-se que, tanto os registros de linguagem como as técnicas, ora eram mais evoluídos, ora mais rudimentares e que no decorrer do processo de estudo, de modo geral, os alunos manifestaram resistência em relação ao desprendimento da técnica em uso. Observamos ainda que o momento de avaliação foi vivenciado seguido do momento de trabalho com a técnica, o que propiciou a necessidade da elaboração de novas técnicas.

**Palavras Chave**: Divisibilidade; Praxeologia; Vestibular; Ações Afirmativas.

# ABSTRACT

This work had as objective analyse practices and arguments that were used by students from a preparatory course for *vestibular* concerning the  subject divisibility, inside a context of affirmative actions in Campo Grande city state of Mato Grosso do Sul. We investigated educational dispositives, thecniques and arguments used by students in solutions of problems which involved divisibility, as well types of study practiced by the group, in order to appropriate of mathematics knowledge. The search organization occurred based on basic guidelines  of the qualitative approach which methodological option was by search by interview and characterization of the investigated field and in praxeological elements according to Chevallard, Bosch and Grascón, who permited to highlight the tasks organization, the study groups organization, the coordination of the study and relations among the object, the institution and the subject. For the analysis we used some notions of Anthropological Theory of the Didatics – ATD, proposed by Chevallard, which one is inserted in Epistemological Program, that considers as primary object of investigation of Educational the Mathematics Activity which occurs in different institutions. Were considered the praxeology, moments of study, ostensible and non-ostensible objects.  For this search it was necessary the constitution of a study group, the selection and the presentation of types of tasks. The session results showed that the students from the searched group presented some difficulties related to the theme divisibility as: the domain of nomenclatures, the elaboration of definitions and the formal organization and the validation the  results. It was observed that such the language registers as the thecniques were sometimes evolved or sometimes rudimentaries and during the study process, in general, the students resisted regarding to the detachment of the technique in use. We emphasize that the evaluation moment was made followed by moment of work with the technique, which gave the necessity of new thecniques elaboration.



**Key Words**: Divisibility; Praxeology; Vestibular; Affirmative Actions

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE QUADROS

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

O presente trabalho foi pautado na experiência como professora de Matemática do ensino básico e nas reivindicações de alunos de um curso preparatório para o vestibular num contexto de ações afirmativas. Este trabalho foi elaborado com o objetivo de analisar práticas e argumentos utilizados por estes estudantes frente a problemas de divisibilidade.

No decorrer de quatro anos de atuação como professora na Instituição em questão, evidenciou-se, nesses alunos, uma inconsistência ou até mesmo a falta de domínio em conhecimentos considerados básicos na área da Matemática, principalmente, os concernentes à divisibilidade. Observou-se, também, que isto se configurou em um elemento dificultador para a aquisição de novos saberes.

Frente à expectativa desses estudantes em romper com a maneira de interagir com os conhecimentos matemáticos até então versados, e adquirir conhecimentos para resolver problemas relativos ao ensino básico, vislumbrou-se uma oportunidade de investigação no campo da Didática, reiterando as reflexões apresentadas por Pais (2001, p.43).

> Durante a aprendizagem, ao iniciar o contato com um conceito inovador, pode ocorrer uma revolução interna entre o equilíbrio aparente do velho conhecimento e o saber que se encontra em fase de elaboração. Isso faz com que a noção seja de interesse para a didática, pois, para a aprendizagem escolar, por vezes, é preciso que haja fortes rupturas com o saber cotidiano, caracterizando a ocorrência de uma revolução interna, o que leva o sujeito vivenciar a passagem do seu mundo particular a um quadro mais vasto de idéias, às vezes, incomensuráveis através do antigo conhecimento.

Os procedimentos metodológicos da pesquisa foram fundamentados nas diretrizes básicas da abordagem qualitativa indicada por André e Lüdke (2004) e elementos da praxeologia de Chevallard, Bosch e Gascón (2001). Da pesquisa qualitativa destacamos a entrevista e a caracterização do campo investigado como instrumentos de coleta de dados. Dos elementos praxeológicos, usamos a organização das tarefas, a organização dos grupos de estudo, a coordenação do estudo e as relações entre o objeto, a instituição e o sujeito. Ressaltamos que Oliveira (2010) em sua pesquisa sobre formação de professores, utilizou a praxeologia como instrumento teórico metodológico e nos trouxe subsídios quanto ao uso da praxeologia como referencial metodológico.

Para efeito de organização da pesquisa, a coleta de dados foi dividida em três etapas: a primeira etapa ocorreu no final do ano letivo de 2008 e a denominamos de “sessões prévias realizadas no final de 2008”; a segunda aconteceu no início do ano letivo de 2009 que intitulamos de “sessões iniciais de 2009” e, por último, realizamos as sessões em que aplicamos as tarefas organizadas em seus respectivos tipos, nomeadas de “sessões de estudo”. Em todas as etapas as sessões de estudo ocorreram uma vez por semana e a participação dos alunos ocorreu de forma espontânea. Vale destacar que a maioria escolheu participar do grupo por ter grande dificuldade na disciplina escolar Matemática. A média de frequência dos participantes foi em torno de oito por sessão.

A entrevista foi gerida essencialmente em dois momentos: um ocorreu durante as sessões de estudo, em forma de discussões com o grupo, direcionados às resoluções dos problemas e, a outra foi realizada individualmente com os alunos, em forma diálogos, objetivando identificar o perfil dos participantes a partir da história pessoal de cada um.

A orientação metodológica explicitou o uso de elementos da abordagem qualitativa e os elementos praxeológicos, assim como as características norteadoras e as ações realizadas durante a coleta de dados. Apresentamos também uma breve reflexão de que a metodologia não deve ser meramente instrumental, levando-se em conta a história de vida dos sujeitos da pesquisa e os objetivos propostos.

Para contextualizar a pesquisa, foi exposta a nossa trajetória pessoal, em que pontuamos nosso movimento desde a atuação no ensino básico até o delinear do objeto de estudo, enfatizando a influência do meio social no processo do ensino e da aprendizagem, em especial, a figura do professor, como sendo aquele que media o saber a ser ensinado e o saber ensinado.

Para a elaboração deste trabalho buscamos pesquisas relacionadas ao objeto, destacando o tema divisibilidade e ações afirmativas, uma vez que o contexto social no qual os alunos estão inseridos encontra-se em uma relação estreita com as práticas escolares, tanto do ponto de vista didático como matemático. Desta forma buscamos pesquisas que apresentam discussões sobre números inteiros e dentro desse tema abordam o assunto divisibilidade, como a de Rama (2005), de Resende (2007) e Gregorutti (2009). Estas três pesquisas foram importantes para situar o tema divisibilidade nas instituições: livros didáticos, formação de professores e Ensino Fundamental que diretamente influenciam na aprendizagem dos estudantes, sujeitos das instituições escolares. Em relação ao contexto social no qual os alunos estão inseridos, destacamos as pesquisas de Nascimento (1999) e Bacchetto (2003).

Em relação aos livros didáticos, Rama (2005) mostrou em sua pesquisa que as tarefas relativas à divisibilidade estão centradas principalmente no sexto ano do Ensino Fundamental, não havendo uma devida retomada no Ensino Médio, que é a instituição precedente ao curso preparatório para o vestibular.

Resende (2007) discute o saber na instituição responsável pela formação de professores que atuam diretamente com os alunos do ensino básico, e mostrou que os conteúdos relativos aos números inteiros recebem nos cursos de licenciatura uma abordagem axiomática, numa linguagem predominantemente simbólico-formal, com ênfase nas demonstrações, dificultando a transposição deste saber entre a instituição acadêmica e a de ensino básico.

Para nos orientar quanto ao saber ensinado considerando o ensino básico no sexto ano em que normalmente é evidenciado, utilizamos a pesquisa de Gregorutti (2009) que, para tratar dos critérios de divisibilidade neste ano, enfatizou a discussão em torno da divisão exata e não exata e conceitos de divisibilidade e múltiplos.

O grupo pesquisado apresentou peculiaridades que os inseriu no contexto de Ações Afirmativas e, desta forma, localizamos duas pesquisas que relatam as primeiras atuações desse movimento voltado aos cursos preparatórios para o vestibular no Rio de Janeiro e em São Paulo, sendo este um movimento de luta pela igualdade de condições. Ressaltamos que a forma dos sujeitos desta pesquisa se relacionar com o estudo tem a ver com suas histórias familiares que, em sua maioria, não tiveram oportunidade de desenvolver o hábito de estudo no modelo utilizado pela instituição escolar.

Recorremos, ainda, às referências teóricas para contribuir com as análises dos problemas sobre divisibilidade, com base nas produções realizadas pelos alunos durante as sessões de estudo. Os modelos teóricos que julgamos mais pertinentes para atender às particularidades de nosso objeto de estudo foram os de Chevallard (1998), com contribuições de Bosch (1999) e Gascón (2003). Destacamos as noções da Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1998), como: Atividade Matemática, Praxeologia, Momentos de Estudo e Objetos ostensivos e não ostensivos. Propusemos uma discussão da atividade matemática como unidade central da análise do Programa Epistemológico em que a TAD se insere, sendo oportuna a abordagem dos níveis gerais do currículo de Matemática proposto por essa teoria.

A descrição e a análise da produção dos alunos diante das questões propostas com eixos do tema divisibilidade como: resto da divisão, múltiplos e divisores de um número compuseram o núcleo desse trabalho e possibilitam a identificação das práticas e argumentos utilizados pelos participantes desta pesquisa. Ressaltamos que para a resolução dos problemas propostos, procuramos situar as resoluções no contexto da instituição "curso preparatório para o vestibular".

De todos esses procedimentos, resultou um trabalho constituído por cinco capítulos: no primeiro, apresentamos a nossa trajetória pessoal, bem como a definição do objeto de estudo; no segundo trouxemos pesquisas que contribuíram para a definição do objeto; no terceiro apresentamos os elementos teóricos que fundamentaram a análise; no quarto, a organização da investigação e, no quinto e último capítulo apresentamos a descrição e a análise praxeológica das tarefas apresentadas aos estudantes.

Enfim, podemos acrescentar que, de alguma forma, a opção por esse objeto de estudo deverá propiciar mais reflexões aos envolvidos no ensino e aprendizagem da disciplina escolar matemática acerca da prática de estudantes sobre o tema divisibilidade e, em consequência, a sucessão e a formulação de estudos nesta área do conhecimento matemático, que é tão ampla e complexa.

# CAPÍTULO 1 – DA TRAJETÓRIA PESSOAL À DEFINIÇÃO DO OBJETO DE ESTUDO

## 1.1 TRAJETÓRIA PESSOAL

A opção pela escrita de um relato pessoal deu-se pelo fato de acreditarmos que as escolhas acadêmicas e profissionais são frutos do viver particular, individual. São expostos alguns fatos ocorridos ao longo desta jornada, os quais contribuíram de forma direta e indireta para a construção do objeto de pesquisa ora proposto.

## 1.2 A ESCOLHA DO CURSO SUPERIOR

A escolha pelo curso de Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), inicialmente, foi por incentivo dos professores do Ensino Médio que, diante das angústias em boa parte dos estudantes, tentavam ajudá-los com suas experiências pessoais. Alguns desses professores fizeram cursos técnicos, tinham estudado na UFMS e estavam voltando aos estudos para complementarem sua formação com o curso de Licenciatura.

Um mecanismo bastante utilizado naquela época, no Ensino Médio, para ajudar a decidir quanto à escolha de um curso superior, era o teste vocacional. Ao realizar alguns desses testes, o resultado sempre se dirigia para a área de exatas, instaurando-se assim, a aproximação com a Matemática.

Duas decisões já haviam sido tomadas no final do Ensino Médio: fazer um curso na área de exatas e estudar em uma universidade pública. Desse modo, filha caçula de quatro irmãos, seria a primeira a estudar em uma universidade pública, realizando também, um desejo dos pais. Com a aproximação das provas do vestibular, cursar Licenciatura foi o terceiro elemento agregado às decisões já tomadas, na difícil escolha do curso.

Havia, entretanto, uma questão importante a ser considerada: o aconselhamento materno. Apesar da experiência como normalista, minha mãe argumentava diante das dúvidas surgidas em relação à escolha de um curso superior, dizendo que outra escolha seria melhor do que Licenciatura, pois “os alunos respeitavam cada vez menos os professores e, como se não bastasse, a tendência das políticas públicas era cada vez mais forte na desvalorização à educação e, prova disso eram os salários baixos, a falta de incentivo à melhoria profissional dos professores e que tudo isso vinha fragilizando cada vez mais essa classe.” Sendo assim, ela nos aconselhava a optar por uma profissão que tivesse uma melhor perspectiva, tanto no âmbito social como no financeiro. Apesar de ouvir esse discurso repetidas vezes, o desejo de ser professora permanecia, ainda que, em alguns momentos, conturbado.

A dúvida na escolha da profissão ocorria, principalmente quando, nas aulas de História o assunto em pauta abarcava discussões sobre a dominação das massas. Era incompreensível como tão poucos dominavam muitos. Parecia tão simples: bastava a união dos muitos para a derrubada dos poucos. Então, um pensamento aflorava: como professor educador, havia a possibilidade de contato direto com um número razoável de pessoas, às quais poderia ser levada uma reflexão sobre as ideologias dominantes e dominadoras e que, além disso, a mobilização das massas propiciaria mudanças significativas no contexto social. Foi com essa ideia que, diante de uma ficha de inscrição a opção pela Licenciatura em Matemática foi assinalada e, consequentemente, definido o futuro profissional.

Após a escolha, o grande problema a ser enfrentado era a divulgação para a família, da decisão tomada, pois durante anos houve sacrifícios consideráveis para que o Curso de Engenharia fosse o escolhido. A fim de atenuar o ocorrido, foram citados exemplos de profissionais da área de Engenharia que complementaram sua qualificação com o Curso de Matemática e que ambos os cursos possuíam certa compatibilidade, o que favorecia uma possível troca, caso as expectativas não fossem aquelas do ideal profissional.

## 1.3 DURANTE O CURSO DE LICENCIATURA

O ingresso no curso de Licenciatura em Matemática da UFMS deu-se em 1990. Nesta época o Curso possuía uma estrutura curricular com ênfase em Matemática pura, não havendo uma cultura de questionamento da realidade da Educação Básica. Entre os acadêmicos havia certo “status” para quem tinha suas discussões e ações voltadas para a Matemática pura e certo preconceito com aqueles que discutiam temas voltados para a educação escolar.

Diante disso, varias indagações surgiram e, uma delas era: por que o curso não era de bacharelado, já que pouco se valorizava a Educação Matemática? Como membro do Centro Acadêmico do curso de Licenciatura em Matemática tentava propor esta pauta, mas a reação dos colegas não era favorável, alegando que, em outras universidades públicas a Educação Matemática não era discutida e recebia o título de Licenciatura. Ou seja, se nas demais universidades públicas essa discussão era omissa, por que teríamos que fazê-lo?

Essa situação começou a se modificar quando, em 1992, o Departamento de Matemática foi integrado por dois professores considerados "estranhos", já que apresentavam um discurso diferente daqueles vigentes, discutindo questões relacionadas à Educação, questionando a grade curricular do Curso de Matemática e apresentando propostas de mudanças. Apesar de serem minoria entre seus pares, insistiam em propor discussões voltadas para a Educação Matemática.

Como representante discente, eleita em assembléia pelo Centro Acadêmico, acompanhava as discussões que aconteciam no Departamento. Foi perceptível a manifestação de diferentes tendências nos cursos de Licenciaturas e que as escolhas das pessoas eram compatíveis com as visões de mundo, própria de cada um.

Michel Foucault (1999, p. 3 - 22) em seu livro *As palavras e as coisas*, tece uma profunda análise da obra *Las Meninas* de Diego Velázquez e cita um ponto oculto que faz parte dessa obra. Revela-nos que esse ponto invisível são as pessoas que observam a arte e evidencia que isso acontece porque o ponto está em uma dimensão diferente das outras figuras retratadas na obra. Afirma ainda que um artista, ao expor uma obra, leva a público seus sentimentos e as pessoas julgam, analisam, aprovam ou desaprovam a obra ali exposta. Esse julgamento é dialético, e quem emite qualquer valor de juízo a uma obra também se expõe, passando a ser parte dela.

Reportando-nos à reflexão contida na análise de Foucault, compreendeu-se bem que não havia "neutralidade" diante das tendências constituídas no ambiente da Matemática e que de alguma forma, as novas discussões contribuem para um novo olhar à Disciplina. Participando ativamente de sua construção ou estando fora dela, sempre olharemos para uma, ou para outra. Em geral, as escolhas que as pessoas fazem são condizentes com uma tendência, mesmo quando não explicitada. Desse modo, sucedeu-se a participação no grupo da Educação Matemática.

Esta não era uma realidade do curso de Licenciatura da UFMS, mas uma discussão que deveria permear os cursos de licenciatura de modo geral. Neste sentido, Silva (2007, p. 49) argumenta:

> Tradicionalmente, a formação de professores de Matemática tem se pautado pela dicotomia entre formação do bacharel e do licenciado, ficando sempre a licenciatura anexa ao bacharelado, o que não permite a construção de um curso com identidade própria, cujo objetivo é a formação de professores.

Inicialmente, questões presentes na Educação Matemática e na formação de professores passaram a ser discutidas por muitas pessoas, as quais consolidaram, mesmo na informalidade, um grupo de estudos. Posteriormente, acadêmicos, professores da Educação Básica e até outros professores do Departamento de Matemática começaram a militar no movimento da Educação Matemática.

## 1.4 A ATUAÇÃO COMO PROFESSORA NO ENSINO BÁSICO

Antes da conclusão do curso de graduação, surgiu a oportunidade de ingressar no mercado de trabalho. A primeira experiência foi como professora no regime temporário, ou seja, contratada por apenas seis meses podendo haver renovações, atuando no segundo grau[1], no período noturno, da Rede Estadual de Educação, por dois semestres. Várias dificuldades foram enfrentadas, pois não era fácil despertar o interesse dos alunos que já chegavam cansados à escola, após um dia inteiro de trabalho.

No ano seguinte a essa experiência ocorreu um convite de trabalho em uma escola comunitária. A atuação nessa escola foi muito importante na formação profissional, pois as condições de trabalho eram boas, havia grupos de estudo sistemáticos e a formação continuada era uma das bandeiras levantadas pela escola. Com isso, muitos cursos eram oferecidos aos professores, assim como o estabelecimento de condições propícias para participação.

Em 2000, com a aprovação em concurso da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul, um novo convite: trabalhar na Secretaria de Educação. Vislumbrou-se, então, a possível realização de inúmeros sonhos para a melhoria do sistema educacional; entretanto, muitas de nossas pretensões foram neutralizadas por situações que envolviam interesses pessoais ou de grupos, vaidades, recursos, burocracias, além de diversos fatores que implicavam em uma coordenação de políticas públicas. Apesar de tantas circunstâncias desaforáveis às nossas aspirações, tentou-se dentro das possibilidades, contribuir para o desenvolvimento da educação.

---

[1] Hoje chamado de Ensino Médio.

No ano de 2004, paralelo à atuação na Rede Estadual de Ensino, houve a colaboração como professora de Matemática, em duas organizações não governamentais, cujo propósito era oferecer curso preparatório para o vestibular a alunos de baixa renda, oriundos da escola pública. As duas organizações se originaram de um grupo que discutia o papel do negro na sociedade. Somente uma dessas organizações permanece em funcionamento e é nessa organização que esta pesquisa de mestrado é desenvolvida.

Colaborar com essas organizações, com base em um projeto de igualdade social, é de fundamental importância para mim, uma vez que a educação escolar é um dos meios de ascensão social e cultural, não somente individual, mas considerando toda uma classe economicamente desfavorecida.

## 1.5 A REALIZAÇÃO DE UM SONHO: MESTRADO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O mestrado em Educação Matemática era um sonho desde a graduação, mas esse desejo tornou-se distante da condição real, uma vez que era concursada na Rede Estadual de Ensino e meus dois filhos, ainda muito pequenos, dependiam inteiramente dos meus cuidados. Esses fatos dificultaram a continuidade dos estudos em outro estado da Federação.

Somente em 2007, com a abertura do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul é que o desejo de fazer Mestrado começava a se concretizar. Inicialmente, participando como aluna especial inscrita na disciplina História da Matemática, a qual era ministrada, simultaneamente, por dois doutores. Este fato, além de surpreendente, foi visto, de certa forma, como privilégio, uma vez que esta região conta com um número reduzido de professores doutores em Educação Matemática.

Na condição de aluna especial do Mestrado surgiram as primeiras ideias para uma futura intenção de pesquisa. Devido à atuação como educadora em um grupo com características específicas, a tendência foi a proposta de uma discussão no campo da Etnomatemática.

O projeto de pesquisa foi pensado a partir do relato dos alunos do curso preparatório para o vestibular, na instituição em que atuava, uma vez que estes atribuíam suas dificuldades em acompanhar as aulas de Matemática à falta de conhecimentos em conteúdos considerados como básicos.

Em 2008 ocorreu o ingresso, como aluna regular, no Programa de Mestrado em Educação Matemática sob a orientação do professor Dr. Chateaubriand Nunes Amâncio, com a proposta de desenvolver o projeto de pesquisa na organização não governamental em que atuava há quatro anos. Infelizmente um acidente fatal[2], após a aula inaugural da turma de 2008, interrompeu o projeto de desenvolver a pesquisa ao lado do professor Chateaubriand, que plantou muitas ideias e que pôde, em especial, participar na realização de um sonho: o mestrado em Educação Matemática. Esse realmente era um sonho compartilhado, conforme pode ser observado em uma parte de um *e-mail* recebido, após a aprovação na seleção do Mestrado:

> Desejo a Vc, e a gente, uma relação frutífera, um mestrado que possa valer a pena para nós dois, para nossos anseios de investigação e de crescimento intelectual.
>
> Boa sorte e Sucesso!!
> Chateau

Houve uma grande perda, impossível de se mensurar. Diante de tamanho desconforto, meio sem rumo, surgiu a convocação, pela professora Marilena Bittar, coordenadora do Mestrado, para participar de uma reunião em que se combinou que os professores José Luiz Magalhães de Freitas e Luis Carlos Pais seriam os orientadores do trabalho de pesquisa até que conseguissem reorganizar a rotina do Mestrado em questão.

## 1.6 A DEFINIÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA

A participação no grupo GPHEME (Grupo de Pesquisa em História da Educação Matemática), foi muito importante para a pesquisa ora apresentada. Esse grupo é coordenado pelo professor Luiz Carlos Pais, o qual orientou a pesquisa aproximadamente nos oito primeiros meses. Foi um período árduo na busca do objeto de pesquisa, pois ainda havia dúvidas quanto ao tema a ser pesquisado e aos referenciais teóricos que seriam os norteadores da pesquisa. Após reflexões e com o auxilio do orientador, foi possível chegar ao consenso de que a pesquisa seria direcionada aos

---

[2] Este acidente fatal envolveu mais três professores militantes da Educação Matemática: *Renato Gomes Nogueira, Ivonélia Crescêncio da Purificação, Ronaldo Marcos Martins.* Esta perda afetou não só o crescimento da área de Educação Matemática em nosso Estado, como também trouxe irreparável falta pessoal. Renato, além de amigo, era parte de minha família. Sua partida nos deixou profunda saudade, uma vez que tinha ativa participação na minha vida pessoal, profissional e acadêmica.

alunos frequentadores do curso preparatório para o vestibular, os quais já haviam demonstrado dificuldades na aprendizagem da Matemática.

Com base na proposta inicial de pesquisa, o tema matemático deveria estar relacionado com um conteúdo que fosse considerado básico na estrutura curricular sugerida nas séries finais do Ensino Fundamental. Sendo assim, pensamos no tema proporção para analisar as práticas e as justificativas usadas pelos alunos desse curso preparatório para o vestibular, durante as mais variadas situações de estudo. Ao efetuar-se o levantamento das pesquisas sobre este tema matemático, percebeu-se que havia um número ínfimo de estudos sobre múltiplos e divisores; a partir dessa ideia, organizou-se a pesquisa.

O tema matemático e o referencial teórico estavam definidos e por uma questão de organização interna do Curso de Mestrado em Educação Matemática e a relação número de orientandos e orientador, decidiu-se que a orientação dessa pesquisa passaria a ser de responsabilidade do professor José Luiz Magalhães de Freitas, uma vez que nos documentos oficiais do Programa, ele era o orientador de fato.

A partir desse momento, convergiu-se para o objeto de pesquisa, o qual se definiu por investigar as práticas de estudo.  Assim, o objetivo geral é analisar práticas e argumentos utilizados pelos estudantes de um curso preparatório para o vestibular concernente ao tema divisibilidade, em um contexto de ações afirmativas. Neste ambiente de pesquisa foram traçados os objetivos específicos orientadores:

- Investigar dispositivos didáticos utilizados pelos estudantes em relação ao tema divisibilidade;

- Identificar e analisar formas de estudo utilizadas pelo grupo a fim de se apropriar de saberes matemáticos;

- Investigar técnicas e argumentos utilizados pelos estudantes nas resoluções de problemas que envolvem divisibilidade.

Os objetivos específicos foram proeminentes objetivando caracterizar as práticas e saberes revelados pelos estudantes, frente a situações-problemas que envolvem a divisibilidade.

Considerando o contexto social relevante, a orientação foi baseada nos instrumentos preconizados em elementos da pesquisa qualitativa e em elementos pertencentes à praxeologia para a coleta de dados. Em relação à elucidação das questões propostas, foi determinante o apoio na Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1998).

Muitas mudanças ocorreram nessa caminhada. Algumas dúvidas foram elucidadas enquanto muitas outras surgiam, mostrando que a visão da educação como uma possibilidade de mudança social estimula a continuidade da luta, como indica a citação de Paulo Freire[3]:

> Verdades da Profissão de Professor: Ninguém nega o valor da educação e que um bom professor é imprescindível. Mas, ainda que desejem bons professores para seus filhos, poucos pais desejam que seus filhos sejam professores. Isso nos mostra o reconhecimento que o trabalho de educar é duro, difícil e necessário, mas que permitimos que esses profissionais continuem sendo desvalorizados. Apesar de mal remunerados, com baixo prestígio social e responsabilizados pelo fracasso da educação, grande parte resiste e continua apaixonada pelo seu trabalho. A data é um convite para que todos, pais, alunos, sociedade, repensemos nossos papéis e nossas atitudes, pois com elas demonstramos o compromisso com a educação que queremos. Aos professores, fica o convite para que não descuidem de sua missão de educar, nem desanimem diante dos desafios, nem deixem de educar as pessoas para serem "águias" e não apenas "galinhas". Pois se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela, tampouco, a sociedade muda.

Desta forma, observa-se que as pesquisas desenvolvidas nos cursos de pós-graduação não podem mudar a Educação, por si só; no entanto, elas podem contribuir, ainda que aconteçam num espaço delimitado. No próximo capítulo são apresentadas cinco dissertações e uma tese, que além de contribuírem para a realização do trabalho ora apresentado, também provocaram reflexões no contexto em que estão inseridas.

---

[3] Esta citação foi retirada de www.pensador.info/autor/ Paulo Freire

# CAPÍTULO 2 – CONTRIBUIÇÕES DE PESQUISAS PARA A DEFINIÇÃO DO OBJETO DE ESTUDO

Tomando por base as escolhas feitas, buscamos realizar leituras de pesquisas que fossem proeminentes, em diferentes aspectos, para o estudo aqui proposto e trabalhos que auxiliassem nas discussões no sentido de ampliar nossos horizontes e, que também, contribuíssem com o objeto de pesquisa. Consideramos três eixos para a escolha desses trabalhos: o tema matemático, o método utilizado para a investigação e as especificidades do grupo colaborador.

## 2.1 A ESCOLHA DO TEMA MATEMÁTICO: DIVISIBILIDADE

Sobre o tema matemático por nós proposto, encontramos três pesquisas que contribuíram diretamente no desenvolvimento de nossos trabalhos: a de Rama (2005), de Resende (2007) e de Gregorutti (2009), as quais trazem discussões sobre números inteiros e dentro deste tema abordam o assunto divisibilidade.

Em uma das pesquisas, o tema está sendo preparado para uma futura aplicação; nas duas outras o aluno tem o primeiro contato com este assunto matemático, segundo o currículo da escola básica. Já em nossa pesquisa este saber é retomado, de forma que o estudante seja convidado a reconstruir conceitos estudados anteriormente.

### 2.1.1 Abordagem dos números inteiros no Ensino Fundamental e Médio

Na dissertação de Rama (2005), o objetivo foi investigar a abordagem conferida aos números inteiros nos Ensinos Fundamental e Médio, destacando particularmente a forma como é enfocado o conceito da divisibilidade e, a fim de alcançar o objetivo proposto, foi realizada uma análise dos livros didáticos referendados por guias oficiais, elaborados por iniciativas do MEC (Ministério da Educação e Cultura).

O autor divide o trabalho em duas partes, sendo a primeira dedicada à análise de livros didáticos do Ensino Fundamental e a segunda à análise de livros didáticos do Ensino Médio. Na primeira parte, ele efetuou a análise de três coleções de livros de Matemática do Ensino Fundamental, na qual foram destacados os seguintes aspectos: as estratégias de solução adotadas para demonstrações referentes ao assunto divisibilidade, uso das situações-problema desafiadoras, articulações entre números inteiros e as demais áreas da Matemática, em particular álgebra e geometria, articulações entre conteúdos novos e já conhecidos, e as consequentes retomadas de temas. Ressaltamos que a expressão "estratégia de solução" será usada com o sentido das *maneiras diferentes de solucionar uma tarefa*[4]. Observamos que estas maneiras têm relação com as praxeologias vivenciadas em sala de aula e livros didáticos que estão presentes na instituição escolar.

Como resultado desta primeira parte da pesquisa, o autor fez algumas considerações acerca dos livros analisados. Ele observou que uma das coleções apresentou o que chamou de "boas provas informais", por estar adequada ao estágio de aprendizagem e também por fazer uso de métodos variados. Também considerou que esta explorava, de modo conveniente, o potencial de problemas envolvendo números inteiros; já em outra coleção, salientou que houve algumas demonstrações matemáticas apropriadas e outras inadequadas. A última coleção analisada apresentou os enunciados de diversas propriedades sem preocupação com justificativas.

Diante dessas observações, o pesquisador realizou uma crítica a duas coleções, que continham poucos problemas que exigiam maior sofisticação de raciocínio. Ele apontou ainda que, nas três coleções, o assunto divisibilidade esteve presente quase exclusivamente nos atuais 6º e 7º anos[5] do Ensino Fundamental e restrito ao conjunto dos números naturais; não houve a retomada no contexto dos números inteiros, após a introdução dos números negativos.

A segunda parte da pesquisa foi voltada ao Ensino Médio, realizando-se uma consulta às onze coleções recomendadas pelo Guia do Plano Nacional dos Livros Didáticos do Ensino Médio, direcionando a investigação, mais especificamente, à revisão dos números inteiros feita no início dos primeiros volumes dessas coleções. O autor verificou que, de modo geral, a retomada desse conteúdo é superficial. O conceito de divisibilidade entre inteiros, incluindo os negativos, pôde ser apreciado somente em alguns exercícios e foram propostos poucos problemas mais elaborados. Acrescentou ainda, algumas sugestões de atividades referentes aos números inteiros, em conexão com assuntos relacionados à geometria, números complexos, polinômios e análise combinatória.

Essa pesquisa diferencia-se da nossa, por tratar do assunto divisibilidade especificamente nos livros didáticos, enquanto abordamos esse tema diretamente na prática dos estudantes. Apesar de o livro didático ser um material impresso,

---

[4] Essas maneiras de fazer são técnicas de resolução, as quais apresentaremos com maior detalhes mais adiante, no capítulo referente à teoria.

[5] No ano em que a pesquisa foi realizada ainda eram utilizadas as nomenclaturas 5ª e 6ª série.

aparentemente estático, ele exerce um papel importante na atual cultura escolar, transmitindo o conhecimento Matemático de forma dinâmica, tanto do ponto de vista científico como didático.

### 2.1.2 Teoria dos números no Curso de Licenciatura em Matemática

Resende (2007), em sua tese, visa discutir a formação do professor na Licenciatura em Matemática, com atuação no Ensino Fundamental e Médio, tomando como objeto de estudo o saber matemático Teoria dos Números.

A autora apresenta a seguinte questão de pesquisa: Qual Teoria dos Números é, ou poderá ser concebida como um saber a ensinar na Licenciatura em Matemática, visando à prática docente na escola básica? Seu objetivo é compreender a Teoria dos Números enquanto saber a ensinar e buscar elementos para re-significá-las na Licenciatura em Matemática.

Para responder a questão de pesquisa, Resende (2007) faz a análise das propostas curriculares das disciplinas que tratam de Teoria dos Números, nos cursos de Licenciatura em Matemática de doze universidades brasileiras. Somado a isso, ela analisa dez livros didáticos, escolhidos dentre os mais citados nos programas das disciplinas pesquisadas e também realiza sete entrevistas semi-estruturadas com professores e pesquisadores em Teoria dos Números ou em Educação Matemática.

A autora chama a atenção para a importância da disciplina Teoria dos Números nos cursos de Licenciatura, uma vez que é um espaço propício para o desenvolvimento de ideias proeminentes relativas aos números naturais, estendendo, em alguns casos, aos números inteiros. E ainda permite a exploração de padrões e relações numéricas, o uso da recursão e da indução matemática sendo oportuno para o desenvolvimento das habilidades de conjecturar, generalizar, testar e validar as conjecturas.

Resende (2007) destaca que, historicamente, os cursos de Licenciatura estão atrelados aos de bacharelado, com ênfase no conteúdo específico da Matemática e nos seus modelos de produção acadêmica. Não perdendo de vista o importante papel deste saber científico nos cursos de Licenciatura, já que tratam da formação de professores de Matemática, ela destaca a necessidade de problematização dos conteúdos na formação inicial. Salienta ainda que neste universo de estudo realizado, a disciplina Teoria dos Números tratada na maioria das universidades não está direcionada à formação do professor da escola básica, pois a mesma apresenta uma abordagem dos conteúdos de forma axiomática, numa linguagem predominante simbólico-formal e com ênfase nas demonstrações. Tal fato lhe permitiu enquadrar esse ensino na tendência formalista clássica.

No entanto, ela vê possibilidades de re-significação, considerando que os números naturais e inteiros ocupam parte significativa nos currículos de Matemática na escola básica, e que, por sua vez, têm questões próprias que não podem ser desconsideradas na formação do professor. Reafirma que essa disciplina, nas licenciaturas, deve ser trabalhada de forma a considerar o saber científico, assim como os saberes escolares e as demandas apresentadas pelo ensino.

A autora considera a disciplina Teoria dos Números como sendo constituída por aspectos históricos, epistemológicos e procedimentais dos números inteiros, sendo apreciados os tópicos de divisibilidade, números primos e equações diofantinas lineares.

No caso específico de nosso trabalho, fizemos um recorte no tópico divisibilidade, não ignorando o contexto que este está inserido na atual organização de ensino, mas aprofundando-o num ponto específico dentre os assuntos que formam a disciplina Teoria dos Números. Para tanto, traçamos um paralelo entre o trabalho de Resende (2007) e nossa pesquisa, especificamente no que tange à formação de professores, educação algébrica e teoria dos números, destacando os seguintes pontos: práticas dos alunos, aritmética e divisibilidade.

Pontuamos que, apesar de a formação de professores não ser foco da nossa pesquisa, o trabalho de Resende (2007) foi oportuno, uma vez que é importante refletir como se dá a formação desses professores, ou seja, conhecer como acontece a elaboração do saber a ser ensinado, pois acreditamos que as práticas dos alunos estão relacionadas à forma que o saber é ensinado.

Em relação à educação algébrica, a pesquisa é desenvolvida no campo aritmético, pois são dois saberes que estão inter-relacionados, uma vez que é na aritmética que se inicia o estabelecimento de generalizações, tornando quase imperceptível a passagem entre a aritmética e a álgebra.

Quanto à divisibilidade, considerando de modo geral os cursos de Licenciatura ela integra a disciplina teoria dos números, desta forma pode nos proporcionar uma visão ampla do tema matemático que insere o estudo ora proposto.

### 2.1.3 Construção dos Critérios de Divisibilidade a partir da divisibilidade de números inteiros

Gregorutti (2009) analisou como seis alunos da 5ª série, atual sexto ano, do Ensino Fundamental mobilizam seus conhecimentos sobre divisibilidade de números inteiros, visando a construção de um novo olhar aos critérios de divisibilidade referente os números dois, três e cinco.

A expectativa de Gregorutti (2009) foi que os conhecimentos ali mobilizados servissem como um caminho para a compreensão da divisão, uma vez que, segundo ela, as pesquisas apontam que esta é uma das operações em que os alunos mais apresentam dificuldades. Apoiada na compreensão da relação entre álgebra e aritmética, a autora elaborou uma série de quatro situações de aprendizagem que envolvia os conceitos de múltiplos e divisores, divisão exata e não exata e os critérios de divisibilidade, cujos objetivos foram: sondar os conhecimentos prévios dos alunos e identificar a forma de construção de um novo conhecimento.

A autora realizou uma investigação sobre o significado do termo “critérios de divisibilidade” e utilizou em sua pesquisa o que considerou mais oportuno, “critérios de divisibilidade são instrumentos matemáticos que servem como uma norma para proceder à divisibilidade, ou então, uma “receita” para obter maior êxito no processo de divisão” (Ibid. p.15).

Gregorutti (2009) expôs três questões aos alunos a fim de abordar a questão que moveu sua investigação. A primeira consistiu em saber se os alunos eram capazes de perceber se havia um padrão nos resultados da divisão por dois, três e cinco. Ela pôde observar que os alunos perceberam tal padrão somente para os números dois e cinco, não conseguindo estabelecer critério algum para o número três. Já a segunda questão apresentou dois propósitos: verificar se os alunos associavam a divisão exata e a divisão não exata ao valor obtido no resto e perceber se eles, ao fazerem uso da calculadora, associavam as casas decimais do quociente ao resto diferente de zero, ou seja, que se tratava de uma divisão não exata. Para a primeira finalidade a autora concluiu que os alunos reconheceram a divisão exata e a divisão não exata, e as associaram ao resto. Em relação à segunda questão foi observado que o quociente sendo um número inteiro que se tratava de uma divisão exata e o resto era zero. No entanto, pelo fato de o número decimal estar no quociente, não associaram as casas decimais ao resto da divisão, apesar de reconhecerem que era uma divisão não exata.

Com a terceira questão, Gregorutti (2009) constatou que, durante a realização das questões anteriores, eles não perceberam que os múltiplos e os divisores de um número natural eram os possíveis números de uma divisão exata e que somente após a institucionalização desses conceitos, é que compreenderam tal relação.

A fim de completar a sua investigação, a autora apresentou uma questão essencial, cujo objetivo foi saber se os alunos após vivenciarem as situações de estudo constantes nas questões anteriores,  fossem capazes de construir de forma autônoma, os critérios de divisibilidade, para os números dois, três e cinco. Com isso, pôde constatar que os alunos conseguiram construir os critérios de divisibilidade para os números dois e cinco, mas não para o três.

Gregorutti (2009) também observou que no caso do número três, o critério de divisibilidade não é facilmente evidenciado, uma vez que este apresenta particularidades que não podem ser observadas facilmente na própria composição do número, como no caso do número dois e cinco.

Os resultados obtidos na investigação realizada por Gregorutti (2009) trouxeram-nos elementos importantes sobre a vivência de alunos do sexto ano, em relação ao resto da divisão de números inteiros e múltiplos e divisores, que serviram como subsídio para nosso trabalho concernente a dois tipos de tarefa proposto na pesquisa.

### 2.1.4 Considerações sobre as pesquisas

As pesquisas descritas, em conjunto com a que estamos desenvolvendo, têm o importante compromisso de contribuir para uma reflexão do atual currículo praticado no Ensino Básico.

Salientamos ainda que, apesar de as pesquisas de Rama (2005), Resende (2007), Gregorutti (2009) e a nossa, abordarem aspectos diferenciados como a formação de professores, livros didáticos, ensino e aprendizagem e práticas dos estudantes, destacamos que elas estão ligadas de maneira dinâmica, uma vez que as práticas dos professores e dos estudantes influenciam e são influenciadas pelo livro didático. Por isso, essas quatro pesquisas podem caminhar juntas em busca de um desvelar do ensino e da aprendizagem dos números inteiros no campo da Educação Matemática.

## 2.2 UTILIZAÇÃO DA PRAXEOLOGIA COMO MÉTODO.

Inicialmente, a praxeologia fazia parte somente do referencial teórico desta pesquisa, no entanto, identificamos elementos praxeológicos que também poderiam indicar o caminho que a pesquisa poderia seguir. Desse modo, optamos por utilizar a praxeologia como método desta pesquisa, entendendo o termo método conforme Abbagnano (2007, p.780) o define: “[...] um procedimento de investigação organizado, repetível e autocorrigível, que garanta a obtenção de resultados válidos.”

Ao revisarmos a literatura referente a este tema, observamos o trabalho de Oliveira (2010) que faz uso da Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1998) como referencial teórico-metodológico. Considerando que a praxeologia é um dos principais eixos dessa teoria, percebemos o uso de elementos praxeológicos como referencial metodológico no trabalho desenvolvido por Oliveira (2010).

### 2.2.1 A Teoria Antropológica do Didático como referencial teórico-metodológico

Oliveira (2010) analisou a relação entre os conhecimentos adquiridos por um professor na formação inicial e os conhecimentos por ele mobilizados em sua prática pedagógica acerca do tema função. Para tanto, usou como referencial metodológico elementos da Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1998), adotando para análise o mesmo referencial e também os pressupostos teóricos da Base de Conhecimentos para o Ensino (SHULMAN, 1986), os quais apontaram os conhecimentos a serem investigados na prática do professor.

Segundo Oliveira (2010), as duas teorias usadas para a análise da investigação são de origens díspares. A Base de Conhecimento para o Ensino tem origem nas Ciências da Educação e a Teoria Antropológica do Didático, na Didática da Matemática, no entanto, a complementaridade existente entre as duas abordagens teóricas possibilita a investigação tanto dos conhecimentos mobilizados pelo professor durante suas aulas, como da relação existente entre esses conhecimentos e a sua formação inicial.

A autora contou com a participação de um professor de Matemática em início de carreira, realizando observações em sua sala de aula. A Teoria Antropológica do Didático permitiu, por meio da análise das Organizações Matemáticas e Didáticas, modelar a atividade matemática desenvolvida pelo docente.

Os protocolos de sala de aula constituíram-se em uma importante fonte de dados utilizada pela autora, sendo que este material foi complementado com entrevistas semi-estruturadas e os planos de aula elaborados por este professor. A análise praxeológica do livro didático utilizado pelo professor se fez necessária, uma vez que este material serviu de base para o trabalho desenvolvido em sala de aula pelo docente.

A pesquisadora ressaltou que, para adquirir meios de inferirmos sobre a prática desenvolvida pelo professor, foi necessário perceber a relação entre os conhecimentos adquiridos na sua formação inicial sobre função e os mobilizados por ele durante suas aulas; também precisou identificar quais eram os conhecimentos mobilizados acerca desse conteúdo, assim como os recursos didáticos utilizados em sua aula.

Oliveira (2010) relatou que, ao buscar na literatura um aporte teórico-metodológico, pôde pautar-se nos critérios de análise oferecidos pela Teoria Antropológica do Didático - TAD, a qual veio ao encontro das necessidades metodológicas para a realização do estudo. Ela considerou ainda que esta teoria é propícia à investigação de conhecimentos da prática pedagógica do professor, que permite levar em consideração a particularidade do objeto de estudo, ou seja, considera a especificidade da Matemática. Além disso, ela pondera que os instrumentos propostos pela abordagem antropológica para modelar a atividade matemática podem ser considerados claramente como instrumentos operatórios para realizar uma análise das práticas matemáticas sociais.

A autora destacou que a pesquisa evidenciou a estreita relação existente entre os conhecimentos da formação inicial do professor e os mobilizados na sua prática pedagógica, apontando, portanto, o papel fundamental da Licenciatura no preparo do futuro professor, mostrando a importância dos diversos tipos de conhecimentos que devem estar presentes, de forma consistente, na formação inicial.

## 2.3 CONTRIBUIÇÕES DE PESQUISAS PARA A CARACTERIZAÇÃO DO GRUPO PARTICIPANTE

O curso preparatório para o vestibular em que realizamos a pesquisa, atende alunos de baixa renda e oriundos de escolas públicas, em um contexto de Ações Afirmativas, que vêem no Ensino Superior uma possibilidade de igualdade de oportunidades.

Por esse motivo buscamos pesquisas que tivessem o objetivo geral direcionado aos cursos preparatórios para o vestibular, também em um contexto de Ações

Afirmativas. Nosso objetivo não é fazer um levantamento histórico sobre tais cursos, mas conhecer a formação oferecida pelos mesmos, objetivando elucidar melhor o contexto em que os alunos participantes da pesquisa estão inseridos.

Sendo assim, localizamos duas pesquisas: Nascimento (1999) e Bacchetto (2003), as quais analisaram os primeiros cursos pré-vestibulares, com propostas de Ações Afirmativas, oferecidas em dois grandes centros urbanos brasileiros: Rio de Janeiro e São Paulo. Os dois trabalhos reportam à década de 1990, período em que houve significativas mudanças no quadro educacional, tais como a expansão do Ensino Médio, a implantação do Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM, as mudanças na forma de acesso ao Ensino Superior, a nova Lei de Diretrizes e Bases da Educação - LDB que estabelece as Diretrizes Curriculares Nacionais e os Parâmetros Curriculares Nacionais.

### 2.3.1 Cursos pré-vestibulares populares da Baixada Fluminense no Rio de Janeiro

Nascimento (1999), em sua dissertação, descreveu e analisou a história, as concepções e as práticas político-pedagógicas dos cursos pré-vestibulares populares oferecidos a um grupo específico da Baixada Fluminense do Rio de Janeiro, tendo como objetivo principal analisar as relações entre Movimentos Sociais, Cidadania e Educação. Além disso, tentou verificar a possibilidade desses cursos se caracterizarem como movimentos de construção de relações educacionais democráticas. Para tanto, o autor tomou como base a leitura de documentos que influenciaram na formação dos cursos pré-vestibulares no Rio de Janeiro e a observação de depoimentos das principais lideranças do Movimento Pré Vestibular para Negros e Carentes (PVNC).

A pesquisa apresentou a discussão sobre a educação no contexto sócio-político vigente no período de sua realização e identificou questões a serem aprofundadas sobre a relação entre movimentos sociais, educação e projeto político pedagógico. Além disso, Nascimento (1999) examinou as ideias de democracia e cidadania, incorporando os conceitos de autonomia, identidade, interculturalismos, descrevendo a história dos cursos pré-vestibulares populares voltados a negros e carentes.

O autor denominou de “populares” os grupos sociais que viviam em condições impostas de exploração, dominação, esmagamento de identidade e negação de direitos fundamentais, como direito ao trabalho, terra, moradia, remuneração digna, cuidados com a saúde, acesso à educação formal, reconhecimento cultural e participação política.

Ele lançou um destaque para a população negra que, entre outros problemas, enfrentava um bloqueio à participação na sociedade. Ressaltou ainda, certas reações, por parte dos grupos, às condições descritas anteriormente e que lhes eram impostas. Ele relata o surgimento de formas criativas de luta, participação e atitudes capazes de levar à construção de outros projetos, tais como a criação dos cursos pré-vestibulares populares, como sendo um movimento que propunha uma visão diferenciada junto a essas populações e esses cursos preparatórios como um espaço de lutas por disputa políticas, no propósito de mudanças sociais.

Nascimento (1999) finalizou a pesquisa refletindo sobre as análises ocorridas no decorrer do trabalho, pontuando que os cursos pré-vestibulares populares, em particular, os que tinham foco para a população negra e carente, podiam ser entendidos como ações coletivas concretas de resistência política e cultural. Considerou ainda, que esses cursos tinham a real possibilidade de se constituírem em um movimento social expressivo e darem importantes contribuições ao desafio de combate à exclusão social, à discriminação e ao racismo e que tais ações poderiam ser concretizadas por meio da produção de questões práticas e projetos sobre novas bases para a construção de uma educação democrática, fundada na ideia de uma cidadania ativa na igualdade, na solidariedade, no respeito aos seres humanos e na valorização étnica cultural da sociedade brasileira, por meio de uma visão sociocultural, pedagógica e curricular intercultural.

### 2.3.2 Cursos pré-vestibulares alternativos no município de São Paulo

Bacchetto (2003) abordou em seu estudo, os cursos pré-vestibulares alternativos existentes no município de São Paulo, na década de 1990. Segundo ele, essas organizações surgiram quando havia um grande salto numérico de matriculas no Ensino Médio, incorporando uma camada social com baixo valor aquisitivo. Sendo assim, tais organizações passaram a ser uma opção para o ingresso ao Ensino Superior, por ser de custo acessível à população oriunda da escola pública.

O autor pontuou que essas organizações representavam a luta por políticas de Ações Afirmativas, tendo como objetivo garantir a igualdade de acesso, em especial, aos alunos da rede pública e estudantes afro-descendentes. Apresentou também uma discussão sobre as mudanças advindas da Constituição Federal de 1988 e da nova LDB, que proporcionaram maior liberdade às universidades para administrar o oferecimento de vagas e a substituição do vestibular por processos seletivos diversos. Uma das consequências dessas mudanças foi um maior estímulo à expansão do ensino de nível médio que, entre 1988 e 2001, teve um crescimento na média de 240 %. Também tratou da influência que o ENEM e os PCN exerceram sobre os exames vestibulares na década de 1990.

Além disso, foram abordadas outras questões, como: a gratuidade do Ensino Superior, o perfil dos candidatos ingressantes nas universidades públicas, a igualdade de acesso e reserva de vagas e a relação custo benefício do diploma de um curso superior.

Foi apresentado ainda, um mapeamento dos cursos pré-vestibulares alternativos no município de São Paulo, no período destacado. Esse levantamento buscou mostrar a motivação para a abertura dos cursos, os critérios de seleção dos alunos, a localização física dos cursos, as aulas ou espaços pedagógicos diferenciados[6], a origem do projeto político pedagógico, o perfil dos professores e coordenadores, os horários de funcionamento, a demanda e a expansão, as taxas de inscrição e os valores das mensalidades e o índice de aprovação.

Bacchetto (2003) colocou em pauta a democratização do acesso sendo uma questão que vai além dos cursos preparatórios e, para tanto, reuniu diversas manifestações sociais que objetivaram em um maior acesso aos bancos universitários e suas possíveis consequências. Ele destacou algumas reivindicações dos cursos alternativos, os quais objetivavam provocar mudanças nos vestibulares, tais como: isenção da taxa de inscrição, reserva de vagas para alunos da rede pública, ações afirmativas para garantir o acesso da população negra, a gratuidade do ENEM e o ingresso como aluno especial nas universidades públicas. Essas reivindicações eram realizadas em forma de passeatas, reuniões e ações judiciais envolvendo a Universidade de São Paulo - USP, Fundação Universitária para o Vestibular - FUVEST e, até mesmo, o Ministério da Educação - MEC.

O autor ressaltou que, em resposta aos movimentos de acesso ao Ensino Superior, algumas mudanças ocorreram: isenção de taxas em alguns exames seletivos e o fortalecimento dos debates sobre a desigualdade de acesso às universidades públicas. Dentre as conquistas advindas das reivindicações dos movimentos em prol da igualdade de acesso, Bacchetto (2003) destacou as alterações provocadas no vestibular da

[6] Estes espaços pedagógicos diferenciados são momentos para discutir cidadania, cultura, direitos humanos, consciência negra, enfim, conteúdos diferenciados dos tradicionais ministrados nos cursos preparatórios.

universidade que concentra o maior número de vagas públicas do município de São Paulo, a USP.

Finalizou sua pesquisa, constatando que os cursos pré-vestibulares alternativos, existentes no município de São Paulo são baseados no principio da igualdade, atuam como um agente na luta pelo Ensino Superior para a população de baixa renda.

### 2.3.3 Considerações sobre as pesquisas

As duas pesquisas expostas reconhecem nos cursos preparatórios para o vestibular, voltados à população historicamente discriminada, um movimento em prol da igualdade de oportunidades. O foco das pesquisas é a implantação dos cursos pré-vestibulares voltados às Ações Afirmativas, abordando as tendências, motivos de sua implantação, posições políticas, e outros.

Segundo Moehlecke (2002), a expressão Ações Afirmativas surge nos anos 60, nos Estados Unidos, em meio a reivindicações democráticas internas, expressas principalmente no movimento pelos direitos civis, tendo como bandeira a extensão de igualdade de oportunidade a todos. No Brasil um fato que poderia ser caracterizado como o primeiro registro de Ação Afirmativa ocorreu em 1968, quando surgiu a proposta da criação de uma lei que obrigaria as empresas privadas a manter uma percentagem mínima de empregados de cor[7] (20%, 15% ou 10%, de acordo com o ramo de atividade e a demanda). Esta proposta de lei tinha o apoio de técnicos do Ministério do Trabalho e do Tribunal Superior do Trabalho. Entretanto, esta lei não chegou a ser elaborada, mas tal movimento teve sua importância como marco para o início das Ações Afirmativas no Brasil.

O conceito de Ações Afirmativas é muito mais recente do que as ações que as caracterizam. Nascimento (2007) traz a seguinte reflexão relativa a esta expressão.

> De uma forma mais geral, por ações afirmativas podemos entender as dinâmicas, práticas, meios e instrumentos que têm como *meta* o reconhecimento sócio-cultural, a promoção da igualdade (de oportunidades, de tratamento e de condições objetivas de participação na sociedade) e, portanto, a universalização (concreta) de direitos civis, políticos e sociais em uma dada sociedade.

Em 1992 e 1993, em meio aos movimentos negros, surgem os cursos preparatórios para o vestibular, voltados para estudantes negros e ou carentes, iniciando-se um processo de articulação e divulgação, visando o fortalecimento de políticas de

[7] Há várias discussões com relação à expressão "cor", porém fizemos a opção de manter a expressão usada no texto original de Moehlecke (2002).

acesso e permanência para estudantes negros e de baixa renda ao Ensino Superior público.

O trabalho que ora desenvolvemos tem como elementos de pesquisa as práticas e os saberes dos estudantes inseridos no contexto destes cursos preparatórios para o vestibular, em relação ao tema específico divisibilidade.

As pesquisas de Nascimento (1999) e Bacchetto (2003) nos trouxeram subsídios para uma maior compreensão do contexto social, no qual estão inseridos os alunos que participaram da investigação, ressaltando elementos históricos sobre as primeiras iniciativas de implantação de cursos pré-vestibulares, com ênfase em Ações Afirmativas em dois grandes centros urbanos brasileiros.

Podemos dizer que, tanto as pesquisas aqui apresentadas, como a nossa, têm como "pano de fundo" a proposta de mudanças sociais, oportunizando aos economicamente desfavorecidos, maior chance de ingresso em um curso superior de qualidade e ainda colaborar na luta pela democratização da educação.

## 2.4 ASPECTOS RELEVANTES CONSIDERADOS

Para termos uma visão abrangente das práticas e dos saberes do grupo colaborador em relação aos conhecimentos matemáticos, consideramos também o contexto social em que os alunos estão inseridos.

Acreditamos que as maneiras de se relacionarem com o estudo, estão estreitamente ligadas às relações familiares, sociais e culturais. Encontramos respaldo nessa forma de conceber o estudo, no que Nogueira e Nogueira (2006, p. 60), escrevem sobre a teoria desenvolvida por Bourdieu na Educação, em que relaciona o capital cultural ao desempenho escolar:

> [...] a posse de capital cultural favoreceria o desempenho escolar na medida em que facilitaria a aprendizagem dos conteúdos e dos códigos (intelectuais, linguísticos, disciplinares) que a escola veicula e sanciona. Os esquemas mentais (as maneiras de pensar o mundo), a relação com o saber, as referências culturais, os conhecimentos considerados legítimos (a "cultura culta" ou a "alta cultura") e o domínio maior ou menor da língua culta, trazidos de casa por certas crianças, facilitariam o aprendizado escolar tendo em vista que funcionariam como elementos de preparação e de rentabilização da ação pedagógica, possibilitando o desencadeamento de relação íntima entre o mundo familiar e a cultura escolar. A educação escolar, no caso das crianças oriundas de meios culturalmente favorecidos, seria uma espécie de continuação da educação familiar, enquanto para as outras crianças significaria algo estranho, distante, ou mesmo, ameaçador.

Neste sentido, entendemos que a Educação pode ser um fator importante para que haja mudança social, uma vez que por meio do estudo, o indivíduo transforma sua visão de mundo, podendo provocar mudanças nas gerações posteriores. Assim, o conhecimento matemático também pode ser um potencial para mudanças, uma vez que recebe o estatuto de conhecimento básico para qualquer área do ensino escolar.

No capítulo que segue, abordamos, em linhas gerais, alguns eixos da Teoria Antropológica do Didático, que fundamentou a análise das práticas de estudo dos alunos que participaram deste trabalho sobre o tema divisibilidade.

# CAPÍTULO 3 - REFERENCIAL TEÓRICO

## 3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Tendo em vista o objetivo principal desta pesquisa ser a análise das práticas e argumentos utilizados pelos estudantes de um curso preparatório para o vestibular acerca do tema divisibilidade, em um contexto de ações afirmativas, tomaram-se por base alguns elementos da Teoria Antropológica do Didático - TAD, (CHEVALLARD, 1998), que fundamenta os processos de estudo desenvolvidos nos grupos.

A Teoria Antropológica do Didático surgiu em sintonia com a Transposição Didática, também proposta pelo mesmo autor e foi exposta pela primeira vez para um pequeno grupo, em julho 1980, na primeira escola de verão da Didática da Matemática em *Chamrousse (Isère)*. Em 1985 houve a publicação da primeira edição do livro Transposição Didática, nas edições *Pensée Sauvage (Grenoble)*. Em 1991, no mesmo editor, foi publicada uma segunda edição dessa obra, na qual há um posfácio contendo respostas a algumas críticas à teoria. Esta teoria, em linhas gerais, trata das transformações e adaptações que o saber sofre, desde a sua produção até ser efetivamente aprendido. Conforme esquema apresentado em Bosch e Gascón (2004, p. 14):

| | | | |
|---|---|---|---|
| OM sabia → | OM a ensinar → | OM ensinada → | OM “aprendido” |
| $I_1$ | $I_2$ | $I_3$ | $I_4$ |

Neste esquema, $I_1$ é a instituição *produtora* do saber matemático; $I_2$ a *noosfera*; $I_3$ a instituição *escolar;* e $I_4$ a *comunidade de estudo* protagonista do processo didático. Na TAD o processo de estudo se concebe como um processo de reconstrução de Organizações Matemática, em que é utilizada a abreviatura OM.

Na instituição produtora do saber ocorre o saber sábio que é restrito ao círculo dos especialistas. Para que este saber seja ‘ensinado’ é necessário que sofra transformações, sendo este o objeto de estudo da *Transposição Didática*.

O saber a ensinar é caracterizado em um contexto no qual se pensa o funcionamento didático, denominado noosfera. Este é um meio conflituoso em que estão envolvidos professores, especialistas da disciplina, representantes de órgãos políticos, associações de professores, pais de alunos e outras pessoas do sistema de ensino. Apesar de a noosfera ser um meio heterogêneo, este é limitado e os agentes envolvidos não têm o mesmo peso decisório. Os conflitos ocorridos na noosfera são essenciais no processo de Transposição, uma vez que expressa relações entre o sistema didático e seu exterior conforme observa Chevallard (1991, p. 23):

> Na noosfera se opera a interação entre o sistema e o ambiente social [...]; aí se encontram todos aqueles que, nas linhas de frente do funcionamento didático, se afrontam com os problemas que nascem do encontro com a sociedade e suas exigências; aí se desenvolvem os conflitos, aí se conduzem as negociações, aí amadurecem as soluções. Toda uma atividade ordinária aí se desenvolve, mesmo fora dos períodos de crise (onde ela se acentua), sob forma de doutrinas propostas, defendidas e discutidas, de produção e de debates de idéias – sobre o que pode ser mudado e sobre o que é conveniente fazer.

O “saber aprendido” é composto por aqueles elementos praxeológicos que, ao final do processo didático, integram o meio matemático de uma comunidade de estudo. A investigação ora realizada focará, principalmente, as características desse saber.

O debate entre a noção de transposição e a TAD passa pelo início da noção de relação de uma pessoa com um objeto, de uma instituição com este objeto, ou mais especificamente, dos sujeitos da instituição em posição a este objeto. Nesse contexto, entende-se por objeto as “noções” ou “conceitos” matemáticos e esses objetos vão ter importância ou não, dependendo da relação que uma instituição cultiva com os mesmos. Por instituição pode-se entender um dispositivo social integrado no espaço social, que permite e, de certa forma, impõe aos seus assujeitados maneiras próprias de pensar.

A Teoria Antropológica do Didático está inserida no Programa Epistemológico que tem sua origem nos trabalhos de Guy Brousseau, publicados no final da década de 1970. Essa considera como objeto primário de investigação da didática a Atividade Matemática, que ocorre em diferentes instituições e posiciona o conteúdo matemático a partir do ponto de vista da Didática, definindo a Didática da Matemática como a ciência que estuda os processos didáticos, no caso específico, os processos de estudo de questões matemáticas.

Nessa Teoria o ato de estudar recebe um especial destaque para que ocorra o ensino e a aprendizagem da Matemática e ainda lhe é atribuído o significado de processo didático como um processo de estudo. Ela considera que todas as vezes que uma pessoa é levada a estudar Matemática ou cada vez que alguém ajuda outro a estudar Matemática ocorre um processo de estudo. Não perdendo de vista que os processos de estudos não estão restritos à sala de aula. Estes devem continuar vivos em diferentes lugares e situações, havendo uma relação dinâmica entre o ensino e a aprendizagem, em que alunos, professores e meio social se influenciam, expandindo o sistema de ensino e o conceito de ensino e de aprendizagem. Podemos verificar essa ênfase no estudo da obra *Estudar Matemáticas: elo perdido entre o ensino e a aprendizagem* (CHEVALLARD, BOSCH, GASCÓN, 2001), cujo título atribui um estatuto especial para o estudo.

A Teoria Antropológica do Didático é bastante abrangente, todavia fizemos um cuidadoso recorte no qual procuramos abordar tópicos que nos auxiliassem na concepção e na condução dos dados coletados durante a intervenção realizada. Sendo assim, destacamos os seguintes eixos da TAD: Praxeologia, Momentos de Estudo, Atividade de Estudo e Pesquisa, Objetos ostensivos e não ostensivos. Primeiramente, em linhas gerais, a ideia de atividade matemática e, na medida do possível, trouxemos pequenos fragmentos da pesquisa com o propósito de aproximar a teoria das práticas vivenciadas no grupo pesquisado.

## 3.2 ATIVIDADE MATEMÁTICA

A atividade matemática é toda ação humana que envolve os conhecimentos matemáticos. Ela passa a existir a partir de algumas questões levantadas socialmente e, assim, surge a necessidade de dar respostas a essas questões do contexto social em que é sugerido um modelo matemático para a realidade que se pretende estudar. É importante observar que a criação deste modelo do saber matemático está relacionada ao objeto e em teores estabelecidos entre estes objetos. Vale ressaltar que as questões, quando levantadas socialmente, nem sempre são matemáticas e, ao se criar um modelo matemático que as resolva, passam a ser matematizadas. Por exemplo, poderíamos ter um grupo de crianças querendo repartir, igualmente, uma quantidade de balas entre elas; inicialmente esta não seria uma questão necessariamente matemática, mas pode ser resolvida por um modelo matemático.

Dizer qual é a fronteira que separa uma atividade matemática de uma não matemática, não é trivial. A TAD indica que podem ser observados alguns gestos que indicam quando ocorre a atividade matemática, nos quais os modelos matemáticos podem ser destacados em três aspectos, a saber: utilizar matemática já conhecida, aprender (e ensinar) matemática e criar uma matemática nova.

Utilizar matemática conhecida é considerado o primeiro grande tipo de atividade matemática e, nesse caso, observa-se a utilização de um conhecimento adquirido anteriormente para resolver alguma situação. Citamos como um exemplo o caso em que solicitamos aos alunos colaboradores de nossa pesquisa verificar se *40 é divisível por 5*. Uma estratégia de solução para essa tarefa, utilizada por alguns estudantes, foi recorrer ao algoritmo da divisão, que no caso, era um conhecimento que eles já possuíam. Apresentamos abaixo o extrato de uma dessas resoluções.

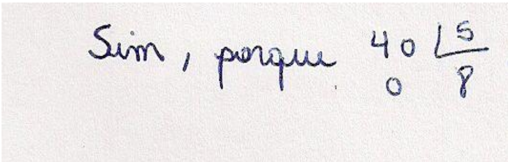
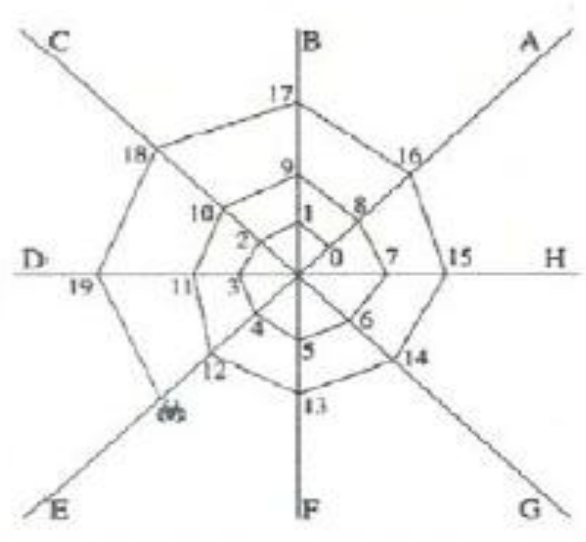



Figura 1 - Algoritmo da divisão

Um segundo aspecto que pode caracterizar uma atividade Matemática diz respeito ao aprender e ensinar matemática. Essas são atividades que ocorrem com quem se depara com uma situação nova e não consegue resolvê-la com os conhecimentos que já possui, havendo, portanto, a necessidade de buscar novos conhecimentos. Essa busca pode acontecer de diferentes maneiras como, por exemplo, a procura por pessoas detentoras daquele saber, que pode ser um professor de matemática ou alguma literatura específica. Enfim, pode-se interpretar essa procura como uma busca em saber se já existe um modelo matemático que resolva aquela situação.

Podemos nesse caso, pensar em uma situação ocorrida durante a investigação, ao propormos para os estudantes que participaram da pesquisa o problema da teia de aranha, ilustrado a seguir. Eles não tinham, naquele momento, conhecimentos suficientes para resolver o problema, então houve a necessidade, durante o estudo, de buscar as ferramentas necessárias para que o problema fosse resolvido. Para tanto, um longo caminho foi percorrido, outros problemas do mesmo tipo foram estudados. Alguns resultados relacionados ao resto da divisão construídos no desenvolver do estudo contribuíram para que uma solução fosse reconhecida como satisfatória para a instituição “curso preparatório para o vestibular”.

1. A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho[8].




a. Sobre qual fio de apoio estará o número 15?
b. Sobre qual fio de apoio estará o número 30?
c. É possível o número 80 estar sobre o fio de apoio C? Por quê?
d. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?
e. Escreva uma regra para descobrir qual é o fio de apoio de qualquer número.

Em relação à criação de uma Matemática nova, ao terceiro aspecto apresentado, poderíamos, em princípio, pensar nessa situação somente como sendo uma ação restrita aos matemáticos que, diante de algumas questões, reformulam e dão novos significados aos conhecimentos já existentes. Porém, em um campo mais restrito, um contexto de exploração matemática em sala de aula, o estudante pode, diante de uma situação nova, construir uma maneira de resolver uma questão que seja nova para ele; consideramos que aconteceu o ato da criação de uma Matemática nova, mesmo que essa seja nova somente para aquele aluno.

Nesse sentido, não importa se um determinado conhecimento já é versado universalmente, como por exemplo, provar que a soma de dois números pares é um número par. Acreditamos que, a partir do momento em que o estudante faz esta descoberta, ele está também criando uma Matemática nova, embora seja nova somente para ele.

No caso do grupo de estudo no qual realizamos a pesquisa, houve várias situações em que os estudantes criaram uma Matemática nova para eles, a partir de conhecimentos que já possuíam. No caso da ilustração que apresentamos a seguir,

[8] Esta tarefa foi modificada a partir de um problema pertencente ao banco de questões da OBMEP - Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

temos a resolução proposta pelos estudantes ao solicitarmos a prova de que a soma de dois números ímpares quaisquer resulta em um número par e também que a soma de um número par com um número ímpar dá um número ímpar. Este resultado apresentado de forma generalizada ainda não havia sido discutido por uma parcela significativa dos participantes da pesquisa. Apesar de a soma dos números inteiros estarem presente em todo o percurso do Ensino Fundamental, nem sempre a reflexão sobre esse conhecimento ocorre nessa fase do ensino escolar.

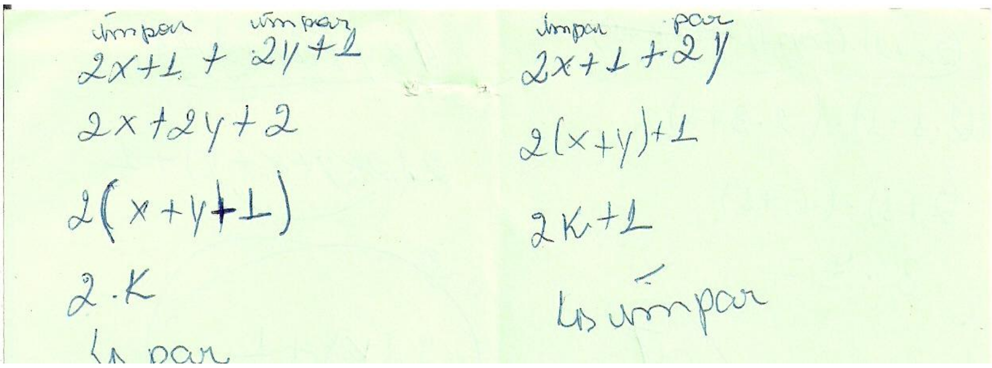



Figura 2 – Verificação de paridade

Destacamos que o exemplo que expusemos é pontual em relação ao ato de criação de uma matemática dita nova para um grupo de estudantes. O exemplo foi resultado de um intenso período de dedicação dos alunos ao estudo, envolvendo várias praxeologias que estão melhores estruturadas no capítulo da análise.

Considerando os três aspectos relativos à atividade matemática mencionados, o fazer Matemático pode ser visto como um trabalho de modelagem, transformando um sistema não matemático em um sistema previamente matematizado, no qual se utiliza modelos adequados para resolver problemas matemáticos.

Evidenciamos que, toda atividade e, em particular a atividade matemática, é composta por duas partes que estão intrinsecamente ligadas: a prática e a teoria. De um lado estão as tarefas e as técnicas que representam as "práticas" do grego *práxis*. De outro lado, estão as tecnologias (discurso racional da técnica) e as teorias que, unidas, indicam a "razão", do grego *logos*, que permitem justificar e entender os procedimentos práticos por meio de um discurso fundamentado, o qual pode ser implícito ou explícito. Ressaltamos que, segundo o proposto na TAD, não há *logos* sem prática e vice-versa.

## 3.3 PRAXEOLOGIA

A palavra praxeologia origina-se da junção dos termos *práxis* e *logos*, representando, desse modo, a união das tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. De acordo com a Teoria Antropológica do Didático - TAD (CHEVALLARD, 1998) toda tarefa que pode ser resolvida tem, pelo menos, uma técnica e um discurso fundamentado que permite entendê-la, chamados de tecnologia e esta, por sua vez, possui respaldo em uma determinada teoria; todos esses elementos constituem uma organização praxeológica.

A organização praxeológica vem em resposta a uma questão ou conjunto de questões, geradas no contexto matemático. Essas organizações são dinâmicas, pois se estruturaram e se reestruturaram conforme a necessidade, podendo formar diferentes organizações praxeologicas para uma mesma questão. A organização de cada conjunto estruturado, pela qual permite formar uma praxeologia, envolve tanto o meio matemático como didático; desta forma, a organização praxeológica envolve a união da Organização Didática e Organização Matemática, as quais estão relacionadas de forma dialética.

A Organização Didática está vinculada à abordagem de conteúdos matemáticos e se refere à maneira de fazer e ainda às escolhas, quanto à forma de apresentação durante o processo de desenvolvimento das atividades matemáticas. Esta ideia será aprofundada na apresentação do eixo Momento de Estudos.

A Organização Matemática é composta por quatro elementos que estão divididos em dois blocos: prático/técnico e tecnológico/teórico. Fazem parte do primeiro bloco o tipo de tarefa (T) e a técnica ($\tau$), [T, $\tau$], e do segundo bloco a tecnologia ($\Theta$) e a teoria ($\Theta$), [$\Theta$, $\Theta$]. A união desses dois blocos pode ser assim representada: **[T, $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{\Theta}$, $\boldsymbol{\Theta}$],** a qual nos permite encontrar duas noções interligadas: tarefa e tipos de tarefa; tecnologia e teoria. Cada tipo de tarefa reúne um conjunto de tarefas e existe pelo menos uma técnica que permite resolver as tarefas de um mesmo tipo. A tecnologia e a teoria fundamentam e justificam a técnica utilizada.

Uma organização praxeológica é formada por um complexo de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas em torno de um tipo de tarefa, que é denominada ‘praxeologia pontual’, sendo que a união de várias praxeologias pontuais forma uma praxeologia local. Há ainda as praxeologias regionais e globais, que não são pertinentes ao contexto do nosso trabalho.

No caso desta pesquisa, podemos falar de organização pontual em torno da resolução de cada tipo de tarefa que propusemos. A resolução de todas as tarefas deste tipo forma então a organização local sobre o tema divisibilidade, conforme descrito por Gascón (2003, p. 16, tradução nossa):

> As organizações (ou praxeologias) matemáticas mais elementares se chamam *pontuais* e estão constituídas em torno do que em uma determinada instituição é considerado como um único tipo de tarefa. Quando uma OM se obtém por integração de um certo conjunto de OM *pontuais*, tais que todas elas aceitam um mesmo discurso tecnológico $\theta$, diremos que temos o mesmo uma OM *local* caracterizada por essa tecnologia $\theta$ e a designamos mediante OM = $\{T/\tau/\ \theta/\Theta\}$. Além das OM locais, na TAD se fala também de OM "regionais" e "globais".

Para melhor compreensão dos elementos praxeológicos, apresento separados por itens e, na medida do possível, estabeleço relações com dados da pesquisa.

### 3.3.1 Tipos de tarefa

Os tipos de tarefas (T) surgem das questões que foram matematizadas em uma dada instituição. Um tipo de tarefa agrega diferentes tarefas (*t*), tendo estas em comum, pelo menos uma maneira capaz de solucionar todos os problemas daquele tipo e que também pode ser justificada por uma teoria Matemática que respalda esta maneira de fazer.

Em nossa pesquisa propusemos três tipos de tarefas, a saber, $T_1$: Determinar o resto da divisão entre dois números inteiros; $T_2$: Encontrar os Múltiplos e/ou Divisores e $T_3$: Determinar a quantidade de divisores de um número. Como exemplo, temos a tarefa $t_a$: *Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores*?, que pertence ao tipo de tarefa $T_3$, apresentado acima. Vemos assim que uma tarefa (t) é uma atividade específica, de caráter particular. Destacamos que esses tipos de tarefas foram organizados a partir de tarefas que frequentemente ocorrem na instituição "curso preparatório para o vestibular"

### 3.3.2 Técnicas

Um tipo de tarefa *(T),* apresenta uma maneira de fazer que é chamada de técnica ($\tau$). Essa maneira de fazer não é única, podendo ser mudada de uma situação para outra e até mesmo, a partir dela, surgirem outras maneiras mais abrangentes de fazê-lo.

Algumas técnicas podem ser limitadas, o que significa que elas podem fracassar diante de algumas tarefas, ou então, serem pouco eficazes dependendo da instituição na qual esta tarefa deve ser solucionada. Nesse caso, há a necessidade de se buscar uma técnica mais apropriada, de acordo com a instituição, para solucionar determinado tipo de tarefa.

Retomemos a tarefa $t_a$ apresentada anteriormente: *Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores*? Uma técnica que resolve essa tarefa consiste em fatorar os números 999, 998, 997 e assim por diante, menores que 1000; encontrar a quantidade de divisores de cada um deles, até encontrar um número que possua 10 divisores. Mas a questão é: esta seria uma técnica eficiente na instituição "curso preparatório para o vestibular"?

No caso particular do grupo participante desta pesquisa, ao desenvolverem a tarefa perceberam que necessitavam de uma técnica em que o tempo de resolução fosse o menor possível; sendo assim, trabalharam a fim de encontrar uma técnica mais "eficiente". Após um árduo trabalho, a técnica pela qual optaram foi a utilização adequada do teorema que fornece a quantidade de divisores de um número a partir de sua decomposição em fatores primos, obedecendo de modo geral os seguintes passos[9]:

1. Para se averiguar as características de um número que possui dez divisores, foi necessário:

    1.1 Verificar quais os possíveis produtos que resultam o número dez;

    (No caso encontraram 5 e 2; 10 e 1)

    1.2 Subtrair "um" dos números encontrados;

    (Ou seja: 5-1 e 2-1; 10-1 e 1-1)

2. Verificar a base, obedecendo aos seguintes passos:

    2.1 Encontrar números primos elevados a 4 e 1 ou 9 e 0, cujo produto seja o maior inteiro menor que 1000.

É possível verificar que, uma técnica pode superar a outra, dependendo da tarefa e da instituição em que o tipo de tarefa foi proposto, considerando também que uma instituição avalia e valida a explicação desta maneira de fazer.

[9] O detalhamento desses passos é feito no capítulo da análise.

### 3.3.3 Tecnologias

Toda técnica apresenta um discurso racional chamado de tecnologia que é aceito por uma dada instituição. O objetivo desse discurso é justificar, de maneira racional, o jeito de fazer, ou seja, a técnica ($\tau$), garantindo a sua eficiência na tarefa proposta nessa instituição.

Uma tecnologia não é absoluta, podendo ser válida em uma instituição e questionável em outra. Entretanto, em uma instituição, independente do tipo de tarefa ($T$), a técnica ($\tau$) relativa a $T$ sempre terá pelo menos um embrião ou vestígios de tecnologias ($\Theta$).

No caso da tarefa $t_a$: *Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores*?, esta pode ser resolvida pela técnica que um dos grupos participantes desta pesquisa apresentou, conforme ilustração a seguir:

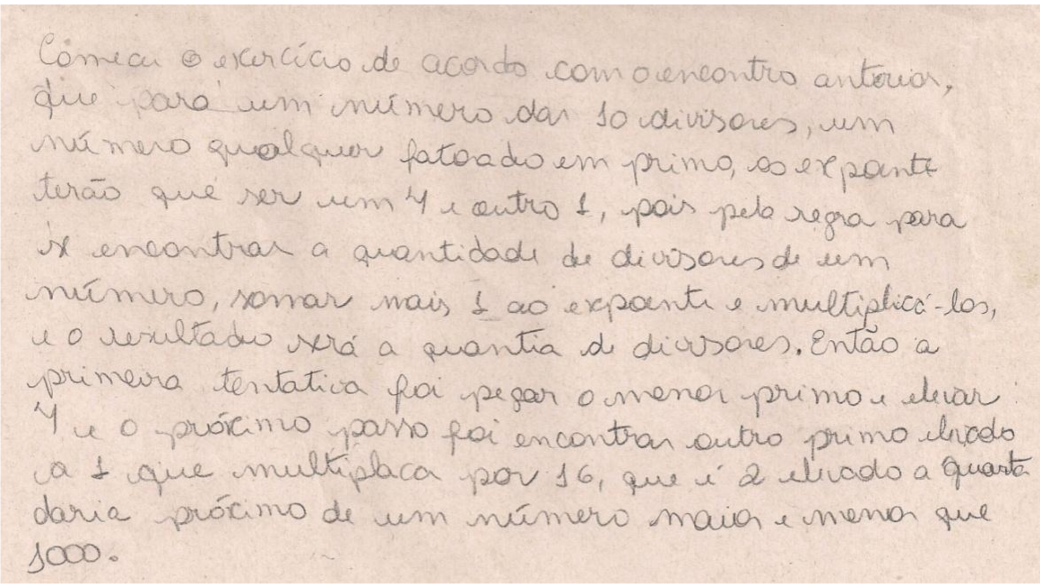

Comecei o exercício de acordo com o encontro anterior, que para um número dar 10 divisores, um número qualquer fatorado em primo, os expoente terão que ser um 4 e outro 1, pois pela regra para se encontrar a quantidade de divisores de um número, somar mais 1 ao expoente e multiplicá-los, e o resultado será a quantia de divisores. Então a primeira tentativa foi pegar o menor primo e elevar 4 e o próximo passo foi encontrar outro primo elevado a 1 que multiplica por 16, que é 2 elevado a quarta daria próximo de um número maior e menor que 1000.

Figura 3 – Tarefa dos 10 divisores

Os elementos tecnológicos, nesse caso, podem ser dados pelo enunciado do teorema: *Seja* $p_1^{n1}...p_t^{nt}$ *a decomposição em fatores primos de um número* $a>1$ *nas condições do Teorema Fundamental da Aritmética*[10]*. Então o número de divisores positivos de a é dado por* $n(a) = (n_1+1).(n_2+1)...(n_t+1)$.

[10] Teorema Fundamental da Aritmética: *Todo número natural maior do que 1 ou é primo ou se escreve de modo único (a menos da ordem dos fatores) como um produto de números primos.*

### 3.3.4 Teoria

A tecnologia propõe uma afirmação que requer uma justificativa, sendo chamada de teoria ($\Theta$). De certa forma, a relação entre a tecnologia e a teoria é semelhante à relação existente entre a técnica e a tecnologia, porém, em um nível mais elevado de justificativa, explicação e produção da teoria.

Uma teoria sempre será justificada por outra teoria, mesmo que muitas vezes esta justificativa se encontre em outra instituição. No caso de nossa pesquisa, consideramos a escola básica como uma instituição e o ensino de nível superior como sendo outra instituição. A demonstração formal de alguns resultados utilizados pelos estudantes deve ser exigida com o rigor matemático necessário, preferencialmente no Ensino Superior. No caso da tecnologia apresentada anteriormente, os elementos teóricos para sua justificativa se encontram no currículo da Matemática escolar denominado Teoria dos Números.

De maneira geral, a análise praxeológica não é estática, pois terá suas diferenças de acordo com a instituição em que estiver dinamizando o estudo; portanto, a distinção entre técnica, tecnologia e teoria é funcional, referenciando sempre a um tipo de tarefa em uma dada instituição.

Por fim, as noções de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas em torno de um tipo de tarefa permitem construir modelos das práticas sociais em geral e em particular, da atividade matemática. A eficácia e o tempo de uso de uma praxeologia dependem da instituição na qual está em uso e sofre alterações de um ambiente institucional para outro.

Apresentamos a seguir um quadro-resumo dos exemplos já expostos. Podemos considerá-lo como um modelo completo de praxeologia.

Quadro 1 – Modelo praxeológico

| | |
|---|---|
| Tarefa ($t_a$) | Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores? |
| Técnica ($\tau_a$) | Analisar fatorações de números com produtos de expoentes acrescidos de uma unidade, fazendo uso do Teorema Fundamental da Aritmética. |

Cont. Quadro 1 – Modelo praxeológico

| | |
|---|---|
| Elementos Tecnológicos $(\theta)$ | Enunciado da propriedade: Seja $p_1^{n1} \ldots p_t^{nt}$ a decomposição de um número *a* > 1 nas condições do Teorema Fundamental da Aritmética. Então o número de divisores positivos de *a* é dado por $n(a) = (n_1+1).(n_2+1) \ldots (n_t+1)$. |
| Teoria $(\Theta)$ | Os elementos teóricos estão no campo da Teoria dos Números. |

## 3.4 MOMENTOS DE ESTUDO

No contexto da Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1998) o processo didático se refere ao estudo e, no caso desta pesquisa, ao estudo da Matemática. Existe um processo didático ou um processo de estudo, sempre que alguém é levado a estudar ou a colaborar com quem estuda.

É importante também compreendermos a dimensão do processo didático, pois ele não está restrito ao ensino e à aprendizagem que acontecem nas instituições de ensino. Acreditamos que é um local significativo de estudo, mas não é o único, pois em outras organizações, muitas pessoas também estudam matemáticas. Tal fato toma uma dimensão antropológica quando remetido ao estudo.

Nesta pesquisa, a evidência está no estudo que acontece na instituição escola, porém não ignoramos que este sofre influências de outros locais que não são, necessariamente, ambientes escolares.

O desenvolvimento de uma Organização Didática, segundo a Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 1998), apresenta seis momentos de estudo, os quais são categorizados como: *momento do primeiro encontro com um tipo de tarefa*; *exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica*; *constituição de um entorno tecnológico e teórico relativo a uma técnica*; *trabalho com a técnica*; *institucionalização* e *avaliação da Organização Matemática*.

Somente para efeito de organização esses momentos são apresentados em uma determinada disposição, porém, na prática, eles não acontecem em uma ordem cronológica e sim de maneira dinâmica, o que possibilita a ocorrência de mais de um momento ao mesmo tempo.

### 3.4.1 Momento do primeiro encontro com um tipo de tarefa

Este momento está relacionado aos objetos matemáticos que constituem um tipo de tarefa e depende da relação individual do estudante com o objeto matemático a ser utilizado na resolução da tarefa em evidência.

O primeiro encontro ou reencontro pode acontecer diversas vezes, sendo caracterizado como cada vez que o estudante interage de maneira a adquirir novos conhecimentos com um saber matemático. Tomamos como exemplo da ocorrência desse momento, uma situação vivenciada em nossa pesquisa com as tarefas pertencentes ao tipo de tarefa $T_2$. "Calcular os Múltiplos e/ou Divisores", que foram propostas aos estudantes na seguinte sequência:

a) 40 é divisível por 5?

b) 45 é divisível por 11?

c) 0 é divisível por 19?

Eles não encontraram dificuldades na resolução das tarefas enunciadas nos itens *a* e *b*, entretanto, quando se depararam com o item *c*, muitas dúvidas surgiram no grupo de alunos. Alguns tentaram até questionar a veracidade da tarefa apresentando a seguinte afirmação: *"O zero não é um número natural, então não faz sentido calcular os divisores deste número".*

Para acontecer o primeiro encontro ou o reencontro com um tipo de tarefa é necessário inicialmente admitir que a atividade seja uma tarefa a se resolver. Após algumas discussões os alunos admitiram a atividade como uma tarefa a ser resolvida.

Alunos que já haviam resolvido anteriormente tarefas desse tipo sem grandes dificuldades, encontraram na atividade *0 é divisível por 19* um desafio, pois a mesma não podia ser resolvida automaticamente. Para sua solução foi preciso um novo investimento e a retomada da definição que permitiu resolver as tarefas deste tipo. Dessa forma, consideramos que houve um reencontro por parte de alguns alunos, com o tipo de tarefa: "encontrar os divisores de um número".

### 3.4.2 Exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica

Este é o momento em que se busca relacionar um determinado tipo de tarefa à construção de uma técnica que seja adequada para solucioná-la. Geralmente, a necessidade de se procurar uma nova técnica matemática para resolver uma determinada tarefa, surge do próprio estudo das tarefas daquele tipo e/ou de uma exigência da instituição em que está se desempenhando a tarefa. A percepção desta necessidade exige que o estudante esteja realmente imerso na atividade a ser resolvida. E a descoberta de outra técnica mais eficiente não acontece por si só, requer o apoio de alguém que esteja conduzindo o estudo, ou de uma boa leitura, ou ainda, outra fonte para reforçar condições necessárias à elaboração de uma nova técnica.

Vejamos o ocorrido quando solicitamos aos alunos que resolvessem a tarefa do tipo $T_2$: *Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores?* pertencente ao tipo: *Encontrar a quantidade de divisores de um número*.

Inicialmente, quando alguns alunos propuseram a solução tentando encontrar os divisores de 999, 998, 997..., um aluno do grupo comentou: *"Esta maneira de resolver é muito demorada, será que não tem outra maneira de encontrar este número?"*. Neste momento, interviemos com o questionamento do alcance da técnica matemática de fatorar diretamente os números e contar a quantidade de divisores. Após a intervenção surgiu a proposta de elaboração de outra maneira mais eficiente para resolver aquela tarefa. Para isso, questionamos os alunos sobre as características de um número que possui dez divisores, o que estreitou a técnica utilizada que continuava com base na fatoração, porém com ênfase diferente.

A fim de construir outra técnica, eles partiram da ideia conceitual de fatoração, analisando particularmente os expoentes e, no caso específico desta tarefa, os expoentes teriam que ser necessariamente 4 e 1 ou 9 e 0. Depois recorreram a resultados já conhecidos do grupo, porém com um olhar direcionado à solução da tarefa, ou seja, somar uma unidade a cada expoente e multiplicá-los entre si. Neste caso, o resultado da multiplicação deveria ser dez, conforme solicitado na tarefa. Finalizaram a tarefa com a análise de quais os primos que elevados aos expoentes 4 e 1 ou 9 e 0, resultaria no número procurado.

Desta forma, para construir a técnica utilizada para resolver aquele tipo de tarefa, os estudantes utilizaram conhecimentos que já possuíam, sendo preciso remodelar tal conhecimento e construir outra técnica mais eficaz ou de maior alcance, para atender a tarefa solicitada. Observamos ainda que durante os estudos por nós propostos, o processo de elaboração de uma técnica ocorreu sempre após o momento de sua avaliação.

### 3.4.3 Constituição do entorno tecnológico e teórico relativo a uma técnica

Toda técnica utilizada requer uma justificativa que acontece em dois níveis: o tecnológico, que está mais próximo da técnica; e o teórico, que se encontra um pouco mais distante. Em geral, uma tecnologia e uma teoria são usadas para justificar um conjunto de tarefas pertencente ao mesmo tipo.

Partindo do primeiro encontro, este momento de estudo está dialeticamente relacionado com todos os outros momentos, ponderando que, para acontecer o primeiro encontro deverá haver resquício de outra técnica para construção de um novo conhecimento.

Na tarefa: *Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores?*, para decidir quais seriam os expoentes utilizados, os estudantes tiveram que fazer uso de uma justificativa que consistia na soma do número 1 (um) ao expoente, que é um resultado que pode ser provado. O mesmo acontece com a justificativa de a base ser um número primo, pois a prova destes dois resultados encontra-se em um nível mais distante, que é pertencente à teoria.

### 3.4.4 Trabalho com a técnica

Este momento do estudo pode ser ocupado para a melhoria da técnica, tornando-a mais confiável, mais eficaz. O estudante fortalecerá os conhecimentos já adquiridos, ou ainda, como uma fase de exercitação importante para que o conhecimento se solidifique e possa daí obter novos conhecimentos. Para tanto, é necessário a disponibilidade de tarefas pertencentes a diferentes tipos, qualitativa e quantitativamente.

O trabalho com a técnica completa o estudo exploratório e pode ser o início do momento tecnológico-teórico, no qual a exploração de uma praxeologia pontual passa a ser justificada e interpretada por dispositivos teóricos.

### 3.4.5 Institucionalização

Este é um momento de revitalização do estudo e serve de base para outros estudos. No cotidiano escolar é um momento importante que pode sofrer interferência de um dirigente do estudo, de um livro ou de outro dispositivo didático.

É na institucionalização que será visto o produto do trabalho, sua eficiência e justificativa, limitando quais elementos fazem parte do entorno tecnológico-teórico, indicando as condições de quais tipos de tarefas podem ser resolvidas por determinadas técnicas e outros pormenores.

No caso da tarefa *Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores?,* a técnica matemática continuou com o princípio da fatoração, porém, esta encontra respaldo mais diretamente na propriedade institucionalizada com o seguinte enunciado: *Seja* $p_1^{n1} \ldots p_t^{nt}$ *a decomposição de um número a > 1 nas condições do Teorema Fundamental da Aritmética. Então o número de divisores positivos de a é dado por* $n(a) = (n_1+1).\ (n_2+1) \ldots (n_t+1)$.

### 3.4.6 Avaliação

É neste momento que se faz uma apreciação do estudo ora realizado, o qual não deve ser vivido de uma só vez, assim como qualquer outro momento de estudo. Pode-se falar de pelo menos dois tipos de avaliação: uma é pessoal e exige a retomada dos conhecimentos já utilizados, e a verificação do domínio da aplicação de uma técnica ou da eficácia de sua utilização; a outra, referente à técnica, questiona sua necessidade e a sua robustez. Desta forma, a avaliação pode relançar ao estudo.

Em relação à tarefa *Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores?,* os estudantes possuíam vários conhecimentos e, entre eles, o domínio da "regra" de como encontrar os divisores de um número dado; no entanto, tiveram de avaliar os procedimentos que pretendiam utilizar e buscar novas técnicas com base nos conhecimentos que possuíam relações entre eles.

### 3.4.7 Observações sobre os momentos de estudo

Os diferentes momentos de estudo são igualmente importantes durante a realização do processo de estudo; não existem momentos mais importantes ou menos importantes. Em alguns casos o “trabalho com a técnica” deve ser visto com certo “cuidado” por aqueles que analisam o estudo, pelo fato deste processo poder ser interpretado como um ensino automatizado. Isto pode ocorrer caso este momento de trabalho com a técnica seja realizado isoladamente; portanto, é importante integrar o trabalho com a técnica, de maneira natural, ao processo exploratório e ao tecnológico-teórico.

A passagem de um momento de estudo para o outro nem sempre é evidente, pois vários fatores estão presentes e podem ocorrer diversos obstáculos de ordem epistemológica, como por exemplo, ficar restrito ao trabalho da técnica sem reflexão sobre a justificativa da maneira de fazer.

É fundamental que o estudante vivencie todos os momentos de estudo, mesmo que em diferentes períodos, entretanto, em algumas situações de estudo isso não é possível, uma vez que depende da dinâmica e do objetivo propostos para cada situação de estudo. Uma das grandes dificuldades da ocorrência desses momentos no contexto escolar é fazer com que o aluno tome o problema para si, tornando-o significativo para ele e, para que isso ocorra, muitos fatores devem estar envolvidos como, por exemplo: interesse, motivação, condução do estudo, entre outros.

Uma vez que o aluno toma o problema para si e as atividades são organizadas pelo dirigente do estudo, de forma a criar situações didáticas adequadas, os momentos de estudos podem ser vivenciados pelo estudante de forma a produzir “ideias novas” ou ainda, a criar uma “nova matemática” para ele.

## 3.5 OBJETOS OSTENSIVOS E NÃO OSTENSIVOS

A abordagem antropológica situa na problemática de modelagem do conhecimento matemático, os meios escritos, gráficos, orais, gestuais e materiais que instrumentalizam a atividade matemática e condicionam o seu desenvolvimento.

Em relação à Matemática de modo geral, a cultura ocidental faz distinção entre as atividades designadas manuais e intelectuais, valorizando mais a segunda, chamada de atividade “do espírito” e considera a Matemática como uma das primeiras dessas atividades, uma atividade intelectual que pode fazer uso de instrumentos materiais como dobradura, material dourado, régua e compasso, calculadora, ábaco, computador e outros. Esses materiais são considerados suporte, ou ajuda para a realização da atividade matemática e, apesar de não deterem conhecimento algum, têm o importante papel de representar o sentido de uma ideia matemática.

Para a realização da atividade matemática é necessário o desprendimento dos objetos materiais, dando lugar a outros objetos de natureza não propriamente material, como os sons, grafismos e gestos, não perdendo de vista que os objetos materiais, de certa forma, ativam a sensibilidade. Muitas vezes eles são usados com o objetivo de materializar objetos abstratos. Exemplificando: temos o desenho do cubo que é uma representação gráfica de um objeto matemático abstrato.

Sobre a utilização de instrumentos materiais, Bittar e Freitas (2005, p. 29) apresentam a seguintes reflexões:

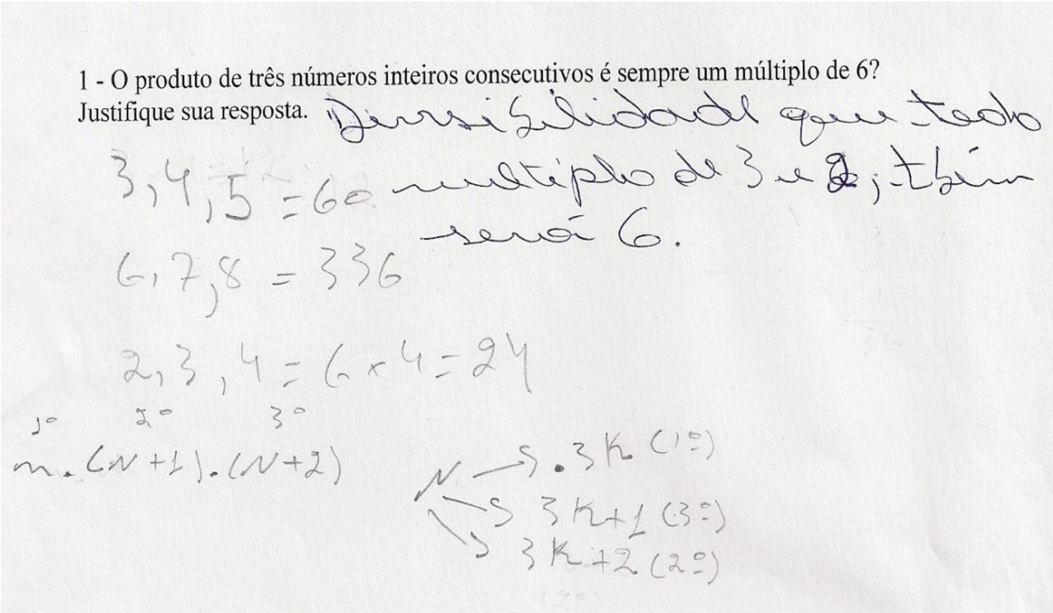
> Alguns cuidados devem ser tomados pelo professor para evitar o uso inadequado desses materiais, pois sendo os conceitos matemáticos de natureza abstrata, corre-se o risco deles exercerem o papel inverso ao que desejamos. Acreditamos que o material didático funciona mais ou menos como o “gesso”, material utilizado para recuperar fraturas dos ossos na Ortopedia, ou seja, ele pode ser muito útil em determinadas situações, mas deve ser retirado no momento adequado. É também importante observar que o uso de material concreto não dispensa em modo algum a passagem para o abstrato, e é justamente essa passagem que deve ser cuidadosamente planejada pelo professor.

Vale ressaltar que, tanto a ausência quanto a utilização inadequada dos instrumentos materiais pode interferir no desenvolvimento do saber matemático.

Com relação à natureza da função dos objetos materiais que são utilizados na atividade matemática, distingue-se em dois tipos: os objetos ostensivos e os não ostensivos. Os ostensivos podem ser os sons, entendido como as palavras de uma língua; os grafismos, que permitem a escrita das línguas naturais ou formais; e os gestos. Evidenciando que o termo ostensivo tem origem no latim *ostendere* que significa mostrar. Já os objetos não ostensivos são as ideias, as instituições ou os conceitos reconhecidos em uma instituição.

Os objetos ostensivos e não ostensivos estão em uma relação dialética, uma vez que uma ideia é considerada um objeto não ostensivo. No entanto, para essa ideia ser comunicada é necessário evocar um objeto ostensivo, como os gestos, a escrita ou os sons. Da mesma forma, a produção de uma escrita ou de um gesto necessita de uma ideia.

Observemos alguns registros ostensivos realizados pelo este grupo colaborador da pesquisa ao resolver a seguinte tarefa: *O produto de três números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de 6? Justifique sua resposta.*



1 - O produto de três números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de 6?
Justifique sua resposta. Divisibilidade que todo múltiplo de 3 e 2, também será 6.

3, 4, 5 = 60

6, 7, 8 = 336

2, 3, 4 = 6 x 4 = 24

1º 2º 3º

n . (N + 1) . (N + 2)

N → 3k (1º)

→ 3k + 1 (3º)

→ 3k + 2 (2º)

Figura 4 – Tarefa dos números consecutivos do múltiplo de 6

Ao trabalharem com essa tarefa, os estudantes se apropriaram de vários objetos ostensivos como: o esquema gráfico, ao utilizarem as setas partindo do “N”; o aritmético, ao registrarem os números consecutivos; o algébrico, ao generalizarem o produto entre três números consecutivos quaisquer e um pequeno discurso na linguagem verbal para justificarem a conclusão da tarefa. Notou-se, também, atos não explícitos como o produto entre os inteiros consecutivos que não aparece registrado em papel. No entanto, a ação é evidenciada nos resultados.

O grupo registrou os números consecutivos separados por vírgula, usaram o sinal de igual e logo em seguida mostrou o resultado do produto dos três números. Do ponto de vista do rigor da Matemática formal, o ostensivo utilizado não estaria correto, porém para o grupo, naquele instante, os registros transmitiam uma ideia. Os alunos observaram o uso das setas e dos números ordinais para representar as possibilidades do número ser divisível por três. Apesar de os registros gráficos não estarem em concordância com a Matemática formal, eles cumpriram um papel importante na construção dos elementos que subsidiaram o discurso escrito, em linguagem verbal, os quais compuseram traços para a construção do entorno tecnológico desta tarefa em particular.

Durante o estudo de um determinado tipo de tarefa e para bom desenvolvimento de uma técnica, é necessário articular vários objetos ostensivos, que evocam objetos não ostensivos. O conjunto dos ostensivos que são evocados faz parte de uma determinada praxeologia, reconhecida como signo numa instituição.

Os objetos ostensivos e não-ostensivos “evoluem”, modificam-se ou são reconstruídos em uma relação estreita com o tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria na instituição em que a atividade matemática está sendo realizada.

A cultura Matemática tende a valorizar mais os objetos não materiais como as equações algébricas, por exemplo, em detrimento dos objetos materiais, como desenhos que representa uma situação. Durante o estudo da construção e criação de uma técnica, vários ostensivos podem servir de apoio, no entanto, após a estabilização da técnica, ‘no momento de passar a limpo’, há uma grande redução desses objetos.

No livro *Fundamentos e Metodologia de Matemática Para os Ciclos Iniciais do Ensino Fundamental*, os autores sugerem o uso de material concreto no estudo de sistema de numeração decimal, como forma de favorecer a aprendizagem de conceitos:

> [...] quando o aluno trabalha com o material dourado, por exemplo, efetuando trocas que permitem explorar o conceito de sistema de numeração de base dez. Deve-se, inclusive, sugerir o uso de materiais diversos, pois cada um tem uma característica diferente, o que, por sua vez, permite apreender vários aspectos de um conceito. Assim, para um trabalho sobre o sistema de numeração decimal, podemos, entre outros, usar o ábaco, que favorece a compreensão do conceito de valor posicional, o material dourado, que ajuda a entender o sistema de troca ou a “base dez” e a “sapateira”, que permite construir junto com o aluno o algoritmo da adição e da subtração [...] (BITTAR; FREITAS, 2005, p. 29-30).

A atividade matemática tende a afastar os objetos ostensivos no decorrer do estudo e centrar a atenção no que eles representam, destacando desta forma sua verdadeira função que é favorecer a produção de conceitos. Sendo assim, a discussão sobre os objetos ostensivos e não ostensivos não pode ser considerada secundária na construção do saber matemático.

## 3.6 CONSIDERAÇÕES SOBRE O REFERENCIAL TEÓRICO

Visto que a atividade matemática é a unidade central de análise do Programa Epistemológico em que a Teoria Antropológica do Didático – TAD (CHEVALLARD, 2009) se insere, o ato de resolver problemas de matemática, que é uma ação pontual, produzir-se-á em um nível curricular de matemática de forma global, uma vez que o estudo de um tipo de problema provoca novas necessidades tecnológicas, permitindo construir e justificar técnicas “novas” capazes de resolver novos tipos de problemas em outros níveis. Na teoria são propostos os seguintes níveis de organização geral do currículo:

Civilização
↓↑
Sociedade
↓↑
Escola
↓↑
Pedagogia
↓↑
Disciplina
↓↑
Domínio
↓↑
Setor
↓↑
Tema
↓↑
Questão

Cada nível deste modelo teórico interfere e é interferido no cerne do sistema didático, Chevallard (2009). Esses níveis podem ser representados no currículo escolar de Matemática vigente no sistema educacional brasileiro. E mais especificamente vamos representá-lo nessa pesquisa, conforme o esquema a seguir:

**Disciplina:** Matemática
↓↑

**Domínio:** Aritmética
↓↑

**Setor**: Números Inteiros
↓↑

**Tema:** Divisibilidade
↓↑

**Questões**: Resto da divisão, múltiplos e divisores e quantidade de divisores de um número.

As atividades de realização de tarefas estão estabelecidas neste trabalho em relação aos níveis curriculares de organização pontual e local, conforme definido anteriormente.

Cada tarefa matemática pode ser fixada em um nível de organização pontual, pois ela encontra-se associada a uma determinada questão particular, dentro dos conteúdos matemáticos escolares. No caso particular desta pesquisa, todas as soluções das tarefas propostas encontram-se diretamente relacionadas às técnicas próprias da divisibilidade.

No nível de organização local, a atividade de realização de tarefas situa-se em um âmbito de estudo dos diferentes temas matemáticos do currículo escolar. O tema divisibilidade é abordado em nossa pesquisa segundo a organização apresentada no currículo escolar de Matemática vigente.

Inicialmente, arrolamos as tarefas que envolviam divisibilidade, em particular as que normalmente estão presentes nas provas de vestibular e, após um estudo minucioso, efetuamos a classificação nos respectivos tipos de tarefas. O detalhamento dos critérios usados para essa classificação encontra-se no capítulo da análise. Em um nível mais elevado, integram-se aos números inteiros, que neste caso é o setor. Neste nível falamos de problemas de números inteiros de um modo geral.

Na realização de tarefas em um nível mais genérico que o local, situa-se o nível curricular global, o qual corresponde às disciplinas. Nesse nível, são tratados problemas de Matemática presentes nas disciplinas das instituições escolares.

E, para a efetiva organização das tarefas matemáticas com foco na divisibilidade, utilizamos um método[11] que garantiu a elucidação dos fatos ocorridos durante a investigação das formas de estudo, realizadas pelos alunos participantes da pesquisa. Essa ação é apresentada no próximo capítulo que trata da organização da investigação.

[11] Segundo conceito utilizado no dicionário de filosofia Abbagnano, (2007, p. 780) o termo método pode ser entendido da seguinte forma: [...] indica um procedimento de investigação organizado, repetível e autocorrigível que garanta a obtenção de resultados válidos.

# CAPÍTULO 4 – ORGANIZAÇÃO DA INVESTIGAÇÃO

## 4.1 ELEMENTOS CONSTITUTIVOS DA INVESTIGAÇÃO

Este trabalho foi norteado por elementos da pesquisa qualitativa e elementos praxeológicos, visando assim, alcançar o objetivo geral que é analisar práticas e argumentos utilizados pelos estudantes de um curso preparatório para o vestibular concernente ao tema divisibilidade, em um contexto de ações afirmativas.

Da pesquisa qualitativa utilizamos como instrumento de coleta de dados a entrevista e a caracterização do campo investigado; dos elementos praxeológicos, destacamos a organização das tarefas, a organização dos grupos de estudo, a coordenação do estudo e as relações entre o objeto, a instituição e o sujeito.

## 4.2 Elementos da abordagem qualitativa

Como enfatizamos o social no qual a investigação foi realizada, buscamos apoio na pesquisa qualitativa, a qual tem suas raízes na hermenêutica e segundo André (2008, p.16), a hermenêutica pode ser usada como abordagem metodológica para pesquisas que focam investigações de cunho social, já que esta "[...] se preocupa com a interpretação dos significados contidos num texto (entendido num sentido muito amplo), levando em conta cada mensagem desse texto e suas inter-relações." Tende a aprofundar-se no mundo dos significados das ações e relações humanas, segundo afirma Minayo (1994, p. 23) a respeito da hermenêutica "[...] trabalha com o universo de significações, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos [...]".

Considerando as orientações que caracterizam a pesquisa com aporte metodológico do tipo qualitativo de André e Lüdke (2004) foi possível esquadrinhar peculiaridades dos alunos envolvidos na pesquisa, assim como as ações que permearam o desenvolvimento deste trabalho.

### 4.2.1 A entrevista durante as sessões

A entrevista teve um papel fundamental durante a coleta de dados, pois ao revelar ideias e procedimentos mobilizados pelos estudantes, possibilitou-nos reorganizar as tarefas, indicando a melhor ocasião da apresentação de novas tarefas, ou a retomada de algumas delas. Esta dinâmica foi essencial para delinearmos a representação dos hábitos de estudo do grupo pesquisado em relação aos conceitos matemáticos que cultivavam em seu cotidiano estudantil. No campo da didática, algumas ações foram tomadas, de forma cautelosa, durante as abordagens, como por exemplo: ao perguntarmos algo sobre o conteúdo matemático, procuramos deixar que respondessem com base nos conhecimentos pré-adquiridos. Caso a resposta não fosse satisfatória, considerando a instituição “curso preparatório para o vestibular”, a questão era retomada em outras sessões de estudo, para que de fato pudesse ocorrer o desvelar das informações que nos permitisse o aprofundamento do estudo da divisibilidade. A materialização dos diálogos relacionados ao estudo é apresentada na análise das questões, no capítulo 5.

Quanto à constituição do perfil dos alunos participantes das sessões de estudo, procurou-se dialogar com os participantes da pesquisa em horários não coincidentes com as sessões. As entrevistas foram gravadas e para a sua utilização foram selecionadas as informações que respondiam aos objetivos da pesquisa. Ressaltamos que as entrevistas ocorreram no início do ano letivo. Muitos alunos estavam há quatro ou cinco anos sem frequentar o ambiente escolar, por isso, ainda não haviam desenvolvido suas potencialidades relativas a uma rotina de estudo.

A entrevista foi importante para identificar e entender as dificuldades que os participantes dos grupos apresentavam na interação com as questões propostas. É sabido que o estudo não deve ficar preso ao ambiente de sala de aula e que o estudante, para de fato interagir com os conceitos escolares, deve expandir os estudos além do espaço da sala de aula.

### 4.2.2 Caracterização do campo investigado

A investigação ocorreu em uma instituição de ensino, pesquisa e ações afirmativas, sob a forma de associação, constituindo-se em uma pessoa jurídica de direito privado, beneficente e de assistência social, sem fins lucrativos, com sede e foro no município de Campo Grande, MS, fundado em quinze de fevereiro de dois mil e três, denominado de Instituto Luther King, cujo idealizador, o juiz de direito Dr. Aleixo Paraguassú Netto, traz em sua história de vida a discriminação por ser negro e de família humilde.

Segundo seu estatuto, o Instituto tem por finalidade oferecer serviços educacionais, não seriados e não formais, com ênfase na modalidade de ações afirmativas ou medidas especiais compensatórias, destinadas a pessoas carentes e/ou pertencentes a minorias sociais, preferencialmente crianças e adolescentes.

Em 2009, ano de realização desta pesquisa, os critérios para a distribuição das vagas para o curso preparatório para o vestibular ocorreu da seguinte forma: 45% afro-descendentes, 5% de índio-descendentes, 5% de pessoas com de necessidades especiais e 45 % de brancos. Para o ingresso nesse curso, os estudantes devem ser alunos da rede pública ou de associações comunitárias e apresentar uma carta de intenção contendo suas condições sócio-econômicas.

O Instituto é localizado em uma área central da cidade e de fácil acesso. As aulas do curso preparatório para o vestibular acontecem no período noturno; é oferecido um lanche antes do início das aulas e outro lanche durante o recreio.

A estrutura física do Instituto é composta por quatro salas de aulas climatizadas, biblioteca com um acervo bibliográfico em torno de 500 exemplares, sala de informática e um espaço de convivência, o qual também é utilizado para a apresentação de vídeos e realizações de reuniões com os alunos.

## 4.3 ELEMENTOS DA ABORDAGEM PRAXEOLÓGICA

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) está contida em um programa epistemológico de investigação em didáticas das matemáticas. Ela propõe um modelo epistemológico em termos de organizações matemáticas institucionais, que contempla tanto aspectos teóricos quanto metodológicos. Segundo Gascón (2003), este programa nasce como fruto da convicção de que muitos dos programas de Educação Matemática têm sua origem nas próprias matemáticas ensinadas, isto é, a atividade matemática deve ser tomada como objeto primário de estudo.

A organização matemática está postulada em quatro componentes principais: tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Estas, ao se relacionarem dinamicamente para responder um conjunto de questões problemáticas iniciais, aparecem em duas faces inseparáveis: a prática matemática (*praxis*) e as técnicas matemáticas (*logos*). A primeira é constituída pelas tarefas e a segunda, pelo discurso matemático que justifica e interpreta essas práticas. Desta forma, obtemos a noção de praxeologia matemática.

Inserido neste contexto, as técnicas utilizadas superam a simples função de resolver problemas matemáticos, ou seja, as estratégias didáticas descritas provocarão reflexão nas técnicas matemáticas iniciais.

### 4.3.1 Organização das tarefas

As atividades realizadas com os alunos foram organizadas em duas propostas distintas, sendo uma delas composta, em sua maioria, por tarefas rotineiras que foram aplicadas nas sessões prévias realizadas no final do ano de 2008 e nas sessões iniciais de 2009; e a outra proposta de atividades foi, em sua maior parte, construída por tarefas não rotineiras trabalhadas nas sessões de estudo.

As sessões rotineiras foram trabalhadas na vertente aula de prática que, segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 279), acontecem da seguinte forma:

> [...] na aula de prática o estudante deve trabalhar com um tipo muito restrito de problemas (que são obtidos mediante pequenas variações de alguns problemas inicialmente estudados na aula de problemas) colocando à prova a solidez da técnica diante dessas mudanças.

No que tange à organização da lista das tarefas rotineiras, recorremos a quatro livros didáticos da quinta série, atual sexto ano do Ensino Fundamental. Para tanto, não perdemos de vista o perfil do grupo colaborador, que por sua vez apresentava uma composição heterogênea em relação à faixa etária. Respaldamo-nos em três livros didáticos, cujas edições coincidiram com o período em que os colaboradores da pesquisa cursaram o Ensino Fundamental e, apenas um livro, discordou desse critério, o que foi publicado em 2006; tal escolha se deu por considerarmos importante a verificação das abordagens relativas às questões de divisibilidade em edições mais modernas.

A escolha dos livros didáticos, editados em conformidade com o período em que os estudantes cursaram o Ensino Fundamental, coaduna com o que Carvalho (2003, p.1)[12] aponta como sendo uma das importâncias do livro didático no contexto escolar: “[...] o livro-texto tem história e o papel que desempenha e sua influência estão sempre ligados à sociedade de sua época [...]”. Os livros escolhidos foram:

- *Matemática* de Fernando Trotta – 5ª série, 1º grau, editora Scipione, 1985 (p. 99 - 125),
- *Matemática na medida certa* de Jakubo, Lellis, Centurión – 5ª série, Ensino Fundamental, editora Scipione, 1999 (p. 92 - 123),

[12] Carvalho faz esta reflexão ao apresentar o livro Análise Histórica de Livros de Matemática: notas de aula/Gert Schubring (2003).

- *Matemática hoje é feita assim* de Antonio José Lopes Bigode - 5ª série, Ensino Fundamental, editora FTD, 2000 (p. 103 - 123),
- *Matemática Fazendo a Diferença* de Bonjorno e Ayrton 6º ano (5ª série), Ensino Fundamental, editora FTD, 2006 (p. 95 - 113).

Enfatizamos que recorremos diretamente aos capítulos destinados ao estudo de divisibilidade, conforme aponta a paginação descrita em cada um dos livros. Reiterando, não será realizada a análise praxeológica das tarefas desses livros, uma vez que as atividades apresentadas estão em um nível de complexidade diverso dos problemas presentes nas provas de vestibular, que é o foco desta pesquisa.

Em relação às atividades propostas para as sessões prévias realizadas no final de 2008, a organização foi pautada nos conceitos de múltiplo, divisor, divisível, resto da divisão, divisão exata e números primos, considerando o conjunto dos números inteiros não negativos.

Essas sessões prévias foram fundamentais para as escolhas das tarefas apresentadas durante as sessões de estudo, pois além de permitirem observar como o tema é tratado nos materiais didáticos, também permitiram identificar indícios da interação dos alunos com as atividades ali propostas.

As sessões de estudo ocorreram em uma proposta aula de problemas e, conforme afirmativa de Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 279),

> [...] na aula de problemas atribui ao estudante a obrigação de "pensar os problemas". Essa é uma expressão muito enraizada na cultura escolar e faz referência à atividade matemática *exploratória* que se pede ao estudante quando aborda pela primeira vez um problema.

Considerando o tema divisibilidade, a construção da lista das tarefas para as sessões de estudo foram realizadas com base em instituições correlatas à instituição "curso preparatório para o vestibular": livros didáticos e avaliações de âmbito nacional.

Após a escolha, as tarefas foram organizamos em tipos de tarefas, visando desta forma a análise praxeológica. Para tanto, foram considerados não somente os enunciados com dados em comum de cada tarefa, mas principalmente, o fato de haver pelo menos uma técnica capaz de solucionar todos os problemas daquele tipo. Conforme observação de Chevallard, Bosch e Gascón (2001 p. 124),

> Para comprovar que esses problemas efetivamente são a origem de um tipo de problema, não basta observar que os enunciados são parecidos, é preciso elaborar uma técnica matemática capaz de abordá-los e de gerar muito mais problemas do mesmo tipo.

Desta forma as tarefas foram organizadas em três tipos: $T_1$: Determinar o resto da divisão entre dois números inteiros; $T_2$: Encontrar os Múltiplos e/ou Divisores e $T_3$: Determinar a quantidade de divisores de um número.

### 4.3.2 Organização do grupo de estudo

O grupo de estudo foi formado a partir de um convite feito aos 120 alunos do curso preparatório para o vestibular. Ressaltamos que tomamos cuidado para que os participantes fossem de fato voluntários, observando a reflexão feita por Alrø e Skovsmose (2006, p. 58): “[...] dependendo do professor (um convite pode ser apresentado de várias formas e, para alguns alunos, um convite partindo do professor pode parecer uma ordem)”.

Destacamos ainda que ao realizarmos o convite, procuramos deixar claro que estariam colaborando com uma pesquisa vinculada ao Programa de Mestrado em Educação Matemática, assim como o tema proposto.

As sessões de estudo ocorreram no horário das chamadas oficinas de aprendizagem nas quais a instituição oferecia oportunidade para alunos que pudessem e quisessem participar de algumas aulas “extras” nas disciplinas: Matemática, Língua Portuguesa, Inglês, Espanhol, Física, Química e Redação. Em um mesmo dia ocorriam duas oficinas concomitantemente, podendo o aluno escolher qual oficina iria frequentar, conforme seu interesse.

A participação nas oficinas não era obrigatória e nem monitorada pela coordenação do curso preparatório, em relação à presença. Os encontros ocorriam das 18 horas às 18h50, coincidindo com o horário de trabalho de alguns alunos, o que inviabilizava a participação de muitos deles. Devido a este fato tínhamos uma média de oito a dez participantes, que também era o número habitual de frequentadores nas outras oficinas. Próximo à metade do ano letivo, o número de alunos participantes das oficinas diminuiu consideravelmente, e por isso, foi suspenso o oferecimento de algumas oficinas. O nosso grupo de estudo contou com uma média de cinco alunos participando ativamente até o final. Acreditamos que isto ocorreu pelo fato de os alunos estarem envolvidos com as atividades propostas e porque sempre haviam questões não concluídas para serem refletidas no encontro subsequente, o que gerava expectativa nos participantes.

As características dos alunos participantes das sessões, de modo geral, eram heterogêneas em vários aspectos como: pretensões ao curso do Ensino Superior, a formação do ensino básico e os conhecimentos prévios sobre divisibilidade. Contamos com alunos que pretendiam realizar o exame vestibular nas três áreas do conhecimento: exatas, humanas e biológicas; alunos que cursaram o Ensino Fundamental e médio em doze anos; outros que cursaram o supletivo e concluíram o ensino básico em cinco anos. Esta situação heterogênea provocou certa preocupação diante da organização das atividades para serem apresentadas nas sessões. Esse também é um ponto de inquietação exposto por Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 198):

> Surge então, inevitavelmente, a seguinte questão prática: como organizar o ensino em uma turma integrada por alunos com formações matemáticas muito diferentes? Por exemplo: como organizar um crédito comum de matemática para uma turma que reúne indivíduos com histórias escolares muito díspares e com futuros também diferentes, [...]

Na citação acima, os autores se referem à organização de crédito comum em circunstância de maior abrangência, porém, deparamo-nos com esta situação, realidade do grupo pesquisado.

Para enfrentar esta realidade com relação às diferenças individuais dos participantes dos grupos, baseamo-nos em Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 200):

> Em vez de pretender adaptar os métodos de ensino às características singulares de cada aluno, a organização do ensino deve considerar aquilo que os alunos têm em comum, para potencializar a formação de grupos de alunos, capazes de estudar *juntos* vários tipos de problemas.

O estudo em sala de aula foi estrategicamente organizado em grupo por meio da identificação de individualidades identificadas em cada um, tais como: capacidade, motivação, interesse, atitude, formação prévia e outros. Ativa-se assim, a qualidade do estudo, conforme Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 280):

> A organização do ensino deve basear-se mais naquilo que os estudantes têm em comum do que naquilo que é particular a cada um deles. De um ponto de vista antropológico, o estudo, e com ele a aprendizagem, são atividades que unem os indivíduos.

Esta organização dos alunos em grupo durante as sessões foi essencial, uma vez que nos forneceu elementos para a análise dos dados, a qual ocorreu, não com base nas produções individuais, mas na produção coletiva do grupo de estudo, conforme Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 198):

> [...] o processo de estudo somente pode ser realizado se a aprendizagem for algo bem-compartilhado dentro do grupo: para que o indivíduo aprenda, *é necessário que o grupo aprenda*. Desse ponto de vista, a aprendizagem também é, necessariamente, um fato coletivo.

A coletividade dos conhecimentos durante o estudo foi um ponto importante durante o processo de investigação. Vale destacar alguns fatos interessantes ocorridos no grupo: quando um dos participantes, por algum motivo, faltava à sessão de estudo, solicitava que mandássemos por meio de um colega, a folha com as questões e ele trazia no encontro seguinte, a tarefa ali proposta já discutida com os colegas. Outro fato é que um integrante do grupo não pôde mais participar presentemente dos encontros no horário combinado, mas sempre solicitava aos colegas que pegassem a folha com as questões e ele as discutia com os colegas, em outros horários.

### 4.3.3 Coordenação do estudo

Para a constituição de um grupo de estudo, essencialmente deve haver questões para serem respondidas e, em geral, a tendência é que este grupo busque um coordenador para o estudo. No caso desta pesquisa, havia um grupo de estudantes interessados em adquirir conhecimentos escolares que pudessem lhes dar condições para serem aprovados no exame de vestibular, sendo este um possível motivo para terem aceitado participar do grupo de estudo sobre nossa coordenação. Desta forma, foi organizado um sistema didático no qual foi possível realizar esta pesquisa, conforme conceitua Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 196):

> Um grupo de estudo que busca em uma obra matemática respostas para certas questões pode pedir ajuda para um *coordenador* de estudo: é assim que se organiza um sistema didático, formado em primeira instância pelas questões matemáticas (ou pelas obras matemáticas que responde a essas questões), os estudantes e o *coordenador* de estudo.

A postura do coordenador do estudo em uma perspectiva praxeologica insere-se em uma atividade comunitária, na qual o ensino deixa de ser o objetivo último e começa a ter um papel de instrumento de apoio para o estudo. Confrontando com a visão de o professor ser “aquele que ensina” e do aluno “aquele que aprende o que é lhe ensinado”, Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 201), o professor deixa de ser o único responsável pelo sucesso do processo de ensino e aprendizagem, o aluno participa desse processo de forma compartilhada.

Nessa mesma visão há uma mudança no equilíbrio das responsabilidades de ambas as partes. O coordenador do estudo deixa de ser o único responsável pela motivação e a tomada de atitude relacionada às tarefas, o aluno passa a compartilhar estas responsabilidades. Em contrapartida o coordenador do estudo deve segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 202) ter os seguintes deveres:

> [...] conhecer aquelas questões que definem a “razão de ser” das obras a serem estudadas, assim como as possíveis maneiras concretas de gerar, sob determinadas condições, as principais organizações matemáticas (tipo de problemas, técnicas, tecnologias e teorias) que constituem a obra estudada.

No caso particular desta pesquisa, nós, como coordenadores do estudo, procuramos classificar as tarefas e suas respectivas justificativas, considerando a instituição “curso preparatório para o vestibular”.

### 4.3.4 Relações entre o objeto, a instituição e o sujeito.

Os problemas propostos estão inseridos na instituição escolar, e foram selecionados considerando o objeto matemático divisibilidade, e suas estratégias de solução estão baseadas na instituição “curso preparatório para o vestibular”.

Durante a resolução das tarefas várias estratégias foram apresentadas, pelos alunos, muitas delas baseadas em estratégias de “tentativa e erros”. No entanto, a instituição “curso preparatório para o vestibular” está inserida em um contexto escolar entre o ensino básico e o Ensino Superior, que requer do sujeito estratégias de solução que utilizem técnicas baseadas em argumentos que foram adquiridos no ensino básico. Isto é o que está evidente nas questões propostas nas provas de vestibulares e no tempo que é destinado ao aluno para resolver estas questões.

Baseamo-nos, pois nesta realidade institucional para direcionamos as técnicas para que o aluno percebesse o que é uma boa técnica frente à instituição “curso preparatório do vestibular”.

## 4.4 Considerações sobre a organização do estudo

A pesquisa qualitativa preconiza o trabalho de campo na busca de não somente compreender uma determinada cultura, mas, acima de tudo, ver a possibilidade de se criar conhecimentos partindo da realidade investigada. Nesta proposta, o contexto é essencial para compreender o significado atribuído pelos sujeitos às suas ações. Traçamos um paralelo com a praxeologia que um dos eixos, pertencente à Teoria Antropológica do Didático, enfatiza a importância da relação entre o objeto, a instituição e o sujeito. Logo, entendemos que o “contexto” e a “instituição” é o meio social no qual o sujeito desenvolve suas ações, que este meio social influencia e é influenciado pelas práticas dos seus assujeitados. Portanto em nossa pesquisa consideramos os alunos não como simples sujeitos da pesquisa, mas colaboradores, uma vez que também pudemos aprender com os mesmos.

Compreendemos assim, que este meio social escolar é uma instituição que tem sua própria linguagem, seus ritos, seu imaginário, ou seja, sua maneira específica de interação, formando uma cultura escolar. No entanto, acreditamos que esta cultura da escola é constituída por diversos atores sociais com suas diferenças étnicas, de gênero, sócio cultural, religiosas e outras, conforme enfatiza Gurgel (2004). Sendo assim, a metodologia não é algo meramente instrumental. Esta deve levar em conta as concepções e as relações de mundo que existem entre os sujeitos, objetos e a instituição que se investiga.

No próximo capítulo analisamos as relações dos sujeitos com o estudo, neste caso alunos de um curso preparatório para o vestibular num contexto de ações afirmativas, que é o objetivo desta pesquisa. Nele apresentamos outros elementos dessa teoria, quando julgarmos necessário, nas análises das produções dos estudantes durante as sessões da parte experimental.

# CAPÍTULO 5 – ANÁLISE DAS TAREFAS APRESENTADAS AOS ESTUDANTES

## 5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Neste capítulo apresentamos descrições e análises da pesquisa que foi desenvolvida em três etapas, a saber: a primeira etapa, ocorrida no final do ano letivo de 2008 e denominada de "sessões prévias realizadas no final de 2008"; a segunda, no início do ano letivo de 2009, intitulada "sessões iniciais de 2009"; e por último realizamos as sessões em que aplicamos as tarefas organizadas em seus respectivos tipos, nomeadas de "sessões de estudo[13]".

Observamos que, com relação às sessões prévias realizadas no final de 2008 e às sessões iniciais de 2009, não fizemos uma análise praxeológica completa, uma vez que essas sessões foram caracterizadas por buscar a familiarização dos sujeitos com o tema divisibilidade, assim como nos oportunizar uma primeira experiência como pesquisadora. Destacamos que a análise detalhada foi realizada nas sessões de estudo.

Em relação a estas sessões, houve ocasiões em que foram propostos sessões de problemas; e, noutras, sessões de prática e que para tal classificação, baseamo-nos na descrição de aulas e problemas e aulas de práticas de Chevallard, Bosch e Gascón (2001).

Nas sessões de problemas o objetivo principal foi apresentar aos participantes da pesquisa tarefas que esses deveriam resolver pela primeira vez. Para a preparação dessas sessões, tomamos como base as sessões prévias de familiarização, permitindo que os alunos tivessem um primeiro contato com os tipos de tarefas, categorizados e com suas correspondentes técnicas. Conforme elucida Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 278):

> Na aula de problemas, o estudante tenta resolver, pela primeira vez, problemas concretos de diversos tipos e manipula pela primeira vez certas técnicas matemáticas para resolvê-los. A função principal da aula de problemas consiste, precisamente, em permitir que o estudante entre em contato efetivo com certos tipos de problemas e com as técnicas correspondentes.

Nas sessões de problemas, os estudantes tiveram a oportunidade de se familiarizarem com algumas técnicas, podendo torná-las rotineiras em seus estudos e de

[13] Observamos que todas as sessões foram de estudo, no entanto esta recebeu tal denominação por ter sido o objeto principal de análise.

analisar as técnicas em uso para, a partir delas, produzir novas técnicas para eles. Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 279):

> O estudante tem, pela primeira vez, a responsabilidade de tornar oficialmente rotineira certas técnicas. Essa nova responsabilidade se materializa na obrigação de resolver, na presença de seus colegas e do professor, muitos problemas aparentemente muito parecidos entre si.

Ressaltamos que, em todas as três etapas de experimentação, a participação dos alunos ocorreu de forma espontânea, a partir de um convite feito aos matriculados no curso preparatório em questão. Ao realizarmos o convite, foi esclarecido que esse era um trabalho de mestrado sobre o tema divisibilidade e que a proposta era a criação um grupo de estudo, em que seriam trabalhadas atividades relacionadas a esse tema.

## 5.2 SESSÕES PRÉVIAS REALIZADAS NO FINAL DE 2008

No final de 2008 realizamos quatro sessões nas quais pudemos contar com a presença de, em média, oito alunos. Ressaltamos que esses alunos não participaram das sessões de 2009, pois o índice de aprovação no vestibular deste curso preparatório no qual realizamos a investigação é superior a setenta por cento. Portanto, as turmas são renovadas a cada ano.

As sessões foram conduzidas com os propósitos de obter-se um breve diagnóstico dos conhecimentos dos alunos sobre o tema divisibilidade e de vivenciar a experiência como pesquisadora e não somente como professora, pois sabemos que é necessário haver um olhar distinto sobre uma pesquisa.

Essa nova maneira de interagir no processo educacional não foi tão trivial, já que determinados cuidados foram necessários para separar a professora da pesquisadora. Um desses cuidados foi fixar a atenção no objetivo da pesquisa, a fim de não se perder a ênfase no objeto de estudo, frente a um universo rico de acontecimentos que procedia na sala de aula.

Ressaltamos que essas sessões não tiveram a proposta de aulas do tipo resolução de problemas, e sim de aulas práticas, conforme caracterizado por Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 280):

> Enquanto na aula de problemas a atividade do estudante se centra em explorar tipos de problemas bem diferentes entre si e em buscar técnicas para resolvê-los, na aula de prática parte-se de uma técnica dada de um conjunto de problemas do mesmo tipo, que são utilizados

> como instrumento para que os estudantes alcancem um bom domínio dessa técnica.

Para a efetivação dessas sessões, os alunos foram organizados em grupos de dois e três componentes e cada um deles recebeu uma lista com as atividades[14]. A leitura da lista de atividades foi realizada coletivamente e de forma pausada para que as eventuais dúvidas quanto aos enunciados das questões fossem sanadas. Durante a leitura coletiva das questões propostas, os alunos, de forma geral, não mostraram bom domínio em relação à diferença dos termos: múltiplos, divisores e divisível. Sempre usavam as expressões: "não tenho certeza", "acho que", "não me recordo bem", o que ocasionou a necessidade de conduzir o estudo, ou seja, houve a necessidade de se discutir conceitos básicos que usaríamos no decorrer do estudo e até mesmo apresentar a definição formal de alguns termos inerentes à divisibilidade, em determinadas ocasiões, para que eles pudessem resolver as questões propostas.

A falta de domínio em relação ao significado dos termos básicos para o estudo de divisibilidade como: divisível, múltiplo e divisor foi um elemento dificultador para que os alunos tomassem os problemas para si, uma vez que a interpretação inconsistente de uma nomenclatura pode se tornar um obstáculo didático impedindo a evolução do aprendizado escolar. Conforme Pais (2001, p. 44) "Os obstáculos didáticos são conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar."

No intuito de padronizar e reafirmar a técnica relativa aos termos básicos, intrínsecos ao estudo de divisibilidade, foram propostas atividades que pudessem propiciar uma situação de estudo que possibilitasse a ocorrência do momento de trabalho com a técnica. Gascón (2003, p.18) apresenta uma reflexão sobre a quantidade e a qualidade das tarefas relacionadas ao trabalho com a técnica, conforme podemos observar:

> [...] é o trabalho da técnica, que deve, por sua vez, melhorar a técnica tornando-a mais eficaz e mais confiável (o que exige geralmente retocar a tecnologia elaborada até o momento), e acrescentar o conhecimento que se tem dela: este momento de por a prova a técnica supõe em particular um ou uns dos corpos de tarefas adequadas tanto qualitativa como quantitativamente.

A fim de dinamizar os encontros e buscar alguma homogeneidade com relação a conceitos e técnicas mínimas para o estudo de divisibilidade utilizado nessas sessões,

[14] As atividades desenvolvidas nas sessões constam nos anexos.

foram convidados alguns alunos para irem até o quadro-negro e, com a ajuda do grupo, discutirem sobre definições e técnicas relativas ao tema divisibilidade. Após esta situação, os alunos iniciaram a resolução das atividades. Foi dado um enfoque maior ao item *c* da primeira atividade, já que ele gerou dúvidas e questionamentos no decorrer da sessão. E para melhor caracterização do contexto, apresentamos, a seguir, a primeira atividade proposta aos alunos:

1 – Responda as perguntas e justifique sua resposta:

a) 40 é divisível por 5? 40 é múltiplo de 5? 5 é divisor de 40?

b) 45 é divisível por 11? 45 é múltiplo de 11? 11 é divisor de 45?

c) 0 é divisível por 19? 0 é múltiplo de 19? 0 é divisor de 19?

d) 1 é divisível por 18? 1 é múltiplo de 18? 1 é divisor de 18?

A realização dessa atividade se desenvolveu sem dificuldades, até eles se depararem com o item *c* que, propõe os questionamentos: *0 é divisível por 19? 0 é múltiplo de 19? 0 é divisível por 19?* Nesse momento, muitas dúvidas surgiram. Apesar de já terem visto conteúdos que, em tese, seriam suficientes para realizar este tipo de tarefa, eles estranharam a presença do número zero e se mostraram inseguros quanto à abrangência da técnica, surgindo, assim, diversas discussões sobre esse assunto. Alguns alunos não queriam nem tentar realizar a atividade, argumentando que nunca tinham trabalhado com o número zero nessas condições.

Houve, portanto, a necessidade de interferência a fim de incentivá-los a tentar realizar as atividades. Para isso, perguntou-se qual seria a diferença entre o número zero e os outros números inteiros. Diante dessa pergunta surgiram alguns comentários: "zero não é um número natural", "nunca fiz um exercício deste tipo que envolvesse o número zero". Antes de dar continuidade às atividades, foram apresentadas algumas considerações a respeito do zero, evidenciando que esse é um número que gera muitas discussões também entre os matemáticos. Concluímos este assunto considerando o número zero, naquele contexto, como um número pertencente ao conjunto dos inteiros.

Outros participantes não deram muita importância a esses comentários e logo tentaram aplicar a mesma técnica que estava sendo usada nos itens anteriores. Assim, para mostrar que *0 é divisor de 19*, armaram o algoritmo da divisão. Perguntamos, particularmente a este grupo que teve a iniciativa de seguir as técnicas anteriores, “qual número que multiplicado por 19 dá 0?”. Perceberam, então, que era o próprio zero e, a partir desse raciocínio, foi possível analisar os itens seguintes.

É um ato frequente de sala de aula, após o término de uma atividade, os alunos perguntarem imediatamente ao professor, se ela está correta e nesse grupo de trabalho não foi diferente. Diante dessa situação, empregamos a mesma técnica didática que utilizamos anteriormente: convite aos alunos para irem ao quadro-negro. Novamente as atividades foram debatidas com todo o grupo e, quando se julgou necessário, houve a mediação contribuindo assim, para a obtenção de conclusões de forma coletiva.

Diálogos com professores nos indicaram que, independente do conteúdo, a presença do número zero é especialmente problemática na resolução de tarefas. A partir daí, indagamo-nos sobre qual seria a frequência de abordagens presentes nas atividades dos livros didáticos que pudessem provocar nos alunos uma reflexão acerca do número zero, no caso do tema divisibilidade.

### 5.2.1 Descrição dos livros didáticos

Na busca por respostas, recorremos aos quatro livros didáticos utilizados nesta pesquisa, especialmente aos capítulos sobre o tema em estudo: situações que envolviam o número zero.

No livro *Matemática: Fazendo a Diferença* de Bonjorno, Bonjorno e Olivares (2006) não foram localizadas atividades que envolvessem o número zero. Encontrou-se apenas, uma menção, ao referido número em linguagem verbal, cujos autores sistematizaram a quantidade de elementos múltiplos de um número natural qualquer (Figura 5). Todavia, pareceu-nos que a abordagem feita neste capítulo não explora adequadamente a ligação entre múltiplos e divisores, se caracterizando mais como um apelo à memorização.

O **menor múltiplo** de um número é o zero. Como existem infinitos números naturais, o conjunto dos múltiplos de um número é também **infinito**.

Figura 5 – Quantidade de múltiplos de um número

Relacionadas à divisibilidade não foram identificadas referências ao número zero e nem mesmo atividades que pudessem provocar reflexões envolvendo o zero no conteúdo de divisibilidade.

Já no livro *Matemática na medida certa* de Jakubovic, Lellis e Centurión (1999), os autores sistematizaram o conceito de divisibilidade e mencionou a não divisão por zero, porém não deu ênfase a esta particularidade, conforme pode ser observado no extrato:

> Um número natural é divisível por outro natural, excluindo-se o zero, se a divisão entre eles é exata, ou seja, se tem resto zero.

Figura 6 – Conceito de divisibilidade

Dentre todas as atividades do capítulo referente à divisibilidade, encontramos uma em que o autor questionou se zero é divisível por um número natural (Figura 7). No entanto, observamos que não foi solicitado ao aluno que justificasse sua resposta. Desse modo, dependendo da postura do professor, o aluno pode se limitar em responder apenas afirmativa ou negativamente.

> De acordo com a definição de divisibilidade, 0 é divisível por 8? E por 15?

Figura 7 – Zero é divisível por um número inteiro?

Na parte dedicada aos números primos, deparamo-nos com uma questão discursiva, cujo teor é explicar por que o zero não é um número primo, (Figura 4). Para que o aluno responda a essa questão é provável que ele recorra à definição de divisibilidade, o que reforça esse conceito e propõe uma reflexão sobre o número zero no estudo desse tema.

> Explique por que:
> a) 25 não é um número primo.
> b) 1 não é um número primo.
> c) 0 não é um número primo.

Figura 8 – Zero não é um número primo

No subtítulo '*múltiplos*' ainda no capítulo referente à divisibilidade, o autor usou a cor como ostensivo para destacar um trecho envolvendo o número zero e enfatizou a relação entre múltiplo e divisor (Figura 9). Porém, não foram verificadas. Encontramos situações nas quais o aluno pudesse trabalhar com a ideia ali expressa, envolvendo em especial o número zero. Neste caso, pareceu implícito que os autores deixaram esse aprofundamento do trabalho a cargo do professor.

**Atenção**

Como você já deve ter observado, dizer **21 é um múltiplo de 7** é o mesmo que dizer **21 é divisível por 7**.

**Ser múltiplo de** é o mesmo que **ser divisível por**. Mas existe uma exceção: o zero.

Pode-se falar em múltiplo de zero, porque existem multiplicações por zero. Mas não se pode falar que um número é divisível por zero porque **não existe divisão por zero**.

Figura 9 – A não divisibilidade por zero

Observamos que, com relação ao estrato da Figura 9, a maneira como o autor fez a afirmação “múltiplos de zero”, pode levar o estudante a erros conceituais, pois o indicado poderia ser “zero é múltiplo de”, considerando que o número zero é a exceção para a afirmação “Ser múltiplo de é o mesmo que ser divisível por”

Mais adiante, encontramos o subtítulo: *A sequência dos múltiplos de um número*, em que os autores discorrem sobre os múltiplos de zero, apresentando exemplos e diversificando os tipos de registros ostensivos entre linguagem verbal e aritmética, conforme podemos observar:

Para encontrarmos os múltiplos do zero, multiplicamos zero pelos números natu

$0 \cdot 0 = 0$; $0 \cdot 1 = 0$; $0 \cdot 2 = 0$; $0 \cdot 3 = 0$; $0 \cdot 4 = 0$; ...

Então, zero é especial porque só tem um múltiplo: o próprio zero.

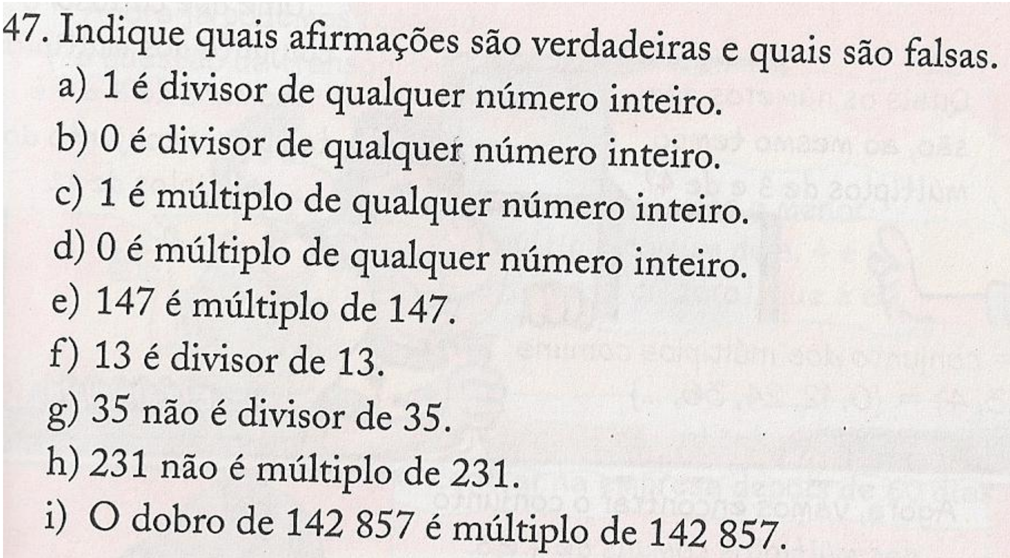
Por outro lado, zero é múltiplo de todos os números:

$1 \cdot 0 = 0$; $2 \cdot 0 = 0$; $3 \cdot 0 = 0$; $4 \cdot 0 = 0$; $5 \cdot 0 = 0$; ...

Figura 10 – Zero é múltiplo de todos os números

Apesar de a existência de um discurso institucionalizado neste livro didático, relacionado aos múltiplos de zero, no capítulo de divisibilidade, não foram identificadas atividades para que os alunos pudessem trabalhar com este assunto.

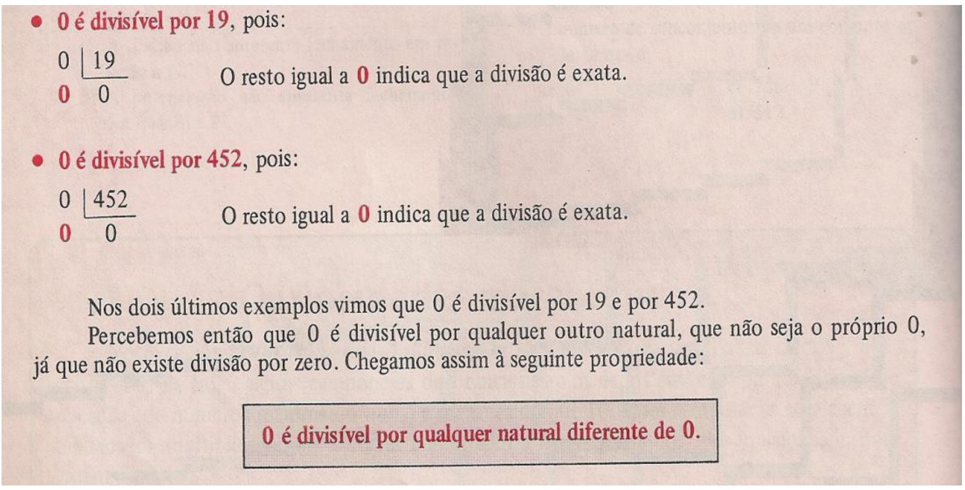
Entretanto, no livro *Matemática hoje é feita assim* Bigode (2000), o autor enfatizou o número zero na última atividade em que apresenta os *múltiplos e divisores*, pediu o leitor que dissesse se as alternativas eram verdadeiras ou falsas (Figura 11), mas não pediu justificativa da resposta. A nosso ver, atividades com questões dessa natureza poderiam contribuir com o aprendizado do aluno, caso fosse solicitado que a resposta viesse acompanhada de um discurso para justificar a resposta dada. Não foi encontrado nenhum registro neste capítulo referente à sistematização específica, envolvendo o número zero.



47. Indique quais afirmações são verdadeiras e quais são falsas.
a) 1 é divisor de qualquer número inteiro.
b) 0 é divisor de qualquer número inteiro.
c) 1 é múltiplo de qualquer número inteiro.
d) 0 é múltiplo de qualquer número inteiro.
e) 147 é múltiplo de 147.
f) 13 é divisor de 13.
g) 35 não é divisor de 35.
h) 231 não é múltiplo de 231.
i) O dobro de 142 857 é múltiplo de 142 857.

Figura 11 – Atividade envolvendo múltiplo e divisor com o número zero

No livro *Matemática* Trotta (1985), encontramos menção ao número zero no início do capítulo referente a divisores e múltiplos no qual o autor expôs, primeiramente, quatro exemplos numéricos; para tanto, ele usou o algoritmo da divisão seguido de um pequeno discurso, mostrando quando um número é divisível ou não pelo outro. Dentre estes exemplos dois envolviam o número zero. Logo após a apresentação dos exemplos ocorre a sistematização, conforme podemos ver na figura a seguir:



- **0 é divisível por 19**, pois:

$$\begin{array}{r|l} 0 & 19 \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array}$$

O resto igual a **0** indica que a divisão é exata.

- **0 é divisível por 452**, pois:

$$\begin{array}{r|l} 0 & 452 \\ \hline \mathbf{0} & 0 \end{array}$$

O resto igual a **0** indica que a divisão é exata.

Nos dois últimos exemplos vimos que 0 é divisível por 19 e por 452.
Percebemos então que 0 é divisível por qualquer outro natural, que não seja o próprio 0, já que não existe divisão por zero. Chegamos assim à seguinte propriedade:

**0 é divisível por qualquer natural diferente de 0.**

Figura 12 – Divisão exata

Em seguida, o autor propôs onze exercícios, sendo dois deles com o número zero, passíveis de serem solucionado pela técnica proposta no exemplo resolvido; desse modo, a resolução das questões poderá ser considerada como um momento de trabalho com a técnica.

Consideramos importante fazer uma pequena observação acerca desse livro. Esse material foi editado em 1985 e, ao abordar a questão do número zero, apresenta um perfil um tanto diferenciado dos outros três livros analisados. Refletindo sobre esse fato, lembramos que um livro acompanha todo um movimento ligado à sua época, conforme Carvalho (2003). Assim, resgatamos o contexto histórico em que este livro foi publicado para melhor compreender a abordagem realizada pelo autor.

No ano de sua publicação (1985) inicia-se um movimento de mudanças no quadro da política do Estado Brasileiro em relação ao livro didático. Sua edição ocorreu no mesmo ano em que foi instituído o PNLD – Programa Nacional do Livro Didático, substituindo o PLIDEF – Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental, o qual se dedicava a observar o cumprimento dos programas, edições e distribuição, parecendo não haver uma preocupação com a qualidade dos livros; portanto, vimos que os livros estavam sujeitos às regras do PLIDEF. Somente em 1996 iniciou-se o processo de avaliação pedagógica dos livros didáticos; em vista disso, apenas esse, dentre os livros citados, não passou por essa avaliação.

Ressaltamos que, embora o livro *Matemática* (1985) não tenha passado pelas avaliações institucionais, o autor apresentou a preocupação em incluir a abordagem relativa ao número zero na divisibilidade, feita de forma bastante apropriada, pois não deixou o conceito “solto”, sistematizando e oportunizando ao leitor o trabalho com esta ideia. Vale considerar que a avaliação pedagógica dos livros didáticos foi um avanço histórico no contexto do ensino e da aprendizagem, uma vez que este é um dispositivo didático arraigado na cultura de sala de aula, portanto, o compromisso do mentor de uma obra didática deve estar além das exigências burocráticas.

Percebemos por meio das análises que, de modo geral, os livros pesquisados não enfatizaram o trabalho com o número zero na divisibilidade e salientamos que apresentamos a maneira como o número zero foi abordado nos livros didáticos não com o intuito de crítica, mas com a intenção de identificar possíveis indícios das dificuldades apresentadas pelos alunos ao lidarem com questões de divisibilidade relacionadas ao número zero.

Esse assunto requer um estudo mais aprofundado e como não consta nos objetivos dessa pesquisa, sugere-se que seja tema de outros trabalhos

## 5.3 SESSÕES INICIAIS DE 2009

No ano de 2009 foram realizadas três sessões introdutórias, nas quais foram aplicadas as questões empregadas nas sessões prévias realizadas no final do ano de 2008. Os objetivos das sessões iniciais incidiram com os das sessões prévias, realizadas com outros estudantes, por considerarmos que elas foram significativas para o bom desenvolvimento da pesquisa. Provocar no grupo diálogos dos conceitos básicos de divisibilidade, como: múltiplo, divisor, divisível, resto da divisão, divisão exata e números primos, foram fundamentais para a proposição das sessões de problemas, uma vez que oportunizou o esclarecimento do significado dos termos básicos para o estudo de divisibilidade.

Os resultados dessas sessões, de forma geral, foram similares aos das sessões prévias, pois permaneceram as dificuldades em relação ao domínio das nomenclaturas, das definições concernentes aos conceitos básicos de divisibilidade e a organização formal dos resultados. Um dos fatores que contribuiu para as semelhanças dos resultados foi o perfil dos alunos participantes do curso, que permaneceu de um ano para o outro, inalterado, pois os critérios de ingresso no curso preparatório continuaram os mesmos e o modelo da base de ensino e de aprendizagem também é comum aos alunos, considerando que, em sua maioria, eles são oriundos de escola pública pertencente ao mesmo Estado.

Diante das dificuldades dos alunos frente ao tema divisibilidade, vale destacar a atual estrutura curricular brasileira. Dizemos isso, pois esta pode ser uma das principais causas desta situação, já que há evidências de que o ensino de divisibilidade é concentrado no sexto ano[15] do ensino fundamental e, geralmente não é realizada uma retomada nas séries posteriores.

Chamamos a atenção para o fato de que, apesar de os Parâmetros Curriculares Nacionais proporem o estudo do tema Teoria dos Números na Educação Básica, observa-se que o mesmo não tem ocorrido, conforme podemos observar nas afirmações feitas por Franke, Groenwald e Nunes (2009):

---

[15] Antiga quinta série.

> Na matemática “moderna”, tanto a geometria como a Teoria dos Números ficaram relegadas em segundo plano nos currículos de matemática do ensino fundamental e médio. Nos últimos anos, a geometria voltou a recuperar sua força e importância nos currículos, não ocorrendo o mesmo com a Teoria dos Números, talvez por não ter sido encontrada uma forma mais simples para sua apresentação, de maneira que as dificuldades de compreensão, tanto para os professores como para os alunos, fossem superadas.

Evidenciamos que, pelo fato dos resultados obtidos durante a realização dessas sessões terem sido similares aos obtidos nas sessões prévias, julgamos desnecessário apresentar a sua descrição.

## 5.4 ALGUMAS OBSERVAÇÕES SOBRE AS SESSÕES PRÉVIAS E AS SESSÕES INICIAIS

O grupo com que realizamos as atividades no ano de 2008 trouxe-nos importantes contribuições para o planejamento da investigação que realizamos no ano subsequente, apesar de os dois grupos terem as suas particularidades. Devido ao tempo de permanência no curso preparatório com abordagem em ações afirmativas, no final do ano, o grupo de 2008, já havia estabelecido uma rotina de estudo entre os colegas do curso, mantendo um grupo de estudo permanente formado por iniciativa deles, em horários não coincidentes com os das aulas, este era na área de ciências exatas, sob a coordenação de ex-alunos do instituto que estavam cursando o ensino superior. Esses alunos também tinham desenvolvido o hábito de pegar livros de matemática na biblioteca. Além disso, os diálogos a respeito dos conteúdos eram constantes durante as sessões, o que tornava as dúvidas coletivas e, por isso, o interesse também foi coletivo na busca de solução das tarefas a eles propostas. O termo diálogo foi usado no sentido que Alrø e Skovsmose (2006, p. 14) propõem:

> Dialogar não pode existir sem amor (respeito) pelo mundo e pelas pessoas, e ele não pode existir em relação de dominação (Freire, 1972, p.77). Além disso, participar de um diálogo pressupõe certo tipo de humildade. Não se pode manter uma relação de diálogo numa atitude de auto-suficiência. Os participantes devem acreditar uns nos outros e estar abertos para os outros, a fim de criar uma relação equânime e de fidelidade. Uma vez que o diálogo é motivado por uma expectativa de mudança, ele não pode existir sem o engajamento das partes com respeito ao pensamento crítico [...].

Já o grupo de 2009 ainda estava começando o curso preparatório e alguns dos componentes estavam retornando aos bancos escolares após certo tempo afastados, necessitando readaptar-se às regras de sala de aula. Ao entrevistarmos os alunos que aderiram ao convite para participar do grupo de estudo no ano de 2009, eles nos relataram que essa era uma tentativa para se aproximarem mais da matemática, pois era uma disciplina com a qual eles tinham muita dificuldade.

Na ocasião de reflexão sobre o desenvolvimento dessas sessões, surgiram alguns questionamentos inerentes a um trabalho de pesquisa. A solução das questões deveria ter sido discutida no grupo? As intervenções, em alguns momentos, foram realizadas de forma muito contundentes? Diante desses questionamentos, retornamos ao objetivo geral da pesquisa e das sessões prévias.

O objetivo geral desta pesquisa é analisar práticas e argumentos utilizados pelos estudantes de um curso preparatório para o vestibular acerca do tema divisibilidade, em um contexto de ações afirmativas. Desse modo, o objetivo das sessões prévias foi, além de sondar quais conhecimentos os alunos apresentavam em relação ao conteúdo delimitado, discutir também conceitos básicos para que o estudo pudesse ser efetuado. Assim, fez-se necessário discutir e sistematizar alguns conceitos como, a diferença entre os termos múltiplos e divisores, a fim de que fosse possível a compreensão dos enunciados das tarefas propostas.

O capítulo “Diálogos” do livro *Estudar Matemáticas: o elo pedido entre o ensino e a aprendizagem*, de Chevallard (1991, p. 235– 273) mostra episódios dentro da cultura escolar em que se faz necessário a condução do estudo por um coordenador para que haja avanços. Assim, procedimentos e orientações são essenciais, nessa fase do estudo.

Observou-se que essas sessões foram imprescindíveis para a coleta de dados, fornecendo orientações para pequenas adaptações como, deixar espaço suficiente na folha de questões para que os alunos pudessem escrever a solução dos problemas e outras sessões maiores, para discutir tarefas matemáticas trazidas por eles, alheias ao objeto desta pesquisa, pois estas suscitavam dúvidas. Somente após esses procedimentos é que as atividades concernentes ao estudo em questão eram retomadas. Dessa forma, o relacionamento entre a pesquisadora e os pesquisados teve como base a interação, não se limitando a simples sujeitos de pesquisa.

## 5.5 SESSÕES DE ESTUDO

As sessões de estudo aconteceram após as sessões iniciais do ano de 2009, mais especificamente na semana subsequente ao seu término e contaram com a participação dos mesmos alunos das sessões iniciais, os quais tinham conhecimento de que estavam participando de uma pesquisa de Mestrado, e que também teriam a oportunidade de trabalhar questões de vestibular sobre o tema divisibilidade.

Vale ressaltar que o desmembramento das sessões (iniciais de 2009 e sessões de estudo) não foi percebido pelos participantes, pois esta consistiu em uma organização realizada apenas para a descrição do trabalho.

Nestas sessões foram trabalhadas as tarefas provenientes do arrolamento realizado, de diversas tarefas sobre divisibilidade, presentes nos exames vestibulares, nas listas de exercícios de cursos preparatórios para o vestibular, nas Olimpíadas de Matemática, nos livros didáticos para a escola básica e nos livros de Teoria dos Números e Aritmética para o ensino universitário, totalizando 23 tarefas apresentadas aos alunos, as quais se encontram enunciadas na íntegra e em ordem cronológica nos anexos. Visando melhor clareza na apresentação deste trabalho, optamos por agrupá-las em tipos de tarefas, para uma melhor percepção dos aspectos abordados, diferindo, portanto, das que foram realizadas nas sessões.

Todas as sessões de estudo foram iniciadas com a leitura da tarefa proposta, nas quais esclarecemos o significado das palavras e símbolos matemáticos, cujo objetivo era a compreensão de seu enunciado.

As atividades propostas foram exploradas e analisadas de forma exaustiva durante as sessões, seja na mesma sessão em que foi apresentada ou em outras posteriores e, quando necessário, as mesmas eram retomadas.

Após aproximadamente três meses de estudo, sugerimos aos alunos que realizassem algumas atividades em casa. No início houve resistência por parte de alguns, dizendo que não tinham tempo, mas depois as questões começaram a intrigá-los e estes, espontaneamente, começaram a retomar as questões que não eram resolvidas na mesma sessão por falta de tempo, em momentos diferentes do estabelecido.

Durante as sessões de estudo também foram discutidos, de forma breve, assuntos diferentes do objeto da pesquisa, mas que eram do interesse dos alunos como: as mudanças do Enem, o acesso ao ensino superior público, os cursos de nível superior à distância, as possibilidades de bolsas de estudo na graduação, o objeto de estudo de um matemático, e as características do curso de Licenciatura em Matemática na UFMS.

Conforme apresentação anterior, as tarefas foram categorizadas em três tipos, a saber: $T_1$: Determinar o resto da divisão entre dois números inteiros; $T_2$: Encontrar os Múltiplos e/ou Divisores e $T_3$: Determinar a quantidade de divisores de um número.

Vale ressaltar sempre que necessário, as tarefas as técnicas e os elementos tecnológicos-teóricos eram retomados.

As tarefas pertencentes aos tipos aqui categorizados podem ser resolvidas com técnicas justificadas por elementos tecnológicos-teóricos, cuja demonstração formal, conforme preconizada na academia, não faz parte da instituição “curso preparatório para o vestibular”, mas o uso e a compreensão de seus resultados são necessários para uma resolução eficiente das tarefas.

### 5.5.1 Tipo de tarefa $T_1$: Determinar o resto da divisão entre dois números inteiros

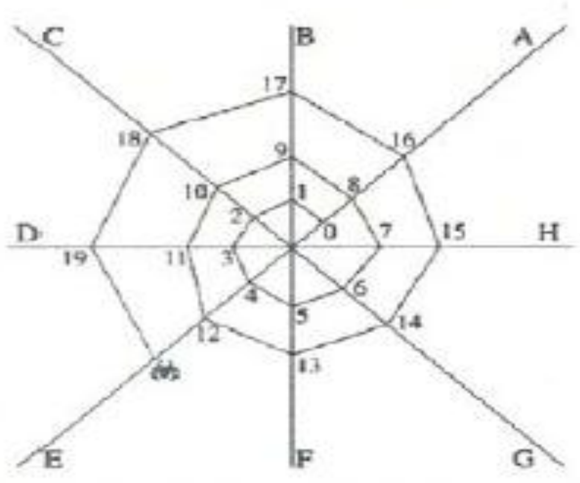
#### 5.5.1.1 *Problema da Teia de Aranha*

Após a realização de três sessões iniciais, cujos objetivos foram a apresentação dos envolvidos na pesquisa e o diagnóstico dos conhecimentos do grupo sobre divisibilidade, foram iniciadas as sessões concernentes aos tipos de tarefas escolhidas. A primeira tarefa apresentada foi o “Problema da Teia de Aranha”.

Levando em consideração o que foi observado nas sessões previas, foi previsto que ela não seria resolvida de imediato, já que durante as sessões experimentais não foi possível o aprofundamento do estudo dos conceitos e das propriedades da divisibilidade e, por isso, vários pontos foram retomados no decorrer das realizações das sessões. Outro motivo que caracteriza esta questão como sendo de solução não trivial, é que a encontramos disponível em alguns sites de cursos preparatórios como sendo uma atividade desafiadora.

Por esses motivos fez-se necessário insistir nesta atividade, pois ela poderia despertar o interesse do grupo pelo estudo, além de ser um problema atual nas tarefas pertencentes às instituições de avaliação como o vestibular e a Olimpíada de Matemática. Vejamos o problema conforme apresentado aos alunos:

A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho.




a. Sobre qual fio de apoio estará o número 15?
b. Sobre qual fio de apoio estará o número 30?
c. É possível o número 80 estar sobre o fio de apoio C? Por quê?
d. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?
e. Escreva uma regra para descobrir qual o fio de apoio de qualquer número.

Salientamos que a evidência real desta tarefa, ora proposta, foi resolver, em especial, o item ‘e’. Os itens de ‘a’ a ‘d’ tiveram um papel importante, porém estes não se caracterizaram como um problema para o grupo, pois apresentavam tarefas, de certa forma, rotineiras.

Ao convidarmos os estudantes a realizarem a solução dos itens ‘a’ ao ‘d’, visou-se que o grupo pudesse vivenciar o momento exploratório e o momento de trabalho com a técnica, objetivando fornecer instrumentos para que fosse resolvida a letra e.

A sessão foi iniciada com a leitura da tarefa e o esclarecimento das dúvidas quanto à compreensão do enunciado. Devido à timidez de alguns participantes, uma vez que se iniciava o trabalho com o grupo, as perguntas ocorreram de forma abreviada. Após a leitura realizada com o grupo todo, os estudantes começaram a resolver a atividade em duplas e/ou trios. Ao se observar o desempenho dos alunos, foi identificada a primeira estratégia didática de solução. A fronteira entre o didático e o matemático é muito imprecisa, uma vez que, historicamente, vem se produzindo uma matematização crescente do didático. Em alguns casos, nos quais foi possível perceber esta distinção, optamos em fazê-la e, para tanto, pautamo-nos em elementos tecnológicos. Além disso, destacamos que, se a justificativa da técnica é de cunho natural, consideramos a mesma como técnica didática, mas se ela é de cunho matemático, consideramo-la como sendo uma técnica matemática.

Desta forma, estratégia didática usada nesta tarefa consistiu em seguir os fios da teia de aranha em forma de caracol e a ferramenta matemática utilizada neste momento de estudo foi contar de um em um. Neste caso, a figura da teia de aranha teve um papel relevante, assumindo a função de um ostensivo gráfico do problema, servindo inicialmente como um apoio para perceberem a sequência de números inteiros não negativos.

Após poucos minutos do início do trabalho com a técnica de seguir a teia de aranha, motivados pela pergunta elaborada numa intervenção: “Qual o fio que se encontra o 1000?”, começaram a surgir os primeiros traços avaliativos desta técnica. Alguns estudantes perceberam que a técnica de somar um a um, seguindo o fio da teia, não era muito eficiente, pois desta forma demorariam muito tempo para responder o que estava sendo solicitado, e, mais ainda, esse procedimento não era condizente com a instituição “curso preparatório para o vestibular”.

Ao manipularem os dados intrínsecos da tarefa perceberam que havia outra regularidade, ou seja, encontraram uma segunda maneira de fazer, a qual consistia em seguir as linhas existentes na figura. Dessa forma encontraram a sequência dos números inteiros, assim construída: a cada intersecção da linha com o fio da teia, aumentavam oito unidades.

Considerou-se que houve uma evolução na forma de os alunos observarem a sequência, considerando a instituição “curso preparatório para o vestibular”, já que não ficaram presos a um único aspecto do ostensivo presente na figura e puderam explorar os dados do problema encontrando mais de uma maneira de solucionar os itens a ao d.

Apesar de a segunda técnica possibilitar mais rapidez para encontrar a posição de um dado número, ela não permitiu que os estudantes respondessem ao item ‘e’, centro da tarefa proposta, pois os conhecimentos que possuíam naquele momento não eram suficientes para que registrasse uma regra para descobrir qual seria o fio de apoio de um número qualquer.

Considerando o vestibular como uma avaliação que tem suas especificidades, mesmo que implícitas, e que uma delas é o tempo destinado à solução de cada questão, vale evidenciar que os sujeitos nessa avaliação, além de resolverem as tarefas propostas, devem priorizar técnicas que permitam ser realizadas no menor de tempo possível. Este é um dos motivos que nos levou a considerar a segunda técnica mais eficiente do que a primeira.

Alguns alunos julgaram que a solução da letra ‘e’ estava associada à Progressão Aritmética (PA), em que o número oito seria a razão. No entanto, eles não conseguiram elaborar uma regra geral conforme lhes foi solicitado, ou seja, houve apenas uma suposição de que a solução estivesse relacionada ao conceito de P.A.

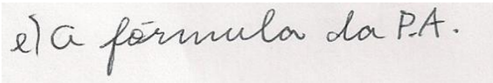



Figura 13 - Progressão Aritmética

Esta atitude de apenas mencionar uma possível maneira de fazer, não insistindo na solução mostrando como ela funciona, justificando-a, contraria o terceiro postulado antropológico que diz que uma técnica deve parecer compreensível, legível e justificada, conforme Bosch e Chevallard, (1999, p.06, Tradução nossa)

> O terceiro postulado antropológico refere-se à ecologia das tarefas e das técnicas, isto é, das condições e das restrições que permitem ou não a produção e a utilização nas instituições. Supomos que, para existir em uma instituição, uma técnica deve parecer compreensível, legível e justificada. Trata-se de uma restrição institucional mínima para permitir o controle e garantir a eficácia das tarefas, que são geralmente tarefas cooperativas, supondo a colaboração de vários atores. Esta restrição ecológica implica na existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas [...].

De modo geral, os estudantes utilizaram a técnica matemática da soma para perceberem a sequência dos números inteiros com intervalos de um em um e de oito em oito. Apesar de os dois casos serem uma sequência de números inteiros, as formas de obtê-los foram diferentes.

No primeiro caso o intervalo ocorreu de um em um e, de certa forma, os alunos o fizeram de maneira “automática”. No segundo caso utilizaram a ideia do algoritmo da soma. Sendo assim, defendemos que os elementos tecnológicos foram diferenciados em cada um dos casos. Não obstante estas duas tecnologias estarem intimamente relacionadas, a maneira de os alunos manipularem-nas não são as mesmas, e, por esse motivo, consideramos que são técnicas diferentes. Vejamos os registros de um dos grupos ao responder o item ‘c’.

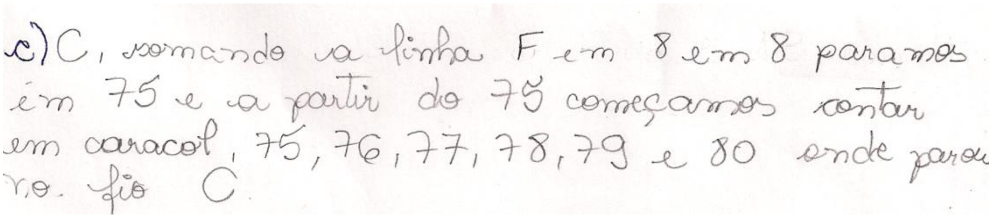

c) C, somando na linha F em 8 em 8 paramos em 75 e a partir do 75 começamos contar em caracol, 75, 76, 77, 78, 79 e 80 onde parou no fio C.

Figura 14 - Soma de oito em oito e de um em um

Observemos que inicialmente, ao se referirem à sequência de 8 em 8, usam o termo “somando”; portanto, os elementos tecnológicos referentes à técnica de somar de oito em oito são construídos com base no princípio aditivo. Quando usam o ostensivo do caracol empregam o termo “contar”, que está relacionado à sequência de um em um. O elemento tecnológico neste caso é a sequência dos números inteiros.

Do ponto de vista do rigor matemático e considerando a instituição na qual está sendo desenvolvida a tarefa, observa-se que estas estratégias de solução são de certa forma um tanto “empíricas”. No entanto, elas mostram a real construção dos fatos que ocorreram para chegarem a solução dos itens ‘a’ a ‘d’ da tarefa.

No quadro apresentado a seguir há a síntese de alguns elementos da atividade matemática realizada pelo grupo.

Quadro 2 - Primeiros elementos praxeológicos do problema Teia de aranha

| Elementos da técnica didática | Elementos da técnica matemática | Elementos tecnológicos |
|---|---|---|
| Seguir o fio da teia em forma de caracol.<br><br>2. Seguir a linha de forma crescente. | Seguir a sequência dos números inteiros um a um de forma automatizada.<br><br>Somar oito ao termo anterior. | Sequência dos números inteiros não negativos.<br><br>Principio Aditivo. |

No decorrer desta sessão emergiram pelos menos duas maneiras diferentes de examinar os itens ‘a’ ao ‘d,’ com as quais os estudantes puderam vivenciar o momento exploratório, o momento do trabalho com técnicas e o momento de avaliação da técnica.

O momento exploratório ocorreu porque não foi indicada previamente nenhuma técnica de resolução, havendo a necessidade, dos estudantes de aceitar a atividade como uma tarefa. Já em relação ao trabalho com a técnica, houve realmente a ocorrência desse momento, pois alguns alunos repetiram a mesma técnica nos itens de ‘a’ ao ‘d’. Durante o trabalho com a técnica aconteceu o momento de avaliação da técnica, ao perceberem que poderiam utilizar uma técnica mais abrangente do que a primeira.

A presente sessão de estudo foi finalizada com o combinado de que esta tarefa seria retomada, após o trabalho com outros problemas que fornecessem subsídios teóricos para que pudessem resolvê-la plenamente. Por esse motivo, nas sessões seguintes foram propostas ao grupo tarefas não rotineiras, de acordo com a experiência vivenciada nas seções iniciais, a fim de que fornecessem o suporte teórico necessário para a retomada do problema da Teia de Aranha. Desta forma, foram organizadas sessões "aula de problemas", objetivando despertar nos participantes reflexões que fortalecessem os principais conceitos sobre o tema divisibilidade.

Em contrapartida, os estudantes passaram a utilizar alguns dispositivos didáticos, que segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 278), é assim definido:

> Em geral, um dispositivo escolar será qualquer "mecanismo" preparado para obter determinados objetivos educacionais. Assim, por exemplo, a aula de matemática, a de língua, o livro didático, a biblioteca, as provas, as perguntas que faz o professor em aula, as sessões de tutoria e os descansos são dispositivos escolares. À medida que cada um desses dispositivos incide sobre a estruturação e o desenvolvimento do processo de estudo da matemática, funcionando como um dispositivo de ajuda para o estudo da matemática, diremos que se trata, além disso, de um dispositivo didático (no sentido de didático-matemático).

Os principais dispositivos didáticos utilizados pelos alunos foram as pesquisas em livros de matemática, discussão com os colegas fora do horário determinado para a ocorrência dos encontros sobre assuntos relacionados à matemática e o levantamento de dúvidas para serem discutidas nesses encontros semanais. Essas atitudes, segundo relato dos próprios participantes, não faziam parte dos seus hábitos diários até então. Diante do comportamento do grupo, a seleção das questões passou a ser de forma que viessem ao encontro dos anseios dos integrantes da pesquisa.

Desta forma, identificamos essa maneira dos estudantes se interagirem com as tarefas propostas no grupo como sendo um dos três aspectos da atividade matemática que é aprender (e ensinar) matemática, conforme Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 55).

> [...] o estudo de um sistema matemático [...] gera questões que podem ser abordadas mediante instrumentos matemáticos já existentes, mas que são desconhecidos para aquele que desenvolve a atividade. Surge, então, a necessidade de aprender matemática para poder responder às questões propostas. Também aparece como consequência a atividade

> de ensinar matemática: o professor de matemática ajuda seus alunos – matemáticos em apuros - a buscar e a utilizar os instrumentos matemáticos que eles necessitam para modelar e resolver certas questões desconhecidas, ainda que clássicas para um matemático profissional.

A partir dessas considerações, a nossa postura no grupo passou a ser a de coordenador do estudo, com o objetivo de oportunizar aos estudantes participantes da pesquisa vivenciarem diferentes momentos de estudo, a partir desta tarefa didática. Consideramos esta tarefa como tarefa didática por ser uma tarefa retirada de um contexto exclusivo escolar e que pode servir de modelos para solução de outras tarefas do mesmo tipo. Para tanto, nossa dinâmica passou a se basear no que Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 263) propõem em um processo de estudo.

> [...] essas tarefas didáticas são tarefas cooperativas, nas quais participam alunos e professores: o aluno conta com o professor, para que o ajude a viver esses diferentes momentos, e o professor conta com a energia de seus alunos e com seu envolvimento no processo de estudo [...]

Observamos que retomamos a tarefa "teia de aranha" após aproximadamente três meses de permanência no grupo de estudos e foram trabalhadas seis tarefas, ($t_2$, $t_3$,$t_4$, $t_5$, $t_6$, e $t_7$ ) cujo enunciados, estão nos anexos. Destacamos que as tarefas $t_2$, $t_4$, $t_5$ e $t_6$ pertencem ao tipo de tarefa $T_2$: determinar os múltiplos e/ou divisores e as tarefas $t_7$ e $t_3$, são pertencentes ao tipo de tarefa $T_1$: determinar o resto da divisão entre dois números inteiros. Dentre as seis trabalhadas, foram apresentadas as análises das tarefas $t_4$ e $t_7$. Na tarefa $t_4$, a questão crucial foi constituída a partir do conceito do múltiplo de 3. Em relação à tarefa $t_7$ a questão crucial foi formada com base no algoritmo da divisão, mais especificamente com resto 2.

Ressaltamos ainda que, devido à reciprocidade ocorrida neste grupo de trabalho, além das tarefas mencionadas anteriormente, foram também trabalhadas outras questões trazidas pelos alunos, alheias ao tema da pesquisa, mas que eles ansiavam por discutir uma possível solução. Como o problema da "teia de aranha" ainda estava sem solução, sobretudo o item 'e' ele foi retomado a fim de que fosse totalmente esclarecido.

É importante descrever a utilização das técnicas e dos momentos vivenciados pelos alunos na sessão de retomada do problema, principalmente o trabalho desenvolvido do item 'a' até o 'd', com o objetivo de se verificar a possível da técnica, considerando as perspectivas matemáticas, didáticas e do uso dos ostensivos até chegarem finalmente ao item 'e'.

No caso do item ‘c’, expresso pelo enunciado: É possível o número 80 estar sobre o fio de apoio C? Por quê? Foram selecionados dois registros diferentes apresentados pelos alunos, os quais consideramos “amadurecidos” do ponto de vista matemático, em relação ao que tinham feito anteriormente. Estes versaram sobre duas técnicas matemáticas distintas, mostrando domínio sobre o conhecimento das noções básicas de divisibilidade.  Na Figura 15, usaram o algoritmo da divisão em linguagem aritmética e verbal e na Figura 16 aplicaram o conceito de múltiplo em linguagem verbal.

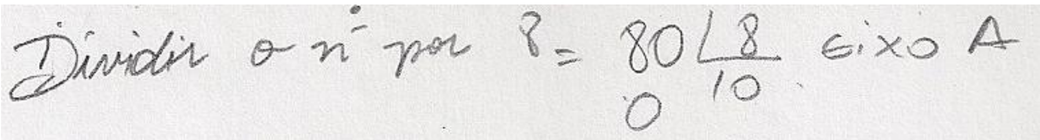


Figura 15 - Algoritmo da divisão para justificar sobre qual eixo está o número oitenta

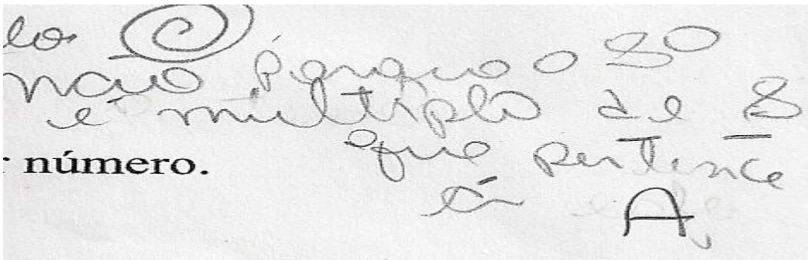


Figura 16 - Conceito de múltiplo para justificar sobre qual eixo está o número oitenta

Observou-se que as técnicas embasadas nos conceito de múltiplos e de divisores não foram unânimes nos grupos, e que os estudantes tiveram tempos diferentes para adquirir o domínio da técnica. Desta forma, houve grupos que após três meses de estudo mantiveram a mesma técnica de contar de oito em oito para resolver o item ‘c’, conforme se pode verificar no excerto abaixo:

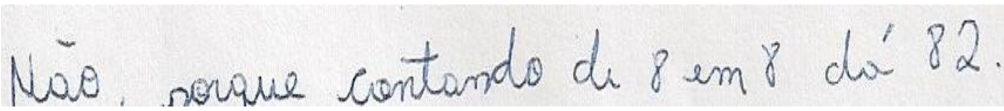


Figura 17 - Contando de oito em oito para justificar sobre qual fio esta o número oitenta

E o interessante é que este mesmo grupo que apresentou esta técnica “rudimentar”, considerando a instituição em que a questão foi proposta, ao resolver o item d, utilizou-se de uma técnica mais “evoluída” (Figura 18), agora de acordo com a instituição “curso preparatório para o vestibular”, ou seja, utiliza o algoritmo da divisão.

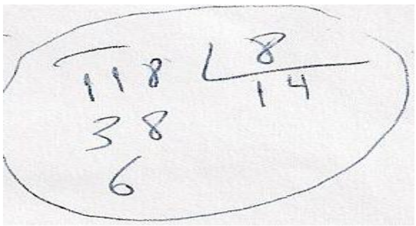



Figura 18 - Algoritmo da divisão para justificar sobre qual fio esta o número 118

Contudo, ao validar a tarefa, figura 19, lança mão novamente de uma técnica rudimentar, ou seja, da soma de oito em oito a partir do primeiro número da sequência, ou seja, começando pelo número seis. Ressaltamos que usamos o termo validar no sentido que Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 222) apresentam:

> Na dialética da validação, o aluno deve demonstrar por que o modelo que criou é válido. Mas, para que o aluno construa uma demonstração e essa tenha sentido para ele, é necessário que a construa em uma situação, chamada de validação, na qual deve convencer alguma outra pessoa.

E ainda, para efetuar a soma utiliza-se de ostensivos como o sinal de mais (+), os números posicionados verticalmente, o traço para indicar o final da conta; confirma-se assim, nossa afirmação relacionada à técnica, ou seja, ser rudimentar do ponto de vista da instituição “curso preparatório para o vestibular”.

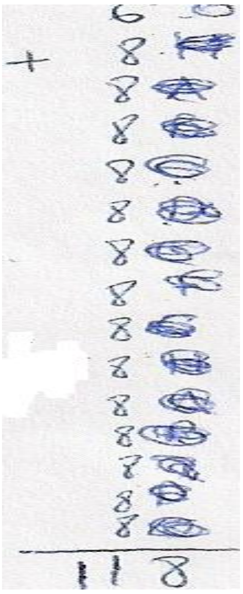



Figura 19 - Validação da técnica do algoritmo da divisão

Ao entrevistarmos os componentes deste grupo para saber se haviam utilizado o conceito de resto da divisão para validarem o problema, responderam negativamente, fazendo a seguinte afirmação: olhando para figura pegamos o primeiro número da sequência da linha G, ou seja, o número seis. Vale notar assim que o ostensivo gráfico teve um papel determinante para a validação da solução.

Percebeu-se que, apesar de este grupo saber da existência de técnicas mais eficientes para resolver a tarefa proposta, ele ainda necessitava das técnicas utilizadas no início do estudo, o que nos levou a concluir que, de certa forma, esses alunos foram resistentes ao novo. Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p.263) chamam este comportamento de reacionário, conforme podemos constatar no trecho:

> E.: Mas sempre haverá alunos que se manterão na questão de início.
> P.: Sim, alunos de alguma maneira reacionários, que terão dificuldade de se desprenderem da primeira técnica. É normal. Mas o professor indica a eles que, nessa instituição que é sua aula, terão de fazê-lo dessa ou daquela maneira. Inevitavelmente, em algum momento, deverá precisar qual será a "boa técnica".

No caso particular da pesquisa, para direcioná-los à "boa técnica" foi proposto um debate no grupo para que, juntos, chegássemos ao consenso de que a melhor maneira era utilizar o resto da divisão, não perdendo de vista que, no caso particular da instituição "curso preparatório para o vestibular", é fundamental estar atento para priorizar técnicas rápidas e eficientes, uma vez que o fator tempo é fundamental.

Destacamos ainda que, a resistência deste grupo em usar o algoritmo da divisão observando o resto para a validação da tarefa, sejam prováveis reflexos das inconsistências herdadas do ensino básico, em relação à compreensão do conceito e as relações do algoritmo da divisão. Essa situação confirma estudos realizados por Fávero e Neves (2008, p. 112), em que mostram que, de certa forma há uma tentativa deliberada por parte dos alunos ali pesquisados em evitar o uso do referido algoritmo:

> [...] os algoritmos alternativos foram os mais utilizados, visto pelos alunos como mais eficazes do que o algoritmo formal, e que tais alunos não compreendem a lógica do algoritmo formal, o que explica, nos parece, a preferência pelos algoritmos alternativos.

Em relação ao item e apresentamos a solução de dois grupos diferentes. Um deles descreve a solução predominantemente na linguagem verbal (Figura 20), porém mantendo a qualidade do discurso do ponto de vista matemático, empregando corretamente os termos relativos à divisão.

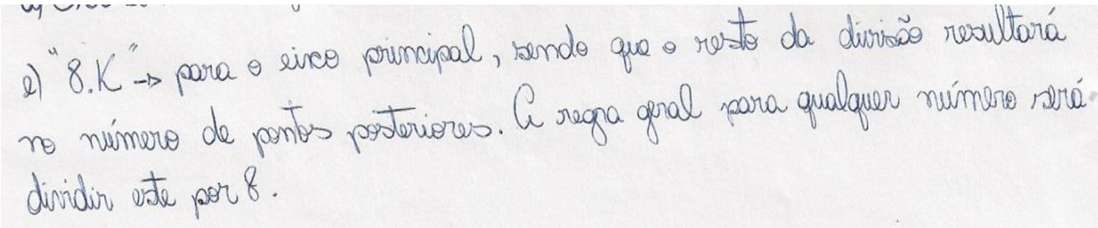

e) "8.K" → para o eixo principal, sendo que o resto da divisão resultará no número de pontos posteriores. A regra geral para qualquer número será dividir este por 8.

Figura 20 - Regra geral em linguagem verbal

Já o outro grupo empregou a linguagem algébrica (Figura 21), mostrando a relação do resto em cada fio da teia de aranha e para elucidarem os registros, apresentaram também um discurso conciso, em linguagem verbal, para justificar o modelo construído, (Figura 22).

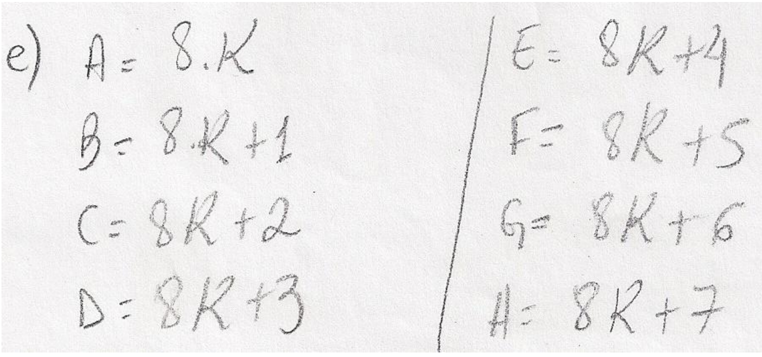

e) $A = 8.K$ | $E = 8K+4$
$B = 8.K+1$ | $F = 8K+5$
$C = 8K+2$ | $G = 8K+6$
$D = 8K+3$ | $H = 8K+7$

Figura 21 - Regra geral em linguagem algébrica

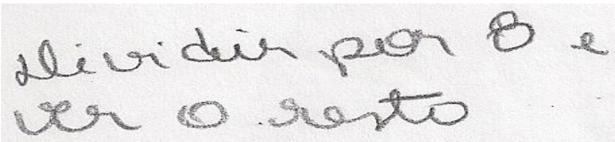

dividir por 8 e ver o resto

Figura 22 - Justificativa utilizada na regra geral ao usarem a linguagem algébrica

Na segunda fase da resolução do problema "teia de aranha", alguns momentos foram vivenciados durante o estudo, a saber: o momento do primeiro encontro ou reencontro com o problema, momento exploratório, momento de trabalho com a técnica e a construção do entorno tecnológico-teórico.

O momento do primeiro encontro para alguns, apesar de já terem tido contato com aquela tarefa, pode não ter de fato vivenciado este momento. Para outros ocorreu o momento do reencontro com um tipo de tarefa, uma vez em um no contato com a tarefa, elaboraram novas técnicas de solução e resolveram o item 'e' que, anteriormente não haviam solucionado. Pode-se afirmar então que houve um reinvestimento neste tipo de tarefa: determinar o resto da divisão entre dois números inteiros.

O momento de exploração do tipo de tarefa foi vivenciado pela tarefa específica da “teia de aranha”, a qual serviu de instrumento para a constituição de um modelo envolvendo resto da divisão e, mesmo sendo um modelo embrionário, poderá ser usado em outras tarefas do mesmo tipo.

O trabalho com a técnica aconteceu durante a realização dos itens ‘a’ ao ‘d’, o que possibilitou a construção de um modelo, tecnológico-teórico, embora embrionário, pode resolver não só as tarefas ali presentes, mas outras tarefas do mesmo tipo, sendo justificado pela análise do resto da divisão de números inteiros.

Apresentamos, em um quadro, a síntese do modelo praxeológico vivenciado pelo grupo durante a resolução do problema “teia de aranha”, no qual procuramos priorizar as técnicas mais frequentes no grupo, para resolver o item e.

Quadro 3 - Modelo praxeológico referente ao item *e*

| | |
|---|---|
| Técnica Matemática | Utilização do algoritmo da divisão especificamente considerando o divisor igual a oito. |
| Elementos tecnológicos | Resto da divisão, ou seja, ao fixar um número natural m $\geq 2$, pode-se sempre escrever um número qualquer n, de modo único, na forma $n = mk + r$, onde k, r   N e $r < m$. |
| Elementos teóricos | Aplicação do Teorema da Divisão Euclidiana[16] |

5.5.1.1.1 Algumas observações sobre a tarefa teia de aranha

Observou-se que houve evolução do ponto de vista matemático e didático, para resolver o problema proposto, pois os estudantes tiveram um intenso trabalho até chegar à construção do modelo por eles apresentado, verificando-se uma maior sofisticação no registro dos ostensivos utilizados na realização da tarefa, comparados aos do primeiro contato com este problema.

Destacamos ainda que, o desenvolvimento do grupo não ocorreu de forma linear, pois cada aluno seguiu seu próprio ritmo, o que pôde ser verificado nos registros de linguagem das técnicas, que ora eram mais evoluídos, ora rudimentares. No entanto,

[16] (Enunciado do Teorema) Sejam a e b dois números naturais com $0 < a <$ b. Existem dois únicos números naturais *q* e *r* tais que $b = a.q + r$, com $r < a$.

todos, de certa forma, aceitaram o problema e buscaram aplicar técnicas mais evoluídas que as iniciais.

5.5.1.2 *Problema da sequência de resto dois*

O problema da sequência de resto 2 foi proposto como um dos problemas a serem trabalhados logo após a primeira apresentação do problema da teia de aranha. A realização desta tarefa ocorreu em uma única sessão conforme havíamos previsto e, apesar de ser uma tarefa não trivial para os alunos, foi possível realizá-la mediante articulação de conhecimentos que estes possuíam naquele momento do estudo. O problema foi assim enunciado:

(Mackenzie – Modificado)
Escreva a sequência dos números naturais n, $100 < n < 999$, que divididos por 9 deixam resto 2. Explique sua resposta.

Como de costume, ao iniciarmos a sessão entregamos a folha com o enunciado do problema e procedemos à leitura do mesmo com todo o grupo. Durante esse procedimento identificamos alguns dados no enunciado que poderiam consistir em barreira para a sua compreensão. Primeiramente, com relação aos números naturais, uma vez que a identificação dos conjuntos numéricos, sempre que abordado durante o estudo, era alvo de dúvida. Ainda havia alunos que não dominavam a constituição dos conjuntos numéricos referentes aos naturais, inteiros não negativos, inteiros, racionais e reais; no entanto, era necessário que estivesse clara a relação entre o conceito e a linguagem contida no enunciado da tarefa. Logo após passamos para a discussão do ostensivo “<“ (menor), procurando elucidar o significado do mesmo no contexto do problema.

Realizado tais procedimentos, iniciaram-se os trabalhos nos grupos, aos quais, ao percorrermos, notamos que a técnica didática por tentativas era a mais veiculada entre os participantes e a técnica matemática empregada era o algoritmo da divisão. Desta maneira, os estudantes foram experimentando alguns valores do intervalo citado no problema na tentativa de formar a sequência solicitada.

Perante essa situação, interferimos junto aos grupos com a seguinte indagação: “Esta maneira de fazer garante que encontrarão todos os números pertencentes ao intervalo dado?” Como estávamos em contato com o grupo há, aproximadamente dois meses, havia se constituído um convívio social suficientemente capaz de interpretar algumas cláusulas do contrato didático estabelecido em nosso ambiente de estudo. Ressaltamos que utilizamos a ideia de contrato didático, segundo descreve Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 203):

> A noção de contrato didático se inspira em uma visão do mundo social na qual cada tipo de interação particular supõe um contrato cujas cláusulas definem, ao mesmo tempo, aquilo que os protagonistas da interação podem legitimamente fazer e o significado de suas atuações. Participar de uma interação social determinada supõe que se reconheça (e se aceite) o contrato específico que a rege.

Por mais que as cláusulas do contrato didático estivessem implícitas na relação, elas iam se evidenciando no decorrer das ações. Desta forma, os estudantes entenderam que era preciso buscar outras técnicas para que pudessem resolver problemas daquele tipo com segurança e maior eficácia.

Em resposta a indagação realizada, os estudantes começaram a construir uma técnica a partir dos resultados que haviam encontrado anteriormente. Eles sabiam que o primeiro número da sequência era o número 101, encontrado por tentativa, ou seja, foram dividindo os valores do intervalo e verificando o resto. Na continuação desta situação de estudo, começaram a analisar as divisões efetuadas, na qual conseguiram reorganizar o resultado apresentado pelos ostensivos em linguagem algébrica: 9 x 11 + 2 = 101, 9 x 12 + 2 = 110, 9 x 13 + 2...9 x 110 + 2; e em linguagem verbal: “A partir do número natural 101 somando 9 e dividido por 9, sobra resto 2”.

A técnica matemática para a resolução desta tarefa continuou sendo o algoritmo da divisão e os elementos tecnológicos tiveram apoio na propriedade da divisão que diz: “Em toda divisão, o dividendo será sempre igual à soma do resto com o produto do divisor pelo quociente”, ou seja: D = Q. d + r, onde D, Q, d e r representam respectivamente o dividendo, quociente, divisor e resto.

Até então, consideramos que houve avanços do ponto de vista das respostas às atividades matemáticas e também que os alunos puderam vivenciar os momentos de reencontro com um tipo de tarefa; o de avaliação da técnica; o de exploração de um tipo de tarefa; e o de elaboração de uma técnica.

O momento do reencontro parece ter ocorrido apenas para os alunos que compreenderam a tarefa e atribuíram uma solução à mesma, mesmo que esta tenha sido realizada com base no método de tentativa. No entanto, a justificativa utilizada por eles era fraca, considerando a instituição na qual esta atividade foi proposta. Houve então um novo encontro com esta tarefa e foi necessário elaborar uma nova estratégia de solução. Para que houvesse esta mudança de estratégia, o momento de avaliação da técnica fez-se necessário.

O momento de exploração da tarefa e a elaboração de uma técnica estiveram presentes, uma vez que os alunos tiveram que manipular os dados que obtiveram e tiveram que elaborar uma técnica evidenciando o resto da divisão. Cabe salientar que este modelo resolve a tarefa não só no caso específico de o resto ser 2, mas para qualquer valor pertencente aos números inteiros não negativos.

Diante das mudanças de estratégias, que aconteceram de forma esperada, percebemos que poderíamos avançar ainda mais no desenvolvimento do estudo. Sendo assim, continuamos a sessão com o seguinte questionamento: “Considerando os números naturais, como poderíamos escrever uma regra geral que expresse os números cuja divisão por 9 deixa resto 2?”.

Agora, o desafio era construir um modelo algébrico a partir do modelo aritmético que haviam construído anteriormente. Os alunos, nesta situação de estudo, portaram-se de forma mais independente do que em sessões anteriores. Eles foram à busca da forma geral que pudesse expressar a ideia que representasse a solução da tarefa. Para tanto, realizaram as verificações necessárias e julgaram sua eficácia sem que ficassem questionando se seus procedimentos estavam corretos ou não. A validação foi realizada no próprio grupo, até chegarem à expressão $(x+2)\div 9$. Observamos ainda, que a utilização do ostensivo “parênteses” foi uma das dificuldades a ser vencida para a construção da expressão. Uma vez que eles, inicialmente, não registraram os parênteses, efetuavam a resolução usando os parênteses, porém sem efetuar a sua devida anotação. Foi necessária uma pequena intervenção para explorarmos a importância de registrar os parênteses em uma expressão qualquer.

O momento de exploração do tipo de tarefa voltou a estar presente nesta sessão de estudo, uma vez que trabalharam novamente com aquela tarefa específica. No entanto, agora, passaram a explorá-la de maneira diferenciada. A técnica desenvolvida pode servir como modelo para a realização de outras tarefas pertencentes a este tipo.

Consideramos que o trabalho de avaliação da técnica ocorreu em pelo menos dois instantes diferentes. Um, quando os estudantes apropriaram-se da técnica encontrada anteriormente, ou seja, a forma aritmética $9 \times 11 + 2 = 101$, $9 \times 12 + 2 = 110$, $9 \times 13 + 2 ... 9 \times 110 + 2$, mas julgavam insuficiente essa forma de representar; o outro ocorreu quando expressaram na forma algébrica $(9x + 2) \div 9$, com x N / x > 10 e x < 110 e decidiram que esta maneira de expressar a técnica era mais abrangente e mais eficaz.

5.5.1.2.1 Observações finais sobre o problema da sequência de resto 2

Vale destacar que nesta sessão de estudo foram propostas duas tarefas diferentes pertencentes a um único tipo. A primeira tarefa consistiu em encontrar a sequência de números naturais em um dado intervalo com resto fixo, ou seja, resto 2; a segunda era escrever de forma geral uma expressão com intervalo infinito e com resto fixo. Observa-se que a primeira tarefa está contida na segunda tarefa, apesar de elas terem suas próprias especificidades. Optou-se por não apresentar a análise em duas tarefas, pois as estratégias de solução estavam interligadas, de forma que a expressão final foi consequência do desenvolvimento do estudo realizado em uma sessão.

Ainda nesta sessão, não podemos deixar de evidenciar alguns importantes avanços que ocorreram no processo de estudo como, por exemplo, o desprendimento da técnica didática do tipo tentativa, que até então era arraigada diante da resolução de problemas propostos no contexto escolar. O uso daquela técnica, em diferentes casos, apresentava-se nociva para o desenvolvimento de técnicas na instituição “curso preparatório para o vestibular”.

### 5.5.2 Tipo de tarefa T2: Determinar os Múltiplos e/ou Divisores

5.5.2.1 *Problema da sequência de figuras*

A tarefa da sequência de figuras foi baseada em um problema das Olimpíadas de Matemática. Ela foi proposta ao grupo no intervalo de tempo compreendido entre a primeira e a segunda apresentação do problema da teia de aranha. E a apresentamos como a seguir:

- Observe a sequência de figuras que segue sempre o padrão de repetição:

■,●,Δ,■,●,Δ...

Responda as questões abaixo e escreva como encontrou as respostas.

a) Qual é a figura que representa o 7º termo da sequência? E o 8º termo?
b) Construa a sequência até o 15º termo.
c) Você pode explicar como chegou até o 15º termo?
d) Qual figura estaria representada na 20ª posição?
e) Qual figura ocupa a 12ª, 15ª, 18ª e 21ª posições? Quais outras posições essa figura pode ocupar?
f) Vamos pensar no quadrado. Quais posições que o quadrado pode ocupar?
g) Qual figura ocupará a 30ª, 42ª, 60ª e 88ª?
h) Descreva uma maneira para encontrar uma figura que corresponde a qualquer número apresentado.

Esta tarefa também possui um padrão e pode ser classificada como do mesmo tipo da tarefa da teia de aranha, ou seja, os primeiros itens (*a* a *g*) podem ser resolvidos com o uso das figuras, ou ainda do ostensivo gráfico, como apoio; a justificativa da técnica fica restrita, não estende a generalização, conforme Bosch e Chevallard, (1999, p. 24, tradução nossa), [...] “técnicas que se apóiam sobre ostensivos gráficos se introduzem “de maneira ostensiva” e funcionam de início e por vezes longamente de uma maneira implícita, indo por si mesmo e não requer justificativas particulares”, ou seja, enquanto o estudante enquanto estiver apoiado no ostensivo gráfico a justificativa é baseada no próprio ostensivo.

O problema começa aumentar sua complexidade quando a justificativa não é mais feita com base no ostensivo gráfico, em particular no que é solicitado no item h, que pode ser entendido como a generalização dos itens anteriores.

A primeira maneira apresentada pelos alunos para realizar as tarefas consistiu em construir a sequência com o apoio da figura, numerando-a uma por uma, conforme ilustrado na Figura 23. Entendemos esta estratégia de solução, como sendo uma técnica didática, de fundamental importância para a maturidade do estudo, segundo Pais (2006), “[...] são ações experimentais que estabelecem filamentos com a construção de uma afirmação teórica. É o entrelaçamento entre teoria e experiência”.

A figura neste caso é um objeto ostensivo de valência instrumental, dando ao ostensivo uma instrumentalidade potencial, em que a técnica de resolução se materializa a partir do ostensivo. É importante ressaltar que esta instrumentalidade ocorre em consonância com a instituição em que a tarefa está sendo realizada.

Observamos que, para alguns alunos, este era o primeiro encontro com aquele tipo de tarefa e também o início do momento exploratório, uma vez que, desenhar e enumerar as figuras foram apenas estratégias de solução iniciais, e que, a partir delas, novas possibilidades foram surgindo. Esta atitude dos alunos em desenhar a sequência e não apenas fazê-la oralmente, foi fundamental para que pudessem manipular seus elementos e, com o apoio do ostensivo escrito, eles puderam desenvolver a técnica com maior segurança. Conforme Bosch e Chevallard (1999, p. 29, tradução nossa), “Contrariamente ao discurso oral, a escrita fixa os objetos sobre o papel e permite assim, “manipulá-los [...]”.

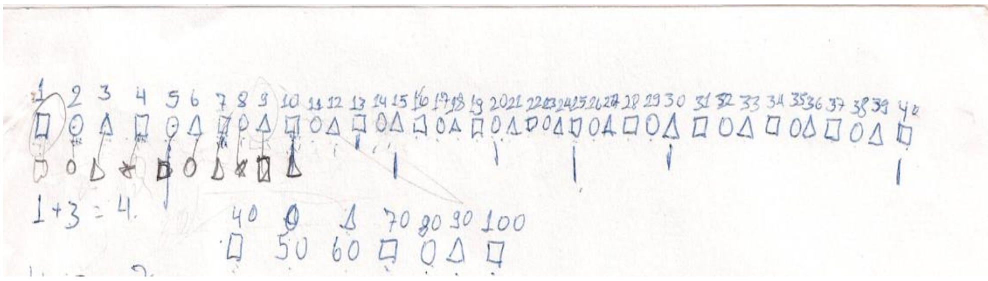


Figura 23 - Solução com o apoio das figuras

Ao resolverem os itens ‘e’, ‘f’ e ‘g’ os estudantes perceberam que cada figura se repetia de três em três. Nesta ocasião do estudo a exploração da técnica começou a amadurecer, pois os alunos puderam vivenciar o momento de exploração da técnica e também o da avaliação, dos quais puderam, então, emergir novas estratégias de solução.

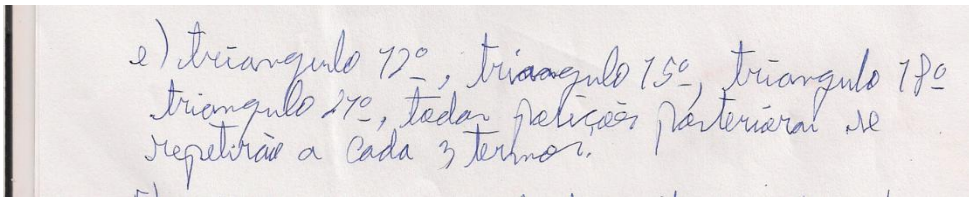


Figura 24 - A sequência é de três em três

No item ‘f’, perguntamos aos alunos de um dos grupos como eles obtiveram as posições do quadrado na sequência de figuras e eles nos mostraram a seguinte sequência: “1+3=4, 4+3=7...”; como isso foi possível perceber um avanço nesta técnica em relação à primeira técnica que consistiu em desenhar um por um, conforme Figura 23. Houve um desprendimento, mesmo que parcial, do ostensivo gráfico e uma passagem para o raciocínio aritmético.

Socializamos esta ideia entre todos os grupos e sugerimos que quem quisesse poderia repetir esta maneira de fazer, para o triângulo e o círculo. Entendeu-se que estávamos ali propondo o trabalho com a técnica, uma vez que nem todos os participantes haviam se desprendido da técnica inicial.

Algum tempo depois, colocamos em confronto as técnicas até então utilizadas e, para tanto, lançamos a pergunta: “Como fariam para resolver se fosse perguntado: qual figura ocupa a milésima posição?” Com essa pergunta estávamos incentivando os alunos que usassem o raciocínio indutivo segundo Pais (2006), “O raciocínio indutivo é aquele que leva a uma afirmação com base na observação e na comprovação de casos particulares.”, e a partir desse raciocínio poder formular a generalização da sequência em estudo.

Outro motivo do questionamento aos alunos foi para que eles pudessem vivenciar o momento de avaliação da técnica que estava em uso naquele instante. Deixamos que os estudantes se perguntassem se a técnica de somar o resultado anterior com três era realmente a melhor técnica para qualquer que fosse o valor solicitado. Sendo assim, perceberam que, desta forma iriam demorar muito e começaram a trabalhar no sentido de encontrar outra maneira de fazer, que superasse a presente técnica.

Vejamos o caso específico da milésima posição: eles usaram a técnica matemática do algoritmo da divisão (Figura 25), porém não relacionaram com o resto, no entanto, usaram a ideia de 999 ser múltiplo de três, então assim, 999 representava o triângulo e para chegar ao número 1000 faltava apenas uma unidade, ou seja, a próxima figura da sequência, no caso, seria o quadrado.

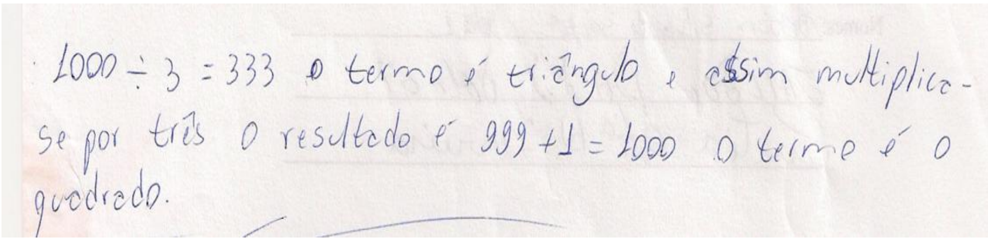



Figura 25 - Estratégia de solução para milésima posição

O objetivo da elaboração desta tarefa era que ela fosse resolvida pelo algoritmo da divisão, com análise do resto. Porém, durante a realização não foi esta a técnica utilizada. A estratégia utilizada incidiu em fixarem o triângulo que é múltiplo de três e a partir desta informação poderiam encontrar o quadrado e o círculo.

Com o propósito de identificarmos as técnicas utilizadas, foi questionado: “Que figura representaria o 2000ª?”. Eles fizeram uso da mesma técnica anterior. No entanto, este mesmo grupo diversificou a escrita, priorizando a linguagem matemática em detrimento da linguagem verbal, conforme podemos observar na Figura 26:

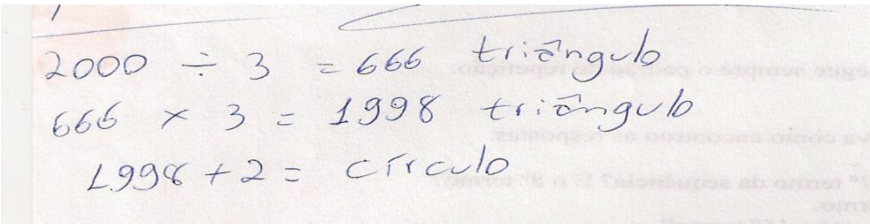



Figura 26 - Qual figura representa o 2000ª

Finalmente, perguntou-se como fariam o item ‘h’? A resposta foi embasada no conceito de múltiplos, usando o termo “tabuada”, bem como o conceito de antecessor e sucessor, conforme figura a seguir. Destaca-se que a linguagem algébrica utilizada nesta questão foi bastante evoluída, comparada à usada na primeira técnica desta sessão.

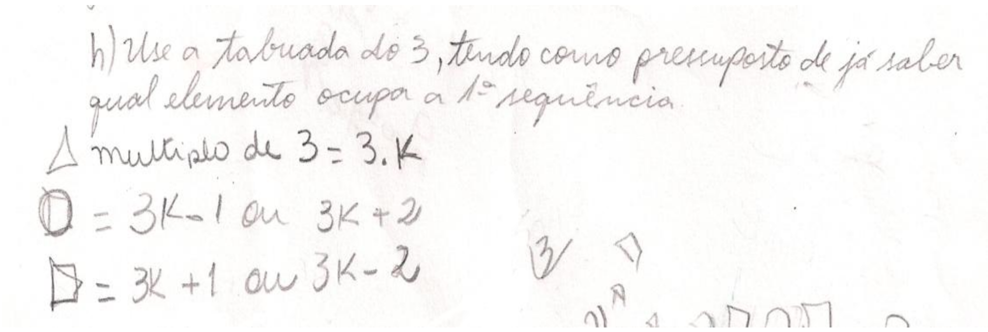



Figura 27 - Solução da letra h

Destacamos que nesta atividade os alunos utilizaram o ostensivo verbal em detrimento do ostensivo escrito para identificar os valores que k pôde assumir, e por meio de diálogo com o grupo, identificou-se que: k $Z_{+}^{*}$. Esta dificuldade dos estudantes em passar da oralidade para a grafia matemática faz parte do processo de estudo, uma vez que na atividade matemática escolar existe uma multiplicidade de interrelações entre objetos ostensivos escritos e orais nos quais segundo Bosch e Chevallard, (1999, p.23, tradução nossa) [...] interrelações que não podem ser levadas a uma simples correspondência biunívoca do tipo leitura e escrita.

Também durante o desenvolvimento desta, foram observados os momentos de trabalho com a técnica, exploração de um tipo de tarefa, elaboração e avaliação da técnica.

O trabalho com a técnica foi vivenciado juntamente com o momento de sua avaliação, sendo que até o item g essa maneira de fazer era suficiente. No entanto, ao tratar de números maiores, ela não tinha o alcance satisfatório e se fez necessário recorrer à outra maneira de fazer que pudesse resolver não só aquela, mas outras tarefas daquele tipo, propostas na instituição na qual estão assujeitados.

Com base nas sessões de estudo anteriores, prevíamos que o desenvolvimento dos itens *a* até *e*, seria um momento de trabalho com a técnica. Julgamos necessários os momentos de estudo vivenciados nesta situação para que, a partir dela, os estudantes pudessem elaborar novas técnicas com alcance suficiente para também responder ao item 'h', ou seja, criar assim novos objetos matemáticos. Segundo Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p.289), o momento do trabalho com a técnica apresenta duas características essenciais. Citamos aquela que refletiu melhor o momento vivenciado nesta sessão:

> No processo de estudo de um tipo de problema, o momento do trabalho da técnica se torna criador de novos objetos matemáticos. Nele, surgem novas noções, novas técnicas e novas relações entre objetos que podem ser considerados, ao mesmo tempo, como novos objetos.

5.5.2.1.1 Observações sobre o problema da sequência de figuras

Esta tarefa foi marcada pela agilidade que os estudantes mostraram em desprender-se dos ostensivos gráficos e iniciarem um raciocínio fundamentado na aritmética com evolução para o pensamento algébrico. Percebemos também um amadurecimento, em relação às outras sessões, no que diz respeito à escrita. Este pode ser considerado um fator importante na atividade matemática, uma vez que a escrita matematizada não é trivial, sendo esta uma prática trabalhosa, desenvolvida no contexto matemático. Essa particularidade da escrita matemática é evidenciada, como podemos ver por Bosch e Chevallard, (1999, p. 24, tradução nossa):

> Os ostensivos escritos do matemático – notadamente os diversos símbolos matemáticos são por essência da escrita. Contrariamente às formas gráficas das palavras da linguagem, eles não são do oral colocado pelo escrito. São instrumentos de trabalho da atividade matemática que a voz, a fônica, que retoma somente de maneira deslocada, por uma oralidade sempre muito pesada e frequentemente ambígua.

Apesar de reconhecermos a evolução do trabalho realizado pelos estudantes, não podemos analisar, de maneira ingênua, a estratégia de solução utilizada. É importante observar que não houve um desprendimento total do ostensivo utilizado inicialmente, apesar de a técnica ser eficiente para resolver esta tarefa e ser escrita de forma aprimorada. Considerando a instituição “curso preparatório para o vestibular”, a presença do raciocínio ligado ao ostensivo ainda continuou dominante no resultado final. Este tipo de técnica é mencionada por Bosch e Chevallard (1999, p. 24, tradução nossa):

> Isto explica que técnicas que se apóiam sobre ostensivos gráficos se introduzem “de maneira ostensiva” e funcionam de início e por vezes longamente de uma maneira implícita, indo por si mesmo e não requerendo justificativas particulares [...].

Não obstante de ser este um fato inicialmente natural no processo de desenvolvimento da atividade matemática, percebeu-se a necessidade de propor tarefas para que os alunos pudessem vivenciar técnicas justificadas em conceitos fundamentais da divisibilidade.

5.5.2.2 *Problema do produto de três números consecutivos*

O problema do produto de três números consecutivos foi pensado a partir de algumas carências conceituais que vinham perdurando no grupo quanto ao cálculo de múltiplos de um número. Desta forma, tomou-se a decisão de abordar elementos teóricos no sentido de suprir esta lacuna no conhecimento dos participantes das sessões de estudo.

Reorganizamos as questões em conformidade às lacunas pautadas sobre o tema divisibilidade, a qual foi considerada essencial para o desenvolvimento do processo de estudo proposto no grupo colaborador, em consonância com o objetivo geral da pesquisa. Assim, enunciamos com base em materiais didáticos da teoria dos números a seguinte tarefa:

| |
|---|
| O produto de três números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de 6?<br>Justifique sua resposta. |

Este foi um problema em que as soluções iniciais, produzidas pelos estudantes, foram direcionadas para os casos particulares e a justificativa para a técnica foi: *“esta maneira de fazer está dando certo, já foi verificado para vários casos.”* Esta é uma justificativa didática que pode ser aceita, ou não, dependendo da instituição em que a tarefa foi proposta. Neste caso, esta justificativa se enquadra no âmbito da lógica natural, conforme denominam Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 260):

> [...] quando suponho que exista uma solução e examino as consequências, o que faço se justifica no âmbito da lógica. Inclusive, na maioria dos casos estaríamos no âmbito da lógica natural, que ainda não foi matematizada pelo lógico ou pelo matemático.

Para familiarização, esta técnica pode ser eficaz, todavia, o grupo tomou-a como suficiente para resolver a presente tarefa. Diante disso, conversamos com os estudantes no sentido de sinalizar para as peculiaridades da instituição “curso preparatório para o vestibular” e as especificidades das técnicas, bem como suas correspondentes tecnologias exigidas na instituição.

Porém, deparamo-nos com a seguinte situação: como mudar o quadro descrito acima, se lhes faltavam conceitos essenciais para que pudessem ter uma mudança de atitude frente às atividades matemáticas propostas nessa instituição?

No papel de dirigentes do estudo frente a esta real situação, empregamos a técnica didática que consistiu em recorrer à Matemática conhecida, no intuito de levantar subsídios necessários para a construção de modelos condizentes a este tipo de tarefa. Partindo do conhecimento que eles possuíam e utilizando os exemplos descritos em suas folhas, transcrevemo-los no quadro como ponto de partida dos estudos naquela sessão. Então reescrevemos os exemplos de três números consecutivos 3,4,5 e 6,7,8. Lançamos em seguida a primeira questão: *“O resultado do produto destes três números é par ou ímpar? Por quê?”* Após alguns debates concluíram que sempre que houver pelo menos um número par em um produto de números inteiros o resultado será também par.

O estudo prosseguiu movido pela pergunta: *“Como eu sei que um número é múltiplo de 6?”* Imediatamente responderam: *“Quando este número é da tabuada do 6”*. Desta forma, escrevemos os múltiplos de 6, ou seja, 0, 6, 12, 18, 24.... e, após trabalharem e analisarem esta sequência, conduzida por discussões, algumas conclusões foram alcançadas, a saber: todos os múltiplos de seis são pares e todo múltiplo de seis pode ser escrito como o produto do número dois e de três, ou seja, 2.0, 2.3, 2.6, 2.9..., ou ainda 2.0, 2.3, 2.2.3, 2.2.3...

Persistimos ainda na técnica didática de buscar conceitos matemáticos, mesmo que essas fossem pequenos fragmentos, para juntos, remodelarmos os conhecimentos focados em divisibilidade. Continuamos com os seguintes questionamentos: *"Como podemos escrever três números consecutivos quaisquer"*? Os estudantes não tiveram dúvida em expressar a forma: "n.(n+1).(n+2)". Mas de fato o ponto que queríamos questionar era: *"Quem é este n?"* Novamente o debate se iniciou em torno dessa questão. As conclusões obtidas neste estudo foram retomadas, novas associações reconstruídas coletivamente, outros conceitos obtidos. Entre os conceitos destacamos o resto da divisão por três.

Por fim, diversas ideias fundamentais relativas ao conceito de divisibilidade foram veiculadas no decorrer desta sessão de estudo. Para finalizar a sessão solicitamos que os alunos retomassem a folha entregue no início da sessão e que tentassem responder o problema proposto.

Apresentamos os registros realizados pelos alunos durante essa sessão de estudo. Com relação ao *n* destacamos o registro ostensivo, Figura 28, em linguagem algébrica, no qual se encontra embasado no conceito de resto da divisão e mais especificamente no resultado a seguir: *Fixando um número natural $m \geq 2$, pode-se sempre escrever um número qualquer n, de modo único, na forma $n = mk + r$, onde $k, r \in N$ e $r < m$*[17].

No registro a seguir, localizamos o ostensivo gráfico relacionando o *n* com 3k, 3k + 1 e 3k + 2. Nestes registros gráficos os alunos "projetam" no papel os primeiros gestos que indicam a matematização de uma expressão algébrica, que tende a ser lapidada com o aprofundamento do estudo. Conforme Bosch e Chevallard, (1999, p.20 tradução nossa), "Estes gestos são visíveis sob a forma de grafismo, sem dúvida, provisórios e um pouco ilegítimos, que indicam sobre o papel as associações de termos ou as *transposições* a serem efetuadas."

Observamos ainda, que o rigor matemático ainda é embrionário nesta situação de estudo, uma vez que inicialmente se deram por satisfeitos em responder oralmente quem seria o k, não se preocupando em fazer o registro.

[17] Exemplos: 1) *Todo número natural n pode ser escrito em uma, e somente uma, das seguintes formas: 3k, 3k + 1, ou 3k + 2.*
*2) Ou ainda, todo número natural n pode ser escrito em uma, e somente uma, das seguintes formas: 4k, 4k + 1, 4k + 2, ou 4k + 3.*

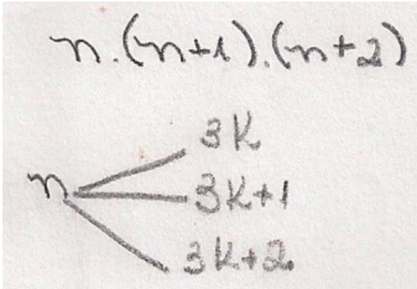



Figura 28 - Resto da divisão por três

Em relação à produção final da tarefa, os estudantes fizeram-na em linguagem verbal e justificaram usando a condição de um número ser múltiplo de seis. Afirmaram ainda, com base na sessão de estudo realizada neste dia, que o produto de três números consecutivos sempre será múltiplo de 2 e 3, conforme Figura 29.

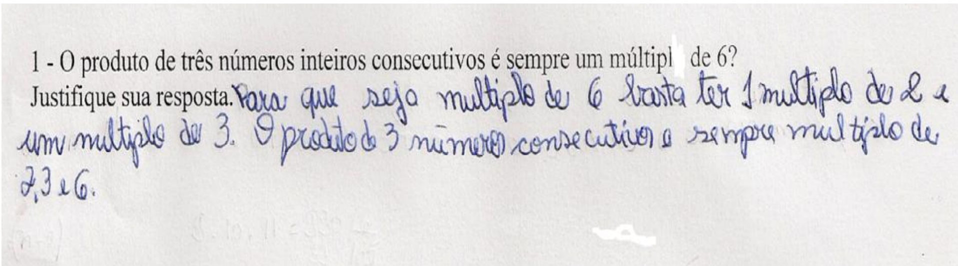



Figura 29 - O produto de três numero consecutivo é sempre múltiplo de 6

5.5.2.2.1 Observação final sobre o problema de três números consecutivos

Nesta tarefa fizemos o destaque da primeira técnica utilizada pelos alunos. A técnica consistiu em multiplicar três números consecutivos, embora sendo esta técnica inegavelmente matemática, a justificativa dada pelos alunos foi embasada no campo da didática e o nível de generalidade não foi alto, pois a conclusão geral foi obtida pela constatação de alguns casos particulares. Destacamos que esta é uma maneira natural, espontânea dos alunos, em alguns momentos do estudo, quando não conseguem ainda justificar técnicas matemáticas num nível mais geral e abstrato da Matemática, apesar de a abstração e a Matemática estarem historicamente relacionadas conforme destacam Nogueira e Pavanello (2008, p. 117 e 118).

> Esta imbricação entre Matemática e abstração pode ter sua origem na crença de que a Matemática se originou não da necessidade do homem de contar os objetos, mas do processo de abstração necessário para esta contagem, isto é, do fato de o número não depender dos objetos a serem contados.

Diante desses fatos, acreditamos essencial a valorização dos primeiros raciocínios, mesmo que eles não tenham atingido a abstração necessária do ponto de vista matemático. Certamente, ao valorizar as primeiras conclusões desenvolvidas no trabalho matemático, os alunos poderão, a partir deles, tornar viável a construção dos elementos de nível teórico superior para a realização da tarefa.

Enfatizamos também que esta foi uma sessão em que ao final de cada tarefa pontual eram realizadas sistematizações com a participação efetiva dos alunos. O grupo expôs os conhecimentos que possuía e a intervenção foi para auxiliar na edificação de novos significados para alguns conhecimentos. Este movimento exigiu, pois, dos participantes um trabalho meticuloso e árduo.

### 5.5.3 Tipo de tarefa T3: Encontrar a quantidade de divisores de um número

#### 5.5.3.1 *Problema dos dez divisores*

Esta tarefa foi apresentada no sentido de provocar o grupo a utilizar técnicas matemáticas conhecidas e perceberem a necessidade de manipulá-las conforme o que se solicita em cada tarefa proposta. O enunciado desta tarefa teve a seguinte forma:

| Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores? |
|---|

Iniciamos a sessão de estudos com a leitura do problema e fizemos o seguinte questionamento: O número 1000 faz parte dos números a serem investigados? Não houve dúvidas por parte dos estudantes em responder que o maior número inteiro a ser analisado, no conjunto dos números menores que 1000, é o 999.

Depois de discutido o enunciado do problema, foi iniciado o trabalho nos grupos. A primeira técnica didática utilizada por eles consistiu em analisar os números próximos e menores que 1000. Para tanto utilizaram a técnica matemática baseada na fatoração, ou seja: fatoraram os números 999, 998... e, ao realizarem a fatoração do número 999, fizeram a representação da seguinte maneira: $3^3 . 37$, a fim de encontrar a quantidade de divisores segundo a propriedade relacionada à quantidade de divisores, somaram o número 1 aos expoentes e os multiplicaram, ou seja, (3+1) . (1+1) = 8, logo o número 999 tem oito divisores.

A utilização desta técnica é justificada pelo elemento tecnológico-teórico, caracterizado pela propriedade cujo enunciado é o seguinte: *Seja* $p_1^{n1}...p_t^{nt}$ *a decomposição de um número a > 1 nas condições do Teorema Fundamental da Aritmética. Então o número de divisores positivos de a é dado por n(a) =* $(n_1+1).(n_2+1)...(n_t+1)$.

Ao aplicarem a mesma técnica, para outros valores menores que 999, os alunos desconfiaram que esta não fosse a melhor estratégia de resolução e se manifestaram dizendo: *Esta maneira de resolver é muito demorada ...já fizemos para vários números e não encontramos ainda.*

Por esse motivo, interviemos no processo de resolução, utilizado por eles naquela situação de estudo e perguntamos: "Quais os números naturais que multiplicados resultam o número dez?" Como nesta condição, os alunos já tinham percebido que ao realizarmos uma pergunta era porque deveriam ficar atentos ou para reafirmar o que estavam fazendo ou porque talvez pudesse haver outras estratégias de solução mais eficientes. Nesta situação de estudo surgiu a necessidade de rever conhecimentos que possuíam e então reorganizá-los.

Reafirmamos que o fato de conhecer uma técnica não é o suficiente para saber utilizá-la em diferentes situações de estudo, pois além de conhecê-la é necessário saber aplicá-la de forma conveniente. Conforme pontuam Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 54) "O primeiro grande tipo de atividade matemática consiste em resolver problemas a partir das ferramentas matemáticas que já conhecemos e sabemos utilizar."

Observamos que apesar de os alunos já terem utilizado a propriedade da quantidade de divisores de um dado número, enunciada anteriormente, eles não haviam percebido como utilizá-la neste caso. Retomando a pergunta que fizemos, indicamos que talvez fosse interessante partirem da quantidade de divisores do número procurado, pois este era um dado do enunciado. Desse modo, eles acabaram percebendo que este problema se diferenciava dos outros já trabalhados, pois não pedia a quantidade de divisores do número, uma vez que ela era um dado neste problema.

O tempo disponível para esta sessão não foi suficiente para que os alunos chegassem a uma solução. Sendo assim, a resolução deste problema foi deixada para a semana, subsequente. Entretanto, recomendamos que, se possível, trabalhassem com o problema em casa.

Ao retomarmos o problema na sessão de estudo da semana seguinte, uma estudante nos relatou, verbalmente, que para realizar o problema levou cinco dias e durante aquela semana sempre que podia voltava a pensar na atividade, até conseguir uma solução que a deixasse satisfeita. Perguntamos então se ela havia retomado a primeira técnica utilizada do encontro anterior, que consistiu em encontrar os divisores dos números imediatamente menores que 1000. Esta nos respondeu que não e nos apresentou, por escrito, a seguinte solução:

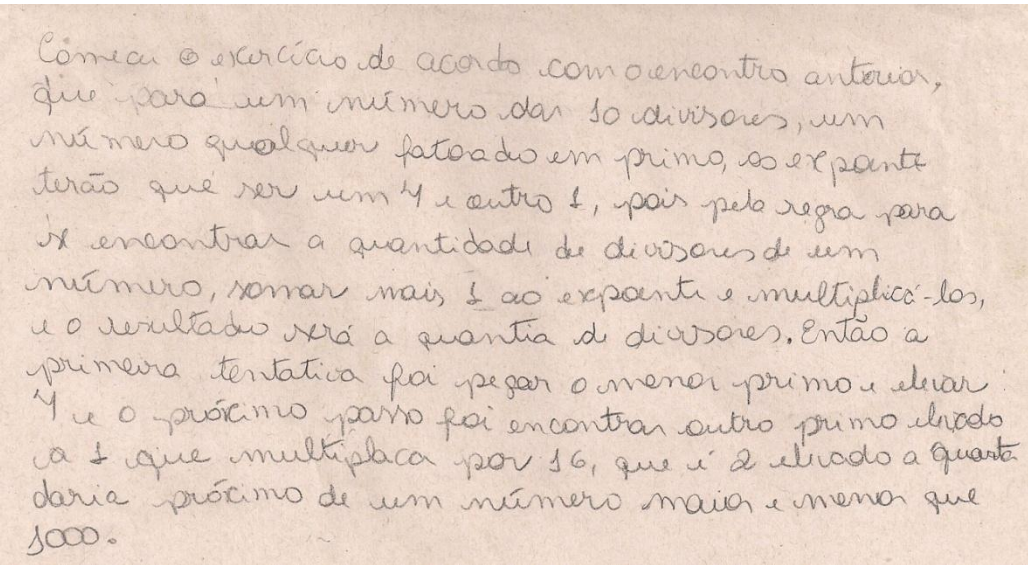

Comecei o exercício de acordo com o encontro anterior,
que para um número dar 10 divisores, um
número qualquer fatorado em primo, os expoentes
terão que ser um 4 e outro 1, pois pela regra para
se encontrar a quantidade de divisores de um
número, somar mais 1 ao expoente e multiplicá-los,
e o resultado será a quantia de divisores. Então a
primeira tentativa foi pegar o menor primo e elevar
4 e o próximo passo foi encontrar outro primo elevado
a 1 que multiplica por 16, que é 2 elevado a quarta
daria próximo de um número maior e menor que
1000.

Figura 30 - Relato em linguagem verbal da solução do problema dos dez divisores

Pode-se observar na descrição da aluna, que a primeira estratégia didática, a qual consistiu em encontrar os divisores de 999, 998 e assim por diante, foi abandonada, apesar desta estratégia também levar à solução. No entanto, com relação à instituição "curso preparatório para o vestibular" esta não era uma técnica eficiente. Foi necessário que ela retomasse a tarefa e descobrisse qual era a questão crucial, para poder, assim, chegar a uma solução mais adequada considerando a instituição "curso preparatório para o vestibular".

Vejamos detalhadamente a técnica utilizada pela aluna para realizar esta tarefa: O primeiro passo foi encontrar os possíveis expoentes, que, ao somar o número 1 e realizar o produto deu o resultado 10, conforme Figura 1.

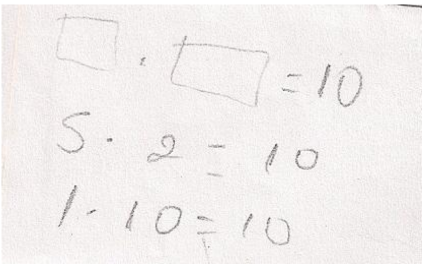



Figura 31 - Possíveis expoentes

No caso da representação exposta na Figura 31 temos o emprego do ostensivo gráfico que auxiliou na constituição do seguinte raciocínio: os expoentes podem ser 4 e 1 ou 9 e 0, pois ao somar 1 e proceder com o produto conforme a propriedade enunciada anteriormente teremos: (4+1).(1+1) = 10 ou (9+1).(0+1) = 10.

Identificados os possíveis expoentes, ela deu início à investigação das possíveis bases, fazendo, então, para o caso do expoente ser o número 9, ou seja, $2^9 = 512$ e $3^9 = 19.683$. Abandonou a possibilidade de ser $3^9$ por ser um valor maior que 1000 e deixando o $2^9$ para uma segunda verificação por considerar o valor bem menor que 1000. Por exclusão, a aluna concluiu que, com segurança, os expoentes seriam 4 e 1. Apresentamos alguns registros aritméticos que mostram parte do desenvolvimento do trabalho realizado.

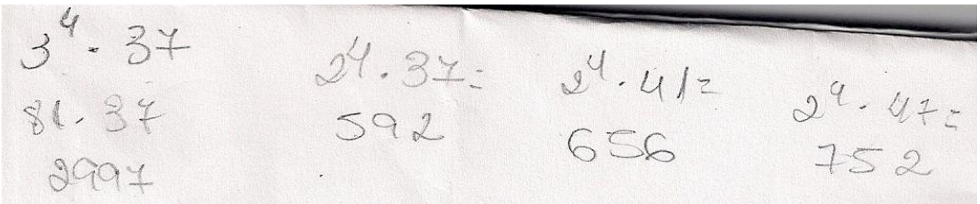



Figura 32 - As possíveis bases quando o expoente são 4 e 1

Ao perguntarmos a esta aluna em que consistiu a principal dificuldade para encontrar a solução desta tarefa, ela nos respondeu que foi encontrar o número primo, pois este apresentava um valor, considerado por ela, alto. Acrescentou, ainda, que estava habituada a trabalhar com números primos menores que trinta e que uma grande dificuldade foi identificar se o número, com expoente um, era primo ou não. Este passou a ser o fator dificultador para responder o problema; persistindo até encontrar o número procurado, que é $2^4 . 61 = 976$.

Outros alunos também trabalharam com o problema em outro local. No entanto, como eles se encontravam durante a semana no curso preparatório, esta aluna socializou com os colegas qual era o número primo procurado, sendo este também o fator dificultador para o restante dos alunos participantes das sessões de estudo.

Em relação aos momentos de estudo, percebemos a presença do momento de avaliação da técnica, ao perceberem que fatorar os números menores que 1000 não era propício ao considerar a instituição “curso preparatório para o vestibular”, por ser uma técnica baseada na estratégia didática da tentativa. Esta avaliação trouxe a necessidade de buscar outra técnica, vindo à tona o momento de exploração de um tipo de tarefa e elaboração de uma técnica.

No intuito de elucidarmos a compreensão que tivemos da organização matemática, na qual está inserida esta sessão de estudo, apresentamos o seguinte quadro:

Quadro 4 - Elementos praxeológicos da tarefa dos dez divisores

| | |
|---|---|
| Tarefa (t) | Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores? |
| Técnica $(\tau)$ | Fatorar um dado número, e fazer o produto de cada expoente acrescido de uma unidade. |
| Elementos tecnológicos-teóricos | Enunciado da propriedade: Seja $p_1^{n1}...p_t^{nt}$ a decomposição de um número a > 1 nas condições do Teorema Fundamental da Aritmética. Então o número de divisores positivos de a é dado por n(a) = $(n_1+1).(n_2+1)...(n_t+1)$. |

5.5.3.1.1 Observações finais sobre o problema dos dez divisores

A solução apresentada pelos alunos imprimiu um trajeto até chegar a configurar a solução apresentada acima. No entanto, vários outros caminhos poderiam levar a uma solução. Ao se referir a atividade de estudo e pesquisa, Chevallard (2007) sinaliza que durante o desenvolvimento de uma situação de estudo alguns caminhos serão abandonados, caso eles não respondam à questão crucial. Outros serão suspensos provisoriamente sendo revistos oportunamente, pois o percurso até encontrar uma resposta é definido com base na questão crucial, que por sua vez pode gerar outras questões cruciais.

Podemos reescrever esta ideia de questão crucial da seguinte forma: Seja Q a questão crucial e $q_1, q_2, q_3...q_n$ questões cruciais geradas a partir da questões crucial Q, ou seja, podemos assim representar: $\{q_1, q_2, q_3...q_n\}$ Q. Se faz importante observar que as $q_1, q_2, q_3...q_n$ é que vão desenhar o percurso da resposta, sendo que as questões geradas por Q não são absolutas e, dessa forma, o desenho da resposta pode imprimir caminhos diferentes.

No caso da tarefa em questão, incentivamos os alunos a seguirem um caminho que pudesse auxiliá-los na construção de modelos matemáticos compatíveis com a instituição “curso preparatório para o vestibular”.

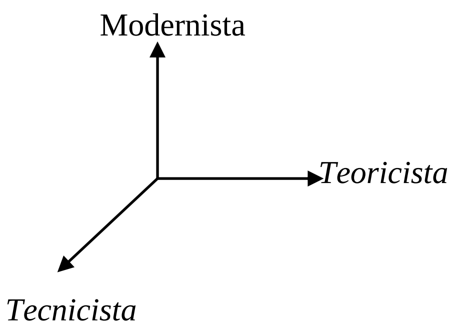
Em relação à atitude dos estudantes, percebemos que esta sessão foi um marco na mudança de postura, principalmente por levarem os problemas propostos no grupo para serem pensados em casa. Esta mudança de postura foi fundamental no desenvolvimento do estudo proposto, uma vez que para o sucesso de um processo didático é necessário o comprometimento das partes, neste caso, do coordenador do estudo e dos alunos. Conforme Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 39),

> Não devemos nos esquecer que, para que uma aula funcione, também têm de existir processos didáticos fora dela. Os alunos têm de estudar por si mesmos, individualmente ou em grupo.

No caso do grupo em que realizamos a pesquisa, percebemos uma real mudança de atitude. Afirmamos isso com base nos depoimentos que coletamos, no início do ano, durante a entrevista que realizamos com esses estudantes sobre suas práticas de estudo. Ao perguntarmos se estudavam Matemática fora da sala de aula, todos foram unânimes em afirmar que estudavam somente quando havia uma demanda a ser cumprida, ou seja, quando o professor passava alguma atividade específica como tarefa ou quando havia alguma prova marcada. Caso optassem por estudar fora da sala de aula, sem que houvesse “necessidade”, preferiam matérias que pudessem ler, como História, Geografia, Literatura e outras do mesmo gênero.

Outra mudança percebida foi quando questionados sobre como estudavam para as provas. De modo geral, todos responderam que procuravam refazer as atividades já resolvidas. Eles narraram ainda que não faziam parte de suas práticas de estudo realizar atividades para as quais não tinham um modelo a ser seguido ou gabarito, por não terem como saber se a resolução estaria correta ou não.

Considerando maneiras possíveis de organizar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática em uma instituição docente concreta, essa forma de estudar dos alunos, manifestada em suas falas e ações, permite perceber a influência de uma tendência na formação dos estudantes, a qual segundo Gascón (2003) está situada no plano Teoricista / Tecnicista.




A combinação dos eixos Teoricista e Tecnicista forma o plano das Organizações Didáticas clássicas, que segundo Gascón (2003, p.20) “se caracterizam, entre outras coisas, pela trivialidade de atividade de resolução de problemas e por considerar que o ensino das matemáticas é um processo mecânico totalmente controlável pelo professor.”

No entanto, no decorrer das sessões de estudo avaliamos que o grupo vivenciou práticas que vêm comprovar a ocorrência, mesmo que embrionária, daquilo que Chevallard, Bosch e Gascón (2001, p. 135) denominaram de “entrada” na Matemática.

> Muitos dos comportamentos usuais do aluno de Matemática (desinteresse, falta de iniciativa própria, enfado, desprezo), que costumam ser descritos como “má vontade” ou “falta de motivação”, deveriam ser considerados [...] como causa de não ter “entrado” na Matemática.

Considerando que a maioria dos alunos que participaram das sessões de estudo demonstrou grande interesse e efetiva participação, concluímos que houve o encontro do grupo com a Matemática, ou ainda, que realizaram inserções no plano construtivista localizado entre os eixos modernista e teoricista, no qual vivenciam simultaneamente momentos tecnológico-teórico e exploratório.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ato de estudar pode parecer, à primeira vista, algo trivial, considerando o contexto escolar. Contudo, ao se compreenderem as relações que envolvem o estudo para fins de construção do conhecimento e dirigindo um olhar profundo às características do ato de estudar e aos elementos que o compõem, percebem-se subsídios essenciais capazes de diminuir o distanciamento entre o ensino e a aprendizagem, que são a razão de ser da Escola.

Em nossa proposta de pesquisa analisamos as práticas e os argumentos utilizados por um grupo de estudantes de um curso preparatório para o vestibular sobre o tema divisibilidade. Vale ressaltar que esta pesquisa se desenvolveu em um contexto de Ações Afirmativas, cujo objetivo é a garantia de igualdade de acesso ao Ensino Superior, em especial, para os alunos da rede pública, de baixa renda e estudantes afro-descendentes. No intuito de elucidar as práticas e os argumentos utilizados pelos estudantes em questão, apropriamo-nos da Teoria Antropológica do Didático - TAD (CHEVALLARD, 1998) que atribui ao estudo a função de fazer o elo entre o ensino e a aprendizagem e, mais ainda, destaca o significado de processo didático como um processo de estudo, considerando a relação dinâmica existente entre o ensino e a aprendizagem, na qual, aluno, professor e meio social se influenciam.

Diante do propósito de analisar práticas e argumentos apresentados pelo grupo organizado, pontuamos os seguintes objetivos específicos: investigar dispositivos didáticos utilizados pelos estudantes em relação ao tema divisibilidade, identificar e analisar formas de estudo utilizadas pelo grupo a fim de se apropriarem de saberes matemáticos e investigar técnicas e argumentos utilizados nas resoluções de problemas que envolvem a divisibilidade. A identificação da natureza dos dispositivos didáticos empregados pelos estudantes foi importante na caracterização das práticas por eles reveladas, por meio das soluções das atividades propostas, assim como as formas de estudo, ou seja, as estratégias que, de fato, mais empregavam diante das situações-problema envolvendo divisibilidade. Em relação à maneira e à justificativa empregada pelos alunos frente a problemas relacionados ao tema ora proposto, é que se esboçou o objetivo específico relativo às técnicas e aos argumentos.

Durante a investigação percebemos que houve um aprimoramento em relação à apropriação dos diferentes dispositivos didáticos disponíveis para o estudo. Os estudantes passaram a utilizar fontes de conhecimentos diferentes daquelas a que estavam habituados em seu contexto de estudos. Segundo relatos pessoais coletados nas entrevistas, as duas principais fontes de estudos que possuíam eram as aulas presenciais e o registro do conteúdo.

Observamos que, no decorrer do ano letivo e durante as sessões de estudo organizadas nesta pesquisa, à medida que os estudantes percebiam a diversificação de dispositivos didáticos disponíveis, como o empréstimo de livros na biblioteca, os diálogos a respeito dos conteúdos durante as sessões, a informação de *sites* de Matemática e as discussões com os colegas em horário diverso dos encontros, principalmente sobre os problemas cujas resoluções seriam concluídas em sessões subseqüentes, este quadro foi se modificando.

Por meio das entrevistas, identificamos as formas de estudo utilizadas pelos alunos participantes, que foram unânimes em afirmar que, antes de participarem das sessões desenvolvidas durante a pesquisa, o estudo acontecia a partir de um modelo pronto, ou seja, destacavam um problema já resolvido de seus apontamentos e tentavam resolvê-lo novamente. Afirmaram, ainda que, raramente utilizavam como modelo um problema que não apresentasse a solução detalhada e que nunca resolviam um problema cuja resposta final não estivesse explícita, pois sem essa informação não teriam condições de verificar a sua correção. Esquivar-se de problemas que não dispunham de solução denota um reflexo da dependência do aluno em relação ao professor, quando este, normalmente, apresenta a validação dos problemas propostos. Além disso, também não realizavam a leitura de teorias, visto que consideravam a linguagem muito complexa.

Esta forma de estudo, impressa pelos alunos, refletiu na dificuldade em resolver as tarefas apresentadas ao grupo de estudo. Observamos que a leitura dos enunciados dos problemas apresentou-se como um entrave e, em consequência disso, todos os problemas foram lidos coletivamente, os ostensivos algébricos explicados e o significado dos termos matemáticos exemplificados, para que a atividade fosse possível de ser resolvida.

Evidenciamos que as técnicas e os argumentos utilizados pelos alunos, no decorrer da investigação, sofreram alterações em relação ao reinvestimento dos dispositivos didáticos e das formas de estudo, o que também provocou alterações em suas práticas de estudo. Podemos destacar o uso dos ostensivos concernentes aos registros das soluções das tarefas que envolviam divisibilidade, como por exemplo, os registros algébricos. Também percebemos uma maior preocupação em validar as soluções, uma vez que nas primeiras sessões de estudo não realizavam qualquer retomada, visando provar ou verificar a ocorrência das respostas obtidas, parecendo uma provável falta de compromisso na realização das tarefas. Notou-se que a maneira mais usual do grupo para resolver uma tarefa consistiu em usar a técnica da tentativa, no entanto a justificativa, não ocorria no campo da Matemática. Essa é uma técnica importante, porém, deve ser usada apenas para a construção inicial de um modelo matemático. Considerando a instituição "curso preparatório para o vestibular" podemos afirmar que essa técnica é pouco eficiente, pois durante a análise, mostrou-se ineficaz nas situações vivenciadas no grupo de estudo. Enfatizamos que, dependendo do problema, sua utilização demanda muito tempo para a efetiva solução, principalmente quando o problema envolve valores "altos". Dificulta também a criação de modelos para auxiliar na resolução de outros problemas, portanto, não apresenta a consistência necessária à validação dos resultados. No entanto, observou-se que, no processo de estudo, houve um avanço significativo no uso dessa técnica, a partir da ocorrência do seu desprendimento, mesmo que parcial, pois até então era persistente na resolução de problemas propostos no contexto escolar.

Os alunos participantes desses cursos preparatórios para o vestibular, de um modo geral, precisam retomar conceitos pertinentes a conteúdos expostos no Ensino Fundamental e Médio e, considerando o tempo restrito, essa retomada requer do aluno a reconstrução das técnicas e das justificativas, de maneira mais ágil e com uso adequado de ostensivos e a criação de modelos matemáticos, os quais são ferramentas fundamentais na reconstrução dessas técnicas.

Os momentos de estudo vivenciados nesta pesquisa assumiram um papel didático, os quais puderam propiciar elementos importantes na construção da organização matemática. Ressaltamos que o momento de avaliação da técnica ocorreu sempre na sequência do momento de trabalho com a técnica, porém, para que ocorresse o momento de avaliação, foi necessária a interferência do coordenador do estudo, com questionamentos a respeito da técnica que estava em uso.

Enfim, constatamos que os alunos participantes das sessões de estudo, demonstraram grande interesse e passaram, a partir daí, discutir e "entrar" na Matemática com fins de estudo, apesar de declararem que o interesse inicial era meramente para obtenção de conhecimentos ou habilidades para serem aprovados em exames vestibulares, ou seja, buscavam suprir uma necessidade imediata. No entanto, no decorrer dos encontros, alguns alunos declararam que o estudo da Matemática, que até então parecia algo distante e inacessível, agora se apresentava como uma ação possível de ser desenvolvida em suas histórias de vida no contexto de estudo. Ressaltamos ainda que, a maioria dos alunos que participou efetivamente desse grupo de estudos, ingressou no Ensino Superior, público e gratuito.

Vale frisar que, estudar Matemática, além de ser uma necessidade imediata, pode ser de alguma forma, prazeroso no que tange ao universo das práticas de estudo.

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS


ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia.* Tradução de A. Bosi. 5 ed. São Paulo : Martins Fontes, 2007.

ALRØ,H.; SKOVSMOSE, O. *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.* Tradução de Orlando Figueiredo. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

ANDRÉ, E. D. A. LÜDKE, M. *Pesquisa em Educação*: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 2004.

BACCHETTO, G. J. *Cursinhos pré-vestibulares alternativos no município de São Paulo (1991-2000): a luta pela igualdade no acesso ao Ensino Superior.* Dissertação de Mestrado. Universidade de São Paulo/Faculdade de Educação. São Paulo. 2003.

BIGODE, A. J. L. *Matemática hoje é feita assim*. São Paulo : FTD, 2000.

BITTAR, M; FREITAS, J. L. M *Fundamentos e Metodologia de Matemática para os Ciclos Iniciais do Ensino Fundamental*. Campo Grande : Ed. UFMS, 2005.

BONJORNO, J.R.; BONJORNO, R. A.; OLIVARES, A. *Fazendo a diferença.* São Paulo : FTD, 2006.

BOSCH, M., CHEVALLARD, Y. *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique*. In: Recherche en Didactique des Mathématiques, vol 19, nº 1, pp. 77–124, 1999. Disponível em:< http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf > acesso em 20 de fevereiro 2009.

BOSCH, M., GASCON, J., *La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos***.** 12e École d'Été de didactique des mathématiques celebrada en Corps (Francia), 2003.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Secretaria da Educação Fundamental Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática /Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC /SEF, 1998.

_____. Ministério da Educação e do Desporto/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: ensino médio. Brasília: MEC/SEF, 2002.

CHEVALLARD, Y. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: a abordagem atnropologique*. In Atas da Universidade de Verão realizada na cidade Rochelle. Clermont-Ferrand: Editora do IREM, 1998.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCON, J. *Estudar Matemáticas:* O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

______. *La Transposition Didactique. Du Savoir savant au savoir enseigné*. Paris: Pensée Souvage, 1991.

______. *Passé et Présent de la Théorie Anthropologique du Didactique.* Actes de ce congrès international sur la théorie anthropologique du didactique, Universidad de Jaén, 2007. p. 705-746.

______.*Remarques sur la notion d'infrasfructure didactique et sur lê rôle des Per.* Conferência proferida Lyon, maio/2009. Disponível no *site* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article. Acesso em 15 de outubro de 2010.

______. *Organiser l'étude Ecologia et Regulation*, Atas da 11ª Escola de Verão de Didática da Matemática, pela Editora La Pensée Sauvage: 2002.

FÁVERO, M. H., NEVES, R. S. P. Divisão e Números Racionais: como os professores avaliam a produção dos alunos. Perspectivas da Educação Matemática: *Revista do Programa de Mestrado em Educação Matemática da UFMS*, UNIVERSIDADE, v. 1, n.2, p. 111-121, jul./ dez. 2008.

FOUCAULT, M. *As palavras e as coisas:* uma arqueologia das ciências humanas. Trad. S. T. Muchail. 8. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

FRANKE, R. F.; GROENWALD, C. L. O.; NUNES, G. S. et al. Teoria dos Números no Ensino Básico – Desenvolvendo o Pensamento Aritmético. In: MARANHÃO, Cristina (Org.). *Educação Matemática nos anos finais do ensino fundamental e no ensino médio*. São Paulo: Musa Editora, 2009. p. 27- 44

FREIRE, P. www.pensador.info/autor/ Paulo Freire/. Acesso em18 dezembro de 2009.

GASCÓN, J. A necessidade de utilizar modelos em didática das matemáticas. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, v. 5, n. 2, 2003.

GREGORUTTI, J.L. *Construções dos Critérios de Divisibilidade com alunos de 5ª série do Ensino Fundamental por meio de Situações de Aprendizagem.* Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2009.

GURGEL, C. M. A. *Pesquisa etnográfica e educação matemática:* processo, contextualização e construção, 2004

JAKUBOVIC, J.; LELLIS M.; CENTURIÓN M. *Matemática na Medida Certa*: 5º série: ensino fundamental. São Paulo: Scipione, 1999.

MINAYO, M.C.S. et al. (Org.) *Pesquisa social:* teoria, método e criatividade. 2. ed. Rio de Janeiro : Vozes, 1994.

MOEHLECKE, S. Ação Afirmativa: História e Debates no Brasil. *Cadernos de Pesquisa:* Fundação Carlos Chagas, São Paulo n. 117, p. 197 – 217, Nov. 2002.

NASCIMENTO, A. Das ações afirmativas dos movimentos sociais àspolíticas públicas de ação afirmativa:o movimento dos cursos pré-vestibulares populares.In: SEMINÁRIO NACIONAL DE MOVIMENTOS SOCIAIS, PARTICIPAÇÃO E DEMOCRACIA, II, 2007, Florianópolis. *Anais.* Núcleo de Pesquisa em Movimentos Sociais – NPMS, 2007

N A S C IME N T O, A. *Movimentos sociais, educação e cidadania:* Um estudo sobre os Cursos Pré-Vestibulares Populares. Dissertação de Mestrado em Educação. Rio de Janeiro: Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), 1999.

NOGUEIRA, M. A; NOGUEIRA C. M. M. *Bourdieu & a Educação*. – Belo Horizonte : Autêntica, 2006.

NOGUEIRA C. M. I.; PAVANELLO R. M. *A abstração reflexionante a produção do conhecimento matemático*. *Bolema – Boletim de Educação Matemática,* n.30, p. 111-130, 2008.

OLIVEIRA A. B. *Prática Pedagógica e Conhecimentos Específicos:* um estudo com um professor de matemática em início de docência. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS. Campo Grande, 2010.

PAIS, L. C. *Didática da Matemática:* uma análise da influência francesa. Belo Horizonte : Autêntica, 2001.

______. *Ensinar e Aprender Matemática.* Belo Horizonte : Autêntica, 2006.

RAMA, J. A. *Números Inteiros no Ensino Fundamental e Médio*. Dissertação de Mestrado. Pontifícia Universidade Católica. São Paulo. 2005.

RESENDE, M. R. *Re-significando a Disciplina Teoria dos Números na Formação do Professor de Matemática na Licenciatura.* Tese de Doutorado. Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, 2007

SCHUBRING, G. *Análise Histórica de Livros de Matemática:* Notas de aula. Tradução Maria Laura Magalhães Gomes. Campinas : Autores Associados, 2003.

SILVA, D. S. Educação Matemática crítica e a perspectiva dialógica de Paulo Freire: tecendo caminhos para a formação de professores. In: ARAÚJO, Jussara de Loiola (Org.). *Educação Matemática Crítica Reflexões e Diálogos.* Prefácio de Ole Skovsmose. Belo Horizonte: Argvmentvm, 2007. p. 49-59.

TROTTA, F. *Matemática*: 5º série, 1º grau. São Paulo: Scipione, 1985.

# ANEXOS

## ANEXO I - Atividades aplicadas nas Sessões prévias realizadas no final de 2008 e Sessões iniciais de 2009

1 – Responda as perguntas e justifique sua resposta:

a) 40 é divisível por 5? 40 é múltiplo de 5? 5 é divisor de 40?

b) 45 é divisível por 11? 45 é múltiplo de 11? 11 é divisor de 140?

c) 0 é divisível por 19? 45 é múltiplo de 19? 11 é divisor de 19?

d) 8 é divisível por 8? 8 é múltiplo de 8? 11 é divisor de 8?

e) 1 é divisível por 18? 1 é múltiplo de 18? 1 é divisor de 18?

2- Dos números naturais menores que 30, escreva os que são divisíveis por:

a) 4

b) 5

c) 6

d) 10

3- Responda as perguntas e justifique sua resposta:

a) 0 é divisível por qualquer número?

b) 1 é múltiplo de qualquer número?

c) Os números divisíveis por cinco são somente aqueles que terminam em 0?

d) Todo número diferente de 0 é divisor dele mesmo?

e) Se um número é divisível por 2 e 3 simultaneamente, então ele será também divisível por 6?

f) Se um número é divisível por 3 então ele é divisível por 9?

2 – Eratóstenes (230 a.C) criou um "critério" para descobrir números primos. Na tabela abaixo, que contém números de 1 a 100, ele começava riscando o número 1 e, em seguida, todos os múltiplos de 2, todos os múltiplos de 3 maiores que 3, todos os múltiplos maiores que 5, e assim por diante. Os números que sobravam eram primos (esse critério é conhecido por "Crivo de Eratóstenes").

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

A partir do crivo responda às questões:

a) Existe algum número primo par diferente de 2? Por quê?

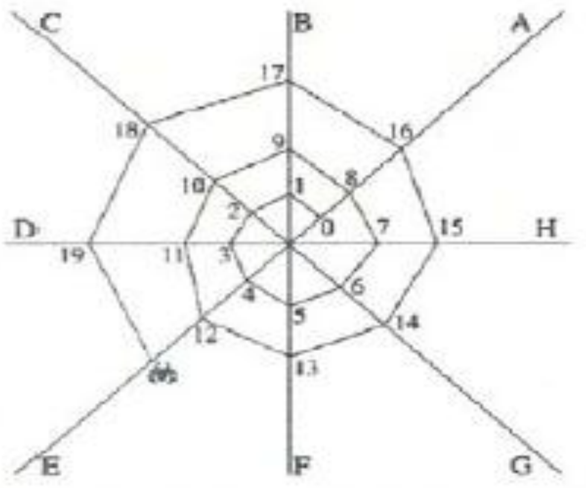
b) O número 1 é primo? Por quê?

c) Tem algum número múltiplo de 3 que é primo?

d) Qual o maior número primo de dois algarismos? E de três?

2 – O zero é um número primo? Por quê?

# ANEXO II - Tarefas propostas nas sessões de estudo de 2009.

<table>
<tr><td>Tarefa</td><td>Enunciado da tarefa</td></tr>
<tr><td>$t_1$</td><td>A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho.<br><br>
<br><br>a.Sobre qual fio de apoio estará o número 15?<br>b.Sobre qual fio de apoio estará o número 30?<br>c.É possível o número 80 estar sobre o fio de apoio C? Por quê?<br>d.Sobre qual fio de apoio estará o número 118?<br>e.Escreva uma regra para descobrir qual é o fio de apoio de qualquer número.</td></tr>
<tr><td>$t_2$</td><td>Um caixa automático do banco só trabalha com notas de 5 e 10 reais. Um usuário fez um saque de R$ 100,00. Quais as possibilidades das notas que pode ter sido o saque? (Mostre como você fez.)</td></tr>
<tr><td>$t_3$</td><td>O novo código de Trânsito de um país adota o sistema de pontuação em carteira para os motoristas; em caso de infringência às leis de trânsito, são atribuídos ao motorista 4 pontos quando se trata de infração leve, 5 pontos por infração grave e 7 pontos por infração gravíssima. Se um motorista acumulou 37 pontos em sua carteira, quantas vezes ele pode ter sido autuado por infração gravíssima?</td></tr>
<tr><td>$t_4$</td><td>- Observe a sequência de figuras que segue sempre o padrão de repetição:<br>■,●,Δ,■,●,Δ...<br>Responda as questões abaixo e escreva como encontrou as respostas.<br>a. Qual é a figura que representa o 7º termo da sequência? E o 8º termo?</td></tr>
</table>

| | |
|---|---|
| | b. Construa a sequência até o 15º termo.<br>c. Você pode explicar como chegou até o 15º termo?<br>d. Qual figura estaria representada na 20ª posição?<br>e. Qual figura ocupa a 12ª, 15ª, 18ª e 21ª posições? Quais outras posições essa figura pode ocupar?<br>f. Vamos pensar no quadrado. Quais posições que o quadrado pode ocupar?<br>g. Qual figura ocupará a 30ª, 42ª, 60ª e 88ª?<br>Descreva uma maneira para encontrar uma figura que corresponde a qualquer número apresentado. |
| $t_5$ | O produto de três números inteiros consecutivos é sempre um múltiplo de 6? Justifique sua resposta. |
| $t_6$ | Nas afirmações I, II, III, considere que x, y, z, são números inteiros pares e consecutivos, tais que $x<y<z$.<br>I. x.y.z é divisível por 24.<br>II. $x + y + z$ é múltiplo de 12.<br>III. $x + z = 2y$<br>Verifique se as afirmações I, II, III são verdadeiras, justifique suas respostas. |
| $t_7$ | Escreva a sequência dos números naturais n, $100 < n < 999$, que, divididos por 9, deixam resto 2. Explique sua resposta. |
| $t_8$ | Um vestibulando disse estar estafado e resolveu tirar férias, em plena semana letiva, numa ilha deserta. Por um descuido, ficou perdido e foi pego por canibais, que o prenderam. O vestibulando implorou para que fosse solto; os canibais, com pena dele, deram-lhe uma única chance: resolver um problema matemático, lembrando que, caso errasse o serviriam para o jantar. O problema era: Quantos números entre 900 e 1000 possuem um número ímpar de divisores, sabendo que, entre 0 e 20, existem 4 números que satisfazem essa condição? |
| $t_9$ | Qual é o número de inteiros positivos que são divisores do número $N = 21^4 \times 35^3$? Inclusive 1 e N. |
| $t_{10}$ | Os gregos chamavam de números perfeito aquele cuja soma dos divisores próprios (não inclui o próprio número) resulta igual a ele mesmo. Ex. D(6) = {1,2,3,6}, como 1+2+3 = 6 então 6 é um número perfeito. Quando a soma dos divisores próprios dá maior que o número ele é chamado de abundante e |

| | |
|---|---|
| | quando essa soma é menor o número é chamado de deficiente. Entre os números naturais compreendidos entre 10 e 30, quais são perfeitos, deficientes e abundantes? |
| $t_{11}$ | O número natural $25.21^k$ tem 147 divisores positivos. Qual o valor de K? |
| $t_{12}$ | Considere p, q **N*** tais que p e q são números pares. Se p > q, pode-se afirmar que:(p.q + 1) é múltiplo de 4? |
| $t_{13}$ | Considere-se o conjunto de todos os números inteiros formados por exatamente três algarismos iguais. Pode-se afirmar que todo n pertencente à M é múltiplo de: (a) 5 (b) 7 (c) 13 (d) 17 (e) 37 |
| $t_{14}$ | Qual o maior inteiro menor que 1000 que possui 10 divisores? |
| $t_{15}$ | Considere a sequência a seguir:<br><br>1.9 + 2 = 11<br>12.9 + 3 = 111<br>123.9 + 4 = 1111<br>....................<br>....................<br>....................<br><br>Nestas condições, como pode ser escrito o número 1111111111: |
| $t_{16}$ | Paulo está interessado em fazer vestibular para o Curso de Matemática e quer compreender a seguinte frase: “A diferença dos quadrados de dois números ímpares é sempre divisível por 8”. Ele verificou a validade da frase para alguns casos particulares, mas ainda ficou em dúvida quanto a sua validade geral. Qual seria a explicação que você daria para o Paulo? |
| $t_{17}$ | Determinar o resta da divisão por 3 da soma: 34 + 2487 + 36427 + 6123134, sem efetuá-la. |
| $t_{18}$ | Na páscoa, um comerciante de ovos de páscoa fez a seguinte promoção:<br>1 ovo = R$ 6,00<br>2 ovo = R$ 11,00<br>3 ovo = R$ 15,00<br>4 ovo = R$ 18,00<br><br>Um cliente realizou uma compra sob certas circunstâncias.<br><br>Quantos ele pagou pela compra de 11 ovos, gastando o menos possível?<br>Quantos ela pagaria se comprasse 177 ovos, gastando o menos possível |
| $t_{19}$ | Considere a seqüência dos múltiplos de 6.<br>a) Qual é o maior múltiplo de 6 menor que 1000?<br>b) Observe que o 4º múltiplo de 6 é 18 = 3 x 6 e que o 5º múltiplo de 6 é 24 = 4x6. Agora, descubra o 200º múltiplo de 6.<br>c) A seqüência 1, 7, 13, 19, ... é a seqüência dos múltiplos de 6 somado com 1. |

| | |
|---|---|
| | Quais são os próximos três números dessa seqüência?<br>d) Ainda na seqüência 1, 7, 13, 19, ..., qual é o último número anterior a 1000?<br>e) Qual é o 200º número da seqüência dos múltiplos de 6 somados com 1?<br>f) Como se escreve a fórmula geral para qualquer número da seqüência dos múltiplos de 6 somado com 1. |
| $t_{20}$ | Alguns automóveis estão estacionados na rua. Se você contar as rodas dos automóveis, o resultado pode ser 42? Pode ser 72? Por quê? |
| $t_{21}$ | Verifique se a afirmação abaixo é verdadeira ou falsa e justifique sua resposta.<br>O produto de dois inteiros ímpares é um inteiro ímpar. |
| $t_{22}$ | Determine os inteiros positivos que divididos por 17 deixam um resto igual ao quadrado do quociente. |
| $t_{23}$ | Dadas as afirmações abaixo, explique cada uma delas e dê exemplos.<br>1. O produto de três números consecutivos é divisível por 6.<br>2. Se o resto da divisão de um número primo por 3 é 1, mostre que na divisão deste número por 6 o resto também é 1.<br>3. Se o resto da divisão de um número inteiro n por 6 é 5, então o resto da divisão de n por 3 é 2. |