PAULO HUMBERTO PICCELLI

PROCESSOS DE VALIDAÇÃO DE CONJECTURAS EM GEOMETRIA PLANA

UFMS – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
Mestrado em Educação Matemática
Campo Grande / MS
2010

PAULO HUMBERTO PICCELLI

PROCESSOS DE VALIDAÇÃO DE CONJECTURAS EM GEOMETRIA PLANA

Dissertação apresentada como parte das exigências para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática, à Comissão Julgadora da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul.

Financiamento: Capes

Orientadora: Prof. Drª. Marilena Bittar

UFMS – Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
Mestrado em Educação Matemática
Campo Grande / MS
Abril de 2010

Para

Janaína

Pedro

Ledvina

Aline

Pedro Henrique

Marcelo

Paulo

Jussara

Tudo o que faço é por eles e para eles.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por me dar a oportunidade de entrar neste seleto grupo de pesquisadores. E por me proporcionar tudo o que eu precisei para realizar este trabalho.

À Profª Drª Marilena Bittar, pelo convite de participar do GETECMAT, grupo que me abriu as portas de entrada no Mestrado em Educação Matemática. Por todas as discussões que tivemos durante as aulas e em todas as orientações.

Aos professores Dr. Gerson Pastre de Oliveira, Dr. José Luiz Magalhães de Freitas, Dr. Luiz Carlos Pais e Drª Neuza Maria Marques de Souza que contribuíram significativamente para este trabalho.

Aos participantes do grupo GETECMAT cujas reuniões que renderam preciosas experiências que só vieram a acrescentar.

Aos meus colegas de Mestrado, pelas dicas, pelas conversas nos corredores que renderam diferentes pontos de vista e pelo incentivo que tinha de todos.

E por fim à minha família, Janaína (esposa), Pedro (pai), Ledvina (mãe), Aline (irmã), Pedro Henrique (irmão), Marcelo (irmão), Jussara (sogra) e Paulo (sogro). Um *muito obrigado* é pouco para expressar a gratidão que eu sinto por eles. Principalmente à Janaína que passou comigo cada dia destes dois anos de Mestrado. Entendendo os momentos que lhe faltava a minha atenção, pois precisava me dedicar à dissertação.

SUMÁRIO

ÍNDICE DE FIGURAS

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo **investigar a validação de conjecturas por alunos do primeiro ano do Ensino Médio** de uma Escola Estadual do município de Campo Grande – MS. Para atingir esse objetivo, foi aplicada uma sequência didática com base teórica na Engenharia Didática. A sequência era formada por 6 (seis) sessões, subdivididas em 17 (dezessete) atividades que foram realizadas com a utilização do *software* Cabri-Géomètre, pois tem-se como hipótese que a utilização do *software* auxilia na elaboração das conjecturas. Como base teórica para a Engenharia Didática, utilizamos a Teoria das Situações Didáticas, mais especificamente a parte que trata das situações adidáticas. Como base teórica para analisar a validação das conjecturas, utilizamos a Tipologia de Provas que classifica as provas em quatro tipos, o mais básico sendo a prova por alguns exemplos até chegar ao nível mais alto que é a demonstração formal aceita pela comunidade científica. Neste trabalho apresentamos a execução e análise da sequência elaborada, onde é possível identificar a elaboração e validação de conjecturas e também uma evolução na argumentação dos alunos de acordo com os Níveis de Prova.

Palavras Chave: Validação, Geometria, Tipologia de Provas

ABSTRACT

This work aims **to investigate the validation of conjecture by students of the first year of Secondary Education** in a Public School in the city of Campo Grande - MS. To achieve this objective, it was applied a sequence didactics with theoretical basis in Engineering Didactics. The sequence was formed by 6 (six) sessions, subdivided into 17 (seventeen) activities that were carried out with the use of the software “Cabri-Geometre”, because it has been hypothesized that the use of the software helps in drawing of the conjectures. As a theoretical basis for the Engineering Didactics, we used the Theory of Situations Didactic, more specifically the part that deals with the situations a-didactics. As a theoretical basis to analyze the validation of the conjectures, we used the Typology of Tests that classifies the tests into four types, the most basic being the proof by some examples until reaching the highest level that is the demonstration formal accepts the scientific community. In this work we present the implementation and analysis of the sequence drawn up, where it is possible to identify the development and validation of conjecture and also an evolution in the argument of students according to the Levels of Tests.
Keywords: Validation, Geometry, Typology of Tests.

INTRODUÇÃO

Já faz alguns anos que os professores se deparam com uma nova forma de dar aulas. Além de quadro e giz, agora também se utilizam do computador, pois a informática está sendo inserida nas escolas e surgiu uma nova tendência. Não só em Matemática, mas em qualquer disciplina, encontram-se docentes que estão sendo incentivados a utilizar esta ferramenta, disponível na maioria das escolas públicas e particulares de Campo Grande.

As *salas de informática* foram inseridas nas escolas, mas quem está preparado para utilizá-las? Como fazer uso desta ferramenta a favor da aprendizagem e do conhecimento? Essas foram as questões iniciais que motivaram a busca por respostas. As tecnologias da informação estão cada vez mais presentes nas escolas, porém como utilizá-las em sala de aula é uma discussão que está praticamente ausente da maioria dos cursos de formação inicial (BITTAR, 2000 e BRANDÃO, 2005).

As dúvidas começaram por volta do ano de 2005, quando foram criadas as salas de informática também chamadas de *salas de tecnologia* nas escolas estaduais do município de Campo Grande, inclusive onde eu lecionava as disciplinas de Matemática e Física para o Ensino Médio e para os últimos anos do Ensino Fundamental. Essas salas são equipadas com computadores com acesso à internet, além de alguns programas básicos como editores de textos, planilhas etc. Há um professor que fica responsável por esta sala, que faz o agendamento das aulas, liga e desliga os computadores, libera ou retira arquivos na rede. Sem esse profissional não é permitido sequer abrir a porta da sala. Sua carga é de 40 horas-aula semanais, separadas em 20 horas-aula em sala de aula lecionando uma disciplina normalmente e mais 20 horas-aula em que fica exclusivamente responsável pela sala de tecnologias. A presença desse professor na sala de tecnologias é, na verdade, uma forma de cuidado e segurança com os equipamentos que lá estão guardados. Ele é também orientador para os professores que queiram preparar suas aulas com o uso da tecnologia. Está sempre em atualização e troca de informações, programas e atividades com outros professores responsáveis por salas de tecnologias de outras escolas.

O professor de qualquer disciplina que tiver interesse em utilizar a informática, deve agendar previamente os horários e as turmas que irão trabalhar nesta sala, junto com a entrega do planejamento da aula. Com toda essa infraestrutura à disposição, nós professores, somos de certa forma incentivados e, às vezes, obrigados a trabalhar com a informática, cada um em sua matéria. Minhas primeiras perguntas foram: “O que fazer? Como fazer?”

As primeiras atividades que montei foram elaboradas no Excel e inspiradas em alguns passatempos de algumas revistas científicas: eram atividades de testes lógicos de raciocínio e concentração. Logo na primeira atividade, percebi que as mesmas não tinham muita relação com a Matemática que estava sendo trabalhada em sala de aula e com isso voltei às perguntas anteriores. “O que fazer? Como fazer?”

No segundo semestre de 2006, tive conhecimento que iria ter início o Programa de Pós-Graduação *strictu sensu* em Educação Matemática – Curso de Mestrado da UFMS, e que uma das linhas de pesquisa era: Tecnologia e Educação Matemática. Minha primeira tentativa de entrada nesse programa não deu certo. Depois de terminada a seleção em Fevereiro de 2007, conversando com a Profª Drª. Marilena Bittar, recebi um convite para participar do Grupo de Estudos da Tecnologia Aplicada à Educação Matemática – GETECMAT – grupo de pesquisas cujo objetivo é estudar a integração da tecnologia às aulas de Matemática.

Trata-se de um grupo de pesquisa–ação, formado por professores de matemática e pedagogos, que atuam desde a Educação Infantil até o Ensino Médio e Superior e alguns alunos de mestrado e doutorado em Educação e em Educação Matemática. Uma mistura muito interessante, porque era possível perceber que alguns problemas ou questionamentos não eram apenas de um nível específico. Uma professora da Educação Infantil tinham as mesmas dúvidas que um professor do Ensino Médio, por exemplo. Dentro do GETECMAT, entre outras atividades, formamos um grupo menor de três professores do Ensino Médio que começou a estudar algumas atividades elaboradas para serem trabalhadas no computador. Discutíamos algumas atividades já elaboradas ou em fase de elaboração para serem aplicadas, com a intenção de melhorá-las para que pudessem ter como objetivo o ensino da Matemática. Algumas dessas atividades estão relatadas em SILVA (2009).

Com isso conseguimos desenvolver e aplicar melhor algumas atividades que foram colocadas para os nossos alunos nas salas de informática. Uma dessas experiências foi realizada em Agosto de 2007 com a utilização do *software* Superlogo, com estudantes do Sexto ano do Ensino Fundamental (BITTAR, ESTEVES e PICCELLI, 2008).

Com o estudo que fizemos sobre a forma que estávamos utilizando o computador, conseguimos uma melhora significativa na elaboração de atividades a serem trabalhadas com os alunos.

O segundo grupo do qual participo é o GEEMA (Grupo de Estudos em Educação Matemática) que, durante o tempo que participei, era subdividido em dois subgrupos:

GEEMA Aprendizagem e GEEMA Formação. O primeiro estuda temas pertinentes à aprendizagem dos alunos e o segundo estuda temas relacionados à formação de professores.

No ano de 2008 tive o sucesso de ser aprovado na seleção para o Programa de Mestrado em Educação Matemática da UFMS, na linha de Tecnologias e Educação Matemática, podendo, assim, aprofundar-me na busca de respostas para as questões iniciais.

Dessa forma, optei por estudar uma forma de uso da tecnologia para a aprendizagem da Matemática. Tendo em vista algumas leituras que tratam sobre o tema, foi definido o objeto de estudo deste trabalho, como sendo: **O uso da tecnologia para a elaboração de conjecturas e as diferentes estratégias para validá-las.**

Para atingir este objeto, foi utilizada uma metodologia inspirada nos moldes da *Engenharia Didática* (ARTIGUE, 1990) em que era apresentado aos alunos, sujeitos da pesquisa, uma construção elaborada num *software* de Geometria Dinâmica. Diante destas construções, os alunos eram incentivados a manipular a construção para que conseguissem descobrir qual era o teorema que estava implícito na atividade, para em seguida tentar prová-lo.

Como base teórica para a metodologia, foi escolhida a *Teoria das Situações Didáticas* (TSD) (BROUSSEAU, 1986), isso porque a proposta era de que o aluno, ao se defrontar com as atividades, viesse a se tornar um investigador, ou seja, o aluno era incentivado a buscar respostas por si só e que o pesquisador tivesse um papel de orientador. Neste caso, a TSD apresenta ao professor uma forma de organizar uma situação para que o aluno possa buscar respostas com sua própria pesquisa. Desta forma quem fica responsável pelo saber em jogo é o aluno.

Porém, a TSD não era suficiente para analisar as provas elaboradas pelos alunos. Para isso foi escolhido o modelo da *Tipologia de Provas* (BALACHEFF, 1987), pois esta teoria apresenta uma classificação das provas em quatro tipos, sendo considerada desde uma prova baseada em alguns exemplos até a demonstração formal aceita pela comunidade científica. Desta forma, foram definidos os referenciais teóricos que deram suporte para esta pesquisa.

No Capítulo 1 desta pesquisa será apresentado o estudo de algumas pesquisas que discutem sobre a dificuldade do ensino e a aprendizagem da Matemática, algumas formas de mudança e utilização da informática como ferramenta para o professor, finalizando o capítulo com a questão principal desta pesquisa.

No Capítulo 2 serão anunciados os objetivos da pesquisa e as escolhas dos referenciais teórico e metodológico com suas justificativas.

No Capítulo 3 serão apresentadas as atividades elaboradas junto com uma das fases da Engenharia Didática, que detalha cada item das atividades apresentando suas variáveis, seus objetivos e possíveis estratégias de resolução pelos alunos.

No Capítulo 4 serão apresentadas as escolhas dos sujeitos e duas fases da Engenharia Didática, a descrição da execução das atividades e as análises das respostas dos alunos.

Concluindo, observou-se que os alunos não estão acostumados com esta forma de ação do professor. Os sujeitos desta pesquisa estavam acostumados a ficar esperando o conhecimento ser passado pelo docente. Não foi fácil a tarefa de tirá-los desta expectativa para a realidade que foi proposta neste trabalho, nem todos os alunos da turma trabalhada compreenderam ou quiseram fazer parte desta proposta. Além disso, é apresentado participação, o desenvolvimento do processo de adaptação à nova ação do aluno, os resultados positivos e a evolução de alguns alunos. A seguir, algumas considerações e reflexões para os próximos trabalhos.

CAPÍTULO I

1. Elaborando a questão de pesquisa

O objetivo desse capítulo é apresentar um estudo de algumas pesquisas que discutem sobre a utilização da informática para o ensino da Matemática, mais especificamente aquelas que procuram fazer da informática uma ferramenta para que o aluno se torne um sujeito ativo, ou seja, que ele elabore seus conhecimentos intermediado pelo professor no processo de ensino. Finalizamos o capítulo colocando a nossa questão de pesquisa.

1.1 O Ensino da Matemática

A dificuldade no ensino e na aprendizagem da Matemática é tema de pesquisas há vários anos. Autores como MISKULIN (1994; 1999), PASSOS (2000), BERTOLUCI (2003), COSTA (2005) e CAMPOS (2007) vêm discutindo alguns problemas e soluções para esse impasse entre a tentativa do professor de ensinar e a expectativa do aluno em aprender. O que pode ser feito? A quem ou a que se deve recorrer? Será que existe uma fórmula pronta? Como resolver uma questão que possui vários pontos a discutir?

Estes problemas do processo de ensino e aprendizagem muitas vezes podem levar ao que é chamado de fracasso escolar, chegando à reprovação dos alunos. É preciso então discutir o que leva a esse fracasso e como superar essas dificuldades.

> O processo de explicação do fracasso escolar tem sido uma busca de culpados: o aluno, que não tem capacidade; o professor, que é mal preparado, que é mal remunerado; as Secretarias de Educação que não remuneram eficientemente seus professores; as universidades, que não formam bem o professor, o estudante universitário, que não aprendeu no secundário o que deveria ter aprendido e agora não consegue aprender o que seus professores universitários lhe ensinam. (...) Todos nós, educadores, precisamos não encontrar os culpados, mas encontrar as formas eficientes de ensino e aprendizagem em nossa sociedade. (CARRAHER, 1988, p.20).

Uma destas formas pode ser a mudança na forma que geralmente é realizado o processo de ensino. D'Ambrosio mostra que o professor de Matemática dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior, ainda em sua maioria, trabalha suas aulas de forma expositiva. Nestas aulas, o aluno é visto como um recebedor de informações. Em geral a metodologia é do tipo clássica, com apresentações de definições, exemplos e listas de exercícios. Isso gera uma crença de que o aluno que resolve o maior número de exercícios está aprendendo, além de restringir o aluno a uma repetição de um modelo colocado pelo professor. Com isso, o aluno perde a capacidade de interpretação, além de não ter liberdade para ser criativo.

> Na matemática escolar o aluno não vivencia situações de investigação, exploração e descobrimento. O processo de pesquisa matemática é reservado a poucos indivíduos que assumem a matemática como seu objeto de pesquisa. É esse processo de pesquisa que permite e incentiva a criatividade ao se trabalhar com situações problemas. (D'AMBROSIO, 1989, p.2)

Uma fonte importante de orientação sobre o ensino e a aprendizagem da matemática são os documentos oficiais. Um destes documentos são os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que oferecem informações aos professores sobre o que é necessário o aluno saber ao final dos Ensinos Fundamental e Médio. A seguir, temos um extrato do PCN+, abordando a Geometria, o que o aluno deve saber sobre esse conteúdo ao final do Ensino Médio e o que se espera que ele consiga fazer. Entre estas atribuições, os PCN's fazem uma ênfase para que o aluno desenvolva um raciocínio lógico, na dedução das afirmações, utilizando-se como base, verdades já conhecidas.

> O ensino de Geometria no ensino fundamental está estruturado para propiciar uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas. Para alcançar um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é necessário que no ensino médio haja um aprofundamento dessas idéias no sentido de que o aluno possa conhecer um sistema dedutivo, analisando o significado de postulados e teoremas e o valor de uma demonstração para fatos que lhe são familiares.
> Não se trata da memorização de um conjunto de postulados e de demonstrações, mas da oportunidade de perceber como a ciência Matemática valida e apresenta seus conhecimentos, bem como propiciar o desenvolvimento do pensamento lógico dedutivo e dos aspectos mais estruturados da linguagem matemática. Afirmar que algo é "verdade" em Matemática significa, geralmente, ser resultado de uma dedução lógica, ou seja, para se provar uma afirmação (teorema) deve-se mostrar que ela é uma consequência lógica de outras proposições provadas previamente. (BRASIL, 2002, pp. 123-124)

Em seu trabalho, Miskulin (1994) levanta a discussão de que a Matemática é algo no sentido de "siga o modelo" em que o professor transmite as regras, fórmulas, deduções e exemplos, tirando, desta forma, a responsabilidade do aluno em elaborar suas próprias teorias e fazendo com que ele apenas repita na lista de exercícios o que foi feito nos exemplos. Nesta forma de trabalho, o aluno não tem a oportunidade de exploração, não existe a tentativa e erro para o aluno, pois o que o professor transmite já é verdade absoluta e inquestionável.

> Desta forma, a Matemática transformou-se e restringiu-se para os alunos em "fazer contas", seguir fórmulas e regras de soluções pré-determinadas. Perdeu-se, com isso, todo o poder criativo do aluno, a iniciativa do educando, restringindo-se, assim, a sua capacidade criativa de investigar "novos possíveis", capacidade de engendrar-se em novas buscas e investigação, e, é esse aspecto, a investigação, que é importante e necessário no processo de se "fazer matemática", pois é através dela, que o aluno vai poder gerar conjecturas, hipóteses e verificar se elas, de fato, são verdadeiras. (MISKULIN, 1994, pp. 23-24)

O aluno deve ser capaz de elaborar uma conjectura e provar um teorema. Por isso, a importância de fazer com que os alunos parem de repetir os exemplos dados pelo professor e comecem a pensar e “fazer Matemática”.

Como é possível dar início a esse processo de mudança; do aluno que repete várias vezes um exemplo dado, para um que elabora conjecturas e prova teoremas? Isso pode ser uma atitude em direção à resolução desse problema que atinge a educadores e alunos, o ensino e a aprendizagem da Matemática. Acreditamos que o professor é peça fundamental nesse processo, pois ele deve incentivar o aluno criando situações para que esse passe de espectador a pesquisador. Com isso surge o seguinte questionamento: Como elaborar situações em que o aluno seja um pequeno pesquisador e que o professor se torne um orientador, de forma que o primeiro adquira conhecimento com sua própria pesquisa? Como propor situações desse tipo para os níveis Fundamental e Médio?

Há pesquisas (MISKULIN, 1994 e 1999) que mostram que é possível a elaboração de atividades que de certa forma induzem o aluno a pensar, ou seja, coloca-o na posição de pesquisador de novas estratégias para a resolução de uma situação de aprendizagem. D’Ambrósio (1989) também defende esta forma de se ensinar Matemática, ou seja, levar o educando a ter papel ativo na construção do conhecimento.

> Acredita-se que metodologia de trabalho desta natureza tem o poder de dar ao aluno a autoconfiança na sua capacidade de criar e fazer matemática. Com essa abordagem a matemática deixa de ser um corpo de conhecimentos prontos e simplesmente transmitidos aos alunos e passa a ser algo em que o aluno faz parte integrante no processo de construção de seus conceitos. (D’AMBROSIO, 1989, p.5)

Segundo Duval (1998), uma área da Matemática que nos permite uma grande exploração do raciocínio e pode facilitar a elaboração de conjecturas é a Geometria. Isso é possível devido ao fato de que o aluno pode visualizar a figura, podendo às vezes até mesmo manipulá-la.

> A geometria, mais do que outras áreas da matemática, pode ser usada para descobrir e desenvolver diferentes formas de raciocínio. Este deve ser um objectivo essencial do ensino da geometria. Mas ainda é preciso conseguir uma prática mais compreensiva e

> equilibrada dos processos cognitivos subjacentes. Isto quer dizer que são necessárias situações específicas de aprendizagem para a diferenciação e coordenação dos diversos tipos de processos de visualização e de raciocínio. (DUVAL, 1998, p. 51)

A fim de tentar proporcionar essas situações específicas de aprendizagem para desenvolvimento do raciocínio lógico que fala Duval, temos hoje ferramentas que podem auxiliar na elaboração dessas situações. Uma destas ferramentas é a informática, que está presente na vida de praticamente todos os alunos, nas escolas em suas casas ou em "*lan houses*" que se espalharam por todos os bairros de qualquer cidade brasileira. Em Campo Grande não é diferente. Mas neste caso surge uma questão: com a presença da informática nas escolas, como podemos utilizá-la para melhorar o aprendizado?

Para o uso da informática em sala de aula existem, à disposição, *softwares* que apresentam a Geometria de uma forma dinâmica, onde além de construir figuras com as suas propriedades, é possível, em alguns *softwares*, a manipulação destas figuras, fazendo com isso, a exploração de inúmeros exemplos. Quando a Geometria é explorada com papel, lápis, régua e compasso, é comum o professor ficar limitado a poucos ou até mesmo a apenas um exemplo e quando existe a possibilidade de o aluno explorar vários exemplos com a utilização de um *software,* é possível levar o aluno a perceber algumas regularidades existentes nas propriedades de cada configuração e, com isso, elaborar conjecturas.

Existe atualmente uma variedade de *softwares* (Cabri-Géomètre, Super-Logo, Régua e Compasso, etc.) que pode auxiliar o raciocínio, pela possibilidade de manipulação das figuras e construções. Algo que se destaca no Cabri-Géomètre[1] é o fato de que a manipulação preserva as características e propriedades da figura utilizadas na construção. Por exemplo: uma reta *r* construída para ser perpendicular a uma reta *t*, continuará perpendicular durante a manipulação. Devido a características deste tipo, o Cabri-Géomètre é classificado como um *software* de *Geometria Dinâmica*.

> A qualidade da análise dos alunos sugere que o uso de programas de geometria dinâmica, como o Cabri, acompanhados de tarefas adequadas, podem proporcionar oportunidades para que desenvolvam bases para uma apreciação mais completa da natureza e propósito da demonstração matemática. (...) Deste modo, acreditamos que podemos desenvolver uma apreciação flexível dos papéis da demonstração que incluem iluminação, descoberta e comunicação, paralelamente com os de verificação e rigor. (HOYLES e JONES, 1998, p. 124)

[1] Cabri-Géomètre é um produto produzido por J. M. Laborde, F. Bellemain e Y. Baulac no Laboratório de Estruturas Discretas e de Didática da Universidade de Grenoble. França

O Cabri-Géomètre pode ser utilizado para levar o aluno a elaborar suas conjecturas. Porém, é preciso esclarecer que por mais recursos que o *software* tenha, ele não demonstra nenhuma propriedade matemática. O *software* pode proporcionar configurações que refutam, com um contra-exemplo, uma conjectura elaborada durante a manipulação. Porém, para que a conjectura seja provada e se torne uma verdade, é necessário que os alunos se utilizem de afirmações já provadas anteriormente em uma sequência lógica de afirmações.

A utilização da tecnologia não garante que as propriedades ou teoremas sejam provados, uma vez que os *software*s não fazem nenhum tipo de demonstração. O que pode ser visualizado no *software* é a infinidade de exemplos que ele proporciona, sendo assim possível perceber algumas regularidades. Porém, para efetivar uma demonstração é necessário utilizar-se de argumentos matemáticos que já foram provados anteriormente.

Incentivar os alunos a demonstrar teoremas é algo importante para o ensino da Matemática, pois pode fazer com que os alunos saiam da posição de espectador e passem à posição de pensadores, tornando-se sujeitos ativos na aquisição do conhecimento. Para que isso ocorra, o professor deve estar preparado para conduzir essa forma de dar aulas, pois, sem a devida orientação, o aluno que não está acostumado a demonstrar poderá ter dificuldades para dar início a esse processo. Outro cuidado a ser tomado é para que os professores não façam "a demonstração diante dos alunos para que acompanhem, copiem e repitam até que a sequência de procedimentos seja memorizada." (SALES e SANTOS, 2009, p. 173)

> Entendemos que a demonstração tem uma grande contribuição para a aprendizagem da Matemática, mas que essa contribuição somente se efetiva quando são elaboradas atividades de tal modo que a demonstração seja a culminância de um processo e não o ponto de partida. Nem mesmo deverá estar muito próxima do ponto de partida. (SALES e PAIS, 2009, p. 61)

Outros autores defendem também a utilização da demonstração como parte do ensino da Matemática, ou seja, como algo que os alunos devem aprender. De Villiers (1997) defende este ponto de vista e discute a utilização de um *software* para contribuir com este processo:

> Apresentar aos alunos a função fundamental da demonstração como explicação e descoberta exige que desde muito cedo eles sejam iniciados na arte de formular problemas e que lhes sejam proporcionadas oportunidades suficientes de exploração, conjectura, refutação, reformulação e explicação (…). Os programas de geometria dinâmica encorajam fortemente este tipo de raciocínio. Eles são poderosos como meio de verificação de conjecturas verdadeiras e também muito valiosos na construção de contra-exemplos para conjecturas falsas. (DE VILLIERS 1997 p. 23)

Trabalhar validações com alunos da educação básica não é uma tarefa fácil, pois não é uma prática de sala de aula que o professor está acostumado a fazer, além de estar pouco presente nos Livros Didáticos. Um fator para essa pouca exploração da demonstração em salas de ensino básico, pode ser a dificuldade em demonstrar que os próprios educadores tiveram em sua graduação "quando esse acadêmico se torna professor da educação básica, a demonstração não é incluída no seu programa de trabalho" (SALES e SANTOS, 2009, p. 173). É possível ver em SALES e PAIS (2009) um exemplo das dificuldades apresentadas para a validação de conjecturas ou teoremas, por Licenciandos em Matemática.

> (...) é possível vislumbrar algumas dificuldades na notação indicando que os elementos ostensivos não foram bem dominados e que há também dificuldades na manipulação desses ostensivos. E em vários casos há uma falha no encadeamento lógico e, em outros, clareza quanto ao objetivo da tarefa proposta. Em alguns casos há uma conclusão prévia, no estilo de uma demonstração, mas as premissas utilizadas e as justificativas que se seguem não dão suporte para essa conclusão. (SALES e PAIS, 2009, p. 69)

Para que seja possível trabalhar demonstrações em sala de aula, é necessário que seja proporcionado aos alunos uma base para o início das argumentações e deduções, ou seja, é preciso que haja algo que seja, de certa forma, inferior à demonstração por ser menos rigoroso. Deverá ter uma sequência lógica de afirmações, porém, não há necessidade de que seja uma demonstração formal aceita pela comunidade científica.

O processo de ensino e aprendizagem de demonstrações pode ser iniciado seguindo o modelo da *Tipologia de Provas* de Balacheff (1988), que classifica as provas em dois níveis, subdivididos em quatro tipos. Antes de ser colocada a classificação dos tipos de prova, o autor faz uma distinção entre *explicação*, *prova* e *demonstração*. *Explicação* é um discurso em que se deixa claro a validade de uma proposição; *prova* acontece quando uma explicação é aceita por uma comunidade e *demonstração* é considerada pelo autor como um nível mais alto de prova, pois é uma prova aceita pela comunidade Matemática; segundo o autor, demonstração é um tipo de prova. Se a demonstração é o nível mais alto de prova, é porque existem níveis inferiores e, como é possível verificar a seguir, esses níveis podem ser explorados como sendo o início do ensino e aprendizagem da demonstração o que pode ser chamado de "processos pré-demonstrativos" (SALES e PAIS, 2009, p. 61)

> Entendemos ainda que há procedimentos pré-demonstrativos que, por serem insuficientes em si mesmos para se constituírem em um final de processo, possuem a flexibilidade necessária para conduzir à percepção da necessidade de um procedimento mais completo e, ao mesmo tempo, preparam o desenvolvimento da habilidade de demonstrar. (SALES e PAIS, 2009, p. 61)

Balacheff classifica o primeiro nível de provas como *Provas Pragmáticas,* onde são feitas conclusões baseadas em dados singulares que a constituem. Aqui, não aparece nada voltado para a generalização. Neste primeiro nível, estão os dois primeiros tipos de provas: *Empirismo Ingênuo* e *Experimento Crucial* (BALACHEFF, 1987). O segundo nível é chamado de *Provas Intelectuais*, em que são feitas conclusões baseadas em deduções anteriores; nesse nível aparece a generalização. Dentro deste segundo nível estão os outros dois tipos de provas: *Exemplo Genérico* e *Experiência Mental* (BALACHEFF, 1987). Estes quatro tipos de prova serão definidos a seguir. Para exemplificar os tipos de provas, será utilizado o mesmo teorema: A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo mede 180º.

Empirismo ingênuo: Quando é dada uma afirmação com base em apenas alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização. Exemplo: Desenham-se alguns triângulos, medem-se seus ângulos e somam-se as medidas. Comparando todos os desenhos, verifica-se que todas as somas resultam em 180º. A partir destes poucos exemplos, conclui-se que todos os triângulos possuam a mesma propriedade. Esta é uma forma de prova por empirismo ingênuo.

Experimento Crucial: Quando é dada uma afirmação com base em uma proposição após a verificação para um ou mais casos específicos. É um tipo mais elevado do que o empirismo ingênuo, pois não se contenta com a verificação de alguns casos e busca analisar alguma situação incomum. Exemplo: É considerado um experimento crucial quando depois de feitas as verificações para alguns casos, como foi feito no exemplo do empirismo ingênuo, é feito o mesmo teste para um triângulo incomum. Pode ser considerado como "triângulo incomum" um triângulo que pelo seu formato, raramente é utilizado em sala de aula. Como por exemplo, um triângulo retângulo cujo comprimento de um de seus catetos seja 200cm e o outro cateto apenas 2cm. Assim, quando se está convencido que a propriedade é válida para alguns casos simples, em seguida testa-se para um caso incomum e, com a confirmação da hipótese, tem-se um experimento crucial.

Exemplo Genérico: Quando é dada uma afirmação com base em uma proposição após a manipulação de algum caso particular de uma forma que esse caso fique com uma característica que possa ser representante de um conjunto de objetos. É quando se consegue fazer uma generalização a partir de um caso. Por exemplo: A partir do desenho de um triângulo é possível utilizar os dados do desenho para fazer afirmações de modo que os dados do desenho sejam generalizados para uma classe de triângulos.

Experimento mental: Quando é dada uma afirmação com base em uma proposição de forma genérica. Neste caso, o texto da prova indica generalidade e advém de uma tentativa de revelar uma classe de objetos, mas não é baseado em nenhum caso particular. O exemplo deste tipo de prova são as demonstrações formais, baseadas apenas nas afirmações já comprovadas e sem fazer relação com exemplos.

Para exemplificar alguns tipos de prova, serão apresentados alguns trabalhos que foram feitos de acordo com este referencial. É possível notar no trabalho de LIMA e FREITAS (2009) que aplicaram, em alunos do 3º ano do Ensino Médio, uma sequência didática em que eles deveriam verificar se algumas afirmações algébricas eram verdadeiras ou falsas, justificando matematicamente suas respostas. Em suas análises prévias não era esperado que logo na primeira atividade houvesse algum aluno que fizesse uma prova voltada para a generalização. Mesmo porque não é comum o professor destes alunos trabalhar desta forma em sala de aula. O que acabou se confirmando foi que a maioria dos alunos permaneceu no Empirismo Ingênuo, alguns conseguiram alcançar o Exemplo Crucial e houve dois alunos que se utilizaram de letras para a prova, ou seja, houve o início de uma generalização. A seguir, a resposta de um aluno.

> (...) o caso do aluno LN, que para o item (...) “A soma de dois números pares é sempre par”. Resposta de LN: *Sim, ex. 2 + 2 = 4 , 4 + 32 = 36,* 4.044 + 8.316 = 12.360 . Neste caso, observamos que ele fez dois cálculos com a soma de dois números relativamente pequenos e em seguida fez o cálculo com dois números muito maiores. Isso pode ser interpretado que ele ficou com dúvida se a propriedade era sempre válida e resolveu fazer mais um teste para a soma dos números 4.044 + 8.316. Esta adição pode ser por nós caracterizada como uma “experiência crucial” no sentido de Balacheff. (LIMA e FREITAS, 2009, p.56)

Outro trabalho em que é possível verificar alguns exemplos da tipologia de provas é PICCELLI e BITTAR (2009), em que está relatada uma pequena sequência didática, com apenas duas sessões, que serviu como teste piloto para a sequência didática final do nosso trabalho. Na ocasião, o tema abordado foi bem mais abrangente, sendo tratada a Geometria Plana em geral.

Este teste piloto foi aplicado em uma turma de primeiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede privada do município de Campo Grande – MS. A turma era composta por apenas 10 alunos que se dividiram em duas duplas e dois trios. As atividades foram elaboradas para que num primeiro momento o aluno fizesse a construção da figura no Cabri-Géomètre. Após construir a figura, os alunos foram incentivados a manipular toda a figura para que pudesse deduzir o teorema implícito na construção, para em seguida tentar prová-lo.

Neste trabalho foi visto que os alunos não estavam acostumados a provar teoremas, tanto é que foi necessário o pesquisador realizar um momento em que foi exposto aos alunos o que era esperado, ou seja, na primeira atividade o pesquisador precisou mostrar como a demonstração deveria ser feita. A partir disto houve resultados bem satisfatórios, porém, como em LIMA e FREITAS (2009), a maioria das provas foi classificada como *Empirismo Ingênuo*.

O trecho a seguir é sobre uma atividade que pedia para o aluno visualizar e provar que o ângulo central de uma circunferência é o dobro do ângulo inscrito no mesmo arco.

> (...) dupla, AD e IG, conseguiu verificar e fazer uma validação classificada por Balacheff (1988) como Empirismo Ingênuo, o registro da dupla foi: *pegamos o ângulo BÔC*[2] *e subtraímos o valor do ângulo BÂO*[3] *e o resultado deu o mesmo valor do ângulo BÂO.* (PICCELLI e BITTAR, 2009, p. 209)

Essa experiência mostra que os alunos não estão acostumados com a elaboração de provas, por isso, antes de solicitar ao aluno que prove algum teorema, é preciso apresentar aos alunos o que realmente é uma prova e dar condições para que eles possam buscar sozinhos os resultados seguintes.

Nem todas as questões levantadas neste capítulo foram ou serão respondidas neste trabalho, mas a partir do que foi visto e definindo algumas prioridades, a questão central da pesquisa é: **Como se dá o processo de elaboração de provas por alunos do primeiro ano do Ensino Médio em Geometria Plana?**

[2] Este ângulo era o ângulo central da circunferência nesta atividade.

[3] Este ângulo era o ângulo inscrito da circunferência nesta atividade.

Capítulo II

2. Escolhas teórico-metodológicas

Uma vez definida a questão de pesquisa, um grande interesse nesta questão é saber como é possível construir esse processo de mudança do professor que explica o conteúdo para o aluno que, por sua vez, busca a informação com a orientação do docente. Por isso, neste capítulo, serão anunciados os objetivos da pesquisa e as escolhas dos referenciais teóricos e metodológicos que melhor auxiliarão a atingir os objetivos e responder a questão principal da pesquisa. O capítulo é finalizado com o processo de escolha dos sujeitos.

2.1 Objetivo Geral

Investigar a elaboração e a validação de conjecturas em Geometria plana por alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

Para atingir esse objetivo geral, foram definidos os seguintes **objetivos específicos**:

- ✓ Investigar a utilização do Cabri-Géomètre para a elaboração e validação de conjecturas em Geometria;
- ✓ Identificar, analisar e classificar as diferentes estratégias utilizadas para validar uma conjectura;
- ✓ Analisar a evolução das argumentações apresentadas pelos alunos.

Conjectura é uma suposta verdade que ainda não foi provada. Nesta pesquisa os alunos são desafiados a conjecturar teoremas que já foram provados e não há nenhuma dúvida sobre sua veracidade.

Os teoremas que estão implícitos nas atividades são conhecimentos que os alunos, teoricamente, já possuem, portanto não será esse o "novo" para eles. Para Brousseau (1986), em uma situação adidática, além de outros itens, é necessário que exista, para a resolução da atividade proposta, um conhecimento que o aluno ainda não possui, desta forma, o "novo" para os alunos, segundo Brousseau, será a validação do teorema, pois é algo que os alunos (sujeitos da pesquisa) não estão acostumados a fazer.

Para a elaboração das conjecturas, está sendo proposta a utilização do Cabri-Géomètre porque é um *software* de Geometria Dinâmica, onde é possível manipular uma configuração que cria inúmeros exemplos, ou seja, quando uma construção é manipulada ela se transforma em outra figura, além das inúmeras formadas durante a movimentação. A escolha pela utilização de um *software* é importante para que o aluno possa vivenciar a observação desses vários exemplos e do comportamento das construções durante a manipulação.

2.2 As escolhas teórico-metodológicas

Para que seja possível estudar como o aluno aprende a elaborar uma prova de um teorema, é necessário saber como se dá o aprendizado do aluno. Para isso, foi adotado o ponto de vista de Piaget.

Jean Piaget (1972) faz um paralelo entre *desenvolvimento* e *aprendizagem*. Ele afirma que o desenvolvimento é um processo espontâneo ligado ao processo genético de desenvolvimento do organismo da criança, e a aprendizagem ocorre quando a criança é provocada por situações em que ela precisa pensar e elaborar novas estratégias para resolver um problema, "o desenvolvimento explica a aprendizagem". (PIAGET, 1972).

Piaget afirma que conhecimento não é fazer uma cópia do objeto, mas poder transformar o objeto e entender esta transformação. Ele explica melhor citando quatro fatores, que quando apresentados isoladamente, não são suficientes para que ocorra desenvolvimento.

O primeiro é a "Maturação", que está relacionada com o sistema nervoso da criança; é importante, mas não basta para que ocorra conhecimento e aprendizagem. Ele afirma que crianças de mesma idade, mas de sociedades diferentes, podem apresentar um desenvolvimento mental diferente.

O segundo fator é a "Experiência Física": não basta apenas realizar uma experiência, como calcular medidas de dois objetos, se isso não acarreta um novo conhecimento. As perguntas que podem ser feitas são: "O que a criança aprendeu depois de ter calculado as medidas?" e "Quais foram as estruturas cognitivas que a criança elaborou?" Para isso é preciso elaborar experiências que levem o aluno a avançar etapas do seu próprio desenvolvimento e aprendizagem.

Como terceiro fator, Piaget destaca a "Transmissão Linguística, Social ou Educacional". A criança pode receber informações sobre certo assunto, mas, que só irão contribuir para o aprendizado se ela tiver conhecimentos prévios sobre esse assunto, ou seja, ela precisa ter uma determinada estrutura para poder ter algum aprendizado sobre essa informação.

Por último, o fator da “Equilibração”. Depois da ocorrência dos três fatores, é necessário que se tenha um equilíbrio, pois quando o aluno é provocado com novos conhecimentos, há um desequilíbrio emocional e cognitivo e este fator vem justamente para balancear os conflitos internos e externos.

Vendo isso nos questionamos: Como levar o aluno a uma situação em que o coloque nessa posição de desequilíbrio, mas de uma forma que ele aceite essa posição e esteja disposto a criar novos caminhos para solucioná-la?

Para saber qual deve ser o papel do professor e do aluno em tais situações, serviu de inspiração para este trabalho, a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986). Essa teoria foi desenvolvida pelo professor e pesquisador Guy Brousseau, que trata especificamente sobre o saber matemático, ou seja, a aprendizagem da Matemática, diferente de outras teorias em que o objetivo é a aprendizagem em geral. Segundo Freitas (2008, p. 78), “Brousseau desenvolveu um tratamento científico do trabalho didático, tendo como base a problematização matemática e a hipótese de que se aprende por adaptação a um meio que produz contradições e desequilíbrios.”

Nesta teoria estão envolvidos o professor, o aluno e o saber matemático e fica a cargo do professor elaborar um *meio* para que o aluno se envolva na construção do saber matemático. “Meio é onde ocorrem as interações do sujeito, é o sistema antagonista no qual ele age.” (FREITAS, 2008, p. 79).

Quando existe um meio constituído em que exista uma intenção do professor em transmitir para o aluno um saber matemático, está estabelecida uma *situação didática*.

> Uma situação didática é um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre o aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição. (BROUSSEAU, 1986, p. 8)

Dentro da Teoria das Situações Didáticas será dado mais enfoque na *situação adidática,* que está inserida na situação didática, pois o objetivo da situação didática é a aprendizagem do aluno e a situação adidática é também uma forma de aprendizagem, porém o aluno é parte ativa nesse *meio.* São situações que o professor elabora para que o educando se torne responsável pelo conhecimento, que não será transmitido pelo docente de forma direta, mas construído pelo aluno. A elaboração de uma situação adidática é um modo de se fazer os alunos “seguirem os passos” dos cientistas que conseguiram desenvolver a teoria de certo conteúdo matemático.

Para isso é necessário que o educador proponha uma situação onde possa ocorrer uma *devolução*. Devolução nesse caso está ligada à resposta do educando quanto ao problema proposto pelo professor. É necessário que o aluno aceite o problema, com isso, faça parte do desafio proposto e interaja para que possibilite a aprendizagem. A devolução pode não acontecer quando o problema não é de interesse do aluno, como um problema muito fácil que possa ser resolvido de uma forma instantânea, sem que ele tenha pensado muito, ou muito difícil de forma que o estudante não tenha conhecimento suficiente para fazer a exploração do problema.

Quando o aluno aceita o problema como sendo dele, assume a responsabilidade pela aquisição do conhecimento, sem esperar que este seja transferido pelo professor. Isso indica que houve a *devolução*. Geralmente, primeiro ele tenta resolver o problema com os saberes que já possui. Essa é uma estratégia que logo se mostra falha, pois para resolução do problema é necessário um conhecimento novo, que é justamente o saber em jogo que não será transmitido pelo professor. Então, toda vez que existe a intenção por parte do mesmo de orientar um estudante na aquisição de um novo conhecimento, de forma que seja dono da situação e não do conhecimento, fica caracterizada uma situação *adidática*. (FREITAS, 2008)

> Uma situação adidática se caracteriza essencialmente pelo fato de apresentar determinados momentos no processo de aprendizagem nos quais o aluno trabalha de maneira independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto por parte do professor. (FREITAS, 2008, p. 84).

Brousseau define três tipos de situações adidáticas e é esperado que o aluno consiga passar pelas três. A *situação de ação* ocorre quando o aluno se empenha em resolver o problema. Esta fase é puramente experimental. São soluções que o estudante encontra sem estar preocupado em explicitar ou validar a resposta, ou até mesmo, fazer a relação entre a resposta e alguma teoria de base. A *situação de formulação*, é caracterizada pelo fato de o aluno estar empenhado em teorizar os conceitos utilizados na resolução, mas ainda sem uma validação explícita dos mesmos. Nesta fase, é necessário que os alunos utilizem novos conhecimentos para formular um conceito para que, posteriormente, o próprio aluno verifique a *validade* do conceito que ele próprio elaborou. Finalmente, na *situação de validação* o estudante prova ou refuta o que foi conjecturado.

As situações de ação, formulação e validação são situações adidáticas e esse processo é cíclico, pois, o aluno, por meio de suas ações, poderá formular algumas teorias e não conseguir validá-las, ou até mesmo formular uma conjectura que não seja verdadeira e na hora da validação provar que a conjectura é falsa, o que também é considerado uma validação. Desta forma o aluno precisará voltar para a ação e, por meio de experimentações, formular outras teorias até que consiga elaborar e provar uma conjectura que seja verdadeira.

Depois de experimentar e formular espera-se que o discente consiga provar aquilo que formulou. Não basta apenas elaborar mecanismos para resolução do problema. É necessário que verifique se estes mecanismos são válidos para certo tipo de problemas e problemas semelhantes onde seja utilizado o mesmo mecanismo para a resolução. Ao final de todo o processo, o professor realiza uma intervenção, que é um processo didático Nela, ele irá fazer um apanhado de tudo o que foi feito durante a sessão e fazer um fechamento do assunto.

É claro que levar os alunos a conjecturar em pouco tempo teorias que provavelmente demoraram anos, décadas e algumas até séculos, não é tarefa fácil para o professor. Porém é possível buscar inspiração em teorias que auxiliam a elaborar situações para que isso seja possível.

A ideia principal desta pesquisa é elaborar situações que levem o aluno a trabalhar de forma autônoma; criar um meio para que os discentes possam trabalhar de forma adidática. Como serão elaboradas essas situações? A partir disto a metodologia a ser utilizada nesta pesquisa foi inspirada na Engenharia Didática (ARTIGUE, 1990), pois ela nos dá, além do modelo de elaboração, também o modelo de análise destas situações.

A Engenharia Didática é uma metodologia que foi criada para ser utilizada quando a pesquisa tem uma parte experimental e se diferencia de outras pelo tipo de validação. Esta metodologia utiliza a validação interna, realizando uma comparação entre *análise a priori* e *análise posteriori*. Neste caso o aluno é comparado com ele mesmo, ou seja, é analisado o desenvolvimento dele no decorrer dos trabalhos. Assim esse tipo de avaliação difere de outras metodologias de pesquisa nas quais a validação é externa: ocorre quando existe um *grupo experimental* e um *grupo controle* e ao final compara-se o resultado dos dois grupos.

A engenharia didática é composta de quatro fases: análises *preliminares*, análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori*. A seguir, as fases com mais detalhamento.

A fase das *análises preliminares* é a fase que vai embasar a engenharia didática; é nesta fase que é discutido o quadro teórico, os estudos pertinentes ao tema discutido onde se busca o conhecimento do que já foi feito anteriormente. “As *análises preliminares* para a concepção da engenharia são feitas através de considerações sobre o quadro teórico didático geral e sobre os conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o assunto em questão, (...)" (MACHADO, 2008, p. 201).

É na *análise a priori* que são definidas as variáveis didáticas buscando as características da situação adidática. Define-se também o objeto matemático a ser discutido, ou seja, qual será o desafio para o aluno, o conhecimento prévio que o aluno precisará para a resolução de cada atividade e prever quais as estratégias possíveis para a resolução dos problemas, quais as decisões que poderão ser tomadas pelo aluno. "A *análise a priori* comporta uma parte de descrição e outra de previsão e está centrada nas características de uma situação adidática que se quis criar e se quer aplicar aos alunos visados pela experimentação." (MACHADO, 2008, p. 205)

Quando é mencionado "prever o comportamento do aluno" significa dizer que é feita uma previsão de quais estratégias e respostas possíveis os educandos podem utilizar para a resolução de certo problema. Com isso, é possível planejar as atividades de forma que o pesquisador esteja preparado para cada resposta apresentada.

A *experimentação* é a realização da engenharia; isso se dá quando um grupo de alunos começa efetivamente a resolver as situações e problemas que lhes foram propostos pelo professor-pesquisador, que durante a experimentação fará a observação destes alunos, sujeitos da pesquisa.

Na *análise a posteriori* é feito o tratamento dos dados coletados durante a experimentação, ou seja, tudo o que foi observado e registrado, tanto pelo pesquisador quanto pelo aluno. É nesta fase também que acontece o confronto entre o que foi previsto na análise *a priori* e os dados coletados para a análise *a posteriori*, tendo deste modo a validação ou refutação da(s) hipótese(s) levantada(s) anteriormente. A análise *a posteriori* também pode ser realizada durante o processo de experimentação, e se no caso houver várias sessões, pode-se fazer uma análise *a posteriori* pontual entre uma sessão e outra. Isso é importante, pois o pesquisador pode efetuar mudanças no curso da experimentação.

2.3 A escolha dos sujeitos

O fato que mais influenciou na escolha dos sujeitos foi a série em que estudavam: primeiro ano do Ensino Médio, pois seria necessário que os alunos participantes da pesquisa já tivessem o conhecimento matemático da maioria dos teoremas e propriedades em questão nas atividades. Esta escolha daria a oportunidade de provocar nos alunos a necessidade de argumentar e provar teoremas já conhecidos, com exceção da última sessão. Esses teoremas não foram dados diretamente para os alunos; propusemos construções em um *software* de geometria dinâmica e, pela exploração, os alunos foram incentivados a elaborar conjecturas para, em seguida, prová-las.

A escolha da escola deve-se pelo fato de que o pesquisador lecionou Matemática e Física entre 2004 e 2007 nesta escola e, por causa dessa proximidade, não tivemos rejeição quanto à realização da pesquisa. Trata-se de uma escola estadual que possui desde o Ensino Fundamental (I e II) até o 3º ano do Ensino Médio e também turmas de EJA Fundamental e Médio no período noturno, totalizando 1200 alunos nos três turnos. A unidade escolar conta com 15 salas de aula e, desde meados do ano de 2005, uma sala de tecnologias com computadores conectados à internet e programas básicos instalados, além de um data show.

No período matutino, essa escola possui quatro turmas de primeiro ano do Ensino Médio. Para escolher qual delas iria participar da pesquisa, foi decidido primeiro conversar com os professores das turmas, pois havia um professor para a turma 1º*A* e outra professora para as demais turmas (1º*B*, 1º*C* e 1º*D*). Na época dessa conversa, a professora das turmas *B, D* e *E* estava de licença médica e quem estava responsável pela sala era um professor substituto. Dessa forma, esse professor não poderia tomar essa decisão. Por isso, após o contato com o professor da turma *A,* ele aceitou ceder sua turma para a pesquisa. A primeira aproximação foi feita no mês de Março de 2009. Nela foi decidido que a previsão de começo da aplicação das atividades seria nos meses de Maio ou Junho, mas isso dependeria dos horários disponíveis na sala de tecnologias da escola.

Essa previsão teria sido cumprida se não houvesse ocorrido um contratempo: a escola estava recebendo e inaugurando uma nova sala de tecnologias. Essa nova sala foi patrocinada por uma empresa privada multinacional que tem filial em Campo Grande e a professora responsável pela "antiga" sala de tecnologias foi transferida para essa nova sala, deixando a antiga sem professor responsável. Essa nova sala só poderia ser utilizada pelos professores que fizessem um curso de capacitação e até então nenhum professor da escola tinha feito esse curso. A sala antiga estava sem professor responsável e sem este professor não era possível sequer abrir a porta da sala. Havia uma situação em que a escola estava com duas salas de tecnologias e não era possível utilizar nenhuma das duas enquanto a burocracia não fosse cumprida; isso não ocorria somente para a realização da pesquisa, mas para todos os professores da escola. Passaram-se as férias escolares e isso só foi resolvido em agosto do mesmo ano, quando uma professora assumiu a sala antiga e enfim foi possível agendar as primeiras sessões para o mês de agosto.

A turma é composta por 30 alunos, que foram divididos, para efeitos desta investigação, em 8 trios e 3 duplas. A primeira sessão realizada em 17 de agosto de 2009, foi somente para explicar o que iria ser feito, passar o cronograma das atividades, separar e nomear os grupos. Para identificar os sujeitos da pesquisa foram utilizados apenas nomes fictícios.

Capítulo III

3. Análise *a Priori*

Neste capítulo será apresentada toda a sequência didática dividida em sessões e atividades e a *análise a priori,* desta sequência detalhando cada item enunciado anteriormente, as variáveis, objetivos e estratégias de cada atividade.

3.1 Os temas tratados nas atividades

Para situar o leitor, antes de apresentar a análise a *priori*, será feito um brevíssimo resumo dos temas tratados nas sessões. A sessão 1 é uma familiarização com os comandos do *software*. Na sessão 2 é dada continuidade com a familiarização, porém é dado o início à argumentação, discutindo o teorema de Tales. A sessão 3 tem a discussão do teorema da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo. A sessão 4 traz o teorema da soma das medidas de dois ângulos internos de um triângulo que é igual à medida do suplemento do terceiro ângulo. A sessão 5 trata do seguinte teorema: A medida do ângulo central é o dobro da medida do ângulo inscrito no mesmo arco de uma circunferência. Finalizando com a sessão 6 que traz uma atividade na forma de um desafio cujo objetivo é elaborar e validar uma conjectura desconhecida pelo aluno.

3.2 A estrutura da sessão e da sequência

A sequência didática desta pesquisa está dividida em 6 sessões subdivididas em atividades. Há uma variação no número de atividades por sessão, como mostra o quadro a seguir

Sessão	01	02	03	04	05	06
Nº de Atividades	06	02	04	03	03	01

Tabela 1: Número de atividades de cada sessão

As atividades das sessões 3 e 4 foram elaboradas de forma que, todas as configurações da mesma sessão tinham uma propriedade em comum. Ao final de cada sessão era proposta uma discussão em que foi feito um questionamento aos alunos sobre as propriedades em questão nas configurações de cada sessão. Essa discussão ao final de cada sessão foi elaborada para provocar o aluno a conjecturar e enunciar o teorema que estava implícito nas configurações. Em seguida era pedido para que o aluno provasse o que tinha acabado de enunciar. Por isso não tem muito sentido, para nossa pesquisa, analisar cada atividade separadamente, pois a intenção é que o aluno construa seu conhecimento conforme avança nas atividades e com isso termine a sessão com as informações necessárias para elaborar a conjectura e em seguida tentar validá-la.

Na sessão 5, diferentemente das sessões 3 e 4, essa discussão foi proposta ao final de cada atividade, que nesta sessão, possui uma forma diferente de validação, mesmo que o teorema a ser conjecturado seja o mesmo para as atividades. Como na sessão 6 há apenas uma delas e a discussão proposta é sobre a própria.

As sessões, de 1 até 5 foram elaboradas de forma que sirvam de conhecimento base para a realização da sessão 6, ou seja, os principais conhecimentos necessários para a elaboração e validação da conjectura presente na sessão 6 estão presentes nas sessões anteriores.

3.3 Variáveis Didáticas

3.3.1 O *software* Cabri-Géomètre

As atividades foram construídas no *software* Cabri-Géomètre para que seus recursos possam ser explorados, pois como já discutido anteriormente, estes auxiliam na elaboração das conjecturas, em especial quando o aluno não as conhece. A manipulação da figura no *software* proporciona ao aluno trabalhar e explorar uma grande variedade de exemplos, oferecendo retroações aos alunos, podendo confirmar ou negar alguma conjectura elaborada. Essa exploração ficaria limitada a poucos exemplos se estivéssemos trabalhando com lápis, papel, régua, compasso e transferidor.

Em alguns casos pode haver diferença de um ou dois décimos nos valores apresentados pelo *software*, como por exemplo, apresentar um triângulo cujas medidas dos ângulos internos sejam: 72,9º, 56,3º e 50,9º. Se esses valores forem somados, o resultado será 180,1º. Contudo, se os cálculos forem efetuados utilizando o recurso da calculadora do *software,* o resultado será sempre exato, como no exemplo acima o resultado seria 180,0º. Isso ocorre porque a estrutura presente no *software* é a Geometria Euclidiana, para a qual a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º.

É sabido que o Cabri-Géomètre não faz qualquer tipo de prova de nenhum tipo de teorema. Pode ser que haja alguma má interpretação do tipo: *Construí um triângulo, medi os* *ângulos internos, fiz a soma das medidas, movimentei os vértices e a soma sempre resultou em 180º, portanto "está provado" que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo será 180º*. Isso é algo que não será aceito neste trabalho, pois esta é uma forma de pensamento incorreta. Não basta apenas movimentar uma construção no *software* e verificar, durante a manipulação, que se certa propriedade se manteve constante então é válido para todos os casos. Porém, isso não impede que, observando uma propriedade que se mantém constante durante a manipulação, o aluno não possa elaborar uma conjectura sobre o que está sendo visto, e é justamente isso que se espera nesta pesquisa, a elaboração de uma conjectura durante a manipulação de construções no Cabri-Géomètre. E para que essas conjecturas se tornem uma verdade, é necessário que, mais importante do que serem elaboradas, é que sejam validadas. Foram analisadas e classificadas essas diferentes estratégias, pois é possível que tenha havido uma evolução no nível de argumentação e de prova nas respostas.

3.3.2 Configuração

Configuração, neste caso, é a construção apresentada aos alunos no *software*, ou seja, nas atividades apresentadas aos alunos estavam presentes, além da figura em questão, as propriedades de cada figura, que se mantinham durante a manipulação, e estas propriedades são de suma importância para a realização da sequência. Esse conjunto da figura com suas propriedades é que denominamos *configuração*.

Essa variável foi escolhida porque as atividades de uma mesma sessão apresentam as mesmas propriedades, porém, em construções diferentes (com exceção das duas primeiras sessões que são somente para familiarização com o *software*). Como será visto a seguir, na sessão 3, atividade 1, foi apresentado um triângulo equilátero, que durante a manipulação se manteve equilátero, alterando seu tamanho, ou seja, proporcionando ao aluno inúmeros exemplos de triângulos equiláteros. Mas o importante era que o aluno verificasse que os ângulos internos destes triângulos mantinham-se sempre com a medida de 60º e consequentemente a soma das medidas era de 180º. Na segunda e terceira atividade estava presente um triângulo qualquer e na quarta um isósceles, para que o aluno verificasse que, nestes casos, os ângulos não seriam de mesma medida e mesmo alterando seus valores, a soma das medidas se mantinha em 180º . Com isso, todo esse grupo de atividades possui o mesmo objetivo, mostrar a propriedade da soma dos ângulos internos do triângulo, porém, houve a variação do tipo dos triângulos para que o aluno percebesse que a propriedade é válida independente do tipo ou formato do triângulo.

Há também algumas atividades em que o valor dessa variável é "zero", ou seja, a configuração de uma atividade não apresenta a propriedade discutida na sessão em que ela está apresentada, porém é uma construção que irá auxiliar de alguma forma no andamento da sessão.

3.4 Sequência Didática

Sessão 1 – Familiarização

O objetivo desta sessão é fazer uma familiarização com os comandos do *software* que serão utilizados no decorrer da sequência. Não faz parte dos nossos objetivos o estudo das dificuldades dos alunos em relação à construção da figura, uma vez que a partir da sessão 3 as configurações são apresentadas prontas aos mesmos. Dessa forma, essa sessão não será analisada, apenas serão apresentados os objetivos de cada atividade. Durante ela e na sessão 2, houve a interferência do pesquisador quando a construção estava incorreta, mas isso não prejudica o objetivo geral da sequência que é a validação das conjecturas elaboradas a partir da manipulação, pois, para este objetivo, não está sendo levado em consideração as habilidades dos alunos com o *software*. Mesmo assim é dada uma base de como são feitas as construções com a utilização do *software*, também para que o aluno saiba como manipular as figuras e, se preciso, acrescentar elementos na configuração que auxiliem na elaboração e validação das conjecturas.

Atividade 01

a) Selecione a opção **ponto**, e clique uma vez sobre algum lugar da tela;
b) Antes de qualquer outra ação digite "*A*" para nomear o ponto;
c) Agora crie vários pontos, nomeando-os como quiser;
d) Selecione a opção **ponteiro**, clique e segure em cima de um dos pontos e movimente o mouse.

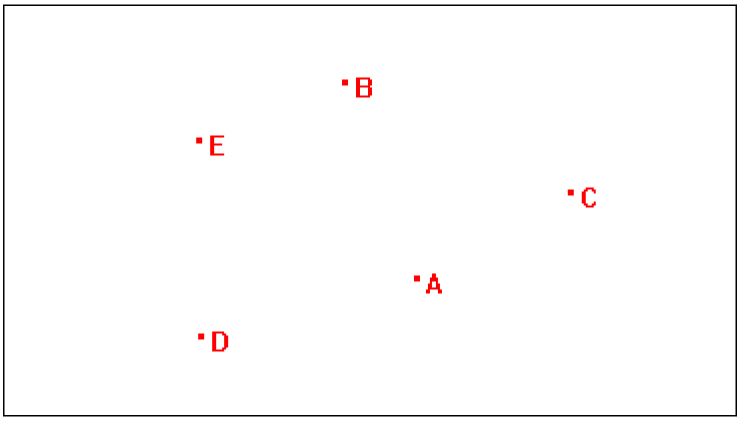


Figura 1: Sessão 1; Atividade 1

O objetivo desta atividade é dar início ao processo de familiarização com o tipo de construção mais simples possível no Cabri-Géomètre: a construção de pontos e a nomeação dos mesmos.

Atividade 02

a) Crie dois pontos em qualquer lugar da tela e nomeie-os *A* e *B*;
b) Com a opção reta, crie uma reta passando por *A* e *B* e nomeie-a de *r*;
c) Tente mover a reta *r* e depois os pontos *A* e *B*;
d) Crie uma segunda reta qualquer, em qualquer lugar da tela e nomeie-a de *s*;
e) Tente movimentar uma reta de cada vez.

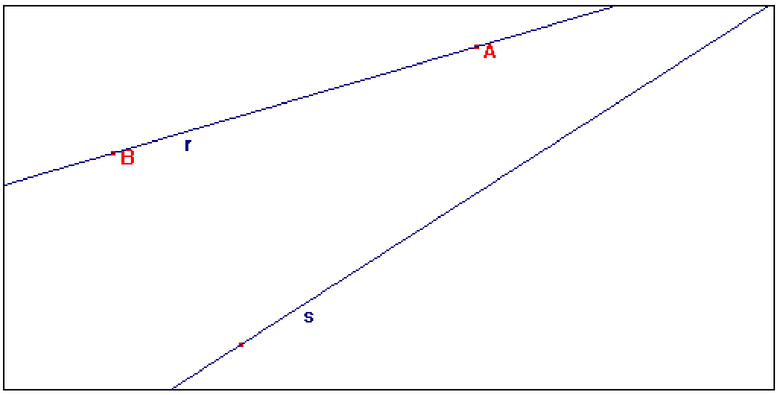


Figura 2: Sessão 1; Atividade 2

Essa atividade visa mostrar que, dependendo da construção, as retas podem se movimentar de forma independente, ao contrário do que se pede nas atividades seguintes.

Atividade 03

a) Crie um ponto e nomeie de *O*;
b) Crie uma reta *r* passando por *O* (clique primeiro em *O*);

c) Com a opção **reta perpendicular,** crie uma reta *s* perpendicular a *r* passando por *O,* clicando no ponto e depois na reta, ou vice-versa;
d) Movimente uma das retas e anote o que está observando. Qual a diferença entre esta atividade e a atividade 02? Você consegue justificar sua resposta?

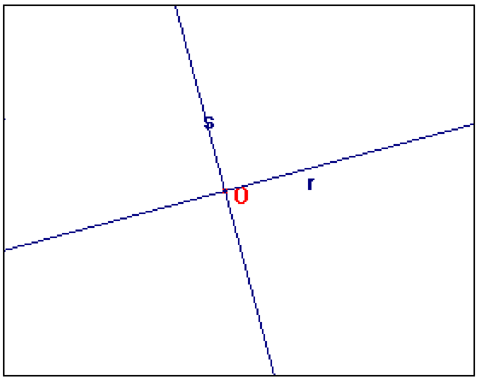


Figura 3: Sessão 1; Atividade 3

Atividade 04

a) Crie uma reta *r* em qualquer lugar da tela;
b) Crie um ponto *P* em qualquer lugar da tela, mas fora da reta;
c) Com a opção **reta paralela**, crie uma reta paralela a *r* passando por *P*;
d) Nomeie esta nova reta de *s*;
e) Movimente uma das retas e anote o que está observando. Qual a diferença entre esta atividade e a atividade 02? Você consegue justificar sua resposta?

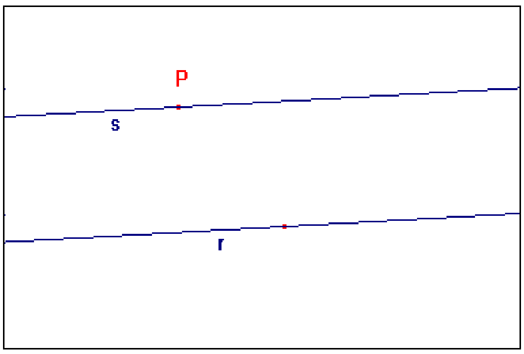


Figura 4: Sessão 1; Atividade 4

As atividades 03 e 04 são propostas para que o aluno perceba quando uma construção depende da outra. Em ambas as atividades a reta *s* é dependente da reta *r*, por isso não é possível alterar a inclinação da reta *s*. Porém, quando a reta *r* é movimentada, acontece também a movimentação da reta *s* por estar vinculada à *r*, perpendicularmente, na atividade 03 e paralelamente, na atividade 04.

Atividade 05

a) Crie três pontos *A*, *B* e *C* não colineares;
b) Com a opção **semirreta** crie uma semirreta com origem em *A* e passando por *B*;
c) Crie uma segunda semirreta com origem também no ponto *A*, mas agora passando por *C*;
d) Com a opção **Marca de ângulo**, marque o ângulo $B\hat{A}C$, clicando primeiro em *B*, em seguida em *A* depois em *C*;
e) Com a opção **Ângulo**, meça o ângulo $B\hat{A}C$, clicando na marca de ângulo;
f) Movimente os pontos: *A*, *B*, *C* e as semirretas e anote o que está observando em relação à medida do ângulo.

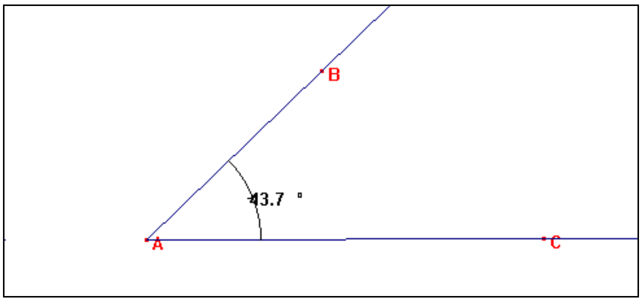


Figura 5: Sessão 1; Atividade 5

Com essa atividade é esperado que os alunos saibam como construir e medir ângulos, além de, poderem observar o comportamento das medidas dos ângulos durante a movimentação da figura.

Atividade 06

a) Com a opção **circunferência**, crie uma circunferência de centro *O* em qualquer parte da tela; (Clique em algum lugar da tela, isso dará o centro da circunferência, movimente o *mouse* e clique em outra parte da tela.)
b) Crie dois pontos sobre a circunferência: *A* e *B*;
c) Com a opção **segmento,** crie os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$;
d) Com a opção **Distância e Comprimento**, meça os dois segmentos;
e) Marque e meça o ângulo $A\widehat{O}B$;
f) Movimente os pontos e anote o que está observando em relação às medidas do ângulo e dos segmentos;
g) Clicando sobre a circunferência, movimente-a e anote o que está observando em relação às medidas do ângulo e dos segmentos.

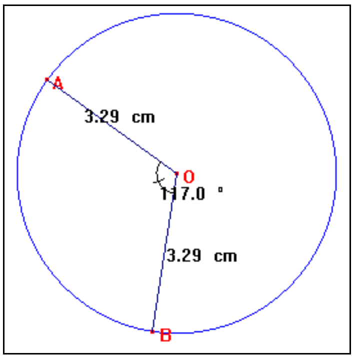


Figura 6: Sessão 1; Atividade 6

Com essa atividade, é esperado que os alunos saibam como é construída uma circunferência e percebam o que acontece com as medidas do ângulo central e do raio durante a movimentação dos pontos e da circunferência. O objetivo é que seja percebido que o ângulo não se altera quando o raio da circunferência varia e o ângulo se altera quando são movimentados os pontos *A* e *B*, que não altera o raio.

Sessão 2 – Familiarização – Teorema de Tales

Essa sessão é composta por duas atividades e o objetivo é fazer com que os alunos trabalhem com os conceitos de ângulos opostos pelo vértice, alternos (internos e externos), colaterais e suplementares, quando temos retas paralelas cortadas por transversais. Nesta sessão estão sendo propostas algumas discussões incentivando o aluno a justificar o que está sendo observado na configuração do *software*. Os discursos ainda não estão voltados para as provas ou demonstrações, ou seja, estará sendo feita uma familiarização dos alunos também com a argumentação, pois é algo a que não estão acostumados em suas aulas de Matemática.

Atividade 01

a) Com a opção **reta**, construa uma reta qualquer e nomeie-a de *r*;
b) Nomeie o ponto que aparece sobre *r* de *O*;
c) Novamente com a opção **reta**, clicando primeiro em *O*, construa uma reta qualquer e nomeie-a de *t*;
d) Marque e meça os quatro ângulos formados pelas retas;
e) Movimente as retas;
f) Qual a relação entre dois ângulos consecutivos[4]?
g) Qual a relação entre dois ângulos que estão um oposto ao outro?

[4] Ângulos consecutivos são ângulos que possuem o mesmo vértice, um lado em comum e o outro lado em semi-planos opostos

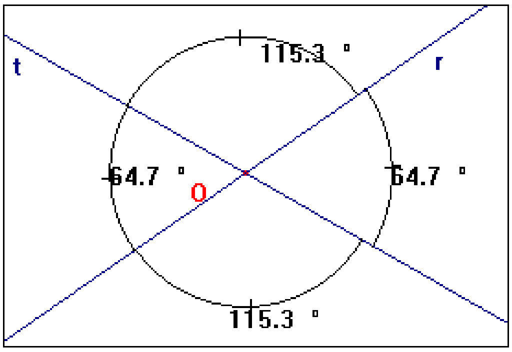


Figura 7: Sessão 2; Atividade 1

Respostas possíveis para o item *f*;

- ✓ os ângulos são diferentes;
- ✓ a medida de um ângulo é maior que a medida do outro ângulo;
- ✓ os ângulos são suplementares, ou seja, a soma das suas medidas resulta em 180º.

Resposta possível para o item *g*;

- ✓ São iguais;
- ✓ Estão opostos pelo vértice.

Na atividade 1 é esperado apenas que os alunos verifiquem que em duas retas concorrentes, ângulos opostos pelo vértice são congruentes e que dois ângulos consecutivos são suplementares, conceito que teoricamente já é conhecido por eles.

Atividade 02

a) Com a opção triângulo, crie um triângulo qualquer e nomeie os vértices de *A*, *B* e *C*;
b) Marque e meça os ângulos internos desse triângulo;
c) Com a opção reta, crie uma reta sobre o lado *AC*;
d) Com a opção reta, crie uma reta sobre o lado *AB*;
e) Com a opção reta, crie uma reta sobre o lado *BC*;
f) Pelo ponto C, crie uma reta paralela ao lado *AB*;
g) Marque e meça todos os ângulos criados pelas três retas que passam pelo ponto *C*;
h) Com a opção **Comentário**, nomeie todos os ângulos da seguinte maneira: os ângulos internos do triângulo de *a*, *b*, e *c* respectivamente aos vértices *A*, *B* e *C*; nomeie no sentido anti-horário os ângulos externos desse triângulo de *d*, *e*, *f*, *g* e *h*;
i) Movimente os pontos *A*, *B* e *C* e escreva todas as relações que encontrar envolvendo os valores dos ângulos apresentados na figura, inclusive sobre a soma de um ou mais ângulos.

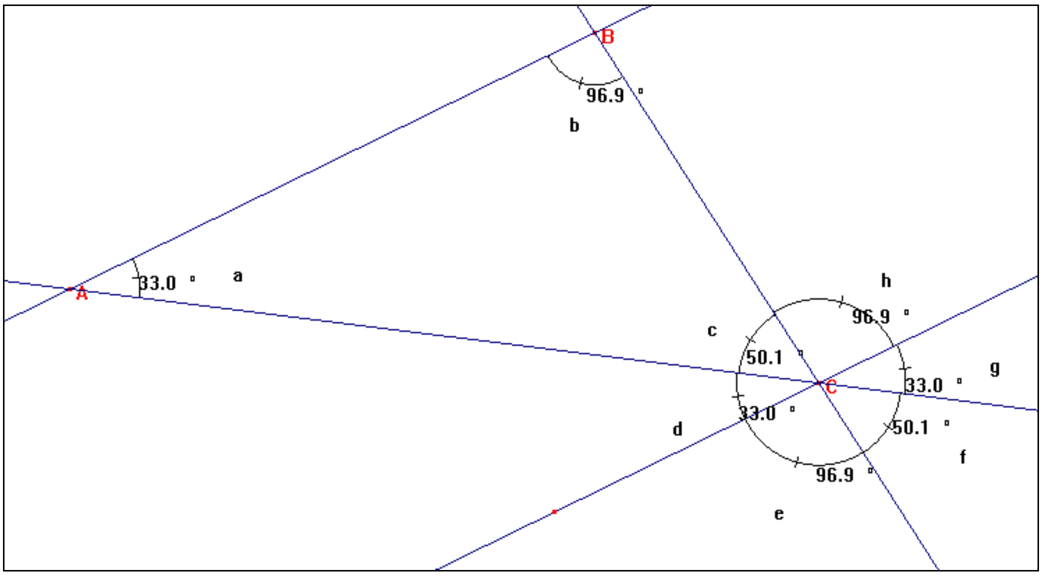


Figura 8: Sessão 2; Atividade 2

Respostas possíveis para o item *i*;

- ✓ $a = d = g$
- ✓ $b = e = h$
- ✓ $c = f$
- ✓ $a+b+c$ = 180º
- ✓ $c+d+e$ = 180º
- ✓ $d+e+f$ = 180º
- ✓ $f+h+g$ = 180º
- ✓ $g+h+c$ = 180º
- ✓ $h+c+d$ = 180º
- ✓ $c+d+e+f+g+h$ = 360º
- ✓ $a + b = d + e$

O objetivo da atividade 2 é despertar no aluno o princípio de acrescentar elementos em uma configuração. Nesse exemplo, o aluno deve construir uma reta sobre o lado de um triângulo, prolongando os lados. Dependendo da forma escolhida pelos alunos para validar as conjecturas das sessões seguintes, será preciso acrescentar elementos nas configurações que serão apresentadas a eles, como por exemplo, prolongar os lados de um triângulo.

Discussão

Você consegue justificar as relações que enunciou no item *i* da atividade anterior?

Nessa discussão, queremos iniciar o processo de argumentação dos alunos, explorando um pouco das provas pragmáticas onde são feitas conclusões baseadas em dados particulares da configuração. Nesses casos não aparece nada voltado para a generalização (BALACHEFF, 1987).

Aqui apresentamos algumas *estratégias* que podem ser utilizadas pelos alunos, para validarem suas conjecturas.

1. Temos que $a = d$ e $b = h$, pois são alternos internos.
2. Temos que $a = g$ e $b = e$, pois são correspondentes.
3. Temos que $c = f$, $d = g$ e $e = h$, pois são opostos pelo vértice.
4. Temos que $c + d + e = d + e + f = f + h + g = g + h + c = h + c + d = 180º$, pois são ângulos suplementares.

Estes quatro primeiros itens não seriam classificados como estratégias, pois são resultados imediatos do Teorema de Tales[5] como a definição de ângulos opostos pelo vértice, ângulos colaterais e suplementares. Portanto, serão classificados apenas como uma justificativa do que está sendo visto, pois não houve conclusões a partir de afirmações anteriores.

5. Registrar numericamente com os dados fornecidos pela construção: 33,0º + 96,9º + 50,1º = 180º (figura 09),

Esta estratégia 5 é classificada como *Empirismo Ingênuo*, pois está baseada em exemplos fornecidos pela construção e não há nada voltado para a generalização.

6. Temos que $h + c + d = 180º$ e $a = d$ e $b = h$, portanto $a + b + c = 180º$.
7. Temos que $a + b + c = 180º$ e $c + d + e = 180$, portanto $a + b + c = c + d + e$, subtraindo c de ambos os lados teremos $a+b = d + e$.

As estratégias 6 e 7 são classificadas como *Exemplo Genérico*, pois a partir da visualização de um caso particular, utilizam-se elementos (incógnitas) para uma generalização. Como já foi visto em (LIMA e FREITAS, 2009) e (PICCELLI e BITTAR, 2009) é bem provável que os alunos não utilizem estratégias dos tipos 6 e 7 pelo fato de não estarem acostumados a demonstrar teoremas, porém é esperado o aparecimento de algum tipo de justificativa.

[5] Teorema das retas paralelas cortadas por transversais.

O que será discutido é a elaboração e a validação de conjecturas e, para que os alunos tenham a oportunidade de elaborá-las corretamente, é necessário que a construção esteja correta, pois uma construção incorreta impedirá que os alunos consigam atingir o objetivo de cada atividade e consequentemente o objetivo da sessão. Pelo fato de que as sessões tinham a duração de 50 minutos cada, não haveria tempo suficiente para que os alunos fizessem a construção e depois a exploração da configuração para a elaboração de suas conjecturas. Seria possível deixar a construção para os alunos, se tivéssemos mais tempo por sessão, por exemplo, duas aulas seguidas de 50 minutos cada. Dessa forma, foi definido que, a partir da sessão 3, as construções seriam apresentadas prontas para os alunos, para que eles pudessem ter tempo suficiente para manipular a construção, elaborar e validar suas conjecturas.

Sessão 3 – Soma dos ângulos internos de um triângulo

Esta sessão é composta de três atividades, sendo que o objetivo é que ao final da atividade 3 seja elaborada e validada a conjectura do teorema que afirma que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180º. Essa sessão servirá de base de conhecimento para a resolução das sessões seguintes.

Atividade 01

a) Abra o arquivo: **Sessão 3 Atividade 1** que está em sua pasta;
b) Explore a figura;
c) Faça um comentário sobre o que está acontecendo com os ângulos internos desse triângulo.

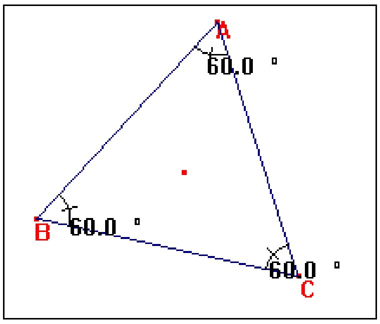


Figura 9: Sessão 3; Atividade 1

Respostas possíveis para o item *d*:

- ✓ os ângulos são iguais;

Esperamos encontrar essa resposta, pois é a propriedade que primeiro se destaca.

- ✓ a soma da medida dos ângulos resulta em 180º.

A sessão é iniciada com a apresentação de um triângulo equilátero na atividade 01, pois os três ângulos internos teriam a mesma medida, 60º, e com a manipulação desse triângulo os ângulos permanecerão com a mesma medida. Desta forma, fica um pouco mais evidente a identificação do enunciado de teorema, uma vez que por um simples cálculo aritmético mental, o aluno pode chegar a essa conclusão.

Atividade 02

a) Abra o arquivo: **Sessão 3 Atividade 2** que está em sua pasta;
b) Explore a figura;
c) Faça um comentário sobre o que você está observando em relação aos ângulos e à soma dos ângulos.

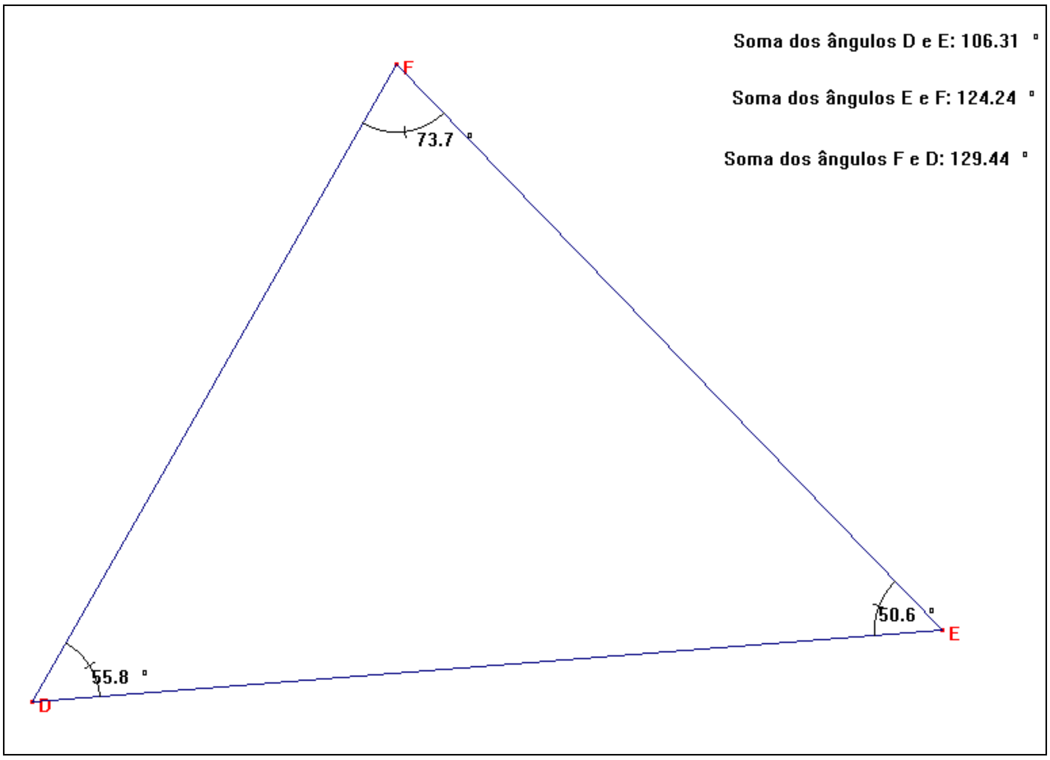


Figura 10: Sessão 3; Atividade 2

Respostas possíveis para o item *c*:

- ✓ a soma das medidas se altera conforme as medidas dos ângulos se alteram;
- ✓ a soma dos três ângulos resulta em 180º

Atividade 03

a) Abra o arquivo: **Sessão 3 Atividade 3** que está em sua pasta;
b) Explore a figura;
c) Anote o que está observando em relação aos ângulos e à soma dos ângulos.

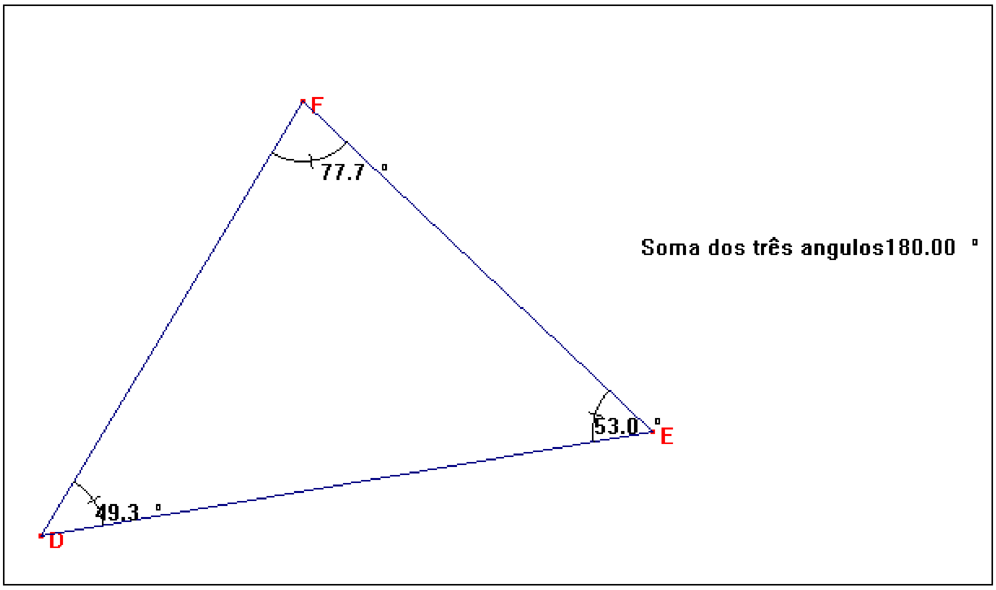


Figura 11: Sessão 3; Atividade 3

Respostas possíveis para o item *c*:

- ✓ quando se movimenta o triângulo, as medidas dos ângulos se alteram;
- ✓ a soma das medidas dos ângulos internos resulta em 180º.

Nas atividades 2 e 3 a escolha foi trabalhar com um triângulo *qualquer*. Desta forma, com a manipulação o aluno pode aproximar a figura para a forma de um triângulo isósceles ou equilátero, mas o *software* tem uma propriedade que mantém as características da figura construída durante a manipulação. Mesmo que o aluno consiga manualmente um triângulo semelhante a um equilátero, quando este for movimentado irá se transformar em um escaleno, diferentemente da atividade 01, onde foi construído um equilátero e quando manipulado continua equilátero.

Esse triângulo foi escolhido, porque nesse caso os ângulos serão diferentes e durante a manipulação os valores dos três ângulos se alteram, indicando que a propriedade é válida para qualquer triângulo. É provável que quem perceber a propriedade na atividade 1, procure-a nestas atividades, efetuando a soma dos ângulos de alguma forma, com uma calculadora ou em um rascunho. Ao final da sessão, está proposta uma discussão sobre a propriedade presente nas construções, na qual o aluno será levado a investigar o que há em comum nas três construções.

Na atividade 02 será utilizada uma propriedade da calculadora do *software*, fazendo a construção e calculando a medida de dois ângulos e, usando a calculadora, somar suas medidas. Ao alterar as medidas dos ângulos, pela manipulação, altera-se também a soma (resultado da calculadora). Isso está sendo colocado em questão agora, pois na atividade 3, ao somar os três ângulos internos do triângulo, o resultado será 180º e ao movimentar este triângulo, o resultado continuará 180º. Quem não conhece as ferramentas da calculadora pode ter a impressão de que o resultado é sempre estático, ou seja, quando manipulada a figura, o resultado não se altera. Neste caso em particular, é sabido que não vai se alterar pela propriedade dos ângulos internos de um triângulo e não por causa da calculadora. Por isso, na atividade 2 é apresentada a soma dos ângulos dois a dois, pois quando o aluno movimentar o triângulo, irá ocorrer a variação nos valores das medidas dos ângulos e consequentemente a variação no resultado da soma desses ângulos. Na atividade 3 é apresentada a soma das medidas dos três ângulos do triângulo. Neste caso, durante a manipulação, o resultado da soma das medidas dos três ângulos não irá se alterar, despertando assim o questionamento: Como podem existir três medidas diferentes que, sofrendo alterações, e somadas duas dessas medidas, o resultado se altera durante a manipulação, e quando somadas três dessas medidas, o resultado permanece sempre o mesmo?

Atividade 04

a) Abra o arquivo: **Sessão 3 Atividade 4** que está em sua pasta;
b) Explore a figura;
c) Anote o que está observando em relação aos ângulos.

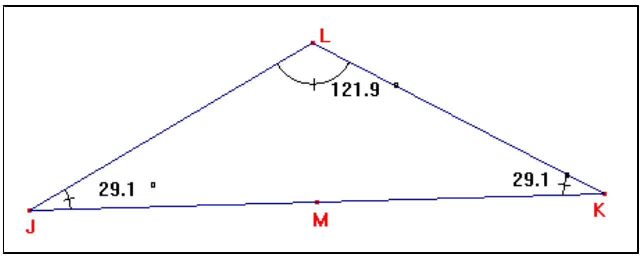


Figura 12: Sessão 3; Atividade 4

Respostas possíveis para o item *c*:

- ✓ a medida dos ângulos se alteram;
- ✓ as medidas dos ângulos *J* e *K* são iguais;
- ✓ a soma das medidas dos ângulos internos sempre resulta em 180º.

Discussão

a) Existe uma propriedade em relação à medida dos ângulos que está presente nas construções das atividades. Você poderia enunciá-la?
b) Como você justificaria essa propriedade? Utilize argumentos matemáticos e principalmente o que já foi visto nas sessões anteriores.

A discussão pretende levar o aluno a elaborar a conjectura sobre a soma das medidas dos ângulos internos do triângulo.

Respostas possíveis para a discussão, item *a*;

- ✓ as medidas dos ângulos se alteram. Porém, não seria uma resposta correta levando em conta que na atividade 01 os valores não se alteram com a manipulação;
- ✓ a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180º.

Respostas possíveis para a discussão, item *b*;

Neste caso serão analisadas as respostas do item *b* daqueles alunos que responderem corretamente o item *a*.

Nas demonstrações das estratégias a seguir, será utilizada uma figura genérica, pois essa discussão é baseada em toda a sessão e não somente em uma atividade. Com isso, os nomes dos ângulos ou vértices que estão presentes na demonstração não têm relação com os nomes das construções das atividades da sessão.

Estratégia 1

Usar o registro numérico na tela com os dados fornecidos pela construção, por exemplo: 37,1º + 75,2º + 67,7º = 180,0º. Essa estratégia é classificada como *Empirismo Ingênuo*, pois está baseada em exemplos fornecidos pelo *software* e não há nada voltado para a generalização.

Estratégia 2

Utilizar-se do recurso da calculadora do *software,* justificando que movimentando os triângulos os valores das medidas dos ângulos alteram-se, porém a soma permanece sempre a mesma.

É esperado que os alunos tentem primeiro visualizar a propriedade, para as configurações que estejam mais próximas, visualmente, de um triângulo equilátero, pois geralmente é o exemplo mais comum utilizado em sala de aula. Estando satisfeitos para estes exemplos, o aluno pode se questionar se essa propriedade é válida para triângulos com uma configuração pouco utilizada nas aulas. Durante a manipulação, é possível que apareçam configurações como um triângulo com um ângulo obtuso, com medida muito próxima de 180º. Desta forma os outros ângulos seriam agudos com medidas bem próximas de 0º, ou dois ângulos com as medidas próximas do ângulo reto, assim o terceiro ângulo ficaria também com a medida próxima de 0º (figura 13).

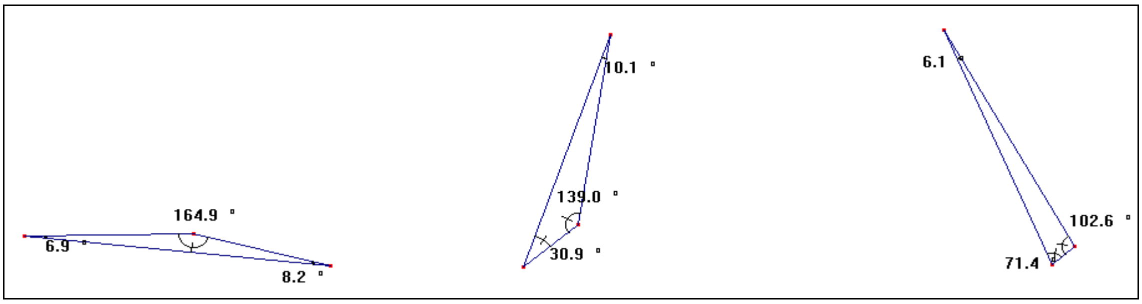


Figura 13: Sessão 3; Discussão; Estratégia 2

Levando em consideração esse tipo de raciocínio, ou seja, após o aluno ter verificado a propriedade para alguns casos particulares em que a configuração se assemelha ao triângulo equilátero, pode haver o questionamento por parte do aluno: esta propriedade é válida apenas para estes casos, ou também é válida para os casos em que as configurações se assemelham com triângulos como os da figura 13, que são bem diferentes dos exemplos vistos em sala de aula? Se os alunos estiverem satisfeitos quanto a validade da propriedade para os casos mais comuns, em seguida verificar que nos casos menos comuns a propriedade ainda é verdadeira, então o aluno conclui que é válido para todos os casos. Pensando desta forma, o aluno estará se utilizando de uma estratégia que será classificada de *Experimento Crucial*;

Estratégia 3

Prolongando um dos lados de um triângulo qualquer e passando pelo vértice oposto uma reta paralela ao lado prolongado (figura 14), temos que:

i. $\hat{b} = \hat{d}$ e $\hat{c} = \hat{e}$ pelo fato de serem alternos internos

ii. $\hat{d} + \hat{a} + \hat{e} = 180°$ por ser um ângulo raso

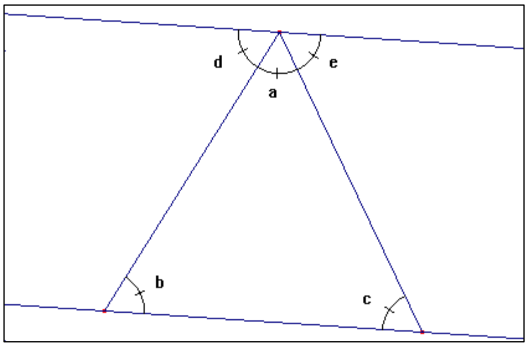


Figura 14: Sessão 3; Discussão; Estratégia 3

de (i) e (ii) temos que:

$$\hat{b} + \hat{a} + \hat{c} = 180^\circ,$$

logo a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta sempre em 180º.

cqd.

Estratégia 4

Prolongado um dos lados do triângulo e sobre um dos vértices desse lado, passar uma reta paralela ao lado do triângulo oposto a esse vértice (figura 15), temos que:

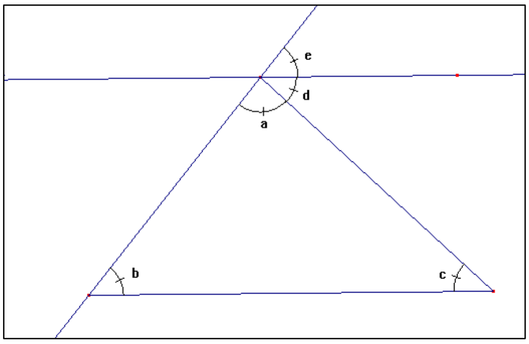


Figura 15: Sessão 3; Discussão; Estratégia 4

i. $\hat{a} + \hat{d} + \hat{e} = 180^\circ$, pois $\hat{a}$, $\hat{d}$ e $\hat{e}$ são suplementares;

ii. $\hat{c} = \hat{d}$ por serem alternos internos;

iii. $\hat{b} = \hat{e}$ por serem ângulos colaterais,

$$b = e$$

substituindo (ii) e (iii) em (i) temos que:

$$a + b + c = 180^\circ$$

cqd.

As estratégias 3 e 4 estão no nível do *Exemplo Genérico*, pois se utilizam de uma *configuração* particular fazendo uso de propriedades gerais para generalizar os conceitos. Como todas as atividades estão baseadas em uma configuração, o nível máximo que os alunos podem atingir em toda a sequência é o *Exemplo Genérico*. Porém, dificilmente aparecerá uma das estratégias 3 ou 4 nesta sessão, pois é um nível mais alto de prova e os sujeitos da pesquisa não estão acostumados a provar teoremas. É esperado que ao final das sessões, alguns alunos consigam se aproximar e até mesmo provar um teorema, utilizando uma estratégia classificada como *Exemplo Genérico.*

Sabemos que a presença da *configuração* impede alguma estratégia do tipo *Experimento Mental,* pois esse tipo de demonstração requer uma abstração total, ou seja, precisaríamos chegar a um ponto com os alunos que bastaria dar o enunciado de um teorema e pedir para que seja provado, sem que seja apresentada e usada uma configuração particular. Ao invés de apresentar uma configuração pronta, ou pedir para que o aluno a construísse no *software*, seria apresentado para o aluno um afirmação do tipo: *Prove que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo resulta em 180º.* Seria o caso se a sequência didática fosse maior, com mais sessões e atividades. Desta forma seria possível tentar alcançar o nível do *Experimento Mental*, mas isso é algo que será deixado como ponto de partida para uma nova pesquisa.

Sessão 4 – Ângulo externo de um triângulo

O objetivo dessa sessão, composta de três atividades, é a elaboração e validação da conjectura referente ao teorema que afirma que a soma das medidas de dois ângulos internos de um triângulo é igual ao suplemento do terceiro ângulo.

Atividade 01

a) Abra o arquivo: **Sessão 4 Atividade 1** que está em sua pasta;
b) Movimente os vértices do triângulo;
c) Qual a relação entre esses ângulos?

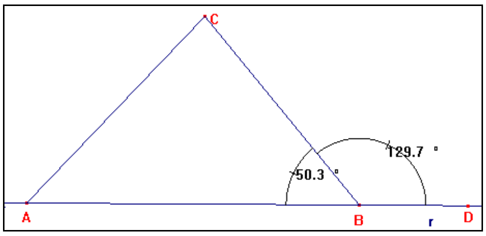


Figura 16: Sessão 4; Atividade 1

Respostas possíveis para o item *c*:

- ✓ a medida de um ângulo é maior que a medida do outro ângulo;
- ✓ 50,3 + 129,7 = 180º
- ✓ os ângulos são suplementares, ou seja, a soma das suas medidas resulta em 180º.

A atividade 01 serve como base para a conclusão das atividades 2 e 3, pois ela apenas mostra a propriedade de dois ângulos suplementares sendo um interno e o outro externo ao triângulo, ou seja, a soma das medidas desses dois ângulos resulta em 180º.

Atividade 02

a) Abra o arquivo: **Sessão 4 Atividade 2** que está em sua pasta;
b) Movimente os vértices do triângulo;
c) Qual a relação entre esses ângulos?

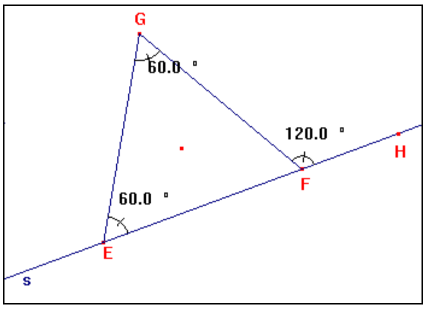


Figura 17: Sessão 4; Atividade 2

Respostas possíveis para o item *c*:

- ✓ as medidas dos ângulos não se alteram;
- ✓ o ângulo externo é o dobro de um dos ângulos internos;
- ✓ 60º + 60º = 120º
- ✓ a soma das medidas dos dois ângulos internos resulta na medida do ângulo externo.

Na atividade 2, a variável *configuração* possui uma particularidade, ou seja, neste caso temos um *triângulo equilátero* que se manterá equilátero durante a movimentação. Essa atividade começa a apresentar a propriedade em questão na sessão. Neste caso também começamos com um triângulo equilátero, pois com os ângulos iguais a 60º e 120º, a visualização da propriedade é facilitada por um simples cálculo aritmético.

Atividade 03

a) Abra o arquivo: **Sessão 4 Atividade 3** que está em sua pasta;
b) Movimente os vértices do triângulo;
c) Qual a relação entre esses ângulos?

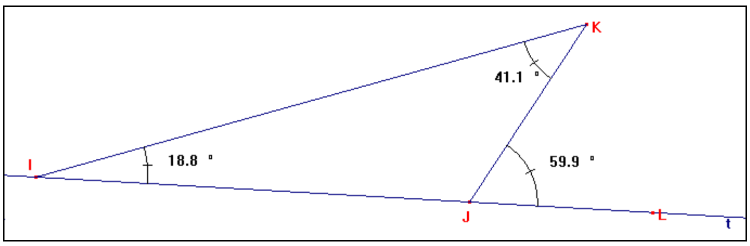


Figura 18: Sessão 4; Atividade 3

Respostas possíveis para o item *f*:

- ✓ as medidas dos ângulos se alteram;
- ✓ 18,8º + 41,1º = 59,9º;
- ✓ $K\hat{I}J + I\hat{K}J = K\hat{J}L$;
- ✓ a soma das medidas dos dois ângulos internos resulta na medida do ângulo externo.

A atividade 3 segue o mesmo conceito da atividade anterior. Neste caso a variável *configuração* assume o valor de *triângulo qualquer*. Em tal configuração, os valores dos ângulos alteram-se com a movimentação. Com isso, não será tão óbvio a percepção da propriedade. Como nessa configuração o triângulo assume inúmeras formas, é possível que durante a manipulação a figura se aproxime de um triângulo equilátero ou de um isósceles. Contudo basta um simples movimento para que volte a ter a configuração de um triângulo escaleno.

Discussão

a) Existe uma propriedade que está presente nas atividades 02 e 03. Você pode enunciá-la?
b) Com o auxílio do que foi visto na atividade 01 e nas sessões anteriores podemos validar essa propriedade. Como você validaria matematicamente a propriedade que você enunciou no item *a*?

Nessa discussão, a resposta para o item *a* é a afirmação de que a soma da medida de dois ângulos internos de um triângulo resulta na medida do ângulo suplementar ao terceiro e para o item *b* temos como respostas as seguintes estratégias:

Estratégia 1

Usar o registro numérico na tela com dados retirados da construção, por exemplo: 77,7º + 73,6º = 151,3º. Conforme observado anteriormente, essa estratégia é classificada como *Empirismo Ingênuo*.

Estratégia 2

Utilizar-se do recurso da calculadora do *software,* justificando que movimentando os triângulos os valores das medidas dos ângulos internos alteram-se, porém a soma permanece sempre igual à mesma medida do ângulo externo. Durante a manipulação, é possível que os alunos procurem analisar, primeiramente, alguns casos particulares em que a configuração se assemelha ao triângulo equilátero. Após verificada a propriedade para estes casos, pode haver o questionamento por parte do aluno: esta propriedade é válida apenas para estes casos, ou também é válida para os casos em que as configurações se assemelham com triângulos como os da figura 13, que são bem diferentes dos exemplos vistos em sala de aula? Então, após verificar para estes casos e dando-se por satisfeitos, fazerem uma generalização e concluir que é válido para todos os casos. Pensando desta forma, o aluno estará se utilizando de uma estratégia classificada de *Experimento Crucial*.

Como foi feito na sessão anterior, para as estratégias a seguir iremos utilizar uma figura genérica, sem relação com os dados das construções das atividades.

Estratégia 03

Considere um triângulo ABC qualquer, traçando uma reta que prolonga o lado $\overline{AB}$ e marcando o ponto D nesta reta de forma que o ponto D fique ao lado do ponto B e externo ao triângulo (Figura 19), temos que:

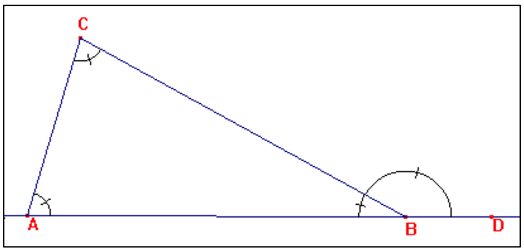


Figura 19: Sessão 4; Discussão; Estratégia 3

i. $A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = 180°$

ii. $A\hat{B}C + C\hat{B}D = 180°$, pois são suplemen-tares.

Igualando (i) e (ii) temos:

$$A\hat{B}C + B\hat{C}A + C\hat{A}B = A\hat{B}C + C\hat{B}D$$

subtraindo $A\hat{B}C$ de ambos os lados, obtemos:

$$B\hat{C}A + C\hat{A}B = C\hat{B}D$$

cqd.

Estratégia 04

Podemos prolongar os lados do triângulo e passar uma reta pelo vértice C paralela ao lado *AB*, com isso, utilizando o teorema de Tales, visto na sessão 1, podemos afirmar que:

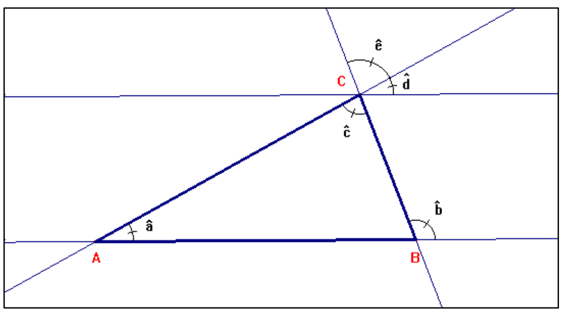


Figura 20: Sessão 4; Discussão; Estratégia 4

i. $\hat{c} = \hat{e}$ por serem opostos pelo vértice;

ii. $\hat{a} = \hat{d}$ por serem colaterais;

iii. $\hat{b} = \hat{d} + \hat{e}$ por serem colaterais.

Substituindo i e ii em iii, teremos que:

$$\hat{b} = \hat{a} + \hat{c}$$

cqd.

As estratégias 3 e 4 são classificadas como *Exemplo Genérico,* pois são generalizações de casos particulares que representam uma classe de objetos.

Sessão 5 – Ângulo central e ângulo inscrito

Nessa sessão é explorada a relação existente entre um ângulo central e um ângulo inscrito em um mesmo arco de uma circunferência. Essa sessão difere das anteriores, pois até então só era necessário apresentar uma prova ao final da sessão quando era proposta a discussão. Nesta sessão será solicitada a apresentação de uma prova para cada atividade. Dessa forma serão analisadas as argumentações de cada atividade.

Atividade 01

a) Abra o arquivo: **Sessão 5 Atividade 1** que está em sua pasta;
b) Movimente os pontos A e B, alternadamente;
c) Existe uma relação entre os ângulos. Você consegue enunciá-la?
d) Como você justificaria matematicamente essa propriedade?

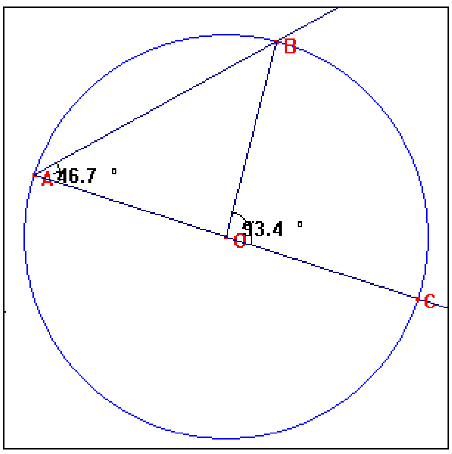


Figura 21: Sessão 5; Atividade 1

Na atividade 1 procuramos mostrar uma construção onde um dos lados, tanto do ângulo central quanto do ângulo inscrito, está sobre o diâmetro da circunferência, pois este é o caso mais simples de ser provado e servirá de base para as atividades seguintes.

Respostas possíveis para o item *c*:

- ✓ A medida dos ângulos é diferente;
- ✓ A medida do ângulo central é maior que a medida do ângulo inscrito;
- ✓ A medida do ângulo central é o dobro da medida do ângulo inscrito;

Para o item *d* temos como respostas as seguintes estratégias:

Estratégia 1

Usar o registro numérico na tela com dados retirados da construção, por exemplo: 93,4º – 46,7º = 46,7. Como observado anteriormente, essa estratégia é classificada como *Empirismo Ingênuo*.

Estratégia 2

Utilizar a calculadora do *software* e subtrair a medida do ângulo inscrito da medida do ângulo central e isso resultaria na medida do ângulo inscrito. Arrastando o resultado para a tela do *software* e movimentando a construção, veremos que o resultado da calculadora é sempre igual ao ângulo inscrito. Essa estratégia pode ser classificada de *Experimento Crucial* se durante a manipulação for verificado que os alunos procuraram verificar as propriedades para configurações que são pouco comuns, como já relatados anteriormente.

Estratégia 3

Para o desenvolvimento dessa estratégia, iremos utilizar como referência os dados da figura 22.

Temos que o triângulo OAB é isósceles, pois os lados $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ são os raios da circunferência, dessa forma,

i. $O\hat{A}B = O\hat{B}A$, pois são os ângulos da base do triângulo.

De acordo com a sessão 4 dessa sequência temos que

ii. $O\hat{A}B + O\hat{B}A = B\hat{O}C$.

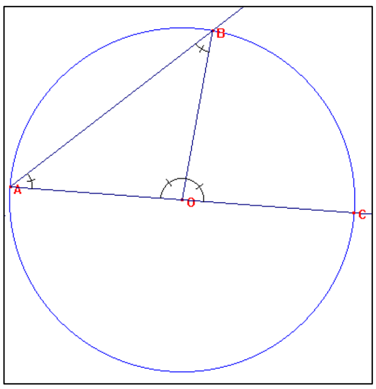


Figura 22: Sessão 5; Atividade 1; Estratégia 3

Substituindo (i) em (ii) nos resulta

$$2\,O\hat{A}B = B\hat{O}C$$

cqd.

Essa estratégia é classificada como *Exemplo Genérico*, pois a generalização é feita a partir de um caso particular que possui características de uma classe de objetos.

Atividade 02

a) Abra o arquivo: **Sessão 5 Atividade 2** que está em sua pasta;
b) Movimente os pontos A, B e C, alternadamente;
c) Existe uma relação entre os ângulos. Você consegue enunciá-la?
d) Como você justificaria matematicamente essa propriedade?

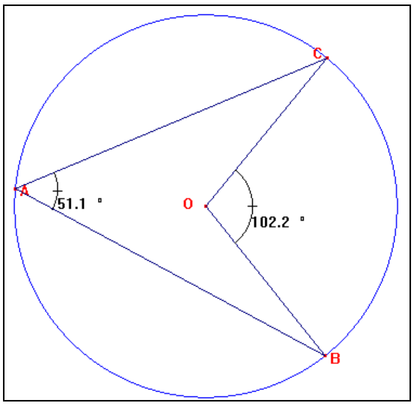


Figura 23: Sessão 5; Atividade 2

Essa atividade tem a mesma propriedade da atividade anterior, porém na atividade 1 um dos lados de cada ângulo estava sobre o diâmetro da circunferência, o que não ocorre neste caso. A atividade 1 é um caso particular deste caso.

As respostas possíveis para o item *c* podem ser as mesmas do item *c* da atividade 1.

- ✓ A medida dos ângulos é diferente;
- ✓ A medida do ângulo central é maior que a medida do ângulo inscrito;
- ✓ A medida do ângulo central é o dobro da medida do ângulo inscrito.

Para o item *d* temos como respostas as seguintes estratégias:

Estratégia 1

Usar o registro numérico na tela com dados retirados da construção, por exemplo: 102,2º – 51,1º = 51,1º.

Como observado anteriormente, essa estratégia é classificada como *Empirismo Ingênuo*.

Estratégia 2

Utilizar a calculadora do *software* e subtrair a medida do ângulo inscrito da medida do ângulo central, o que resultaria na medida do ângulo inscrito. Arrastando o resultado para a tela do *software* e movimentando a construção, veremos que o resultado da calculadora é sempre igual ao ângulo inscrito. Essa estratégia seria classificada de *Experimento Crucial* se durante a manipulação fosse verificado que os alunos procuraram verificar as propriedades para configurações que são pouco comuns, como já relatados anteriormente.

Estratégia 3

Para o desenvolvimento dessa estratégia, iremos utilizar como referência os dados da figura 24.

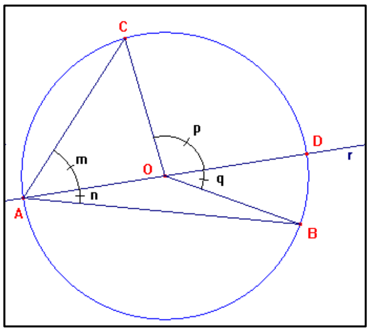


Figura 24:Sessão 5; Atividade 2; Estratégia 3

Traçamos uma reta r passando pelos pontos A e O encontrando o ponto D na intersecção com a circunferência.

Chamaremos de m a medida do ângulo $C\hat{A}O$, n a medida do ângulo $O\hat{A}B$, p a medida do ângulo $C\hat{O}D$ e q a medida do ângulo $D\hat{O}B$.

Dessa forma é imediato que a medida do ângulo $C\hat{A}B$ seja igual a $(m + n)$ e a medida do ângulo $C\hat{O}B$ seja igual a $(p + q)$.

Pelo resultado da atividade 1 temos que:

i. $2m = p$

ii. $2n = q$

somando as equações (i) e (ii) teremos:

$$2m + 2n = p + q$$

$$2(m + n) = (p + q)$$

portanto

$$2\,C\hat{A}B = C\hat{O}B$$ cqd.

Essa estratégia é classificada como *Exemplo Genérico*, pois a generalização é feita a partir de um caso particular que possui características de uma classe de objetos.

Atividade 03

a) Abra o arquivo: **Sessão 5 Atividade 3** que está em sua pasta;
b) Movimente os pontos A, B e C, alternadamente;
c) Você consegue explicar matematicamente o que está acontecendo com o ângulo $\hat{C}$? Utilize os resultados das atividades anteriores.

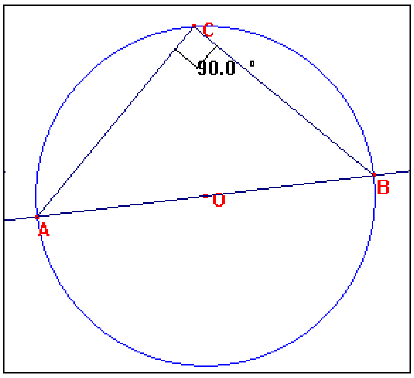


Figura 25: Sessão 5; Atividade 3

Essa atividade é outro caso particular da atividade 2 e para resposta do item *h* basta utilizar o resultado que foi provado na atividade 2, dessa forma terá como resposta as estratégias a seguir.

Estratégia 1

Medir o ângulo central e movimentar o ponto *C* por toda a circunferência, desta forma, verificando que o ângulo inscrito mantém-se sempre igual a 90º.

Essa estratégia é classificada como *Experimento Crucial*, pois movimentando o ponto *C* por toda a circunferência, certamente irão se formar triângulos incomuns, conforme já relatados anteriormente.

Estratégia 2

Temos que o ângulo $A\hat{C}B$ é o ângulo inscrito na circunferência e o ângulo $A\hat{O}B$ é o ângulo central do mesmo arco. Como o ângulo $A\hat{O}B$ é um ângulo raso e sabemos pela atividade 2, que a medida do ângulo inscrito é a metade da medida do ângulo central. Por isso, temos que $A\hat{C}B$ é um ângulo reto.

cqd.

Essa estratégia é classificada como *Exemplo Genérico*, pois a generalização é feita a partir de um caso particular que possui características de uma classe de objetos.

Sessão 06 – Desafio Final

Essa sessão, com apenas uma atividade, é a única em que o conceito contido na construção é totalmente novo para os alunos, ou seja, trata-se realmente da elaboração de uma conjectura nova para os alunos.

Atividade Única

a) Abra o arquivo: **Sessão 6 Atividade Única** que está em sua pasta;
b) Movimente os centros das circunferências, lembrando que durante a movimentação das duas circunferências tem que permanecer com a intersecção de dois pontos entre elas.
c) O que você pode afirmar sobre os pontos *B*, *C* e *D*? Existe alguma relação entre eles?
d) Caso tenha percebido alguma relação, como você justificaria matematicamente essa relação?

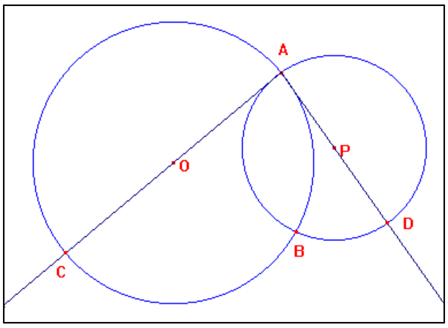


Figura 26: Sessão 6; Atividade Única

Resposta possível para o item *c*:

- ✓ os três pontos pertencem a circunferência;
- ✓ os três pontos pertencem à mesma reta.

Para o item *d* haverá como resposta as seguintes estratégias:

Estratégia 1

Traçando uma reta e passando por dois dos pontos, verificamos que a reta contém o terceiro ponto com a movimentação. Essa estratégia é classificada como *Experimento Crucial*, pois movimentando a reta, certamente irão se formar configurações incomuns como já relatados anteriormente.

Estratégia 2

Criar os segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{BD}$. Por construção temos que os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{B}D$ medem 90º por serem ângulos inscritos em uma semicircunferência (sessão 5, atividade 3). Com isso podemos concluir que o ângulo $C\hat{B}D$ mede 180º. Portanto, os pontos C, B e D são colineares.

cqd.

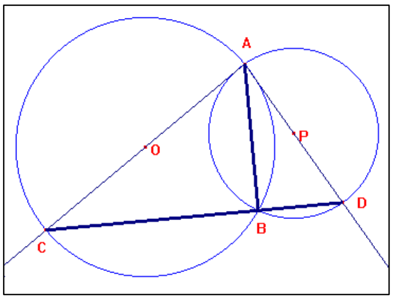


Figura 27: Sessão 6; Atividade Única; Estratégia 2

Essa estratégia é classificada como *Exemplo Genérico*, pois a generalização é feita a partir de um caso particular que possui características de uma classe de objetos.

Capítulo IV

4. Experimentação e Análise *a Posteriori*

Neste capítulo, serão apresentadas as duas últimas fases da Engenharia Didática, as escolhas dos sujeitos, a realização da sequência, as dificuldades encontradas, o desenrolar das sessões e a análise *a posteriori*.

4.1 O início das atividades

As sessões foram realizadas durante o horário da aula do professor de matemática e participaram todos os alunos da turma, pois seria inviável trabalhar somente com uma amostra da turma pela dificuldade em encontrar um horário no contraturno em que conseguiríamos reunir um grupo de alunos. No momento das aulas, os alunos se deslocavam para a sala de tecnologias que já estava preparada pelo pesquisador. Este horário precisava ser agendado semanalmente com a professora responsável pela sala de tecnologias. A duração das sessões era baseada no horário de uma aula, ou seja, 50 minutos, pois, para trabalhar com dois tempos de 50 minutos, o que era considerado ideal, seria necessário pedir para que outro professor cedesse a aula anterior ou posterior à de matemática, toda semana. Isso atrapalharia o andamento da aula de outro docente, o que seria inviável.

A partir do dia 25 de agosto foi dado início à realização da sequência didática e nesta data começou a sessão de familiarização com o *software*. A primeira sessão foi um pouco mais prolongada. Foram necessárias três aulas até que os alunos conseguissem se familiarizar com os comandos e realizar as construções de forma correta. Assim, embora alguns grupos tenham terminado em duas aulas, outros precisaram de três aulas para concluí-la. No momento em que um grupo finalizava a primeira sessão, era passada a sessão 2 que podia ser iniciada sem ter que esperar a próxima semana para continuar. Com isso aconteceu de grupos estarem em sessões diferentes na mesma aula. Os alunos não tinham tempo determinado para terminar as atividades das duas primeiras sessões, pois essas sessões tinham por objetivo familiarizar os alunos com os comandos do *software* e, consequentemente, essas duas sessões não seriam analisadas.

Da sessão 3 em diante apresentamos a configuração pronta para o aluno, para que ele tivesse todo o tempo da aula para manipular a construção, podendo assim elaborar suas conjecturas e dessa sessão em diante os grupos teriam uma aula para terminar cada sessão.

4.2 Coleta dos dados

Em cada sessão era entregue para os grupos um material impresso que continha o enunciado das *atividades*, algumas questões que foram denominadas de *discussão* e um espaço reservado para as anotações; era entregue um texto para cada grupo. Os grupos poderiam fazer anotações na folha que lhes foi entregue, ou deixar registrado na forma de comentário na tela da atividade no Cabri-Géomètre.

Utilizamos também um gravador para salvar, em *mp3*, as discussões entre o pesquisador e os grupos, além de um caderno de anotações que servia de diário de bordo para o pesquisador, onde eram anotadas informações relevantes para as análises.

As análises foram feitas levando em consideração o que foi registrado,tanto no papel como no *software*, mesclando com o que foi gravado e anotado pelo pesquisador.

4.4 Análise dos dados

Como já foi esclarecido, demos início à análise dos dados com a sessão 2 e os nomes dos alunos são todos nomes fictícios.

Sessão 2

Essa sessão tinha como objetivo levar os alunos a trabalharem com os conceitos de ângulos opostos pelo vértice, alternos (internos e externos), colaterais e suplementares, quando temos retas paralelas cortadas por transversais.

Atividade 01

a) Com a opção **reta**, construa uma reta qualquer e nomeie-a de *r*;
b) Nomeie o ponto que aparece sobre *r* de *O*;
c) Novamente com a opção **reta**, clicando primeiro em *O*, construa uma reta qualquer e nomeie-a de *t*;
d) Marque e meça os quatro ângulos formados pelas retas;
e) Movimente as retas;
f) Qual a relação entre dois ângulos consecutivos;
g) Qual a relação entre dois ângulos que estão um oposto ao outro;

Atividade 02

a) Com a opção triângulo crie um triângulo qualquer e nomeie os vértices de *A*, *B* e *C*;
b) Marque e meça os ângulos internos desse triângulo;
c) Com a opção reta, crie uma reta sobre o lado *AC*;
d) Com a opção reta, crie uma reta sobre o lado *AB*;
e) Com a opção reta, crie uma reta sobre o lado *BC*;
f) Pelo ponto C, crie uma reta paralela ao lado *AB*;
g) Marque e meça todos os ângulos criados pelas três retas que passam pelo ponto *C*;
h) Com a opção **Comentário**, nomeie todos os ângulos da seguinte maneira: Os ângulos internos do triângulo de *a*, *b*, e *c* respectivamente aos vértices *A*, *B* e *C*; nomeie no sentido anti-horário os ângulos externos desse triângulo de *d*, *e*, *f*, *g* e *h*;
i) Movimente os pontos *A*, *B* e *C* e escreva todas as relações que encontrar em relação aos valores dos ângulos apresentados na figura, inclusive sobre a soma de um ou mais ângulos.

Discussão

Você consegue justificar as relações que enunciou no item *i* da atividade anterior?

Nesta sessão apenas dois grupos responderam corretamente a atividade 1, conforme pode ser observado nas figuras 1 e 2. Entretanto, nenhum destes grupos respondeu à discussão.

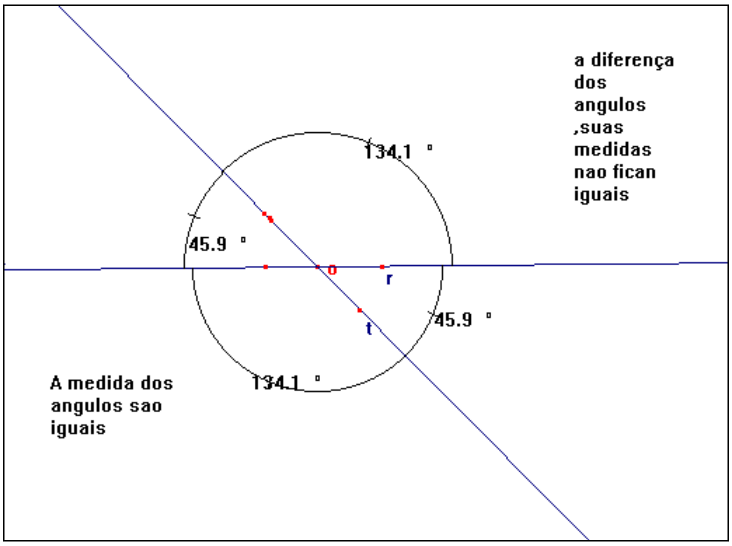


Figura 28: Resposta do grupo *Carlos – Marcos – Bruno*; Sessão 2; Atividade 1

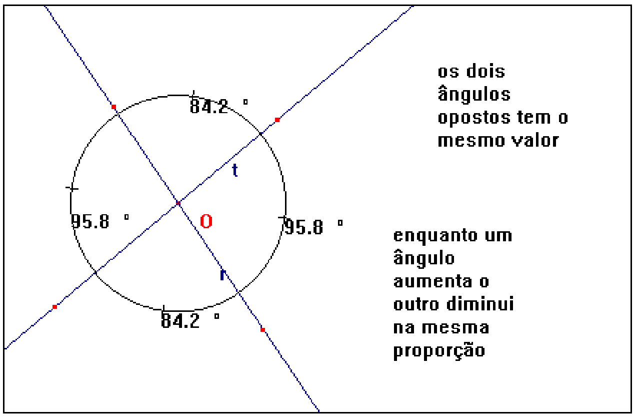


Figura 29: Resposta do grupo *Renato - Artur - Leonardo*; Sessão 2; Atividade 1

Houve apenas dois grupos que responderam a atividade 2, porém, sem uma justificativa totalmente correta do ponto de vista matemático. Como é possível verificar no protocolo do grupo Marcela – Lúcia – Letícia, foi considerada como justificativa a afirmação: *Sim, porque as retas do triângulo são as mesmas do ângulo C por isso é que são as mesmas medidas.* Apesar de ter acertado na afirmação da igualdade dos ângulos, a justificativa está sem sentido matemático; desta forma foi considerada incorreta. Para fazer uma análise sobre as respostas consideradas incorretas, seria necessário mais tempo e um maior referencial teórico para esta pesquisa. Assim, esse estudo ficará para um próximo trabalho. Desta forma, foram feitas somente as análises das respostas corretas.

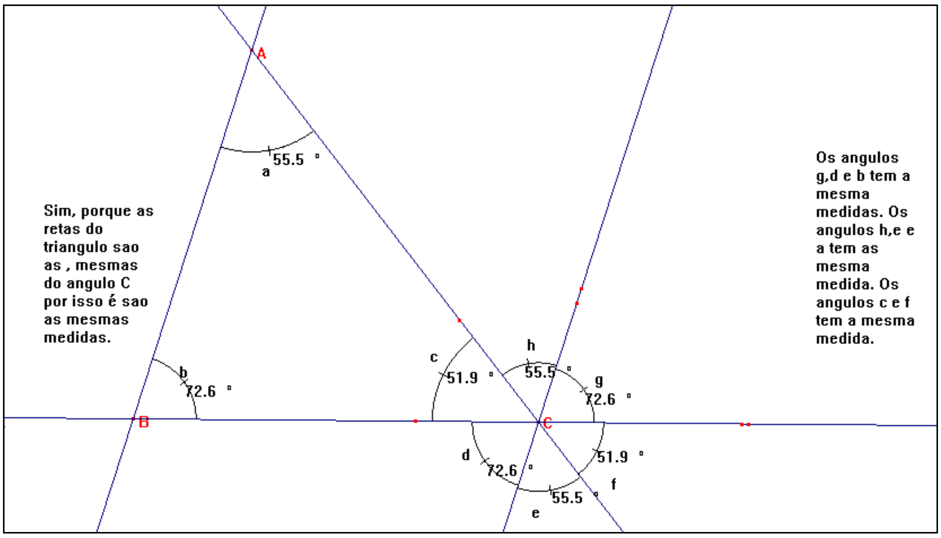


Figura 30: Resposta do grupo *Marcela - Lúcia - Letícia*; Sessão 2; Atividade 2

Como é possível verificar no protocolo do grupo Rodrigo – Célia - Mirela, foi considerada como justificativa a afirmação: *Os ângulos D e F são colaterais com o ângulo A,* *os ângulos E e H são ângulos paralelos externos.* Apesar de a redação não estar totalmente correta, essa justificativa foi considerada correta, pois há indícios de uma argumentação e como relatado no capítulo 3, essas justificativas não serão classificadas por serem deduções diretas do Teorema de Tales.

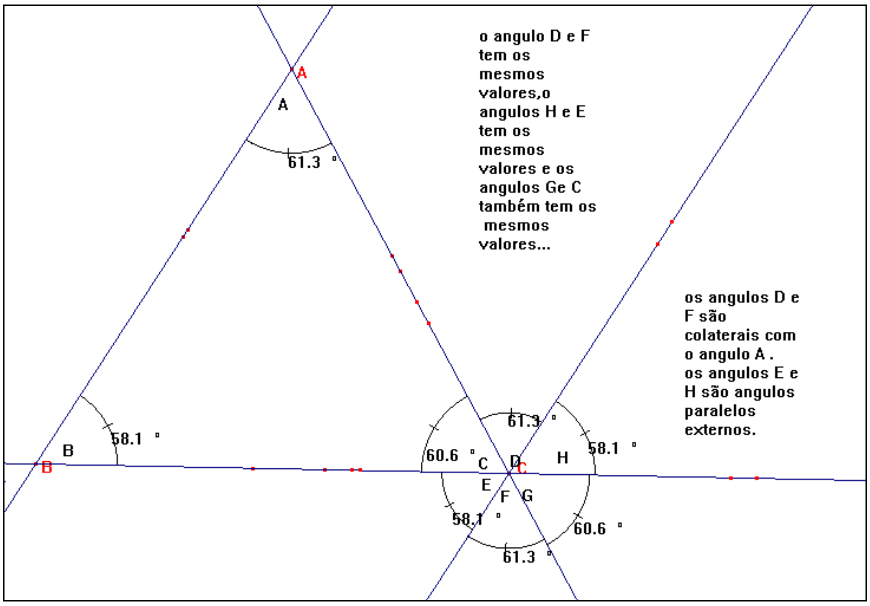


Figura 31: Resposta do grupo *Rodrigo - Célia - Mirela*; Sessão 2; Atividade 2

Deparando-se com esta situação, em que apenas um grupo respondeu à discussão de forma que foi possível classificá-la como correta, foi decidido pelo pesquisador, realizar um momento de intervenção no sentido de orientar os alunos para o que estava sendo pedido. Essa decisão foi tomada após uma breve análise a *posteriori* local, pois conforme MACHADO (2008) "Geralmente, quando a experimentação prevê mais de uma sessão, é aconselhável fazer-se uma análise a *posteriori* local após uma ou algumas sessões, confrontando com as análises a *priori* feitas, para eventuais correções da 'rota prevista' ".

Feita esta análise a *posteriori* local, foi decidido então, explicar como deveriam ter resolvido as atividades anteriores, fazendo assim a validação das mesmas e oferecendo uma base do conhecimento necessário para a resolução das atividades seguintes.

Na sala de aula foram expostas as atividades da sessão 2 e discutidas as estratégias de resolução previstas na análise *a priori*. Essa discussão foi considerada importante para o entendimento do que estava sendo solicitado, pois a argumentação era algo incomum no cotidiano destes alunos. Eles não estavam acostumados a validar teoremas e foi preciso mostrar o que é uma argumentação, o que é uma prova e como deveriam resolver as sessões seguintes.

Pelos resultados obtidos na sessão 3, conclui-se que o objetivo desta institucionalização foi alcançado, pois como será visto a seguir, um número maior de grupos conseguiu responder corretamente os itens da discussão proposta ao final da sessão.

Sessão 3

O objetivo dessa sessão era elaborar e validar a conjectura do teorema que afirma que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180º. Nesta sessão, as atividades serviram de base para a discussão final, como já dito anteriormente, não terá sentido analisar cada atividade individualmente, por isso, a análise será feita após a discussão.

Atividade 01

a) Abra o arquivo: **Sessão 3 Atividade 1** que está em sua pasta;
b) Explore a figura;
c) Faça um comentário sobre o que está acontecendo com os ângulos internos desse triângulo.

Ao abrir o arquivo, o grupo se deparava com a seguinte configuração:

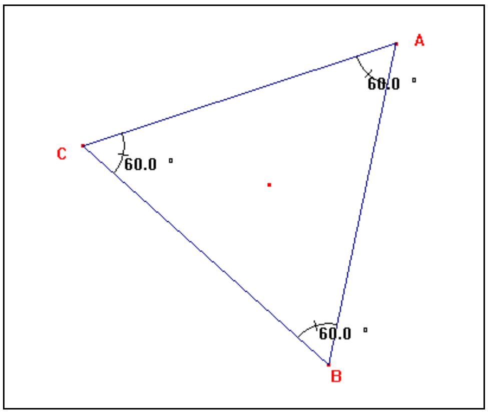


Figura 32: Sessão 3; Atividade 1

Atividade 02

a) Abra o arquivo: **Sessão 3 Atividade 2** que está em sua pasta;
b) Explore a figura;
g) Faça um comentário sobre o que você está observando em relação aos ângulos e à soma dos ângulos.

Ao abrir o arquivo, o grupo se deparava com a seguinte configuração

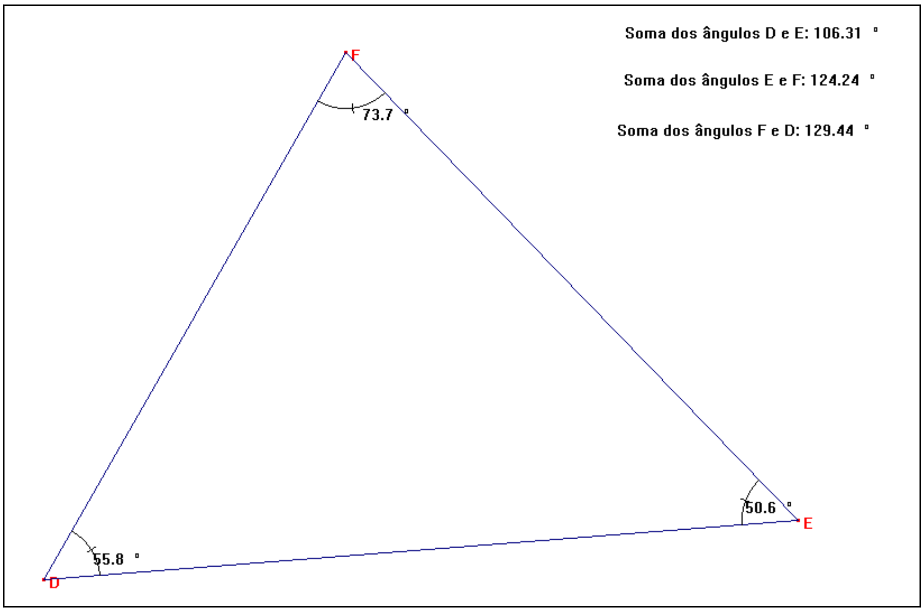


Figura 33: Sessão 3; Atividade 2

Atividade 03

a) Abra o arquivo: **Sessão 3 Atividade 3** que está em sua pasta;
b) Explore a figura;
c) Anote o que está observando em relação aos ângulos e à soma dos ângulos.

Ao abrir o arquivo, o grupo se deparava com a seguinte configuração:

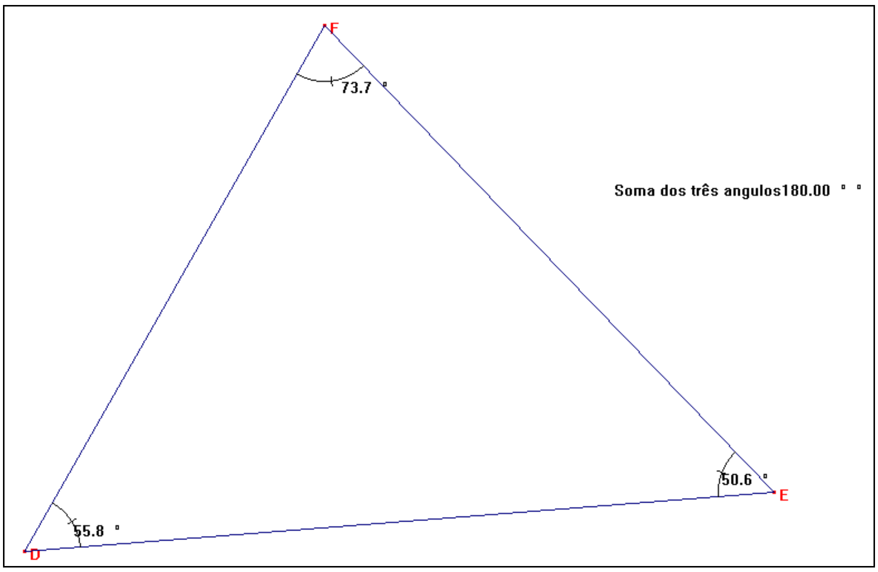


Figura 34: Sessão 3; Atividade 3

Atividade 04

a) Abra o arquivo: **Sessão 3 Atividade 4** que está em sua pasta;
b) Explore a figura;
c) Anote o que está observando em relação aos ângulos.

Ao abrir o arquivo, o grupo se deparava com a seguinte configuração:

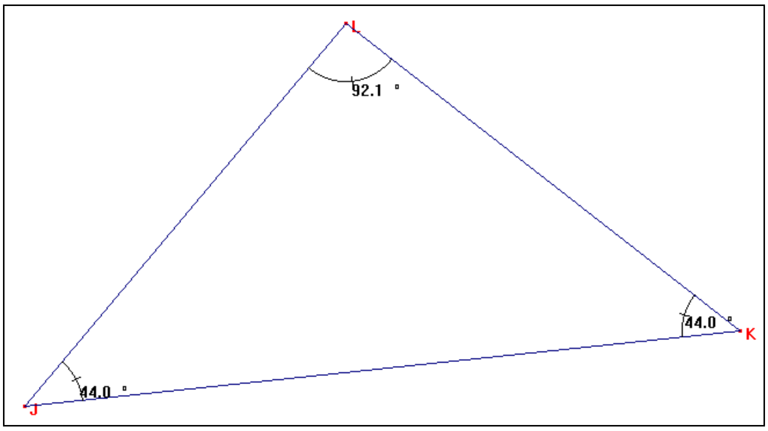


Figura 35: Sessão 3; Atividade 4

Discussão

a) Existe uma propriedade em relação à medida dos ângulos que está presente nas construções das atividades 1, 2 e 3. Você poderia enunciá-la?
b) Como você justificaria essa propriedade? Utilize argumentos matemáticos e principalmente o que já foi visto nas sessões anteriores.

O objetivo desta atividade era que na discussão fosse elaborada e validada a conjectura do teorema que afirma que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é sempre 180º.

Nesta sessão, todos os grupos conseguiram elaborar a conjectura correta. É possível identificar nos diálogos a importância da manipulação da configuração no *software* para a elaboração da conjectura, no entanto foi preciso uma interferência por parte do pesquisador para que alguns grupos conseguissem realizar a validação das mesmas. A seguir, são dados alguns diálogos com os grupos. O pesquisador será identificado por (P) e os alunos do grupo por (A).

O diálogo a seguir é com o grupo *Rodrigo – Célia – Mirela.*

> P – O que está acontecendo com a soma desses três ângulos aqui?
> A – Os ângulos estão diferentes

P – Os ângulos são diferentes, mas e a soma? Na tela, o resultado da soma dá 180º. Será que se você somar esses três ângulos dá 180º?
A – Não
P – Não? Use a calculadora do Windows mesmo.
A – Deu 180º!
P – Agora movimente o triângulo e some de novo, será que essa soma dá 180º?
A – Dá, sim!
P – Pela calculadora do programa, quando você soma duas medidas e essas medidas se alteram, a soma também se altera e neste caso você está somando três valores, alterando esses valores e a soma não está alterando.
A – Isso é porque os ângulos tem medidas diferentes, mas a soma dos ângulos sempre dá 180º!
P – Será que isso funciona para todas as construções que você fez aí?
A – Não!
P – Não? Para qual delas que não funciona?
A – Os valores dos ângulos vão sempre mudar, mas a soma vai ficar sempre a mesma.

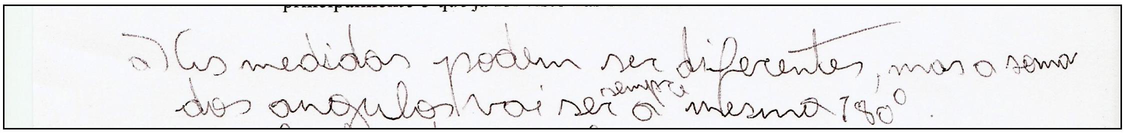


Figura 36: Resposta do grupo *Rodrigo - Célia – Mirela,* para o item *a* da Discussão

Para o item *b* da discussão, cinco grupos conseguiram provar a conjectura, sendo que três deles fizeram a prova utilizando-se de exemplos, o que classificamos de *Empirismo Ingênuo*. Esta estratégia utilizada foi equivalente à estratégia 1 apresentada na análise *a priori*. Os grupos foram: *Rodrigo - Célia - Mirela, Ronaldo - Otávio – Tadeu, Viviane - Cíntia – Andrea* e *Michel – Tiago – Henri*. A seguir, as respostas dos grupos.

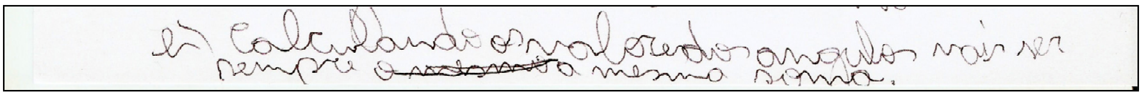


Figura 37: Resposta do grupo *Rodrigo - Célia – Mirela*, para o item *b* da Discussão

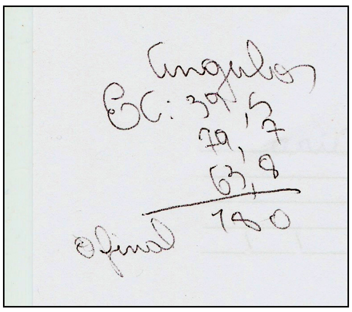


Figura 38: Exemplo numérico apresentado pelo grupo *Rodrigo - Célia - Mirela*

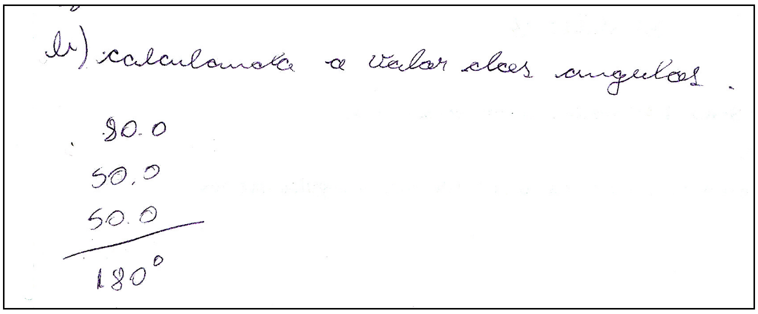
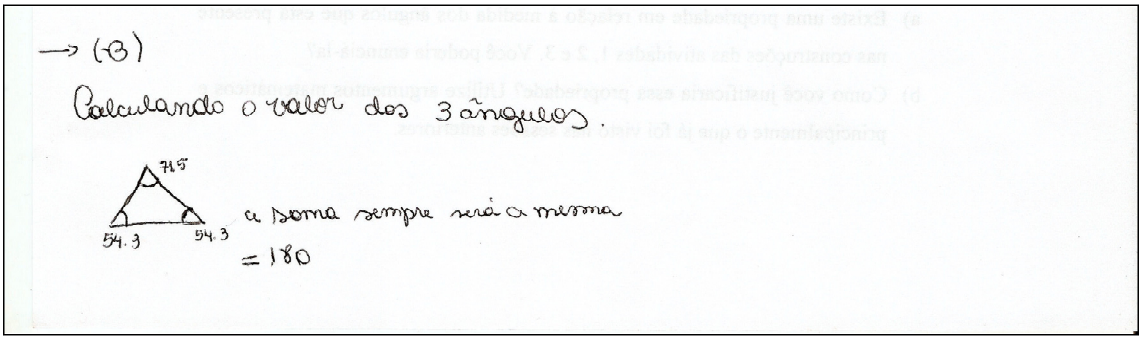

b) calculando o valor dos angulos .
90.0
50.0
50.0
180°

Figura 39: Resposta do grupo *Ronaldo - Otávio – Tadeu*, para o item *b* da Discussão


→ (B)
Calculando o valor dos 3 ângulos.

a soma sempre será a mesma
=180

Figura 40: Resposta do grupo *Viviane - Cíntia – Andrea*, para o item b da Discussão

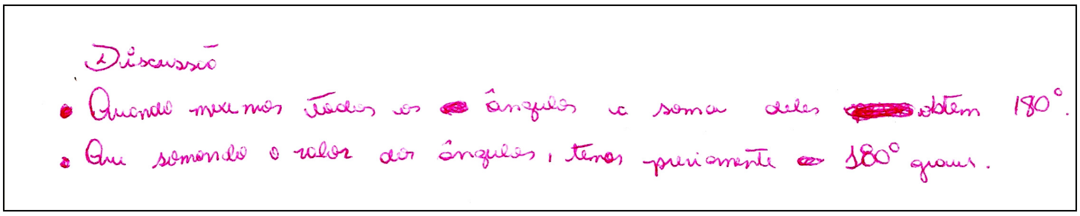

Discussão
• Quando mexemos todos os ângulos a soma deles obtém 180°.
• Que somando o valor dos ângulos, temos precisamente 180° graus.

Figura 41: Resposta do grupo *Michel - Tiago – Henri*, para o item *b* da Discussão

Pela afirmação, do item *b,* do grupo Marcela – Lúcia – Letícia, é possível verificar que houve uma exploração da figura e durante essa manipulação o pesquisador presenciou a formação de configurações incomuns como previsto na *análise a priori*. Por isso, esta estratégia foi classificada como *Experimento Crucial,* conforme o que já foi dito anteriormente.

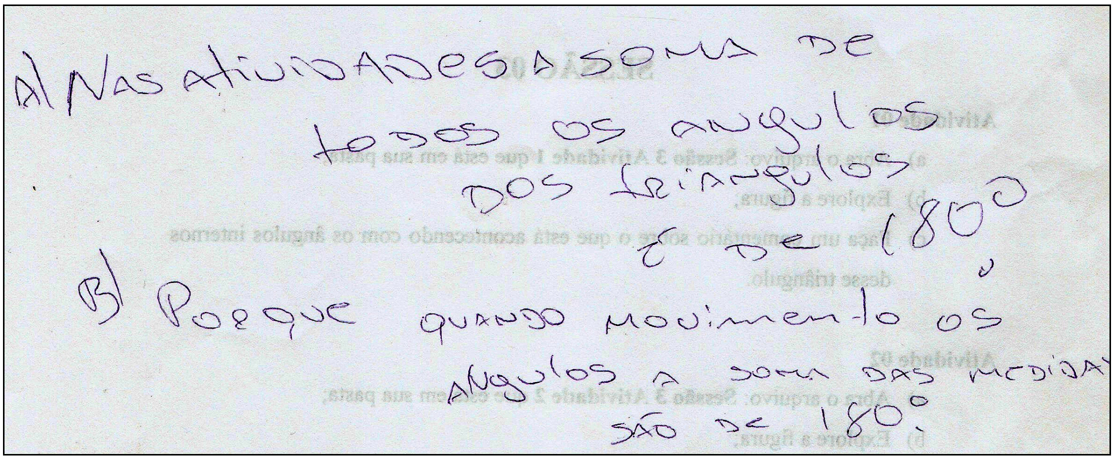


Figura 42: Resposta do grupo *Marcela - Lúcia – Letícia,* para o item *b* da Discussão

O grupo *Osmar – Estevam* apresentou uma resposta que, de acordo com a configuração, é possível classificar como *Experimento Crucial*. Neste grupo, foi verificado que, durante a manipulação, o grupo procurou fazer uma vasta exploração da figura, buscando várias posições para verificar se em alguma delas haveria uma variação na soma das medidas dos ângulos

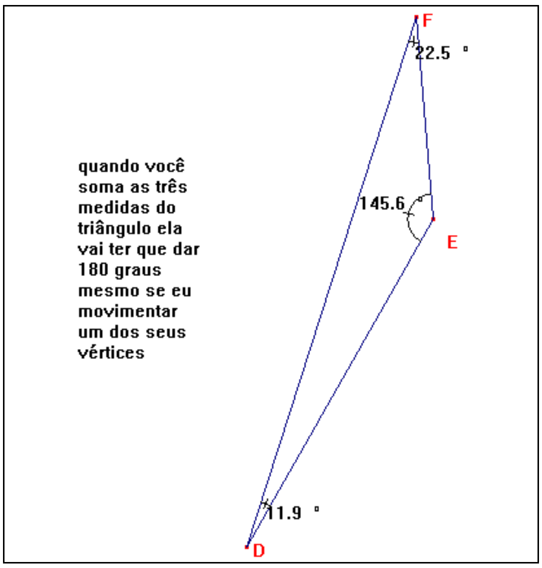


Figura 43: Resposta do grupo *Osmar – Estevam,* para o item *b* da Discussão

O diálogo a seguir é com o grupo *Carlos – Marcos – Bruno*.

> P – Vamos ver o que vocês escreveram aqui (comentário referente a atividade 1): "Quando mexo o vértice todos os ângulos se movimentam. A medida deles continua a mesma, não se altera". Essa propriedade vale só para essa atividade ou vale para todas?
> A – Ah! Vale só para ela porque nas outras você mexe e os ângulos mudam.
> P – Essa daqui (comentário referente à atividade 03) "Não importa para onde eu mexo o vértice sua soma sempre dá 180º não importa a posição". Isso aqui vale para todas? Qualquer uma das atividades que você abrir é válido essa afirmação? Porque você escreveu a mesma coisa aqui (comentário referente a atividade 4) "Quando movimento os vértices a soma dos ângulos sempre dá 180º". Então já é válido para essas duas (atividades 3 e 4) se vale para essa (atividade 3) vale para essa (atividade 2) que é a mesma construção. Será que vale para a primeira?
> A – Vale
> P – Será que dá 180º essa soma?
> A – Dá
> P – Mesmo que você movimente o triângulo?
> A – Sim, não altera em nada (comentário referente à medida dos ângulos)

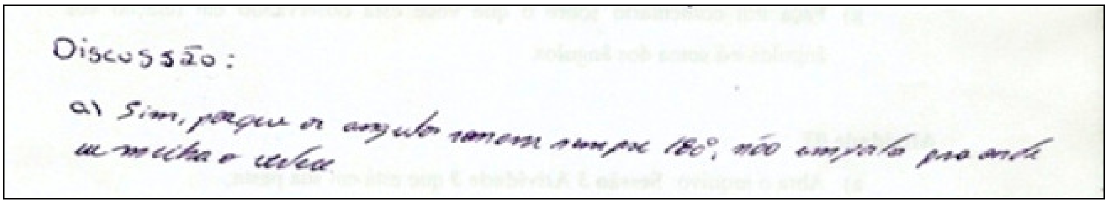


Figura 44: Resposta do grupo *Carlos – Marcos – Bruno,* para o item *a* da Discussão:[6]

Assim que o grupo *Carlos - Marcos - Bruno* apresentou resposta para o item *a* da Discussão, eles começaram a trabalhar na validação do teorema e alguns após outra interferência do pesquisador concluíram o seguinte:

> A – Eu estava fazendo essa comparação aqui com ele.
> P – Que comparação?
> A – Porque o ângulo que dá 180º é daqui

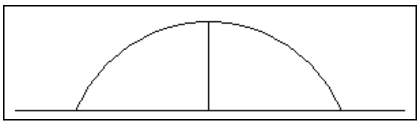


Figura 45: Desenho do grupo *Carlos - Marcos – Bruno,* reproduzido digitalmente

> A – e o triângulo aqui dá 180º.

[6] *Sim, porque os ângulos somam sempre 180º, não importa para onde eu "mecha"(sic) o vértice.*

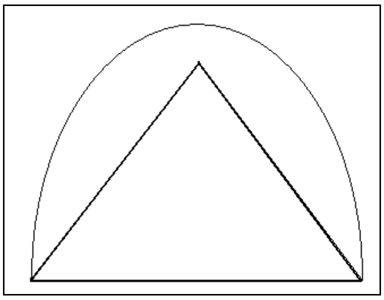


Figura 46: Desenho do grupo *Carlos - Marcos – Bruno,* reproduzido digitalmente

> P – Não, mas isso não está certo não. Você pode comparar com a atividade 2 da sessão 2, onde prolongamos os lados do triângulo, aquela que discutimos em sala. É só vocês abrirem o arquivo e compararem. Durante a discussão em sala, eu disse que existem ângulos que são iguais e que daí poderia tirar uma conclusão.

Neste momento houve uma interferência maior por parte do pesquisador, em que ele fez a validação quando afirma que “não está certo”. Por este motivo, este momento não pode ser classificado como adidático, contudo, como a própria teoria permite, podemos identificar aqui um momento didático, em que o pesquisador reuniu as conclusões dos alunos e fez um fechamento naquele assunto. Em seguida, é possível perceber que o pesquisador fez um direcionamento para os alunos quando relembrou a atividade 2 da sessão 2. Desta forma, dando um novo ponto de partida para a discussão como mostra a seguir.

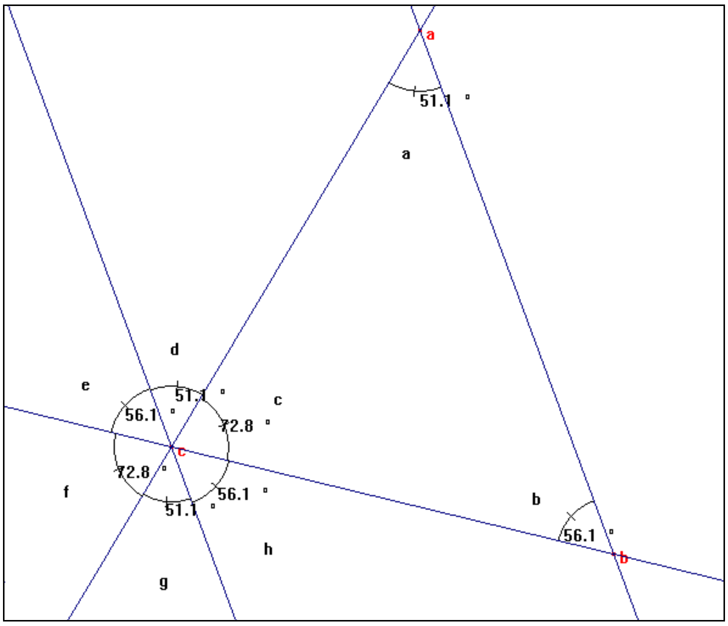


Figura 47: Arquivo “Sessão 2 Atividade 2” do grupo *Carlos - Marcos - Bruno*

> P – Prestem atenção nos ângulos externos e nos ângulos internos do triângulo. O que vocês podem afirmar?

A – Esses dois são iguais. (apontando para um ângulo externo e outro interno)
P – Isso sim e o que mais?
A – A soma
P – A soma do quê?
A – Desses três ângulos dá 180º (apontando para os ângulos *f*, *g* e *h*)!
P – Então, se você pegar a soma desses três aqui, dá 180º e eles são iguais aos que estão dentro do triângulo?
A – São!
P – Então o que vocês concluem disso?
A – Que se esses três ângulos (apontando para os ângulos *f*, *g* e *h*) dão 180º, então estes três (apontando para os ângulos *a*, *b* e *c*) também dão 180º.

A seguir, a resposta do grupo:

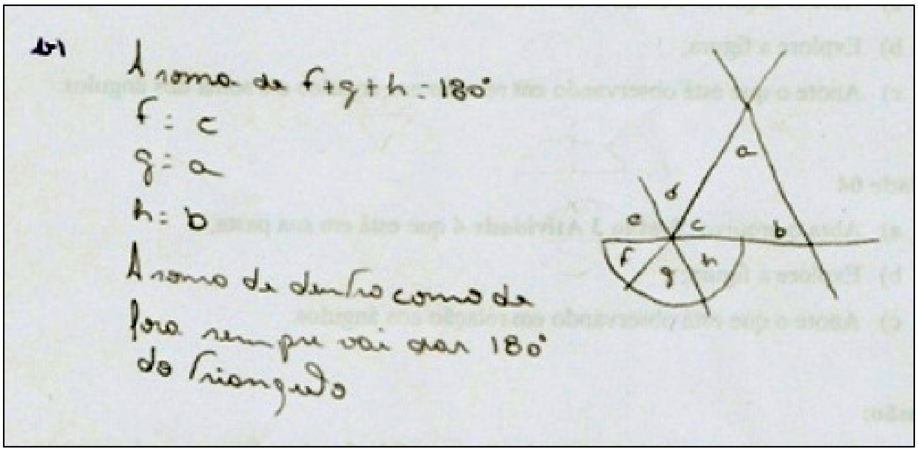


Figura 48: Resposta do grupo *Carlos - Marcos – Bruno,* para o item *b* da Discussão

Essa resposta é classificada de *Exemplo Genérico,* pois foram utilizados elementos de um caso particular, que representa uma classe de objetos, para fazer a generalização das afirmações. Mesmo que o grupo não tenha justificado o porquê da igualdade entre os ângulos, é considerada equivalente a estratégia 4 da análise *a priori*.

Todos os alunos lembraram o teorema da soma dos ângulos internos do triângulo e como foi mostrado, cinco grupos conseguiram prová-lo, o que mostra que o objetivo desta atividade foi alcançado e até superado por um grupo, já que era prevista uma dificuldade maior para provar a conjectura, utilizando-se do *Exemplo Genérico*. Porém, com direcionamento por parte do pesquisador, foi possível levar os alunos a alcançar o terceiro nível de prova, que é o máximo que os alunos podem chegar com essa sequência, pois, como visto anteriormente, a presença da *configuração* impede a classificação da estratégia como *Experimento Mental,* pois esse tipo de demonstração requer uma abstração total, ou seja, sem que se apresente uma configuração particular.

Sessão 4

O objetivo dessa sessão era elaborar e validar a conjectura que afirma que a soma de dois ângulos internos de um triângulo é igual ao ângulo suplementar ao terceiro ângulo.

Atividade 01

a) Abra o arquivo: **Sessão 4 Atividade 1** que está em sua pasta;
b) Movimente os vértices do triângulo;
c) Qual a relação entre esses ângulos?

Ao abrir o arquivo, o grupo se deparava com a seguinte configuração:

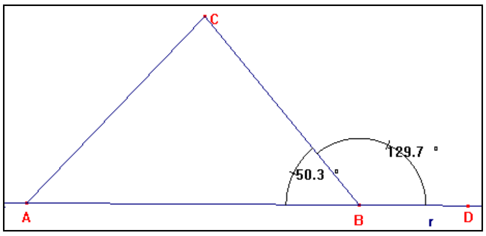


Figura 49: Sessão 4; Atividade 1

A seguir, algumas respostas do item *c* desta atividade:

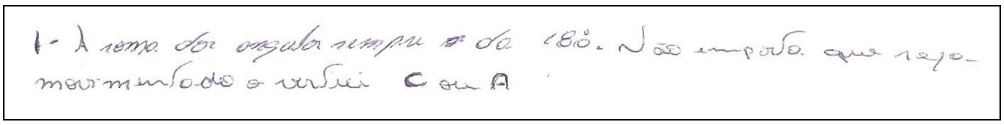


Figura 50: Resposta do grupo *Carlos - Marcos – Bruno,* para o item *c*

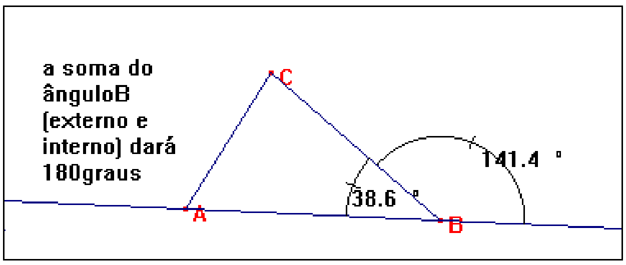


Figura 51: Resposta do grupo *Osmar – Estevam,* para o item *c*

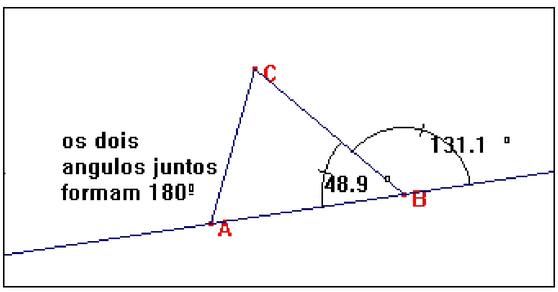


Figura 52: Resposta do grupo *Rodrigo – Celia – Mirela,* para o item *c*

Atividade 02

a) Abra o arquivo: **Sessão 4 Atividade 2** que está em sua pasta;
b) Movimente os vértices do triângulo;
c) Qual a relação entre esses ângulos?

Neste caso, a variável configuração assume a forma de triângulo equilátero, pois durante a movimentação, o triângulo se mantém equilátero conservando suas propriedades. Ao abrir o arquivo, o grupo se deparava com a seguinte configuração:

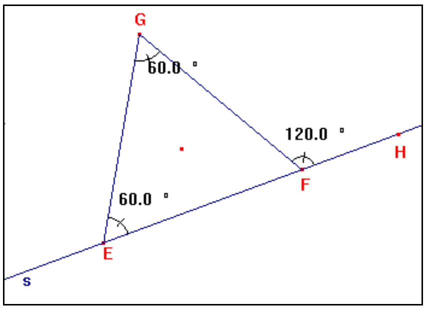


Figura 53: Sessão 4; Atividade 2

A seguir, algumas respostas do item *c* desta atividade:

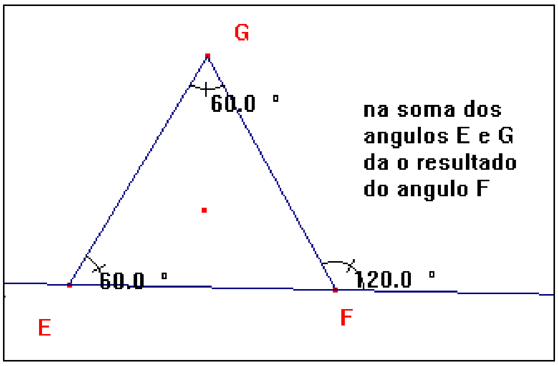


Figura 54: Resposta do grupo *Marcela – Lucia – Leticia,* para o item *c*

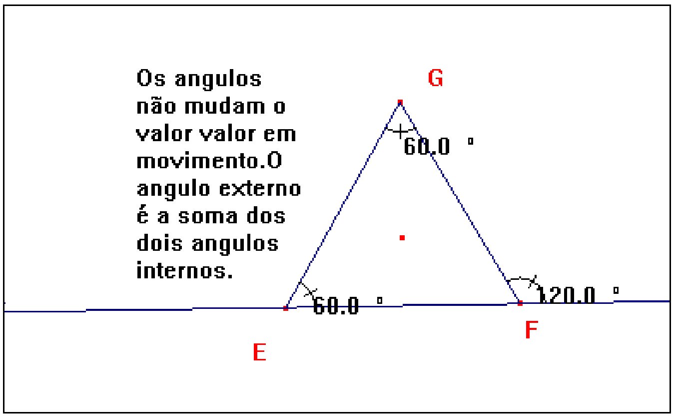


Figura 55: Resposta do grupo *Rodrigo – Celia – Mirela,* para o item *c*

Atividade 03

a) Abra o arquivo: **Sessão 4 Atividade 3** que está em sua pasta;
b) Movimente os vértices do triângulo;
c) Qual a relação entre esses ângulos?

Neste caso, a variável configuração assume a forma de triângulo escaleno, pois durante a movimentação o triângulo se mantém escaleno, podendo até ficar parecido com um equilátero ou isósceles, mas quando movimentado, conservará as propriedades de um triângulo escaleno. Ao abrir o arquivo, o grupo se deparava com a seguinte configuração:

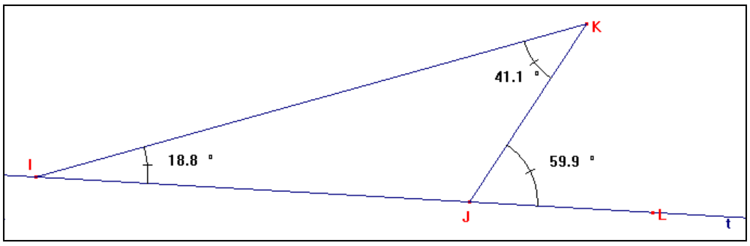


Figura 56: Sessão 4; Atividade 3

A seguir, algumas respostas do item *c* desta atividade:

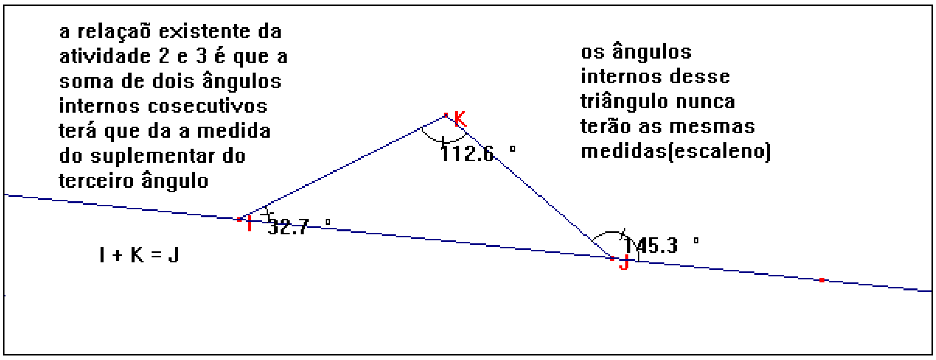


Figura 57: Resposta do grupo *Osmar – Estevam,* para o item *c*

Figura 58: Resposta do grupo *Rodrigo – Celia – Mirela,* para o item *c*

Discussão

a) Existe uma propriedade que está presente nas atividades 02 e 03. Você pode enunciá-la?
b) Com o auxílio do que foi visto na atividade 01 e nas sessões anteriores, podemos validar essa propriedade. Como você validaria matematicamente a propriedade que você enunciou no item *a*?

Nesta sessão, cinco grupos conseguiram elaborar a conjectura corretamente. Três deles não fizeram a validação, deixando como registro apenas a conjectura. São eles:

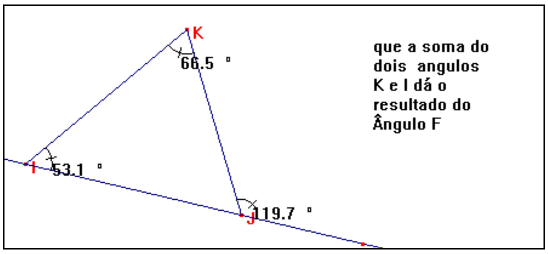


Figura 59:Resposta do Grupo *Marcela – Lucia – Leticia,* para o item *a* da Discussão

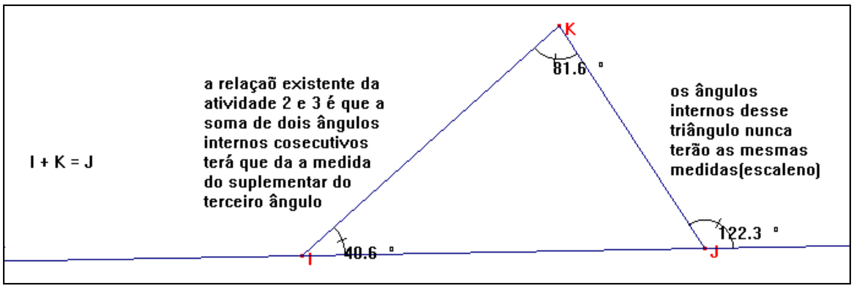


Figura 60: Resposta do grupo *Osmar – Estevam,* para o item *a* da Discussão

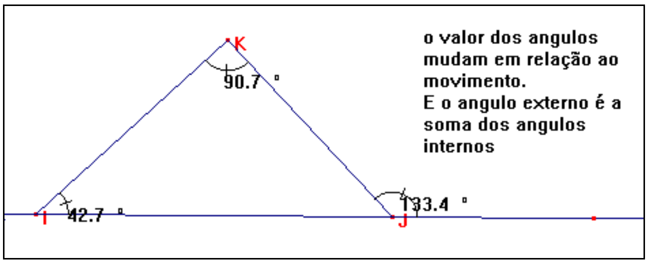


Figura 61: Resposta do grupo *Rodrigo - Celia – Mirel*a, para o item *a* da Discussão

Dois grupos conseguiram fazer a validação corretamente. O grupo *Viviane – Cintia – Andréia*, fez a validação com apenas um comentário, mas, mesmo nos baseando apenas nesse comentário, foi verificado que há indícios de como seria feita a validação, por isso foi possível classificar de *Empirismo Ingênuo*. Segue abaixo o registro do grupo:

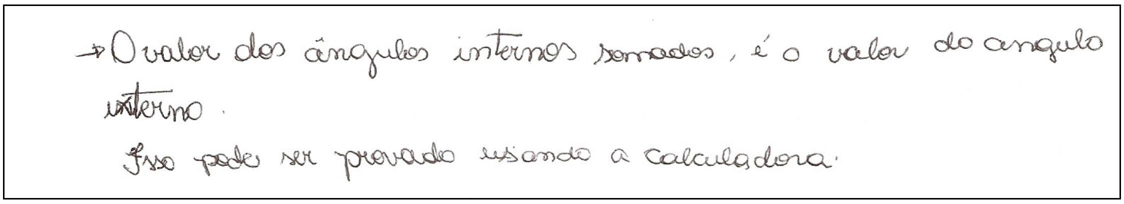


Figura 62: Resposta do grupo *Viviane - Cintia – Andréia,* para os itens *a* e *b* da Discussão

O grupo *Carlos – Marcos – Bruno* fez a validação, utilizando-se do *Exemplo Genérico.* Neste caso também houve uma orientação por parte do pesquisador semelhante à sessão anterior. Por um problema técnico, não foi possível salvar a gravação deste diálogo para transcrevê-lo na íntegra. A seguir, o registro do grupo:

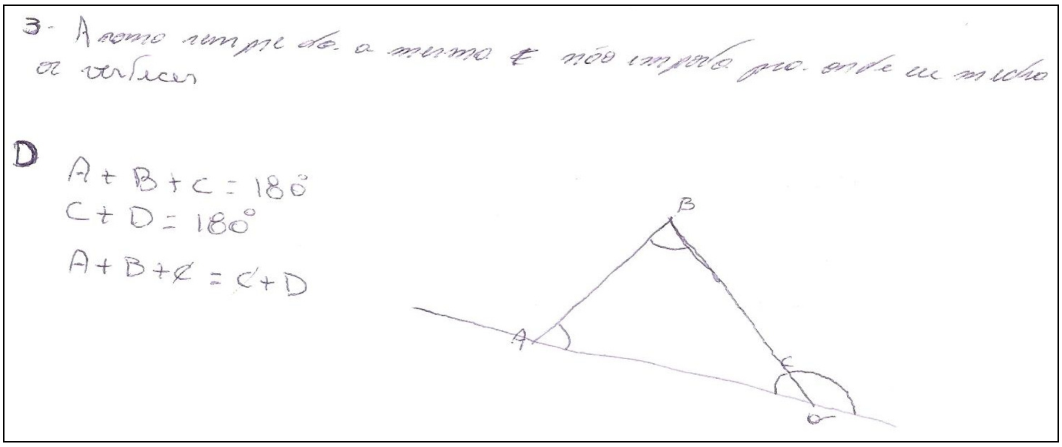


Figura 63: Resposta do grupo *Carlos - Marcos – Bruno,* para os itens *a* e *b* da Discussão

Novamente foi visto que com orientação é possível alcançar o *Exemplo Genérico*, mas neste caso, a influência do pesquisador foi realmente decisiva. Mesmo sem o arquivo da gravação, foi possível perceber, pelas anotações pessoais do pesquisador, que ele se tornou um transmissor do conhecimento, ou seja, ao invés de levar os alunos a atingir a resposta esperada, o pesquisador forneceu a resposta para os alunos. Não estamos excluindo o fato de que pode ter ocorrido o aprendizado, pois a questão levantada pelos alunos foi respondida, mas não da forma que está proposta neste trabalho: *adidática*. Isso levanta uma questão a ser respondida em outros trabalhos: Se a sequência didática tivesse mais sessões e fosse proporcionada uma discussão entre esse grupo e um grupo que não conseguiu elaborar a conjectura, haveria avanço por parte do outro grupo?

Sessão 5

O objetivo das duas primeiras atividades dessa sessão é conseguir elaborar a seguinte conjectura: a medida do ângulo central é o dobro da medida de um ângulo inscrito em um mesmo arco de uma circunferência. Gostaríamos de lembrar o leitor de que nesta sessão, não há a discussão final, pois, cada atividade tem sua justificativa em particular. Isso difere das sessões anteriores onde havia uma justificativa geral para todas as atividades.

Atividade 01

a) Abra o arquivo: **Sessão 5 Atividade 1** que está em sua pasta;
b) Movimente os pontos A e B, alternadamente;
c) Existe uma relação entre os ângulos. Você consegue enunciá-la?
d) Como você justificaria matematicamente essa propriedade?

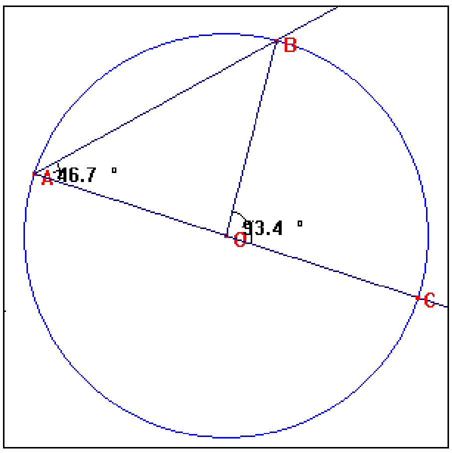


Figura 64: Sessão 5; Atividade 1

Nesta atividade, três grupos elaboraram a conjectura corretamente, porém não fizeram a validação. As respostas destes grupos, quando questionados pelo pesquisador, foram de que na própria resposta já estava presente a validação; eles não achavam necessário dar mais justificativas. Para estes alunos, é como se o próprio enunciado do teorema já fosse a justificativa. É comum escutar os discentes dizendo: “mas já está dito no enunciado, não precisa de mais nada”, logo, o enunciado é aceito pelos alunos sem validação. Acredita-se que estes alunos pensem assim, por não estarem acostumados a validar teoremas utilizando-se de argumentos matemáticos.

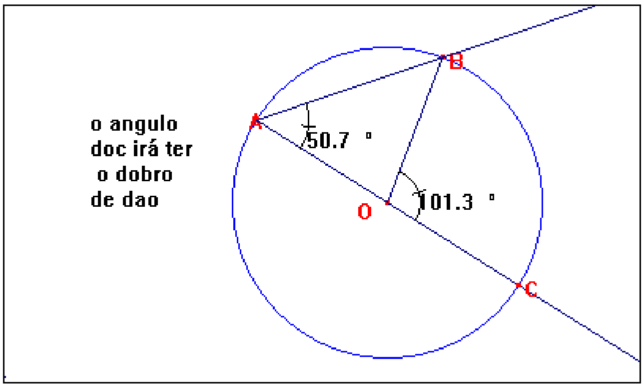


Figura 65: Resposta do grupo *Marcela - Lucia – Leticia*, para a atividade 1

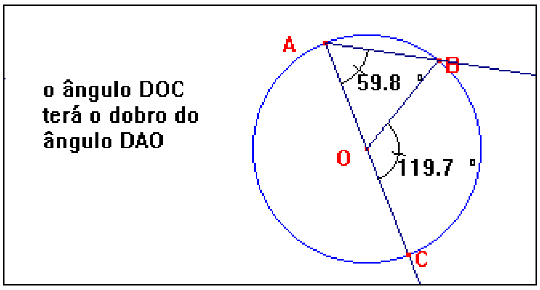


Figura 66: Resposta do grupo *Osmar – Estevam*, para a Atividade 1

Nestes dois casos, as respostas dos grupos foram as mesmas, contudo eram grupos distintos, mas que estavam lado a lado nas máquinas. Isso pode indicar que houve discussão e consenso entre os grupos, por isso utilizaram a mesma resposta. Colocar os grupos em discussão é uma técnica que pode ser utilizada posteriormente.

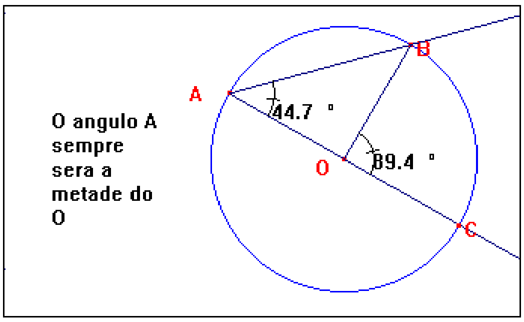
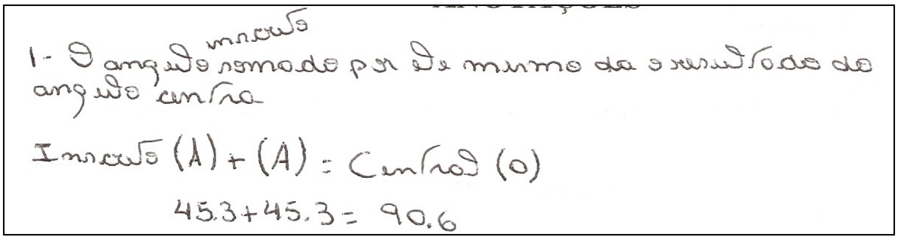


Figura 67: Resposta do grupo *Ronaldo – Otavio – Tadeu*, para a Atividade 1

Nesta mesma atividade, dois grupos fizeram a validação e ambos foram classificados como *Empirismo Ingênuo.*

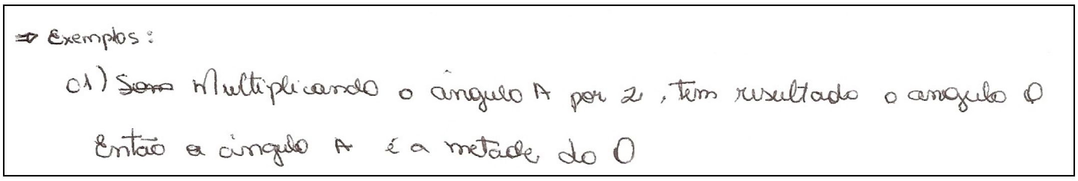


1- O angulo inscrito somado por ele mesmo da o resultado do angulo centro

Inscrito (A) + (A) = Centro (o)

45.3+45.3= 90.6

Figura 68: Resposta do grupo *Carlos* - *Marcos* – *Bruno*, para a Atividade 1



⇒ Exemplos:

01) ~~Sem~~ Multiplicando o ângulo A por 2, tem resultado o angulo O

Então o angulo A é a metade do O

Figura 69: Resposta do grupo *Viviane* – *Cintia* – *Andrea*, para a Atividade 1

Atividade 02

a) Abra o arquivo: **Sessão 5 Atividade 2** que está em sua pasta;
b) Movimente os pontos A, B e C, alternadamente;
c) Existe uma relação entre os ângulos. Você consegue enunciá-la?
d) Como você justificaria matematicamente essa propriedade?

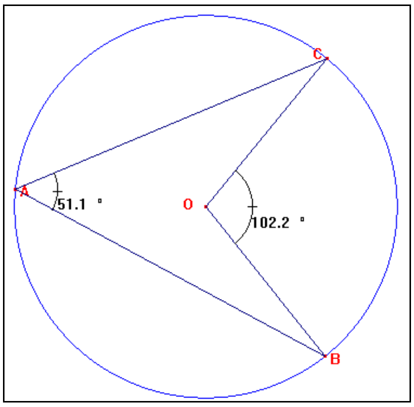


Figura 70: Sessão 5; Atividade 2

Dos três grupos que elaboraram, mas não validaram a conjectura na atividade 1, dois grupos procederam da mesma forma.

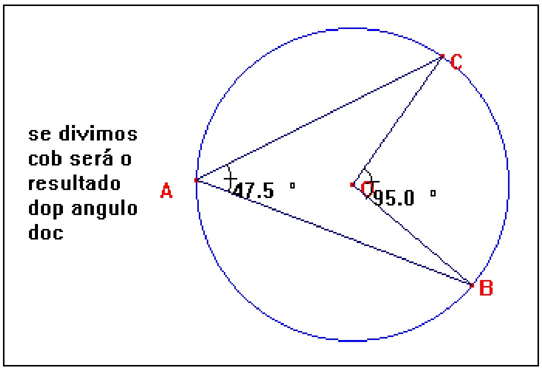


Figura 71: Resposta do grupo *Marcela - Lucia – Leticia*, para a atividade 2

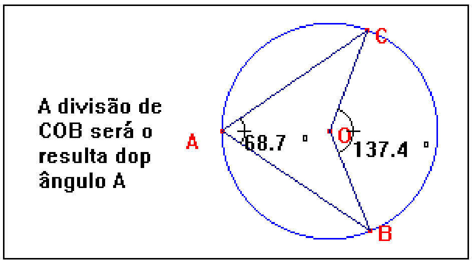
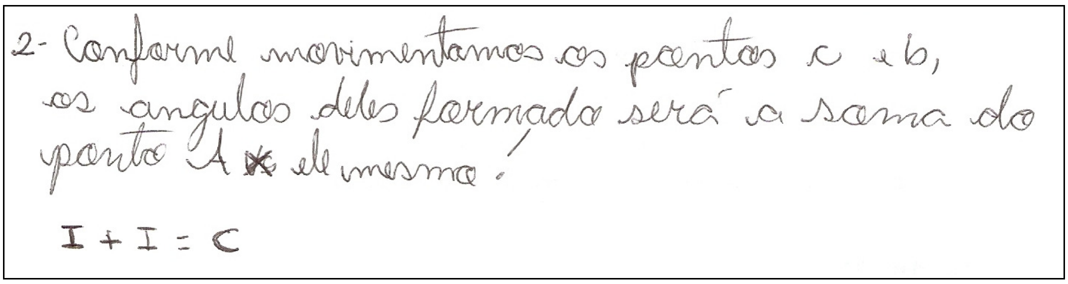


Figura 72: Resposta do grupo *Osmar – Estevam*, para a Atividade 2

Da mesma forma que ocorreu na atividade 1 desta sessão, as respostas dos grupos são bem semelhantes e o pesquisador deduziu que os grupos tiveram a intenção de dizer que a medida do ângulo central $C\hat{O}B$, dividido pela metade, resulta no ângulo $C\hat{A}B$.

Nesta atividade, dois grupos fizeram a elaboração e validação da conjectura e ambos os casos foram classificados como *Empirismo Ingênuo*.


2- Conforme movimentamos os pontos c e b, os angulos deles formado será a soma do ponto A ele mesmo.

I + I = C

Figura 73: Resposta do grupo *Carlos - Marcos – Bruno*, para a Atividade 2

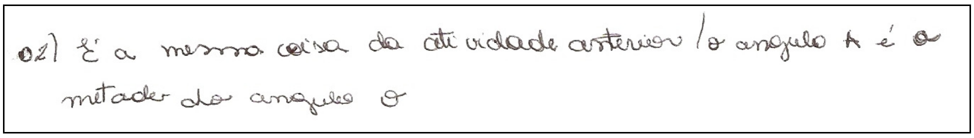

02) É a mesma coisa da atividade anterior / o angulo A é a metade do angulo O

Figura 74: Resposta do grupo *Viviane – Cintia – Andrea,* para a Atividade 2

Neste caso o grupo Viviane – Cintia – Andrea faz referência à resposta da atividade 1, conforme a figura 40.

Atividade 03

a) Abra o arquivo: **Sessão 5 Atividade 3** que está em sua pasta;
b) Movimente os pontos A, B e C, alternadamente;
c) Você consegue explicar matematicamente o que está acontecendo com o ângulo $\hat{C}$? Utilize os resultados das atividades anteriores.

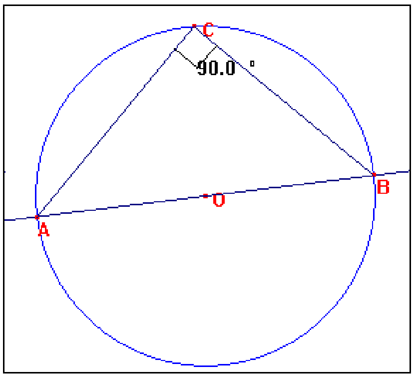


Figura 75: Sessão 5; Atividade 3

Um grupo conseguiu elaborar a conjectura e validá-la de uma forma que foi possível classificar como *Experiência Crucial*, pois foi percebido pelo pesquisador que o grupo movimentou o ponto C por toda a extensão da circunferência, observando, assim, inúmeros triângulos diferentes, inclusive os triângulos considerados “menos comuns”.

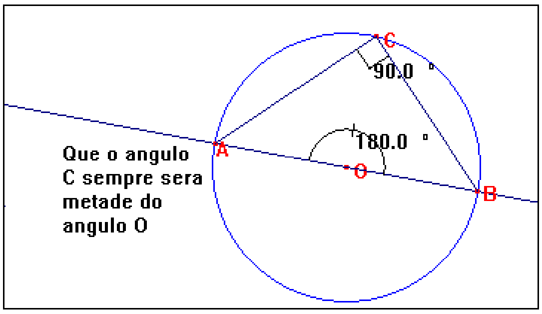


Figura 76: Resposta do grupo *Ronaldo – Otavio – Tadeu*, para a Atividade 3

Ainda nesta atividade, mais dois grupos conseguiram chegar à conclusão esperada, pois ao perceber as relações das medidas dos ângulos, inscrito e central, de um mesmo arco, presente nas atividades anteriores, a conclusão desta atividade é bem direta.

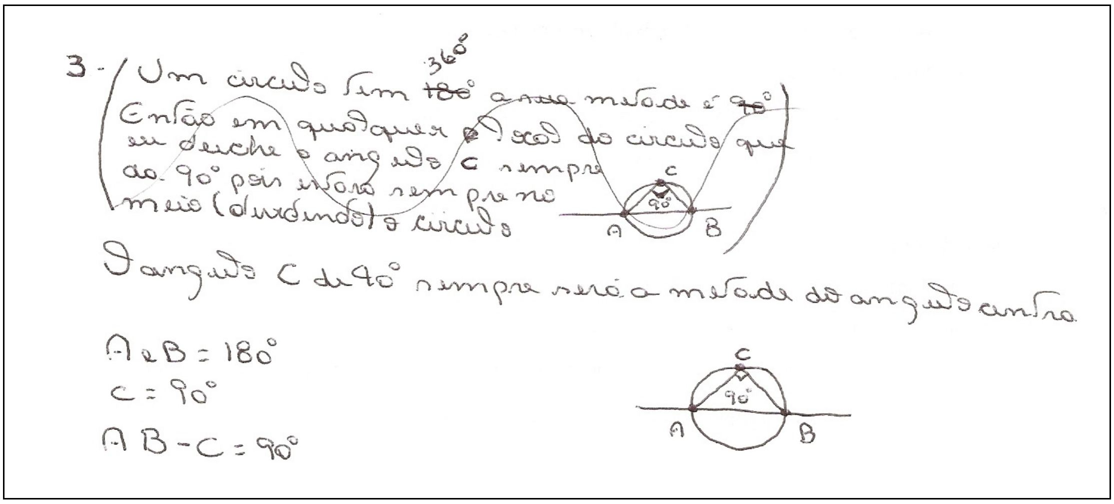


Figura 77: Resposta do grupo *Carlos - Marcos – Bruno*, para a Atividade 3

Percebe-se neste fragmento, que o grupo tentou justificar, primeiramente, de uma forma que não seria a correta. Quando questionados pelo pesquisador, o grupo reformulou sua resposta, e mesmo sem registrar de forma correta, consideramos que esta validação pode ser classificada como *Exemplo Genérico*.

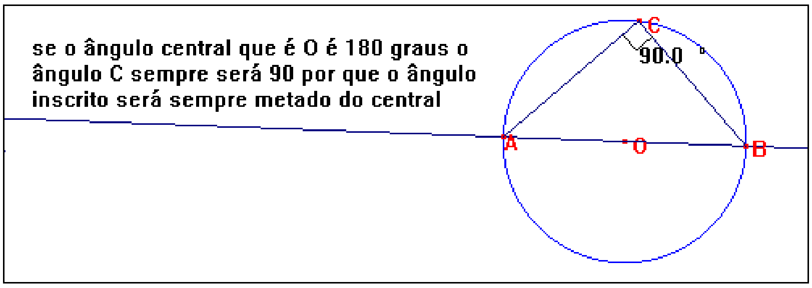


Figura 78 Resposta do grupo *Osmar – Estevam*, para a Atividade 3

Neste caso, é possível perceber que a redação do grupo está de uma forma mais clara do que a redação do grupo anterior. Desta forma ficaria mais evidente a classificação desta validação como *Exemplo Genérico*.

Sessão 06

Essa sessão, com apenas uma atividade é a única em que o conceito contido na construção é totalmente novo para os alunos, já que trata realmente da elaboração de uma conjectura para os alunos.

Atividade Única

a) Abra o arquivo: **Sessão 6 Atividade Única** que está em sua pasta;
b) Movimente os centros das circunferências, lembrando que durante a movimentação das duas circunferências tem que permanecer com a intersecção de dois pontos entre elas.
c) O que você pode afirmar sobre os pontos *B*, *C* e *D*? Existe alguma relação entre eles?
d) Caso tenha percebido alguma relação, como você justificaria matematicamente essa relação?

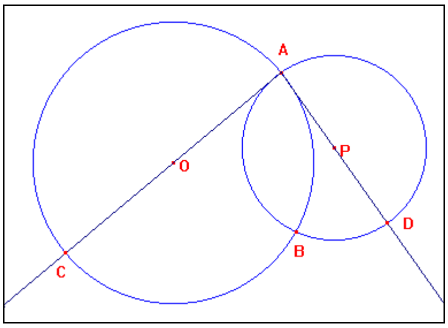


Figura 79: Sessão 6; Atividade Única

Nesta sessão, o grupo Marcela – Lucia – Leticia apresentou a conjectura correta, mas sem nenhuma validação e o grupo Ronaldo – Otavio – Tadeu apresentou corretamente a conjectura, mas a validação não está descrita de uma forma que seja possível classificá-la como uma estratégia correta.

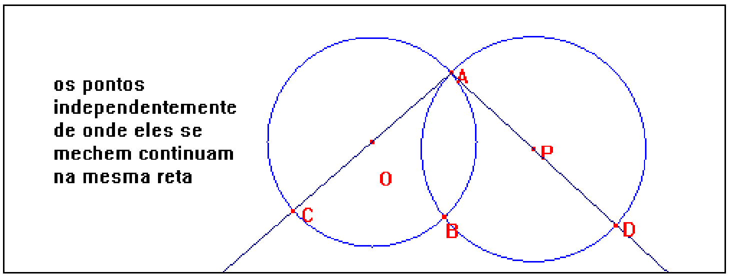


Figura 80: Resposta do grupo *Marcela - Lucia – Leticia,* para a Sessão 6

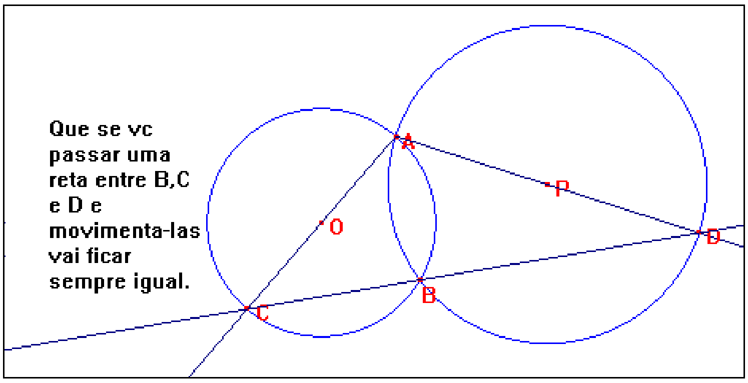


Figura 81: Resposta do grupo *Ronaldo – Otavio – Tadeu,* para a Sessão 6

Dois grupos conseguiram validar a conjectura utilizando o mesmo recurso utilizado pelo grupo Ronaldo – Otavio – Tadeu. Construíram uma reta passando pelos pontos *B*, *C* e *D*. Porém nestes casos a justificativa é válida e pela forma que foi utilizado a construção, essa estratégia pode ser classificada como *Experimento Crucial*.

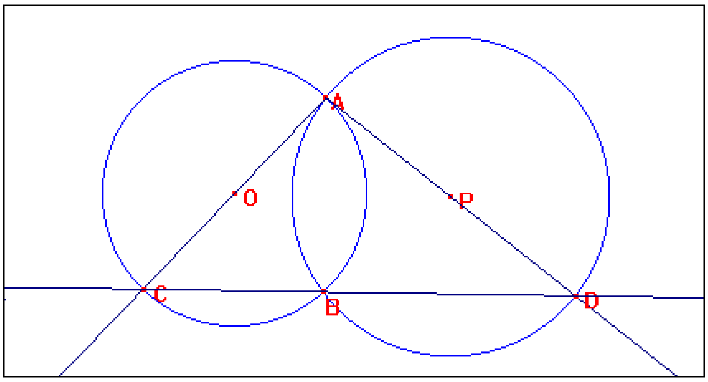
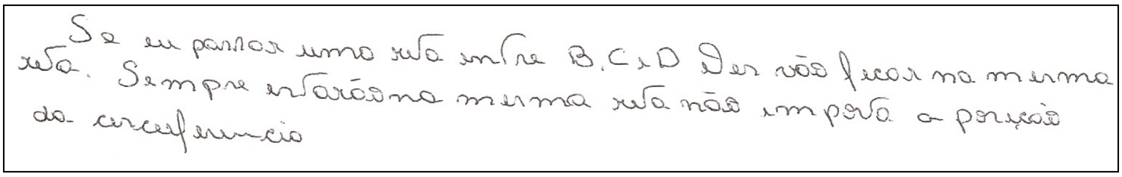


Figura 82: Resposta do grupo *Carlos - Marcos – Bruno*, para a Sessão 6



Se eu passar uma reta entre B, C e D eles vão ficar na mesma reta. Sempre estarão na mesma reta não importa a posição da circunferência

Figura 83: Resposta do grupo *Carlos - Marcos – Bruno*, para a Sessão 6

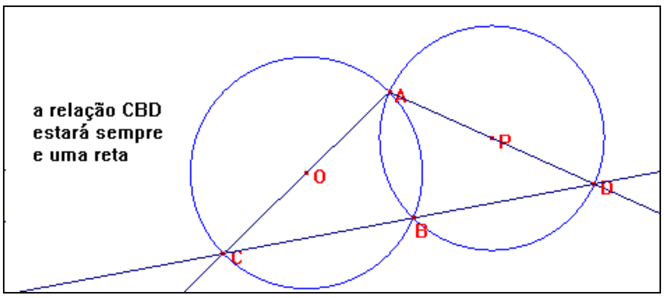


Figura 84: Resposta do grupo *Viviane – Cintia – Andrea*, para a Sessão 6

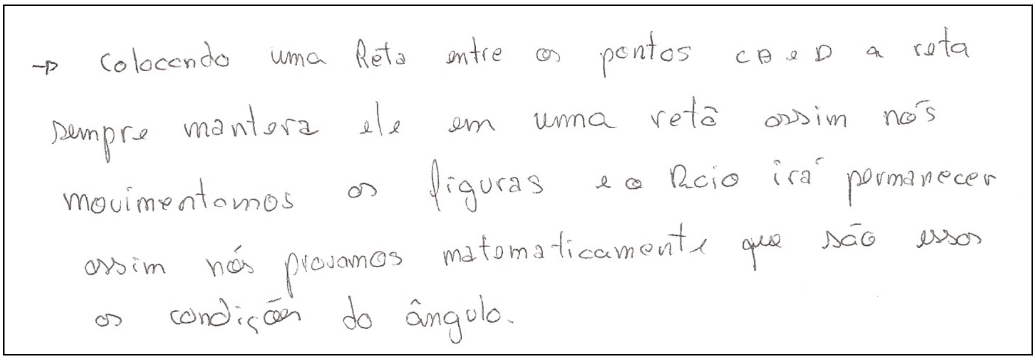

→ Colocando uma Reta entre os pontos C B e D a reta
sempre mantera ele em uma retã assim nós
movimentamos os figuras e o Rcio irá permanecer
assim nós provamos matomaticamente que são essas
as condições do ângulo.

Figura 85: Resposta do grupo *Viviane – Cintia – Andrea*, para a Sessão 6

Interpretando estes fragmentos, que contêm as justificativas que foram registradas na folha das atividades, é possível perceber que para chegar a essa conclusão, os dois grupos construíram uma reta no *software* passando pelos pontos *B*, *C* e *D*.

A seguir, uma tabela com um resumo geral dos resultados obtidos pelos alunos durante a experimentação. Desta forma, é possível obter uma visão geral da experimentação.

	Sessão 3	Sessão 4	Sessão 5			Sessão 6
Grupo	Discussão	Discussão	At. 1	At. 2	At. 3	At. Única
Carlos - Marcos - Bruno	Exemplo Genérico	Exemplo Genérico	Empirismo Ingênuo	Empirismo Ingênuo	Exemplo Genérico	Experimento Crucial
Ronaldo - Otávio - Tadeu	Empirismo Ingênuo	Conjectura Incorreta	Conjectura Correta sem validação	Conjectura Incorreta	Experimento Crucial	Conjectura Correta com validação incorreta
Viviane - Cintia - Andréia	Empirismo Ingênuo	Empirismo Ingênuo	Empirismo Ingênuo	Empirismo Ingênuo	Conjectura Incorreta	Experimento Crucial
Marcela - Lúcia - Letícia	Experimento Crucial	Conjectura Correta sem validação	Conjectura Correta sem validação	Conjectura Correta sem validação	Conjectura Correta sem validação	Conjectura Correta sem validação
Osmar - Estevam	Experimento Crucial	Conjectura Correta sem validação	Conjectura Correta sem validação	Conjectura Correta sem validação	Exemplo Genérico	Não Respondeu
Michel - Tiago - Henri	Empirismo Ingênuo	Não Respondeu	Não Respondeu	Não Respondeu	Não Respondeu	Não Respondeu
Rodrigo - Célia - Mirela	Empirismo Ingênuo	Conjectura Correta sem validação	Não Respondeu	Não Respondeu	Não Respondeu	Não Respondeu

Figura 86: Tabela resumo da experimentação

Foram analisados apenas os grupos que apresentaram as respostas corretas. Os outros grupos não apresentaram as respostas corretas, ou não responderam às atividades. Neste caso não foram realizadas análises, pois não faz parte dos objetivos. Analisaremos o que houve para os alunos não responderem corretamente, ou simplesmente não responderem, pede um novo estudo que será realizado posteriormente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Para alcançar o objetivo principal deste trabalho – *Investigar a Elaboração e Validação de Conjecturas em Geometria Plana por Alunos do Ensino Médio* –, elaboramos uma sequência didática com atividades que visavam, por um lado, estudar as dificuldades dos alunos nas validações de algumas conjecturas e por outro lado, contribuir com a aprendizagem dos sujeitos envolvidos na experimentação no que diz respeito à necessidade de validar resultados matemáticos e aos diferentes tipos de validações existentes. Para isso, adotamos como referencial teórico os estudos de Balacheff (1986) sobre os tipos e níveis de prova. Para a elaboração da sequência didática nos baseamos na engenharia didática Artigue (1990), tomando como princípio a teoria das situações didáticas Brousseau (1986).

A análise dos dados coletados em uma sala do Primeiro ano do Ensino Médio de uma Escola pública do município de Campo Grande, com 30 alunos, mostrou que, como havíamos previsto, os alunos não estavam habituados com atividades de validação e foi preciso, então, nossa interferência no sentido de realizar uma discussão com a classe sobre o que significava validar uma afirmação. Após esta fase e com a realização das atividades da sequência, percebemos que alguns grupos conseguiram validar todos os teoremas presentes nas construções, inclusive, elaborar e validar a conjectura da sessão 6, que era a única sessão que continha uma conjectura a ser elaborada pelos alunos. De fato, a atividade dessa sessão abordava um resultado até então desconhecido dos alunos, diferente do que ocorria nas demais sessões da sequência, nas quais o teorema em questão era conhecido, apenas não estava explícito, mas presente nas construções apresentadas e poderia ser deduzido (lembrado) com a observação da figura e com a manipulação no *software*.

A experiência realizada foi o primeiro contato dos alunos com argumentações. Acreditamos que foi esta a razão de a maioria dos grupos que conseguiu provar os teoremas terem permanecido no tipo de prova classificado como *Empirismo Ingênuo*. Para que os alunos alcancem níveis mais elaborados de provas, como *Experiência Crucial ou Exemplo Genérico*, é necessário dedicar maior tempo, nas aulas, a essa temática. Não se trata de dar aulas sobre validação, mas sim de propor atividades que permitam explorar validações matemáticas.

Apesar da maioria dos grupos terem permanecido no *Empirismo Ingênuo*, alguns grupos conseguiram alcançar o *Experimento Crucial* e o *Exemplo Genérico.* Isso mostra que durante o processo, houve evolução no nível de prova utilizado por alguns alunos. Logo, a investigação realizada mostra que é possível fazer com que os alunos evoluam nos tipos de argumentações, podendo até mesmo, num prazo mais longo, fazer uma demonstração. Nesta experimentação, o alcance do nível *Exemplo Genérico* só foi possível após uma intervenção do pesquisador. Percebendo que alguns grupos não conseguiriam alcançar este nível, o pesquisador, por meio de questionamentos, direcionou os alunos a provarem a conjectura elaborada. Em alguns casos o momento deixou de ser uma situação *adidática,* tornando-se uma situação *didática*, o que foi necessário para a evolução dos níveis de provas dos alunos, pois assim foi possível dar base de conhecimento aos alunos, para que continuassem avançando nas argumentações.

A investigação realizada permitiu também evidenciar que a utilização do *software* foi uma ferramenta importante para a validação das mesmas. O *software* se mostrou uma ferramenta poderosa para o ensino e aprendizagem da argumentação na Matemática, pois nesta experimentação o software apresentava inúmeros exemplos aos alunos. A partir destes exemplos, que eram gerados a partir da movimentação, é que os alunos conseguiam perceber o que havia em comum na configuração em questão, podendo assim elaborar e até mesmo refutar suas conjecturas.

Durante as sessões, os alunos assumiram, em certos momentos, papéis de pesquisadores. Isso ocorreu quando pudemos constatar que houve a *devolução*, ou seja, era possível perceber os alunos "transitando" pelos tipos de situações adidáticas: *ação*, *formulação* e *validação.* A ação ocorria durante a manipulação das figuras no *software*; na fase de formulação os alunos tentavam descobrir o teorema que estava proposto em cada atividade e era possível perceber a fase de validação quando os alunos buscavam mecanismos para provar aquilo que tinham conjecturado.

Apesar de os alunos realizarem as atividades manipulando as configurações, alguns grupos não conseguiram responder às questões colocadas ao final de cada sessão ou atividade. Talvez isto tenha ocorrido devido ao fato de as atividades estarem além do nível de conhecimento dos alunos, ou seja, eles não tinham o conhecimento necessário para conseguirem elaborar e validar as conjecturas, o que poderia ter sido identificado numa avaliação diagnóstica que não foi realizada nesta pesquisa. Acreditamos, portanto, que tal avaliação seria fundamental para melhor embasar a elaboração das atividades da sequência didática.

Como já dito anteriormente, Piaget (1972) afirma que a criança pode receber informações sobre certo assunto, mas que só irão contribuir para o aprendizado se a criança tiver conhecimentos prévios sobre esse assunto. Sendo assim, ela precisa ter uma estrutura para poder ter algum aprendizado sobre essa informação. Apesar de serem alunos do Primeiro ano do Ensino Médio, e teoricamente já conhecerem os teoremas em questão, com exceção da última atividade, é possível que a base de conhecimento de alguns não tenha sido suficiente para a realização das atividades, ficando assim uma necessidade de uma avaliação diagnóstica antes de começar a elaboração da sequência didática.

A sequência proposta colocou os alunos em situação de desequilíbrio fazendo com que eles encontrassem novas respostas, buscando novo equilíbrio cognitivo (PIAGET, 1972). Um dos incômodos para eles, naquela situação, era justamente o fato de que o pesquisador não validava as afirmações dos alunos, mas questionava-os novamente para que eles mesmos pudessem validar o que era formulado.

Analisando os passos de desenvolvimento da pesquisa, pudemos concluir que alguns deles são imprescindíveis para a realização a contento de uma sequência que visa a aprendizagem. Discutimos, a seguir, alguns dos que consideramos mais importantes, bem como outros que não realizamos, mas cuja realização poderia ter contribuído para obter os resultados desejados:

- ✓ em trabalhos desta natureza, é fundamental realizar a familiarização com o *software*, pois se o aluno não tiver domínio sobre o material utilizado, não conseguirá explorar todos os recursos disponíveis. No caso da nossa pesquisa isso foi essencial, pois senão eles não teriam o conhecimento básico para a manipulação das construções. Entretanto, não foram trabalhados todos os comandos do *software*, mas apenas os necessários ao desenvolvimento das atividades das sessões;
- ✓ o tempo ideal para a duração de cada sessão é de duas aulas de 50 minutos cada, para que os alunos possam refletir calmamente sobre as atividades. Infelizmente, para esta sequência foi possível apenas um tempo de 50 minutos para cada sessão, o que fez com que entregássemos aos alunos a configuração pronta. Se a duração da sessão fosse de duas aulas, a construção poderia ter sido realizada pelos alunos e acreditamos que, talvez, isso se convertesse em mais facilidade aos alunos no momento de elaborar e validar as conjecturas.
- ✓ a execução de um teste piloto antes da aplicação da sequência principal é importante para auxiliar o pesquisador na elaboração das atividades da sequência, como é possível ver em PICCELLI e BITTAR (2008). Nosso teste piloto foi realizado em novembro de 2008 com 10 alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola privada de Campo Grande;

- ✓ ao longo da realização da sequência didática, aconteceram alguns imprevistos como atraso no início da mesma por motivos burocráticos em relação à sala de tecnologias, dificuldade em marcar uma sessão por semana e limitação dos horários disponíveis. Assim, a última sessão foi realizada em dezembro. Vemos que esse pode ser um fator complicador, no caso de ser necessário reaplicar alguma atividade, pois não há mais tempo disponível. Dessa forma, seria interessante começar a realização das atividades no início do ano letivo.

Há questões que ficaram em aberto nesta pesquisa e algumas delas são relatadas aqui.

Nesta pesquisa foi visto que, pelo fato de o tempo de cada sessão ser de apenas uma aula de 50 minutos, não era viável passar a construção para que os alunos a fizessem, por este motivo as configurações eram apresentadas prontas para que pudessem ter todo o tempo disponível para a manipulação, elaboração e validação das conjecturas. Se houvesse a oportunidade de ter duas aulas de 50 minutos para cada sessão desta sequência, as atividades seriam propostas aos alunos de forma que eles mesmos fizessem a construção da figura. Se os alunos tivessem feito a construção das figuras facilitaria a elaboração das conjecturas?

Outro fator que marcou esta pesquisa foi a quantidade de grupos que não responderam corretamente, ou simplesmente não responderam, as discussões propostas ao final de cada sessão ou atividade. O que poderia ter sido feito com estes alunos? A princípio houve um interesse de todos os alunos em manipular as configurações, descrevendo o que estavam visualizando nas configurações. Esta fase caracterizava uma *ação*. Alguns grupos simplesmente ignoraram as discussões que eram propostas, ou seja, os alunos não transitaram pelas fases de *formulação* e *validação*. O fato de os alunos tentarem responder às questões com seus conhecimentos prévios é um dos elementos que caracteriza uma situação *adidática*. O aluno tenta responder a questão com algo que ele já conhece. Rapidamente ele percebe que essa estratégia não é consistente, pois para responder tais questões é necessário um conhecimento novo. Assim, no que diz respeito ao conhecimento em jogo, na nossa sequência, alguns grupos não viveram todas as fases de uma situação *adidática*, portanto o processo de aprendizagem não foi completo, apesar de ter havido algum tipo de aprendizagem: eles perceberam que certas afirmações matemáticas devem ser, de alguma forma, justificadas.

Em geral, os alunos não estão acostumados a situações nas quais devem agir independentemente do professor no que diz respeito ao saber em cena. Segundo Miskulin (1994) os alunos estão acostumados a "fazer contas" e perderam o poder criativo para sair em busca de respostas, neste caso, se acomodando a receber as informações diretas do professor e repeti-las numa lista de exercícios. Para promover ao aluno uma situação que ele possa vivê-la como *adidática* seria necessário, como dito anteriormente, um tempo maior para experimentação, mais atividades e a criação do hábito da necessidade de validação, mas com cuidado para que esse hábito não se torne uma repetição de afirmações decoradas.

Uma proposta que ficou em aberto seria fazer uma integração entre dois grupos, um que tenha conseguido realizar as atividades e outro que não concluiu da forma correta. Outra proposta de interação seria entre os grupos que chegaram a níveis mais avançados de argumentação com os grupos que permaneceram no *Empirismo Ingênuo*, o que levanta um questionamento: seria possível essa interação beneficiar os grupos que não conseguiram? Para manter a proposta de situação *adidática* seria preciso analisar se o grupo que respondeu corretamente não iria passar a resposta. Neste caso um grupo teria que atuar como orientador do outro, da mesma forma que o pesquisador atuou com todos os grupos, isso porque os grupos que conseguiram alcançar o nível do *Exemplo Genérico* tiveram a intervenção do pesquisador. Se não tivesse ocorrido esta intervenção, os alunos não teriam conseguido argumentar neste nível, pelo menos não na sequência que aplicamos.

Estas interações poderiam ter sido executadas e estas questões poderiam ter sido respondidas se houvesse um maior tempo hábil para a experimentação. A experimentação desta pesquisa foi realizada no segundo semestre de 2009, sendo inviável o retorno à sala de aula para promover esta interação, uma vez que os sujeitos podem estar em turmas, ou até mesmo em escolas diferentes no ano seguinte.

É fato que a realização desta experiência trouxe dados satisfatórios quanto aos objetivos, pois foi possível experimentar uma nova forma de dar aulas, em que o professor deixa de ser o transmissor do conhecimento pronto e se torna o orientador para o aluno construir este conhecimento. Não é uma tarefa fácil esta mudança, mas para conseguir atingir grandes objetivos é necessário que seja dado o primeiro passo e durante esta pesquisa foi possível perceber que este pode ser um dos vários caminhos a serem seguidos na solução da dificuldade entre o ensino e a aprendizagem.

Referências Bibliográficas

ARTIGUE, M. *Ingénierie didactique*. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 9, n°3, pp. 281-307. La Pensée Sauvage, 1990.

BALACHEFF, N. *Processus de preuve et situations de validation*. In Educational Studies in Mathematics, nº18, 1987, pp.147-176.

BALACHEFF, N. *Une étude des processus de preuve en Mathématique chez les élèves de collège.* Tese de Doutorado. Grenoble: Université Joseph Fourier, 1988.

BERTOLUCCI, E. A. *Ensinando e aprendendo Geometria : uma experiência com o software Cabri-Géomètre II na 5ª série do ensino fundamental.* Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de São Carlos. São Carlos. 2003.

BRASIL, *PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias* (Ministério da Educação, Brasília, 2002).

BITTAR, M. *Informática na Educação e formação de Professores no Brasil*. Revista Série-Estudos: Periódico do Mestrado em Educação da UCDB, Campo Grande, 2000.

BITTAR, M. ; ESTEVES, A. K. ; PICCELLI, P. H. *Tecnologia nas aulas de Matemática: trajetória de um professor participante de um grupo de pesquisa-ação.* In: 9º Encontro de Pesquisa em Educação da ANPED - CO, 2008, Brasília. 9º ANPED-CO, 2008.

BRANDÃO, P. C. R. *O uso de software educacional na formação inicial do professor de Matemática: uma análise dos cursos de licenciatura em Matemática do Estado de Mato Grosso do Sul.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação, Campo Grande, 2005.

BROUSSEAU, G. *Fondements et Méthodes de la didactique des mathématiques*, RDM, Pensée Sauvage, Grenoble, 1986.

CARRAHER, D. et al. *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Editora Cortez. 1988

COSTA, D. A. O estudo dos frisos no ambiente informatizado Cabri-Géomètre. Dissertação de Mestrado Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo – SP, 2005

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates. SBEM. Ano II. N2.Brasilia. 1989. P. 15-19.

DE VILLIERS, M. *The Role of Proof in Investigative, Computer-based Geometry: Some Personal Reflections. King, J. et al. (eds) - Geometry Turned On - Dinamic Software in Learning*, p. 15 – 24. USA: MAA. 1997.

DUVAL, R. *Geometry from a cognitive point of view. Mammana, C. & Villani, V. (eds) - Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, p. 37 – 52. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1998

FREITAS, J. L. M. *Situações Didáticas.* In: *Educação Matemática: uma introdução*. (org.) SILVA, D. A. São Paulo: EDUC, 3ª ed. rev. 2008.

HOYLES, C. & JONES, K. *Proof in dynamic geometry contexts. Mammana, C. & Villani, V. (eds) - Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, p. 121 – 128. Netherlands: Kluwer Academic Publishers. 1998

LIMA, A. V. M. C. e FREITAS, J. L. M. *Investigação e Aprendizagem Envolvendo Produções de Alunos do Ensino Médio Diante de Conjecturas no Conjunto dos Números Inteiros.* III SESEMAT, 2009, Campo Grande, *Anais*. Campo Grande. 2009. 276p.

MACHADO, S. A. *Engenharia Didática.* In: *Educação Matemática: uma introdução*. (org.) SILVA, D. A. São Paulo: EDUC, 3ª ed. rev. 2008.

MISKULIN, R. G. S. *Concepções Teórico-Metodológicas baseadas em Logo e em Resolução de Problemas para o Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria.* Dissertação de Mestrado, Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 1994

MISKULIN, R. G. S. *Concepções Teórico-Metodológicas sobre a Introdução e a Utilização de Computadores no Processo Ensino/Aprendizagem da Geometria.* Tese de Doutorado, Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 1999.

PASSOS, C. L. B. *Representações, interpretações e prática pedagógica: a Geometria em sala de aula.* Tese de Doutorado. Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP. 2000.

PIAGET, J. *Desenvolvimento e aprendizagem*. Tradução Paulo Francisco Slomp. Título Original: *Development and learning*. In: LAVATELLY, C. S. e STENDLER, F. *Reading in child behavior and development*. New York: Hartcourt Brace Janovich, 1972.

PICCELLI, P. H. e BITTAR, M. *A Elaboração e Validação de Conjecturas em Geometria Com o Auxílio do Cabri-Geomètre.* III Sesemat, 2009, Campo Grande, *Anais*. Campo Grande. 2009. 276p.

SALES, A. e SANTOS, M. M. *Um Estudo da Demonstração do Teorema de Pitágoras em Livros Didáticos.* III SESEMAT, 2009, Campo Grande, *Anais*. Campo Grande. 2009. 276p.

SALES, A. e PAIS, L. C. *A Argumentação no Desenvolvimento de Atividades de Geometria por Acadêmicos de um Curso de Licenciatura em Matemática.* III SESEMAT, 2009, Campo Grande, *Anais*. Campo Grande. 2009. 276p.

SILVA, J. X. I*nfluencia da Informática Educativa na Prática Pedagógica do Professor de Matemática.* Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação Matemática, Campo Grande, 2009.

ANEXO

Sequencia didática

SESSÃO 01 - FAMILIARIZAÇÃO

Atividade 01

a) Selecione a opção **ponto**, e clique uma vez sobre algum lugar da tela.
b) Antes de qualquer outra ação digite "*A*" para nomear o ponto;
c) Agora crie vários pontos nomeando-os como quiser;
d) Selecione a opção **ponteiro**, clique e segure em cima de um dos pontos e movimente o mouse.

Atividade 02

a) Crie dois pontos em qualquer lugar da tela e nomeie-os de: *A* e *B*;
b) Com a opção reta, crie uma reta passando por *A* e *B* e nomeie-a de *r*;
c) Tente mover a reta *r* e depois os pontos *A* e *B*;
d) Crie uma segunda reta qualquer, em qualquer lugar da tela e nomeie-a de *s*
e) Tente movimentar uma reta de cada vez;

Atividade 03

a) Crie um ponto e nomeie de *O*;
b) Crie uma reta *r* passando por *O* (clique primeiro em *O*);
c) Com a opção **reta perpendicular** crie uma reta *s* perpendicular a *r* passando por *O*; (clique no ponto e depois na reta, ou vice-versa).
d) Movimente uma das retas e anote o que está observando. Qual a diferença entre esta atividade e a atividade 02? Você consegue justificar sua resposta?

Atividade 04

a) Crie uma reta *r* em qualquer lugar da tela;
b) Crie um ponto *P* em qualquer lugar da tela, mas fora da reta;

c) Com a opção **reta paralela**, crie uma reta paralela a *r* passando por *P*;
d) Nomeie esta nova reta de *s*;
e) Movimente uma das retas e anote o que está observando. Qual a diferença entre esta atividade e a atividade 02? Você consegue justificar sua resposta?

Atividade 05

a) Crie três pontos: *A*, *B* e *C* não colineares;
b) Com a opção **semi-reta** crie uma semi-reta com origem em *A* e passando por *B*;
c) Crie uma segunda semi-reta com origem também no ponto *A*, mas agora passando por *C*;
d) Com a opção **Marca de ângulo**, marque o ângulo $B\hat{A}C$; (clicando primeiro em *B*, em seguida em *A* depois em *C*).
e) Com a opção **Ângulo**, meça o ângulo $B\hat{A}C$; (clicando na marca).
f) Movimente os pontos: *A*, *B*, *C* E as semi-retas e anote o que está observando em relação à medida do ângulo;

Atividade 06

a) Com a opção **circunferência**, crie uma circunferência de centro *O* em qualquer parte da tela; (Clique em algum lugar da tela, isso dará o centro da circunferência, movimente o *mouse* e clique em outra parte da tela.)
b) Crie dois pontos sobre a circunferência: *A* e *B*;
c) Com a opção **segmento,** crie os segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$;
d) Com a opção Distância e Comprimento, meça os dois segmentos;
e) Marque e meça o ângulo $A\widehat{O}B$;
f) Movimente os pontos e anote o que está observando em relação às medidas do ângulo e dos segmentos.
g) Clicando sobre a circunferência, movimente-a e anote o que está observando em relação às medidas do ângulo e dos segmentos.

SESSÃO 02

Atividade 01

a) Com a opção **reta**, construa uma reta qualquer e nomeie-a de *r*;
b) Nomeie o ponto que aparece sobre *r* de *O*;
c) Novamente com a opção **reta**, clicando primeiro em *O*, construa uma reta qualquer e nomeie-a de *t*;
d) Marque e meça os quatro ângulos formados pelas retas;
e) Movimente as retas;
f) Qual a relação entre dois ângulos que estão um em seguida do outro;
g) Qual a relação entre dois ângulos que estão um oposto ao outro;

Atividade 02

a) Com a opção triângulo crie um triângulo qualquer e nomeie os vértices de *A*, *B* e *C*;
b) Marque e meça os ângulos internos desse triângulo;
c) Com a opção reta, crie uma reta sobre o lado *AC*;
d) Com a opção reta, crie uma reta sobre o lado *AB*;
e) Com a opção reta, crie uma reta sobre o lado *BC*;
f) Pelo ponto C, crie uma reta paralela ao lado *AB*;
g) Marque e meça todos os ângulos criados pelas três retas em que o ponto *C* é o vértice;
h) Com a opção **Comentário**, nomeie todos os ângulos da seguinte maneira: Os ângulos internos do triângulo de *a*, *b*, e *c* respectivamente aos vértices *A*, *B* e *C*; nomeie no sentido anti-horário os ângulos externos desse triângulo de *d*, *e*, *f*, *g* e *h*;
i) Escreva todas as relações que encontrar em relação aos valores dos ângulos apresentados na figura, inclusive sobre a soma de um ou mais ângulos.

Discussão:

a) É possível encontrar várias relações entre os ângulos apresentados. Você consegue justificar as relações que você enunciou no item *i* da atividade anterior?

SESSÃO 03

Atividade 01

a) Abra o arquivo: **Sessão 3 Atividade 1** que está em sua pasta;
b) Explore a figura;
c) Faça um comentário sobre o que está acontecendo com os ângulos internos desse triângulo.

Atividade 02

a) Abra o arquivo: **Sessão 3 Atividade 2** que está em sua pasta;
b) Explore a figura;
c) Faça um comentário sobre o que você está observando em relação aos ângulos e à soma dos ângulos.

Atividade 03

a) Abra o arquivo: **Sessão 3 Atividade 3** que está em sua pasta;
b) Explore a figura;
c) Anote o que está observando em relação aos ângulos e à soma dos ângulos.

Atividade 04

a) Abra o arquivo: **Sessão 3 Atividade 4** que está em sua pasta;
b) Explore a figura;
c) Anote o que está observando em relação aos ângulos.

Discussão:

a) Existe uma propriedade em relação à medida dos ângulos que está presente nas construções das atividades 1, 2 e 3. Você poderia enunciá-la?
b) Como você justificaria essa propriedade? Utilize argumentos matemáticos e principalmente o que já foi visto nas sessões anteriores.

SESSÃO 04

Atividade 01

a) Abra o arquivo: **Sessão 4 Atividade 1** que está em sua pasta;
b) Movimente os vértices do triângulo;
c) Qual a relação entre esses ângulos?

Atividade 02

a) Abra o arquivo: **Sessão 4 Atividade 2** que está em sua pasta;
b) Movimente os vértices do triângulo;
c) Qual a relação entre esses ângulos?

Atividade 03

a) Abra o arquivo: **Sessão 4 Atividade 3** que está em sua pasta;
b) Movimente os vértices do triângulo;
c) Qual a relação entre esses ângulos?

Discussão

a) Existe uma propriedade que está presente nas atividades 02 e 03. Você pode enunciá-la?
b) Com o auxílio do que foi visto na atividade 01 e nas sessões anteriores é possível provar a propriedade. Como você provaria matematicamente a propriedade que você enunciou no item *a*?

SESSÃO 05

Atividade 01

a) Abra o arquivo: **Sessão 5 Atividade 1** que está em sua pasta;
b) Movimente os pontos A e B, alternadamente;
c) Existe uma relação entre os ângulos. Você consegue enunciá-la?
d) Como você justificaria matematicamente essa propriedade?

Atividade 02

a) Abra o arquivo: **Sessão 5 Atividade 2** que está em sua pasta;
b) Movimente os pontos A, B e C, alternadamente;
c) Existe uma relação entre os ângulos. Você consegue enunciá-la?
d) Como você justificaria matematicamente essa propriedade?

Atividade 03

a) Abra o arquivo: **Sessão 5 Atividade 3** que está em sua pasta;
b) Movimente os pontos A, B e C, alternadamente;
c) Você consegue explicar matematicamente o que está acontecendo com o ângulo $\hat{C}$? Utilize os resultados das atividades anteriores.

SESSÃO 06

Atividade 01

a) Abra o arquivo: **Sessão 6 Atividade Única** que está em sua pasta;
b) Movimente os centros das circunferências, lembrando que durante a movimentação das duas circunferências tem que permanecer com a intersecção de dois pontos entre elas.
c) O que você pode afirmar sobre os pontos B, C e D? Existe alguma relação entre eles?
d) Caso tenha percebido alguma relação, como você justificaria matematicamente essa relação?