ANDERSON SOARES MUNIZ

UMA ANÁLISE DAS TÉCNICAS UTILIZADAS POR ALUNOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS DO PRIMEIRO GRAU, PROPOSTOS EM UM LIVRO DIDÁTICO DO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CAMPO GRANDE / MS
2010

ANDERSON SOARES MUNIZ

UMA ANÁLISE DAS TÉCNICAS UTILIZADAS POR ALUNOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS DO PRIMEIRO GRAU, PROPOSTOS EM UM LIVRO DIDÁTICO DO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada como exigência para a defesa e obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática, à Comissão Julgadora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, sob a orientação do Prof. Dr. Luiz Carlos Pais.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
CAMPO GRANDE / MS
2010

AGRADECIMENTOS

Acredito que uma das coisas que devem ser apreciadas no ser humano é o espírito de gratidão, e que às vezes está tão distante da correria da vida moderna, por essa razão dedico este singelo espaço para fazer alguns agradecimentos.

Agradeço primeiramente a Deus, autor da vida e de todo conhecimento que existe em nosso universo.

A minha amada esposa Janilce que durante este período de pesquisa sempre me incentivou e apoiou nos meus estudos, bem como seu carinho e dedicação nos momentos de conflitos e angustias.

A minha mãe Inês que sempre me disse: “meu filho estude”, uma forma de incentivo que me deu forças para prosseguir nesta caminhada.

Ao meu pai que sempre durante as madrugadas orou incansavelmente por um filho distante de casa, e que precisava de iluminação divina para cumprir com suas responsabilidades.

A meu irmão Claudionor e esposa, a minha irmã Vanessa e esposo que também acreditavam no esforço de um forasteiro longe de casa em busca de um pouco de conhecimento.

Aos familiares da minha esposa que me acolheram no seio de sua família e que torciam constantemente pelo meu sucesso acadêmico.

Ao meu orientador Luiz Carlos Pais, pela dedicação, ética, sabedoria, e conselhos precioso na construção deste trabalho.

Aos amigos que conquistei no Mestrado em Educação Matemática da UFMS, durante o período que estive envolvido nos estudos, também os colegas dos grupos de pesquisa, GETECMAT e GPHEME.

Aos professores do Mestrado e Banca Examinadora. E a todos os professores colegas de trabalho que compartilharam o desenvolvimento dessa pesquisa.

RESUMO

Nossa pesquisa procura descrever as praxeologias didáticas e matemáticas adotadas pelos alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, da Escola Municipal João Evangelista Vieira de Almeida. Refere-se à resolução de problemas retirados da coleção *Tudo é Matemática*, do autor Luiz Roberto Dante, os quais foram utilizados nas sessões de aplicação. Optamos por fazer análise da referida obra para nortear nossas reflexões quanto às técnicas que são sugeridas pelo autor e também estruturar nosso pensamento. Assim, a partir de uma análise de documentos, com tratamento praxeológico, buscamos responder à seguinte questão: *em que medida as práticas e os argumentos dos alunos na resolução de problemas, que podem ser resolvidos por meio de equação do primeiro grau, contribuem com o fazer matemática?* Na primeira parte do texto apresenta-se a trajetória pessoal do pesquisador e a construção do objeto de pesquisa. Na segunda parte, algumas noções da história das disciplinas escolares desenvolvidas pelo pesquisador André Chervel, e também as contribuições da Teoria Antropológica do Didático, desenvolvida por Yves Chevallard, que subsidiou as análises referentes às organizações didáticas e matemáticas. A terceira parte contém os procedimentos metodológicos adotados nesta pesquisa. Na quarta parte, encontram-se as análises praxeológicas das orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, do guia do Plano Nacional do livro Didático 2008, livro didático e produção dos alunos. Estão aqui, também, os objetos ostensivos e não ostensivos presentes nas atividades matemáticas selecionadas nas sessões de aplicação e, finalmente, as análises resultantes dos momentos de estudos que envolveram a produção dos alunos, dentre elas, a dimensão Antropológica Cultural e a inserção do estudo na atividade matemática.

Palavras-chave: Praxeologia. Organização Praxeológica. Momentos de Estudo.

ABSTRACT[1]

This research tries to describe the Didactical and Mathematical praxeologies adopted by the students who are in the last years of the Elementary School at Escola Municipal João Evangelista Vieira de Almeida. It refers to problem-solving exercises taken from the textbook collection *Tudo é Matemática* , by Luiz Roberto Dante, which were used during the application sessions. We decided to analyse these textbooks in order to guide our reflections towards the techniques that are suggested by the author and also to organize our thoughts. Through the analysis of the documents, within a praxeological approach, we attempted to answer the following questions: how may the student´s practices and arguments in problem-solving activities, the ones referring to linear equation contribute to the mathematical doings? The first part of the text shows the researcher´s personal trajectory, and the construction of the research object. The second part points out some notions about the history of the school subjects developed by André Chervel, and some contributions of the Anthropological Didactics Theory developed by Yves Chevallard, which supported the analyses about the didactical and mathematical organizations. The third one brings the methodological procedures of this study. The fourth part shows the praxeological analyses of the Mathematics National Curriculum Parameters, the 2008 National Textbook Policy, the textbooks and the student´s productions. The ostensive and non-ostensive objects in Mathematics activities selected by the application sessions are also presented here, and finally the analyses resulted from the moments of studying which involved the student´s productions, among them, the Cultural Anthropological dimension and the insertion of the studies in the Mathematics activities.

Keywords: Praxeology. Praxeological Organization. Moments of studying.

---

[1] AN ANALYSIS OF THE STUDENTS´ TECHNIQUES USED IN ALGEBRICAL LINEAR EQUATION PROBLEM-SOLVING ACTIVITIES PROPOSED BY A TEXTBOOK OF THE 7th GRADE AT AN ELEMENTARY SCHOOL.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

A álgebra, ao longo dos tempos, foi fundamental no desenvolvimento de técnicas para a resolução de problemas de Matemática. Sendo assim, constituiu-se um campo de conhecimento importantíssimo para resolver problemas em diferentes áreas. Nos últimos anos, evidenciou-se uma grande valorização do ensino proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, quanto à modelagem de problemas em uma linguagem algébrica. Mas com o início da Educação Matemática, por volta dos anos 80, cobra-se do professor um nível de clareza de suas próprias concepções, isto é, modos diferentes de ver a Matemática.

Com isso, ao ensinar a Matemática, o professor deve proporcionar ao aluno uma ampla visão dela mesma e de sua evolução. Assim, o estudo que aqui é realizado, serve como tomada de decisão e informação sobre essa ciência desprezada por muitos e entendida por poucos.

Pesquisas reconhecem a importância da álgebra, tanto no Brasil como no exterior e têm mostrado a pertinência do conteúdo equações do primeiro grau. A relação da atividade matemática com o surgimento da praxeologia, (praxeologia de acordo com o entendimento de Chevallard (2001) é formada pela junção das raízes emanadas de dois termos gregos, "práxis e logos", que significam, respectivamente, prática e razão) traz a tona novos modos de ver o ensino e a aprendizagem da Matemática. Vários pesquisadores em Educação Matemática (ARAÚJO, 2009; NOGUEIRA, 2008; CARVALHO, 2007) dentre outros, confirmam essa relação, bem como recorre a algumas noções da Teoria Antropológica do Didático (TAD), como elementos de análise da atividade matemática.

Durante a realização desta pesquisa, as discussões realizadas em sala de aula, nas disciplinas do mestrado, nos grupos de estudo e pesquisa, somadas à leitura de artigos, dissertações e teses da área de Educação Matemática colaboraram para a minha formação de professor-pesquisador. Inicialmente, a intenção foi ter uma visão geral do panorama atual do que é uma produção científica para, assim, encaminhar este trabalho. O que ocorreu, efetivamente, foi a compreensão da urgente necessidade de ler e reler, para textualizar a compreensão do que é pesquisar. Essas leituras e discussões serviram de sustentação para a escrita desta dissertação.

O objeto da presente pesquisa, não seria outro senão o já anunciado pelo próprio título desta obra, qual seja: Uma análise das técnicas utilizadas por alunos na resolução de problemas algébricos do primeiro grau, propostos em um livro didático do 7º ano do Ensino Fundamental.

A presente pesquisa foi dividida em três fases distintas, sendo a primeira referente à investigação nos documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática, um dos focos na busca de frases que valorizem a resolução de problemas e no Programa Nacional do Livro Didático PNLD (2008), das séries finais do Ensino Fundamental, para seleção de critérios de escolha da coleção do livro didático contemporâneo de Matemática. Na segunda fase, após a escolha da coleção, fizemos uma análise praxeológica do livro didático do 7º ano para selecionar os problemas utilizados nas sessões de aplicação. Na terceira fase, após a aplicação das sessões, analisamos a produção dos alunos para identificar elementos relacionados à cultura escolar presente na atividade matemática e, a ocorrência do estudo da mesma, associada aos momentos em que os alunos estão em sala de aula e, nos trabalhos extra classe, visto que permeiam a produção dos alunos na utilização dos diferentes registros de linguagem. Sob tais perspectivas, este trabalho apresenta-se assim organizado:

No capítulo 1, temos parte da trajetória pessoal e acadêmica, do mestrando Anderson, visto que essas experiências foram fundamentais para a construção do nosso objeto de pesquisa, porquanto as consideramos como conhecimentos prévios para a delimitação do tema, escolha de instrumentos, opções teóricas metodológicas para então, dar suporte às análises e às conclusões feitas.

No capítulo 2, na primeira parte, estão reflexões teóricas a respeito da história das disciplinas escolares, desenvolvidas pelo pesquisador André Chervel (1990), bem como o conceito de vulgata adotado no contexto deste trabalho e definido por esse teórico. Na segunda parte, temos as contribuições da Teoria Antropológica do Didático TAD, desenvolvida por Yves Chevallard (1992), com a contribuição dos pesquisadores em Educação Matemática Mariana Bosch e Josep Gascón, que defendem como objeto de investigação as práticas matemáticas no conjunto das instituições sociais.

No capítulo 3, o referencial metodológico que conduziu esta investigação é apresentado, e foram levantadas algumas justificativas referentes à pesquisa do tipo etnográfico, com a descrição dos instrumentos utilizados no transcorrer das sessões de aplicação e alguns procedimentos metodológicos adotados nesse contexto.

No capítulo 4, estão reunidas todas as análises feitas, divididas em três partes. A primeira destina-se às análises dos documentos oficiais PCN e o guia do PNLD (2008); a segunda parte destina-se à coleção do livro didático analisado e a terceira parte, refere-se à produção escrita dos alunos no transcorrer das sessões de aplicação.

As considerações finais trazem algumas sínteses e reflexões sobre as análises feitas e sobre as articulações entre a produção dos alunos sobre o ponto de vista da Teoria Antropológica do Didático como também da Cultura Escolar.

CAPÍTULO 1 - APROXIMAÇÃO COM A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

1.1 Trajetória pessoal

Sou natural de Porto Alegre – RS. Nasci no ano de 1976, portanto sou gaúcho de nascimento. Todavia, no ano de 1986, junto com meus pais e irmãos, mudamos para Ariquemes – RO. Assim, costumo dizer que sou rondoniense de coração, e sul-mato-grossense por opção, pois já estou em Campo Grande desde o ano de 2003.

Iniciei meus estudos, o antigo ensino primário, na escola Estadual Santa Rita de Cássia, periferia de Porto Alegre, precisamente no Bairro Morro Santa Tereza. Nesse local, deu-se meu encontro com a educação formal e, especialmente, com a Matemática.

Meu pai, operário da construção civil, exercia a profissão de armador[2], lidava diariamente com cálculos que envolviam área, volume, distância, comprimento, ângulos, circunferência e assim por diante. Por estar sempre em contato com esses conceitos matemáticos, ele fazia cálculos de cabeça, com uma velocidade surpreendente. Por essa razão, cobrava muito de nós, seus filhos, que deveríamos ter a tabuada na ponta da língua.

Confesso que não era o filho com melhor desempenho na escola, muito menos na disciplina de Matemática. Tive dificuldades com a memorização da tabuada, e meu pai, que não tinha tempo disponível já que, para sustentar a família, tinha uma rotina de trabalho intensa, apesar do horário apertado, gostava de tomar a tabuada dos filhos. Quando errávamos algumas respostas, tínhamos que estudar mais; entretanto, se acertávamos, ele ficava feliz.

Em 1985, o desaquecimento da construção civil fez com que meu pai ficasse desempregado durante todo o ano. Entretanto, ano subseqüente, foi seduzido por uma nova oportunidade de emprego: emigramos então para Rondônia. Nesse período, já havia terminado o primário, mas ainda tinha dificuldades com a leitura e com a escrita. Por ter estudado a tabuada exaustivamente, ao chegar à nova escola, resolvia com facilidade as continhas que a professora passava como tarefa.

[2] Armador é o operário que trabalha com as estruturas de ferragens, antigo ferreiro.

Vale lembrar que eu e meu irmão ganhamos bolsa de estudos de uma escola confessional, lugar onde, além de aprendermos os conteúdos escolares, recebemos também uma boa formação moral. Após isso, estudei em colégio público, no período noturno, cursando o antigo colegial. Durante o dia, trabalhava como mecânico de motos.

Em 1996, iniciei o curso superior em Ciências Físicas e Biológicas, licenciatura curta, na cidade de Ariquemes-RO. No mesmo ano, comecei a dar aulas de Ciências na rede Municipal de ensino, pois havia carência de professor e quem cursava uma faculdade era, automaticamente, contratado. Logo de imediato, surgiu uma oportunidade para ministrar aulas de Matemática; ofereci-me para trabalhar, pois o curso me autorizava a ministrar aulas de Matemática de 5ª até a 8ª série.

Como na faculdade o estudo voltado à didática da Matemática era inexistente, adotei, em minhas aulas, a metodologia assimilada dos professores que haviam trabalhado a referida disciplina em sala de aula enquanto eu era aluno. Sempre colocava os alunos para decorar a tabuada, fazer “contas de cabeça” e sem auxílio de papel e lápis, efetuar operações.

Os alunos, por sua vez, apresentavam dificuldades em resolver as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como os problemas que envolvessem essas operações. Surgiram angústias e eu perguntava a mim mesmo, se o ensino que eles receberam, havia sido insuficiente ou se realmente a Matemática era para poucos. Os alunos não tinham maturidade para resolver problemas porque não sabiam que operação utilizar?

Já em 1997, participei de uma semana de formação de professores e foi quando despertou-se em mim o interesse por entender tais angústias. O professor Scipione Di Pierro Netto proferiu uma palestra, ressaltando, várias vezes, que o professor deveria deixar de trabalhar com a Matemática do “porque sim” e, passar a justificar os conceitos matemáticos a seus alunos e, dessa forma, dar significado à aprendizagem.

Creio que, nesse instante, começou meu efetivo contato com a Educação Matemática. Em minha prática escolar, tentei, contudo, várias vezes, articular os conteúdos com suas definições, mas parecia que sempre me faltava alguma coisa para ensinar aos alunos. Surgiu então o interesse por cursar Licenciatura Plena em Matemática, necessidade pessoal de descobrir os “porque sim” da Matemática.

No ano de 2000, ingressei na Fundação Universidade Federal de Rondônia UNIR Campus Ji-Paraná, onde estudei muita Matemática, e foi nesse local e época em que mudei totalmente minha prática docente, metodologia, didática e maneira de olhar a Matemática. Isso, porém, não foi o suficiente, pois na graduação não tive disciplina voltada à didática da Matemática. Na referida instituição, encontrei professores altamente capacitados para ministrar as disciplinas da grade curricular. Convém ressaltar aqui, o trabalho do professor Marlos Albuquerque, pois sua prática, metodologia, paciência, ânimo e verdadeira dedicação ao curso, eram exemplos a serem seguidos.

Esse profissional discutia o papel do professor de Matemática, ou seja, do Educador Matemático, em sala de aula. A partir do momento em que me aproximei dele, fui contaminado por essa tendência mundial que prega a Educação por meio da Matemática e não simplesmente a Matemática pela Matemática.

Em particular, o ano de 2000 foi marcante, pois foi quando se deu meu casamento, e também, o ingresso de minha esposa como professora do curso de pedagogia. Nessa época, inúmeras vezes, eu ocupava posições antagônicas à minha prática docente, por ter sido sempre avesso a planejamentos detalhados das aulas, preenchimento de formulários, escrita e registro do que repassaria aos alunos. Muitos embates e discussões, no bom sentido, foram então aproximando-me da prática pedagógica.

Vale ressaltar que, durante todo esse ano, viajava aproximadamente 240 km, entre o Instituto Agroindustrial da Amazônia Ocidental (IAAMO) Mirante da Serra, e Fundação Universidade Federal de Rondônia (UNIR), Campus Ji-Paraná, para estudar. Duas vezes por semana tinha a companhia da esposa, que ministrava aulas no curso de pedagogia. Fazíamos esse trajeto de moto, com chuva, frio, calor, de segunda a quinta. Enfim, depois de um ano intenso e repleto de desafios, decidimos ir definitivamente para Ji-Paraná, para aproveitar melhor as aulas e dar um descanso para o corpo.

No ano de 2003, mudamos para Campo Grande-MS, onde continuei minha carreira de professor efetivamente no ensino médio. Em 2006, assumi três turmas de 5ª série, hoje 6º ano, e verifiquei que os alunos, apesar de serem de local distinto, outro estado e outra cidade, apresentavam as mesmas dificuldades que eu já conhecia desde quando iniciei minha carreira docente, no interior de RO. Tinha consciência dos desafios, mas o mais inquietante, ou seja, a maior divergência encontrada, foi que os alunos usavam um livro intitulado Educação Matemática, da autora Célia Carolino Pires, da editora Atual. A partir daí, propus-me a estudar com maior dedicação a Educação Matemática, tema sobre o qual já havia adquirido algum conhecimento prévio e superficial.

Cabe esclarecer que, na Rede Municipal de Ensino de Campo Grande (REME), temos semanalmente um horário de planejamento. No início, aproveitei esse tempo para trabalhar os conteúdos matemáticos segundo a proposta metodológica do livro, pois os colegas professores e os alunos não utilizavam o livro, embora muitos comentassem que aquilo que aparecia no livro não era Matemática; os pais reclamavam que não podiam ajudar seus filhos nas tarefas, que eram muito complicadas, ou seja, achavam o livro difícil.

Apesar de estar consciente das mudanças, não havia trabalhado com livros voltados para a Educação Matemática. Ressurgiram então várias inquietações referentes ao ensino e à aprendizagem de Matemática, já mencionados.

1.2 Construção do objeto da pesquisa

Essa etapa foi complicada, considerando a minha falta de maturidade no campo da pesquisa. Como iniciante, e candidato a mestrando, tinha em mente que, ao ter a oportunidade de ingressar no mestrado com uma intenção de pesquisa, a academia já estaria, de antemão, concordando com minhas idéias.

Quero retornar ao processo de seleção do mestrado, que aconteceu em outubro de 2006, com ingresso para a primeira turma do ano subseqüente. Ao ler o edital, fiquei surpreso, pois no modelo do concurso e dentre as provas tradicionais de ingresso havia a solicitação de intenção de pesquisa. Uma coisa que, para mim, era um tanto nova, pois os cursos de mestrado de outras instituições, os quais estava pesquisando exigiam o projeto pronto, com a apresentação de um roteiro de como esse projeto se desenvolveria.

Durante os meses de agosto e setembro, dediquei várias horas em busca de um tema de pesquisa. Li as bibliografias recomendadas no edital e confesso que várias dúvidas ainda pairavam em minha mente. Outros fatores que me auxiliaram na escolha do tema foram as discussões que tinha com minha esposa, que entendia um pouco da minha angústia e participava desse período tumultuado.

E entre essas idas e vindas, ela deu-me um direcionamento, pois acompanhava a minha docência e percebeu que seria possível utilizar-me das mudanças vivenciadas no último ano como professor na REME. Chegamos, então, ao seguinte tema: "Do arme e efetue aos problemas contextualizados: um estudo sobre a (revolução) do livro didático de Matemática da 5ª série do ensino fundamental".

Conforme comentado anteriormente, eu tinha conhecimento de que os livros didáticos haviam passado por mudanças significativas. Não sabia, porém, se isso era uma evolução dos livros didáticos, ou uma revolução do mercado livreiro. Não entendia como o Programa Nacional do Livro Didático PNLD podia ditar as novas regras para as editoras.

Fui aprovado no concurso, fiquei muito feliz e participei da fase final, que foi entrevista e análise do currículo. Não fui aprovado nessa fase e surgiram, então, muitas perguntas que ficaram sem respostas: disse algo errado na banca? Meu tema está totalmente deslocado? Ninguém se interessou pelo meu tema? Os outros que passaram tinham mais condições do que eu? Enfim, questionamentos que, comumente, surgem após alguma derrota.

Para minha surpresa, recebi uma ligação do professor Antônio Pádua, convidando-me para uma conversa, pois ele havia gostado do meu tema. Ao chegar à sala dele conversarmos um pouco. Vale lembrar que também estava presente na sala, o professor José Luís Magalhães de Freitas, que por sua vez, disse-me três palavras que marcaram aquela conversa. Falou-me de três sentimentos que o homem jamais deveria perder: a confiança, a esperança e a paciência. Saí de lá então, empolgado, para cursar uma disciplina como aluno especial e não desistir de fazer a tão necessária pós-graduação.

Durante o ano de 2007, cursei duas disciplinas como aluno especial, Didática da Matemática, ministrada pela professora Marilena Bittar, e Conceitos Fundamentais de Geometria, com os professores Luiz Carlos Pais e José Luiz Magalhães de Freitas, disciplinas essas que foram fundamentais na formação do meu entendimento do campo da pesquisa em Educação Matemática.

Participei, também, do Grupo de Estudos da Tecnologia Aplicada à Educação Matemática (GETECMAT), que discutia a inserção da tecnologia na prática de professores que ensinam Matemática, reunindo pedagogos e matemáticos. Nessas reuniões, aprendi, com as discussões, leituras e trocas de conhecimentos entre os colegas, a melhor maneira de utilizar a sala de informática, nas aulas de Matemática.

No ano de 2008, participei novamente do processo de seleção, mas, como já havia ouvido e aprendido muito, refiz minha intenção de pesquisa e escolhi um novo tema: "Resolução de problemas: uma análise da metodologia apresentada nos livros didáticos de Matemática*". Apesar de o tema ter recebido uma roupagem diferenciada, ainda exprimia a minha indagação anterior.

Fui aprovado, para minha alegria e também das pessoas que me incentivavam na caminhada. A maior surpresa foi quando soube quem seria o orientador, pois durante as aulas e a vivência na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), o professor Luiz nunca esboçara nenhuma manifestação positiva ou negativa referente às minhas idéias. Contudo, por ocasião da entrevista, quando ele me disse que tinha interesse, fiquei deveras surpreso. Ao ficar sabendo do resultado e da confirmação do orientador, conscientizei-me de que, a partir de então, iniciaria uma nova etapa na minha formação.

O trabalho teve início, e as primeiras orientações significaram, para mim, um momento particular, pois sempre havia tarefas, eu apresentava o que havia feito na semana anterior, discutia com ele. Nesse ínterim, definimos nosso objeto de estudo: "Problemas algébricos do primeiro grau como conteúdos de estudo em livros didáticos contemporâneos brasileiros". Esse seria, enfim, o meu intuito até a conclusão, mal sabendo eu, que a pesquisa é algo dinâmico pois ao estudar PCN e o guia do PNLD, deparava-me, constantemente, com uma palavra que me chamava a atenção, *desafio*. Essa palavra também aparecia nos livros dos quais já havia feito uma análise superficial.

Foi então que meu objeto recebeu um ingrediente a mais, tornando-se: "A resolução de problemas algébricos "desafiadores" do primeiro grau como conteúdo de estudo em livros didáticos contemporâneos brasileiros dos anos finais do ensino fundamental.” Para mim já estava de bom tamanho e daí, para a seleção dos problemas desafiadores, foi um pulo.

Passei a seguir religiosamente as orientações recebidas nas reuniões de toda quarta-feira e a participar das discussões sobre a pesquisa e o estudo do referencial teórico. Algumas noções discutidas pelo autor da teoria que adotamos, chamavam-me a atenção, e eu nem imaginava como utilizar o referencial, devido às inúmeras inquietações que tinha.

Sou grato ao meu orientador, pois mais uma vez, consegui traduzir os desassossegos que levava a cada uma das sessões de orientação. Ele sugeriu que fosse inserida nesse objeto a minha prática de sala de aula. Fui para casa pensando e acredito que ele também. No próximo encontro, ficou finalmente definido o objeto: “Técnicas utilizadas por alunos na resolução de problemas algébricos do primeiro grau, propostos nos livros didáticos dos anos finais do Ensino Fundamental”.

De posse do objeto já citado, passamos a refletir sobre como transformá-lo em algo que norteasse a nossa pesquisa. Foi então que optamos por analisar as tais técnicas implementadas pelos alunos. E foi daí que resultou o objetivo geral: "analisar as técnicas utilizas por alunos na resolução de problemas algébricos do primeiro grau, propostos em um livro didático do 7º ano do Ensino Fundamental”.

O objetivo continuava amplo, todavia, na tentativa de delinear melhor nossos passos quanto aos encaminhamentos da pesquisa, propusemo-nos a escrever os três seguintes objetivos específicos.

- Identificar e analisar, nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, ideias relativas à valorização do estudo de resolução de problemas nos anos finais do Ensino Fundamental;
- Analisar problemas algébricos propostos para serem resolvidos por meio de uma equação do primeiro grau em um livro contemporâneo brasileiro;
- Analisar as práticas e argumentos utilizados por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental na resolução de problemas algébricos do primeiro grau que estão propostos em um livro didático do 7º ano de Matemática.

A intenção de definir tais objetivos foi criar um apoio sólido, palpável e concreto, norteando, assim, o nosso objeto de pesquisa, além de identificar e analisar, nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, ideias relativas à valorização do estatuto de resolução de problemas. Ao analisar o estatuto de resolução de problemas nas resenhas que compõem o guia do livro didático, tivemos como propósito identificar se os livros didáticos, recomendados no guia do Livro Didático 2008, atendiam às orientações do PCN. E, em particular, na análise que dedicamos às técnicas desenvolvidas pelos alunos na atividade de resolução dos problemas algébricos do primeiro grau propostos em um livro didático do 7º ano.

Dessa forma, o objetivo foi entender se os problemas que podem ser resolvidos por meio de uma equação do primeiro grau fazem parte do cotidiano escolar, e se os problemas podem ser resolvidos por diversos tipos de técnicas aplicadas pelos alunos. Portanto, nosso interesse concentrou-se nas técnicas utilizadas pelos alunos, bem como na justificativa empregada na escolha de tais técnicas, ou seja, quais critérios eles elegeram para a resolução.

Cabe ressaltar que, no cenário capitalista, em que as editoras estão atentas às exigências do PCN e do guia do PNLD, nas últimas décadas, as coleções sofreram alterações, destacando-se, dentre elas, as diversas formas de representação de um objeto matemático, por meio de fotos, desenhos, gráficos etc.

1.3 Reflexões sobre a álgebra e a resolução de problemas

Pretendemos descrever em linhas gerais um pouco da história da álgebra. Nosso intuito aqui não é esgotar o tema em questão, mas sim comentar algumas fases. As origens da álgebra não podem ser precisadas, mas vários autores remetem o seu início à antiga Babilônia, onde havia ótimos matemáticos que desenvolveram um sistema aritmético avançado, com o qual puderam fazer cálculos algébricos, e isso pode ser comprovado na história da Matemática como também em relatos bíblicos. Desenvolveram um sistema que era capaz de calcular incógnitas, resolver equações. Entretanto não foram somente eles que se destacaram no estudo da Matemática, outros povos tiveram sua contribuição, podemos citar: Indianos, Gregos e Chineses do primeiro milênio (a.C).

Os primeiros artigos[3] registrados de álgebra foram achados no Egito em (2000 a.C), a partir dai acredita-se que o nome "Álgebra" surgiu do nome de um tratado escrito por Al-Khwarizmi, um matemático de origem árabe nascido na Pérsia por volta de 800 anos (d.C).

Outra discussão refere-se à melhor tradução da palavra álgebra, que hoje tem um significado mais amplo, mas que inicialmente era traduzida como a ciência das equações, o que para aquela época (800 anos d.C.), já era satisfatório. Acreditamos que esta tradução era aceita devido aos registros de várias equações ou problemas, que foram resolvidos por diversos povos e que estavam presentes nos papiros.

Logo 800 anos d.C. encontramos registros históricos da álgebra grega, alguns séculos depois, Diofanto usou uma abordagem paramétrica em seu trabalho com equações "diofantinas". Ele deu início ao simbolismo moderno introduzindo abreviações de palavras e evitando o estilo um tanto intrincado da álgebra geométrica.

> Num certo sentido a *Aritmética* é uma coleção de problemas de aplicação de álgebra, não um texto de álgebra. Nisso Diofante se assemelha aos algebristas babilônios; e sua obra é considerada "o mais belo florescimento da álgebra babilônica". Até certo ponto tal caracterização é injusta para com Diofante, pois seus números são inteiramente abstratos e não se referem a medidas de grãos ou dimensões de campos ou unidades monetárias, como no caso da álgebra egípcia e mesopotâmica. (BOYER, 1974, p. 134)

A influência deste algebrista foi realmente na ciência das equações, tanto é que ele descobriu um certo tipo de equações, que batizou com seu nome. Afastou-se da álgebra geométrica e resgatou os estudos dos babilônicos. Outra mudança era a indicação da adição por justaposição. A subtração era indicada colocando-se um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação, ou seja, ele estava criando uma notação própria, uma representação particular para as operações em questão.

Os chineses também tiveram sua parcela de contribuição, na álgebra, pois há registro de que eles tinham habilidade em resolver equações de graus até quatorze.

> De maior interesse histórico e matemático é o *Ssu-yüan Yü-chien* (Precioso espelho dos quatro elementos) de 1303. No século dezoito esse também desapareceu da China, sendo redescoberto somente no século seguinte. Os quatro elementos, chamados, céu, terra, homem, e matéria, são as representações de quatro incógnitas na mesma equação. O livro representa o

[3] Entende-se por artigo todo e qualquer registro escrito, em pele de animal, pedaço de madeira, cerâmica ou paredes de cavernas.

> ápice do desenvolvimento da álgebra chinesa, pois trata de equações simultâneas e de equações de graus até quatorze. (BOYER, 1974, p. 149)

Em diversas partes do mundo existe o registro de matemáticos que se dedicaram ao estudo da álgebra, todavia o povo germânico foi um dos que se destacaram.

> Na Alemanha, por exemplo, os livros sobre álgebra foram tão numerosos que durante algum tempo a palavra germânica *coss* para a incógnita triunfou em outras partes da Europa, e o assunto ficou conhecido como "arte cóssica". Além disso, os símbolos germânicos para adição e subtração acabaram substituindo os p e m italianos. (BOYER, 1974, p. 205)

Não foram somente os germânicos que se dedicaram ao estudo da álgebra, ou ao florescimento deste estudo, os italianos tiveram também grande contribuição, devido a sua facilidade de manipular trabalhos numéricos através do sistema de numeração indo-arábico. Com a invenção da imprensa de tipos móveis[4], acelerou-se a padronização do simbolismo. Cidades comercialmente fortes surgiram na Itália, e foi lá que o renascimento algébrico na Europa, efetivamente, teve início.

Não podemos esquecer de que já eram passadas algumas fases distintas que contribuíram para a comunicação entre os povos:

> Em 1842 G.H.F. Nesselmann caracterizou, com propriedade, três estágios no desenvolvimento da notação algébrica. Primeiro se tem a *álgebra retórica* em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou sem símbolos específicos. A seguir vem a *álgebra sincopada* em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais freqüentemente. Finalmente chega-se ao último estágio a *álgebra simbólica* em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada por símbolos que aparentemente nada tem haver com os entes que representam. (EVES, 2004, p. 206)

Esse desenvolvimento nas respectivas fases traz algo muito particular em cada uma delas: *o retórico* (ou verbal), o *sincopado* (no qual eram usadas abreviações de palavras) e o *simbólico*. No último estágio, a notação passou por várias modificações, até tornar-se razoavelmente estável. É interessante notar que, mesmo com esses avanços, ainda hoje não há total uniformidade no uso de símbolos. Em alguns países existem algumas variações de símbolos, "÷" significa "menos".

[4] Gutenberg foi o primeiro europeu a usar a impressão por tipos móveis, por volta de 1439, e o inventor global da prensa móvel. Entre suas muitas contribuições para a impressão estão: a invenção de um processo de produção em massa de tipo móvel, a utilização de tinta a base de óleo e ainda a utilização de uma prensa de madeira similar à prensa de parafuso agrícola do período.

Por mais que no corpo do texto não tenha sido falado da importância da álgebra na educação básica, existe uma grande valorização do ensino, proposta no PCN de Matemática. Assim, o ensino da Matemática deve transmitir ao aluno uma visão ampla da mesma e de sua evolução.

Dentro desse contexto a álgebra torna-se fundamental, como espaço de abstração e generalização, além de contribuir com a resolução de problemas. Desse modo, o papel do professor seria o de possibilitar ao aluno reconhecer diferentes funções da álgebra, Em nossa pesquisa pretendemos discutir quais as técnicas são desenvolvidas pelos alunos ao representar um problema por meio de equações do 1º grau e como eles resolvem esses problemas. Acreditamos que os alunos devem perceber que a manipulação algébrica pode facilitar na resolução de determinados problemas.

O estudo realizado por Araújo (2009) que tem como título: "O ENSINO DE ÁLGEBRA NO BRASIL E NA FRANÇA ESTUDO SOBRE O ENSINO DE EQUAÇÕES DO 1º GRAU À LUZ DA TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO" traz algumas reflexões sobre o ensino da álgebra, e podemos verificar no extrato a seguir:

> Chevallard (1984) explica que já faz algum tempo que existe uma retórica que se esforça para colocar a álgebra como um prolongamento da aritmética, pondo uma em oposição à outra. Essa retórica é bem identificada em livros didáticos, quando se verifica que determinados autores adotam uma abordagem didática de propor um problema de aritmética, a ser resolvido inicialmente por procedimentos aritméticos e, logo em seguida, também por um procedimento usando álgebra, que é apresentado como um meio mais eficaz e econômico de resolvê-lo. Geralmente, a resolução desse tipo de problema por meio algébrico começa com a escrita das relações explicitadas entre os dados conhecidos e os valores desconhecidos (escrita da equação), a qual é tratada com a ajuda de procedimentos específicos (técnicas) adotados para encontrar a solução. (ARAÚJO, 2009, p. 50-51).

Veja que o educador Araújo, acima citado, literalmente buscou entendimento do assunto, citando Chevallard (1984), quanto à relação da aritmética com a álgebra, e as suas interfaces. Explicou com bastante propriedade sobre o entendimento de diversos doutrinadores matemáticos, que buscam qualificar a álgebra como um seguimento da aritmética.

Araújo complementa, citando novamente Chevallard:

> Chevallard (1984) argumenta que a abordagem apoiada na retórica de ensino em torno da dialética do velho (aritmética) e do novo (álgebra), cujos procedimentos algébricos são utilizados para resolver problemas que podem ser resolvidos por processos aritméticos, faz com que, num

> primeiro momento, "a álgebra se oponha à aritmética por uma propriedade que lhe dá uma potência superior". No entanto, num segundo momento, "a álgebra aparece, positivamente, como o complemento da aritmética" na medida em que ela se apresenta como um "instrumento superior para uma tarefa semelhante". Esse poder da álgebra elementar faz com que ela receba novas denominações, tais como "aritmética universal" ou, ainda, "aritmética generalizada". (ARAÚJO, 2009, p. 51).

Entendemos que tais pesquisadores estão propondo uma relação direta entre a álgebra e a aritmética e isto já pôde ser verificado no resgate histórico que fizemos anteriormente. A álgebra tem um papel importante na Matemática. Esperamos que a Educação Matemática, melhor, os educadores matemáticos tenham clareza quanto à necessidade de inter-relacionar a álgebra e a aritmética e que, além disso, assumam um papel decisivo para melhoria do ensino.

No que concerne ao ensino de álgebra, um estudo realizado em livros didáticos brasileiros, anteriores ao ano de 1960 sobre o ensino da álgebra, afirma que:

> Desde seu aparecimento no Brasil, que ocorreu por volta de 1799, o ensino de álgebra enfatiza as regras de transformações de expressões algébricas e de resolução de equações, por meio de procedimentos que conduziam a uma aprendizagem "mecânica", visando à resolução de problemas. Nesse período, segundo esses pesquisadores, o ensino de matemática era compartimentado em três domínios (aritmética, álgebra e geometria), em que o ensino da álgebra era justificado como uma ferramenta útil para resolver equações e problemas práticos e teóricos.
>
> Na década de 1970, com o surgimento do movimento da matemática moderna, a abordagem do ensino de matemática, em particular, o ensino de álgebra, primava pelo rigor, com grande atenção aos aspectos lógico-estruturais dos conteúdos e à precisão da linguagem. Com isso, o ensino de álgebra como uma ferramenta para resolver problemas teóricos e práticos deu lugar a uma concepção de álgebra como um objeto próprio de estudo, isto é, enfatizava-se a linguagem da teoria de conjuntos nos enunciados dos objetos da álgebra (definições e propriedades) e nos procedimentos de cálculo algébrico. (MIGUEL, FIORENTINI E MIORIM 1992, p. 41-42).

Miguel Fiorentini e Miorim ensinam que o acontecimento do ensino da álgebra no Brasil ocorreu em 1799, ocasião em que entendiam e enfatizavam uma transformação na expressão algébrica em equações, proporcionando uma aprendizagem mecânica, a qual visava à resolução de problemas matemáticos.

Miguel, Fiorentini e Miorim (1992, p. 40) apud Araújo (2009) explicam que:

> Após o período da matemática moderna, o ensino de álgebra começa a retornar às suas origens e passa a ser novamente justificado nos programas de ensino como uma ferramenta para resolver equações e problemas, mas sem deixar de lado o seu aspecto enquanto objeto do conhecimento. Porém, segundo esses autores, por falta de uma maior atenção por parte de educadores e pesquisadores ao estudo da álgebra, grande parte dos professores ainda ensina os conteúdos algébricos "de forma mecânica e

> automatizada, dissociada de qualquer significação social e lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões. (MIGUEL, FIORENTINI E MIORIM, 1992, p. 40)

Na mesma vertente, Nogueira (2008) apresenta o ensino da álgebra como “uma linguagem diferenciada e sofisticada, que possibilita o desenvolvimento de procedimentos capazes de resolver problemas que não são factíveis por meio da mobilização de raciocínios e operações aritméticas”. Tal pesquisadora propõe que:

> Concluímos assim, o conceito do valor existente em apresentar a Álgebra, tecendo o texto de maneira que oportunize o entendimento por parte do educando de todas estas diferenças entre a Álgebra e a Aritmética, bem como na proposição de atividades e exercícios resolvidos, visando administrar a passagem da Aritmética para a Álgebra de maneira clara e objetiva, na tentativa de minimizar as dificuldades geradas no aprendizado deste bloco do saber matemático, atribuindo maior significado aos conceitos. Essa passagem tem sido fruto de muitas pesquisas e representa um ponto importante para quem se dedica a investigar questões relativas à introdução da Álgebra no Ensino Fundamental, [...] (NOGUEIRA, 2008, p. 20)

Podemos concluir que todos os pesquisadores citados anteriormente, dedicaram-se a discussões que envolveram as dificuldades da utilização da álgebra, dos conceitos algébricos na resolução de problemas. Por outro lado, os diferentes pontos de vista, isto é concepções dos professores, interferem na apresentação do conteúdo matemático, ou seja, a prática da sala de aula está relacionada com os conhecimentos de cada professor.

1.3.1 Resolução de problemas

Na pesquisa de Coelho (2005), são levantados algumas concepções sobre a resolução de problemas. Inicialmente é destacado a tese de doutorado de Fiorentini (1994), “As tendências pedagógicas de ensinar Matemática no Brasil no decorrer da História”. E dentre todas as tendências é feito um destaque para a resolução de problemas. Segundo Fiorentini (1994), *apud* Coelho (2005, p. 10), pressupõe que "problema é uma situação para qual não conhecemos um algoritmo ou meio seguro para conduzir a resolução". Em seguida Coelho (2005), destaca os modos de apresentar a resolução de problemas segundo alguns autores, Schroeder & Lester (1985)[5], e então

[5] SCHROERDER & Lester *apud* Coelho (2005). **“Ensinar sobre a resolução de problemas, ensinar a resolver problemas, ensinar Matemática através da resolução de problema**s”. Apresentou a resolução de problemas como uma exigência cognitiva imprescindível na aprendizagem e elaborou um método para ensinar os alunos a aperfeiçoarem as técnicas de resolução. Contribuiu também para o renascimento da heurística, que estuda os métodos e regras que conduzem à descoberta e à invenção. (COELHO, 2005, p. 32)

discorre sobre os trabalhos de vários pesquisadores Polya (1978)[6]; Shoenfeld (1978); Lakatos, (1978); Kilpatrick, (1987); Vergnaud, (1988); Caraça, (1989); e Moisés, (1999 [3]).

Podemos também destacar os trabalhos desenvolvidos por Onuchic (1999) apud Coelho (2005, p. 50-51), que defende uma concepção da resolução de problemas:

> Colocando o foco em Resolução de Problemas, defendemos que o ponto de partida das atividades matemáticas não é a definição, mas o problema; que o problema não é um exercício no qual o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou determinada técnica operatória; que aproximações sucessivas ao conceito criado são construídas para resolver um certo tipo de problemas e que, num outro momento, o aluno utiliza o que já aprendeu para resolver outros problemas; que o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; que a Resolução de Problemas não é uma atividade para ser resolvida em paralelo ou aplicação da aprendizagem, mas como orientação para a aprendizagem. (ONUCHIC, 1999, p. 215)

Para esta pesquisadora, o envolvimento dos alunos e professores com a resolução de problemas deve ser o mais natural possível, sendo criado um ambiente de aprendizagem e descoberta, pois quando o aluno está resolvendo um determinado problema recorre a técnicas ou problemas similares, isto é, problemas da mesma família, que de certa forma envolvem os mesmos conceitos matemáticos.

Nosso objetivo aqui não é criar uma nova concepção do que seja resolução de problemas, nem muito menos discutir qual é a melhor definição, isto já foi feito por Coelho (2005). Também não pretendemos defender o pensamento de um, ou vários teóricos, como já foi dito anteriormente.

Para nós, um problema é uma tarefa apresentada em forma de texto, isto é, que contenha um enunciado que seja entendível pelos alunos, e os motive para encontrar uma técnica eficaz para resolvê-lo. Todas as tarefas, ou problemas, nós retiramos do livro didático em estudo. Sendo assim consideramos o termo tarefa sinônima de problema e definiremos em momento oportuno o que é tarefa.

---

[6] O momento da problematização é um momento especial no processo de criação científica e portanto da aprendizagem. É nele que se dá o salto de qualidade no pensamento, e nele que se expõe toda capacidade criativa do homem, e a partir dele que se cria conceito.[sic]

CAPÍTULO 2 - REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 A História das Disciplinas Escolares

O destaque que faremos neste trabalho, referente à noção de cultura escolar e, mais particularmente, às noções de vulgata e disciplina escolar, propostas por André Chervel (1990), apoia-se na aplicabilidade de tais conceitos à pesquisa sobre Educação Matemática. Tais noções estão interrelacionadas com as instituições em estudo, uma vez que existe a preocupação com a componente histórica e cultural estudada por esse autor, bem como, discussões feitas, por Pais (2008), em um grupo investigativo voltado também para essa temática, que decorre da possibilidade de aplicá-las em pesquisas que tenham como objeto o ensino da Matemática.

A noção de vulgata adotada, defendida por Chervel (1990) e reescrita por Pais (2008), ressalta a existência de um conjunto de conhecimentos, práticas e normas de conduta inseridos na dimensão histórica e cultural de uma disciplina escolar. Ou seja, na escola, não existem somente os currículos prescritos e os ensinados, mas também o oculto, que está em concomitância com as ideias desse teórico, bem como os aspectos sutis que não estão presentes nos livros, muito menos nos documentos oficiais, mas que estão presentes na escola e que tomam forma de acordo com a vulgata que se apresenta no momento em que as praxeologias estão efetivamente interagindo entre si.

Por mais que a noção de vulgata não esteja presente em documentos oficiais, muito menos nas coleções de livros didáticos, essas reflexões das práticas escolares referentes às tradições, ideologias, postura e vida escolar são propícias, pois, ao estudar a cultura escolar, pretende-se entender por que a resolução de problemas está tão presente no ensino da Matemática, bem como na história das disciplinas escolares.

Segundo Chervel (1990) a Pedagogia está intimamente ligada aos ensinos escolares, assim como as disciplinas escolares às ciências. Cabe a ela, portanto, simplificar ou, na verdade, vulgarizar os conhecimentos que não podem ser apresentados na íntegra. A tarefa dos pedagogos consiste em criar métodos para que os saberes sejam assimilados de forma fácil e rápida. Surgem, então, termos como pedagogia-lubrificante e disciplina-vulgarização, que dão a ideia de que os pedagogos devem criar metodologias que se encarregam de fazer a máquina funcionar, ou seja, transformar conhecimentos em saberes.

Surge, ainda, um paradoxo: as “disciplinas” não são mais do que combinações de saberes ou métodos pedagógicos. Por outro lado, existe uma separação entre as intenções anunciadas ou as grandes ideias pedagógicas e as práticas. Diante disso, Chervel (1990) propõe que a escola não se define por uma função de transmissão de saberes ou de iniciação às ciências de referência. Ela ensina, sim, uma combinação de conceitos, mais ou menos encadeados entre si, surgindo daí três resultados que impedem a análise histórica como matéria de vulgarização científica.

Primeiro, a escola cria seus próprios conteúdos; segundo, o conhecimento não faz parte do seu cotidiano; terceiro, os métodos pedagógicos são postos em ação para transformarem os ensinos em aprendizagens.

Vale lembrar que existe uma lacuna grande entre os saberes ensinados e os saberes eruditos, podendo-se destacar a preocupação dos didáticos da Matemática com a distância entre estes.

A função da escola, para alguns pesquisadores, segundo Chervel (1990, p. 182), seria: "Escola como puro e simples agente de transmissão dos saberes elaborados fora dela na cabeça dos cientistas ou acadêmicos. Por mais que se esforce, não consegue desenvolver um progresso na ciência".

A ideia deste trabalho não compartilha com tais noções, e sim com o posicionamento de Chervel (1990), uma vez que dentro da instituição escolar existe uma produção, que garante que a escola pode fazer ciência dentro de sua esfera de atuação. Essas ideias podem ser acatadas, porém sem que se abandone a certeza de que ela se recusa e expulsa as imposições da comunidade acadêmica, política ou científica, não por incapacidade, mas sim como a maneira de adequar-se a seu papel, que não é aquele a ela imposto.

Sendo assim, olhando-se por esse ângulo de a Escola ter produção, não sendo um mero aparelho ideológico do Estado, uma vez que desenvolve práticas e saberes escolares, isto é, cria os seus próprios conhecimentos. Grande parte dessa criação é realizada por educadores e pedagogos.

Os procedimentos pedagógicos adotados por uma instituição escolar, sejam eles referentes às práticas ou metodologias, seguem uma lógica que está inserida nos aspectos culturais de determinada disciplina escolar. Assim, não se pode conceber a Matemática sem que se considere a resolução de problemas como uma vulgata predominante na cultura matemática. Por essa razão, acreditamos que a valorização dessa metodologia de ensino está cada dia mais emergente. Torna-se evidente que, para se ensinar qualquer disciplina escolar, faz-se necessário um planejamento bem definido, que dê sustentação ao estudo ou aos temas de estudo sobre cujos elementos há de se discutir aqui.

2.1.1 Temas de Estudo

Em qualquer esfera do conhecimento, dentro de suas particularidades, há que se considerar os temas de estudo como os conteúdos específicos do saber em jogo, seja ele matemático ou não, isto é, esse saber servirá de condutor para um conhecimento particularizado de um tema de estudo específico que, para efeito deste estudo, esteja localizado na análise das equações do primeiro grau. O professor, ao ensinar este ou aquele tema, sujeita-se à escolha das estratégias, metodologias e procedimentos para conduzir sua prática.

Nesse sentido, o domínio deste tema está subordinado ao professor como sujeito do processo de ensino e aprendizagem e vinculado à instituição escolar, que lhe outorga o poder de ministrar ou transmitir tais conhecimentos. Temos, ainda, que considerar que todas as demais instituições, documentos, livros, alunos e pais concedem ao professor uma autoridade sobre o tema que ele está abordando na sala de aula. E este, por sua vez, dentro de sua esfera de atuação, recorre, mesmo sem se dar conta, à vulgata emergente da temporalidade em que está inserido.

Por esse motivo, acredita-se que, ao ensinar uma técnica para resolução de uma equação do primeiro grau, o professor vincula-se à lógica interna da Matemática; não dá para ensinar equações sem, antes, trabalhar os pré-requisitos mínimos, entre os quais, podem-se destacar as operações inversas, a propriedade distributiva da adição e a multiplicação.

Partindo desse pressuposto, na análise da lógica interna de uma vulgata, elaborada neste trabalho, concorda-se com Pais (2008), quando ele define:

> Na estrutura dos temas específicos da disciplina, o historiador dirige o seu olhar mais diretamente para os temas específicos e, nesse domínio, identifica uma outra componente da *vulgata* que é a existência de uma **seqüência ou uma ordem** a ser criteriosamente observada na condução dos estudos. Existe uma estrutura lógica referentes aos temas de estudos e aos assuntos componentes desse tema. Nos livros didáticos, essa seqüência aparece nos capítulos que são separados e numerados numa ordem a ser seguida. Observar essa ordem de maneira criteriosa é uma condição muito presente no ensino da matemática, onde o encadeamento dos pré-requisitos se faz presente com muito mais intensidade. (no prelo) (PAIS, 2008, p. 04)

Em uma análise inicial dos livros didáticos contemporâneos brasileiros, pudemos identificar essa sequência ou ordem, que Chervel (1990) defende e que é muito bem lembrada por Pais (2008). Ressaltamos aqui que as coleções recomendadas estão direcionadas a uma exigência imposta pelo guia do PNLD e que algumas se dedicam a sistematizar os conteúdos, outras deixam a cargo do professor e outras ainda mesclam a sistematização dos conteúdos matemáticos com as atividades de aplicação e aprofundamento. Diante disso, consideramos esse fenômeno como uma vulgata presente na cultura escolar dos livros didáticos de Matemática.

Reiterando, para se ensinar qualquer disciplina escolar, faz-se necessário um planejamento bem definido que subsidie o estudo ou temas de estudo. A partir de agora, comentaremos sobre alguns elementos que constituem a vulgata na sala de aula.

2.1.2 Os Exercícios na Vulgata

Para Chervel (1990, p. 204), "Se os conteúdos explícitos constituem o eixo central da disciplina ensinada, o exercício é a contrapartida quase indispensável". Isso significa dizer que dentro da vulgata própria da Matemática não há como aprendê-la sem que haja um momento da aula em que o aluno resolva alguns exercícios, seja em classe ou que os leve para serem resolvidos em casa.

Portanto, cabe ao professor propiciar essa interação entre a disciplina de Matemática e a qualidade dos exercícios. Chervel (1990, p. 204) refere, também, que "A inversão momentânea dos papéis entre o professor e o aluno constitui o elemento fundamental desse interminável diálogo entre gerações que se opera no interior da escola". Essa particularidade é útil para aprender ou ensinar Matemática através da resolução de exercícios, ou mesmo para a fixação de um determinado conteúdo matemático. Para Chervel (1990, p. 204) "Sem o exercício e seu controle não há fixação possível de uma disciplina", o que nos permite entender que, para aprender um determinado tema de estudo, há necessidade da resolução de exercícios.

Para Chervel (1990, p. 204) "exercício é toda a atividade do aluno observável pelo mestre". Se consideramos essa premissa como verdadeira, em contrapartida teremos que observar que existem diferentes exercícios. Podemos até dizer, que um problema de álgebra pertence a uma classe diferente de exercícios, se o compararmos com um exercício em que é solicitado ao aluno que efetue uma operação de adição. Diferentemente de efetuar uma adição, um problema de álgebra pode exigir do aluno que desenvolva deduções, generalizações, criatividade, enfim mais conceitos matemáticos e também habilidades específicas para sua resolução.

2.1.3 Escala Qualitativa de Exercícios

Ressaltamos, ainda citando Chervel (1990, p. 204), que "Os exercícios podem (...) ser classificados em uma escala qualitativa e a história das disciplinas descobre uma tendência constante que elas apresentam a melhor posição de suas baterias de exercícios". Essa tendência está enraizada nas práticas disciplinares, que valorizam as baterias de exercícios, e pode ser verificada tanto nos livros didáticos contemporâneos, quanto nos livros didáticos mais antigos, fato que discutiremos mais adiante.

Existe uma hierarquia entre os diferentes exercícios típicos da disciplina escolar. O termo exercício, tal como utiliza Chervel (1990), não deve ser concebido somente com os exercícios de Matemática do tipo repetitivo. Existe uma diferença qualitativa entre as noções de problema e exercício no sentido em que o segundo está mais voltado para o treino, enquanto o problema assume um papel mais ativo, sendo dentro de uma escala qualitativa o ocupante das primeiras posições.

Quando se ensina a técnica de somar frações com o mesmo denominador, normalmente se propõe uma lista de exercícios para que o aluno possa treiná-la, a de considerar que existem outras frações que podem ser somadas, podemos exemplificar a adição de duas frações com denominadores diferentes, com números mistos e cada uma dessas operações necessita de uma maneira diferente para resolvê-la. Sendo assim, assumimos as concepções de Chervel (1990) quanto a uma escala qualitativa dos exercícios. Para ampliar este debate referente às noções indicadas por Chervel (1990), iremos discutir algumas noções propostas por Chevallard (1999).

2.2 Teoria Antropológica do Didático

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) nasceu por volta de 1980, em concomitância com a teoria da Transposição Didática. Essa última, durante muitos anos, foi alvo de diversas interpretações e recebeu críticas[7] por diversos pesquisadores ao redor do mundo, o que obrigou o autor, na segunda edição do livro, Transposição Didática, a expor um denso posfácio, onde responde às polêmicas que sua obra causou na comunidade científica ou entre os didatas de plantão.

A TAD tem como tema central o estudo e o ensino do conhecimento matemático. As pretensões de Yves Chevallard consistiam em expandir o conceito de praxeologia[8], bem como a especificidade do conhecimento matemático e sua difusão.

Ao dedicar-se a desenvolver a noção de praxeologia, esse teórico vislumbrou uma dimensão antropológica da Matemática e, para isso desenvolveu três postulados, sendo eles:

> 1. Toda prática institucional pode ser analisada, sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente bem delineadas;
> 2. O cumprimento de toda tarefa decorre do desenvolvimento de uma técnica;
> 3. A ecologia das tarefas, quer dizer, as condições e restrições que permitem sua produção e sua utilização nas instituições. (BOSCH, CHEVALLARD, 1999, p.80-82) [Tradução nossa]

Dessa maneira, situou-se a Matemática dentro das instituições envolvidas no processo de estudo, na tentativa de entender a atividade humana. Com esses postulados, foi possível conceber tal teoria e, segundo nosso entendimento, em quaisquer instituições existem vários problemas ou tarefas para serem resolvidas, e para resolvê-los faz-se necessária a utilização de uma técnica, estamos considerando a palavra técnica segundo Chevallrd (2001) "jeito de fazer" ou Almouloud (2007) "maneira de

---

7 Entre elas destacamos o trabalho de Caillot (1996), que discute a validade e amplitude da teoria da transposição didática, esse autor por sua vez baseou seu trabalho nas ideias de Martinand (1982, 1986), que considera a transposição didática como problemática; para ele essa teoria teria um domínio de validade limitado, somente nas matemáticas.

8 A praxeologia é uma ciência ou um ramo de conhecimento sobre a actuação eficiente (Dzida, 1987; Pszczolowski, 1967), a teoria geral da actuação eficiente (Kotarbinski, 1969; Pszczo-lowski, 1978), a ciência sobre as condições da eficiência da actuação (Zieleniewski, 1978, 1979), o estudo geral da actividade racional (Gasparski, 1988), ou, como escreveu Tadeusz Kotarbinski (1975) «... uma ciência sobre a eficiência da actividade humana»

fazer", que é particular de cada indivíduo sendo, não necessariamente, a utilização de um algoritmo ou um procedimento metódico.

Para analisar a escolha de uma técnica, há de se considerar o contexto em que o indivíduo está inserido, quais influências ele recebe, sendo assim a escolha da técnica de certa forma está em concomitância com a prática institucional que varia de acordo com o ponto de vista de cada um. Também há de se considerar que cada tarefa ou tarefas se relacionam diretamente com a escolha da técnica, isto é, as condições e necessidades que permitem a utilização ou produção dentro das instituições, Chevallard (1999) as considera como uma necessidade ecológica.

O papel do pesquisador é organizar a produção individual, isto é, técnicas individuais ou coletivas que são utilizadas para resolverem tarefas, dentro de um contexto social, considerando, assim, sua interação com as instituições envolvidas no estudo.

E, para analisá-las, Chevallard (2001) leva em consideração os modelos epistemológicos que surgem de problemas particulares do ensino da Matemática, isto é, problemas específicos da própria Matemática. Inicialmente, a preocupação foi com a Organização Matemática (OM) e com a Organização Didática (OD), que serão descritas mais adiante.

Ao propor tal teoria, o autor estava pensando em algo mais amplo, que pudesse situar o saber matemático dentro de um contexto antropológico. Assim, Chevallard (2007) destaca nove níveis de determinação do saber, sendo eles: *civilização, social, escolar, pedagógico, disciplinar, domínio de estudo, setor, tema de estudo e questão de estudo*. Em sua abordagem antropológica, cada um desses níveis segue uma hierarquização, delimitando, dessa forma, o espaço de atuação docente.

Antes de efetivamente exemplificarmos os níveis de determinação do saber, queremos destacar as ideias de Kunh (1969) Este autor defende que é impossível fazer um trabalho de pesquisa epistemológica sem levar em conta a história. Partindo do princípio de que a epistemologia é o conhecimento filosófico das ciências, e que trata da evolução dos conceitos, mais precisamente a "história dos conceitos", ou seja, a história contextualiza os saberes, os fatos em suas diferentes épocas.

Ao partirmos desse pressuposto, estamos entendendo que Chevallard (2007), ao propor a civilização como primeiro nível de determinação do saber, está apoiado nos pensamentos de Kunh (1972), pois as diversas civilizações, entre elas, podemos destacar Egípcia, Indiana, Grega, Chinesa dentre outras, ao longo dos tempos produziram Matemática, que serviram de certa forma para atender a uma necessidade social, que é o segundo nível. No nível escolar podemos considerar todas as atribuições que a escola tem referente ao seu funcionamento, podemos citar as reuniões de pais e mestres, os demais profissionais envolvidos no sistema de ensino, coordenadores, diretores dentre outros. Quanto ao nível pedagógico podemos destacar o livro didático que de certa forma influencia as práticas pedagógicas do professor e também a aprendizagem dos alunos.

No nível disciplinar, estamos considerando a disciplina escolar de Matemática no contexto do nosso trabalho, a Matemática das séries finais do Ensino Fundamental, e também os domínios de estudo, em conformidade com o PCN, destacados por Pais (2008) e entendidos como: medidas, geometria, álgebra, aritmética, análise combinatória, estatística e probabilidade.

Por sua vez, cada um desses domínios se subdivide em setores e, no caso do setor algébrico, estão presentes: produtos notáveis, equações, sistemas de equações, expressões algébricas e inequações, entre outros. Cada um desses setores interliga-se a temas específicos e, no caso das equações, tem-se: equações do 1º grau, equações do 2º grau, equações do 3º, equações biquadradas, e assim por diante. Chega-se, então, ao nível mais elementar proposto por Chevallard (2007), o que não significa que é um nível menos importante, mas que engloba várias questões referentes a um tema de estudo. Por sua vez, essas questões agregam vários tipos de tarefas, que remetem a diversas tarefas.

Para Chevallard (2001, p. 50), "um aspecto essencial da atividade matemática consiste em construir um modelo (matemático) da realidade que queremos estudar", ou seja, não dá para estudar Matemática sem pensar em modelos que permitam interpretar, analisar e descrever as questões ou conceitos que estão ligados ao saber matemático. Ressaltamos que a atividade matemática é específica do ser humano e que ele, por sua vez, na busca do conhecimento matemático, realiza uma atividade de modelagem matemática, sobre a qual, a seguir e à luz da teoria, serão feitas algumas considerações.

2.2.1 Atividade Matemática

Sabe-se que existe uma busca incessante da praticidade da Matemática, de sua utilidade e aplicação, o que nos remete a Domingues (1998, p. 01) autor que diz:

> Nos anos 60, foi a “matemática moderna”, que buscou soluções no formalismo e nas estruturas. Nos anos 70, o “retorno ao básico”, de certa forma uma reação diante do malogro da matemática moderna. Para os anos 80, muitos educadores matemáticos eminentes chegaram a eleger a “resolução de Problemas” como a grande prioridade do ensino de matemática.

Vê-se então que o final do século 20 foi o berço de mudanças significativas no ensino e na aprendizagem da Matemática, e do surgimento da Educação Matemática. Considerando que estamos participando diretamente da Educação Matemática, com nossa pesquisa, pretendemos observar como os alunos resolvem os problemas e quais as técnicas que utilizam nessa resolução, mas permanece ainda, entre nós uma pergunta incessante *a resolução de problemas é a própria razão do ensino da Matemática?* Vale esclarecer que nosso objetivo não é responder a essa ou a diversas outras perguntas que surgem referentes ao estudo da Matemática, mas sim à valorização da resolução de problemas no ensino dessa ciência.

Nesse sentido, concordamos com Chevallard (2001, p.54), quando ele afirma que "[...] a atividade matemática consiste em resolver problemas a partir de ferramentas matemáticas que já conhecemos e sabemos utilizar". Temos consciência de que, para o estudo dessa disciplina tão presente na sociedade, seja ela moderna ou não, o homem, enquanto ser pensante e criativo, desenvolveu a atividade matemática. E para destacar o que é uma atividade matemática, transcrevemos o seguinte parágrafo:

> Partindo da constatação de que o aspecto didático é sempre denso no aspecto matemático, ou em outros termos, de que a atividade matemática pressupõe sempre uma atividade de estudo, propusemos recentemente uma outra maneira de conceber a Didática da Matemática como *ciência do estudo e da ajuda do estudo das questões matemáticas.* (BOSCH, CHEVALLARD 1999, p. 77) [Tradução nossa]

No que se refere ao nosso objeto de estudo, e aqui me exponho como professor, ressaltamos que, o texto acima, como fala da atividade matemática, exige uma atividade de estudo. Assim, ao pesquisarmos as técnicas de resolução de problemas em livros didáticos contemporâneos, pretendemos estar atentos para observarmos como os autores levam os alunos a fazer matemática. Ainda mais, pretendemos verificar como os alunos utilizam a Matemática já conhecida, na resolução dos problemas.

A presença da Matemática na escola é, portanto, segundo esses autores, uma consequência natural de sua utilização na sociedade, isto é, a escola faz Matemática, ou deveria fazer, para atender a uma necessidade social, e nessa dialética entre escola, sociedade e saber matemático é que os aspectos didáticos assumem um papel decisivo no estudo dos saberes intrínsecos dessa ciência.

> Sua singularidade original consiste em tomar como objeto primário de estudo (consiste em questionar, modelar e problematizar de acordo com as regras da atividade científica), não o sujeito que aprende ou que ensina, mas o saber matemático que eles são levados a estudar em conjunto, assim como a atividade matemática que é o projeto comum de estudo empreendido por esse aluno e por esse professor. (BOSCH, CHEVALLARD 1999, p. 78) [Tradução nossa]

Somos levados, então, a trabalhar na direção indicada pelos autores. Quando dividimos os alunos em equipes, ou grupos, pretendemos reproduzir essa *atividade de estudo*, ou seja, que haja interação entre eles, e que o saber matemático seja um fator decisivo na produção dos alunos para que a aprendizagem ocorra efetivamente. Sendo assim, deveremos atentar aos problemas apresentados nos livros didáticos, no sentido de observar se eles têm alguma relação com a realidade social, ou se dizem respeito apenas aos assuntos próprios da Matemática escolar. Podemos citar como exemplo de assunto próprio da Matemática escolar: encontrar o número de divisores de um número ou fatorar um polinômio. Esses assuntos fazem parte da cultura escolar de Matemática e não do dia-dia dos alunos. Quanto aos problemas referentes a realidade social, podemos exemplificar situações que solicitam ao leitor encontrar o valor dos juros cobrados em uma parcela, ou em várias de uma certa mercadoria posta a venda.

Consideremos a cultura escolar de Matemática. Podemos destacar uma particularidade de ensiná-la por meio da resolução de problemas ou aplicar conceitos matemáticos em problemas, sejam eles contextualizados ou não. Para isso, não restringiremos nossas reflexões aos problemas em si, mas às praxeologias impostas por diversos tipos de tarefas que, por sua vez, geram modelos que servem a diversas instituições, em um contexto social mais amplo, visto ser através da interação entre livro didático, professor e alunos que os conhecimentos são adquiridos, à custa da aplicação metódica ou não. Para que isso ocorra de maneira satisfatória, é necessária a sistematização do saber matemático que, por sua vez, gera questionamentos, se transformam em problemas que, consequentemente, são modelados de acordo com regras da atividade científica. Já o professor recorre a um método para ensinar a Matemática de maneira mais "estimulante ou enriquecedora", e é na busca de resolver essa deficiência do ensino que muitos profissionais se dedicam à metodologia presente nos livros didáticos, isto é, à resolução de problemas.

Conforme destacam Bosch e Chevallard (1999), existe uma inovação na didática da Matemática que consiste em valorizar a construção de modelos o que esses autores consideram um princípio metodológico. Esse princípio nos interessa porque, para resolver problemas, talvez seja preciso desenvolver modelos. Essa modelagem a que se referem os autores está ligada à necessidade humana de desenvolver uma linguagem universal para a comunicação do conhecimento matemático, à qual podemos entender como sendo os objetos ostensivos e não ostensivos, que discutiremos adiante, e tais objetos são utilizados na interação entre professor/aluno, livro/aluno, livro/professor, livro/professor/aluno, livro/aluno/professor e aluno/aluno.

Quando esse processo de interação ocorre de maneira efetiva entre as partes envolvidas no ensino da Matemática, surge uma prática feita pelo professor, outra proposta pelos livros didáticos e, consequentemente, outra desenvolvida pelos alunos. É nossa pretensão adotar esse processo de interação como praxeologia ou praxeologias, que, por sua vez, são os elementos essenciais da organização praxeológica que iremos descrever a seguir.

2.2.2 Praxeologia

A praxeologia, para Kotarbinski (1986), *é considerada como a ciência da eficiência humana*; para Chevallard (1999), *é o discurso racional da prática*. Por mais que esses autores utilizem definições diferentes, existe uma convergência entre ambos, ao tentarem entender as produções dos sujeitos, qual a interação deles com o meio em que estão inseridos quando buscam entender as práticas de uma certa comunidade.

O modelo teorizado pelo segundo teórico representa a obra Matemática, e essa, por sua vez, é algo mais amplo que a praxeologia. Se considerarmos a Matemática como ciência de estudo, temos que perceber que ela está sendo construída há milênios e, dentro desse contexto de construção, foram criadas inúmeras praxeologias.

Para entendermos melhor essa relação entre obra e praxeologia, vamos refletir sobre algumas considerações feitas por Chevallard (2001, p.252), quando ele pontua a relação entre essas duas noções: "Portanto, ao passar da palavra “obra” para a palavra “Praxeologia”, tivemos algum ganho. [...] Com a noção de praxeologia, podemos entrar um pouco mais no “cerne” da obra. De que compõe uma obra? De certas praxeologias".

Nós objetivamos aqui aprofundar-nos na obra matemática, mas o cerne da questão (a praxeologia), para nós, serão as produções coletivas dos alunos, como eles organizam o saber matemático e como o conhecimento individual de cada aluno vai se relacionando com a realidade Matemática no processo de estudo. Essa maneira de organizar o estudo e a aprendizagem do saber matemático obtém um significado pleno ao separar a praxeologia em duas organizações distintas.

Para o autor da TAD, uma organização praxeológica para o estudo do conteúdo matemático se subdivide em organização matemática ou praxeologia matemática, que pode ser considerada a realidade matemática realizada dentro da sala de aula; nela, o tema estudado é exclusivamente matemático, dentro de sua lógica interna que perfaz o conteúdo matemático. Pretendemos, também, esclarecer os conceitos abordados na atividade matemática e justificar sua utilidade relacionada com as tecnologias que vão surgindo, isto é, sendo produzidas no contexto da sala de aula. Essa dialética é uma das características dessa organização.

A organização didática, ou praxeologia didática constitui os passos dados pelo sujeito na direção da construção do saber matemático, isto é, a maneira como ele organizou a realidade matemática. Há, também, a preocupação de como esse saber será ensinado efetivamente, como ocorrerá a interação entre o estudo e atividade matemática, propiciando a construção do conhecimento, estruturando-se e transformando-se em saber matemático. Ressaltamos que o conjunto das organizações didáticas e matemáticas constituem uma praxeologia.

Vale esclarecer que nosso interesse nesse processo de construção do conhecimento matemático é entender como ele se dá e quais as transformações que estão envolvidas. Pretendemos destacar as seguintes noções que compõem uma praxeologia matemática e didática, assinaladas por Chevallard (1999) como: *tipos de tarefas*, *tipos de técnicas*, *tecnologia* e *teoria*. Tanto o professor como o aluno, cada um dentro de sua área de atuação, confrontam-se diariamente com tipos de tarefas (T) ou problemas. Para a resolução deles, utilizam-se de técnicas (τ) de estudo ou técnicas (τ) didáticas que, por sua vez, são justificadas por uma tecnologia (θ) que remete a uma reflexão sobre uma teoria (Θ) que de tal forma justifique tal tecnologia (θ). A seguir, iremos fazer algumas reflexões sobre esses termos.

Tarefa e Tipos de Tarefas

A palavra tarefa é utilizada livremente em todas as ciências, bem como pela sociedade, em geral. Quando falamos que temos uma tarefa para resolver, tanto podemos estar nos referindo a algo rotineiro, como a algo que nos traz alguma dificuldade. Para nós, porém, tarefa constitui os problemas que estamos utilizando para entender as organizações praxeológicas dos alunos. Para sermos mais precisos, a noção de Tarefa que defendemos será ligada à resolução de problemas, que podem ser resolvidos por meio de uma equação do primeiro grau. Os conjuntos de todas as tarefas analisadas por nós exercem uma relação de aproximação que pode ser entendida como gêneros de tarefas.

Para entendermos a relação que tais tarefas exercem umas sobre as outras, adotamos o significado proposto por Chevallard (2001, p.191): "[...] Isso significa que, mediante essa pequena variação de certas tarefas e questões conhecidas pelos alunos, deve ser possível provocar o aparecimento dos principais tipos de problemas e técnicas que compõem a obra". A reunião de diversas tarefas nos permite agrupá-las em famílias que, por sua vez, são os tipos de tarefas que podem ser resolvidas por uma técnica, ou pela evolução dessa técnica. Quando o aluno está resolvendo um problema, ou busca encontrar a solução, recorre à Matemática já conhecida, ou cria uma Matemática nova para ele, é nessa interação que se dá o aparecimento da técnica sobre a qual iremos refletir.

Técnica

Na busca de responder um tipo de tarefa, os alunos confrontam-se com uma variedade de técnicas. Surgem, então, novas noções e relações com o saber matemático que está sendo construído. As relações de estudo estão vinculadas a certos tipos de problemas que estão sendo objeto da obra matemática construída. Nesse processo de estudo, quanto maior for a quantidade de técnicas utilizadas pelos alunos, maior a probabilidade de eles chegarem à construção de um modelo praxeológico.

Ao resolver um problema, o aluno está construindo um modelo praxeológico, mesmo que para ele isso não seja evidente. Na manipulação das técnicas, o aluno está fazendo matemática, o que não significa que ele esteja construindo o modelo pela primeira vez, mas, para a sua realidade pode ser que isso esteja ocorrendo. A atividade matemática permite a construção diária de modelos, bem como a repetição contínua desses modelos já criados. Isso dependerá da corrente pedagógica à qual está vinculado o autor do livro didático ou o professor que está trabalhando com os alunos.

Na tentativa de entendermos esse processo de criação de um modelo praxeológico, recorremos ao conteúdo matemático equações do primeiro grau, no qual existem várias técnicas resolutivas; de maneira geral, são técnicas algébricas, aritméticas, geométricas, enfim tantas outras que estão à disposição de alunos e professores. A busca pela melhor técnica, ou pela de maior alcance, está na escolha individual ou coletiva dos alunos e professores.

No ensino da Matemática, não existe uma técnica única para se resolver um determinado tipo de problema; podemos pensar diferentes técnicas que possibilitem ao aluno resolver certos tipos de tarefas. Assim, entendemos que existem algumas técnicas de maior e outras de menor alcance. A escolha de uma técnica que possa resolver vários tipos de problemas (e não todos), a escolha da melhor técnica, ou de maior abrangência, ou até mesmo a manipulação de diversas técnicas permite uma exploração mais eficaz da atividade matemática, fundamental para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

A técnica utilizada juntamente com a tecnologia constitui o bloco prático-técnico da praxeologia, que é justamente o saber-fazer, que vai muito além da aplicação de um algoritmo, ou uma técnica isolada para resolver uma tarefa de um certo tipo.

Tecnologia

Todo discurso interpretativo que subsidia uma técnica, independentemente do seu alcance, está vinculado a uma tecnologia que permite validá-la, e essa validação, por sua vez, permite o desenvolvimento ou a evolução de novas tecnologias para a adequação de diferentes técnicas e para diversos tipos de tarefas. Segundo Chevallard (2001, p.134):

> Dissemos que o processo de estudo não está concluído uma vez resolvidos os problemas enunciados graças à técnica elaborada: é preciso um discurso interpretativo e justificado das técnicas. Ao longo do processo de estudo, aparecem fases nas quais o discurso tecnológico deve se integrar ao trabalho técnico, com que esteja mais compreensível e eficaz.

Quando o aluno logra êxito na resolução de um problema, isso não significa que ele realmente tenha entendido o que fez. Se ele não terminou a obra que estava sendo empreendida, faz-se necessário, então, justificar o que foi feito. De posse da técnica utilizada, o aluno deve pensar em como justificar os passos, ou mesmo os conceitos matemáticos envolvidos na atividade matemática.

Teoria

O discurso matemático que permite interpretar uma tecnologia é considerado como uma teoria, ou seja, é ela que justifica ou explica a tecnologia empregada em uma atividade matemática. Para Gascón:

> [...] Os problemas podem utilizar-se para *aplicar, exemplificar ou consolidar* os conceitos teóricos e, inclusive, para *motivá-los, introduzi-los e justificá-los*, pois, em qualquer caso, a atividade de resolução de problemas não se considera "constitutiva do conhecimento matemático" propriamente dito. Em particular, se ignoram as tarefas dirigidas a *elaborar estratégias de resolução* de problemas complexos e, portanto, quando aparece um problema que não se pode resolver mediante a aplicação imediata de um teorema, *então o teoricismo trivializa os problemas mediante sua decomposição em exercícios rotineiros.* (2003, p. 23)

Vimos aí que, na resolução de problemas, predomina ainda a utilização ingênua de um teorema ou algoritmo. Não há uma preocupação em entender o que dá suporte aos conceitos matemáticos utilizados, nem em encontrar as justificativas. Os livros didáticos mais antigos traziam uma lista grande de exercícios que eram, simplesmente, voltados para o treinamento de uma técnica ou a memorização de um teorema.

Na posição defendida por Gascón, ao criticar a antiga vulgata dos livros antigos, ele propõe a valorização da busca de estratégias de resolução para problemas desafiadores, pois o estudo da Matemática não pode ser algo mecânico e completamente controlável pelo professor ou imposto pelo autor do livro didático. O agrupamento da tecnologia e da teoria, portanto, dá a formação do bloco teórico-tecnológico que está ligado ao saber, mais especificamente, ao saber matemático. É a interação de todos esses elementos (tarefas, técnicas, tecnologias, teorias) que forma uma praxeologia.

2.2.3 Registro de Linguagem e Momentos de Estudo

Toda prática institucional está delimitada por Registros de Linguagens específicas, sejam elas de natureza matemática ou não; os objetos matemáticos e a sua *função* na atividade matemática são reconhecidos por Chevallard (1999) como objetos ostensivos e não ostensivos.

> [...] Falamos de ostensivo, lembrando que este termo tem origem no latim *ostendere*, que significa mostrar, apresentar com insistência, para nos referir a todo objeto que tem uma natureza sensível e certa materialidade. Devido a esse fato, tal objeto pode ser apreendido pelo sujeito, por ser uma realidade perceptível. Assim, um objeto ostensivo é um objeto material qualquer, tal como os sons (entre os quais as palavras de uma língua) os grafismos (entre os quais os *grafemas* que permitem a escrita das línguas naturais ou construídas das línguas formais) e os gestos. Os objetos não ostensivos são então todos os objetos como as idéias, as intuições ou os conceitos, existentes institucionalmente, no sentido em que lhes é atribuída existência, sem que possam ser vistos, ditos, mostrados ou percebidos por si mesmos.[...] (1999, p. 85) [Tradução nossa]

Os dois tipos de objeto tratados acima servem sempre a uma instituição, seja ela o livro didático, o professor ou o saber matemático; o surgimento deles não depende de uma única pessoa. Outro fator importante neste contexto é a existência de uma dialética entre ambos, pois, ao ser manipulado, um ostensivo traz um ou diversos não ostensivos, que não são manipuláveis pelo ser humano. Essa especificidade da manipulação dos objetos ostensivos é comum da prática Matemática. A abordagem antropológica que estamos propondo, segundo os autores, descreve, portanto, um modelo de atividade matemática que interliga os objetos em uma, ou em várias organizações praxeológicas.

Nos trabalhos do autor, há uma preocupação em situar a produção dos sujeitos dentro de um contexto mais amplo, o que se percebe no trecho a seguir:

> Aos primeiros termos da antropologia cognitiva, que foram destacados acima, acrescentamos as noções *tipos de tarefas*, *tipos de técnicas*, *tecnologia* e *teoria*. Essas noções permitem construir modelos das práticas sociais em geral e em particular da atividade matemática. Para isso, partimos de um primeiro postulado: *toda prática institucional pode ser analisada de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras por meio de um sistema de tarefas relativamente bem circunscritas que são realizadas no fluxo das práticas sociais.* O problema da delimitação das tarefas em um contexto institucional permanece sempre aberto e por esse motivo varia em função do ponto de vista da instituição onde as práticas são desenvolvidas ou bem de um ponto de vista de uma instituição exterior de onde as atividades estão

> sendo observadas com uma finalidade qualquer. (CHEVALLARD, 1999, p. 86) [Tradução nossa]

Para o autor, essa dialética entre as práticas e a justificativa delas serve uma instituição, ou seja, os objetos ostensivos servem uma instituição. Para essa instituição, os objetos têm uma natureza sensível, certa materialidade e, devido a esse fato, tal objeto pode ser apreendido pelo sujeito por ser uma realidade perceptível: esse é o papel dos ostensivos dentro do contexto social que está ocorrendo na atividade matemática. Dessa forma, um objeto ostensivo é algo material, qualquer coisa que expresse a organização matemática ou didática dentro da atividade matemática do sujeito.

Por outro lado, os objetos não ostensivos são todos aqueles que surgem com a manipulação dos objetos ostensivos, os conceitos matemáticos, as crenças de uma determinada instituição. Para melhor entendimento, recorremos ao exemplo citado por Chevallard (2001, p. 09) [Tradução nossa] "[...] Assim, os objetos função e primitiva de uma função são objetos não ostensivos que aprendemos a identificar e ativar por meio de expressões escritas e grafismos utilizados nas práticas e situações particulares". Ao ativarmos um objeto ostensivo de modo automático, estamos evocando um objeto não ostensivo.

Na análise da atividade matemática dentro da relação entre esses objetos, a dialética estabelecida entre ostensivo e não ostensivo, é concebida na construção da obra matemática. Essa dupla função da linguagem permite compor a organização praxeológica dos sujeitos e instituições envolvidas na obra matemática. Sendo assim, estamos considerando alguns registros de linguagens para melhor caracterizar a produção dos alunos.

Registros de grafismos são todo tipo de marcações ou destaques feitos dentro da resolução da tarefa, todas as linhas, traços e setas utilizadas para destacar a organização praxeológica. O algébrico é todo tipo de registro que o aluno, ou o autor do livro didático utiliza para demonstrar a técnica algébrica, entremeada com a parte literal e com a parte numérica de uma equação do primeiro grau. O aritmético refere-se aos registros numéricos evocados nas resoluções, mas não está restrito somente aos números, e sim a todas as operações e propriedades manipuladas na atividade matemática, ou seja, na produção dos alunos. Quanto aos registros geométricos, estamos considerando qualquer registro gráfico com a evocação de algum conceito geométrico. Sobre o assunto, temos o posicionamento de Chevallard:

> Se tomamos como critério de especificação de um objeto ostensivo a substância na qual este objeto pode ser decomposto, podemos constatar a presença de uma pluralidade de registros no desenvolvimento da atividade matemática: registro da *oralidade*, registro do *traçado* (que inclui grafismo e escritas), registro dos *gestos*, enfim registro do que nomearemos, por falta de uma melhor expressão, a *materialidade qualquer*, onde tomam lugar estes objetos ostensivos que não se originam de nenhum dos registros precedentemente enumerados. Na realização de uma atividade matemática, os complexos de objetos ativados são distribuídos entre os diversos registros, sem que possamos ver funcionar geralmente um deles de maneira totalmente independente dos outros. (1999, p. 13) [tradução nossa]

Enfim, a manipulação de qualquer registro de linguagem vai depender da evolução da atividade matemática, quer seja no plano individual, no contexto do grupo, quer seja no contexto institucional ou histórico, e vai ao encontro da necessidade de se exteriorizarem as organizações didáticas ou matemáticas. Outro aspecto que devemos considerar dentro da manipulação é o peso do ponto de vista cultural, no qual se inserem o sujeito, os conhecimentos prévios de um *saber* constituído de objetos ostensivos e os não ostensivos.

Vale esclarecer que o professor de Matemática valoriza muito a oralidade no momento em que está expondo o conteúdo matemático e, no entanto, quando aplica uma avaliação, melhor uma prova, cobram-se do aluno registros escritos que podem variar desde o algébrico até o geométrico. Essa valorização da parte escrita, em detrimento da oral, faz parte da cultura escolar de matemática, pois não é usual o aluno ser avaliado de forma oral.

Para nós, os registros gráficos e da oralidade serão significativos na tentativa de entendermos o contexto antropológico da atividade matemática e da dimensão ostensiva indispensável para interpretarmos os conhecimentos necessários e/ou utilizados no desenvolvimento do processo de estudo.

As situações presentes no processo de estudo são denominadas, por Chevallard (1999), de Momentos de Estudo ou Momentos Didáticos, e tais momentos servem para aprendizagem de um determinado conteúdo matemático ou não matemático. Este teórico classificou em seis momentos de estudo, tendo-se que: o primeiro é o encontro com a Organização Matemática, que pode ocorrer diversas vezes, e não necessariamente na primeira parte da aula. O segundo é a exploração do tipo de tarefa e, em consequência, a elaboração de uma técnica que permita resolvê-la. O terceiro é a construção do entorno tecnológico-teórico referente à técnica adotada, ou o conjunto de todas as técnicas ligadas à tarefa proposta. O quarto é o trabalho com a técnica que, a partir de então, pode ser melhorada ou tornar-se confiável. O quinto é o momento de institucionalização, que tem por objetivo descrever a organização matemática. O sexto é a da avaliação, a apresentação de um balanço da validade do que foi aprendido, colocando-se à prova a organização matemática.

Em suma, ao ser construída uma organização matemática, faz-se necessária a justificativa da utilização dos elementos constituintes desse saber; a organização didática dá voz a essa justificativa. A dinâmica entre essas duas organizações, dentro do processo de estudo, é descrita por meio dos momentos de estudos pontuados por nós, em conformidade com as concepções do autor da teoria.

CAPÍTULO 3 - METODOLOGIA

3.1 Aproximações com a pesquisa qualitativa

Segundo Neves (1996, p. 01) com o surgimento da pesquisa identificada como qualitativa [...] "Surgindo inicialmente no seio da Antropologia e da Sociologia, nos últimos 30 anos esse tipo de pesquisa ganhou espaço em áreas como a Psicologia, a Educação e a Administração de Empresas". A pesquisa qualitativa é mais uma forma de abordagem na investigação que surgiu no campo da Antropologia e Sociologia, que ganhou espaço em outras áreas, inclusive na Educação. Existem várias abordagens e/ou pesquisas que estabelecem relações com a pesquisa qualitativa e, que com ela estão entrelaçadas desde o final do século XIX.

Em seus estudos, Marli Eliza D. A. de André ressalta que, segundo Dilthey , os fenômenos humanos e sociais são muito complexos e dinâmicos; sendo por isso, impossível o estabelecimento de leis gerais, pois o contexto particular em que ocorre o fato é um elemento essencial para a sua compreensão. Diante disso, Dilthey sugere que a investigação dos problemas sociais seja feita por meio da abordagem metodológica hermenêutica (aquela que se preocupa com a interpretação dos significados contidos num texto, levando em consideração cada mensagem desse texto e suas interpretações).

Ainda segundo André (2007, p. 17), Weber, assim como Dilthey, argumenta que, para compreender esses significados, é necessário colocá-los dentro de um contexto, o que faz com que se tenha uma “perspectiva de conhecimento idealista-subjetivista” e que se valorize a maneira própria de entendimento da realidade do indivíduo por meio da busca, da interpretação e da descoberta, buscando a indução e assumindo que fatos e valores estão intimamente relacionados.

André (2007), ressalta então, que a pesquisa qualitativa costuma ser direcionada ao longo de seu desenvolvimento, porque não busca enumerar ou medir eventos. Os seus dados obtidos são descritivos, extraídos de uma pesquisa direta, com a situação do objeto em estudo. Esses são os princípios da abordagem da pesquisa qualitativa, além do fato de ela não envolver manipulação de variáveis e nem tratamento experimental. Pode-se concluir, portando, que uma pesquisa qualitativa, sendo de caráter descritivo, acontece em um ambiente natural como fonte direta de dados, tendo o pesquisador como instrumento fundamental. Tem enfoque indutivo e, a preocupação do investigador é o significado que as pessoas dão às coisas.

Diante do exposto, percebe-se que o método qualitativo se diferencia do quantitativo, porém eles não se excluem, pelo contrário, ambos fazem com que o trabalho de pesquisa, com diferentes métodos, tenha mais precisão, pois na mistura de procedimentos, os de cunho racional e indutivo são capazes de contribuir para a melhor compreensão dos fenômenos.

É de bom tom, ressaltar que as características acima citadas, não devem ser vistas como regras no que refere ao próprio entendimento do que é pesquisa qualitativa, mas é correto afirmar que, em sintonia, essas características tornam a pesquisa qualitativa mais exata.

André (2007), aponta quatro diferentes formas da abordagem qualitativa: pesquisa etnográfica (objeto de estudo deste trabalho), estudo de caso, pesquisa participante e pesquisa-ação. Diante de tal diversidade de formas de se fazer pesquisa, a partir de agora iremos esclarecer alguns aspetos da pesquisa do Tipo Etnográfica.

3.2 Pesquisa do tipo etnográfico

De acordo com o Dicionário Enciclopédico Brasileiro Ilustrado, etnografia é a:

> Ciência que estuda as raças e os povos sob o ponto de vista dos costumes e crenças, bem como de toda e qualquer manifestação material: indústria, comércio, vestuário, festas, habitações, artes, etc. Afere o grau do desenvolvimento de um povo ou raça, tentando tirar conclusões e fazer prognósticos. Distingue-se da etnologia por ser uma ciência de análise, quando a outra é ciência de síntese. (1943, p. 650)

Esse conceito permite-nos dizer que a etnografia é uma especialidade da Antropologia, uma Ciência Social, que se materializa na forma de descrição da cultura material de um povo, tendo como sua maior preocupação, obter uma descrição completa de um grupo social. A etnografia é a escrita do real, daquilo que é visto e presenciado, contudo depende da qualidade da observação, da sensibilidade para com o outro, do conhecimento sobre o contexto estudado, da inteligência e da imaginação científica do pesquisador.

Atualmente, a etnografia é considerada um método de pesquisa consolidado e utilizado por diversos pesquisadores ao redor do mundo, visto considerar as práticas e a produção dos sujeitos pesquisados, aproximando-se deles o quanto for possível. Portanto, ao implementar esse método, o etnógrafo deve isentar-se totalmente dos preconceitos existentes.

André assim conceitua pesquisa etnográfica:

> A etnografia é um esquema de pesquisa desenvolvido pelos antropólogos para estudar a cultura e a sociedade. Etimologicamente etnografia significa “descrição cultural”. Para os antropólogos, o termos tem dois sentidos: (1) um conjunto de técnicas que eles usam para coletar dados sobre valores, os hábitos, as crenças, as práticas e os comportamentos de um grupo social; e (2) um relato escrito resultante do emprego dessas técnicas. (2007, p. 27)

Em outra afirmativa, André diz ainda, que:

> Se o foco de interesse dos etnógrafos é a descrição da cultura (práticas, hábitos, crenças, valores, linguagens, significados) de um grupo social, a preocupação central dos estudiosos é o processo educativo. Existe, pois, uma diferença de enfoque nessas duas áreas, o que faz com que certos requisitos da etnografia não sejam – nem necessitem ser – cumpridos pelos investigadores das questões educacionais. Requisitos sugeridos por Woltcott (1988), como por exemplo, uma longa permanência do pesquisador em campo, o contato com outras culturas e uso de amplas categorias sociais na análise de dados. O que se tem feito pois é uma adaptação da etnografia à educação, o que me leva a concluir que fazemos estudos do tipo etnográfico e não etnografia no seu sentido escrito. (ibid, p. 28)

André conclui, afirmando:

> Finalmente, a pesquisa etnográfica busca a formulação de hipóteses, conceitos, abstrações, teorias e não usa testagem. Para isso faz uso de um plano de trabalho aberto e flexível, em que os focos da investigação vão sendo constantemente revistos, as técnicas de coleta, reavaliadas, os instrumentos, reformulados e os fundamentos teóricos, repensados. O que esse tipo de pesquisa visa é a descoberta de novos conceitos, novas relações, novas formas de entendimento da realidade. (2007, p. 30)

A etnografia na sala de aula, segundo André (2007), quando aplicada na antropologia, tem por objetivo conhecer o outro; por isso, o professor deve ir a campo para entender o aluno, saber como ele pensa, procede e age ao se deparar com o problema, pois, nesse processo, sempre se encontra algo em comum entre professor e aluno; sempre há um ponto de convergência entre os dois.

Ao observar a prática social, nós, enquanto pesquisadores, adotamos a antropologia cognitiva, proposta por Chevallard (1999), na tentativa de buscar respostas às perguntas acerca de um determinado contexto, que no nosso caso é o contexto da sala de aula. Considerando o contexto escolar, ao passo que a escola vulgariza os conhecimentos por meio de práticas docentes, há consequências, evidentemente, que influenciam nas práticas discentes.

Ao pretender entender e descobrir como os alunos resolvem os problemas algébricos, muitas vezes diferentes da proposta do livro didático, o professor-pesquisador pode desvelar técnicas interessantes e, com elas, levar técnicas de formação docente, visto que velhas práticas dos cursos de licenciatura e de pedagogia podem adentrar à sala de aula, levando com elas os conteúdos a serem repassados sem pré-seleção entre os saberes que devem ser ensinados e socializados.

Sendo, assim, ao optarmos pela pesquisa do tipo etnográfico, assumimos a sua compatibilidade com a Teoria Antropológica do Didático, bem como a sua praticidade na aplicação das sessões que servirão de análise em nosso trabalho, considerando, ainda, a sua aplicabilidade na Educação e, em particular, na Educação Matemática.

3.3 A etnografia na Educação

Nos últimos tempos, têm-se buscado técnicas e instrumentos qualitativos de coleta de dados que propiciem melhorar a qualidade do ensino. A maior preocupação é sobre como interferir, de maneira significativa e eficiente, no processo ensino-aprendizagem.

O interesse centra-se no estudo das questões de sala de aula, numa tentativa de entender como se dá o processo tanto nas técnicas de ensino utilizadas como nos métodos de avaliação.

André (2007) segue afirmando que os primeiros trabalhos publicados no Brasil, sobre o uso da abordagem etnográfica em educação, foram influenciados pelos estudos realizados na área de avaliação que começaram a surgir no final da década de 1970.

Em sua vinda ao Brasil na década de 60, Sara Delamont propôs o uso da abordagem antropológica no estudo da sala de aula. A partir desse momento, a abordagem etnográfica ganhou campo e tornou-se popular, no Brasil.

Para Delamont apud Woods (2005) refere que:

> Por tudo isso, para o professor a etnografia pode ter um valor prático digno de consideração. Aborda questões que eles reconhecem, refere-se aos mesmos problemas e em seus próprios termos. Assim os professores podem expandir as suas habilidades estratégicas através dos muitos estudos de interação professor-aluno. (DELAMONT, 1976, p. 22) [Tradução nossa]

Ainda, segundo Delamont apud Woods, tem-se que:

> A teoria permite a entrada fácil para a situação social, para reduzir a resistência dos membros do grupo, diminui a extensão de perturbação que o investigador introduz na situação natural, e permite ao pesquisador experimentar e observar as normas, os valores, conflitos e pressões do grupo, que – em muito tempo – não pode ficar escondido para sempre que joga um papel importante na interação social do grupo. (DELAMONT 1976, p. 193) [Tradução nossa]

Entende-se, então, que a abordagem etnográfica rompe com as formas tradicionais de se fazer pesquisa, uma vez que o investigador é parte do contexto da investigação e, nessa posição, ele participa, de alguma forma, das atividades. Sendo a Educação, num sentido amplo, dinâmica e complexa, esse é o tipo de pesquisa que se encaixa dentro dessa diversidade social.

3.4 A etnografia na Educação Matemática

Antigamente, o ensino da Matemática era voltado para técnicas precisas, sem se importar muito com a metodologia. O importante era se chegar ao resultado, e para isso bastava decorar as “fórmulas”. Hoje, ao contrário, o caminho para a aprendizagem da Matemática é outro e é importante se conhecer as formas que levam à construção desse saber.

Dentro do currículo escolar, a Matemática é uma disciplina independente, com características próprias, e o conhecimento nela adquirido serve, ainda, como base para outras disciplinas, além de ser muito importante no cotidiano do indivíduo. Acreditamos, por isso, que, a partir da pesquisa etnográfica, possamos conhecer melhor o caminho a ser trilhado no aprender do conteúdo matemático.

É importante lembrar, citando Matos (1995), que a investigação de tipo etnográfico é considerada um campo jovem, isto é, recente para a comunidade científica de Educação Matemática Portuguesa, país este onde esse pesquisador reside. Entretanto, este tipo de pesquisa tem ganhado importância gradual no movimento da Educação Matemática, campo este em que o interesse por abordagens interpretativas é cada vez mais solicitado. Segundo Matos (2005) em Portugal, não existe uma tradição de pesquisas em Educação Matemática, porém cada vez mais surgem pesquisadores e professores interessados em ampliar os estudos referentes a didática do ensino da Matemática.

Os estudos de Gurgel (2004) defendem a contribuição da pesquisa etnográfica no reconhecimento da dimensão sócio-cultural da Ciência Matemática, considerando fundamental que o pesquisador entenda a escola como um mundo social, que tem linguagem própria e seus modos de regulação.

Gurgel afirma que:

> Enquanto procedimento de pesquisa, a abordagem etnográfica não requer uma definição, a priori, de um modelo teórico acabado, como requerem os estudos quantitativos e experimentais, já que nesses procedimentos é indispensável à operacionalização das variáveis. Sendo estreito o vínculo entre observação e análise, nos estudos etnográficos a construção de categorias teóricas se constitui no processo da pesquisa, porque as categorias sociais se misturam com o processo etnográfico como parte do objeto de estudo. (2004, p. 07)

De acordo com a citação acima, pontua-se que a contribuição desse tipo de pesquisa, na Educação Matemática, coaduna-se com a que desenvolvemos, devido à dinâmica da sala de aula, bem como às inserções que os alunos fazem no contexto do trabalho em grupo. Sendo assim, percebemos que os dois pesquisadores desenvolveram suas pesquisas em países diferentes; o primeiro, em Portugal, e o segundo, no Brasil. Entretanto, corroboram entre si que as pesquisas do tipo etnográfico servem para descrever a realidade local dos sujeitos pesquisados, bem como as influências que eles recebem em consequência do peso da cultura.

Partindo então das ideias desses pesquisadores, e em concomitância com os teóricos que perfazem o nosso referencial teórico, pode-se entender, então, que as praxeologias com as quais os alunos tiveram contato durante sua vida escolar, ou seja, as organizações didáticas e matemáticas provenientes dos antigos professores, dos livros didáticos ou até das aulas de reforço influenciam no tipo de técnica escolhida para a resolução de um tipo de tarefa.

3.5 A etnografia no contexto de nossa pesquisa

É viável dizer, também, que o aluno não aprende só na escola, e nem com um só professor. Durante a sua vida escolar, ele tem vários professores, alguns têm até professores particulares, outros são autodidatas, e outros, com as noções dadas pelo professor, conseguem construir seu entendimento por meio do livro didático. E é justamente o modo como se dá essa interação que se constitui o objeto de estudo desta investigação.

Neste trabalho, buscaremos, por meio da pesquisa do tipo etnográfico, entender a maneira como os alunos desenvolvem suas técnicas na resolução de problemas algébricos do primeiro grau, e quais os caminhos escolhidos. Caminhos que buscam, na etnografia, instrumentos para o sucesso da pesquisa.

Inicialmente, fizemos a análise de documentos, buscando uma visão geral das praxeologias prescritas. A recolha de documentos foi simples, estes basicamente oriundos de fontes secundárias: livros didáticos e documentos produzidos por alunos (cadernos). Quando nos propusemos a analisar os PCN, o guia do PNLD e os livros didáticos contemporâneos, nossa intenção foi levantar informações referentes à valorização da resolução de problemas.

Em nossa análise dos PCN, foi possível identificar categorias de análises que representam as ideias gerais quanto à valorização da resolução de problemas como atividade matemática nos anos finais do ensino fundamental. No capítulo de análise, ilustramos e comentamos um pouco de cada categoria extraída de trechos do PCN.

Sendo o tipo etnográfico uma pesquisa qualitativa, espera-se que, por meio da observação, possamos explicar como ocorre a aprendizagem da Matemática, no entendimento do aluno.

Entre os instrumentos utilizados na pesquisa etnográfica está, primeiramente, a observação participante, com o objetivo de interpretar o contexto do aluno, no intuito de retratar a realidade da sala de aula, ou seja, descrever os fatos de maneira mais precisa.

André (2007, p. 37) nos lembra que:

> Através basicamente da observação participante, ele vai procurar entender essa cultura, usando para isso uma metodologia que envolve registro de campo, entrevistas, análises de documentos, fotografias, gravações.

André (2007, p. 41) completa, afirmando que, por meio de técnicas:

> [...] etnográficas de observação participante e de entrevistas intensivas, é possível documentar o não documentado, isto é, desvelar os encontros e desencontros que permeiam o dia-a-dia da prática escolar, descrever as ações e representações dos seus atores sociais, reconstruir sua linguagem, suas formas de comunicação e os significados que são criados e recriados no cotidiano de seu fazer pedagógico.

O fato de que, durante o desenvolvimento da pesquisa continuamos trabalhando, motivou-nos a realizá-la nas turmas em que ministramos aulas de Matemática. A observação participante permitiu-nos a entrada também como pesquisador no processo, sem contar que não houve necessidade do período de adaptação com os sujeitos. Quanto aos procedimentos de aplicação, o faremos mais adiante. No entanto, daremos uma visão geral, para depois, aprofundarmo-nos na parte dedicada a eles. Separamos algumas tarefas do livro didático da coleção que elegemos para análise, depois propusemos aos alunos que as resolvessem com a utilização de diferentes técnicas. De posse desse material, foram feitas as análises das praxeologias presentes nas técnicas adotadas pelos alunos na resolução dos problemas. Ressaltamos, também, que os alunos trabalharam em grupo. Sendo assim, ocorreram interações e diálogos entre pesquisador e alunos. Algumas partes dos diálogos foram transcritas na tentativa de se descrever o que realmente aconteceu na sala de aula.

Nesse contexto, entendemos que a dinâmica de aplicação pode refinar nossa análise para encontrarmos alguns elementos da teoria ou da tecnologia usados na resolução dos problemas para, então, estruturar as organizações didáticas e matemáticas presentes nos momentos de estudo dos alunos, com o olhar da TAD.

3.6 Procedimentos metodológicos

Nosso trabalho foi desenvolvido na Escola Municipal de Ensino Fundamental João Evangelista Vieira de Almeida, na cidade de Campo Grande, localizada na vila Almeida, no período de dezembro de 2008 a agosto de 2009. O universo de investigação foi composto por três turmas do 7º ano em 2008 e duas turmas do 8º ano em 2009.

Por se tratar dos dias finais do ano letivo de 2008, as três turmas do 7º não estavam em contato com o professor-pesquisador, pois eram de responsabilidade dos professores Lindomar e Edy. No ano de 2009, elas foram fundidas em apenas duas turmas do 8º ano, cujas aulas de Matemática seriam ministradas por nós.

Inicialmente optamos pela aplicação de dez sessões[9], nas turmas mencionadas anteriormente. A duração de cada sessão variava conforme o desempenho de cada turma na resolução da tarefa proposta, ou também o tempo disponível no dia da aplicação. Em linhas gerais, o tempo médio era de uma aula, as aulas tinham duração de uma hora, cabe ressaltar que todas as sessões foram aplicadas pelo pesquisador. Na primeira sessão houve a participação dos professores regentes, nas demais somente do professor-pesquisador. Vale lembrar também que em algumas sessões contamos com a ajuda da intérprete[10] para anotar os diálogos realizados entre pesquisador e alunos durante as sessões.

Outro aspecto importante que destacaremos é que ao optarmos pela pesquisa etnográfica, em muitas sessões utilizamos a observação não participante, quando deixávamos os alunos interagirem em seus respectivos grupos sem a interferência do pesquisador. No entanto em alguns momentos fizemos o uso da observação participante, quando algum grupo solicitava a nossa ajuda tentávamos manter um diálogo com eles de forma que não indicássemos as técnicas que seriam empregadas na resolução dos problemas.

Para melhor esclarecimento, a partir de agora, descrevemos os procedimentos de apenas três sessões de aplicação que selecionamos para as análises.

A **primeira sessão** de aplicação foi realizada no dia 01 de dezembro de 2008, e contamos com 63 alunos distribuídos em três turmas: sendo 19 alunos na turma A, 25 na turma B e 19 na turma C. A finalidade do nosso trabalho era estabelecer contato com as turmas envolvidas na pesquisa realizada durante o curso de Mestrado em Educação Matemática. Por se tratar de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, e que também já haviam estudado o conteúdo matemático contemplado na pesquisa, nossos objetivos específicos foram levá-los a:

- Adotar uma atitude positiva em relação ao nosso objeto de estudo, ou seja, desenvolver a capacidade de *fazer matemática* resolvendo os problemas por si mesmos;

---

9 Estamos considerando uma sessão a produção escrita de todos os alunos presentes no dia de aplicação em sala de aula.

10 Intérprete é uma professora contratada pela REME para fazer os sinais de libras para um aluno deficiente auditivo presente em uma das salas de aula onde foram realizadas as sessões de aplicação.

- Comunicar-se de modo matemático, argumentando, escrevendo e representando de várias maneiras as técnicas utilizadas na resolução da tarefa;

- Interagir com os colegas, cooperativamente, em grupos de quatro alunos, auxiliando-os e indagando quanto às técnicas utilizadas.

A intenção de definir tais objetivos foi criar um apoio sólido, palpável e concreto, que norteasse o nosso objeto de pesquisa. Ao iniciar o primeiro contato com os alunos, pensamos em desenvolver uma relação de interação, de maneira positiva, pois, em na prática pedagógica, é possível observar que os alunos não veem a Matemática como uma atividade prazerosa, pelo contrário, consideram-na enfadonha. Como nossa pretensão foi analisar as técnicas desenvolvidas por eles, fez-se necessário tornar o ambiente favorável aos momentos de estudo, ou seja, que eles se envolvessem com a matemática ao vivo, fazendo matemática, conforme indica Chevallard (1999).

Podemos dizer que nesta sessão não conseguimos atingir plenamente os três objetivos que propomos para mesma. No entanto encontramos indícios de que os alunos estavam envolvidos na resolução da tarefa que propusemos para esta sessão. Sendo assim, decidimos manter tais objetivos para as próximas sessões, pois entendemos que o envolvimento dos alunos em um ambiente de estudo se daria no decorrer da nossa pesquisa. Ficou então uma expectativa de ao longo do processo de aplicação encontrar técnicas que compõem organizações praxeológicas com as quais os alunos já tiveram contato. Ou até mesmo que os alunos pudessem desenvolver maneiras particulares para resolução dos problemas.

Foi esclarecido aos alunos que eles participariam de uma pesquisa desenvolvida no mês de dezembro de 2008 e ao longo do ano de 2009 e, que era importante, já naquele momento, que eles participassem de algumas sessões de trabalho, por meio das quais já teriam ideia de como seria a pesquisa.

Expusemos os objetivos da pesquisa esclarecendo que não queríamos dar nota, mas sim analisar a atividade matemática dos alunos, ou seja, nosso olhar seria dirigido às estratégias diferenciadas aplicadas na resolução de alguns problemas propostos.

Em seguida, dissemos a eles que o envolvimento de cada aluno seria fundamental para o sucesso do nosso trabalho coletivo. Quanto mais técnicas fossem desenvolvidas, mais detalhada seria a análise da atividade matemática e a classificação dos momentos de estudos evidenciados individualmente ou coletivamente.

Os alunos foram divididos em grupos de, no máximo, quatro participantes. Essa divisão ficou a cargo deles, e alguns optaram por afinidade, e outros, por proximidade. Não entrevistamos todos os grupos para saber os motivos que os levaram a escolher tal formação. Ao optarmos deixar a cargo dos alunos a escolha dos grupos, estávamos querendo criar um ambiente de liberdade, isto é, não queríamos interferir na escolha dos componentes de cada grupo, muito pelo contrário, entendíamos que o que nos interessava era a produção coletiva dos alunos independente das escolhas que fizessem.

Cada aluno recebeu uma folha em branco, com a orientação de que deveria registrar as técnicas e escrever, pelo menos, um comentário para cada técnica desenvolvida pelo grupo na tarefa proposta.

A tarefa foi escrita na lousa, com cabeçalho (ver anexo 1) e divisões que eles deveriam fazer em suas respectivas folhas, sendo separado o espaço para efetuarem os cálculos ou desenvolverem as técnicas, e um espaço distinto para os comentários.

Foi solicitado que um voluntário[11] compartilhasse a leitura da tarefa com os demais alunos da classe, a fim de que eles externassem entre si, no contexto do grupo, suas possíveis dúvidas, ou compartilhassem com os colegas o que haviam entendido.

No que diz respeito ao processo de compreensão do enunciado, fizemos algumas indagações, solicitando que um aluno comentasse o que o colega havia acabado de ler; dessa maneira, fizemos várias outras solicitações para os alunos comentarem o que haviam entendido, na tentativa de interpretar conjuntamente a tarefa. Finalmente, fizemos alguns esclarecimentos referentes ao que realmente era exigido na tarefa, e solicitamos que eles a resolvessem com seus respectivos grupos.

Recolhemos todos os registros produzidos pelos alunos e, em seguida, fizemos uma pré-seleção, agrupando as diferentes técnicas de resolução (ver anexo 2), para,

---

[11] Nós estamos considerando, no contexto dessa pesquisa, voluntário qualquer aluno da classe onde está sendo realizada a sessão de aplicação, que se dispusesse a ler ou comentar a leitura de outro colega.

então, procedermos a nossa análise à luz da Teoria Antropológica do Didático. Nesse sentido, decidiu-se também pela transcrição dos diálogos entre pesquisador e alunos, em protocolos para melhor esclarecimento e entendimento da dinâmica da sessão. Enfim, a leitura, a análise e a interpretação da produção dos alunos reuniram ações e palavras ditas por eles que pudessem contribuir para a explicação das organizações didática e matemática adotadas nos respectivos grupos.

A **segunda sessão** da pesquisa foi aplicada nos mesmos moldes da primeira, no dia 09 de junho de 2009, da Escola Municipal “João Evangelista Vieira de Almeida”, sendo agora em duas salas do 8º ano A e B. Como já havíamos feito anteriormente, expusemos os objetivos da sessão de aplicação, e esclarecemos que eles deveriam resolver a mesma tarefa com técnicas diferentes. A partir de então as salas de aula foram divididas em oito grupos de três ou quatro alunos, que trabalharam na resolução de um problema retirado, como aconteceu também nas outras sessões, do livro *Tudo é Matemática*, de Luiz Roberto Dante. Trata-se de um livro do 7º ano do EF.

Cabe lembrar que reforçamos aos alunos, de maneira verbal, que o envolvimento de cada um seria fundamental para o sucesso do nosso trabalho coletivo, pois quanto mais técnicas, desenvolvidas por eles, permitiria um análise detalhada da atividade matemática. Um aspecto interessante a ser considerado, por parte do pesquisador, quanto ao direcionamento da sessão de aplicação e quanto aos esclarecimentos é, que os alunos demonstravam uma motivação em participar da sessão. Sendo assim percebemos que seria possível encontrar na produção escrita deles alguns momentos de estudos tal qual propõe Chevallard (2001), e a classificação desses momentos de estudos evidenciados individualmente ou coletivamente, seriam primordiais para nossa análise.

Diante das perspectivas de atingir os objetivos da sessão, as recomendações feitas na sala de aula mereciam ser amplamente entendida pelos alunos, e como isso ocorreu na primeira sessão, pedimos que um voluntário fizesse um breve comentário do que foi proposto pelo pesquisador. Vários alunos levantaram a mão querendo dar seu ponto de vista, e ouvimos frases que iam ao encontro das nossas expectativas. Entre eles um aluno disse: ″professor, vamos, passe a tarefa, pois estou muito curioso″. A partir de então optamos em escrever na lousa a tarefa e, deixando então os alunos à vontade para resolvê-la.

Outro aspecto que consideramos fundamental, e aqui, deve ser levado em conta no processo de desenvolvimento da sessão, foram alguns diálogos que houveram entre alunos e pesquisador, que serão discutidos no capítulo 4 na parte referente à análise da produção dos alunos. Ao fim da sessão, recolhemos todas as folhas, isto é, produção escrita dos alunos, e em uma análise preliminar referente a esta produção organizamos as resoluções em uma tabela (ver anexo 3), sendo que em todos os alunos que estavam presentes, identificamos uma preferência em utilizar a técnica aritmética.

Diferentemente das sessões anteriores, a **terceira sessão** foi aplicada em apenas uma sala de aula, isto se deu devido à presença de algumas estagiárias do curso de nutrição que estavam desempenando seu trabalho com várias turmas da escola. Para Chervel (1990) o trabalho das estagiárias significa a participação de outras instituições no interior da escola, no processo de ensino e aprendizagem, na tentativa de incorporar ao cotidiano escolar as suas crenças e ideologias. A sala de aula que participou foi dividida, por nós, em oito grupos, sendo eles compostos de três ou quatro alunos, que trabalharam na resolução de um problema retirado do mesmo livro utilizado nas sessões.

Ressalta-se que a sessão foi aplicada no dia 10 de junho de 2009, e pela razão já mencionada anteriormente propusemos aos alunos uma tarefa que tivesse um enunciado claro e objetivo, ou seja, que fosse possível encontrar técnicas diferentes em um curto espaço de tempo. Quando optamos pela escolha da tarefa sabíamos que ela seria fundamental na interpretação e exploração das ações dos alunos na atividade matemática. Nesse sentido, passamos então a tarefa na lousa, para darmos prosseguimento no trabalho daquele dia.

A descrição e a análise dessa sessão, serão melhor explicitados no capítulo a seguir, para situar o leitor, assim como nas anteriores agrupamos as produções dos alunos em uma tabela (ver anexo 4), na tentativa de ter uma visão geral do que os alunos haviam produzido neste dia, para assim darmos prosseguimento às análises e discussões.

A descrição e a análise dos registros dos alunos que estão apresentadas no capítulo 4 desta pesquisa foram apoiadas nos procedimentos acima delineados, pois, em geral, as nossas sessões tiveram a mesma estrutura, e fizemos as descrições no capítulo já mencionado.

CAPÍTULO 4 - ANÁLISES

4.1 Considerações iniciais

Na presente análise procuramos identificar elementos das organizações didáticas e matemáticas propostas no livro didático Tudo é Matemática, da 6ª série que corresponde atualmente ao 7º ano do Ensino Fundamental, do autor Luiz Roberto Dante, do qual extraímos as tarefas que fazem parte das sessões de aplicação desta pesquisa. Sendo assim passaremos a discutir os elementos das praxeologias que os alunos em questão produziram. Podemos supor que os elementos ou praxeologias que os alunos efetivamente registraram são composições de organizações didáticas e matemáticas com as quais tiveram contato durante sua vida escolar.

Compondo essa parte da pesquisa, nosso ponto de partida são as noções da TAD proposta por Chevallard (1999) e também as ideias de Chervel (1990), conhecimentos estes que estiveram presentes durante as sessões de aplicação e nos registros de pequenos diálogos que também analisaremos como produção dos alunos. Tendo em vista o livro didático como praxeologia prescrita, isto é, as orientações aos professores que estão presentes na obra do autor do livro didático já citado, considerando também que o livro em questão é do professor e tem uma parte reservada para as orientações pedagógicas, os comentários feitos por nós serão a respeito das ideias que julgamos ser elementos de uma, ou mais organizações praxeológicas.

Antes mesmo de explorarmos a produção escrita do autor do livro didático e a produção escrita dos alunos, iremos analisar os discursos que estão presentes dentro dos PCN e do Guia do PNLD (2008) para, de modo geral, encontrarmos elementos que valorizem a vulgata na resolução de problemas.

4.2 Análises das orientações oficiais (PCN, PNLD)

As orientações oficiais são documentos elaborados com pressupostos teóricos que embasam os ensinos em diferentes níveis do Ensino Fundamental, ou melhor, são referências de qualidade para o Ensino Básico, no Brasil, elaboradas por equipes de especialistas designadas pelo Ministério da Educação e Cultura (MEC), órgão do Governo Federal. O seu objetivo é propiciar subsídios à elaboração e à reelaboração do currículo escolar, tendo em vista que o projeto pedagógico deve estar em função da cidadania do aluno e de uma escola em que, supostamente, se aprende mais e melhor.

Os PCN e o guia do PNLD foram criados como uma proposta inovadora e abrangente e expressam o desejo do governo de melhorar a qualidade do ensino. Ao contrário do que muitos imaginam eles não são regras impostas, mas sim uma base de sustentação na Educação brasileira. Segundo Farias (2007) os PCN são fontes que podem contribuir para o processo de ensino e aprendizagem como dispositivos que favorecem tanto aluno como professor no desenvolvimento de competências. Para essa pesquisadora o guia do PNLD exerce influência direta na produção dos livros didáticos, pois, o guia trata-se do discurso expresso por sujeitos coletivos que tem uma relação direta com a área da Educação Matemática. A partir de agora discutiremos algumas ideias que estão presentes nas resenhas dos PCN e no guia do PNLD.

4.2.1 Análises da Resenha dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática

Os Parâmetros do Ensino Básico Brasileiro, para melhor entendimento, no contexto desta pesquisa, foram subdivididos em oito categorias, inicialmente selecionamos todas as frases contidas no texto dos PCN de Matemática, em seguida as organizamos em categorias, sendo elas: história, tecnologia, metodologia, conceito de resolução de problemas, cotidiano, domínios de estudo, valores educativos da resolução de problemas, dificuldade. Essas categorias foram organizadas em uma tabela (ver anexo 5), a partir de trechos do texto do PCN de Matemática voltados à resolução de problemas.

A categoria *História* parte do próprio conceito de História, que quer dizer o estudo da vida humana através do tempo, o que fizeram, pensaram ou sentiram enquanto seres sociais. A evolução histórica da Matemática foi construída como resposta à solução de diversos tipos de problemas matemáticos durante a trajetória humana. Podemos citar problemas relacionados com a medida de terras, cálculo de créditos, problemas vinculados a outras ciências e investigações internas, como, por exemplo, o surgimento do zero como representação numérica.

Para ilustrar, serão usados trechos dos Parâmetros Curriculares Nacionais que traduzem a ideia contida na categoria acima definida:

> Desse modo, é possível visualizar melhor a dimensão da História da Matemática no currículo da escola fundamental como um campo de problemas para construção e evolução dos conceitos e como um elemento de integração da Matemática com o tema Pluralidade Cultural. Conhecer os obstáculos enfrentados pelo homem na produção e sistematização desse conhecimento também pode levar o professor a uma melhor compreensão e aceitação das dificuldades enfrentadas pelos alunos e pensar em estratégias mais adequadas para favorecer a aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos (BRASIL, 1998, p. 33).

Acreditamos que a origem da Matemática seja muito mais antiga do que a da arte de escrever, e que, nos últimos seis milênios, o homem conseguiu fazer os registros de seus conhecimentos através da escrita, o que é de suma importância para o entendimento da evolução e da construção dos conceitos e procedimentos, bem como da sistematização do saber matemático. Essa história vem sendo evidenciada e deve ser comparada com a história das disciplinas escolares. Tal como define Chervel (1990), no caso específico da linguagem matemática, a cultura escolar foi selecionando uma linguagem própria a tal ponto de existirem, hoje, diferentes registros que aparecem no ensino da Matemática elementar, tal qual o registro escrito da linguagem materna, o registro numérico e o registro gráfico, entre vários outros mencionados por Chevallard (1998).

Para que avancemos na compreensão de uma sociedade contemporânea, não devemos desprezar a história das civilizações, os problemas de ordem prática que motivaram esses povos a desenvolver métodos e técnicas que poderíamos interpretar como as praxeologias. As observações feitas por essas civilizações foram decisivas para a construção do saber matemático, conforme posto para nós nos dias atuais.

Na categoria *Tecnologia*[12], são classificadas todas as frases que dizem respeito a tudo aquilo que o ser humano inventou, tanto em termos de artefatos, como métodos e técnicas para facilitar o seu trabalho. Como desenvolvimento das tecnologias, podemos citar o uso de calculadoras e computadores para a aprendizagem do saber matemático na resolução de problemas.

---

12 É um termo bastante abrangente. Dependendo do contexto, a tecnologia pode ser as ferramentas e as máquinas que ajudam a resolver problemas, as técnicas, conhecimentos, métodos, materiais, ferramentas, e processos usados para resolver problemas ou ao menos facilitar a solução dos mesmo, a aplicação de recursos para a resolução de problemas. Esta tecnologia à qual nos referimos é diferente do termo "tecnologia" utilizado na TAD que tem um sentido diferente, e já explicado anteriormente no referencial teórico.

> Em função do desenvolvimento das tecnologias, uma característica contemporânea marcante no mundo do trabalho, exigem-se trabalhadores mais criativos e versáteis, capazes de entender o processo de trabalho como um todo, dotados de autonomia e iniciativa para resolver problemas em equipe e para utilizar diferentes tecnologias e linguagens (que vão além da comunicação oral e escrita). Isso faz com que os profissionais tenham de estar num contínuo processo de formação e, portanto, aprender a aprender torna-se cada vez mais fundamental. (BRASIL, 1998, p. 27)

Temos que admitir que o impacto dos recursos tecnológicos tem exercido grande influência no que diz respeito ao ensino e à aprendizagem, obrigando professores e profissionais das salas de tecnologias a atualizarem-se continuamente mediante cursos de formação continuada. Será que os recursos tecnológicos vieram para dinamizar as formas de ensinar?

Comenta-se, hoje, que o indivíduo que não sabe usar um caixa eletrônico para sacar dinheiro, usar um computador para consultas pessoais ou acadêmicas, ou não sabe usar os aparelhos eletroeletrônicos, terá grande dificuldade no mercado de trabalho. Assim, os trabalhadores se veem na contingência de se atualizarem constantemente e desenvolverem sua autonomia para aprender. Com isso, ao se depararem com problemas referentes ao uso das novas tecnologias, desenvolverão estratégias para solucioná-los.

A categoria *Metodologia* é definida pelos procedimentos utilizados na resolução de problemas, sejam eles de ordem técnica, ou as habilidades e os métodos utilizados para resolver problemas. A metodologia é uma ação ordenada que orienta a realização de um objetivo. Então, ensinar um procedimento significa levar o aluno a ser protagonista da construção do seu próprio conhecimento, despertando-lhe a vontade de aprender fazer, de saber agir de modo eficaz.

> Em 1980, o National Council of Teachers of Mathematics NCTM, dos Estados Unidos, apresentou recomendações para o ensino de Matemática no documento. Agenda para Ação. Nele a resolução de problemas era destacada como o foco do ensino da Matemática nos anos 80. Também a compreensão da relevância de aspectos sociais, antropológicos, linguísticos, além dos cognitivos, na aprendizagem da Matemática, imprimiu novos rumos às discussões curriculares. (BRASIL, 1998, p. 20)

Há algum tempo, pesquisadores (SHOENFELD 1978; LAKATOS, 1978; KILPATRICK, 1987; CARAÇA, 1989;) têm levantado a bandeira da metodologia da resolução de problemas para o ensino da Matemática, pois utilizar problemas para ensinar um conceito ou conteúdos matemáticos é algo que faz parte da cultura escolar.

Entendemos conforme indica Chervel (1990), que isso já se constituiu em uma *vulgata* presente nos anos 80, que perdura nos dias atuais, pois identificamos, com esse extrato, um discurso no PCN, referente a discussões sobre a reestruturação curricular de Matemática, na tentativa de tornar o aluno mais crítico e atuante no processo ensino e aprendizagem.

Se os procedimentos forem utilizados para ensinar Matemática como uma ação ordenada e consciente, e não como ato isolado, a resolução de problemas pode se tornar significativa, desde que seja proposta com uma abordagem articulada com o cotidiano do aluno.

Na categoria *Conceito de resolução de problemas*, são classificadas todas as unidades e significados, que dizem respeito a um recurso em que o aluno analise, formule hipóteses, discuta possibilidades e compare resultados de forma reflexiva, desenvolvendo competências.

> O problema certamente não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório. Só há problema se o aluno for levado a interpretar o enunciado da questão que lhe é posta e a estruturar a situação que lhe é apresentada. (BRASIL, 1998, p. 40)

Para muitas pessoas, estudar Matemática é saber resolver problemas. Temos, entretanto, que considerar que existem vários tipos de problemas, entre eles aqueles com única solução, os com solução aberta e os sem solução. É preciso ainda considerar a complexidade de se entender o que é um problema, pois o que pode ser problema para um, pode significar um mero exercício para outro.

Em *Cotidiano,* outra categoria proposta, são classificadas todas as unidades de significado que dizem respeito à inclusão da realidade social que habilita o aluno a resolver problemas, sejam com situações cheias de estímulos, cores e imagens, de forma que ele perceba o mundo à sua volta e desenvolva a curiosidade e o espírito de investigação, além da capacidade de desenvolver procedimentos que sejam possíveis para resolver problemas.

> Os Parâmetros Curriculares Nacionais explicitam o papel da Matemática no ensino fundamental pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo à sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Destacam a importância de o aluno

> desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a auto-estima, de respeitar o trabalho dos colegas. (BRASIL, 1998, p. 15)

Vale lembrar que cada aluno tem uma visão de mundo diferenciada, havendo uma necessidade real de valorizar essa visão, bem como de ajudá-lo a entender o mundo que está à sua volta. Também o desenvolvimento da capacidade de resolver problema estimula o interesse, a curiosidade e o espírito de investigação. Considera-se que os problemas relacionados com o dia a dia do aluno são necessários na formação de suas capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na rapidez do raciocínio.

Estamos admitindo como categoria *Domínios de Estudo*, os conteúdos que são organizados nos PCN nos seguintes blocos: números e operações, espaço e forma, grandezas e medidas e tratamento da informação. Esses blocos ou domínios de estudo seguem a uma seqüência ou ordem defendida por Chervel (1990) para compor a estrutura lógica referente aos temas de estudo. E essa seqüência ou ordem por sua vez será mantida na elaboração das coleções que são avalizadas pelo guia do PNLD.

> Integrarão este bloco estudos relativos a noções de Estatística e de probabilidade, além dos problemas de contagem que envolvem o princípio multiplicativo. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos. (BRASIL, 1998, p. 52)

No cenário atual, essa relação entre os conteúdos propostos e prescritos no anos finais do Ensino Fundamental é bem observada pelos autores das coleções de livros didáticos. De maneira geral os livros contemplam o estudo sistematizado dos conhecimentos matemáticos que se pretende ensinar. Além disso, a abordagem desses conteúdos com a resolução de problemas pode ser considerada como uma vulgata emergente na tentativa de tornar significativo o estudo da Matemática.

Na categoria *Valores Educativos da Resolução de Problemas* estão classificadas todas as frases que correspondem ao desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, testar, formular hipóteses, investigar, argumentar e justificar. Dessa forma, a partir de determinadas informações, isso evidencia uma concepção de ensino e aprendizagem, não pela mera reprodução de conhecimentos, mas pela ação refletida a partir de determinados problemas que admitem diferentes respostas em função de certas condições.

> Para atender às demandas do trabalho contemporâneo, é inegável que a Matemática pode dar uma grande contribuição à medida que explora a resolução de problemas e a construção de estratégias como um caminho para ensinar e aprender Matemática na sala de aula. Também o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar, justificar e o estímulo à criatividade, à iniciativa pessoal e ao trabalho coletivo favorecem o desenvolvimento dessas capacidades. (BRASIL, 1998, p. 34)

Os educadores matemáticos há algum tempo, não trabalham a Matemática pela Matemática, visto ter surgido a necessidade de se substituir a antiga Matemática do "porque sim" pela Educação Matemática que apresenta uma proposta pedagógica diferenciada, que permite um trabalho muito mais contextualizado e voltado à busca de resposta e à aplicação dos conceitos matemáticos no cotidiano do aluno.

Já na categoria *Dificuldades*, são classificadas todas as unidades de significados que dizem respeito às deficiências de alunos nas questões relacionadas com a resolução de problemas. Tais dificuldades ocorrem devido à maneira isolada ou, simplesmente, como mera reprodução artificial de uma operação Matemática na resolução de problemas.

> As provas de Matemática aplicadas em 1993, pelo Sistema Nacional de Avaliação Escolar da Educação Básica . SAEB . indicavam que, na primeira série do ensino fundamental, 67,7% dos alunos acertavam pelo menos metade dos testes. Esse índice caía para 17,9% na terceira série, tornava a cair para 3,1%, na quinta série e subia para 5,9% na sétima série. Nas provas de Matemática, aplicadas em 1995, abrangendo alunos de quartas e oitavas séries do ensino fundamental, os percentuais de acerto por série/grau e por capacidades cognitivas, além de continuar diminuindo à medida que aumentavam os anos de escolaridade, indicavam também que as maiores dificuldades encontravam-se nas questões relacionadas à aplicação de conceitos e à resolução de problemas. (BRASIL, 1998, p. 23-24)

Existe uma preocupação muito grande com o ensino e com a aprendizagem de Matemática, principalmente com as dificuldades que os alunos apresentam em lidar com os conceitos, linguagem, simbologia e registros próprios dessa disciplina.

É possível citar as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução de problemas, e acreditamos que essas dificuldades estejam relacionadas à falta de articulação dos conceitos matemáticos e aos problemas propostos nos livros didáticos contemporâneos. Essa questão também pode estar ligada ao fato de o professor trabalhar de maneira isolada, ou apenas com a aplicação de um conceito matemático para a resolução de problemas.

Os indicadores revelam que o aproveitamento da aprendizagem de Matemática vem diminuindo. Quanto maior a série, menor o seu desempenho em Matemática, principalmente nos itens que se referem à resolução de problemas.

Nós enquanto pesquisadores queremos estar atentos quanto a resolução de problemas como uma metodologia para o ensino da Matemática. Neste contexto, a noção de problema ou tarefa deve ser assumida como um dispositivo didático utilizado para se trabalhar um determinado objeto matemático. Sendo assim, quando dedicamos um espaço para discutir o conceito de cultura escolar e mais particularmente a vulgata, como componentes das orientações aos professores nos discursos dos PCN e do guia do PNLD estamos pretendendo perceber as influências que tais documentos exercem no ensino e aprendizagem de matemática.

A prática humana guiada por uma intencionalidade que dá sentido à atividade matemática, ou ainda, tudo que ocorre no entorno da instituição escolar articula-se entre si de forma espacial e temporal através de práticas históricas e sociais, que dão significado ao existir humano.

Se considerarmos os procedimentos utilizados para ensinar Matemática como uma ação ordenada e consciente, e não como ato isolado, a resolução de problemas pode se tornar significativa desde que seja proposta de maneira articulada com o cotidiano do aluno.

Os PCN de Matemática propõem que sejam adotadas praxeologias didáticas que conduzam o aluno a: analisar, formular hipóteses, discutir possibilidades, comparar resultados de forma reflexiva, desenvolvendo competências.

4.3 Análises do livro didático

Este espaço é dedicado a analisar as organizações praxeológicas de um autor de um livro didático, que serviu tanto como fonte de pesquisa como também de banco de tarefas. Dele foram retiradas as tarefas utilizadas na aplicação das sessões de estudo. É importante esclarecer que a análise realizada refere-se somente ao capítulo dedicado ao estudo do conteúdo matemático, equações do primeiro grau com uma variável e não ao livro todo. E para melhor interpretação do leitor iremos descrever melhor as seções propostas pelo autor do livro didático.

Optamos inicialmente por selecionar livros que foram aprovados pelo guia do PNLD (2008), pois as turmas nas quais estávamos desenvolvendo nossa pesquisa tiveram contato com os livros do último guia do PNLD. Acreditamos que as técnicas utilizadas pelos alunos, em parte foram influenciadas por obras que foram escritas nesse período e até quem sabe, em edições anteriores. Cabe ressaltar que no primeiro levantamento quanto às frases escolhidas por nós foi possível separar cinco coleções sendo elas: Matemática hoje é feita assim; Matemática para todos; Educação Matemática; Projeto araribá; Tudo é Matemática.

O livro analisado foi: Tudo é Matemática, do autor Luiz Roberto Dante, Editora Ática, reiterando que o livro em questão é do professor, e que em seu interior existe uma parte dedicada ao professor, chamada pelo autor de manual pedagógico. Para selecionar tal coleção, recorremos ao guia do PNLD (2008) e, dele foram retiradas e selecionadas algumas frases, transcritas a seguir, que serviram de critério de escolha.

1. O livro usa a resolução de problemas para introduzir conteúdos matemáticos.
2. Procura levar o aluno a atribuir significados aos conceitos matemáticos.
3. Propõe desafios ou problemas desafiadores.
4. O manual do professor apresenta a resolução dos problemas.
5. Dá dicas para a resolução dos problemas.
6. Apresenta diferentes estratégias para a resolução dos problemas.
7. Apresenta problemas do cotidiano.
8. Modela os problemas em uma equação do 1º grau.
9. Apresenta um bloco de resolução de problemas no início, meio ou fim de cada capítulo.
10. Apresenta problemas abertos.

De posse dessas frases, fizemos uma varredura nas coleções que estão presentes no Guia do PNLD (2008), na tentativa de encontrar uma coleção que atendesse a maior quantidade das frases mencionadas anteriormente.

A eliminação das demais coleções foi feita por nós e isso ocorreu porque as frases destacadas acima não estavam presentes nas resenhas das mesmas. A opção em pesquisar no livro didático já mencionado justifica-se por ele ter atendido oito das dez frases, só não atendeu as frases 2 e 10. Nossa intenção é estudar as propostas metodológicas e as organizações didática e matemática dessa obra, como elementos que compõem o ensino e aprendizagem do conteúdo matemático.

Além desses critérios, justifica-se a escolha dessa coleção devido ao grande sucesso de vendas nas escolas da REME, bem como em todo o território nacional, outro fator foi a diversificação de registros de linguagens e técnicas para a resolução de equações do primeiro grau.

Feitas algumas justificativas quanto à escolha da coleção didática de Matemática, são apresentadas, a seguir, as análises praxeológicas do livro selecionado.

A seguir, será dado início às análises dos encaminhamentos do autor do livro. Inicialmente, serão descritos como o autor faz o encadeamento da organização didática, e depois serão discutidos os demais elementos da organização praxeológica.

4.3.1 Divisão dos Capítulos em Seções Segundo o Autor do Livro

O presente livro em análise foi dividido em duas partes pelo autor, sendo a primeira dedicada ao aluno juntamente com as respostas às atividades propostas, a segunda destinada ao professor contendo as observações e sugestões metodológicas composta pelo Manual do Professor. O livro é divido em quinze seções, sendo elas: apresentação; sumário; introdução; trocando ideias; você sabia que; desafio; raciocínio lógico; curiosidade matemática; Brasil em números; revisão cumulativa; para ler, pensar e divertir-se; glossário; respostas; leituras complementares: para você aprender Matemática e gostar mais dela; referências bibliográficas. A fim de termos uma noção geral do livro faremos alguns comentários quanto às seções.

O autor dedica um espaço para apresentar a sua obra ao aluno com um texto destacando a importância da Matemática para a vida. Esse diálogo o autor nomeia de *apresentação,* ela aparece uma única vez. Em seguida é apresentado o *sumário,* que nada mais é do que a enumeração dos capítulos e das demais seções do livro didático.

Durante toda sua obra, o autor inicia cada capítulo, com uma *introdução* cuja análise será feita em momento oportuno; esse espaço tem por objetivo dar uma ideia geral do que será apresentado durante o capítulo. A partir de então, surgem várias seções que permeiam toda a sua obra, na tentativa de estimular uma discussão entre os alunos. Aparece em diversas páginas a seção *trocando idéias,* dedicada especificamente à conversa informal entre os alunos.

A seção *Você sabia que...,* segundo o autor, "geralmente traz uma informação ou uma curiosidade que será usada pelo aluno", e também fotos de personagens que permearam a história da Matemática, bem como pequenos textos que relatam seus feitos. Para exemplificar ele traz à tona o modo como os alemães chamavam a incógnita de “coisa”. Em seguida, ele transcreve como seria a redação de um problema: *O dobro da coisa mais um é igual a 9. Qual é o valor da coisa?*

Diante do exposto, percebemos que o autor está preocupado em atender as orientações dos PCN de Matemática e articular o estudo do conteúdo com a história da Matemática. Enfim, durante todo o capítulo, ele tenta convencer o leitor com esses alertas, *Você sabia que,* de certa forma, é uma maneira de interagir com o aluno, pois não se sabe se realmente, o professor dará a devida importância que o autor está propondo no manual pedagógico.

É dedicado um espaço para atividades, segundo o autor, *mais complexas,* que ele chama de *Desafios;* durante todo o capítulo destinado as equações do primeiro grau com uma incógnita, são evocados sete deles. Não se pode, porém, dizer que existem somente esses, ou que talvez realmente todos sejam potencialmente desafiadores. Na página 120, é solicitado ao aluno que resolva o *Desafio Escreva na forma decimal o resultado da seguinte divisão: 0,121212...: 0,555...* Diante disso, a solução dessa tarefa não é algo complexo, e muito menos desafiador. Para o aluno, pode ser algo complexo, entretanto não podemos dizer que seja desafiador.

Outra parte que também tem a mesma intenção do autor é a do *raciocínio lógico,* um espaço dedicado a desenvolver o raciocínio, que ele define como: "atividades que estimulam o aluno a pensar logicamente", mas o que chama a atenção é que neste capítulo em análise só tem uma tarefa que contemple essa seção. Solicita-se ao aluno que encontre a solução da seguinte tarefa: *Uma tora de madeira será cortada por uma serra em 5 partes. São necessários 3 minutos para serrar cada parte. Quantos minutos serão gastos para obter as 5 partes?*

Quando o autor propõe esse desafio ao aluno, logo depois de ensinar várias *técnicas* resolutivas de uma equação do primeiro grau, principalmente após dar dicas de como modelar uma situação-problema em uma equação percebemos que se o aluno for tentar modelar o problema em uma equação do primeiro grau encontrará dificuldades, pois, segundo o nosso entendimento, no caso específico desse desafio não há necessidade de se recorrer à *técnica* algébrica da equação do primeiro grau, mas apenas à utilização de operações aritméticas, ou de tentativa para encontrar a solução.

Na continuidade, destacamos a intenção do autor de despertar no aluno o interesse pelo estudo. Ele chama essa seção de *curiosidade matemática*, e a considera como *fatos e propriedades curiosos para motivar o estudo do aluno.* O que nos impressiona é que neste capítulo existe somente uma *curiosidade matemática;* será, então, que os alunos irão estudar uma única vez? Ou melhor, serão motivados para o estudo apenas uma vez?

Há outra seção na qual também aparece uma única vez, *Brasil em números.* Existe aqui uma preocupação do autor em iniciar uma discussão ou conversa com o aluno, que ele define como: "leituras sobre os dados brasileiros que serão usados pelo aluno". Além disso, é solicitado ao professor: "Estimule-os a interpretá-los, a criar situações-problema, a fazer comparações e a identificá-los com assuntos já estudados". Para esta pesquisa a sugestão é importante, porém não se vê tanta utilidade para o conteúdo matemático equações do primeiro grau, que está sendo contemplado no capítulo, pois estamos interpretando essa seção desvinculada do contexto apresentado, e apenas como cumprimento da seqüência adotada pelo autor.

A *revisão cumulativa* segundo o autor, "são atividades, problemas e testes que revisam contínua e cumulativamente os procedimentos fundamentais estudados nos capítulos e séries anteriores". Ou seja, faz uma retomada de tudo o que foi discutido com tarefas, que ora são de múltipla escolha, ora de solução a cargo do aluno, sem múltipla escolha; utiliza, também, um *desafio,* tal qual foi descrito anteriormente.

A seção *para ler, pensar e divertir-se,* "traz uma leitura sobre o assunto do capítulo, um desafio e um divertimento, é a página de encerramento de cada capítulo". Em particular, as histórias normalmente são adaptações de textos históricos, podemos citar o resgate que é feito quanto à álgebra e de suas variações até chegar à notação utilizada hoje na escola.

Na parte *pensar*, é proposta uma situação hipotética em que se solicita ao aluno que encontre a idade de um pai e de um filho com a utilização de alguns conceitos matemáticos. Finaliza-se o capítulo com a parte *divirta-se* propondo ao aluno que adivinhe a idade de um amigo com a utilização de algumas operações aritméticas, mas na realidade o que está se esperando é que o aluno entenda que o conceito de equação do primeiro grau também está presente na adivinhação.

Após essas descrições, retomamos a análise praxeológica, na tentativa de darmos continuidade ao estudo do conteúdo Matemático. O autor inicia o capítulo com um tipo de tarefa, na qual é solicitado ao aluno que *encontre o valor numérico de uma expressão algébrica*. Para isso, ele utiliza um espaço que permeia toda a sua obra, *trocando ideias* e usando um texto acompanhado de uma situação hipotética e um cartaz para retomar as discussões feitas anteriormente. Em seguida, é solicitado ao aluno que resolva as tarefas.

Na seqüência, o autor propõe ao aluno que resolva algumas equações mentalmente. Para isso, utiliza dois personagens: Caio[13] um menino de etnia branca, e uma menina chamada Marilia [14] de etnia negra, na tentativa de interagir com o leitor. Podemos inferir que a utilização por parte do autor, desse registro de linguagem, definido por nós anteriormente, como diálogo com personagens, carrega um não ostensivo relacionado com discussão étnica, e já identificado por nós, e tão presente na sua obra, pois a menina é de cor negra e o menino de cor branca.

Em seguida, é solicitado aos alunos que resolvam (entre si) várias tarefas, com a utilização de técnica de cálculo mental, podendo-se dizer que o autor está querendo que os alunos trabalhem com a técnica, segundo a definição dos momentos de estudo, proposta por Chevallard (2001). Além disso, quando aparece o ostensivo gráfico em forma de balão, ocorre o *momento de institucionalização* de uma *técnica*, mais que isso, quando, na fala de Marília, aparecem as palavras *raízes*, ou *soluções da equação,* dá-se a institucionalização de elementos tecnológicos e teóricos.

---

13 Eu pensei assim: Qual é o número que multiplicado por 3 é igual a 15? É o 5, pois 3.5 = 15. Logo x = 5 é a solução da equação 3x = 15.

14 Que número elevado ao quadrado (ele vezes ele) é igual a 16? Pode ser +4 e pode ser -4, pois $(+4)^2$ = 16 e $(-4)^2$ = 16. Logo, +4 e -4 são soluções ou raízes da equação.

E toda essa organização didática é justificada no manual pedagógico: "Procura-se desenvolver conceitos, procedimentos e atitudes positivas em relação a esta parte da Matemática com o uso de situações contextualizadas[...]", há uma preocupação de se tornar o ensino da Matemática algo palpável, que estimule os alunos a descobrirem as respostas. Isso pode ser comprovado com a continuidade da posição do autor "[...]evitando cálculos enfadonhos e desprovidos de significado, próprios, do ensino de Matemática do passado".

Será que realmente essa preocupação de não tornar a Matemática algo enfadonho está sendo alcançada? Ou essas situações são realmente “contextualizadas”? É bom salientar que não se tem garantia de que o professor, ao ministrar suas aulas, utilize todos esses recursos.

No guia do PNLD (2008, p. 63), é elogiado o trabalho do autor quanto à "boa apresentação da linguagem algébrica, a clareza na apresentação dos papéis das letras". Não obstante, aparece uma crítica referente ao cálculo algébrico. "Contudo, no livro da 6ª série, é dada demasiada atenção ao cálculo algébrico, que é um assunto bastante técnico".

Na parte dedicada aos *Pré-requisitos para a resolução de equações,* o autor começa justificando ao aluno que nem toda equação do primeiro grau pode ser resolvida mentalmente, com isso, entende-se que, como diz Chevallard (2001), a técnica empregada é limitada, e que existem outras técnicas de maior alcance. Propõem-se, então, várias tarefas.

O objetivo dessas tarefas é enunciar as propriedades da adição, multiplicação, distributiva, igualdade e operações inversas. E tudo isso caracteriza que elementos teóricos tecnológicos estão sendo institucionalizados por meio de tarefas. Uma das preocupações dos pareceristas do PNLD quanto ao trabalho do autor, é o exagero de institucionalizar o conteúdo matemático através de tarefas, ou melhor, de várias tarefas.

De acordo com o exposto, o que se compreende é que o autor é fiel a sua opção didática e isso pode ser percebido no extrato a seguir:

> Assim, neste capítulo, são abordadas as seguintes dimensões da álgebra: aritmética generalizada, usando as letras como generalizações de modelos padrões aritméticos; estrutural, empregando as letras como símbolo abstrato, obtendo expressões algébricas equivalentes por meio de cálculos algébricos

> simples integrados a noções geométricas e de medidas; e, finalmente, como resolução de equações, em que as letras são incógnitas, sem haver necessidade de memorizar regras, dicas e atalhos sem significado, tais como "muda de membro, muda de sinal". (DANTE, 2005, p. 53)

Considerando-se o texto anterior, o autor atende a sua escolha, isto é, a sua organização praxeológica, mas fica a dúvida: será que o professor seguirá todas as etapas sugeridas pelo autor do livro didático? Outro aspecto que devemos destacar é o fato de o discurso, transcrito nesse extrato, não estar correspondendo com o que foi feito nas páginas de 105 até 107, pois selecionar todas aquelas tarefas, de certa forma, é uma maneira de memorizar as propriedades.

O autor continua propondo algumas reflexões quanto à sua organização praxeológica:

> O trabalho com equações é feito lentamente, explorando a resolução por cálculo mental, tentativa e erro, diagramas, operações inversas e idéia de equilíbrio (balanças), sempre por meio de situações-problema e enfatizando a compreensão do que é feito. Este tema será retomado em capítulos e volumes posteriores. (DANTE, 2005, p. 53)

Esse discurso, proposto pelo autor, foi comprovado pela análise desenvolvida no interior do capítulo, reiterando o que já foi descrito anteriormente; existe uma valorização do *cálculo mental* como técnica de resolução de um número limitado de equações do primeiro grau.

4.3.2 Análises praxeológicas do autor do livro didático

As discussões serão concernentes ao livro analisado e referem-se à introdução do conteúdo matemático *equações do 1º grau com uma incógnita*, tendo por objetivo a percepção e o entendimento de como a abordagem é feita por meio de situações-problema e, que possuem a intencionalidade de transformá-las para a linguagem algébrica.

No livro didático analisado, identificamos cinco tipos de tarefa, no sentido definido por Chevallard (1999). Para efeito de esclarecimento, esses tipos de tarefa serão denotados com **T** seguidos de um número de $_1$ a $_5$, os quais denominamos pelas seguintes expressões: (T_1) linguagem algébrica; (T_2) resolver um problema; (T_3) inventar uma equação e dar para o colega resolver; (T_4) verificar se a equação é verdadeira; (T_5) relacionar propriedades e igualdades algébricas. Esses tipos de tarefa não serão descritos; apenas enunciaremos os tipos de tarefas **T_1 e T_2**, que utilizamos no decorrer das sessões de aplicação.

Tipo de Tarefa T_1 – Linguagem Algébrica

Parte-se do tipo de tarefa que é denotada pelo símbolo T_1, nomeado de modelos de um problema, para a incorporação de todas as tarefas cujo enunciado propõe *representar por meio de uma expressão algébrica, de uma fórmula ou de uma equação uma situação a partir do fornecimento de alguns dados, ou da indicação de algumas operações a serem realizadas.*

A análise da OM do tipo de tarefa T_1 é iniciada por intermédio do exemplo: Pensei em um número, multipliquei-o por 4, tirei 7 e obtive 29. Em que número pensei? E por meio desse exemplo ilustramos uma tabela que contenha a técnica empregada, para uma expressão ou equação, bem como os elementos tecnológicos presentes na organização praxeológica proposta pelo autor do livro didático.

<table>
<tr><th>Técnica τ</th><th>Elementos tecnológicos</th></tr>
<tr><td>1) Identificar no enunciado a unidade de grandeza desconhecida.</td><td rowspan="6">• Conceito de incógnita.
• Conceito de equação do 1º grau, expressão e fórmula.

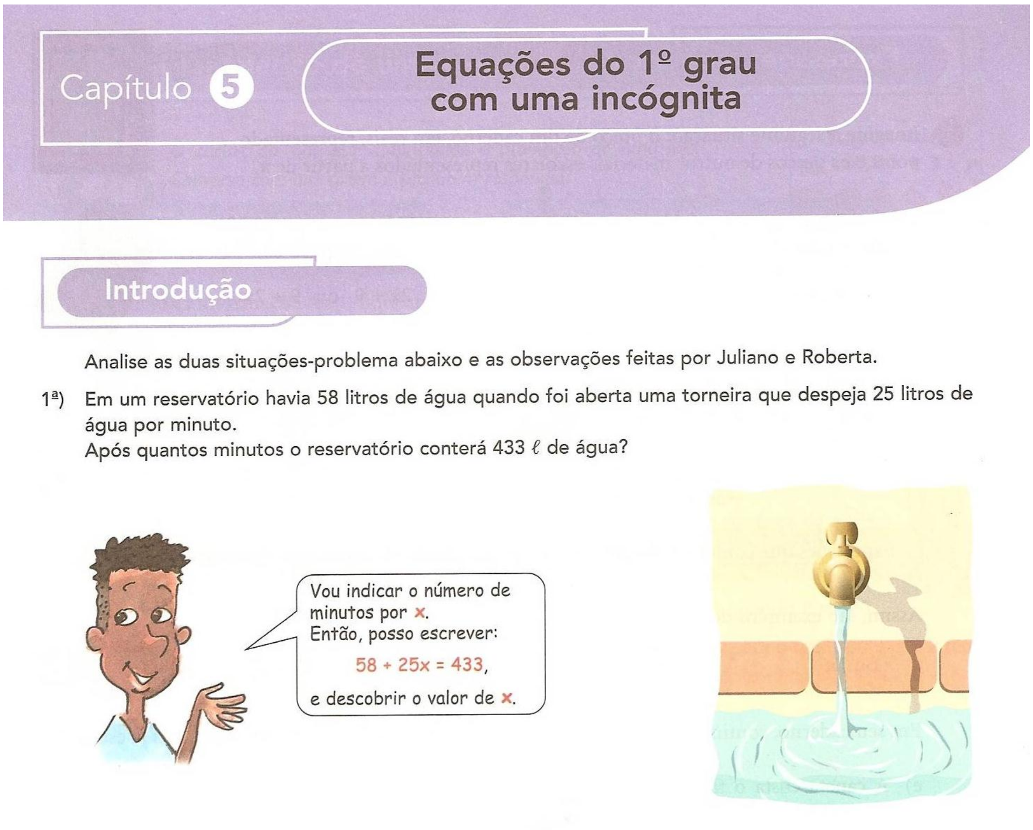
• Princípio de equivalência (Aditiva e Multiplicativa).

• Propriedade distributiva de equações algébricas

• Resolução de uma equação do 1º grau.</td></tr>
<tr><td>2) Representar a unidade desconhecida por x.</td></tr>
<tr><td>3) Identificar as operações algébricas com a incógnita a partir das informações indicadas no enunciado.</td></tr>
<tr><td>4) Montar a equação, expressão ou fórmula com os dados fornecidos.</td></tr>
<tr><td>5) Se for equação, reduzir a equação à forma $ax + b = c$ ou $ax = c$.</td></tr>
<tr><td>6) Resolver a equação, isolando o valor de x.</td></tr>
</table>

Tabela 1 - Descrição da técnica e dos elementos tecnológicos livro 1

Para visualizarmos os aspectos teóricos da organização matemática descritos na Tabela 1, uma parte relacionada à aritmética e outra à álgebra, associaremos o estudo de equações do primeiro grau com a incógnita. Ao analisar como foi conduzida essa organização matemática na resolução da tarefa t descrita da seguinte maneira: "*Em um reservatório havia 58 litros de água quando foi aberta uma torneira que despeja 25 litros de água por minuto. Quantos minutos o reservatório conterá 433 ℓ de água?*" O autor do livro revela os procedimentos cujos destaques da situação serão reproduzidos numa equação do primeiro grau que satisfaça as informações. Em primeiro lugar, é indicada a quantidade de minutos por *x*; em seguida, é escrita a equação completa por $58 + 25.x = 433$ e ao descobrir o valor de *x;* dessa maneira, foi satisfeito o tipo de tarefa descrita. Ao aplicar o primeiro passo da técnica, o autor indica a unidade de grandeza minutos por *x*. Nessa ação, ele satisfaz o 1º e o 2º passo; ao escrever a equação, é satisfeito o 3º e o 4º passo. Os passos seguintes não são satisfeitos, mas fica a cargo do professor encontrar o valor de *x* com os alunos. Na figura a seguir, encontra-se o extrato do livro referente à introdução.



Capítulo 5 Equações do 1º grau com uma incógnita

Introdução

Analise as duas situações-problema abaixo e as observações feitas por Juliano e Roberta.

1ª) Em um reservatório havia 58 litros de água quando foi aberta uma torneira que despeja 25 litros de água por minuto.
Após quantos minutos o reservatório conterá 433 ℓ de água?

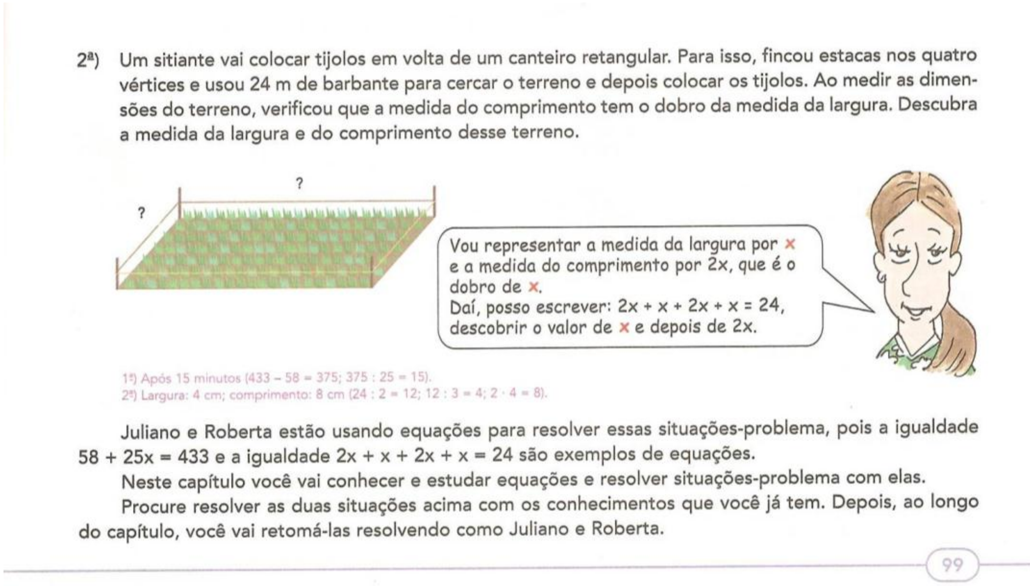
Figura 1 – Primeira situação-problema resolvida[15]

Esta análise, no que se refere à organização didática, identifica várias noções que já foram discutidas anteriormente, e o conjunto das tecnologias e teorias mobilizadas pelo autor do livro, que não estão tão evidentes, que foram destacadas nesta análise. Ao introduzir o conteúdo, equações do primeiro grau com uma incógnita, o autor propõe uma estrutura que lhe é peculiar, e a dividimos em 4 etapas. As três primeiras etapas associamos aos *momentos de estudo* proposto por Chevallard (1999), como *momento de*

15 Todas as figuras apresentadas nesse capítulo foram extraídas do Livro de Matemática do autor Luiz Roberto Dante, intitulado Tudo é Matemática (TM). Esta foi retirada da página 99.

institucionalização, e a última como sendo o *momento de trabalho com a técnica*, descritas da seguinte maneira:

Na primeira etapa, o autor inicia o capítulo 5 propondo duas situações-problema, sendo que a primeira descreve um *reservatório*, que já foi descrito anteriormente. De imediato, mostra um menino em forma de personagem falando, em um balão, como seria a maneira correta de se escrever uma equação matemática que permitisse resolver tal problema. Na segunda situação *(sitiante)*, propõe uma situação hipotética, em que um sitiante pretende cercar um canteiro retangular e, para isso, utilizará tijolos; é fornecido o perímetro e algumas informações que permitem saber as dimensões comprimento e largura. Também utiliza o mesmo ostensivo da primeira situação, porém, dessa vez, o personagem é uma menina. A ilustração pode ser verificada a partir do extrato abaixo:



2ª) Um sitiante vai colocar tijolos em volta de um canteiro retangular. Para isso, fincou estacas nos quatro vértices e usou 24 m de barbante para cercar o terreno e depois colocar os tijolos. Ao medir as dimensões do terreno, verificou que a medida do comprimento tem o dobro da medida da largura. Descubra a medida da largura e do comprimento desse terreno.

1ª) Após 15 minutos (433 – 58 = 375; 375 : 25 = 15).
2ª) Largura: 4 cm; comprimento: 8 cm (24 : 2 = 12; 12 : 3 = 4; 2 · 4 = 8).

Juliano e Roberta estão usando equações para resolver essas situações-problema, pois a igualdade 58 + 25x = 433 e a igualdade 2x + x + 2x + x = 24 são exemplos de equações.

Neste capítulo você vai conhecer e estudar equações e resolver situações-problema com elas.

Procure resolver as duas situações acima com os conhecimentos que você já tem. Depois, ao longo do capítulo, você vai retomá-las resolvendo como Juliano e Roberta.

99

Figura 2 – Segunda situação-problema resolvida[16]

Nesse extrato, fica evidente a intenção do autor de interagir com o leitor, o que pode ou não ocorrer, dependendo da abordagem adotada pelo professor, ou, também, devido à forma precipitada do autor em institucionalizar, isto é, escrever as equações que permitam resolver tais situações-problema na tentativa de introduzir o conteúdo matemático equações do primeiro grau com uma variável.

16 TM, p. 99

Na verificação das equações, podemos entendê-las como uma forma precipitada de mostrar, ou modelar uma situação hipotética. É bom lembrar que esse problema das torneiras faz parte da cultura escolar, e já há alguns séculos ele está sendo utilizado como um tipo de tarefa para a introdução ou o trabalho com a técnica; em vários livros, aparecem situações que envolvem torneiras.

Na segunda etapa, propõe-se ao leitor imaginar uma situação hipotética, em que o preço de um caderno é representado pela letra *x*, e o preço de outros materiais escolares é representado em função do preço do caderno, isto é, em função de *x*. Para melhor esclarecer a ideia contida nessa atividade, o autor apresenta quatro exemplos. No primeiro deles, supõe que o preço de um compasso seria o dobro do preço do referido caderno, ou seja, em termos algébricos *x + x ou 2.x ou 2x*. O que se entende, nesse momento, ao se trabalhar com os exemplos, é que se está institucionalizando a linguagem algébrica, ou promovendo-se a conversão da língua materna para o registro algébrico, que pode ser comprovado com o seguinte extrato:

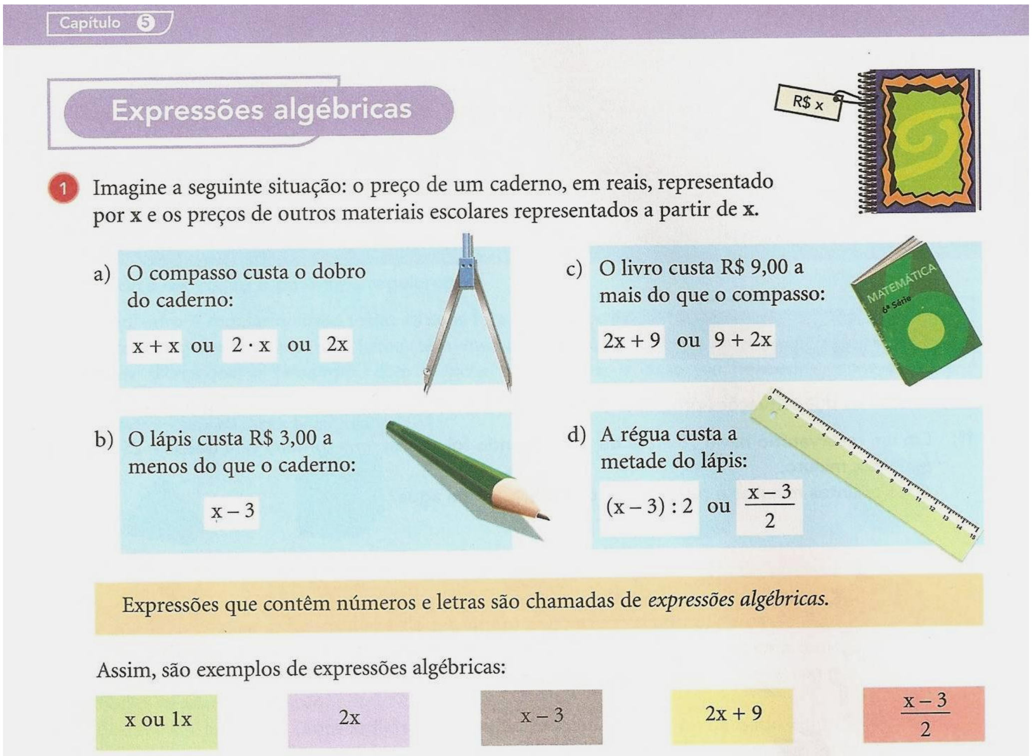


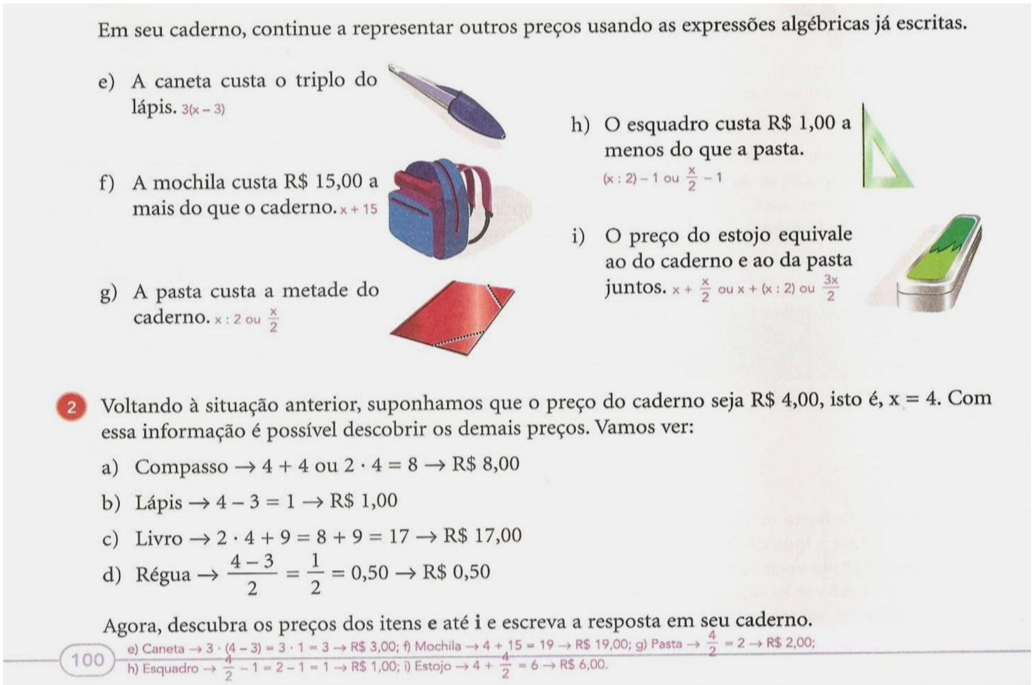
Figura 3 – Estabelecendo relações entre a linguagens através de uma técnica[17]

17 TM, p. 100

Dessa maneira, o autor procura generalizar propriedades das operações aritméticas, traduzindo situações-problema para linguagem matemática, conduzindo, assim, a introdução para a interpretação de expressões algébricas.

Em seguida, na terceira etapa, fica evidente o momento de institucionalização da linguagem algébrica, após desenvolver os exemplos com a seguinte frase: *Expressões que contêm números e letras são chamadas de expressões algébricas.* De imediato retomam-se os exemplos que foram desenvolvidos anteriormente, formalizando a linguagem algébrica.

Na quarta etapa, é proposto para o aluno que continue a representar outros preços usando as expressões que já foram escritas. Identificamos, então, que, no momento de trabalho com a técnica, existe uma particularidade, pois, para que o aluno possa responder às atividades, terá que recorrer aos exemplos propostos anteriormente. Isso se evidencia quando se solicita ao aluno que encontre o preço da caneta que custa o triplo do lápis, pois já foi demonstrado que o preço hipotético do lápis seria o preço do caderno menos R$ 3,00. Espera-se, assim, que o aluno escreva a expressão *3.(x-3)*, que é a representação da expressão algébrica. Essa etapa pode ser bem exemplificada com o seguinte extrato.


Em seu caderno, continue a representar outros preços usando as expressões algébricas já escritas.

e) A caneta custa o triplo do lápis. $3(x-3)$

f) A mochila custa R$ 15,00 a mais do que o caderno. $x+15$

g) A pasta custa a metade do caderno. $x:2$ ou $\frac{x}{2}$

h) O esquadro custa R$ 1,00 a menos do que a pasta. $(x:2)-1$ ou $\frac{x}{2}-1$

i) O preço do estojo equivale ao do caderno e ao da pasta juntos. $x+\frac{x}{2}$ ou $x+(x:2)$ ou $\frac{3x}{2}$

2 Voltando à situação anterior, suponhamos que o preço do caderno seja R$ 4,00, isto é, x = 4. Com essa informação é possível descobrir os demais preços. Vamos ver:

a) Compasso $\rightarrow 4+4$ ou $2 \cdot 4 = 8 \rightarrow$ R$ 8,00

b) Lápis $\rightarrow 4-3 = 1 \rightarrow$ R$ 1,00

c) Livro $\rightarrow 2 \cdot 4 + 9 = 8 + 9 = 17 \rightarrow$ R$ 17,00

d) Régua $\rightarrow \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2} = 0{,}50 \rightarrow$ R$ 0,50

Agora, descubra os preços dos itens **e** até **i** e escreva a resposta em seu caderno.

100 e) Caneta $\rightarrow 3 \cdot (4-3) = 3 \cdot 1 = 3 \rightarrow$ R$ 3,00; f) Mochila $\rightarrow 4 + 15 = 19 \rightarrow$ R$ 19,00; g) Pasta $\rightarrow \frac{4}{2} = 2 \rightarrow$ R$ 2,00; h) Esquadro $\rightarrow \frac{4}{2} - 1 = 2 - 1 = 1 \rightarrow$ R$ 1,00; i) Estojo $\rightarrow 4 + \frac{4}{2} = 6 \rightarrow$ R$ 6,00.

Figura 4 – Treinando a técnica instituída anteriormente[18]

---

18 TM, p.100

Tais considerações são reforçadas com o seguinte trecho, extraído do manual do professor: “Neste capítulo, introduz-se o estudo da álgebra propriamente dito, iniciando um trabalho de generalização e abstração”. Percebe-se que, realmente, há uma preocupação em generalizar, ou mesmo institucionalizar a linguagem algébrica para o aluno. O seu foco principal é que o aluno se familiarize com essa nova linguagem que lhe será ensinada e, posteriormente, utilizada nas soluções dos problemas que serão enunciados.

Em outro trecho do manual, destacamos a preocupação do autor com o cálculo algébrico, quando ele diz: “Evita-se o cálculo algébrico mecânico e trabalha-se o uso das letras de forma significativa”. Ele está preocupado com a maneira de introduzir o conteúdo matemático, bem como de dar subsídios para que o aluno consiga atribuir significados para realizar as operações com letras, que se transformarão em resolução do tipo de tarefa que será proposta.

Quanto às organizações didáticas e matemáticas (CHEVALLARD, 1999), temos a intenção de analisar esse extrato. Na escrita deste capítulo do livro didático, existe, da parte do autor do livro didático, uma preocupação em introduzir o conceito de expressões algébricas; com um encadeamento lógico proposto por ele na abordagem do tema.

Na introdução, foram utilizadas duas situações hipotéticas já demonstradas nas figuras 1 e 2, sendo que há uma intencionalidade de se estabelecer um diálogo com o leitor, pois a utilização dos personagens demonstra o uso da linguagem de forma ostensiva, representando as situações em linguagem algébrica, dentro de balões. Quanto aos objetos não ostensivos associados ao menino, ressalta-se a utilização de um negro. Acredita-se que isso pode ilustrar a briga contra o preconceito, tão presente nos dias atuais. Entremeando as duas situações ilustradas e os diálogos dos personagens, surge uma sentença matemática, ou seja, uma expressão do primeiro grau.

Após essa introdução, nas figuras 3 e 4 são utilizadas várias representações de objetos ostensivos, tais como: compasso, caneta, caderno, lápis, mochila e vários outros; tais representações são meramente ilustrações, uma vez que o aluno poderia perfeitamente resolver as atividades sem o auxílio delas. A conversão da linguagem materna para a linguagem algébrica, presente nas atividades exemplificadas pelo autor, permite-nos inferir que se dá com o intuito de subsidiar o aluno na conversão que ele deverá fazer nas atividades solicitadas. E, no que se refere aos ostensivos matemáticos, destacam-se os conceitos de: expressões algébricas, dobro, triplo, menos, mais, metade.

Como já foi identificada por nós a praxeologia didática do autor, sendo que as três primeiras etapas em que dividimos a introdução referem-se ao momento de institucionalização, ou seja, mesmo que exista uma articulação e uma contextualização, tal qual é sugerida nos PCN de Matemática, o que prevalece é o ensino tradicional. Quando propõe duas situações, *reservatório e sitiante,* e associado a cada uma delas aparece uma sentença matemática escrita pelo autor, ficando clara a institucionalização da linguagem algébrica.

Podemos conjecturar que, dependendo da maneira como o professor desenvolve o seu trabalho em sala de aula, isto é, conduz a introdução, isso poderá permitir que aconteça o momento de estudo chamado de primeiro encontro ou reencontro. É quando o professor propõe a discussão e propicia aos alunos que, juntamente com ele, escrevam as sentenças matemáticas, e não simplesmente tente explicá-las ou traduzi-las para os alunos.

Na quarta etapa, ao propor as atividades, o autor quer que o aluno coloque à prova o que aprendeu anteriormente; trata-se, então, do momento de estudo de exploração da técnica, ou melhor, trabalho com a técnica. Se realmente houver o engajamento dos sujeitos, alunos e professor, com o objeto matemático expressão algébrica, conclui-se que os alunos estavam fazendo matemática, como proposto por Chevallard (1999), ou que eles viveram alguns momentos de estudo.

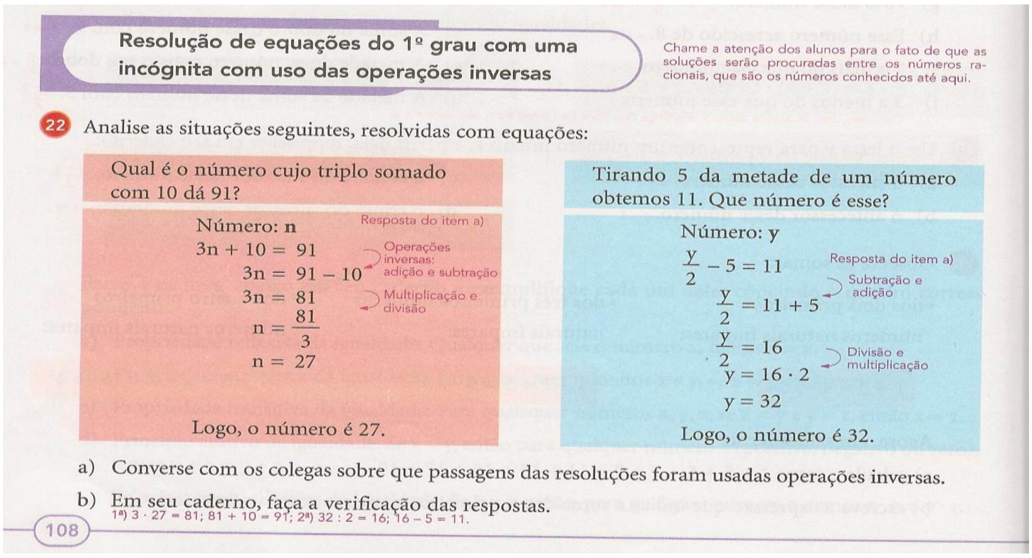
4.3.3 Análises das técnicas sugeridas pelo autor do livro

A técnica realizada por meio de cálculo mental não será analisada, pois existe o entendimento nosso de que não haja um encadeamento lógico quanto aos passos da técnica, isto é, estes ficam a cargo de cada aluno. Não se pode dizer que os alunos, na resolução, tenham seguido os mesmos passos utilizados pelos dois personagens.

Na técnica resolutiva de equação do 1º grau com uma incógnita, com uso das *operações inversas* o autor inicia com duas tarefas[19], que pertencem ao tipo Resolver

19 1) Qual é o número cujo triplo somado com 10 dá 91? 2) Tirando 5 da metade de um número obtemos 11. Que número é esse?

um Problema. Ambas foram resolvidas pelo autor, e em seguida é solicitado ao aluno que converse com os colegas sobre em que passagens da resolução foram usadas operações inversas. Também é solicitado a eles que façam a verificação das respostas. Pode-se verificar as resoluções na seguinte figura:



Resolução de equações do 1º grau com uma incógnita com uso das operações inversas

Chame a atenção dos alunos para o fato de que as soluções serão procuradas entre os números racionais, que são os números conhecidos até aqui.

22 Analise as situações seguintes, resolvidas com equações:

Qual é o número cujo triplo somado com 10 dá 91?

Número: n

$3n + 10 = 91$

$3n = 91 - 10$

$3n = 81$

$n = \frac{81}{3}$

$n = 27$

Resposta do item a)

Operações inversas: adição e subtração

Multiplicação e divisão

Logo, o número é 27.

Tirando 5 da metade de um número obtemos 11. Que número é esse?

Número: y

$\frac{y}{2} - 5 = 11$

$\frac{y}{2} = 11 + 5$

$\frac{y}{2} = 16$

$y = 16 \cdot 2$

$y = 32$

Resposta do item a)

Subtração e adição

Divisão e multiplicação

Logo, o número é 32.

a) Converse com os colegas sobre que passagens das resoluções foram usadas operações inversas.

b) Em seu caderno, faça a verificação das respostas.

1ª) $3 \cdot 27 = 81$; $81 + 10 = 91$; 2ª) $32 : 2 = 16$; $16 - 5 = 11$.

108

Figura 5 – Institucionalização da técnica algébrica com operações inversas[20]

No que diz respeito aos passos utilizados pelo autor na primeira tarefa do extrato anterior, em primeiro lugar, monta-se a equação com os dados fornecidos. Em segundo, separam-se as partes literais das numéricas, sendo literal no primeiro membro e numérica no segundo membro. Em seguida, reduz-se a equação à forma $ax = c$. Após isso, resolve-se a equação, isolando o valor de x, que é o número procurado.

Na segunda tarefa, a equação é representada na forma fracionária, porém o autor não recorre ao m.m.c. para transformá-la em equação não fracionária, mas segue os mesmos passos da primeira equação e, no penúltimo passo, reduz a equação de maneira diferente, sendo $\frac{x}{d} = c$, para então obter, no último passo, o resultado de $x = cd$, que é o número procurado.

Quanto à organização matemática, destacam-se os conceitos: equação do primeiro grau, incógnita, solução de uma equação, divisão. Os princípios: equivalência, aditivo, e mais, regra de conservação da igualdade e operações inversas. Todos esses elementos teóricos e tecnológicos foram destacados pelo autor. No caso específico

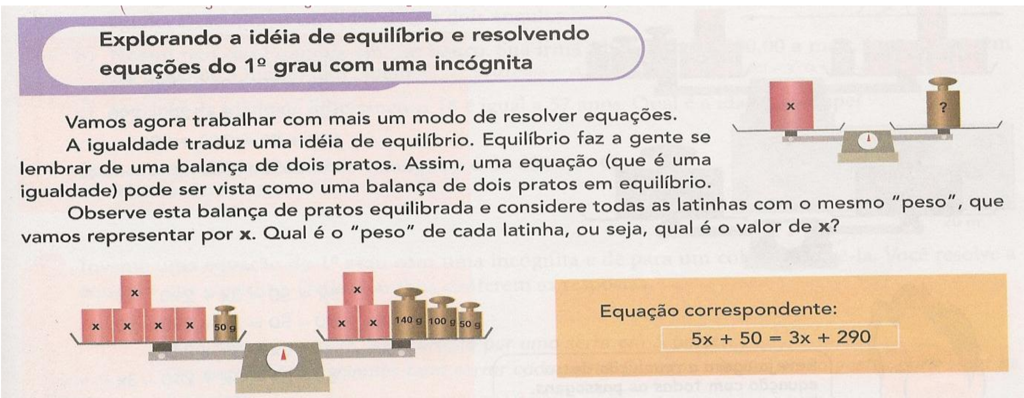
20 TM, p. 108

dessas duas tarefas, a organização didática é a mesma, embora identifiquemos alguns passos diferentes na técnica matemática.

Quanto aos registros de linguagem utilizados pelo autor, vemos somente os da língua materna, quando é usada nas tarefas, e a passagem para o registro algébrico, quando o autor modela a equação e passa a resolvê-la.

Quando se solicita aos alunos que conversem entre si e também façam a verificação das respostas, tem-se o entendimento de que é, em parte, uma maneira do autor institucionalizar os conceitos e propriedades já abordados anteriormente. Podemos conjecturar que para os alunos, porém, não é tão fácil enxergar todas as propriedades que foram utilizadas, isto é, eles não estão habituados a discutir a solução, nem tampouco destacar os conceitos matemáticos. Esse tipo de ação não faz parte da Cultura Escolar pontuada tal qual destaca Chervel (1990), estamos entendendo que a intenção do autor é que os alunos reconheçam, na primeira resolução, as operações inversas de adição para subtração e multiplicação para divisão. A segunda resolução, de subtração para adição, e divisão para multiplicação, é o ponto em que se entende que, por mais que ele não conheça a TAD, ele está querendo destacar os elementos teóricos e tecnológicos presentes na organização matemática.

No decorrer do desenvolvimento do capítulo, o autor explora a ideia de equilíbrio para resolver uma equação do primeiro grau com uma incógnita. Ele não está, todavia, preocupado em institucionalizar uma técnica, pois melhor que ensinar a *técnica da balança*, sua preocupação é reforçar os princípios e os conceitos que já foram estudados anteriormente e isso pode ser verificado nas figuras a seguir:


Explorando a idéia de equilíbrio e resolvendo equações do 1º grau com uma incógnita

Vamos agora trabalhar com mais um modo de resolver equações.

A igualdade traduz uma idéia de equilíbrio. Equilíbrio faz a gente se lembrar de uma balança de dois pratos. Assim, uma equação (que é uma igualdade) pode ser vista como uma balança de dois pratos em equilíbrio.

Observe esta balança de pratos equilibrada e considere todas as latinhas com o mesmo "peso", que vamos representar por **x**. Qual é o "peso" de cada latinha, ou seja, qual é o valor de **x**?

Figura 6 – Explorando a idéia de equilíbrio com a balança[21]

21 TM, p. 109

Por mais que o autor não afirme categoricamente, ele considera que o modo de resolver a equação por meio da balança, é uma técnica resolutiva de equações do primeiro grau com uma incógnita.

Passamos então, em linhas gerais a descrever a técnica apresentada pelo autor a visualizar os objetos contidos na balança em equilíbrio e monta a equação com os objetos fornecidos. Para isso, passa o princípio aditivo da igualdade, tanto na parte literal quanto numérica, para reduzir a equação à forma $ax = c$, e aplica a operação inversa para obter o valor de x. Depois disso, faz uma verificação em que substitui o valor de x na equação inicial e, assim, é reapresentada uma solução que contempla todos os passos utilizados na técnica, e que pode ser vista na figura a seguir.

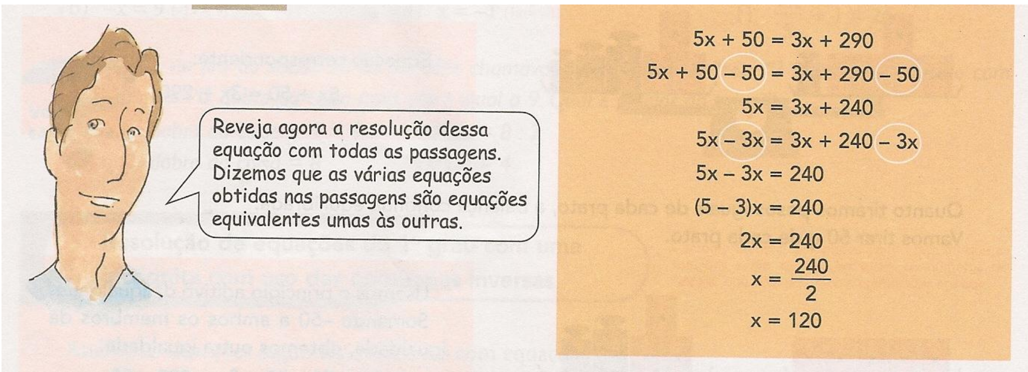


Figura 7 – Demonstrando todos os passos utilizados na resolução[22]

Quanto à organização didática, pode-se dizer que o autor está, sim, fazendo o trabalho lentamente, tal qual propõe no manual pedagógico. Pois quando são retomados todos os passos em um único registro, parece-nos que o autor quer que o leitor entenda o que foi feito. A utilização de um personagem para justificar esse registro é constantemente feita pelo autor, mas, assim como em outras situações, o personagem tem a função de institucionalizar um conceito matemático. Nesse caso, o conceito a ser institucionalizado é o de frações equivalentes.

No que diz respeito à organização matemática, podemos dizer que os encaminhamentos são os mesmos utilizados na técnica anterior, sendo que não é solicitado aos alunos que identifiquem quais foram as equações equivalentes encontradas, e muito menos que se preocupem em justificar o seu uso, mas que as utilizem da forma correta.

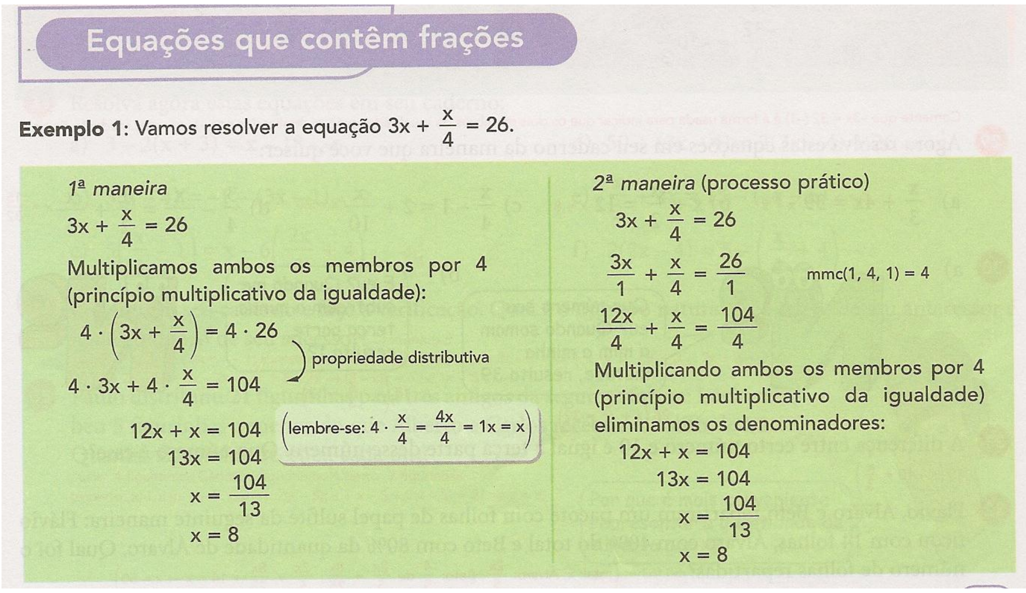
22 TM, p. 110

Outro aspecto bom de se ressaltar é que o autor explora bastante os registros de linguagem, o que pode ser verificado com a utilização do ostensivo balança, e a linguagem na língua materna para justificar as passagens durante a resolução da equação. É claro que a presença do registro algébrico que, segundo nosso entendimento, é imprescindível para se compor a técnica que está sendo institucionalizada, é que conduz ao resultado numérico.

É bom ressaltar que tanto os PCN de Matemática quanto o guia do PNLD (2008) chamam a atenção para o grande número de autores que recorrem à balança para ensinar a resolução de uma equação do primeiro grau com uma incógnita. Daí se extrai o entendimento de que a técnica da balança já foi incorporada à cultura escolar como dispositivo didático.

Outro aspecto que permeia a praxeologia do autor é a utilização de uma frase, ou lembretes em vermelho, para nortear o trabalho do professor. Nessa técnica, em especial, ele utiliza duas, transcritas a seguir: "Comente que dividir os dois membros por 2 equivale a multiplicar por $\frac{1}{2}$, ou seja, foi usado o princípio multiplicativo da igualdade". A outra seria: "Chame a atenção para a conveniência de $6x = 8$ sobre $-6x = -8$, daí a multiplicação dos dois membros por -1".

Esse recurso é utilizado em toda sua obra; parece que o autor pretende auxiliar o professor, ou, pelo menos, alertá-lo para que ele não esqueça de alguns pontos aos quais se dá menor importância. No primeiro lembrete, é demonstrada a equivalência entre multiplicar a equação por $\frac{1}{2}$ ou dividi-la por 2. No segundo lembrete, é feita a multiplicação da equação por -1, operação que, muitas vezes, é esquecida pelos alunos, ou que a realizam sem saber por que estão fazendo a mudança. Entendemos aqui que o autor faz essa relação, pois em seguida propõe a resolução de equações que contêm frações, conforme o exemplo da figura a seguir.



Equações que contêm frações

Exemplo 1: Vamos resolver a equação $3x + \frac{x}{4} = 26$.

1ª maneira

$3x + \frac{x}{4} = 26$

Multiplicamos ambos os membros por 4 (princípio multiplicativo da igualdade):

$4 \cdot \left(3x + \frac{x}{4}\right) = 4 \cdot 26$

propriedade distributiva

$4 \cdot 3x + 4 \cdot \frac{x}{4} = 104$

$12x + x = 104$ (lembre-se: $4 \cdot \frac{x}{4} = \frac{4x}{4} = 1x = x$)

$13x = 104$

$x = \frac{104}{13}$

$x = 8$

2ª maneira (processo prático)

$3x + \frac{x}{4} = 26$

$\frac{3x}{1} + \frac{x}{4} = \frac{26}{1}$ mmc(1, 4, 1) = 4

$\frac{12x}{4} + \frac{x}{4} = \frac{104}{4}$

Multiplicando ambos os membros por 4 (princípio multiplicativo da igualdade) eliminamos os denominadores:

$12x + x = 104$

$13x = 104$

$x = \frac{104}{13}$

$x = 8$

Figura 8 – Técnica algébrica em equações que contêm frações[23]

Percebe-se, então, que o autor utiliza duas resoluções que permeiam a técnica algébrica, mas que têm variações entre si. Na 1ª delas, recorre ao princípio multiplicativo da igualdade para multiplicar a equação por um determinado número e obter a equação equivalente; a partir daí, resolve-a normalmente, como já foi feito em resoluções anteriores.

Na 2ª maneira, a que ele dá um apelido (processo prático), primeiramente é calculado o valor do m.m.c. do denominador das frações, em seguida é calculado o valor das frações equivalentes, com a utilização do m.m.c. A partir daí, retoma os passos da primeira maneira para encontrar o valor de *x*.

O que o autor considera processo prático não é tão prático assim, porém pode-se dizer que é a técnica mais utilizada em sala de aula, ou até em livros didáticos. É a técnica que tem maior alcance, embora não se possa dizer que seja a mais rápida, mas que resolve todas as equações do primeiro grau, fracionárias.

Quanto à organização matemática, percebe-se que o autor está instituindo os elementos tecnológicos e teóricos nas duas resoluções, quando destaca as propriedades e os princípios. Outra coisa que nos chama a atenção é a utilização de um ostensivo gráfico em forma de seta para demonstrar a utilização da propriedade distributiva da multiplicação.

Vemos, nesse caso, a preocupação do autor com os alunos, ao fazer essa referência à propriedade distributiva em forma de lembrete, ou seja, a preocupação, agora, é com o aluno, e não com o professor, como foi feito no exemplo da figura anterior. Em seguida, propõe-se a resolução de equações com parênteses, conforme a figura a seguir.

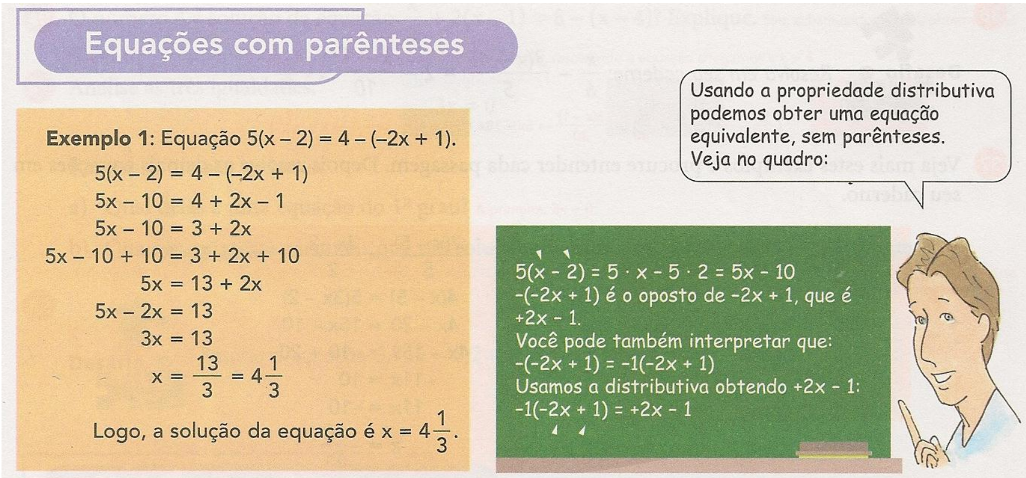


Figura 9 – Técnica algébrica em equações que contêm frações

Essa resolução corrobora com o que está escrito no manual pedagógico, em que o autor afirma que os cálculos são feitos lentamente, preservando as propriedades e princípios utilizados. E pode ser visto, também, na figura anterior, quando são demonstradas todas as passagens que foram utilizadas; embora não seja só isso, percebe-se a utilização do personagem para justificar o uso da propriedade distributiva da multiplicação para se obter uma equação equivalente com o recurso de um ostensivo, que é o desenho de uma lousa.

Quanto ao aspecto matemático, é importante destacarmos que, ao encontrar o valor de x, verificou-se que se tratava de uma fração irredutível; em seguida, essa fração é transformada em número misto. O autor, entretanto, não utiliza nenhum recurso ou personagem para justificar a transformação da fração em número misto, o que nos permite entender que ele deixa a cargo do professor essa explicação.

Esse personagem aparece constantemente quando é iniciada uma nova técnica de resolução de equação, isto é, permeia toda a coleção, não sendo algo específico deste capítulo. Como já foi exemplificado, na introdução do conteúdo, aparecem dois outros

[23] TM, p. 111

personagens, desta vez, só na introdução. Caio e Marília também aparecem uma única vez, porém o personagem acima que julgamos ser um professor é evocado várias vezes.

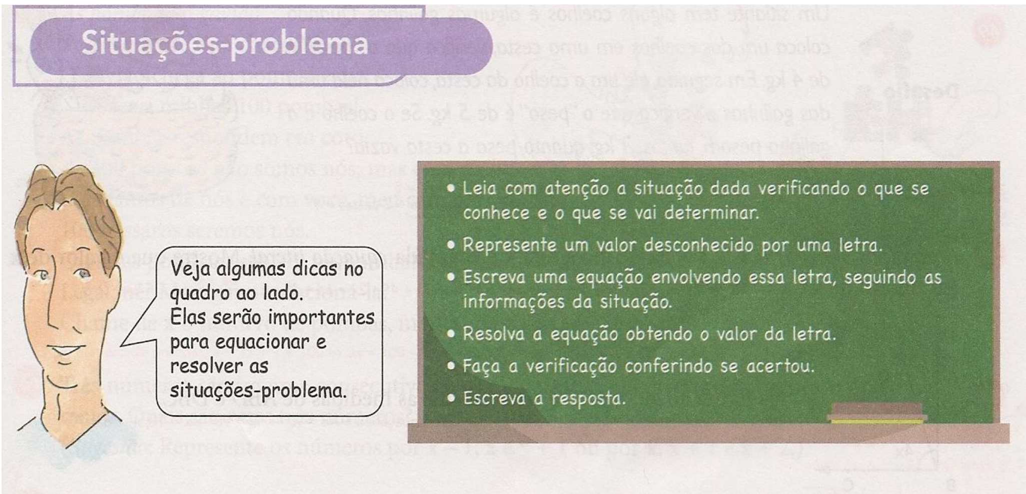


Figura 10 – Técnica algébrica em equações que contêm frações[24]

Depois de todos esses encaminhamentos para melhor ensinar as técnicas que podem resolver uma equação do primeiro grau com uma incógnita, o autor tenta iniciar um diálogo com o leitor quanto à maneira de modelar ou equacionar uma situação-problema para, então, encontrar a solução. E novamente o personagem aparece, dando dicas de como se resolver uma situação-problema. Enfim, nas páginas a seguir, são propostos vários problemas para serem resolvidos e, em seguida, ele fecha o capítulo com a *revisão cumulativa*.

Passaremos, a partir de agora, a uma nova etapa da nossa análise referente a produção dos alunos, pois anteriormente nossa preocupação foi levar o leitor a conhecer o modo como a coleção *Tudo é Matemática* foi estruturada, bem como levantar alguns elementos de discussão quanto às noções propostas por Chevallard (1999) e Chervel (1990) e, a partir de agora, analisaremos as técnicas utilizadas pelos alunos participantes da nossa pesquisa.

4.3.4 Análise Praxeológica da Produção dos Alunos

Para as sessões de aplicação optamos por trabalhar com apenas um tipo de tarefa, na tentativa de direcionarmos nossas análises das organizações didáticas e matemáticas para entendermos as técnicas empregadas pelos alunos. Cabe ressaltar que a escolha das

[24] TM, p. 113

tarefas se deu da seguinte maneira: primeiramente resolvemos todas as tarefas selecionadas para as sessões, com a utilização da técnica algébrica por meio de uma equação do primeiro grau, depois contamos com a colaboração de alguns voluntários[25], para vermos se eles utilizavam técnicas diferentes das quais eram propostas pelo autor do livro didático e também diferente da técnica utilizada pelos pesquisadores.

Queremos salientar que foram aplicadas dez sessões de estudo, porém nós escolhemos trazer três para discussão e análise. Estamos entendendo que o tipo de análise à qual nos dedicamos a fazer poderia tornar-se enfadonha ao leitor, se fôssemos analisar mais sessões, por essa razão optamos por aprofundar nossas discussões nas três sessões.

Uma importante consideração a ser feita trata dos momentos que aconteceram as sessões de aplicações; a primeira foi efetivamente a primeira sessão de aplicação e estudo. Quanto às demais, a segunda corresponde à sexta sessão, e por consequência a terceira refere-se à sétima. Por uma questão de praticidade iremos chamar de primeira, segunda e terceira sessão, respectivamente, para facilitar nosso diálogo com o leitor. Diante disso, a partir de agora descreveremos o tipo de tarefa utilizado nas sessões de estudo.

T_2 - Resolver um problema

Esse tipo de tarefa nomeada por nós, *resolver um problema*, é um dos tipos de tarefa mais freqüentes no livro analisado, e consiste em levar o aluno a *resolver um problema cujo enunciado solicita explicitamente a determinação de números, envolvendo uma ou mais operações fundamentais da aritmética e os conceitos de números consecutivos, dobro, triplo, quádruplo e quíntuplo.* Sendo assim, no contexto da nossa pesquisa, decidimos trabalhar com o tipo de tarefa **T_2**, pois consideramos relevante analisar as técnicas utilizadas pelos alunos na resolução de um problema que pode ser resolvido por meio de uma equação do primeiro grau.

Verificamos que os afazeres pertencentes a esse tipo de tarefa podem ser resolvidos por meio de várias técnicas didáticas, como já comentamos anteriormente, às quais descreveremos ao longo da análise das sessões de aplicação. Nosso interesse,

---

[25] Entende-se por voluntários: alunos que não fazem parte da escola onde estava ocorrendo a pesquisa, professoras pedagogas, e professores de diferentes áreas, também familiares do pesquisador.

neste caso, está relacionado com as técnicas utilizadas pelos alunos, ou até mesmo com técnicas desenvolvidas por eles, ou seja, com o jeito que eles resolvem as tarefas que pertencem ao tipo $\mathbf{T_2}$ (ver anexo 9).

4.3.5 Análise da primeira sessão

A primeira sessão da nossa pesquisa foi aplicada no dia 01 de dezembro do ano 2008, nas turmas do 7º ano A, B e C do Ensino Fundamental da Escola Municipal João Evangelista Vieira de Almeida. As salas de aula foram divididas em grupos de três ou quatros alunos, totalizando 63 alunos participantes. Inicialmente, tínhamos a pretensão de somente apresentar a pesquisa que seria desenvolvida durante o ano de 2009, porém como percebemos o entusiasmo dos alunos, após a nossa apresentação, todavia, decidimos passar um problema na lousa, na tentativa de observar como os alunos interagiriam, isto é, como se daria a atividade matemática no contexto de cada grupo.

Optamos por trabalhar com o tipo de tarefa nomeada por $\mathbf{T}_2$. Para atender a esse tipo de tarefa nomeado por nós, propusemos aos alunos o seguinte problema: *Quais são os dois números consecutivos cuja soma é igual a 527?*

Esse problema foi escolhido porque o seu enunciado exige conhecimento de alguns conceitos matemáticos, e também algumas operações aritméticas que julgamos serem conhecidas pelos alunos em questão. Por sua vez, tais conceitos e operações aritméticas permitem aos alunos, em suas resoluções, a utilização de diversas técnicas, isto é, diferentes maneiras de encontrarem a resposta. Com isso, pretendíamos verificar se, na tentativa de resolução do problema, os alunos utilizariam a técnica algébrica de equação do primeiro grau.

Dentre todas as produções dos alunos, foi possível classificar as soluções feitas por eles em quatro categorias: algébrica, aritmética, decomposição e tentativa. Tais classificações foram definidas pelo pesquisador, pois aos alunos foi solicitado que somente as resolvessem. Cabe, então, ressaltar que os comentários aqui presentes serão dirigidos às técnicas, pois de apenas um tipo da classificação que fizemos foram escolhidas as resoluções que utilizaram a técnica algébrica por meio de uma equação do primeiro grau.

Optamos em analisar somente essa técnica porque os alunos já haviam estudado o conteúdo matemático equações do primeiro grau, e também queríamos verificar nessa sessão com qual freqüência tal técnica apareceria. Algumas resoluções contêm erros, porém o objetivo aqui não é estudar os erros e obstáculos encontrados por eles, e sim entender como registram as técnicas empregadas e quais momentos de estudo são vividos por eles.

Dessa forma, apresentamos a análise de três organizações praxeológicas (OP) que permearam as produções de três grupos de alunos e que se referem à técnica algébrica. Considerando que o objetivo principal do nosso trabalho é ***Analisar as técnicas utilizadas por alunos na resolução de um problema algébrico do primeiro grau,*** e que, dentre as diferentes técnicas de resolução apresentadas, eles carregam organizações praxeológicas distintas, visto que, ao discutir as praxeologias desenvolvidas pelos alunos e analisar os registros escritos por eles, pretendemos descrever as organizações praxeológicas implementadas, reproduzidas ou mesmo inventadas, no contexto de cada grupo.

Antes de procedermos efetivamente à nossa análise, retomemos a tarefa, *Quais são os dois números consecutivos cuja soma é igual a 527?* A que denotamos $\mathbf{T}_2$, sendo ela retirada do livro didático Tudo é Matemática, do autor Luiz Roberto Dante. Nós a escolhemos para aplicação na primeira sessão porque o autor da coleção solicita ao aluno que a resolva com equação e sem equação, fornecendo ao professor, na página 117 do referido livro, duas resoluções: uma com equação e a outra sem equação. Elas foram classificadas por nós como técnicas algébrica e aritmética, respectivamente. Para nossa surpresa, os alunos foram além das duas técnicas sugeridas pelo autor.

Ao analisar a produção dos alunos, identificamos 116 produções diferentes que constam em uma tabela (ver anexo 2). Cabe ressaltar que aplicamos a tarefa para três salas de aula na mesma data, em horários do mesmo período e, para efeito de análise, estamos considerando a reunião de toda a produção coletiva dos alunos, em suas respectivas salas de aula, da primeira sessão de aplicação e análise. A partir de então, quando nos referirmos a uma sessão, serão elas denominadas segunda sessão, terceira sessão, e assim por diante como já foi dito. Vale esclarecer que estamos tratando da reunião de todas as técnicas em diferentes salas de aula, mas em períodos iguais. Por uma questão de praticidade, denominamos os três grupos que fazem parte da nossa análise de G_1, G_2 e G_3. Cabe, ainda, ressaltar que nossa análise foi baseada nos elementos efetivamente produzidos pelos alunos nos seus respectivos grupos. Informamos, também, que tais grupos produziram mais de uma OP, e que, para efeito de análise, discutimos somente três: OP_1, OP_2 e OP_3, respectivamente, para cada grupo.

Análise da produção do grupo G_1

Iniciamos a análise da praxeologia produzida pelo grupo G_1 com a descrição da técnica usada para resolver o problema, procurando descrever os passos seguidos para obter a solução. Em linhas gerais, descreveremos a técnica produzida pelos alunos, na qual conseguimos identificar cinco passos. No que diz respeito aos passos utilizados pelo grupo, primeiramente monta-se à equação com os dados fornecidos; em segundo lugar, reduz-se a equação à forma $ax = c$; em terceiro, resolve-se a equação, isolando-se o valor de x, que é um dos números procurados. Como quarto passo, subtrai-se do número fornecido (527) o valor de x. E o último passo é concluir que os dois números procurados são x e $x + 1$.

Salientamos que a técnica empregada pelo grupo G_1 pertence ao registro escrito dos alunos que participaram da primeira sessão, pois entendemos que eles optaram pela utilização de tal técnica porque os professores que ministram as aulas de Matemática já haviam ensinado o conteúdo matemático equações do primeiro grau, e, para a fixação do referido conteúdo, ensinaram os alunos a resolverem problemas por meio de uma equação do primeiro grau. Outro fator que pudemos levantar foi que, quando os professores estavam explicando tal conteúdo, eles devem, em sua exposição oral, ter comentado que muitos problemas podem ser modelados e resolvidos por meio de uma equação do primeiro grau. A partir de agora, vamos ver efetivamente como os alunos do grupo G_1 procederam na resolução da tarefa proposta, isto é, a técnica utilizada pelo grupo.

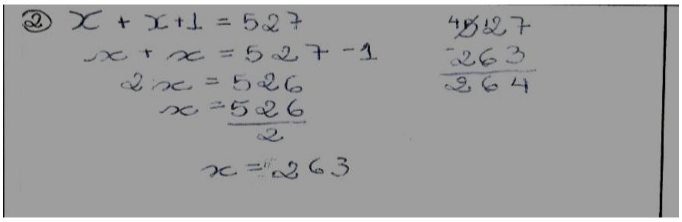


Figura 11 - Registro de parte da organização praxeológica produzida pelos alunos do grupo G_1 que participam da primeira sessão experimental da pesquisa.

Como percebemos que os alunos não conseguiram comentar os passos utilizados na técnica empregada, ou seja, detalhar o que foi produzido na atividade matemática desenvolvida, é importante ressaltarmos que o grupo preserva o perfil do matemático clássico, ao admitir que a própria resolução é auto-explicativa, pois durante a sessão foi perguntado a um aluno, do grupo G_1, por que eles não haviam escrito nada na parte destinada aos comentários. Ele, de pronto, respondeu: *Não precisa explicar todo mundo entende.* Ou seja, está presente a Matemática do porque sim, ou é tão óbvio que não carece de explicação. Percebe-se então que os alunos modelaram corretamente o problema, dando a entender que a ausência do comentário pode ser compreendida como a *algebrização da matemática*, algo presente na *cultura escolar*, e que é defendido nos trabalhos de Chevallard (2001).

Essa resolução destacada por nós pertence ao grupo G_1 e, consequentemente, pode ser entendida como OP_1. No que diz respeito aos aspectos tecnológicos e teóricos, os alunos utilizaram os conceitos de números consecutivos e equação do primeiro grau. Dessa maneira, foi possível modelar corretamente o problema e, para a resolução da equação, utilizaram os princípios aditivo e de equivalência, o que pode ser visto na figura 11, ou nos passos já descritos por nós, anteriormente.

Quanto à linguagem empregada pelo grupo na resolução do problema, foi possível verificarmos que prevaleceram os objetos ostensivos numéricos e algébricos. Alguns registros gráficos quanto à língua materna não foram, todavia encontrados, pois, como já foi relatado, os alunos não comentaram os passos utilizados, prevalecendo, assim, a ideia de que não é importante comentar, mas resolver corretamente o problema. Por outro lado, os registros ostensivos dos alunos constituem a *parte perceptível* da atividade matemática defendida por Bosch e Chevallard (2001), pois esses objetos podem ser vistos por nós e pelos atores da atividade matemática, que, no caso, são os alunos do grupo G_1. Não obstante, cabe ressaltar que toda a matematização leva à redução de alguns objetos ostensivos, pois o matemático, ao divulgar a solução de um determinado problema ou demonstrar um teorema, não evidencia todas as tentativas, cálculos, ou mesmo erros que permearam a atividade matemática.

Identificamos, na OP_1, isto é, na atividade do grupo $G_{1,}$ o aparecimento de alguns momentos de estudo, que são analisados neste parágrafo. De início, consideramos que houve o momento do primeiro encontro com um tipo de tarefa, pois, de imediato, os alunos conseguiram modelar o problema e resolvê-lo corretamente. Em seguida, podemos dizer que houve um momento de exploração de um tipo de tarefa, o que foi favorecido pela própria forma como se planejou a sessão. Nesse momento, os alunos construíram uma técnica algébrica, recorrendo ao domínio algébrico para sintetizar pelo menos um embrião de técnica, que serviu efetivamente para resolver uma tarefa particular do tipo de tarefa T_2.

Na continuidade, supomos que esse embrião de técnica poderá evoluir para se constituir em uma técnica pertinente para resolver certos tipos de tarefas, mas, desde logo, consideramos que a técnica resolve, pelo menos, a tarefa proposta. Entendemos que houve, em sintonia com o momento de construção da técnica, um momento da constituição do entorno tecnológico, o que pode ser verificado na figura 11, quando os alunos escrevem o número (527) menos (263), pois a tecnologia aí empregada constitui-se o princípio aditivo para então se encontrar o consecutivo de (263).

Análise da produção do grupo G_2

Para analisar a organização praxeológica (OP_2) produzida pelos alunos do grupo $G_{2,}$ destacamos a técnica utilizada para resolver o problema, procurando descrever os cinco passos seguidos por eles para obter a solução. Em primeiro lugar, monta-se a equação com os dados fornecidos; em segundo lugar, reduz-se a equação à forma $ax = c$; em terceiro, divide-se c por a, utilizando-se o algoritmo da divisão, o que não é comum, pois o que mais importa aos alunos é resolver a equação, isolando-se o valor de x. Com o valor obtido no passo anterior escrever-se o consecutivo referente ao número encontrado. Em quinto lugar, adiciona-se ao valor de x (263) o seu consecutivo $x + 1$ (264), obtendo, assim, o valor fornecido (527).

Quanto à descrição dessa técnica, é preciso dizer que os alunos não se prenderam ao rigor algébrico para resolver a equação na busca da resposta correta, isto é, passaram a utilizar a técnica aritmética, ou seja, implementaram o algoritmo da divisão, articulando, assim, a técnica algébrica com a aritmética. Outro ponto que nos chamou a atenção foi o comentário: *Fizemos a equação $x + x + 1 = 527$; no final, deu 527 dividido por 2 . Pensamos no número consecutivo, que no caso é o 264, somamos* *os dois e resultou em 527.* Em essência, o que eles estavam querendo dizer é*: foi feito assim, pensamos assim, deu isso e pronto, chegamos ao resultado.* Podemos, então, concluir que esse grupo, em particular, mesmo descrevendo os passos utilizados, estava realizando, de certa maneira, uma rotina institucional, isto é, resolver problemas de Matemática faz parte da rotina escolar, e particularmente da disciplina escolar de Matemática. Para melhor entendimento do leitor, a partir de agora, iremos verificar, na figura 12, os comentários dos alunos sobre a OP_2, adotados pelo grupo $G_{2,}$ que pertence à técnica algébrica com algumas variações, isto é, inserção dos algoritmos da divisão e da adição para a resolução da tarefa proposta na primeira sessão de aplicação.

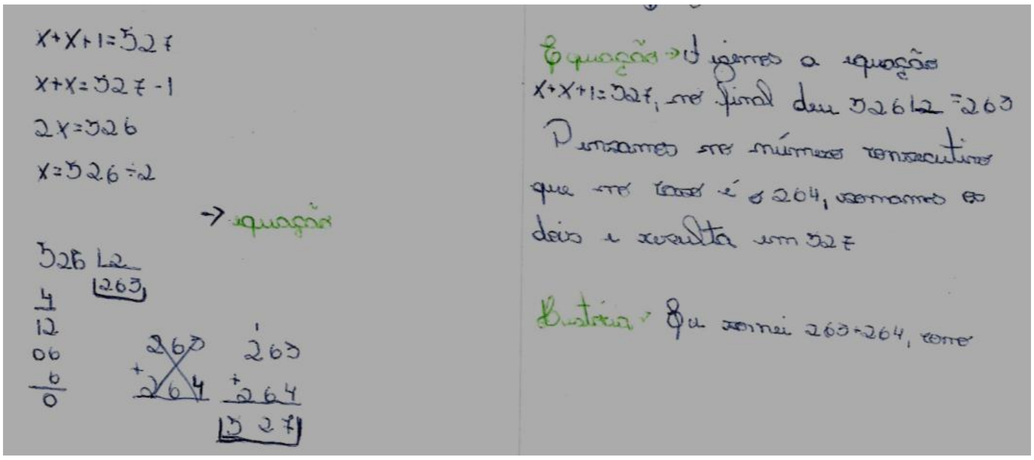


Figura 12 - Registro de parte da organização praxeológica (OP_2) produzida pelos alunos do grupo G_2 por ocasião da primeira sessão.

Os elementos tecnológicos e teóricos referentes a essa OP_2 são: conceito de consecutivo, conceito de equação do primeiro grau, conceito de incógnita, princípio aditivo e multiplicativo e, consequentemente, que a mobilização desses elementos foi fundamental para a resolução da tarefa. Entendemos que todos esses elementos evocados pelo grupo G_2 dizem respeito à organização matemática, e o entendimento de tais elementos foi preponderante na composição da técnica utilizada pelo grupo em questão. Por outro lado, em particular, a técnica empregada na OP_2, segundo nosso entendimento, pode ser considerada como uma técnica de curto alcance, por não resolver todas as tarefas do tipo T_2, e sim as tarefas que pertencem à família encontrar *dois números consecutivos*. Sendo, assim, a nossa preocupação foi: É possível que esse grupo resolveria outra tarefa que envolvesse outros conceitos, ou outras operações aritméticas?

Os registros usados pelos alunos constituem-se nos mesmos da composição do grupo G_1, com acréscimo do registro na língua materna, na parte reservada aos comentários. Assim, constatamos que a organização didática encontra-se evidenciada junto com a organização matemática, reforçando a efetiva relação existente entre essas duas organizações. Dessa maneira, podemos supor que a praxeologia adotada pelo grupo contempla dois dos três aspectos da atividade matemática: Utilizar matemática conhecida e criar uma matemática nova. Cabe ressaltar que essa matemática nova nos permite entender que os alunos estavam dando novo sentido aos antigos modelos, ou até valendo-se de novas utilizações para antigos modelos na articulação da técnica algébrica e aritmética.

Por se tratar de uma descrição da atividade matemática, evidenciamos, ao longo da sessão e nos registros transcritos pela figura 12, a presença dos mesmos momentos de estudo vividos pelo grupo G_1 . Em particular, no instante de exploração do tipo de tarefa e constituição de uma técnica relativa a esse tipo de tarefa, podemos conjecturar que surgiu pelo menos parte do momento de institucionalização, pois esse grupo, ao resolver parcialmente a equação, deu um espaço e escreveu a palavra “equação”, destacando-a com uma seta. Não questionamos a razão desse destaque, mas, possivelmente, eles estavam atentos para destacar a técnica empregada. Tudo isso só foi possível porque os alunos vivenciaram, durante a resolução do problema, o momento da constituição do entorno tecnológico-teórico, o que pode ser verificado na OP_2.

Análise da produção do grupo G_3

A organização praxeológica OP_3, descrita a seguir, foi produzida pelos alunos do grupo G_3. O que nos motivou a destacá-la foi a interação dos alunos no contexto do grupo, além das constantes perguntas feitas a nós, pelos estudantes. Verificamos, nos extratos, os diálogos mantidos entre os alunos e o pesquisador, pois após a resolução, um aluno do grupo G_3 caminhou em nossa direção e perguntou: *Está certo? É assim que o senhor quer?* Entendemos, então, que esse aluno estava querendo saber se havia resolvido corretamente o problema, ou se realmente teria interpretado o problema de forma correta. A partir de então, iniciamos um diálogo com a seguinte pergunta: *Quero saber como é que vocês fizeram, expliquem a maneira como foi resolvido o problema?* O aluno voltou para o grupo e continuou a escrever o comentário que pode ser observado na figura 13.

Para analisar a organização praxeológica OP_3 produzida pelos alunos do grupo G_3, destacamos, a partir de agora, a técnica utilizada para resolver o problema, procurando descrever os quatro passos seguidos por eles para obter a solução. Em primeiro lugar, monta-se a equação com os dados fornecidos. Depois, no segundo passo, reduz-se a equação à forma $ax = c$; em terceiro, divide-se c por a, encontrando-se o valor de x (263). No quarto passo, escreve-se o consecutivo de x (264), o que nos permite supor que, ao escreverem o número (264), os alunos podem ter utilizado o cálculo mental. Ao registrarem o valor encontrado (263) e o seu consecutivo (264), os alunos cometem um deslize, pois ao escreverem a palavra consecutivo ao lado do valor de x, no comentário aparece a seguinte afirmação: e*u fiz a conta depois peguei o consecutivo de (263), que é (264).* Ao terminar de fazer o comentário na folha, esse aluno novamente dirigiu-se a nós e perguntou: es*tá bom assim?* Dissemos-lhe então, que conversasse com os colegas do grupo e, conjuntamente, reescrevessem o comentário; ele retornou ao grupo, conversou por alguns instantes com os colegas e continuou a escrever na folha, *peguei x + x + 1, que é 527, daí dividi por 2, e deu (263) e peguei seu sucessor, (264).* Apesar de a escrita estar na primeira pessoa do singular, entendemos que a resposta dada foi coletiva. Por outro lado, o fato de registrarem a palavra consecutivo ao lado do número (263) não significa que eles não tenham entendido o conceito matemático consecutivo, o que pode ser verificado nos dois extratos a seguir, quando dizem: *peguei o consecutivo de (263), que é (264), e peguei seu sucessor, (264).* Depois desses comentários, para efeito de comprovação do que efetivamente ocorreu, isto é, como os alunos procederam à resolução da tarefa, e às afirmações feitas por nós, destacamos a figura da OP_3 produzida pelo grupo G_3.

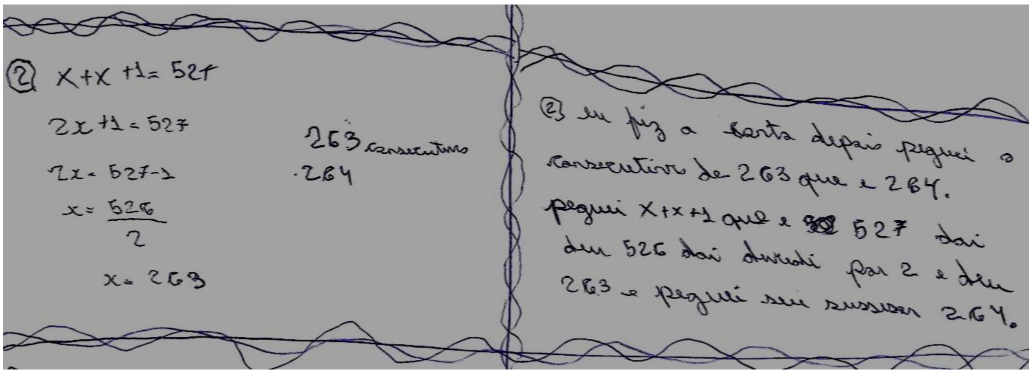


Figura 13 - Elementos da organização praxeológica produzida pelos alunos do grupo G_3, produzida no transcorrer da primeira sessão.

Quando resolveram o problema de forma correta, percebemos que os alunos também enfatizam os elementos tecnológicos e teóricos da equação do primeiro grau, destacamos o conceito de números consecutivos, ou sucessores, princípio de equivalência e princípio aditivo. Na figura 13, foram registrados, no comentário produzido por eles, alguns dos elementos tecnológicos e teóricos, e ainda que não estejam escritos, estão implícitos na técnica utilizada pelo grupo G_3.

Quanto aos registros de linguagem, vimos que recorreram, assim como os demais grupos ao registro algébrico e ao da língua materna, mas quando dividiram a folha com linhas onduladas, inferimos que eles usaram um tipo de registro conhecido como grafismo, pois quando separaram a resolução do comentário, os alunos fizeram três linhas: duas onduladas e uma linha reta, que deram a impressão de separação entre o comentário e as demais resoluções.

Ao observarmos as organizações matemáticas e didáticas do $G_{3,}$ percebemos que eles vivenciaram os mesmos momentos de estudo do G_1 e do G_2, ratificando que a atividade de estudo do grupo foi decisiva na escolha da técnica que contemplasse somente o domínio algébrico. Desse modo, novamente a técnica algébrica se fez presente em uma das maneiras de resolução dos grupos analisados. Conjecturamos que, ao optar por tal técnica, o grupo $G_{3,}$ provavelmente, assumiu uma praxeologia voltada à formulação de uma técnica com maior alcance, pois com o emprego dela é possível resolver-se qualquer tarefa do tipo T_2.

Articulações entre as diferentes organizações praxeológicas

Na figura 11, quando o grupo G_1 emprega a técnica algébrica por meio de uma equação do primeiro grau utilizando os dados fornecidos de maneira correta, nos parece claro que os alunos do grupo G_1 conseguiram atribuir a um dos valores desconhecidos o valor *x*, e ao seu consecutivo $x + 1$, igualando a soma dos números desconhecidos ao valor fornecido. A técnica empregada pelo grupo G_2 foi semelhante à do grupo G_1, com pequena diferença em alguns passos já descritos anteriormente (e essa semelhança pode ser melhor verificada no anexo 05). Em relação ao grupo G_3, os alunos também montam a equação de maneira correta, passando a resolvê-la como pode ser observado na figura 13. Após essas descrições referentes às técnicas empregadas pelos alunos, é importante que se aprofundem as discussões sobre as organizações praxeológicas concernentes ao domínio de estudo equações do primeiro grau, considerando-se que, para a resolução de uma equação, são necessários alguns pré-requisitos que, em nosso entendimento, são os elementos tecnológicos e teóricos que justificam as diferentes técnicas.

Retomando as resoluções, quando pensamos na técnica empregada pelos alunos, é possível vermos que todos optaram pela resolução por meio de uma equação do primeiro grau. Se nos detivermos por alguns instantes, contudo, perceberemos que eles optaram por caminhos diferentes, e até por articulações entre as soluções algébrica e aritmética. Isso representa, especificamente, as praxeologias didáticas que analisaremos a partir de agora.

Quanto aos registros de linguagem utilizados por eles, percebe-se, na figura 11, que os alunos utilizaram somente os registros algébricos e aritméticos; nas figuras 12 e 13, os alunos, além desses, usaram o registro na língua materna. Reiterando que o grupo G_1 não comentou sua resolução, mesmo assim foi possível identificar uma organização didática, visto que, quando encontram o valor de *x* e imediatamente efetuam a subtração desse valor com o total fornecido, estão deixando pistas do caminho percorrido para encontrar a resposta.

No comentário do grupo G_2, os alunos descreveram os passos que utilizaram para resolver a tarefa. É possível destacar que, quando encontraram o valor de *x* e efetuaram a adição entre esse número e o seu consecutivo, utilizaram o registro na língua materna para justificar: *Pensamos em um número consecutivo que, no caso, é 264;* fica evidente, então, que, se fosse pedido somente para resolver a tarefa, os alunos não se preocupariam em justificar os elementos teóricos e tecnológicos que utilizaram quando estavam resolvendo o problema. Ao solicitarmos a um dos alunos que explicasse como foi que eles resolveram, respondeu: *eu fiz a conta, depois peguei o consecutivo de 263, que é 264.* Para o aluno, esse comentário já satisfaria o professor, tanto isso é verdade que, ao se aproximar do professor, ele perguntou: *está certo? É assim que o senhor quer?* O professor prontamente respondeu: *Quero saber como é que vocês fizeram? Explique a maneira como foi resolvida.* O aluno voltou ao grupo e continuou escrevendo: *peguei x + x + 1, que é 527, daí deu 526, que dividi por 2 e deu 263, e peguei seu sucessor, 264*. Ou seja, para os alunos, não é tão fácil justificar o que foi feito, visto não estarem habituados a redigir comentários, ou justificar o que estão fazendo.

No decorrer da sessão e nos registros dos alunos, percebemos a presença do momento de estudo, a exploração do tipo de tarefa e a elaboração de uma técnica, pois, na tentativa de resolvê-la, cada um desenvolveu a sua maneira particular. O momento do primeiro encontro, ou reencontro, ocorreu porque vários alunos estavam envolvidos na resolução; alguns até queriam ficar mais tempo tentando encontrar outras soluções. Quanto ao momento de avaliação da técnica, percebemos que, quando os alunos do grupo G_2 fizeram a verificação, possivelmente os outros alunos estavam presenciando esse momento. Quanto ao momento de institucionalização podemos dizer que foi inexistente; não tínhamos a pretensão de institucionalizar uma técnica ou conceitos matemáticos nas sessões de aplicação enquanto pesquisador. Mas pode ser que alguns alunos tenham conseguido "institucionalizar" alguma coisa, o que pode ser verificado na $OP_{2,}$ já comentado por nós anteriormente. Dentre todos os momentos de estudo vivenciados por esses alunos, na observação, percebe-se o envolvimento dos grupos, a *exploração do tipo de tarefa,* ou o conhecido segundo momento se fez presente. Mesmo eles não conseguindo explicar detalhadamente as técnicas empregadas, a explicação parcial foi suficiente para entendermos que estavam envolvidos na atividade matemática.

4.3.6 Análise da segunda sessão

A segunda sessão da pesquisa foi aplicada no dia 09 de junho de 2009, em duas salas do 8º ano A e B, do EF da Escola Municipal "João Evangelista Vieira de Almeida". As salas de aula foram divididas em oito grupos de três ou quatro alunos, que trabalharam na resolução de um problema retirado, como aconteceu também nas outras sessões, do livro *Tudo é Matemática*, de Luiz Roberto Dante. Trata-se de um livro do 7º ano do EF. O enunciado do problema foi o seguinte: *Francisca tinha certa quantia em dinheiro e ganhou de sua mãe o dobro do que tinha. Com isso cada uma ficou com R$ 186,00. Quanto de dinheiro cada uma tinha no início?* Segundo nosso entendimento, esse problema pertence ao mesmo tipo de tarefa $T_{2,}$ que já foi enunciado na parte referente à análise de livros didáticos e retomado na primeira sessão de aplicação. Entendemos que esse tipo de tarefa pertence à rotina escolar dos alunos, assim como a tarefa t_1 enunciada anteriormente. Essa tarefa, que denotamos por $t_{2,}$ aparece com certa frequência, ou seja, solicita-se aos alunos que resolvam tarefas em cujo enunciado se pergunta a quantia de certo número de personagens, com pequenas variações na redação, mas que, no fundo, têm a mesma finalidade: atender à cultura escolar que, em certo ponto, exige dos alunos a aplicação de conceitos matemáticos em problemas ditos “contextualizados”.

Em uma análise preliminar referente à produção dos 56 alunos, ver (anexo 03) que, efetivamente participaram dessa sessão, divididos em grupos de quatro alunos, exatamente dez grupos utilizaram a técnica algébrica, e todos os demais, num total de quatorze grupos, utilizaram a técnica aritmética. Cabe ressaltar, porém, que entendemos que os grupos produziram dezoito OPs pertencentes à técnica aritmética e dez OPs referentes à técnica algébrica. E, apesar de algumas semelhanças, vários grupos optaram por organizações didáticas diferentes, isto é, optaram por caminhos diferentes na resolução da tarefa. Informamos, ainda, que as três OPs analisadas a seguir dizem respeito à produção de dois grupos de alunos, pois um deles produziu duas maneiras diferentes de resolver o problema o que comentaremos nas páginas a seguir.

Por uma questão de praticidade, denotaremos, assim como já foi feito, os dois grupos de alunos, por G_1 e G_2, sendo que o primeiro corresponde a turma A e o segundo a turma B. Cabe, também, ressaltar que a análise está baseada nos elementos que foram produzidos pelos alunos. De um modo geral, observamos que um dos grupos utilizou uma técnica aritmética com representação no domínio de estudos correspondente ao conjunto dos números racionais, mais especificamente com o auxílio de frações, enquanto o outro grupo utilizou a mesma técnica aritmética no domínio de estudo referente ao conjunto dos números naturais.

Análise da produção do grupo G_1

Iniciamos a análise da praxeologia produzida pelo grupo G_1 com a descrição da técnica usada para resolver a tarefa t_2, procurando descrever os passos seguidos para obter a solução. Em linhas gerais, descrevemos a técnica produzida pelos alunos por meio de cinco passos. No primeiro passo, os alunos montaram a equação com os dados fornecidos. No segundo passo, reduziram a equação à forma $ax = c$. Após isso, no terceiro passo, resolveram a equação, isolando o valor de x, que é a quantia que Francisca tinha no início (R$62,00). Em seguida, no quarto passo, para saber quanto a mãe de Francisca tinha inicialmente, multiplicaram o valor de x por dois, obtendo, assim, o dobro de x (R$124,00). Finalmente, no quinto passo, adicionaram a esse valor obtido o valor fornecido inicialmente, encontrando a quantia da mãe de Francisca (R$310,00).

Como ocorreu na sessão anterior, iniciamos a condução da segunda sessão escrevendo na lousa o enunciado da tarefa t_2 e, em seguida, fizemos uma leitura coletiva para esclarecer as dúvidas que pudessem surgir na interpretação do enunciado. De modo geral, houve um pouco de dificuldade na compreensão do enunciado e os alunos pediram que refizéssemos a interpretação desse enunciado. Solicitamos, então, a alguns alunos que tivessem entendido o enunciado, que partilhassem o que haviam entendido para que, conjuntamente, tivéssemos o esclarecimento e o entendimento da tarefa t_2. Para esclarecer a maneira como organizamos essa sessão, reforçamos que as duas turmas, 8º A e B, participaram da segunda sessão, e as dificuldades no entendimento do enunciado ocorreram nas duas turmas. Nesse sentido, reforçamos para as classes que o objetivo era que eles entendessem o que deveriam fazer, isto é, o que o autor do livro didático estava querendo, quando propôs a tarefa t_2.

Para aprofundar nossa análise, visualizaremos as OPs produzidas pelo grupo G_1, pois cabe esclarecer que esse grupo produziu mais de uma OP, e escolhemos duas para proceder a nossa análise, sendo elas OP_1 e OP_2, pertencentes ao mesmo grupo G_1. Assim, as discussões que faremos serão sobre apenas um exemplar da técnica algébrica, e outro da técnica aritmética. A figura a seguir, reproduz a OP_1, e a subsequente (figura 15) reproduzirá a OP_2, sendo, as duas, produções do grupo em análise.

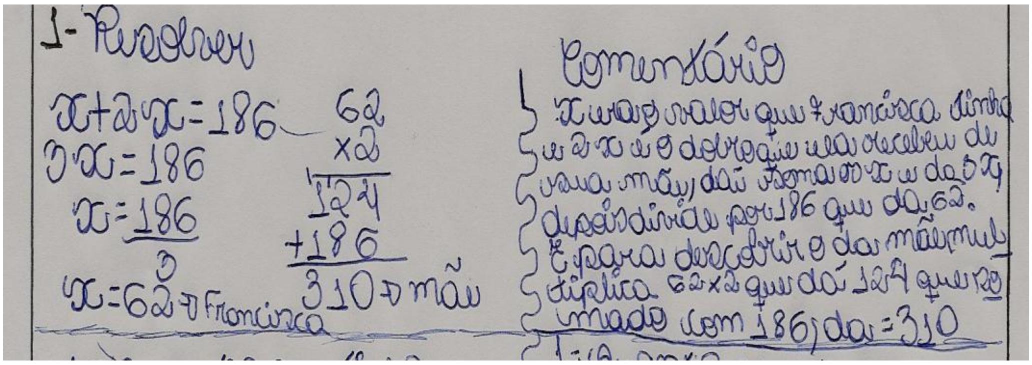


Figura 14 - Elementos da organização praxeológica produzida pelos alunos do grupo G_1 no transcorrer da segunda sessão.

A resolução destacada demonstra, por parte dos alunos, a utilização correta dos elementos tecnológicos e teóricos: conceito de incógnita, de dobro, e equação do primeiro grau; os alunos conseguiram modelar corretamente o problema, o que nos permite supor que eles têm as noções suficientes para manipularem corretamente os conceitos e os princípios algébricos. Esse fato pode ser verificado facilmente quando, na parte referente ao comentário, escrevem: *x era o valor que Francisca tinha e 2x é o dobro que ela recebeu de sua mãe;* percebemos, então, que, de certa forma, esse grupo, em particular, teve um cuidado especial ao destacar a quantia que cada uma tinha no início, e mais que isso, conseguiu estabelecer uma relação entre as quantias.

Quanto à linguagem usada pelo grupo na resolução do problema, constatamos que prevaleceram os objetos ostensivos algébricos e numéricos, a presença da língua materna se fez com a articulação desses dois outros registros dos objetos ostensivos e, por fim, também recorreram a alguns registros gráficos. Com isso, podemos afirmar que o grupo G_1 materializou as explicações e justificativas necessárias ao desenvolvimento da tarefa, tal qual é proposto por Bosch e Chevallard (1999). Ou seja, os alunos, além de compreenderem a tarefa t_2, controlaram a atividade matemática, mas, se por um lado houve clareza na exploração dos outros registros, por outro, não conseguimos manter um diálogo quanto à atividade matemática propriamente dita no caso da OP_1. Sendo, assim, constatamos que a organização praxeológica implementada por esse grupo, referente à OP_1, limitou-se aos registros escritos na folha de resolução.

Por se tratar de uma descrição da atividade matemática, contida somente na figura 14, ou, como já foi dito, não tivemos diálogo com o grupo durante o desenvolvimento da OP_1, mesmo assim, evidenciamos, nos registros transcritos, a presença de alguns momentos de estudo. Entendemos que houve um momento do primeiro encontro, ou reencontro, pois os alunos que fazem parte da pesquisa já estavam resolvendo tarefas do mesmo tipo. O momento de exploração do tipo de tarefa segundo nosso entendimento foi vivido devido à diversificação dos objetos ostensivos. Acreditamos, por conseguinte, que os alunos vivenciaram, no transcorrer da resolução da tarefa, o momento da constituição do entorno tecnológico, o que pode ser verificado facilmente na figura 14, ou mesmo no parágrafo anterior, quando comentamos alguns conceitos evocados por eles. Enfim, podemos dizer que houve integração durante o processo de estudo dos alunos com a atividade matemática, e um dos produtos foi a OP_1.

Destacamos, agora, a outra OP do mesmo grupo analisado, que pertence à técnica aritmética. O que chama a atenção é a utilização de frações para representar a resolução, pois há a suposição de que isso ocorreu porque o aluno que registrou essa resolução já sabia a resposta; mesmo assim, devemos considerar que existe coerência nos registros utilizados. Então, para melhor situar o leitor, descrevemos a OP_2 pertencente ao grupo G_1. Sabendo que cada uma tinha R$ 186,00, e que o total seria R$ 372,00, fez-se uma proporção representada por meio de fração, sendo $\frac{5}{6}$ a parte da mãe e $\frac{1}{6}$ a parte de Francisca. Em seguida, representou-se o valor correspondente a cada uma delas. Na parte destinada aos comentários, os alunos justificaram os resultados encontrados, contudo, sem detalhar os passos seguidos na resolução, o que pode ser visualizado na figura a seguir

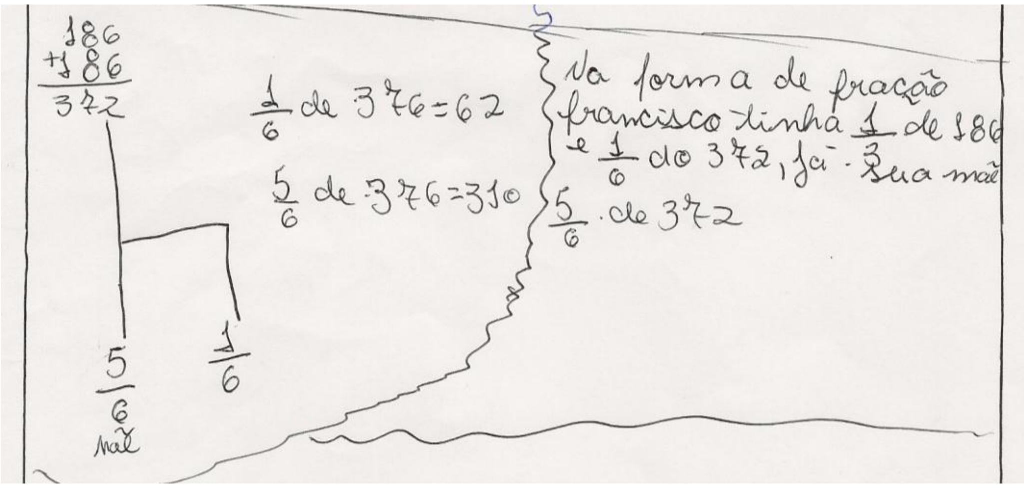


Ilustração 15 - Registros de parte de uma segunda organização praxeológica (OP_2) produzida pelos alunos do grupo G_1 no transcorrer da segunda sessão.

Outro aspecto que nos chamou a atenção foi a troca de aluno para registrar a resolução, pois, especificamente nessa OP_2 , mantivemos um diálogo com o grupo G_1, e percebemos que não eram todos os alunos que concordavam com a técnica empregada. Quando lhes foi perguntado: *porque na escrita eles tinham mudado a cor da caneta e o aluno que estava escrevendo?* De pronto, dois alunos responderam: *que não tinham entendido a resolução,* continuamos a indagar: *como assim? O que vocês estão querendo dizer?* Foi então que um dos alunos do grupo respondeu: *é que na realidade só ele (o aluno) que resolveu sabia explicar.* Isso demonstra, segundo nosso entendimento, que os alunos indagados estavam passando toda a responsabilidade da resolução para quem fez o registro escrito, o que pode ser observado facilmente quando um dos alunos diz: *professor é por conta dele, nós não temos nada a ver com isso!* A partir de então, dirigimo-nos ao aluno que resolvera a tarefa, solicitando-lhe que justificasse como foi que procedeu para chegar ao resultado; ele não conseguiu detalhar os passos, mas justificou as frações correspondentes às partes de Francisca e de sua mãe da mesma maneira que redigiu na parte referente ao seu comentário.

Outro aspecto que é importante ressaltar quanto ao contexto desse pequeno diálogo referente ao aluno que resolveu a tarefa foi a posição que ele ocupava na sala de aula, pois ele não é o que tem melhor desempenho acadêmico nas turmas em que foram aplicadas as sessões, ao contrário, é um aluno de desempenho baixo, razão julgada determinante para os demais alunos não darem muito crédito à resolução feita por ele.

Para reforçar nosso entendimento, quando este alunos optou pela resolução em forma de fração, e isso pode ser comprovado na figura 15, transcreveremos o seguinte comentário dele: n*a forma de fração, Francisca tinha* [...]; supusemos, então, que o aluno utilizara os elementos tecnológicos e teóricos: conceito de fração, conceito de números inteiros, conceito de números racionais, conceito de proporcionalidade e princípio de equivalência entre frações, elementos decisivos para que usasse uma técnica e que não utilizasse a técnica algébrica com auxílio da equação do primeiro grau como na OP_1.

No que diz a respeito ao aspecto matemático da figura 15, reitera-se que não foi simplesmente um registro diferente; o aluno encontrou correspondência direta das proporções referentes às partes de Francisca e de sua mãe. Quanto aos objetos ostensivos, encontramos registros numéricos, o registro da língua materna e o registro de grafismo, sendo este último, segundo nosso entendimento, bem explorado por ele, pois o que parece apenas alguns rabiscos rudimentares e sem lógica, para nós, são os registros gráficos manipulados pelo aluno.

Nesse contexto, essa organização praxeológica revela que o aluno estava envolvido no momento de estudo exploração do modo de ocupação e elaboração de uma técnica relativa ao tipo de tarefa. Sendo, assim, pressupõe-se que ele vivenciou o momento da construção do entorno tecnológico e teórico, mesmo não tendo terminado totalmente o seu comentário. Isso pode ser compreendido facilmente quando ele representa: $\frac{1}{6}$ *de 376 = 62 e, em seguida, representa* $\frac{5}{6}$ *de 376 = 310*. Com esse fragmento, vemos que o conceito de proporção foi representado por meio de fração.

Será que não cabe aqui afirmarmos que o aluno estava querendo institucionalizar uma técnica referente à sua organização matemática ou didática?

Análise da produção do grupo G_2

Para analisar a organização praxeológica produzida pelos alunos do grupo G_2, a qual denotamos pelo símbolo OP_3, de início, enfatizamos que esse grupo foi formado por duas alunas que fazem aulas semanalmente no Kumon. Por essa razão, muitos cálculos eram efetuados mentalmente e rapidamente e, a resposta da tarefa foi encontrada. Sendo assim, a técnica utilizada pelo grupo G_2, para resolver a tarefa, foi nomeada por nós como técnica aritmética. Quando percebemos que haviam encontrado a resposta, solicitamos que fizessem o registro escrito para, depois, fazermos a análise da produção do grupo. Inicialmente, houve muita reclamação, uma aluna disse: *professor, o que lhe interessa não é a resposta, nós já achamos! Tá bom!* Ela então, foi por nós indagada, com a seguinte pergunta: c*omo é que vocês me garantem que essa resposta que encontraram é a correta?* Foi aí que outra aluna começou a participar do diálogo e disse: o *senhor quer que nós provemos por **a** mais **b?*** E, por estarmos querendo entender o porquê daquele questionamento por parte da aluna, perguntamos, então: *de onde você tirou isso, provar por **a** mais **b?*** Imediatamente a aluna que estava participando do diálogo respondeu: *é tipo assim, quando surge alguma discussão lá em casa, o meu pai sempre diz: você vai ter que me provar por **a** mais **b,*** certo? Legal, pode continuar. *Na matemática essa prova pode ser os cálculos?* Percebemos que a aluna estava contra-argumentando, ou até, quem sabe, querendo convencer-nos de que já haviam encontrado a resposta, então bastava; continuamos a ouvi-la e ela disse: *mas tem uma coisa, além de resolver, o senhor ainda quer que a gente escreva o que foi feito.* Após alguns minutos, elas nos entregaram o registro a seguir.

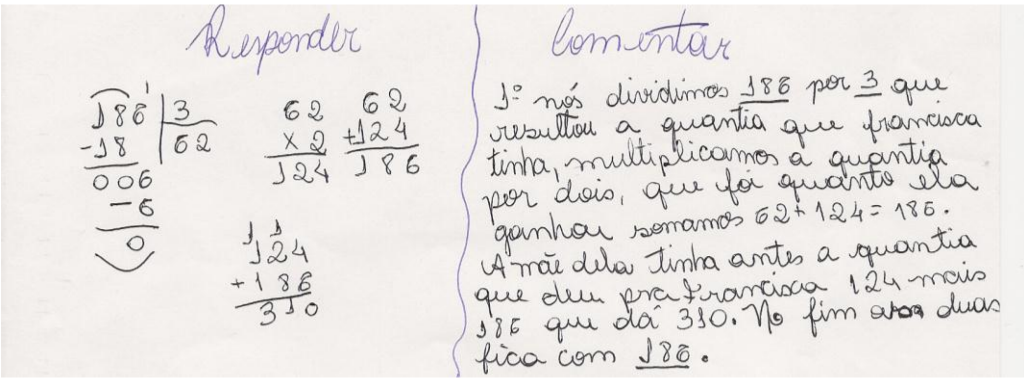


Ilustração 16 - Registro de parte da organização praxeológica (OP_3) produzida pelos alunos do grupo G_2 por ocasião da segunda sessão.

Os passos utilizados pelo grupo foram encadeados da seguinte maneira: em primeiro lugar, dividiram o valor fornecido por três, pois o enunciado registrava que Francisca tinha certa quantia e que recebeu o dobro de sua mãe; dessa forma, foi possível deduzir que o valor que Francisca tinha, no momento, era o triplo do valor inicial. Em segundo lugar, multiplicaram o valor encontrado por dois, o que lhes permitiu deduzirem qual a quantia que a mãe deu para a filha. Em terceiro lugar, verificaram se os valores encontrados correspondiam à quantia fornecida. Finalmente, para encontrar o valor da mãe, somaram o dobro do valor encontrado com a quantia fornecida, obtendo, assim, a quantia da mãe.

No que diz respeito aos aspectos tecnológicos e teóricos da OP_3, como já foi pontuado por nós, esse grupo utilizou o cálculo mental para auxiliar na resolução, isto é, os alunos optaram pela utilização de uma técnica aritmética, o que pode ser verificado na figura 16. Ao aplicarem o primeiro passo da técnica, os alunos, em seu registro, utilizaram o algoritmo da divisão, mais que isso, ao escreverem na parte referente ao comentário *1º nós dividimos 186 por 3*, torna-se evidente o conceito tecnológico da divisão. Em seguida, ao multiplicarem o resultado da divisão (62x2) e obter 124 como resposta, foi resgatado o conceito tecnológico do dobro de um número, muito presente na atividade matemática. Enfim, a utilização do algoritmo, da adição, demonstra a utilização do princípio aditivo, e a união de todos esses elementos tecnológicos e teóricos foi decisiva para elas resolverem a tarefa, ou seja, a combinação de todas essas operações aritméticas é que, efetivamente, compôs a técnica aritmética usada pelo grupo G_2.

Quanto à linguagem usada pelo grupo na resolução da tarefa, constatamos que prevaleceram os objetos ostensivos numéricos, a língua materna e alguns registros de grafismo. Também é importante lembrar que esse grupo utilizou o cálculo mental e, com isso, podemos inferir que houve a utilização do registro verbal, isto é, segundo Bosch e Chevallard (1999), “ [...] registro da *oralidade*, registro do *traçado* (que inclui grafismo e escrita), registro dos gestos, enfim, registro do que nomearmos, por falta de uma melhor expressão, a *materialidade qualquer* [...]”. Concordamos com esses estudiosos quanto à pluralidade de registros ostensivos; nosso objetivo não é descrever somente a ocorrência desses objetos ostensivos durante as sessões de aplicações, ou nas OP_S, mas as necessidades de uma instituição, livro didático, professor e, no nosso caso específico, a instituição aluno ou grupo de alunos, manipulá-los na construção de suas organizações praxeológicas.

Assim como na análise referente ao grupo G_1, identificamos alguns momentos de estudo que foram vividos de maneira semelhante nas atividades do grupo G_2, e o surgimento desses momentos de estudo serão analisados neste parágrafo. De início, consideramos que houve um momento do primeiro encontro com um tipo de tarefa, o que pôde ser verificado quando as alunas resolveram a tarefa mentalmente. Em seguida, é válido dizer que houve um momento de exploração de um tipo de tarefa, pois nós solicitamos às alunas que registrassem o caminho percorrido para encontrarem a resposta. Nesse momento, as alunas construíram uma técnica aritmética, recorrendo ao domínio aritmético para sintetizar, pelo menos, um embrião de técnica que serviu, efetivamente, para resolver um problema particular do tipo de tarefa $\mathbf{T}_2$.

Articulações entre as diferentes organizações praxeológicas

Depois desses comentários e análises das organizações praxeológicas dos dois grupos, fizemos algumas ponderações e articulações entre as diferentes maneiras de resolução da mesma tarefa. (Estas diferentes maneiras, poderão ser verificadas no anexo 06). Na figura 14, ao empregar a técnica, foi montada a equação com os dados fornecidos de maneira correta, com sua organização matemática bem explícita. Considerando a resolução de uma equação do primeiro grau, ao reduzi-la à forma $ax = c$ e, em seguida, dividir o valor de c por a de imediato, foi obtido o valor de x, que era o valor de Francisca. Verificamos que, para encontrar a quantia da mãe, elas decidiram recorrer às operações de multiplicação e adição. Em relação aos registros de linguagem, é possível ver que a linguagem algébrica foi utilizada com clareza; na parte do registro numérico, percebemos que, ao efetuar a adição, eles tiveram o cuidado de registrar todo o procedimento. Para melhor entendimento, retomamos a resolução do grupo G_1 referente à OP_1, pois quando é feita a adição de unidades em uma operação de adição, e essa, por sua vez, resulta em uma ou várias dezenas, deve-se passar o algarismo da dezena para a sua respectiva casa, ou unidade correspondente. E isso foi bem lembrado pelo grupo. Outro fator foi a preocupação em destacar o valor a que cada uma tinha direito, tanto a mãe quanto Francisca, com a utilização de um ostensivo do tipo grafismo, por meio de flechas.

No que diz respeito ao comentário, é possível perceber que esse grupo apenas descreveu o que foi feito. Ou seja, mudaram do registro algébrico e numérico para o registro na língua materna. Nessa passagem, encontra-se a palavra “daí”, que está presente nas demonstrações e provas de teoremas nos livros de Matemática. Segundo Chervel (1990), a escola utiliza um vocabulário próprio para comunicar-se. Independente dessa afirmação, considera-se que a cultura escolar está repleta de termos próprios que são utilizados livremente por alunos e professores. É interessante registrar aqui que, durante as aulas que ministramos nas turmas, não utilizamos a palavra “daí”, porém pode-se inferir que isso pode ter ocorrido devido à influência dos antigos professores.

Para o autor da Teoria Antropológica do Didático, não existe uma escala de importância entre as técnicas empregadas; por essa razão, não é possível julgarmos se a técnica algébrica é melhor para resolver essa tarefa. O que se sabe é que a técnica algébrica tem maior alcance e que, em relação à técnica aritmética utilizada pelo aluno do grupo G_1 na OP_2, para essa tarefa em particular, foi suficiente a determinação das respostas com o auxílio das frações. Existe, então, uma limitação na técnica utilizada pelo aluno.

Em relação ao grupo G_2, a organização matemática está de acordo com a organização didática, sendo possível notar essa relação direta quando, no momento do comentário, o grupo detalha os passos utilizados na resolução. Por sua vez, os comentários demonstram muita clareza na hora de redigir o texto escrito.

Retomando as resoluções anteriores, destacamos os conceitos: equação do primeiro grau, incógnita, solução de uma equação, divisão e multiplicação, e os princípios: equivalência, aditivo, e mais, regra de conservação da igualdade. Todos esses elementos teóricos e tecnológicos, e talvez outros que não tenham sido identificados por nós, fazem parte da organização matemática que, segundo nosso entendimento corresponde a uma parte rígida, isto é, algo que obedece a uma seqüência ou ordem já defendida por Chervel (1990). Essa parte rígida por sua vez é acompanhada de uma outra parte, que está associada à ação do aluno, que pode ser entendida como a organização didática.

Quando pensamos na técnica empregada pelos alunos, observamos que todos optaram por técnicas similares, mas por caminhos diferentes e até por articulações entre a solução algébrica e aritmética. Isso constitui, especificamente, as praxeologias didáticas que serão analisadas a partir de agora. Quanto aos registros de linguagem utilizados por eles, é possível ver que, na figura 14, os alunos utilizaram o registro algébrico e recorreram ao registro numérico para finalizar a resolução; na figura 16, as alunas articularam a linguagem numérica e a língua materna, bem como fizeram algumas indicações com traços que nos remetem à ideia de adição das duas quantias, convergindo, assim, para o total entre Francisca e sua mãe.

No decorrer da sessão, e nos registros dos alunos, percebemos a presença do momento de exploração do tipo de tarefa e a elaboração de uma técnica, pois, na tentativa de resolvê-la, cada um desenvolveu à sua maneira particular, isto é, cada um usou a matemática conhecida, e talvez na tentativa de encontrar a resposta tenha criado uma matemática nova. O momento do primeiro encontro, ou reencontro, ocorreu, pois vários alunos estavam envolvidos na resolução, e alguns até queriam ficar mais tempo tentando encontrar outras soluções. Quanto ao momento de avaliação da técnica, percebemos que quando os alunos do grupo G_2 fazem a verificação eles podem estar querendo avaliar a técnica. Quanto ao momento de institucionalização não foi possível ralizarmos, dada a escassez de tempo na aplicação da sessão, ou seja, não foi propiciado, mas pode ser que alguns alunos tenham conseguido institucionalizar alguma coisa.

Para finalizar, concluímos que os objetivos desta sessão foram alcançados. Vale lembrar que os alunos estavam envolvidos na atividade matemática, e outro aspecto que é bom salientar foi o envolvimento dos alunos na atividade de estudo. Por mais que fosse planejado, ou que se tentássemos prever a utilização de algumas técnicas, os alunos foram além das expectativas. Um fator que poderia ter influenciado nas resoluções encontra-se representado pelas técnicas presentes nos livros didáticos com que os alunos tiveram contato, e/ou pelas técnicas implementadas pelos antigos professores.

Segundo Chevallard (2001), a presença da *onipotência do professor* permeia a cultura escolar. Também a instituição escolar outorga ao professor um papel excessivo no processo didático. Ao pedir que as alunas comentassem o que fizeram, de imediato elas perguntaram: *quer que prove por **a** mais **b**?* Foi comprovada a tal onipotência, pois, se o professor não tivesse solicitado ao grupo que registrasse sua organização praxeológica, possivelmente os alunos não teriam a preocupação de justificar a resposta encontrada. Essa onipotência pode ser entendida pelo fato de os alunos só fazerem o que o professor pede, o que já faz parte da cultura escolar, estando bastante enraizado no cotidiano da escola.

4.3.7 Análise da terceira sessão

A terceira sessão da pesquisa foi aplicada no dia 10 de junho de 2009, em uma sala do 8º ano, do EF da Escola Municipal "João Evangelista Vieira de Almeida". A sala de aula foi dividida, por nós, em oito grupos de três ou quatro alunos, que trabalharam na resolução de um problema retirado do livro *Tudo é Matemática*, de Luiz Roberto Dante, como aconteceu também nas outras sessões. Trata-se de um livro do 7º ano do EF. O enunciado do problema foi o seguinte: *Noemi tem certa quantia em um banco. Sua irmã Alícia tem R$ 500,00 a mais. Juntas, elas têm R$ 3.000,00. Quanto tem Noemi?* Segundo nosso entendimento, esse problema pertence ao mesmo tipo de tarefa $T_{1,}$ que já foi enunciado na parte referente à análise de livros didáticos. Esse tipo de tarefa pertence, também, à cultura escolar, pois não é difícil encontrarmos enunciados semelhantes, solicitando a descoberta de quantidades relacionadas com certo número de personagens.

Ao analisar a produção dos alunos, identificamos 18 OPs, (ver anexo 04), pois alguns grupos encontraram mais de uma maneira de resolver o problema. Entre essas OPs, escolhemos quatro para serem analisadas. São as produções que fornecem, com mais clareza, elementos para a análise descrita a seguir. Informamos, ainda, que as quatro OPs analisadas a seguir dizem respeito à produção de três grupos de alunos, visto que um deles produziu duas maneiras diferentes de resolver o problema. Por uma questão de praticidade, denominamos os três grupos de alunos por G_1, G_2 e G_3. Cabe, ainda, ressaltar que a análise está baseada nos elementos que foram produzidos pelos alunos. De um modo geral, observamos que um dos grupos utilizou uma técnica aritmética, enquanto os outros dois grupos utilizaram técnicas algébricas.

Análise da produção do grupo G_1

Iniciamos a análise da praxeologia produzida pelo grupo G_1 com a descrição da técnica usada para resolver o problema, procurando descrever os passos seguidos para obter a solução. Em linhas gerais, descrevemos a técnica produzida pelos alunos por meio de três passos. Em primeiro lugar, os alunos retiraram, do total fornecido no enunciado (3.000,00), a quantia que Alícia tinha (500,00), obtendo, assim, (2.500,00). Em seguida, tomaram a diferença obtida no passo anterior e a dividiram por dois, obtendo a quantia de Noemi (1.250,00). Em terceiro lugar, para encontrar a quantia de Alícia, foi, então, adicionada a quantia de (500,00), pelo que obtiveram o total de (1.750,00).

Como aconteceu nas sessões anteriores, iniciamos a condução da terceira sessão escrevendo na lousa o enunciado do problema e, em seguida, fizemos uma leitura coletiva para esclarecer as dúvidas que pudessem surgir na interpretação do enunciado. De um modo geral, não houve dificuldades de compreensão do enunciado, e os alunos do grupo G_1 nem mesmo participaram desse momento de compreensão e começaram, de imediato, a resolução.

Para esclarecer a maneira como organizamos essa sessão, cumpre observarmos que, por mais que os alunos soubessem que a atividade não resultaria em nota, tampouco em qualquer bonificação, houve certa competição entre os grupos, pois alguns deles tentaram ser os primeiros a encontrar uma solução. Nesse sentido, reforçamos, para a classe, que o objetivo não era identificar quem terminaria em primeiro lugar, e sim quais grupos conseguiriam encontrar diferentes técnicas de resoluções e melhores comentários, justificando e descrevendo suas respostas. Dessa maneira, as técnicas didáticas implementadas pelos grupos podem estar relacionadas à nossa própria maneira de conduzir a realização da sessão.

Antes de terminarmos esse esclarecimento, um aluno gritou: *encontrei a resposta!* Então, perguntamos se a solução havia sido obtida somente por ele, ou pelo seu grupo. *Não, não, nós encontramos! É 1250 e 1750.* Assim, já sabíamos que esse grupo havia resolvido o problema. Entretanto, como esse grupo não havia participado da leitura coletiva do enunciado, percebemos que não havia atendido com exatidão a pergunta do enunciado. Por esse motivo, continuamos a dialogar com o grupo: *mas, o* *que é isso 1250 e 1750?* Um aluno do grupo respondeu: *é a quantia de cada uma delas*. Os alunos que não haviam resolvido começaram a prestar atenção ao diálogo. Continuei perguntando: *certo, mas qual é a resposta solicitada? O que o problema está querendo? São duas respostas ou somente uma?* Foi assim que os demais alunos que haviam participado do momento de entendimento do enunciado riram, ao perceberem que o grupo *dos alunos mais rápidos* não havia, de fato, compreendido exatamente o enunciado proposto.

Na continuidade, um aluno do grupo G_1, disse: *a resposta é somente a quantia de Noemi.* Aproveitei a afirmação do aluno para perguntar: *então, qual era a quantia de Noemi?* Um deles disse: *espera um pouco!* E, em seguida, disse a resposta correta. Consideramos interessante descrever esses diálogos porque eles contribuem, segundo nosso entendimento, para uma devida percepção da dinâmica do ponto de vista didático da aplicação da sessão, bem como da interação dos alunos na atividade matemática. A partir de agora, veremos, efetivamente, como os alunos do grupo G_1 procederam na resolução da tarefa proposta, isto é, na técnica utilizada pelo grupo.

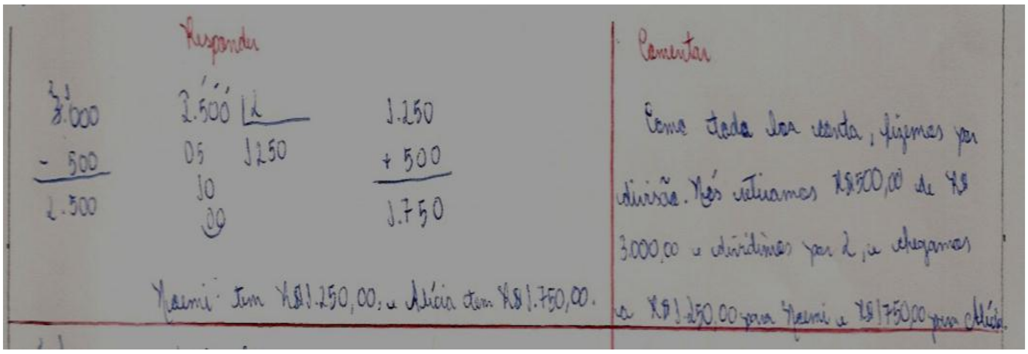


Figura 17 – Registro de parte da organização praxeológica produzida pelos alunos do grupo G_1 que participam da terceira sessão experimental da pesquisa.

Quanto aos comentários escritos pelos alunos, a primeira frase reproduzida por eles que consta na figura acima chamou-nos a atenção, pois iniciara com a afirmação: c*omo toda boa conta, fizemos por divisão.* Na tentativa de entender o que isso significava, perguntamos: *por que, vocês consideram este problema como uma boa conta?* Então, a aluna que fez o registro escrito respondeu: *é que não precisou fazer equação nem recorrer à álgebra.*

Então, após dialogarmos um pouco, percebemos que, para o grupo, o fato de não precisar usar a técnica algébrica seria uma "boa conta", isto é, o fato de utilizar uma técnica aritmética e resolver facilmente a tarefa é algo bom, no entendimento dos alunos participantes da pesquisa. Por outro lado, ressaltamos que, para os alunos, o que interessava era resolver a tarefa de maneira rápida e correta; eles não estavam preocupados em saber se a técnica era limitada, ou se ela poderia passar por um processo de evolução, como é pontuado por Chevallard (2001), o que realmente importava era a resposta.

Esse grupo estava interessado em encontrar uma resposta antes dos demais, e isso pode ter levado ao registro das quantias de Alícia e Noemi, sendo que o problema solicitava somente a quantia dessa última. Tal fato corrobora com o que diz Chervel (1990), pois ele propõe que, para o estudo, há necessidade da *leitura e da escrita*. Estamos entendendo que essa leitura não é algo ingênuo, mas a interpretação correta do que o enunciado está solicitando. Quanto à escrita, ela representa a clareza em comunicar os resultados obtidos após a resolução de um problema ou a interpretação do enunciado no mesmo. Podemos até dizer que a alfabetização matemática envolve a leitura e a escrita, isto é, o entendimento correto e o registro dos resultados.

No que diz respeito aos aspectos tecnológicos e teóricos da OP_1, por mais que o livro didático indicasse que a técnica de resolução do problema seria por meio de uma equação do primeiro grau, os alunos optaram pela utilização de uma técnica aritmética. Sendo, assim, ao aplicar o primeiro passo da técnica, os alunos, em seu registro, armaram e, em seguida, efetuaram a subtração, o que vem resgatar o conceito tecnológico do arme e efetue, muito presente nos livros didáticos como uma vertente mais tecnicista. Enfim, a utilização dos algoritmos, da divisão, adição e subtração foram decisivos para que se resolvesse o problema, ou seja, a combinação de todas essas operações aritméticas, efetivamente, compuseram a técnica aritmética usada pelo grupo G_1.

Quanto à linguagem usada pelo grupo na resolução do problema, constatamos que prevaleceram os objetos ostensivos numéricos, a língua materna e alguns registros de grafismo. Se por um lado houve pouca exploração de outros registros, por outro lado, foram mantidos vários diálogos entre os membros do grupo, evidenciando que eles estavam bem envolvidos na atividade matemática. Em outros termos, constatamos que a organização praxeológica implementada pelo grupo não se limitou aos registros escritos na folha da resolução, mas este usou também a verbalização na atividade matemática e, em particular, na explicitação dos elementos didáticos e matemáticos que permearam a produção do grupo.

Identificamos, nas atividades do grupo $G_{1,}$ o surgimento de alguns momentos de estudo, os quais são analisados neste parágrafo. De início, consideramos que houve um momento do primeiro encontro com um tipo de tarefa e, em seguida, podemos dizer que houve um momento de exploração de um tipo de tarefa, o que foi favorecido pela própria forma como se planejou a sessão. Nesse momento, os alunos construíram uma técnica aritmética, recorrendo ao domínio aritmético para sintetizar pelo menos um embrião de técnica, que serviu, efetivamente, para resolver um problema particular.

Na continuidade, supomos que esse embrião de técnica poderia evoluir para se constituir em uma técnica pertinente para se resolver um tipo de tarefas, mas, nesse momento, consideramos que a técnica resolve pelo menos a tarefa proposta. Entendemos que houve, em sintonia com o momento de construção da técnica, um momento da constituição do entorno tecnológico, o que pode ser verificado na figura 17, quando os alunos escreveram, ao lado das contas, que se tratava de *uma boa conta*, fazendo referência a uma espécie de justificativa da solução aritmética por eles construída.

Análise da produção do grupo G_2

Para analisar a organização praxeológica produzida pelos alunos do grupo $G_{2,}$ que denotamos pelo símbolo OP_2, de início, enfatizamos a técnica utilizada por eles para resolver o problema, procurando descrever os passos seguidos para a obtenção da solução. Quanto à descrição dessa técnica, é preciso dizer que os próprios alunos numeraram os quatro passos que os levaram à obtenção da solução, conforme mostra a figura 18. Em primeiro lugar, os alunos montaram a equação $x + x = 3000$ e a resolveram, encontrando a solução $x = 1500$, conforme registro utilizado. Em seguida, o segundo passo da técnica se consistiu na subtração de 250 de 1500, com que obtiveram o valor 1250. Em seguida, no terceiro passo, os alunos registraram, novamente, 1500 e adicionaram o valor de 250 para obterem 1750. Finalmente, no quarto passo, os alunos fizeram uma subtração entre o maior e o menor valor, obtendo a diferença entre os dois personagens mencionados no enunciado do problema, Noemi e Alícia.

Os resultados encontrados estão corretos, porém, assim como no caso do grupo G_1, os alunos não se preocuparam em atender exatamente à solicitação do enunciado. Sabiam que 1250,00 e 1750,00 eram as quantias resultantes das operações realizadas, não obstante ficou no ar a quantia de Noemi, supomos que os alunos estavam preocupados em encontrar somente o resultado e assim, como os alunos do grupo G_1, não se preocuparam em interpretar o problema. Quanto ao comentário, vimos que houve preocupação em descrever os passos, seguindo a lógica de resolução adotada pelo grupo, o que pode ser evidenciado na figura a seguir.

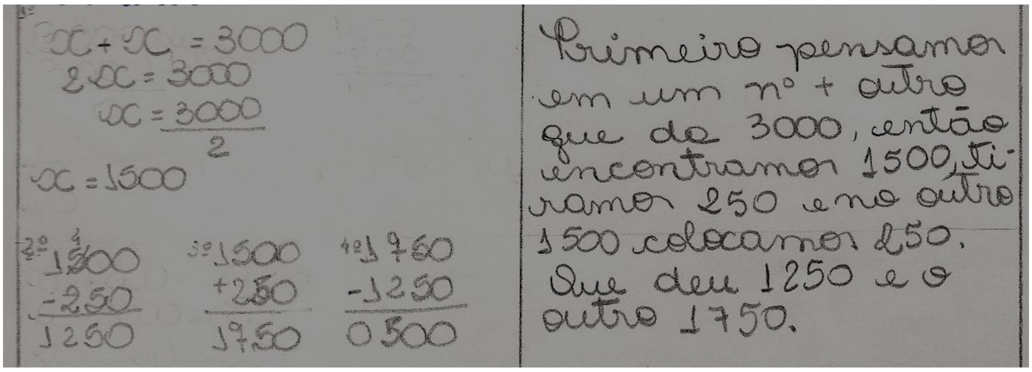


Figura 18 – Registro de parte da organização praxeológica (OP_2) produzida pelos alunos do grupo G_2 por ocasião da terceira sessão.

Os elementos tecnológicos e teóricos referentes a essa OP são: conceito de equação, conceito de incógnita, princípio aditivo e multiplicativo. A mobilização desses elementos foi fundamental para a resolução da tarefa. A nossa preocupação é: será que esse grupo encontrou os resultados por que sabia a resposta, ou porque já havia ouvido a resposta do primeiro grupo analisado? E, talvez por essa razão, tenham se contentado apenas com as duas respostas encontradas.

Os registros usados pelos alunos são praticamente os mesmos do grupo $G_{1,}$ com acréscimo do registro algébrico e da explicação dos quatro passos ordenados da técnica usada. Assim, constatamos que a organização didática encontra-se evidenciada junto com a organização matemática, reforçando a efetiva relação existente entre essas duas organizações. Dessa maneira, somos levados a afirmar que a praxeologia adotada pelo grupo segue uma linha bem cartesiana, isto é, para chegar ao ponto desejado, fazemos primeiro isso, depois, aquilo, até chegarmos lá, sendo que esse pensamento de sequências está presente na Matemática da Educação Básica.

Como já observamos na análise da OP_1, a OP em particular, carrega boa parte dos passos, não na mesma sequência, mas com o objetivo singular de atingir as respostas já reveladas por G_1. Salientamos que encontrar respostas sem identificar realmente o que é solicitado no enunciado permeia a cultura escolar, ou seja, respostas que não atendem diretamente à solicitação do problema; sobretudo nas avaliações de Matemática não existe uma preocupação em entender o enunciado, mas em resolver de maneira rápida. Constantemente, ouvimos a seguinte pergunta: *está certo professor?* Ou, *tá bom assim?*

Por se tratar de uma descrição da atividade matemática, evidenciamos, ao longo da sessão e nos registros transcritos pela figura 18, a presença de alguns momentos de estudo. Em primeiro lugar, e em virtude do nosso próprio objetivo, ao planejar a sessão, entendemos que houve um momento do primeiro encontro, ou reencontro, com o tipo de tarefa, em consequência, o momento de exploração do tipo de tarefa. Acreditamos que os alunos vivenciaram, no começo da resolução do problema, o momento da constituição do entorno tecnológico, o que pode ser verificado facilmente quando enumeram a sequência de resolução da técnica.

Análise da produção do grupo G_3

As duas organizações praxeológicas descritas a seguir foram produzidas pelos alunos do grupo G_3. O que nos motivou a destacar essas duas soluções do problema foi o fato de que os alunos utilizaram somente técnicas algébricas, isto é, esse foi o único grupo que recorreu somente a soluções algébricas. Além disso, atenderam exatamente à solicitação do problema, que consistia em encontrar a quantia de uma das personagens mencionadas no enunciado, Noemi. A figura a seguir reproduz parte da OP_3, e a subseqüente, a OP_4, sendo as duas produções do grupo em análise.

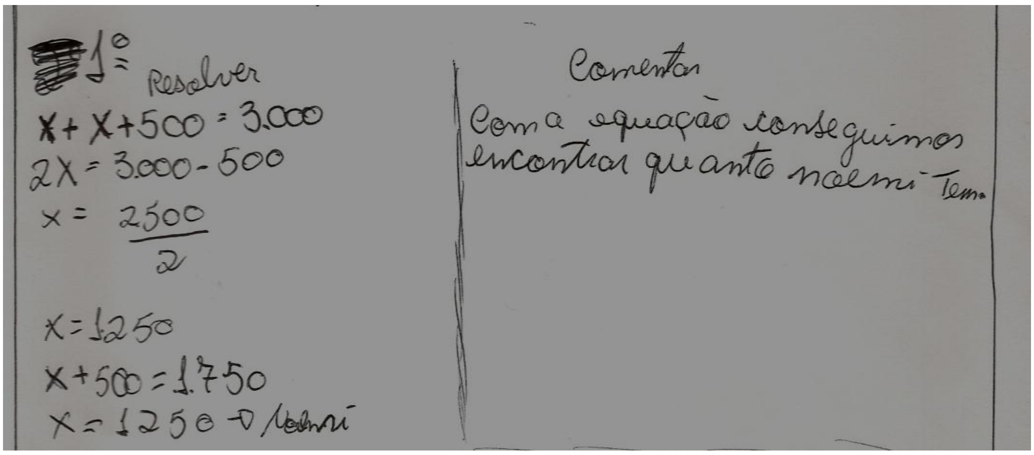


Figura 19 – Elementos da organização praxeológica produzida pelos alunos do grupo G_3 no transcorrer da terceira sessão.

No que diz respeito aos passos utilizados pelo grupo, em primeiro lugar, montam a equação com os dados fornecidos. De posse da equação, reduziram a equação à forma $ax = c$. Após isso, resolveram a equação, isolando o valor de x, que é o valor de Noemi. Porém, não pararam por aí, adicionaram ao valor de x mais 500, obtendo, assim, a quantia de Alícia. Mas o destaque feito em forma de resposta é somente para a quantia de Noemi. Entendemos que esse grupo estava ciente do que lhe era solicitado, quando destacou a quantia de Noemi.

Notamos que os alunos tiveram certas dificuldades em comentar, por meio de um texto escrito, os passos adotados na implementação da técnica usada, ou que o fizeram quando estavam utilizando a técnica algébrica, e isso pode ser evidenciado no comentário: *com a equação, conseguimos encontrar quanto Noemi tem.* Mais uma vez, a *algebrização da matemática* se faz presente na produção dos alunos.

Ao equacionar, e em seguida resolver o problema de forma correta, percebemos a utilização dos elementos tecnológicos e teóricos: equação do 1º grau, princípio de equivalência, conceito de incógnita, operação inversa. Eles adotaram a técnica algébrica com utilização da equação do primeiro grau, o que nos permite afirmar que o grupo tinha as noções e os conceitos que permeiam a técnica algébrica.

Quanto aos registros de linguagem, vimos que recorreram ao registro algébrico e ao da língua materna, mas, ao dividirem a folha com os traços, inferimos que usaram o registro de grafismo. Em relação a esse último, ao separar a resolução do comentário, os alunos fizeram pequenos traços que deram a impressão de um traçado mais realçado; com isso, entendemos que esse ostensivo está carregando um não ostensivo, que seria diferenciar a resolução do comentário.

Como observamos na análise das OP_1 e OP_2 , há presença de alguns momentos de estudo, que frequentemente estão sendo vividos pelos grupos em suas produções, o G_3 também vivenciou os mesmos momentos, mas supomos que, ao recorrerem à técnica algébrica, estavam instituindo uma técnica ou técnicas com a utilização do domínio algébrico. Portanto, podemos inferir que as atividades matemáticas, desenvolvidas pelos alunos, permitiram o surgimento do momento do primeiro encontro, ou reencontro, com o tipo de tarefa, o momento de exploração do tipo de tarefa. Enfim, momentos didáticos que se articularam com os momentos de estudo.

Cabe aqui destacarmos a segunda resolução produzida pelo grupo G_3, com a utilização da técnica algébrica, sistema de equação, e não a equação do primeiro grau, como foi feito anteriormente, o que pode ser observado na figura a seguir.

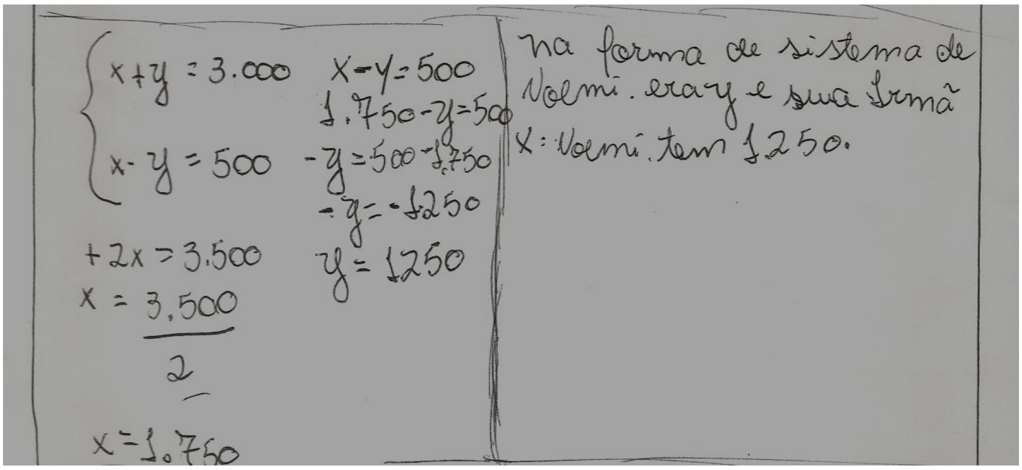


Figura 20 – Registros de parte de uma segunda organização praxeológica (OP4) produzida pelos alunos do grupo G3 no transcorrer da terceira sessão

Ficamos surpresos quando encontramos a técnica algébrica reproduzida pela figura 20, considerando que os alunos haviam estudado tal técnica há mais de um ano e que até então, nenhum grupo havia utilizado sistema de equação corretamente e, quando recorria a ela, muitas vezes não conseguiam completar a resolução. Pensávamos que seria difícil os alunos as reproduzirem, devido à dificuldade que geralmente os alunos dessa série encontram para resolver sistemas de equações. Mesmo assim, a produção do grupo chamou a nossa atenção, tanto nos registros utilizados como, também, na maneira de resolver, o que não é nada sobrenatural, mas que traz claramente as diferentes formas de explorar uma mesma técnica.

No que diz respeito aos passos utilizados pelo grupo, em primeiro lugar, percebemos que os alunos montaram o sistema de maneira correta, utilizando o ostensivo usual da *chave* para denotar a relação entre as duas equações. De posse do sistema, utilizaram a técnica resolutiva *método da adição,* presente em grande parte dos livros didáticos de Matemática. Ao adicionar as duas equações, encontraram o valor de x, que é a quantia de Alícia. Copiaram a segunda equação, e substituíram o valor de x para encontrar o valor de y, que é a quantia de Noemi.

Na parte referente ao comentário, novamente aparece a dificuldade em redigir um texto que relate o que foi feito. Mesmo assim, o comentário mostra que eles entenderam o enunciado, pois relataram: *na forma de sistema de (equação) Noemi era y e sua irmã x. Noemi tem 1250*. Ou seja, esclareceram quais incógnitas pertenciam a cada uma delas e, de imediato, terminaram o texto dizendo qual era a quantia de Noemi.

Quando resolveram o sistema de forma correta, percebemos que os alunos também destacaram os elementos tecnológicos e teóricos da equação do primeiro grau com duas incógnitas: sistema de equação, incógnita, princípio de equivalência, correspondência entre as incógnitas; enfim, pareceu-nos que esse grupo tinha as noções e os conceitos que permeiam a técnica algébrica.

Quanto aos registros de linguagem, vimos que recorreram aos mesmos da OP_3 mas, quando dividiram a folha com os traços, reforçamos que usaram o registro de grafismo. Percebemos que em relação a esse último, ao separarem a resolução do comentário, os alunos fizeram pequenos traços que deram a impressão de um traçado mais realçado; com isso, entendemos que esse ostensivo está carregando um não ostensivo, que seria diferenciar a resolução do comentário.

Articulações entre as diferentes organizações praxeológicas

Após essas descrições referentes às técnicas empregadas pelos alunos, e também a transcrição de parte dos diálogos mediados por nós, é importante aprofundarmos as discussões das organizações praxeológicas concernentes à produção dos três grupos de maneira articulada, isto é, considerando a dinâmica da sala de aula e as influências nas escolhas das técnicas. Nesse sentido, ao retomar às resoluções anteriores, todos os elementos teóricos e tecnológicos revelados pelos alunos fazem parte da organização matemática, que por sua vez estão associados à organização didática, compondo assim a organização praxeológica de cada grupo.

Entendemos ser pertinente reiterar aqui um aspecto pontuado por Chervel (1990) quanto ao papel das atividades escolares, denominadas, por ele, simplesmente de *exercícios*. Essas atividades podem ser uma contrapartida indispensável para a fixação de uma disciplina e, mais particularmente, de uma parte de sua respectiva cultura. Nas considerações feitas por Chervel (1990), às atividades escolares podem, muitas vezes, ter uma conotação muito passiva do aluno. Por outro lado, Chevallard (2001) considera as tarefas *rotineiras*, as quais são articuladas por nós, como tendo o mesmo aspecto da passividade mencionado por Chervel (1990). Fazemos essas considerações para dizer que o tipo de tarefa usado na terceira sessão é considerado por nós como sendo rotineiro, pois está historicamente inserido na cultura escolar da Matemática.

Encontrar problemas desse tipo nos livros didáticos é algo relativamente comum; o que consideramos diferente seria fazer o comentário, ou até entender o que foi feito, registrar na língua materna os caminhos escolhidos. Nas OP_1 e OP_2, vimos que os grupos tentaram justificar ou descrever o que foi feito, buscando, mesmo com certa dificuldade, atender à nossa solicitação. Porém, nas OP_3 e OP_4, os alunos apenas disseram, usamos equação e encontramos a resposta, usamos sistema e também encontramos a resposta, e isso basta. Tal fato já foi identificado em sessões anteriores e é comum essa dificuldade de redação; os alunos estão habituados a usar regras, algoritmos e fórmulas e, não comentar os procedimentos utilizados.

Mesmo com essas limitações na escrita, foi possível encontrar algumas pistas de momentos de estudo vivenciados pelos alunos, não somente na produção escrita, mas também nos diálogos transcritos. Para nós, ficou claro que o primeiro grupo vivenciou o momento de reencontro com o tipo de tarefa, pois queria encontrar a resposta de forma rápida; sendo assim, para atender a esse momento, recorreram à exploração do tipo de tarefa e à elaboração de uma técnica. Quanto ao momento de avaliação da técnica, temos certa insegurança em afirmar que ocorreu, pois os dois primeiros grupos, ao encontrarem as duas quantias, não pararam para responder à pergunta do problema.

De certa forma, os objetivos propostos para a realização dessa terceira sessão foram atingidos para efeitos de obtenção da produção discente para alimentar nossa pesquisa. Os alunos envolveram-se, efetivamente, na realização da atividade matemática proposta, pois, mesmo com o número reduzido de alunos, os que entraram na sala de aula desenvolveram uma atividade de estudo. Outro aspecto que cabe destacar é a flexibilidade no planejamento da sessão, tendo em vista que, quando soubemos que teríamos a redução do tempo, pois tínhamos 40 minutos disponíveis, imediatamente escolhemos uma tarefa mais simples, que fosse de fácil entendimento e que os alunos conseguissem resolver em um curto espaço de tempo.

Para um leitor mais crítico, a escala qualitativa proposta nos exercícios, e defendida por Chervel (1990), deveria fazer parte das sessões, ou seja, a cada sessão seria necessário aumentar a dificuldade das tarefas; todavia, não temos esse interesse, muito pelo contrário, queremos que os alunos explorem as tarefas, utilizem diferentes técnicas e também consigam comentar o que fizeram.

CAPÍTULO 5 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

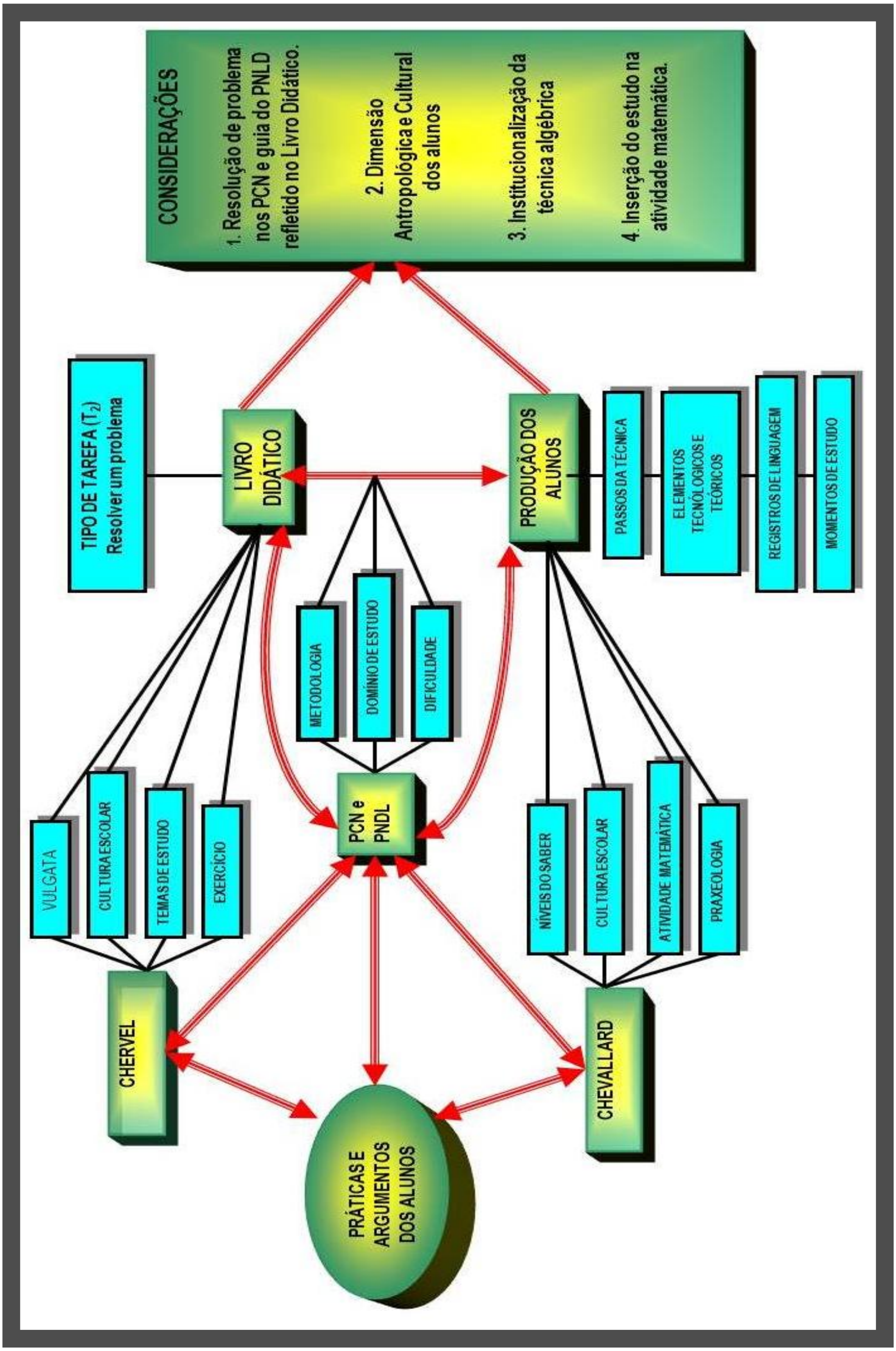
5.1 Considerações iniciais

Em nossa pesquisa, procuramos investigar "em que medida as práticas e os argumentos dos alunos na resolução de problemas, que podem ser resolvidos por meio de equação do primeiro grau, contribuem com o fazer matemática". De posse desse problema, delimitamos o nosso objetivo geral "analisar as técnicas utilizadas por alunos na resolução de problemas algébricos do primeiro grau, propostos em um livro didático do 7º ano de Matemática do Ensino Fundamental". Na tentativa de dar suporte a esse objetivo, buscamos: 1) Identificar e analisar, nos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática, ideias relativas à valorização do estudo de resolução de problemas nos anos finais do Ensino Fundamental; 2) Analisar problemas algébricos propostos para serem resolvidos por meio de uma equação do primeiro grau em um livro contemporâneo brasileiro; 3) Analisar as práticas e argumentos utilizados por alunos dos anos finais do Ensino Fundamental na resolução de problemas algébricos do primeiro grau que estão propostos em um livro didático do 7º ano de Matemática.

O ensino da matemática por meio da resolução de problemas ou pela aplicação de conceitos matemáticos, em situações contextualizadas ou não, é um tema que há anos tem preocupado pesquisadores e professores. Nossas reflexões não se restringem aos problemas em si, e sim nas informações apresentadas nos PCN de Matemática, nas orientações do guia do PNLD (2008), e a influências de tais documentos na realidade da sala de aula.

Dessa forma, quando os alunos resolvem um problema, segundo nossa visão, estão reproduzindo o discurso do professor, e os conhecimentos adquiridos ao longo de sua vivência social no processo de ensino e aprendizagem. Ressaltamos importante esclarecer que a atividade matemática exerce um destaque no processo de estudo, favorecendo significados aos conteúdos matemáticos.

Para melhor entendimento de como organizamos a nossa pesquisa apresentamos o esquema a seguir:


CONSIDERAÇÕES
1. Resolução de problema nos PCN e guia do PNLD refletido no Livro Didático.
2. Dimensão Antropológica e Cultural dos alunos
3. Institucionalização da técnica algébrica
4. Inserção do estudo na atividade matemática.
TIPO DE TAREFA (T_2) Resolver um problema
LIVRO DIDÁTICO
PRODUÇÃO DOS ALUNOS
PASSOS DA TÉCNICA
ELEMENTOS TECNÓLOGICOS E TEÓRICOS
REGISTROS DE LINGUAGEM
MOMENTOS DE ESTUDO
METODOLOGIA
DOMÍNIO DE ESTUDO
DIFICULDADE
PCN e PNDL
VULGATA
CULTURA ESCOLAR
TEMAS DE ESTUDO
EXERCÍCIO
NÍVEIS DO SABER
CULTURA ESCOLAR
ATIVIDADE MATEMÁTICA
PRAXEOLOGIA
CHERVEL
CHEVALLARD
PRÁTICAS E ARGUMENTOS DOS ALUNOS

5.2 Resolução de problema nos PCN e guia do PNLD refletido no livro didático

Entendemos que a resolução de problemas por meio de uma equação do primeiro grau, nos anos finais do Ensino Fundamental tem importante relevância no ensino da Matemática no cenário atual. Por esta razão é que nos propusemos analisar nos documentos PCN e no guia do PNLD (2008) a valorização deste conteúdo matemático como uma vulgata presente no ensino e aprendizagem da Matemática, bem como as influências destes documentos nos livros didáticos contemporâneos de Matemática, e conseqüentemente na praxeologia dos professores de Matemática e nas técnicas adotadas pelos alunos.

O comportamento humano é influenciado, segundo a tradição filosófica, pela dialética que dá reciprocidade entre sujeito e objeto. Dessa forma vimos que os PCN propõem uma interação social, que vai se formando ao longo do tempo histórico. Para os teóricos nos quais apoiamos, o conhecimento não pode ser entendido isoladamente em relação à prática política dos homens, ou seja, nunca é apenas uma questão de saber, mas também de poder.

É possível, então concluir que a valorização da resolução de problemas, tal qual é defendida nos PCN de Matemática corresponde a uma vulgata emergente no cenário nacional, sendo assim essas "sugestões" contidas neste documento, de certa forma exercem influência na prática pedagógica do professor de Matemática, bem como na escrita do livro didático. Mas é importante considerar a interferência do guia do PNLD (2008), como elemento norteador para os autores de livros didáticos. Documento este que traz critérios, informações básicas, adequações metodológicas e preceitos éticos para os autores.

Por estas razões, quando nos dedicamos a analisar a resenha do guia do PNLD (2008), pretendíamos identificar os conceitos de cultura escolar e vulgata que permeiam este documento. Segundo nosso entendimento, as orientações contidas no guia de certa forma ditam regras para as editoras, mais especificamente para os autores dos livros didáticos que estão contemplados no guia do PNLD (2008). Quanto à vulgata, cabe ressaltar que o livro analisado, na tentativa de explorar de diversas maneiras para apresentação do conteúdo "equações do primeiro grau com uma incógnita", recorre a registros com a utilização de personagens, para assim institucionalizar as noções e conceitos matemáticos que permeiam o conteúdo matemático.

O que também observamos, todavia, é a valorização de atividades propostas aos alunos, em forma de problemas, podemos dizer que os problemas já estão incorporados na cultura escolar da Matemática. Outra consideração importante que deriva das nossas conclusões, que tem relação com as mudanças ocorridas na escrita dos livros didáticos contemporâneos, é a preocupação do autor em comunicar o conteúdo matemático ao professor de matemática, e isto é perceptível quando incorpora no livro didático um espaço substancial para as orientações pedagógicas para o professor, e também com a inserção de alertas e dicas para o professor na tentativa de direcionar as discussões referentes ao conteúdo em estudo.

Reiteramos aqui que, por mais que a noção de vulgata não esteja presente em documentos oficiais (PCN, guia do PNLD, referenciais curriculares), muito menos no livro didático, essas reflexões das práticas escolares referentes às tradições, às ideologias, à postura e à vida escolar são relevantes, pois, ao estudar a cultura escolar, vimos que a resolução de problemas está tão presente no ensino da Matemática, quanto na história das disciplinas escolares.

5.3 Dimensão Antropológica e Cultural dos alunos

Toda atividade matemática que tenha por objetivo a aprendizagem ou o ensino de um determinado conceito matemático, pode ser avaliada por diversos ângulos, o que deixa clara a complexidade de tal empreitada. Buscamos, ao longo deste trabalho, colocar em evidência alguns dos elementos que compõem essa complexidade, sobretudo as discussões feitas em sala de aula nas disciplinas do mestrado, e os conceitos dos autores Chervel (1990) e Chevallard (1999), além de algumas reflexões levadas a efeito ao longo da leitura de tais textos.

Recorremos a Chervel (1990) para analisarmos as tendências metodológicas do ensino da Matemática e suas raízes históricas, e também para tratarmos da dimensão cultural da Matemática enquanto disciplina escolar. Nesse sentido, consideramos em nossas análises o termo exercícios, utilizado por ele, fazendo uma associação direta com as tarefas propostas por Chevallard (2001) para, assim, mantermos uma correlação entre as ideias desses teóricos.

Ressaltamos que a Teoria Antropológica do Didático (TAD), enquanto modelo teórico, exerce um papel decisivo no nosso entendimento de como a Matemática é tratada dentro de um contexto social, na medida que se insere num programa epistemológico de investigação em didática da matemática. Pela razão de o saber matemático estar localizado nesse contexto social, surge a abordagem antropológica.

Nesses termos, entendemos que essa teoria pode contribuir com a análise dos modelos epistemológicos que surgem a partir de problemas particulares do ensino da Matemática, problemas específicos da própria Matemática.

De posse dessas ideias iniciais, levantamos discussões de alguns conceitos propostos por tais autores, na tentativa de entendermos a cultura escolar presente na disciplina escolar, bem como os níveis de saber envolvidos dentro da Matemática, e as mudanças que ocorreram e ocorrem nas referências curriculares, pedagógicas e didáticas.

O professor, ao escolher uma tarefa para propor aos seus alunos, deveria ter em mente esses níveis de ensino, bem como os conteúdos, métodos, recursos e argumentos a serem utilizados na atividade matemática. Nessa relação entre tipo de tarefa, tarefa e atividade matemática, incluem-se os momentos de estudo que serão vivenciados pelos alunos, proporcionados pela praxeologia do professor, ou do livro didático.

Para que isso ocorra efetivamente, o domínio desse tema está subordinado ao professor que em sua prática docente; por outro lado, este está vinculado à instituição escolar, que lhe outorga o poder de ministrar aulas no intuito de possibilitar que os alunos alcancem os conhecimentos propostos. Temos que considerar ainda que todas as demais instituições, segundo Chevallard (1999) documentos, livros, alunos e coordenação concedem ao professor uma autoridade sobre o tema que ele está abordando na sala de aula, e este, por sua vez, dentro de sua esfera de atuação, recorre, mesmo sem se dar conta, à vulgata emergente da temporalidade em que está inserido.

Por tais motivos, acreditamos que, ao ensinar uma técnica para a resolução de um problema, o professor vincula-se à lógica interna da Matemática, isto é, não dá para ensinar a resolução de determinados problemas sem antes trabalhar os pré-requisitos mínimos, entre os quais, destacamos as operações inversas, a propriedade distributiva da adição e a multiplicação.

Tanto o professor como o aluno, cada um em sua área de atuação, confrontam-se, diariamente, com tipos de tarefas (T) e, para a solução, utilizam-se de técnicas (τ) de estudo ou técnicas (τ) didáticas que, por sua vez, são justificadas por uma tecnologia (θ) que remete a uma reflexão sobre uma teoria (Θ), de tal forma que justifique a referida tecnologia (θ).

Essas tarefas, ou exercícios estão presentes na cultura escolar da Matemática. São reservadas ao espaço da sala de aula, dentro dos livros didáticos, pois uma pessoa, que não seja estudante, jamais irá marcar um encontro com um colega em um dia qualquer para racionalizar denominadores, a não ser que seja obrigado, ou mesmo induzido por um professor, ou que surja a necessidade de aprender tal conteúdo exclusivo da Matemática, visto que, na Língua Portuguesa, não existe necessidade de racionalizar denominadores.

Acreditamos que, ao aluno tentar explicar aos colegas de grupo a técnica empregada, de certa forma está ocorrendo o ensino e aprendizagem de Matemática. Por isso defendemos que os alunos estão fazendo matemática segundo Chevallard (1999), uma matemática que valorize os conhecimentos trazidos pelos alunos, e que permita que tais conhecimentos possam ser trabalhados em sala de aula para resolver os problemas que, diariamente, são propostos a eles.

Gostaríamos de sugerir que o incentivo aos alunos para reflexão sobre a técnica, à criação de pequenos comentários, quanto às técnicas utilizadas, seguidas de socializações entre os alunos nos grupos de estudo, pode ser um modo de condução ao ensino e a aprendizagem da Matemática. Tornado as aulas interessantes, dinâmicas e viáveis para que o professor possa despertar nos alunos o interesse ao estudo.

Neste sentido, gostaríamos de reiterar que existe uma diversidade no ambiente de estudo no qual desenvolvemos nossa pesquisa, os alunos envolvidos são oriundos do ensino público, mas na sua grande maioria, eles têm um bom desempenho acadêmico. Os alunos com baixo rendimento escolar frequentavam aulas de reforço oferecidas pela escola pelo projeto GAE[26], outros alunos frequentam aulas regularmente no Kumom, e havia dois alunos filhos de professores de Matemática, e um aluno era bolsista da OBMEP[27], o que nos remete a afirmar que toda essa diversidade se tornou fator determinante para obtenção de técnicas diversificadas.

Diante do contexto apresentado, nossa pesquisa aponta que a valorização das dimensões antropológica e cultural da sala de aula podem estabelecer um diálogo entre professor e aluno com o objetivo de permitir que ambos reflitam sobre o que é estudar Matemática. E que tal reflexão, sem dúvida, promova uma mudança no campo das práticas dos professores e alunos. E que realmente os alunos possam fazer matemática na real concepção proposta por Chevallard (2001).

5.4 Inserção do estudo na atividade matemática

Tendo como base tais reflexões teóricas entendemos que os objetivos desta pesquisa foram alcançados, visto que, no decorrer das sessões de aplicação, os alunos estavam envolvidos na *atividade matemática*. Outro aspecto que é bom salientar, foi o envolvimento dos alunos na *atividade de estudo*. Por mais que planejássemos, ou tentássemos prever a utilização de algumas técnicas, os alunos foram além das expectativas.

Um fator que pode ter influenciado as resoluções seriam as técnicas presentes nos livros didáticos com que os alunos tiveram contato, e/ou as técnicas implementadas pelos antigos professores, que permearam as resoluções. Reiteramos, então, o que Chevallard (2001) destaca quanto à presença da *onipotência do professor*, entremeando a cultura escolar. Nossa pesquisa aponta que a onipotência do professor está presente na

---

26 Grupo de Apoio Educacional
27 Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

sala de aula, visto que constantemente os alunos queriam saber se a resposta encontrada era realmente verdadeira.

Vale lembrar que a instituição escolar outorga ao professor um papel excessivo no *processo didático*. Ao pedir que os alunos comentassem o que fizeram, a resposta que surgiu com frequência foi: *não sei como explicar, mas, meu professor ensinou assim*. Essa onipotência faz parte da cultura escolar e está muito enraizada no cotidiano da escola.

A análise das técnicas utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas mostrou que a construção, ou utilização, ou composição das técnicas foi uma constante nas sessões de estudo. Porém, ao longo das aplicações encontramos dificuldades dos alunos ao comentarem os passos utilizados, melhor, de dizer como resolveram o problema, justificar suas escolhas, e não simplesmente descrever a técnica.

Reportando-nos à TAD, ao fato de o aluno estar desenvolvendo a atividade matemática na tentativa de solucionar essas tarefas, aparecem os momentos de estudo, em que estarão presentes a escolha da melhor técnica para o trabalho, na evolução e institucionalização dessa técnica. Isso só será possível se ele realmente estiver explorando os diferentes tipos de tarefas. Por outro lado, para que isso ocorra, será necessário que haja o momento do primeiro encontro. Fica difícil mensurar se ocorre ou não esse primeiro encontro, pois ele é particular do sujeito que está em contato com a obra matemática.

Ao destacar as análises praxeológicas, tanto os aspectos matemáticos quanto os didáticos, permitem-nos entender melhor a vulgata presente na disciplina escolar de Matemática, bem como a cultura que foi criada em torno dela. A TAD tem uma estrutura robusta, com vários elementos que subsidiam uma análise aprofundada do modelo epistemológico presente nos problemas particulares do ensino da Matemática.

Por outro lado, é importante ressaltar que os alunos estavam envolvidos na atividade matemática, e que para reverter esse quadro de que o que só importa é o resultado numérico, algo que já faz parte da cultura escolar, precisamos, nas aulas de

Matemática adotar práticas que permitam aos alunos descreverem seus procedimentos, na tentativa de que eles exteriorizem o processo de resolução.

Segundo Chevallard (2001), os gestos do professor, ou dos professores, podem ser refletidos no trabalho dos alunos. E podemos inferir que isso é verdade, pois os dados presentes nas análises das produções dos alunos apresentam diferentes organizações praxeológicas para a resolução do mesmo problema. Considerando o envolvimento dos alunos na tentativa de encontrar técnicas diferentes para o mesmo problema, podemos inferir que eles foram desafiados, pois havia uma preocupação de repassar ao colega a técnica utilizada e, alguns, queriam levar para casa para pedir ajuda aos pais.

Quando os alunos demonstram interesse em encontrar outras formas de resolver a tarefa, isso corrobora com o pensamento de Chevallard (1998), ao pontuar que *o estudo não fica fechado na sala aula.* Acreditamos, assim, que tais técnicas foram apreendidas pelos alunos com o auxílio do professor, do pai, ou de aula de reforço. Nesse contexto, todas as descrições das técnicas e dos elementos tecnológicos que fizemos auxiliam-nos a entender algumas relações de estudo presentes na sala de aula, e que caracterizam a atividade matemática, de ensino e de aprendizagem.

5.5 Sistematização do conhecimento dos alunos

Nossa pesquisa revela que os alunos investigados fazem matemática na direção indicada por Chevallard (1999). Podemos destacar um caso particular que pode ser verificado, na segunda sessão, no registro do aluno presente na figura 15 já apresentada, quando ele desenvolve uma técnica não muito utilizada na sala de aula, e ao apresentá-la aos colegas de grupo, os mesmos não a aceitam, e até passam toda a responsabilidade da técnica utilizada para o aluno que resolveu o problema.

Outra consideração importante que deriva de nossas conclusões, e que tem relação direta com ensino e aprendizagem de Matemática é a dificuldade dos alunos compreenderem a passagem da aritmética para a álgebra, e isso pode ser verificado quando a aluno diz “como toda boa conta fizemos por divisão”, é evidenciado aqui que para esses alunos a aritmética é algo mais fácil que a álgebra.

Para tentar transpor essa barreira podemos considerar que a compreensão dos problemas por parte dos alunos, e a escolha de uma técnica com maior alcance, no nosso caso a técnica algébrica por meio de uma equação do primeiro grau, pode ser conveniente para a institucionalização da técnica algébrica, isto é, o professor deveria deixar transparecer ao aluno que existe uma técnica com maior alcance.

Sugerimos aos professores de Matemática adotarem práticas nas salas de aulas, que se enquadrem à realidade em que o aluno está inserido, na tentativa de tornar o estudo mais significativo, isso, poderá diminuir a distância entre o ensino e a aprendizagem. Pois o ensino da Matemática, muitas vezes é imposto aos alunos, segundo Chevallard (2001) “falta visibilidade social das atividades matemáticas”, fazendo com que os alunos fiquem alheios à disciplina escolar. Poderíamos até dizer que nesse sentido, hoje em dia, a Matemática não está atendendo uma necessidade social, e sim apenas uma necessidade curricular.

Existe, segundo Chevallard (2001), um tipo de “ensino instantâneo”, não podemos afirmar que as técnicas empregadas pelos alunos são duradouras, mas podemos inferir que as técnicas utilizadas são objetos matemáticos ensinados e aprendidos, durante o processo de ensino e aprendizagem, e que de certa forma compõem uma organização praxeológica maior, pois a atividade matemática corresponde à manipulação direta dos objetos ostensivos e não ostensivos na constituição do saber matemático. Por outro lado, na tentativa de registrar a solução correta de um determinado problema, os alunos não estão só desenvolvendo os momentos de estudo, mas vivenciando-os. Nesse processo de estudo o estudante se encarrega de desenvolver a sua própria instrução, e ajuda na instrução dos seus colegas de grupo, e até no desenvolvimento dos colegas da sala de aula.

Para Chevallard (2001) “o ensino deveria ser uma ajuda para o estudo”. Confesso que durante vários anos apenas pensava em ensinar e quem sabe verificar se o aluno aprendeu através de avaliações que pudessem quantificar uma nota, que segundo o meu entendimento referia-se a aprendizagem do aluno. Como se fosse possível quantificar o aprendizado dos alunos! No entanto hoje percebo que há algo mais importante que quantificar a nota, e isso pode ser entendido por estudo, algo que esteve tão ausente na minha prática pedagógica, e que pode ligar o ensino e a aprendizagem de Matemática.

Essa valorização do estudo dentro da sala de aula pode e deve ser uma prática de todo(a) professor(a) de Matemática, pois o ensino deveria ser antes de mais nada uma ajuda para o estudo. Para Chevallard (2001, p.300) "o professor somente pode ajudar o aluno a estudar e, embora sua ajuda seja muitas vezes indispensável – e quase sempre importante – não pode estudar, nem muito menos, aprender por ele". Tal afirmação nos promove uma ruptura na prática pedagógica do professor, envolvendo-se em um movimento sem hesitação, dúvidas, contradições que permitam a criação de novas formas de conceber o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Enfim como educador matemático, e/ou pesquisador, compete-nos educar ou mesmo reeducar esses alunos para o estudo, pois, o ensino e a aprendizagem são processos dinâmicos que podem ser melhorados com a inserção do estudo na atividade matemática. Portanto, a resolução de problemas, a exploração de diferentes técnicas para resolver tais problemas, possibilitarão aos alunos desenvolverem procedimentos de estudo, tornado assim possível, utilizar a matemática conhecida, aprender (ensinar) matemática e criar uma matemática nova segundo o pensamento de Chevallard (2001).

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARAÚJO, A. J. **O ensino de álgebra no Brasil e na França: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da Teoria antropológica do didático**. 2009, Tese (Doutorado) – UFPE, Recife.

ARTAUD, M. **Les nombres relatifs: étude de traces écrites de l'activité d'une classe de cinquième. Actes de l'U.E. de la Rochelle : Analyses des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques**, 1998. p. 183-198.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da Prática Escola**r. 16a. ed. CAMPINAS (SP): PAPIRUS, 2009. 130 p.

BOGDAN, R. C. & BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos método**s. Tradução de Maria J. Álvares, Sara B. dos Santos e Telmo M. Baptista. Portugal: Porto Editora, 1994. (Coleção Ciências da Educação, 12)

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. **La sensibilité de l'ativité mathématique aux ostensifs Objet d'etude et problematique. Recherches en Didactique des Mathématiques**. v.19, no 1, p.77-124, 1999.

BOYER, C. B. **História da matemática**. São Paulo, Edgard Blücher, 1974.

CAILLOT. M., (1996) apud MARANDINO. M. **Transposição ou recontextualização? Sobre a produção de saberes na educação em museus de ciências**. Revista brasileira de educação. São Paulo USP. 2004, 3º trimestre.

CARVALHO, C. C. S. **Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do Ensino Médio. 2007**, Dissertação (Mestrado) – PUC – SP, São Paulo.

CHEVALLARD, Y. **L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Tradução em espanhol de Ricardo Barroso Campos. Disponível em: <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/art/a1005.pdf>. Acesso em 20 mar. 2008

CHEVALLARD, Y. ; BOSCH, M. e GASCÓN, J. **Estudar matemáticas. O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Trad. Daisy Vaz de Moraes -Porto Alegre, Artmed, 2001.

CHEVALLARD, Y. **Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherche en Didactique des Mathématiques**, 1992. v.12 n.1, p.73 -112, CHEVALLARD, Y. **Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Actes de ce congrès international sur la théorie anthropologique du didactique**, Universidad de Jaén, 2007, p. 705-746.

CHEVALLARD (1991) apud PINHO A., **Regras da Transposição Didática aplicada ao Laboratório Didático. Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 17. nº 2. Agosto 2000. p. 174-188.

CHERVEL, A. **História das disciplinas** escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. Porto Alegre: *Teoria e Educação, n. 2,* p. 177-229, 1990.

COELHO, M. A. V. M. P., **A resolução de problemas: Da dimensão técnica a uma dimensão problematizadora.** 2005. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas.

DANTE, L. R., **Tudo é Matemática: Ensino Fundamental 6ª série.** Livro do Professor – São Paulo: Ática, 2005.

ESPINAS, A., (1844-1922). artigo "**Les origines de la technologie", em Revue philosophique**, p. 114 – 115, ano XV, vol. 30, e seu livro publicado em Paris, em 1897,

EVES, H., **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Editora UNICAMP, 2004.

FARIAS. K. S. C., **A representação do espaço nos anos iniciais do ensino fundamental**. 2007. Dissertação (Mestrado) – UFMS, Campo Grande.

GASCÓN, J. **La necesidade de utilizar modelos en didática de las matemáticas. In Educação Matemática** Pesquisa. V.5 n.3. São Paulo. EDUC, pp 11-37, 2003.

GIANFALDONI, M., e MOROS, M., **Livro Processos de Pesquisa Iniciação**. Editora Líber. Brasília 2007.

GURGEL, C. M. A., **Pesquisa etnográfica e educação matemática: processo, contextualização e construção**, 2004

KILPATRIC, (1988) apud COELHO, M. A. V. M. P., Artigo as concepções dos professores sobre a resolução de problemas – Unicamp – disponível em: http://www.sbempaulista.org.br/epem/anais/Posteres%5Cp010.rtf acesso em 03 de mar. 2010

KOTARBINSKI, T. (1986). **Elementy teorii poznania, logiki formalnej i metodologii** nauk. Warszawa: PWN.Acesso em 02/11/2009 http://www.scielo.oces.mctes.pt/pdf/aps/v15n4/v15n4a10.pdf

Kuhn, T., S. **A Estrutura das Revoluções Científicas**. 7 ed. São Paulo: Perspectiva, 2003. 262 p. Tradução Beatriz Vianna Boeira e Nelson Boeira. Título original: *The Structure of Scientific Revolutions*. Data de publicação original: 1969.

LÜDKE, M. & ANDRÉ, M. E. D. **A. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas***;2007.*

MAGALHÃES, Á., **Dicionário enciclopédico brasileiro ilustrado**. Porto Alegre: Globo, 1943. p. 650

MALINOWSKI, B. (trad. 1970). **Uma teoria científica da cultura**. Rio de Janeiro: Zahar.

MATOS, J. F., **Estudos etnográficos em educação matemática: Implicações da análise de estudos realizados em Portugal**, 1995 São Paulo: EPU, 1986. (Temas básicos em educação e ensino).

NEVES, J. L. 1996. **Pesquisa qualitativa: características, usos e possibilidades.** ***Caderno pesquisas em administração****, V1 nº 3, 2º SEM.*/1996 p. 1 Disponível em http://www.ead.fea.usp.br/cad-pesq/arquivos/c03-art06.pdf acessado dia 11/01/2010 as 23:05

NOGUEIRA, R. C. S. **A Álgebra nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental: Uma Análise Praxeológica**. 2008. Dissertação (Mestrado) – UFMS, Campo Grande.

OLIVEIRA, A. M. S. A., Biblioteca da Matemática Moderna. 3ª ed. São Paulo, Lisa, 1970.

PAIS, L.C. **Práticas e saberes da Matemática Escolar Bases Epistemológicas, culturais e históricas**". 2008 (no prelo)

PIRES, C. C., **Educação Matemática: Ensino Fundamental** 6ª série. Livro do Professor – São Paulo: Atual, 2001.

PROJETO ARARIBÁ: **Matemática/obra coletiva, concebida,** desenvolvida e produzida pela Editora Moderna*;* editora responsável Juliane M. B., 1. ed. São Paulo: Moderna, 2006.

SECRETARIA DE EDUCAÇÃO FUNDAMENTAL. **Parâmetros curriculares nacionais. 2. Matemática: Ensino de quinta a oitava séries**. . Brasília : MEC /SEF, 1998.

SWIATKIEWICZ. O. **Por que não uma abordagem praxeológica**?! Revista Análise Psicológica (1997) 4(XV): P.637-644. acessado dia 09/01/2010 as 00:35h http://www.scielo.oces.mctes.pt/pdf/aps/v15n4/v15n4a10.pdf

SEVERINO, A. J., **Metodologia do trabalho científico**. 23.ed. ver. Atual. – São Paulo: Cortez, 2007.

TKOTZ, V., **História da Matemática: Linha do tempo**. disponível em http://www.numaboa.com/escolinha/historia-matematica/604-hist4 , acessado 17/12/2009

VIANNA, H. M. **Pesquisa em Educação: a observação**. Brasília: Líber Livro Editora, 2007. (Série Pesquisa, v. 5) 108p.

WOODS, P. **La escuela por dentro. La etnografia em la investigación educativa.** Espanha: Paidós/MEC, 2005

WOODS, P. **Investigar a arte de ensinar**. Porto: Porto Ed. Ltda, 1999.

WOODS, P. **La escuela por dentro-la etnografía en la investigación educativa**, Barcelona, Paidós (1993).

Notas de Rodapé

[1] Armador é o operário que trabalha com as estruturas de ferragens, antigo ferreiro.

[2] Schroerder & Lester *apud* Coelho (2005). "Ensinar sobre a resolução de problemas, ensinar a resolver problemas, ensinar Matemática através da resolução de problemas".

[3] Apresentou a resolução de problemas como uma exigência cognitiva imprescindível na aprendizagem e elaborou um método para ensinar os alunos a aperfeiçoarem as técnicas de resolução. Contribuiu também para o renascimento da heurística, que estuda os métodos e regras que conduzem descoberta e a invenção. (Coelho, 2005, p.32)

[4] O momento da problematização é um momento especial no processo de criação científica e portanto da aprendizagem. É nele que se dá o salto de qualidade no pensamento, e nele que se expõe toda capacidade criativa do homem, e a partir dele que se cria conceito.[sic]

[5] Entre elas destacamos o trabalho de Caillot (1996), que discute a validade e amplitude da teoria da transposição didática, esse autor por sua vez baseou seu trabalho nas ideias de Martinand (1982, 1986), que considera a transposição didática como problemática, para ele essa teoria teria um domínio de validade limitado, somente na matemática.

[6] A praxeologia é uma ciência ou um ramo de conhecimento sobre a actuação eficiente (Dzida, 1987; Pszczolowski, 1967), a teoria geral da actuação eficiente (Kotarbinski, 1969; Pszczo-lowski, 1978), a ciência sobre as condições da eficiência da actuação (Zieleniewski, 1978, 1979), o estudo geral da actividade racional (Gasparski, 1988), ou, como escreveu Tadeusz Kotarbinski (1975) «... uma ciência sobre a eficiência da actividade humana»

[7] É um termo bastante abrangente, dependendo do contexto, a tecnologia pode ser: As ferramentas e as máquinas que ajudam a resolver problemas; As técnicas, conhecimentos, métodos, materiais, ferramentas, e processos usados para resolver problemas ou ao menos facilitar a solução dos mesmos; A aplicação de recursos para a resolução de problemas. Esta tecnologia à qual nos referimos é diferente do termo "tecnologia" utilizado na TAD que tem um sentido diferente, e já explicado anteriormente no referencial teórico.

[8] Eu pensei assim: Qual é o número que multiplicado por 3 é igual a 15? É o 5, pois 3.5 = 15. Logo x = 5 é a solução da equação 3x = 15.

[9] Que número elevado ao quadrado (ele vezes ele) é igual a 16? Pode ser +4 e pode ser -4, pois $(+4)^2 = 16$ e $(-4)^2 = 16$. logo, +4 e -4 são soluções ou raízes da equação.

[10] Todas as figuras apresentadas nesse capítulo foram extraídas do Livro de Matemática do autor Luiz Roberto Dante, intitulado Tudo é Matemática (TM). Esta foi retirada da página 99.

[11] TM, p. 99

[12.] TM, p. 100

[13] TM, p. 100

14.TM, p. 111

15.TM, p. 113

16. TM, p. 115

17. Entende-se por voluntários: alunos que não fazem parte da escola onde estava ocorrendo a pesquisa.

Anexo 1

Número do Grupo:	**Quantidade de componentes:**
Data da aplicação:	**Turma:**
t_1: Quais são os dois números inteiros consecutivos cuja soma é igual a 527?	
Resolver	**Comentar**

Anexo 2

Técnicas	7º ANO A	7º ANO B	7º ANO C	TOTAL
Equação do 1º grau	8	13	10	31
Sistema de equação do 1º grau	0	5	4	9
Divisão	13	12	11	36
Tentativa	6	16	15	37
Decomposição	0	3	0	3

Anexo 3

Técnicas	8º ANO A	8º ANO B	TOTAL
Equação do 1º grau	6	4	10
Sistema de equação do 1º grau	0	0	0
Divisão	6	8	14
Tentativa	2	1	3
Fração	1	0	1

Anexo 4

Técnicas	**8º ANO A**	**8º ANO B**	**TOTAL**
Equação do 1º grau	**3**	**2**	**5**
Sistema de equação do 1º grau	**1**	**1**	**2**
Divisão	**6**	**4**	**10**
Tentativa	**0**	**1**	**1**

Anexo 5

	CATEGORIA	**PROPOSIÇÃO**	**TOTAL**
1	**HISTÓRIA**	13, 24, 42, 54, 89, 90, 91, 108, 109, 111, 112, 113.	12
2	**TECNOLOGIA**	9, 11, 14, 63, 105, 106.	06
3	**METODOLOGIA**	3, 4, 7, 19, 20, 26, 28, 34, 47, 48, 49, 53, 76, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 92, 93, 94, 96.	24
4	**COTIDIANO**	1, 2, 5, 12, 16, 23, 27, 38, 40, 62, 63, 95, 99.	13
5	**CONCEITOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS**	29, 30, 31, 32, 33, 35, 41, 42, 107.	09
6	**DOMÍNIOS DE ESTUDOS**	6, 25, 43, 44, 45, 51, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 78, 79, 80, 89, 97, 98, 100, 101, 104, 110, 114, 116, 117, 118, 119, 120.	40
7	**VALORES EDUCATIVOS**	10, 15, 17, 18, 36, 37, 39, 50, 52.	09
8	**DIFICULDADE**	8, 21, 22, 64, 77, 102, 103.	07

Anexo 6

Passos	**Técnica τ_1**	**Técnica τ_2**	**Técnica τ_3**	**Elementos tecnológicos e teóricos**
1	Monta-se a equação com os dados fornecidos;	Monta-se a equação com os dados fornecidos;	Monta-se a equação com os dados fornecidos;	• Conceito de equação do 1º grau; • Conceito de incógnita; • Princípios aditivo e de equivalência; • Resolução de uma equação do 1º grau. • Conceito de número consecutivo; • Algoritmo da divisão;
2	Reduz-se a equação a forma *ax = c;*	Reduz-se a equação a forma *ax = c;*	Reduz-se a equação a forma *ax = c;*	
3	Resolve-se a equação, isolando-se o valor *x*, que é um dos números procurados;	Dividi-se *c* por *a*, utilizando o algoritmo da divisão;	Dividi-se *c* por *a*, utilizando fração;	
4	Subtrai-se do número fornecido (527) o valor de *x*;	Com o valor obtido no passo anterior escrever-se o consecutivo referente ao número encontrado;	Escreve-se o consecutivo do número encontrado.	
5	Conclui-se que os dois números procurados são *x e x + 1.*	Adiciona-se ao valor de *x* o seu consecutivo *x + 1.*		

Tabela comparativa das técnicas utilizadas pelos grupos por ocasião da primeira sessão de aplicação

Anexo 7

Passos	**Técnica $\tau_1 G_1$**	**Técnica $\tau_2 G_1$**	**Técnica $\tau_3 G_2$**	**Elementos tecnológicos e teóricos**
1	Monta-se a equação com os dados fornecidos;	Monta o algoritmo da adição com o valor fornecido, somando ele com ele mesmo;	Dividiram o valor fornecido por três, dessa forma foi possível encontrar o valor de Francisca;	• Conceito de equação do 1º grau; • Conceito de incógnita; • Princípios aditivo, multiplicativo; • Resolução de uma equação do 1º grau. • Conceito de dobro; • Algoritmo da divisão; • Conceito de fração; • Conceito de números racionais; • Conceito de proporcionalidade; • Princípio de equivalência de frações.
2	Reduz-se a equação a forma *ax = c;*	Escreve duas frações correspondentes a $\frac{5}{6}$ a parte da mãe e $\frac{1}{6}$ a parte de Francisca.	Multiplicaram o valor encontrado por dois, para saber quanto a mãe deu a filha;	
3	Resolve-se a equação, isolando-se o valor *x* (62), que é a quantia que Francisca tinha inicialmente;	Em seguida é escrito a quantia proporcional a cada fração obtida anteriormente, que são as quantias procuradas.	Verificaram se os valores encontrados correspondiam à quantia fornecida;	
4	Multiplica-se o valor de x por dois, para obter o dobro de x (124);		Somaram o dobro do valor encontrado inicialmente com a quantia fornecida.	
5	Adiciona-se ao dobro de x o valor fornecido inicialmente (186), encontrando a quantia da mãe de Francisca.			

Tabela comparativa das técnicas utilizadas pelos grupos por ocasião da segunda sessão de aplicação

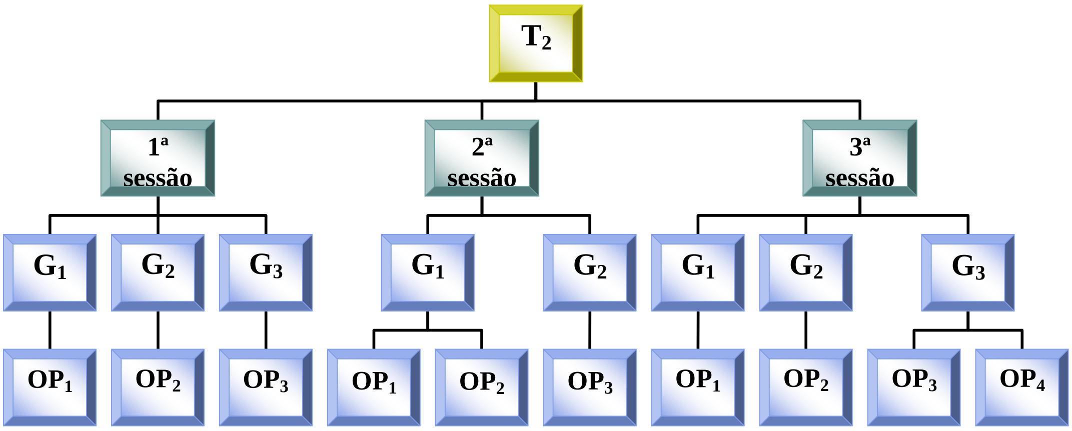
Anexo 8

Passos	Técnica $\tau_1 G_1$	Técnica $\tau_2 G_2$	Técnica $\tau_3 G_3$	Técnica $\tau_4 G_3$	Elementos tecnológicos e teóricos
1	Retiram do total fornecido no enunciado a quantia que Alícia tinha;	Monta-se a equação com os dados fornecidos;	Monta-se a equação com os dados fornecidos;	Monta-se o sistema de equação com duas incógnitas;	• Algoritmos da divisão, adição e subtração; • Princípios aditivo e multiplicativo; • Conceito de equação do 1º grau; • Conceito de incógnita; • Resolução de uma equação do 1º grau; • Operação inversa; • Princípio de equivalência.
2	Tomaram a diferença obtida no passo anterior e a dividiram por dois, obtendo a quantia de Noemi;	Reduz-se a equação a forma *ax = c;*	Reduz-se a equação a forma *ax = c;*	Realizam a adição membro a membro das duas equações escritas anteriormente, e encontram o valor de x que é quantia de Alícia ;	
3	Adicionaram na quantia encontrada no passo anterior a quantia retirada no primeiro passo.	Dividi-se *c* por *a*, utilizando fração;	Dividi-se *c* por *a*, utilizando fração;	Copiam a segunda equação e, em seguida substituem o valor de x para encontrar o valor de y;	
4		Com o valor obtido no passo anterior é feito uma subtração com 250 que é a metade do que Alícia tem a mais;	Adicionam ao valor de x a quantia que Alícia tinha a mais;	Isolam o valor de y para encontrar a quantia de Noemi;	
5		O mesmo procedimento é realizado, mas ao contrário é realizado uma adição;	Destacam a quantia de Noemi.	Invertem o sinal da equação encontrada, para obter a quantia de Noemi.	
6		Fizeram a subtração entre o maior e o menor valor fornecido.			

Tabela comparativa das técnicas utilizadas pelos grupos por ocasião da terceira sessão de aplicação

Anexo 9

REPRESENTAÇÃO DAS APLICAÇÕES DAS SESSÕES



Legenda
T_2 - Tipo de Tarefa: Resolver Problema
G_1 - Grupo de alunos
OP_1 - Organização Praxeológica