ADRIANO DA FONSECA MELO

ESTUDO DE PROCEDIMENTOS DE VALIDAÇÃO DE IGUALDADES DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS POR MEIO DE MUDANÇAS DE QUADROS.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CAMPO GRANDE/MS

2010

ADRIANO DA FONSECA MELO

ESTUDO DE PROCEDIMENTOS DE VALIDAÇÃO DE IGUALDADES DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS POR MEIO DE MUDANÇAS DE QUADROS.

Dissertação apresentada como exigência final para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática à comissão julgadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul sob orientação do Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CAMPO GRANDE/MS

2010

FOLHA DE APROVAÇÃO

Adriano da Fonseca Melo

Estudo de procedimentos de validação de igualdades de expressões algébricas por meio de mudanças de quadros.

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul para obtenção do título de Mestre.

Aprovado em _29/_10_/ 2010.

BANCA EXAMINADORA:

____
Profª Drª José Luiz Magalhães de Freitas - UFMS

____
Prof. Dr. Marcio Antonio da Silva

____
Prof. Drª Maria Cristina S. de A. Maranhão

____
Profª Drª Marilena Bittar - UFMS

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a meus pais, Orides e Enoch, pois foram as primeiras pessoas a acreditarem em mim e incentivarem-me para os estudos. Agradeço por compreenderem minha ausência em vários momentos e também pelos incentivos para permanecer firme nos estudos, não deixando-me desanimar.

AGRADECIMENTOS

A Deus, agradeço o dom da vida e a oportunidade de ter vencido mais uma etapa de minha formação pessoal e profissional.

Agradeço ao Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas pela sua disponibilidade pessoal e acadêmica, sua dedicação, paciência, polidez, eficiência e rigor científico com os quais orientou esta pesquisa. Mais do que orientador, o consideramos uma pessoa incrível, maravilhosa, um modelo a ser seguido e, como não há palavras suficientes para expressar toda a gratidão, respeito e consideração, registramos algumas para expressarmos nosso sinceros e toda a gratidão pela presença amiga! Que Deus ilumine e lhe dê forças e saúde para continuar brilhando em todos os projetos de sua vida!

Agradecemos, ainda, aos professores do Mestrado em Educação Matemática da UFMS, Profª. Drª. Marilena Bittar, Prof. Dr. Luiz Carlos Pais pelas preciosas contribuições para o desenvolvimento deste trabalho. Estendemos nossos agradecimentos aos profissionais Profª. Drª. Wania Cristina de Lucca, Profª. Drª. Elisabete Sousa Freitas, Profª. Drª. Maria Cristina Souza de Albuquerque. Maranhão e Prof. Dr. Marcio Antonio da Silva pelas contribuições e disponibilidade pessoal e acadêmica. A todos os colegas do Mestrado, turmas 2007, 2008, 2009 e 2010, m agradecimento especial! À Eva Jara e ao Fernando, a nossa manifestação de gratidão pela acolhida, atenção e polidez em todos os momentos em que mantivemos contato.

Agradecemos também aos colegas de trabalho, os quais se dispuseram a organizar as atividades profissionais, compreendendo nossa ausência nos dias das aulas e dos congressos, especialmente ao Osmar que soube ser solícito nos momentos em que precisava ausentar-me para participar de congressos e reuniões de orientações.

Reiteramos nossos agradecimentos a Rosa, por sempre apostar no meu potencial como profissional; ainda, a Kely, Anderson, Clodoaldo e Luiz Cleber por suas grandes contribuições para o desenvolvimento deste estudo, ao assumirem oficinas e cursos no momento em que não era possível nossa presença!

Enfim, agradecemos a todas as pessoas que, de alguma forma, estiveram presente nessa caminhada.

RESUMO

O presente trabalho objetivou estudar procedimentos de verificação de igualdades de expressões algébricas utilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, de uma escola da Rede Municipal de Ensino de Campo Grande/MS, ao realizarem cálculo algébrico utilizando os quadros aritmético, algébrico e geométrico. Para tanto, utilizamos como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau e o Jogo de Quadros proposto por Douady. Para análise das produções dos alunos, além desses autores, foi utilizado o que é proposto por Margolinas sobre o processo de verificação. O desenvolvimento metodológico da pesquisa foi realizado nos moldes da Engenharia Didática, proposta por Artigue. Foi possível observar que os alunos apresentaram dificuldades em relação aos conceitos de área e perímetro quando a figura estava decomposta em retângulos, bem como em atividades que exigiam compreensão de cálculos algébricos. As dificuldades em relação aos cálculos algébricos foram verificadas nos diferentes estatutos da letra, visto que em vários momentos os alunos recorreram ao estatuto do termo desconhecido, sinalizando a não aceitação da letra com o estatuto de número indeterminado. No final do experimento, essa dificuldade estava parcialmente superada pelos alunos, isto é, o número de alunos que não incorreram neste erro tinha reduzido. Sobre os jogos de quadros, os alunos, ao realizarem a verificação, utilizaram com maior frequência a mudança do quadro geométrico para o quadro algébrico, enquanto as mudanças do quadro geométrico para o aritmético e do algébrico para o aritmético não surgiram naturalmente, mas provocados por situações em que precisavam constituir argumentos que convencessem seus pares da validade de suas respostas. Esse resultado sinaliza para a necessidade de ser adotada, com maior frequência em sala de aula, a exploração de atividades envolvendo mais de um quadro matemático, onde o aluno possa vivenciar os conceitos em diferentes quadros. Por fim, foi possível verificar que as atividades nas quais os alunos realizavam conjecturas, formulações e justificativas, bem como quando comunicavam a seus pares suas conclusões, utilizando uma linguagem matemática adequada, propiciaram momentos mais ricos de aprendizagem.

Palavras-chave: Expressões Algébricas. Jogo de Quadros. Verificação. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

The present study aimed to investigate procedures for checking the equality of algebraic expressions used by students on the 9th grade of the Junior High School who studied at a Municipal School in Campo Grande/MS, in performing algebraic calculation using the arithmetic, algebraic and geometric tables. We used as a theoretical the Theory of Didactical Situations proposed by Brousseau and game tables proposed by Douady. For the students' productions analysis, beyond these authors; it was used what was proposed by Margolin about the verification process. The methodological development research was carried out according to the Didactic Engineering, proposed by Artigue. It was possible to observe that the students presented difficulties in relation to the concepts of area and perimeter when the figure was out of order into rectangles, as well as in activities that required understanding about algebraic calculations. The difficulties in relation to algebraic calculations were verified in different statutes of the letter, since in many instances the students resorted to the status of the unfamiliar term, signaling a rejection letter with status indeterminate number. At the end of the experiment, this difficulty was partly overcome by the students, ie the number of students who have not engaged in this error was reduced. About gaming tables, the students, while performing the verification, used more frequently to change the geometric framework for the algebraic framework, while the changes of the geometric framework for the arithmetic of algebraic and arithmetic didn't emerged naturally, but caused by situations where they needed to provide arguments that would convince their peers about the validity of their responses. This result indicates the need of being adopted more frequently in the classroom, the exploration activities involving more than a mathematical framework where students can experience the concepts in different frames. Finally, we observed that the activities in which students held assumptions, formulations and justifications, as well as when communicating their findings to their peers, using a suitable mathematical language, enabled the richest moments of learning.

Keywords: Algebraic Expressions. Game Tables. Assessment. Junior High School.

LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Quadro comparativo dos erros presentes nos protocolos 111
Tabela 2-Quadro comparativo das decisões dos alunos. 116

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Proposição 4 do Livro II 18
Figura 2 - Figura associada a proposição 28 - Livro VI – Euclides 18
Figura 3 - Representação para a(b+c+d)=ab+ac+ad 19
Figura 4 - Fluxograma Descritivo do Processo de Verificação 42
Figura 5 - Quadro síntese do trabalho algébrico proposto pelos PCNs 55
Figura 6 - Protocolo do aluno A1 - Atividade 1 72
Figura 7 - Protocolo do aluno A2 - Atividade 1 73
Figura 8 - Protocolo do aluno A3 - Atividade 1 74
Figura 9 - Protocolo do aluno A4 - Atividade 1 76
Figura 10 - Protocolo do aluno A5 - Atividade 1 77
Figura 11 - Protocolo do aluno A6 - Atividade 1 78
Figura 12 - Protocolo do aluno A7 - Atividade 1 79
Figura 13 - Protocolo do aluno A8 - Atividade 1 80
Figura 14 - Protocolo do aluno A4 - Atividade 2 82
Figura 15 - Protocolo do aluno A4 - Atividade 2 83
Figura 16 - Protocolo do aluno A4 - Atividade 2 83
Figura 17 - Protocolo do aluno A6 - Atividade 2 85
Figura 18 - Protocolo do aluno A5 - Atividade 2 86
Figura 19 - Protocolo do aluno A5 - Atividade 2 87
Figura 20 - Protocolo do aluno A7 - Atividade 2 88
Figura 21 - Protocolo do aluno A8 - Atividade 2 89
Figura 22 - Protocolo do aluno A8 - Atividade 2 89
Figura 23 - Protocolo do aluno A3 - Atividade 2 91
Figura 24 - Protocolo do aluno A2 - Atividade 2 91
Figura 25 - Protocolo do aluno A1 - Atividade 2 93
Figura 26 - Protocolo do aluno A1 - Atividade 3 95
Figura 27 - Protocolo do aluno A5 - Atividade 3 96
Figura 28 - Protocolo do aluno A6 - Atividade 3 97
Figura 29 - Protocolo do aluno A7 - Atividade 3 98
Figura 30 - Protocolo do aluno A8 - Atividade 3 98
Figura 31 - Protocolo do aluno A1 - Atividade 4 101
Figura 32 - Protocolo do aluno A2 - Atividade 4 103

Figura 33 - Protocolo do Aluno A3 - Atividade 4 104
Figura 34 - Protocolo do aluno A4 - Atividade 4 105
Figura 35 - Protocolo do aluno A5 - Atividade 4 107
Figura 36 - Protocolo do aluno A6 - Atividade 4 109
Figura 37 - Protocolo do aluno A7 - Atividade 4 110
Figura 38 - Erro pela ausência dos parênteses 112
Figura 39 - Erro não reconhecimento da letra como número indeterminado. 113
Figura 40 - Exemplo de erro não reconhecimento da letra como número indeterminado. 114
Figura 41 - Erro por não aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição. 114

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO **12**

O CONTEXTO ESCOLAR E A PROBLEMÁTICA DA VALIDAÇÃO NO ESTUDO DE IGUALDADES DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS 14

CAPÍTULO I **17**

1. A ÁLGEBRA NA HISTÓRIA E LIVROS DIDÁTICOS **17**

1.1 Aspectos históricos e conceituais sobre Álgebra 17

1.2 Uma Retomada Histórica do Uso de Livros-texto para o Ensino da Álgebra . 21

1.3 PCNs 27

1.4 PNLD 29

1.3 Análise de algumas dificuldades dos alunos em relação às igualdades algébricas em outras pesquisas 31

CAPÍTULO II **34**

2. REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO **34**

2.1 Teoria das Situações Didáticas 34

2.2 Processo de verificação como parte da validação 38

2.3 Jogos de Quadros 43

2.4 Elementos teóricos sobre álgebra na educação básica 47

2.4.1 Concepções da Álgebra 47

2.4.2 Usos da Letra 49

2.4.3 Atividade Algébrica 53

2.5 Engenharia Didática como referencial metodológico 56

CAPÍTULO III **60**

3. ATIVIDADES DA EXPERIMENTAÇÃO EM SALA DE AULA **60**

3.1 Variáveis da pesquisa 60

3.1.1 Presença da figura no enunciado 60

3.1.2 Conceito de área e perímetro 61

3.1.3 Tipo de expressão no enunciado 61

3.2 ANÁLISE A PRIORI DAS SITUAÇÕES-PROBLEMA PROPOSTAS 61
3.2.1 Atividade 1 62
3.2.2 Atividade 2 64
3.2.3 Atividade 3 65
3.2.4 Atividade 4 67
CAPÍTULO IV 70
4. ANÁLISE A POSTERIORI E A VALIDAÇÃO DA EXPERIMENTAÇÃO 70
4.1 Atividade 1 71
4.2 Atividade 2 81
4.3 Atividade 3 94
4.4 Atividade 4 99
4.5 Algumas considerações gerais sobre a experimentação 111
CONSIDERAÇÕES FINAIS 118
REFERÊNCIAS 131
ANEXOS 134

INTRODUÇÃO

Durante 14 anos de trabalho com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio foi possível observar que, de modo geral, uma parcela significativa desses alunos, apesar de vários anos estudando, ainda não conseguem desenvolver determinadas habilidades em relação ao cálculo algébrico.

Segundo House (1995), os alunos dedicam pelo menos um ano de estudos intensivos para compreender como manipular e obter resultados para as igualdades algébricas, entretanto, tal fato pode não garantir que o aluno dominará tais procedimentos. A constatação de que muitos alunos, mesmo após anos de estudo, ainda não conseguem ter a autonomia de reconhecer procedimentos algébricos que lhes permitam compreender o funcionamento de procedimentos aritméticos e geométricos, instigou tal investigação. Esse fato já havia sido apontado por House (1995, p. 1) na sua pesquisa em relação à visão dos alunos sobre o uso da álgebra, na qual alguns alunos disseram que "a álgebra é muito difícil e, apesar de muito elucidativa, noventa por cento das vezes também é muito frustrante. Significa horas de aulas que nem chegamos de perto a entender".

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD/2008, 2007) ressalta que muitas coleções de livros didáticos priorizam o trabalho por meio da simbologia, tornando assim os problemas desinteressantes ou sem sentido para os alunos. O cálculo algébrico, em muitos casos, é apresentado ao aluno como sendo um assunto de cálculo literal ou prolongamento do cálculo numérico, no qual o aluno precisa memorizar algumas regras para resolver os problemas.

De acordo com o guia do livro didático do PNLD/2008, não há um consenso entre os autores de livros didáticos sobre qual o melhor momento para iniciar o trabalho com álgebra. Alguns preferem apresentar a linguagem algébrica já nas primeiras páginas do livro correspondente ao 6º ano do Ensino Fundamental, sem o devido preparo do aluno para lidar com esse conteúdo, como se a aprendizagem ocorresse espontaneamente. Outros preferem trabalhar as propriedades aritméticas sem representá-las algebricamente, deixando para fazer isso somente depois da introdução da álgebra. Há os livros que introduzem de maneira gradual, preparando o aluno para compreender a linguagem algébrica como uma ferramenta para expressar conceitos matemáticos. Há ainda coleções que preferem omitir qualquer referência à linguagem algébrica no 6º ano, prejudicando assim a construção gradativa do conhecimento algébrico. Conforme o guia do livro do PNLD/2008 (BRASIL, 2007, p. 45):

> Algumas coleções ainda exageram na abordagem do cálculo algébrico, incluindo o tratamento de equações que poderiam ser deixadas para outros níveis de escolaridade, como as biquadradas, irracionais, fracionárias e literais. Por outro lado, já são muitas as coleções que, de forma adequada, utilizam-se dos conhecimentos de área, desenvolvidos em momentos anteriores, para auxiliar o aluno a entender produtos notáveis e as fatorações de polinômios.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) de Matemática (BRASIL, 1998) defendem que o trabalho com os conceitos algébricos deveria possibilitar o desenvolvimento da capacidade de argumentar e de verificar a validade de algumas propriedades utilizadas pelos alunos durante a resolução de situações apresentadas pelo professor. Para tanto, o aluno precisa observar regularidades e estabelecer relações. Eles consideram ainda que o estudo da álgebra é um campo fértil para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas.

A escolha de trabalhar com os quadros aritmético, algébrico e geométrico se fundamenta por acreditar que juntos eles formam a base da matemática escolar, ideia essa defendida por Lins e Gimenez (2006, p. 12):

> A aritmética e a álgebra constituem, junto com a geometria, a base da matemática escolar. Não apenas essa é a percepção da maioria dos educadores matemáticos, mas essa é de fato a realidade cristalizada nos livros didáticos e nas propostas curriculares.

Com efeito, quando o aluno for capaz de utilizar os diferentes quadros da Matemática como instrumento para resolver diferentes problemas, terá dado passos em direção ao desenvolvimento do seu conhecimento nessa área, pois acreditamos que isso favorece a construção de conceitos. De acordo com Douady (1986), a interação entre os quadros possibilita ao aluno melhor estruturação dos conhecimentos em razão de verificar os objetos matemáticos representados em diferentes ramos matemáticos.

Diante do exposto, buscamos investir sempre em nossa formação contínua, de tal maneira que esta permitisse vislumbrar caminhos que propiciasse a elaboração de aulas, nas quais os alunos pudessem desenvolver sua autonomia em relação ao professor, bem como fossem capazes de utilizar os conhecimentos algébricos para verificar algumas propriedades, no final de um ano de estudo. Na busca por esta formação contínua houve a oportunidade de integrar a equipe do currículo de Matemática da Secretaria Municipal de Educação de Campo

Grande/MS. O trabalho da equipe consiste em assessorar o grupo de professores desta área do conhecimento em relação às dificuldades no desenvolvimento de metodologias de ensino e, para tanto, exige dos técnicos contínuo estudo de pesquisas e literaturas sobre o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Desta feita, a cada ano eu verificava-se que, mesmo com muito esforço, os colegas professores não conseguiam atingir o que era previsto, ou seja, desenvolver nos alunos determinadas habilidades ligadas ao campo da álgebra. Por conseguinte, uma enorme inquietação dominava nossas reflexões, entretanto, serviam como estímulo para a busca de novas maneiras e metodologias que permitissem romper as barreiras criadas quanto aos conteúdos algébricos.

Na busca por novas formas e metodologias de ensino, efetuamos a análise atenta de algumas pesquisas realizadas, cujo tema estava relacionado ao ensino do cálculo com expressões algébricas. Dentre as pesquisas analisadas, constam os trabalhos escritos pelos pesquisadores ligados a National Council of Theacher of Mathematics (NCTM), e alguns relatos de experiência desenvolvidos por professores pesquisadores da área de educação matemática, por meio de publicações em revistas, livros e anais de eventos da área da Educação Matemática. Os trabalhos trazem ideias de como desenvolver o ensino utilizando situações nas quais os alunos fossem visualizar o uso da letra na generalização de propriedades aritméticas, bem como o estudo de funções. Todavia, raros foram os trabalhos que abordavam a forma de trabalhar o uso da letra como número indeterminado.

O CONTEXTO ESCOLAR E A PROBLEMÁTICA DA VALIDAÇÃO NO ESTUDO DE IGUALDADES DE EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

No trabalho de sala de aula, na perspectiva clássica, o aluno normalmente permanece na dependência do professor para realizar a correção de suas Atividades (Camargo, 1999), cabendo a este indicar o que está correto e o que está errado. No caso de uma resolução estar errada, o aluno normalmente fica aguardando que o professor ou outro aluno vá ao quadro e mostre como deve ser feito para chegar ao resultado correto. Esta postura dá a impressão que o aprender sobre seus erros ou sobre os conceitos matemáticos pode ser algo quase mágico (Salino, 1976 *apud* Margolinas, 1993, p. 185), como se a confrontação de trabalhos de outros alunos com o intuito de levá-lo a corrigir seu erro, produzisse novos procedimentos. Tal fato pode contribuir para a dependência do aluno em relação ao professor, pois, nesse caso, ele não consegue identificar seus próprios erros e por meio deles procurar caminhos que lhe permitam chegar ao resultado esperado.

A prática docente e o espírito de investigador nos levaram a questionar o porquê destes alunos não desenvolverem esta autonomia para analisar, e com isso utilizar conhecimentos aprendidos para validarem suas respostas. Desse modo, ainda pudemos observar que muitos alunos, mesmo após a apresentação de conceitos algébricos, não conseguiam utilizá-los quando requeridos em um contexto diferente daquele apresentado. Tal preocupação crescia frente aos relatos alguns professores, que indicavam a falta de visão ampla dos conhecimentos matemáticos.

Os PCNs de Matemática (BRASIL, 1998) defendem que o aluno precisa argumentar, elaborar conjecturas, ler e interpretar situações, de tal forma que consiga desenvolver a capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a autoestima, de respeitar o trabalho dos colegas e de perseverar na busca de soluções. Diante dessas propostas, fizemos os seguintes questionamentos: Até que ponto os alunos conseguem utilizar os conhecimentos matemáticos para realizar verificações e/ou elaborar argumentações sobre suas formulações? Durante a verificação, podem ocorrer aprendizagens?

Em nosso trabalho, o interesse está nos traços matemáticos que possibilitam a formação do pensamento algébrico[1], mais especificamente na busca dos alunos em verificar a validade de resultados por eles obtidos ou apresentados a eles. Para tanto, definimos como objetivo principal desta pesquisa, o estudo dos procedimentos de verificação de igualdades de expressões algébricas utilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, ao realizarem cálculo algébrico utilizando os quadros aritmético, algébrico e geométrico.

A partir do objetivo principal, estabelecemos alguns objetivos específicos a serem alcançados. O primeiro que elegemos foi identificar e analisar procedimentos de verificação por meio da substituição de letras por números particulares e a realização de cálculos aritméticos, bem como o uso de propriedades aritméticas. A substituição de letras por números particulares escolhidos pelos alunos e a realização dos cálculos aritméticos que surgem permitem, no caso da nossa pesquisa, verificar a validade de algumas igualdades entre

[1] De acordo com Lins e Gimenez (2006, p. 151) pensamento algébrico consiste em compreender a álgebra como um sistema de relações, as quais produzem significados para situações em termos de números e operações aritméticas e com base nisso transformar as expressões obtidas.

expressões algébricas para casos particulares, realizando assim uma mudança de quadro com o intuito de responder e/ou justificar suas respostas.

No entanto, apenas verificar como procedem os alunos quando substituem letras por números particulares não é suficiente para alcançarmos nosso objetivo principal, precisamos identificar e analisar procedimentos de verificação por meio do uso de propriedades geométricas envolvendo áreas de retângulos, cujas medidas dos lados estão representadas por números e/ou por letras, para validar igualdades de expressões algébricas. A preocupação sobre este aspecto está relacionada à utilização de representações geométricas que podem ser expressas por meio de expressões algébricas. Sendo assim, se o aluno não souber calcular áreas de retângulos poderá ter dificuldade para realizar as atividades propostas nas sessões. Espera-se que o aluno realize mudanças do quadro geométrico para o algébrico e vice-versa, de tal forma que se for necessário, possa substituir as letras por valores particulares e verificar se suas representações são correspondentes.

Por último, faz-se necessário analisar verificações realizadas por meio de confrontação de resultados de cálculos em diferentes quadros. Esse tipo de confrontação de resultados permitirá verificar a consistência do conhecimento aprendido pelos alunos até o momento, e como utilizam o mesmo para transitar entre quadros da Matemática, de tal forma que possam validar seus resultados.

CAPÍTULO I

1. A ÁLGEBRA NA HISTÓRIA E LIVROS DIDÁTICOS

1.1 Aspectos históricos e conceituais sobre Álgebra

Os primeiros manuscritos, ao registrarem problemas que envolviam o cotidiano e como deveriam ser resolvidos, esboçam traços da álgebra. Aaboe (1984), nos seus estudos sobre a matemática das civilizações antigas, considera esse aspecto importante para entendermos a construção do pensamento algébrico.

Aaboe (1984) aponta que entre 4.000 e 2000 a.C., a Matemática babilônica tinha características algébricas, escondidas dentro de representações geométricas. Sendo assim, os conhecimentos sobre as representações geométricas possibilitaram a construção dos prédios e/ou distribuição de terras para os súditos. Os artefatos matemáticos oriundos das aplicações oportunizaram às civilizações estabelecerem fórmulas para encontrar soluções de classe de problemas que hoje seriam resolvidos como equações lineares, quadráticas e indeterminadas.

No Egito, o surgimento da álgebra ocorreu quase ao mesmo tempo que na Babilônia e, comparando a álgebra dessas duas civilizações, nota-se a falta de métodos sofisticados, assim como a variedade de equações resolvidas nos papiros. Para equações lineares, os egípcios usavam um método de resolução que consistia em uma estimativa inicial seguida de uma correção final, um método o qual, posteriormente, ficou conhecido pelo nome de "regra da falsa posição". A álgebra desenvolvida no Egito e na Babilônia, pela maneira que foi explicitada, é considerada uma álgebra retórica, na qual todo procedimento é expresso por meio de um texto descritivo do método.

Na civilização grega, já no I milênio a.C., podemos perceber nos registros que chegaram até nosso tempo, uma álgebra geométrica, na qual retas e figuras retangulares eram utilizadas para indicar as expressões algébricas. Essa constatação torna-se possível em virtude de registros realizados por Euclides no seu livro "Os Elementos", assim como nos trabalhos de Ptolomeu e nos trabalhos de Diofanto. Nesses manuscritos encontramos simplificação de expressões algébricas e verificação de igualdades de expressões algébricas por meio dos elementos geométricos. Por exemplo, o que nós conhecemos como $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ era concebido pelos gregos da seguinte forma: "caso uma linha reta seja cortada, ao acaso, o quadrado sobre a reta toda é igual aos quadrados sobre os segmentos e também duas vezes o retângulo contido pelos segmentos." (EUCLIDES, 2009, p. 137).

Utilizando a representação moderna, a proposição 4 do Livro II de Euclides seria assim representada geometricamente:

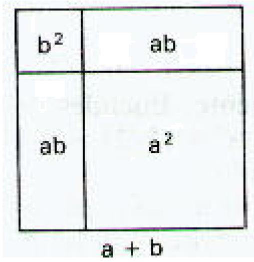


Figura 1 - Proposição 4 do Livro II
Fonte: Eves, 2008, p. 108

Eves (2008) apresenta uma versão simplificada da proposição 28 do livro VI de "Os Elementos":

> Dividir um segmento de reta de modo que o retângulo contido por suas partes seja igual a um quadrado dado, não excedendo este o quadrado sobre metade do segmento de reta dado.

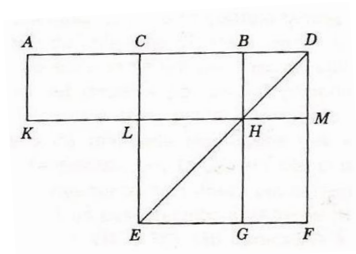


Figura 2 - Figura associada a proposição 28 - Livro VI – Euclides
Fonte: Boyer, 1994, p. 81

A referida proposição é um bom exemplo de situação na qual a álgebra aparece representada geometricamente, o que caracterizamos como sendo uma mudança de quadro.

Na matemática grega é possível identificar a utilização das leis distributivas para resolver os problemas, conforme pode ser observado em Boyer (1994, p. 79) na resolução apresentada por Euclides, na proposição 1 do livro II:

> Dadas duas retas, uma das quais é dividida num número qualquer de partes, o retângulo contido pelas duas retas é igual à soma dos retângulos contidos pela reta não dividida e cada uma das partes da outra.
>
> Isto é,
>
> Área BGHC = área BGKD + área DKLE + área ELHC
>
> Ou $a(b + c + d)= ab + ac + ad$

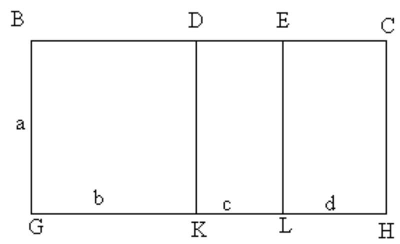


Figura 3 - Representação para a(b+c+d)=ab+ac+ad

O estrito rigor matemático dos gregos levou-os a usar o conjunto de segmentos de retas como domínio conveniente de elementos. Dessa forma, conseguiram contornar o problema para representar a raiz quadrada de 2, a qual não podendo ser representada em termos de inteiros ou suas razões, pode ser representada como um segmento de reta que é a diagonal de um quadrado de lado unitário.

No século III temos os trabalhos de Diofanto, os quais impulsionaram o crescimento da álgebra ao apresentar uma escrita sincopada que possibilitava expressar por meio de parâmetros o que anteriormente era descritivo; assim, resolviam as equações, possivelmente recorrendo ao método da falsa posição. Esse método pode ser encontrado em vários materiais dos hindus[2], entretanto não podemos afirmar que o uso deste método foi por influência dos manuscritos gregos, visto que segundo Eves (2008), as primeiras comunidades constituídas em território indiano datam de aproximadamente 4000 anos. A maior contribuição para a resolução de problemas algébricos foi o uso do método da inversão, o qual consistia em trabalhar para trás a partir dos dados. O método da inversão consistia na substituição de cada operação por sua inversa, por exemplo, se o problema solicitava que realizasse a multiplicação então pelo método da inversão deveria realizar a divisão. De acordo com Eves (2008) seria o que faríamos se tivéssemos que resolver o problema pelo método moderno, o qual representando por x o número procurado, temos:

$$\frac{\sqrt{\left(\frac{\left(2/3\right)\left(7/4\right)(3x)}{7}\right)^2 - 52} + 8}{10} = 2$$

> Para resolver essa equação multiplicamos ambos os membros por 10, depois subtraímos 8 de cada membro, depois elevamos ao quadrado cada membro e assim por diante. (EVES, 2008, p. 255)

Dentre os indianos que se dedicaram à Matemática, destacam-se Brahmagupta (c. 628) e Bháskara (c. 1150), os quais eram algebristas de maior destaque. Ainda, segundo Eves

---

[2] Eves alerta para o fato de que o termo "hindus" é uma forma de generalizar as duas civilizações que ocuparam a região da Índia, os indianos do ocidente (índios) e os indianos do oriente (indianos).

(2008), a álgebra hindu era amplamente verbal (retórica), mesmo que no enunciado do problema fossem utilizadas abreviações, ilustrando o chamado estilo sincopado.

Outra civilização que contribuiu muito com o desenvolvimento da álgebra foi a árabe, com a publicação do tratado escrito por Al-Khwarizmi, matemático de origem árabe nascido na Pérsia por volta de 800 d.C., intitulado: “Al-Jabr wa-al Muqabilah”, isto é, a “ciência da transposição e do cancelamento”, que foi um trabalho extremamente didático e com o objetivo de ensinar soluções para os problemas matemáticos cotidianos da época. No árabe, a palavra “Al-Jabr” da qual a álgebra foi derivada, significa “reunião”, “conexão” ou “complementação”.

De acordo com Eves (2008), a álgebra árabe ora é tratada numericamente como os hindus a tratavam, ora geometricamente, como faziam os gregos. Vale ressaltar que o termo algarismo é apontado como originário do nome deste matemático árabe.

No início do segundo milênio depois de Cristo, por meio de matemáticos que se aventuraram nos territórios mouros para estudarem nas escolas árabes, os conhecimentos matemáticos desenvolvidos nessa civilização foram levados para a Europa. Não se pode negar a contribuição também dos comerciantes do sul da Itália, os quais em contato com as civilizações indiana, romana e árabe, levaram vários conhecimentos matemáticos para a Europa. Em relação à álgebra, aparentemente não houve progresso (Eves, 2008, Boyer, 1994), visto que os primeiros livros retratavam registros, nos quais a álgebra sincopada utilizada por Diofanto e Brahmagupta não estava presente.

No século XVI, com o desenvolvimento social das cidades europeias, o número de produções sobre os temas matemáticos multiplicaram, gerando contribuições que impulsionaram a evolução da álgebra no território europeu. O simbolismo algébrico, como conhecido atualmente, surgiu por volta de 1500 d. C., com os trabalhos de Cardano e outros estudiosos e, por conta da evolução, atualmente apresenta-se com um corpo simbólico estruturado por meio de regras e princípios próprios.

Desse modo, o tratamento dispensado em cada civilização aos campos da Matemática formou conhecimentos, relações e aplicabilidade, os quais constituíram o corpo da ciência durante os tempos.

1.2 Uma Retomada Histórica do Uso de Livros-texto para o Ensino da Álgebra

A fim de demonstrar a manifestação do ensino da álgebra em livros-texto, é importante destacar como o conhecimento algébrico se difundiu nas academias e de que forma eram trabalhadas as relações entre os ramos da Matemática.

De acordo com Eves (2008), o uso de materiais para sistematizar o conhecimento produzido por grupos sociais, remonta a 3000 a.C., os quais eram utilizados para ensinar aqueles que eram escolhidos para aprender a arte de calcular. Segundo Schubring (2003), os tabletes babilônicos já relatavam vários problemas algébricos disfarçados como resolução de problemas, como descrito anteriormente. Tais tabletes apresentavam uma álgebra retórica, não interessada na generalidade do conhecimento matemático, mas na praticidade para resolver situações do dia-a-dia.

A civilização egípcia também procurou sistematizar o conhecimento e assim possibilitar a sua transmissão para várias gerações. O Papiro de Rhind e o Papiro de Moscou são dois desses materiais que serviam para a educação dos servos, e possibilitaram aos historiadores a análise e a verificação de traços dos conhecimentos produzidos pela sociedade egípcia, dentre esses, a álgebra presente na descrição dos procedimentos para resolver determinada situação (Aaboe, 1984).

Outra civilização que, possivelmente por orientação dos governantes, demonstrou a preocupação de sistematizar os conhecimentos necessários para um súdito ocupar cargos administrativos, foi a chinesa. Os registros matemáticos realizados pelos estudiosos chineses tinham cunho aritmético em suas aplicações para resolver situações práticas. Segundo Schubring (2003), foi na China que se elaborou a primeira lista de livros-texto autorizados de Matemática, a qual ficou conhecida como os "Dez manuais matemáticos" ou como os "Dez clássicos". Comparando com registros egípcios, percebem-se traços que demonstram uma preocupação de ambas as civilizações com situações práticas e aplicáveis no cotidiano.

Comparando os livros-texto utilizados na Babilônia, no Egito e na China, com os produzidos na Grécia, nesta percebe-se uma preocupação, não só com situações práticas, mas com situações voltadas para a formação em todos os níveis, isto é, além das aplicações práticas, buscavam também compreender as estruturas que permitiam validar os cálculos que eram realizados. "Os Elementos", de Euclides, é um dos representantes desses livros, possivelmente, pela sua utilização na educação de reis e príncipes, o que permitiu a disseminação dos conhecimentos sistematizados por ele na forma de livro e/ou na forma oral, inclusive um método muito utilizado para difundir os conhecimentos naquela época. De acordo com Schubring:

> É altamente revelador o fato de que o imperador tenha ordenado que seu trabalho fosse lido publicamente uma vez por ano. Embora existissem “livros” e um grande número de escribas os copiassem em Alexandria, a transmissão oral ainda era necessária para manter o conhecimento vivo, e garantir que este fosse passado à geração seguinte. (SCHUBRING, 2003, p. 32)

Ainda, conforme relatado por Schubring (2003), a difusão e o respectivo contato dos europeus com os livros de Euclides devem-se aos sábios islâmicos que estudaram seus conteúdos e contribuíram com o aprofundamento dos mesmos no campo da aritmética e álgebra. Os árabes destacaram-se por serem a primeira civilização a criar uma instituição com o intuito de ensinar em massa, a qual era conhecida por madrasa. O conhecimento difundido tinha como égide os princípios do islamismo. Dessa forma, havia uma separação entre as ciências “islâmica” e a “estrangeira” oriundas dos povos gregos, egípcios e babilônicos, entretanto, segundo Schubring (2003), os árabes receberam muito bem a aritmética prática, pois permitia que resolvessem os problemas de heranças propostos pelo C*orão*.

Fazendo uma analogia entre as instituições de ensino européias e islâmica, percebe–se muita semelhança. Em ambas havia padrões como o magistri[3] e os alunos estudavam juntos. O livro-texto era lido em voz alta pelo magistri e este, por sua vez, tinha o compromisso de verificar se o estudante tinha copiado corretamente o que foi ditado. Ainda em ambas, a Matemática não era considerada um conteúdo de permanente estudo, mas havia um interesse nos aspectos que lhes serviam para a prática. No caso dos padres europeus, o uso de conhecimentos matemáticos lhes permitiram determinar as datas das festas móveis da Igreja. Para isso, os principais livros–texto utilizados foram o De Sphaera de Sacrobosco (século XII) e provavelmente, segundo Schubring (2003), o Livro I de Euclides.

A invenção da imprensa por Gutemberg possibilitou mudanças no processo de ensino e aprendizagem. Os magistris não tinham mais que conferir se os estudantes tinham copiado corretamente o que foi ditado e ainda possibilitou a difusão de vários exemplares de um mesmo livro para um número maior de pessoas. Dessa maneira, os estudantes assumiram um novo papel no processo, no qual não dependiam agora somente do professor, mas podiam pesquisar nos livros e, dessa forma, terem acesso aos conhecimentos sistematizados pelos estudiosos e pesquisadores. Segundo Schubring (2003), os textos impressos nesse período,

[3] Magistri eram “professores” contratados para realizarem a leitura dos textos em voz alta, no ditado desses textos e na verificação se as notas tomadas pelos estudantes estavam corretas (Schubring, 2003, p. 36).

tinham a predominância de procedimentos aritméticos, por estarem diretamente ligados às aplicações em situações práticas.

Por meio do crescente número de livros-texto publicados, cujo intuito era difundir os conhecimentos acumulados pelas civilizações, houve o despertar do interesse pelos livros-texto considerados clássicos. Dentre eles, estava "Os Elementos", de Euclides, livro este utilizado pela Companhia de Jesus para o ensino da Matemática nos seus *Collèges*, por volta de 1552. Entretanto, a adoção do livro de Euclides pela Companhia de Jesus provocou uma campanha por parte de Petrus Ramus[4] em relação à metodologia adotada na confecção do livro. Conforme Schubring (2003, p. 46) observa:

> Uma das principais realizações de Ramus foi sua crítica aos Elementos de Euclides: não somente das proposições em particular ou da exatidão ou do rigor de certas demonstrações, mas muito mais fundamentalmente da sua metodologia. Na opinião de Ramus, os Elementos não eram, como tradicionalmente julgados, o modelo primordial para o raciocínio rigoroso e para a dedução lógica, mas antes revelavam uma falta de ordem natural, metódica.

De acordo com Schubring (2003), o primeiro impacto da reflexão provocada por Ramus foi percebida nos livros produzidos posteriormente, os quais apresentavam uma nova estrutura em que os conhecimentos algébricos apareciam como ferramentas para resolver as equações e aplicados na geometria.

Os trabalhos de Descartes, produzidos durante o século dezessete, influenciaram os textos dos livros com o uso de símbolos para representar as fórmulas e equações. Esse procedimento tornou os livros-texto mais legíveis e acessíveis ao público. O uso de livros-texto para a formação acadêmica dos estudantes matriculados nas universidades seguia caminhos diferentes dos livros-texto utilizados para a formação do estudante no Ensino Secundário[5]. Neste último, os livros priorizavam o ensino da aritmética e da geometria, enquanto nos primeiros, a prioridade era a generalização por meio das comunicações utilizando os símbolos algébricos.

Por volta do século XVIII, em que não havia educação para todos, surgiram dois livros com o intuito de permitir uma maior proximidade do público em geral com o conhecimento matemático. O primeiro autor responsável por estes compêndios foi Alex-Claude Clairaut, o qual publicou dois livros-texto: "Élémens de Géometrie", em 1741 e "Élémens d'Algèbre", em 1746. O livro sobre geometria, segundo Schubring (2003), apresentava os conhecimentos

---

[4] Ramus (Pierre de La Ramèe, 1515-1572) viveu na França, influenciou vários pensadores da época ao provocar uma reflexão sobre a forma de ser apresentado o conhecimento matemático nos livros-texto.

[5] Ensino Secundário tratado aqui refere-se aos anos finais do atual Ensino Fundamental.

associados à resolução de problemas envolvendo questões de medição nos campos, na paisagem, nas fazendas e na agrimensura em geral, enquanto o livro de álgebra apresentava menor número de situações nas quais o conhecimento algébrico era exposto como ferramenta para resolver problemas. De acordo com Schubring (2003), Clairaut produziu o texto, moldado a quem se dirigia e, mesmo sendo um texto didático, ele não pretendia que o livro fosse utilizado nas escolas, mas pela marquesa Du Châtelet como forma de instrução da matemática para o lazer, ou seja, como um passatempo.

Os livros de Clairaut foram muito criticados por alguns autores pela falta de rigor e de demonstrações, principalmente por d'Alambert no livro "Encyclopédie", o qual defendia que um livro que buscava tratar da matemática elementar deveria seguir os caminhos dos inventores, mas seguindo uma ordem lógica para a construção do conhecimento (Schubring, 2003).

Com a Revolução Francesa no final do século dezoito, a oferta do ensino estendeu-se para um maior número de pessoas. Houve a definição de uma comissão para identificar os melhores compêndios para serem utilizados na formação do aluno e do professor. Um dos livros indicados para o uso nessa formação foi o de Bézout, o qual apresentava uma organização compreendendo o ensino da aritmética, geometria, álgebra e tratados de mecânica. A indicação do livro de Bézout foi defendida por Lagrange, que pertencia à comissão responsável pela análise e respectiva indicação, caracterizando assim uma primeira tentativa de se criar um programa do livro didático. De acordo com Schubring (2003), após várias discussões na comissão, Lagrange apresentou sua lista de livros indicados, na qual configurava em primeiro lugar, os livros de Bézout, seguido de outros autores:

> Lagrange incluía não só a Arithmetica Universalis de Newton, mas também os Elementos de Euclides. Além disso, seu relatório era um tanto contraditório, pois não somente mantinha a lógica anterior de recomendar coleções, "integrais", mas também relacionava livros separados para subdisciplinas da matemática escolar como geometria, álgebra, trigonometria, e até incluía "temas escolares" como geometria descritiva e cálculo diferencial. (SCHUBRING, 2003, p. 99)

Os compêndios de Bézout tratavam da resolução de elementos da álgebra por meio de descrição dos processos em linguagem natural, os quais, se aplicados, poderiam resolver as situações envolvendo, por exemplo, equações do segundo grau. O texto a seguir descreve como eram apresentadas as resoluções nos compêndios de Bézout:

> Tome a metade da quantidade conhecida que multiplica x no segundo termo eleve essa metade ao quadrado e some esse quadrado a cada membro da equação, o que em nada mudará a igualdade. O primeiro membro será então um quadrado perfeito. Tire a raiz quadrada de cada membro, e faça preceder

> a do segundo membro do sinal duplo ±; a equação será reduzida ao primeiro grau. (BÉZOUT, 1781, p.129 *apud* SCHUBRING, 2003, p. 102).

Nesse período, as academias militares instaladas no território brasileiro utilizavam esses compêndios para instruir os estudantes, sinalizando grande influência do pensar matemático desenvolvido pelos europeus em suas academias. Isto pôde ser constatado porque na época em que as academias européias realizaram a substituição dos compêndios de Bézout por Lacroix, algum tempo depois o Brasil também efetuou a respectiva substituição. Conforme Valente (2002), a diferença entre a organização curricular de Bézout e Lacroix estava na prioridade dada à organização do conteúdo apresentando aritmética, geometria e álgebra ou aritmética, álgebra e geometria.

Com o surgimento dos liceus e preparatórios para o ingresso no “ensino secundário”, os autores brasileiros inspiraram-se nesses manuais para a elaboração de livros que seriam utilizados no ensino e/ou no ingresso dos candidatos ao referido nível escolar.

É relevante ressaltar que no Brasil, no final do século XIX e começo do XX, os manuais didáticos eram produzidos sobre a égide do positivismo (Schubring, 2003). O livro “Curso de filosofia positiva”, de Augusto Comte, postula que há dois caminhos para apresentar a matemática escolar: o primeiro é o caminho histórico e o outro, o dogmático. No primeiro, os conteúdos são expostos conforme a ordem efetiva segundo a qual a humanidade os obteve, adotando quando possível a mesma via de obtenção da aprendizagem sobre o tema. No segundo, o conhecimento é posto de tal forma que poderia ser concebido, atualmente, por uma única pessoa que, provido de conhecimento suficiente, seria capaz de refazer a ciência em seu conjunto.

Esta influência pode ser percebida no livro “Curso elementar de Matemática: Álgebra” de Aarão Reis, editado em 1902, cujo autor optou por incluir textos históricos como notas de rodapé. Desse modo, segundo Silva (2001), pode-se perceber a sua preocupação em seguir as orientações de Comte, ou seja, em estabelecer relação direta entre a sua proposta pedagógica e a ordem cronológica dos saberes matemáticos constituídos, que contribuíram para a evolução da álgebra. Ainda segundo Silva:

> Já na primeira página, quando introduz as noções elementares, inclui longo texto sobre a origem da palavra Álgebra. Nas páginas seguintes, continua abordando a evolução da Álgebra, a introdução das notações e fazendo referência a obras sobre a História da Matemática, como a de Moritz Cantor Vorlesung über Geschichte der Mathematik. Nessas notas apresenta também curtas biografias D’Alembert, Lagrange, Newton etc. Algumas vezes as notas de rodapé são tão extensas que quase se confundem com o texto propriamente dito. (Silva, 2001, p.139-140 *apud* Miguel e Miorin, 2005, p. 39)

Outro livro utilizado no ensino da álgebra, segundo Valente (2002), foi o "Curso de Mathematica Elementar, de Serrasqueiro, o qual acompanhava a ideia da época de tornar o livro-texto um material acessível ao aluno. O livro de Serrasqueiro foi adotado no Brasil pelo menos até 1923, mas não era o único a ser utilizado para o ensino da álgebra. Ainda, no Brasil, foram utilizados os livros publicados pela *Frère de l'Instrution Cherétienne* (FIC) na França, e traduzidos por Raja Gabaglia. Esses livros apresentavam uma grande quantidade de conteúdos, sendo que alguns não eram exigidos pelo programa oficial do governo (Valente, 2002). Uma característica dos livros publicados pela FIC e posteriormente, pela *Frère Thèophane Durand* (FTD) era a grande quantidade de exercícios que constava em todos os volumes, de tal forma que para o aluno resolver as atividades, deveria seguir os modelos apresentados como exemplos (Valente, 2002).

É importante destacar que, tanto nos livros publicados pela FTD como por outras editoras, há uma predominância de atividades envolvendo cálculos algébricos, o que caracteriza uma "visão letrista" do ensino da álgebra (Lins e Gimenes, 2006). O PNLD/2005 (2004) aponta tal característica como predominante em várias coleções de livros didáticos de Matemática utilizados nos anos finais do Ensino Fundamental.

Por outro lado, no último PNLD/2008 (2007), percebe-se nos livros didáticos a presença de diferentes abordagens em relação à história da Matemática. Enquanto autores preferiram apresentar a história da Matemática em textos complementares, outros buscaram inserir a história dessa ciência nos textos didáticos para explicar os conteúdos de um determinado ano escolar. E ainda, há autores que apresentaram problemas históricos para serem resolvidos pelos alunos, cujo intuito seja, provavelmente, a demonstração das dificuldades que geraram o conhecimento matemático.

A preocupação ao efetuar uma abordagem histórica dos livros didáticos utilizados no Brasil, em relação à álgebra, desde o século XIX até o início do século XX, teve como objetivo compreender como os autores desses livros apresentavam os conhecimentos algébricos produzidos pela sociedade. Entende-se que, a forma como é trabalhado o conhecimento algébrico, pode favorecer ou não o desenvolvimento da autonomia do aluno para produzir argumentos baseados nesses conhecimentos e justificar suas ações na resolução de atividades, nas quais precisam verificar a validade dos resultados encontrados. Em relação a este aspecto, Santos (2007), em sua conclusão, pondera que os professores não utilizam atividades nas quais os alunos poderiam desenvolver uma visão, mais ampla da Matemática, dificultando assim uma educação mais consistente em relação ao entendimento dos conteúdos dessa disciplina.

Face ao exposto, buscamos verificar nos documentos oficiais como é proposto o trabalho com a álgebra no Ensino Fundamental, bem como o uso de problemas históricos nesta etapa de ensino. Assim, apresentaremos alguns excertos e reflexões em relação ao ensino da álgebra no Ensino Básico, proposto pelos PCNs de Matemática (1998) e pelo PNLD/2008.

1.3 PCNs

No Brasil, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB. 9394/96), no seu artigo 32, afirma que o objetivo do Ensino Fundamental consiste na formação básica do cidadão mediante:

> **I -** o desenvolvimento da capacidade de aprender, tendo como meios básicos o pleno domínio da leitura, da escrita e do cálculo;
> **II -** a compreensão do ambiente natural e social, do sistema político, da tecnologia, das artes e dos valores em que se fundamenta a sociedade;
> **III -** o desenvolvimento da capacidade de aprendizagem, tendo em vista a aquisição de conhecimentos e habilidades e a formação de atitudes e valores;
> **IV -** o fortalecimento dos vínculos de família, dos laços de solidariedade humana e de tolerância recíproca em que se assenta a vida social.

O educar a partir da promulgação desta lei ganhou uma nova caracterização, na qual o aluno precisa ser um agente do processo de ensino, ser capaz de refletir sobre os atos, tomar decisões e estabelecer metas para chegar a resultados diante de situações-problema (BRASIL, 1998). Assim, o aluno precisa ser um cidadão responsável e que exerça plenamente esta cidadania e, para exercê-la, ele precisará saber "*calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente, etc.*" (BRASIL, 1998, p. 27). Diante de situações reais, cada vez mais são exigidas habilidades como a capacidade de tomar decisões e lidar com conhecimentos antigos, desse modo, o agir determina sucesso ou fracasso.

O trabalho com conteúdos matemáticos pode contribuir para esta formação do aluno quando as atividades de sala de aula apresentam situações a partir das quais eles têm a possibilidade de explorar resoluções de problemas, construir estratégias, investigar caminhos, argumentar, comprovar e justificar suas resoluções, e que a criatividade e a iniciativa pessoal sejam uma atitude natural no agir perante o processo de aprendizagem. De acordo com os PCNs afirma:

> o desenvolvimento da capacidade de investigar, argumentar, comprovar justificar e o estímulo à criatividade, à iniciativa pessoal e ao trabalho coletivo favorecem o desenvolvimento dessas capacidades. (BRASIL, 1998, p. 41)

Os PCNs de Matemática (BRASIL, 1998, p. 42) ainda sinalizam que para resolver problemas, o aluno deverá elaborar procedimentos de resolução, comparar seus resultados com os de outros alunos e validar seus procedimentos. Contudo, é necessário o desenvolvimento de habilidades que lhe permita provar os resultados, testar os efeitos, comparar diferentes caminhos para chegar à solução de um problema. Ao comparar diferentes caminhos, precisa ser capaz de argumentar sobre suas estratégias de resolução, o que exigirá o desenvolvimento da capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é fundamental que se produza algumas explicações, bem como formas de validação.

Ainda, de acordo com os PCNs:

> É desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (BRASIL, 1998, p. 71)

O ensino da álgebra, conforme os PCNs (1998), constitui terreno fértil para o aluno desenvolver e exercitar a capacidade de abstração e generalização, constituindo-se em uma poderosa ferramenta para resolver problemas, e ainda, o professor deve ter clareza do papel da álgebra no currículo e de como o aluno constrói o conhecimento matemático, especialmente quanto à variedade de representações.

Silva (2006), em seu trabalho sobre as visões da álgebra nos PCNs, pondera que o documento defende a relação entre o ensino de propriedades aritméticas e o ensino da álgebra, porém registra que o próprio documento na seção "orientações didáticas" não fornece exemplos da relação entre os conceitos aritméticos e algébricos, mas exemplos e sugestões para o trabalho com números separado do trabalho com as propriedades algébricas.

É importante ressaltar que, de acordo com o guia do PNLD/2008, o ensino de conceitos algébricos tem início no 6º ano com os primeiros problemas que são traduzidos para linguagem algébrica e, nesse momento, o aluno depara-se com informações que exigem uma abstração maior, envolvendo propriedades aritméticas, as quais deverão ser utilizadas para que ele obtenha o valor desconhecido. Este trabalho com situações-problema expresso na linguagem natural, em que o aluno deve passar para a linguagem algébrica para obter a solução, é recomendado pelos PCNs (BRASIL, 1998, p. 122), o qual sugere, ainda, que o professor utilize linguagens em que o conceito matemático não seja deformado.

1.4 PNLD

A análise dos livros didáticos publicada no guia do PNLD/2008 aponta para a preocupação dos autores em iniciar o mais cedo possível o ensino dos conceitos algébricos, por entenderem que os mesmos ajudam a construção gradual do pensamento algébrico.

O desenvolvimento do pensamento algébrico inclui o uso da linguagem algébrica em seus diferentes papéis. Com exceção do uso da letra para representar um valor desconhecido, a álgebra é utilizada para expressar generalizações de propriedades.

Dentre as obras analisadas por esse programa do MEC, há aquelas que abordam a álgebra desde o 6° ano trabalhando propriedades aritméticas, sem expressar algebricamente, o que é feito somente após a introdução da álgebra. Há outras que introduzem o uso gradualmente, preparando o aluno para a compreensão da álgebra como uma ferramenta para expressar conceitos matemáticos. Há ainda as coleções que desde a primeira página do livro do 6º ano já trabalham com a linguagem algébrica, sem o preparo do aluno, como se a compreensão ocorresse de forma espontânea.

Ainda de acordo com o guia do PNLD/2008, muitas coleções realizam o estudo de regularidades em sequências numéricas e/ou de figuras. Outras fazem o trabalho com a expressão de relações funcionais como a fórmula da área de uma figura plana. Porém, esse documento observa que muitas coleções não utilizam o conceito de área para a introdução das equações e das funções.

Em relação à coleção utilizada pelos alunos sujeitos desta pesquisa, o guia do PNLD demonstra que a coleção prioriza uma metodologia na qual os conteúdos são introduzidos com base na resolução de problemas. As explanações e perguntas dirigidas aos alunos os conduzem a construir significados sobre conceitos e procedimentos, os quais possibilitar-lhe-ão resolverem novos problemas.

Esse documento ressalta ainda que o autor procurou estruturar a coleção de forma que o aluno pudesse revisitar os assuntos, com aprofundamento e ampliação de conceitos, articulando o conhecimento novo com o antigo por meio de atividades de revisão. Para tanto, baseou-se em situações contextualizadas, em que muitas são relacionadas à realidade social, contribuindo para ampliar a formação do aluno.

Em relação ao tratamento dispensado à álgebra, o autor optou por começar com o uso da álgebra como generalização das relações numéricas no volume do 6º ano e, gradativamente, nos volumes seguintes, procurou trabalhar os diferentes campos da álgebra. De acordo com as orientações contidas no guia do PNLD/2008:

> a linguagem algébrica é bem apresentada e os papéis das letras são explicitados com clareza. Contudo, no livro do 8º ano, é dada demasiada atenção ao cálculo algébrico, que é um assunto bastante técnico (BRASIL, 2008, p.65).

Verificou-se, portanto, que nesse volume, o autor priorizou exercícios nos quais os conteúdos algébricos e geométricos aparecem interligados; entretanto, esses exercícios possuem a mesma forma, ou seja, é apresentada a figura geométrica e, para resolver, o aluno deve escrever os procedimentos de cálculo de área e perímetro no campo algébrico.

Por meio das reflexões propostas pelo guia do PNLD/2008, continuamos a analise do volume do 8º ano do Ensino Fundamental a fim de identificarmos atividades nas quais os alunos fossem convidados a provar ou testar algumas expressões para verificar a sua validade. Observamos que há uma seção na qual o autor discute a demonstração da validade de expressões algébricas, porém priorizando a permanência no quadro algébrico. Nessa seção, o autor não traz situações-problema que permitem que o aluno realize a verificação da igualdade algébrica associada ao perímetro ou área de uma figura geométrica.

Observamos, enfim, que os documentos destinados a nortear o trabalho didático nas redes de ensino apontam como um caminho para o desenvolvimento do processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, a exploração de diferentes contextos, nos quais os alunos possam desenvolver a autonomia e a postura de criarem estratégias para resolverem situações-problema e que as situações apresentadas devem propiciar ao aluno a oportunidade de vivenciar os conceitos matemáticos em diferentes quadros e, dessa forma, ele poderá constituir seus conhecimentos de tal maneira que favoreça a aprendizagem.

Realizando a revisão bibliográfica, observou-se que vários autores já se preocuparam com o processo de aprendizagem dos conceitos algébricos e com o trabalho com formas geométricas e elementos da aritmética, enfatizando a importância desses aspectos nessa aprendizagem. Destacamos que o outro interesse das pesquisas é o uso de processos de prova e demonstração no ensino da Matemática e como esta ferramenta permite impulsionar a aprendizagem matemática.

1.3 Análise de algumas dificuldades dos alunos em relação às igualdades algébricas em outras pesquisas

O diálogo com os professores de Matemática que atuam na educação básica serviram para perceber as dificuldades em relação à articulação dos conceitos estudados na aritmética e na geometria com conceitos estudados na álgebra. A dificuldade pode dar uma falsa impressão ao aluno de que o sentido da expressão algébrica é o de um conteúdo posto para complicar sua vida e que não tem utilidade nenhuma (Booth, 1995). Esta impressão pode estar relacionada à opção feita por alguns autores e professores em trabalhar com os conteúdos algébricos, valorizando excessivamente regras e técnicas algorítmicas (Lins e Gimenes, 2006).

Booth (1995), no artigo "Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra", parte do estudo desenvolvido na década de 80 para o National Council of Theacher of Mathematics (NCTM), que aponta a álgebra como fonte de confusão e atitudes negativas, e uma das razões pode estar no fato e os alunos acharem provavelmente a álgebra difícil. Todavia, Booth (1995) percebeu que o tempo de estudo não representava maior aprendizagem ao comparar os erros cometidos pelos alunos, independente de anos de estudo do conteúdo algébrico. Ficaram evidentes algumas semelhanças, as quais podem estar ligadas às ideias dos alunos sobre aspectos como o foco na atividade algébrica e a natureza das "respostas", o uso da notação e da convenção em álgebra, o significado das letras e das variáveis, os tipos de relações e métodos usados em aritmética.

Se considerarmos o aspecto "uso de letras", perceberemos que há uma tendência de evitar a distinção "nome-objeto", mas pensar numa variável simplesmente como um símbolo pelo qual se podem substituir coisas. Para Usiskin (1995), essa concepção de variável como "símbolo que representa indistintamente os elementos de um conjunto" é tão natural, que não é questionado. Contudo, não é o único ponto de vista a ser considerado em relação às variáveis. No início do século XX, a matemática formalista considerava as variáveis e todos os outros símbolos matemáticos como meros sinais no papel, relacionados entre si por propriedades assumidas ou deduzidas que, por sua vez, não passavam de sinais no papel.

Por que utilizar a abordagem aritmética? Segundo Booth (1995), a álgebra não é isolada da aritmética, ou seja, seria uma aritmética generalizada, residindo aí a fonte de algumas dificuldades dos alunos. Segundo, "*para compreender a generalização das relações* *e procedimentos aritméticos é preciso primeiro que tais relações e procedimentos sejam apreendidos dentro do contexto aritmético"*. (Booth, 1995, p.33)

Chalouth e Hercosvics (1995) apresentam argumentos para justificar o uso de uma abordagem geométrica no ensino de expressões algébricas. Os autores realizaram a pesquisa com alunos de 6ª e 7ª séries, a qual demonstrou que o uso de problemas envolvendo conceitos geométricos permite aos alunos "*construírem um significado para expressões envolvendo uma incógnita e uma operação até para expressões envolvendo várias incógnitas e várias operações"*.(Chalouth e Hercosvics, 1995, p.38)

As diferentes concepções atribuídas à álgebra servem para indicar alguns caminhos a serem trilhados durante a investigação dos efeitos das mudanças de quadros, entendido nesse trabalho como sendo o conjunto de propriedades e conceitos que formam a aritmética, a geometria e a álgebra, que estão diretamente interligados com o ensino das expressões algébricas nos anos finais do Ensino Fundamental. A preocupação com o ensino da álgebra e suas inter-relações com os outros domínios não são tão novos, conforme pode ser observado nas pesquisas de Booth, Usiskin e Chalouth e Hercosvics. Entretanto, há pontos a serem investigados com o intuito de descobrir as relações e interferências que podem levar a uma aprendizagem das expressões algébricas.

De acordo com Ponte (2005), um dos grandes objetivos da álgebra no nível escolar, é o de desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Este pensamento é um conjunto de capacidades nas quais podemos destacar e manipular símbolos. Em 2000, o NCTM sinalizou que o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelização e ao estudo da variação. Nessa variação estão inclusos as seguintes capacidades:

- compreender padrões, relações e funções (Estudo das Estruturas);
- representar e analisar situações matemáticas e estruturas, uso dos símbolos algébricos (simbolização);
- usar modelos matemáticos para representar e compreender relações qualitativas (modelização);
- analisar mudanças em diversas situações (Estudo da variação).

(NCTM, 2005, p. 37)

Sendo assim, a possível causa do pouco uso de momentos nos quais os alunos trabalhariam com situações-problema em que eles têm que conjecturar e elaborar justificativas lógicas, segundo Carvalho (2007), está relacionada a pouca habilidade do professor em desenvolver o assunto e também ao fato de os livros didáticos não apresentarem um subsídio adequado para que esse trabalho seja encaminhado de forma satisfatória. A ausência desse tipo de trabalho pelos professores na sala de aula, segundo Santos (2007), pode privar os alunos de uma visão mais ampla e de uma educação mais concreta para compreender o funcionamento da Matemática. Ainda,

> é através dela (argumentação e/ou prova) que o aluno poderá fazer suas suposições acerca de uma afirmação, é através dela que o aluno poderá criar processos de dedução para verificar se suas suposições são corretas, é através dela que o aluno irá compreender melhor o universo da Matemática no seu âmbito mais concreto. (SANTOS, 2007, p. 122)

Concordamos que o aluno precisa ser capaz de produzir afirmações, levantar hipóteses e verificar se é correta ou não. Nesse aspecto, o aluno precisa ser estimulado a produzir textos matemáticos capazes de comunicar suas ideias e procedimentos, bem como argumentar oralmente. Entretanto, neste trabalho optamos por analisar somente as produções escritas dos alunos, visto que nosso interesse são suas anotações referentes à escolha das estratégias para resolverem problemas propostos e serem verificadas suas validades.

CAPÍTULO II

2. REFERENCIAL TEÓRICO E METODOLÓGICO

Neste capítulo apresentamos o referencial teórico que foi utilizado para as análises, o qual contém os jogos de quadros e o processo de validação, bem como a concepção de processo de validação com o sentido de verificação nas relações entre as situações didáticas e os jogos de quadros. Apresentamos também a metodologia que permitiu investigar nossa questão de pesquisa.

2.1 Teoria das Situações Didáticas

Brousseau, nas décadas de 70 e 80, desenvolveu pesquisas que o levou a elaborar uma teoria sobre as situações didáticas, na qual propõe uma forma de trabalhar o ensino da matemática diferente da prática clássica. A proposta de Brousseau considera o meio em torno do aluno, e sua retroação à ação do aluno, atuando este como um protagonista no processo de aprendizagem. Entendemos a teoria das situações didáticas como sendo um modelo teórico de análise de interações de um sujeito com um meio específico, visando à aquisição de um dado conhecimento matemático, bem como recursos que o sujeito mobiliza para restabelecer o equilíbrio entre ele e o meio no qual está inserido. Algumas situações requerem a utilização de conhecimentos e esquemas anteriores, porém há outras que, segundo Brousseau (2008) possibilitam a construção de novos conhecimentos, dentro de um processo de gênese artificial. De acordo com o autor:

> Cada conhecimento pode caracterizar-se por uma (ou várias) situações adidáticas, que preserva o seu sentido, e a que chamaremos de situação fundamental. Mas o aluno não pode resolver imediatamente qualquer situação adidática, pelo que o professor lhe fornece aquelas que estão ao seu alcance. Estas situações adidáticas construídas com fins didácticos determinam o conhecimento ensinado num dado momento e o sentido particular desse conhecimento será, por essa razão, objeto de restrições e deformações, assim remetidas para a situação fundamental. (BROUSSEAU, 1986, p. 50)

O processo de aprendizagem necessita do engajamento do aluno em resolver a situação-problema, tendo a responsabilidade pela escolha de uma estratégia de resolução.

Transferir a responsabilidade pela determinação dos processos a serem realizados para os alunos, leva o professor a um paradoxo entre ser o responsável em garantir que o aluno compreenda para utilizar o conhecimento visado na resolução de situações futuras ou dizer ao aluno como deve ser feito para resolver determinado problema. O ato pelo qual o professor leva o aluno a aceitar a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência, Brousseau chamou de **devolução**.

Na fase de devolução, é de responsabilidade do professor conquistar o aluno para aderir ao processo de tal forma que ele assuma para si a responsabilidade pela resolução. Tal atitude assemelha, segundo Brousseau, ao papel do rei que, na iminência de uma batalha na qual todo o reino está em perigo, convoca todos os súditos a pegarem armas e assim assumirem a responsabilidade pela defesa de suas terras. O rei abre mão de decidir sozinho sobre as formas de defesa, pois como todos estão na mesma situação, cabe a todos decidir como fazer para defender seu território. Do mesmo modo, na sala de aula, todos estão no mesmo ambiente de aprendizagem no qual todos precisam resolver determinada situação, então é de responsabilidade de todos os alunos buscarem caminhos e estratégias para tal.

Margolinas (1993) fez um estudo sobre a importância de criar no aluno esta autonomia em relação ao papel do professor no momento da correção de suas estratégias. Em relação a esse aspecto, La Taille (2003) chama a atenção para o tipo de ensino, no qual o aluno fica aguardando que o professor, como autoridade máxima da sala, valide ou não sua resposta e, no caso da não validação, diga qual a forma correta de resolver. Desse modo, Margolinas e La Taille concordam, pois o agir do professor apresentando as respostas corretas sem que o aluno reflita sobre seus erros significa reduzir o processo de ensino e de aprendizagem a ações mágicas. Quando colocamos ações mágicas estamos nos apoiando em Margolinas (1993). Para esta autora, apenas apresentar a resposta correta não é suficiente para que o aluno aprenda a forma correta de resolver uma situação ou passe a dominar determinado conhecimento.

O professor, ao planejar suas aulas, deve pensar em momentos didáticos nos quais ele exerce o papel de protagonista no processo e também em momentos adidáticos nos quais os alunos investigam possíveis estratégias de resolução, elaboram conjecturas e produzem conhecimentos a serem institucionalizados na companhia do professor. Segundo Brousseau (2008), para que ocorra a investigação pelos alunos, o trabalho do professor deve se apoiar na elaboração de boas perguntas, que levem os alunos a buscarem soluções e a refletirem sobre suas ações. Se as boas perguntas em um primeiro momento levam os alunos a levantarem hipóteses, a conjecturarem e a produzirem argumentos, no segundo momento devem levar os alunos a tomarem suas resoluções como objetos de estudo.

Para Brousseau, por meio das desequilibrações provocadas pelas boas perguntas, pode-se construir um meio favorável à aprendizagem de objetos matemáticos, utilizando as situações didáticas como meio de construção de conhecimentos. Sendo assim, é necessária a participação do aluno de forma atuante na sua aprendizagem e que o professor permita, incentive e promova situações em que o aluno atue nos jogos ou na resolução de problemas, utilizando, para tanto, seus conhecimentos antigos.

O uso de conhecimentos anteriores possibilita ao aluno ter um ponto de partida para resolver a situação proposta, porém, isso somente ocorrerá se o professor propiciar situação na qual ele consiga mobilizar este conhecimento e possa assim engajar-se na resolução. Entretanto, este conhecimento antigo não pode ser suficiente para resolver a situação, mas ser o ponto de partida para que o aluno possa investigar possibilidades de resolução.

A partir do momento em que o aluno assumiu a responsabilidade pela resolução de uma situação, podemos afirmar que criamos um ambiente propício para a aprendizagem. Brousseau classificou o agir do aluno no processo de aprendizagem em três dialéticas que ocorrem simultaneamente.

A primeira dialética é a de ***ação***, em que o aluno elabora estratégias a partir da observação do “jogo[6]” ao qual está inserido. A situação de ação deve possibilitar ao aluno julgar o resultado de sua ação e, caso seja necessário, ajustá-lo, sem a participação do professor, o que provoca uma aprendizagem por adaptação. De acordo com Almouloud (2007, p. 37), a dialética da ação:

> Consiste em colocar o aprendiz numa situação, chamada situação de ação, tal que:
>
> – Coloca um problema para o aluno cuja melhor solução, nas condições propostas, é o conhecimento a ensinar;
>
> – O aluno possa agir sobre essa situação e que ela lhe retorne informações sobre sua ação.

A boa situação-problema permite que o aluno possa julgar seu resultado, ajustá-lo se for o caso, sem intervenção do professor, dizendo se está correto ou não, mas o meio

[6] De acordo com Brousseau (2008, p. 19-20) jogo é entendido como sendo uma situação didática a qual o aluno assumiu a responsabilidade de resolver.

funcionando como oponente, fornecendo respostas que lhe possibilite realizar esta retroação. É importante ressaltar que, neste momento, o aluno não argumenta ou justifica sua resposta, pois a centralidade do processo está na tomada de decisão a partir das informações repassadas pelo meio. Entendemos o meio como sendo os elementos no entorno do aluno que irão interagir com ele, a partir da devolução de uma dada situação-problema, da ação do colega e/ou das proposições do professor que provocarão reações por parte do aluno.

A segunda dialética é a de ***formulação***, em que o aluno procurará, progressivamente, desenvolver uma linguagem que seja compreensível por todos e para tanto, utilizará de sinais e regras comuns, conhecidas ou novas. Conforme Brousseau (2008, p. 29):

> [...] a formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomá-lo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo em um sistema linguístico). O meio que exigirá do sujeito o uso de uma formulação deve, então envolver um outro sujeito, a quem o primeiro deverá comunicar uma informação.

Neste momento, o aluno tenta formular justificativas utilizando-se de conhecimentos anteriores já sedimentados, os quais lhe darão segurança para defender sua posição na apresentação de sua estratégia para o colega ou os colegas, produzindo assim uma comunicação na qual todos possam compreender suas informações e dessa forma ser compreendido.

A terceira dialética é a de ***validação***, na qual o aluno explicita a validade do modelo criado por ele. O aluno deixa de ser um informante para ser um proponente de sua ideia a um oponente, que poderá solicitar que demonstre ou detalhe melhor sua estratégia. Nos devidos termos, Brousseau (2008, p. 30) enfatiza:

> [...] o emissor já não é um informante, mas um proponente, e o receptor, um oponente. Pressupõe-se que possuam as mesmas informações necessárias para lidar com uma questão. Colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes já consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas. [...] Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio.

A interação entre os sujeitos os leva a terem a preocupação de fundamentar seus discursos em relação às estratégias adotadas. Tal preocupação considera o projeto do aluno e seus conhecimentos, fator importante para que se possa ocorrer a validação de uma situação. De acordo com Freitas (2008, p. 98) "*um processo de validação se caracteriza principalmente como uma atividade que tem como finalidade assegurar a validade de uma* *dada proposição matemática podendo ainda consistir na produção de uma explicação teórica".*

Dessa forma, a dialética de **validação** admite dois processos nos quais o aluno precisa utilizar seus conhecimentos para organizar suas informações. Para Margolinas (1993), a fase de validação é uma parte da fase de conclusão, na qual o aluno procura validar seu trabalho. Essa autora apresenta ainda um tipo particular de validação, o qual ela denominou de processo de verificação.

Fontalva (2006) esclarece que o processo de validação é entendido como um processo de aceitação ou refutação, em geral coletiva, por meio de debates. No caso da pesquisa desenvolvida por Fontalva, a dialética da validação correspondia à justificativa, pois, ao justificar-se, o aluno pode ser levado a rever sua produção. O rever da produção leva-o a construir novos argumentos, a buscar novos conhecimentos para com isso chegar a uma validação de sua formulação ou para refutar formulações propostas pelos colegas.

Ao final dos debates nas duplas ou nos grupos, é função do professor organizar a sala para a socialização e assim institucionalizar o conhecimento produzido pelos alunos ou aproximá-los do saber já institucionalizado pela academia. É importante ressaltar que, inicialmente, Brousseau não tinha pensado no papel do professor para o fechamento dos trabalhos de sala de aula. Porém, as experiências desenvolvidas demonstraram que faltava esta fala do professor para aproximar as produções da sala aos conhecimentos de outras criações (culturais ou do programa) e indicar quais poderiam ser reutilizados. A dialética de **institucionalização** representa o momento em que o professor e os alunos conjuntamente discutem as soluções encontradas pelo grupo, verificando a validade em relação ao problema apresentado, cabendo ao primeiro indicar o que deve ser guardado para ser utilizado em outras situações. Assim, a institucionalização pode ocorrer em vários momentos.

2.2 Processo de verificação como parte da validação

A busca por validar a ação desenvolvida na resolução de uma situação-problema na qual tenha se envolvido, requer que o aluno adote um método ou um procedimento para alcançar o êxito no trabalho. No contexto deste trabalho, adotamos a definição proposta por Mora (1978, p. 186): um método significa escolher um caminho e percorrê-lo para chegar ao resultado, e procedimento significa escolher, além do método, um suporte nas teorias e/ou teoremas matemáticos para justificar todo o caminho percorrido. O processo de validação é inerente ao aluno e dependendo do que é adotado por ele estará envolvendo-se em um dos processos que compõe o processo de validação, o qual segundo Margolinas (1993), divide-se em duas categorias: o processo de prova e o de verificação.

O processo de prova refere-se aos tipos de provas produzidas pelos alunos o que, segundo Margolinas (1993), possibilita identificar os respectivos níveis de desenvolvimento na arte de argumentar utilizando elementos da Matemática. O pesquisador procura identificar como os alunos estão em relação aos níveis de provas, então propicia situações nas quais eles evoluem nas suas argumentações para alcançar outros níveis de prova.

É natural que, durante a elaboração de argumentações para provar algumas afirmações, os alunos incorram em erros, os quais se não percebidos por eles, poderão invalidar todo seu trabalho e caracterizar algumas falhas na elaboração do instrumento de pesquisa. O erro será percebido pelo aluno caso a situação-problema possibilite a manifestação de conhecimentos anteriores, levando-o a uma contradição de tal forma que se torne um projeto seu e queira resolver a situação. Margolinas (1993), apoiando-se nas ideias de Balacheff (1988), afirma que o erro no processo de prova assume o papel de contradição e, neste caso, leva os alunos a reformularem suas argumentações.

Entretanto, Margolinas (1993) citando Balacheff, alerta que na maior parte do tempo o erro não produz nenhuma contradição, nem para o matemático, nem para o aluno. Ele exemplifica dizendo que um aluno do terceiro ano do Ensino Médio que durante o envolvimento nas situações didáticas escreva $8 + 7 = 12$, considerará certamente esta escrita como um erro estúpido de sua parte. Este erro não produz nenhuma contradição porque ele não responde a nenhuma pergunta.

Um erro será uma contradição quando for capaz de produzir no aluno o interesse de rever seus procedimentos e assim reconhecer novos processos para resolver a situação na qual teve insucesso. Para Balacheff apud Margolinas (1993), para que os alunos realizem uma prova, eles precisam adotar um procedimento, registrar todas as etapas e, caso seja necessário, retornarem para corrigir um erro e assim verificarem em qual momento adotaram ações que são contraditórias ao campo matemático.

Margolinas (1993), apoiando-se nas ideias de Balacheff (1988), observa que para haver uma contradição são necessárias duas condições: 1) O conhecimento do aluno e 2) O projeto do aluno[7]. Se a situação não respeitar estas condições, pode gerar uma situação na qual os alunos, na presença de uma contradição, não retomam seus cálculos para identificarem seu erro e assim realizarem a respectiva correção dos seus procedimentos.

Um fator importante para que ocorra o processo de prova é que ele seja um elemento do projeto de ação do aluno. Caso contrário, essa resolução não produzirá uma contradição, visto que o aluno não teve despertado o seu interesse em encontrar uma solução para a situação proposta. Ainda é fundamental que o aluno tenha o conhecimento necessário para iniciar a ação, somente assim ele terá um controle de suas ações identificando passagens que desconsideram conceitos matemáticos e com isso, refutando sua formulação.

No processo de prova, os alunos precisam definir um método e um procedimento que lhes permitam resolver a situação proposta, enquanto no processo de verificação os alunos precisam definir um método que lhes permitam resolver a situação-problema proposta, sem com isso determinar um procedimento que fundamente seu trabalho. Para o pesquisador, no processo de verificação não existe a intenção de categorizar os níveis de verificação, mas observar como o aluno manipula seus conhecimentos e como se utiliza deles para resolver determinado problema e verificar seu método de resolução. De acordo com (Margolinas, 1993), encontramos como condições necessárias e implícitas correspondentes às condições do processo de prova: a existência de uma finalidade, em que o aluno retoma por sua conta o projeto de resolução e a possibilidade de tomar uma decisão diferente daquela já tomada para chegar ao resultado.

Nesta pesquisa, a palavra decisão é utilizada com o sentido adotado por Margolinas (1993), sendo caracterizada como uma ação tomada por um sujeito que tem consciência de uma escolha a fazer para resolver o problema que lhe é proposto. Para que um aluno vivencie o processo de verificação é necessário que a ação específica seja vivida como uma experiência que permita validar uma proposição. Neste caso, o aluno necessita ter o registro de suas ações para que possa, sempre que for necessário, retornar e assim verificar o método utilizado e, caso o resultado não seja coerente com a situação proposta, retomar sua resolução, identificando as passagens que o conduziu ao erro. Margolinas (1993) enfatiza que a ação aqui considerada não pode ser confundida com a ação da fase de ação abordada na Teoria das

[7] Uma situação será projeto do aluno se lhe propiciar o envolvimento no processo de resolução, de tal forma a assumir para si a responsabilidade de encontrar uma solução.

Situações Didáticas. Quando falamos da ação estamos utilizando o sentido de decisão tomada pelo aluno no momento da resolução.

Margolinas apoiando-se nas ideias de Balacheff, afirma que:

> Poderíamos considerar processo de verificação como a sequência de ações que conduz o aluno (sozinho ou com ajuda) quando ele procura se assegurar por uma ação da validade de um resultado e ou tentar modificar suas ações ou raciocínios que o conduziram a propor o resultado. (MARGOLINAS, 1993, p.168, tradução nossa).

Dessa forma, o papel do professor será o de propor perguntas que levem o aluno à retroação sobre o seu método e assim construir uma comunicação capaz de transmitir suas ideias e formas de lidar com os elementos matemáticos, os quais no caso da nossa pesquisa, correspondem à aritmética, à álgebra e à geometria. O conhecimento desenvolvido durante o estudo de parte desses elementos possibilita que o aluno aja de tal forma que sua decisão seja coerente com o seu projeto.

No contexto da verificação, o erro assume um papel diferente daquele que ocorre no processo de prova. Aqui o erro é provável, o qual abrange tanto o erro evidente, como o erro suposto ou o resultado duvidoso, pois no processo de verificação estas distinções não são importantes. É esperado que o aluno, ao se deparar com uma situação a ser verificada, utilize os conhecimentos anteriores para tomar uma decisão e assim realizar a verificação da mesma.

Durante o processo, defronta-se com um resultado duvidoso, o qual o fará retornar e tomar novas decisões que poderão corrigir parte do método utilizado para finalmente concluir a verificação ou refazer todo o caminho, utilizando um novo método.

A retificação do método ocorrerá se o aluno tiver anotado suas estratégias e assim poderá retomar por conta própria seu trabalho, de tal forma que possa fazer as correções necessárias para realizar a verificação da validade do resultado produzido. A fase de retificação é intrínseca do aluno, como a fase de correção é intrínseca do professor. Como é possível observar, o processo de verificação comporta uma primeira fase que é a fase de validação e no caso do resultado encontrado ser incerto ou um erro, então comporta uma segunda fase de retificação. Dessa forma, o processo de verificação comporta duas fases: validação e retificação, as quais são vinculadas dialeticamente como prova e refutação.

Para Margolinas (1993), as fases de validação e retificação estão ligadas de maneira natural, porém não são relações exclusivas. Uma fase de validação pode ser seguida por uma fase de correção, a qual na maioria das vezes é realizada pelo professor. Para retornar a uma fase de retificação é necessário que o aluno tenha os meios para compreender o que o levou ao erro ou quais seriam os mecanismos que ele poderia utilizar para chegar ao êxito.

O trabalho de retificação é um trabalho de retrospectiva, no qual o aluno trata de retornar sobre o seu trabalho, agora considerando como objeto de estudo. De acordo com Margolinas (1993, p. 185), se o aluno não sabe, o que é causa e o que não é, no desenrolar temporal de suas ações para encontrar um resultado, será forçado a recomeçar toda vez que precisar realizar uma retificação.

Na sala de aula há um contrato didático[8] que obriga o aluno a guardar vestígios de suas resoluções, entretanto, no âmbito de uma situação não didática ou adidática, uma pessoa necessariamente não guarda vestígios de sua resolução. Assim, conforme Margolinas (1993), um processo de resolução é o conjunto de ações e modelos de ações que são levados a efeitos na resolução de um problema. Assim, o processo de resolução depende do sujeito que atua, do momento da ação e do contexto da sua aplicação. O modo como obteve a resolução é o que será retido conscientemente pelo sujeito.

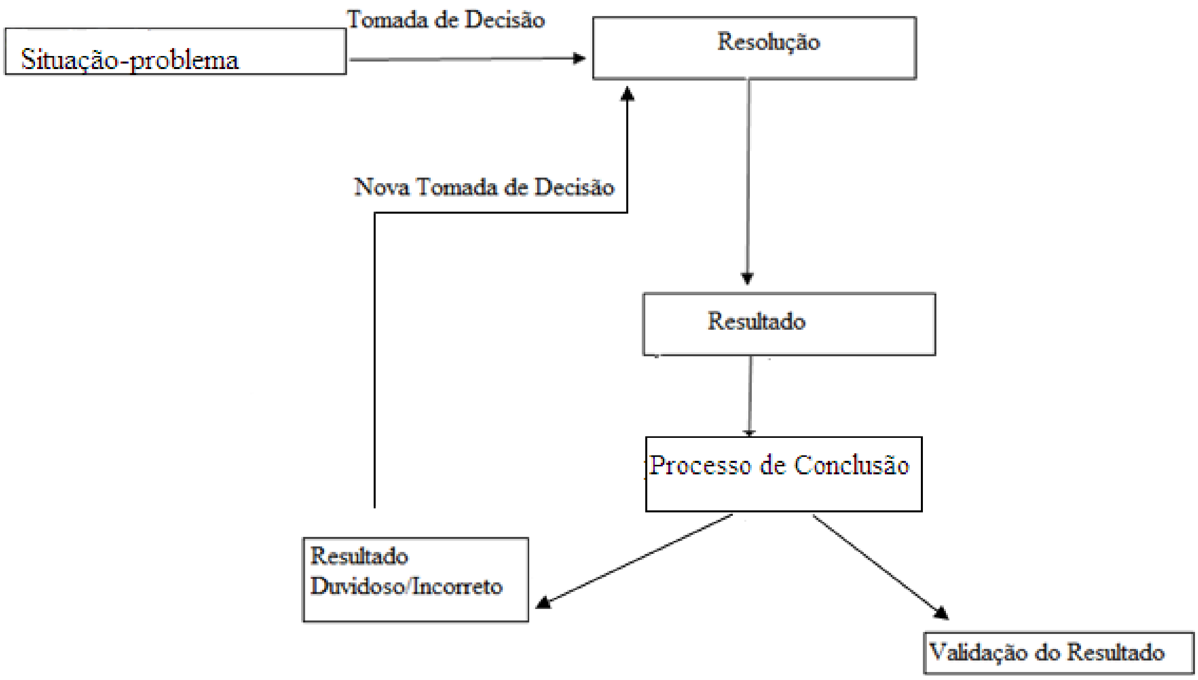


Figura 4 - Fluxograma Descritivo do Processo de Verificação

[8] Segundo Brousseau (2008), contrato didático é um conjunto de normas ou cláusulas, geralmente implícitas, que regulam as obrigações recíprocas do professor e dos alunos, em relação ao projeto de estudo de ambas as partes, que evolui à medida que o processo didático avança.

Elaboramos o fluxograma apresentado buscando sintetizar o processo de resolução, no qual o aluno, de posse de uma situação-problema, toma uma decisão sobre que método utilizará para resolvê-la. Neste momento, o objeto de estudo deixa de ser a situação-problema para ser sua resolução e é neste estágio que será validado o resultado ou levará o aluno a tomar uma nova decisão para encontrar um novo resultado.

A escolha dos momentos adidáticos para nortear a pesquisa foi por acreditarmos que o aluno necessita assumir uma postura de autonomia em relação ao papel do professor, ainda, que a sala de aula deveria ser um ambiente de construção de conhecimento a partir dos conhecimentos do aluno. Nesse aspecto, o processo de verificação propicia momentos nos quais os alunos são conduzidos a criarem projetos de resolução, em que os conhecimentos configuram como ponto de partida para a ação do mesmo.

A diversificação de quadros matemáticos durante o processo de aprendizagem pode contribuir para que o aluno compreenda melhor os conceitos envolvidos e possa utilizá-los como recursos para a validação.

2.3 Jogos de Quadros

Douady (1986) destaca que o professor, ao elaborar e propor uma situação-problema, deve criar circunstâncias nas quais os alunos são conduzidos a trabalharem com diferentes quadros matemáticos. Douady (1986, p. 389) caracteriza um quadro como *constituído de ferramentas de uma parte da matemática, de relações entre os objetos, suas formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações.*

De acordo com Douady (1995), analisando os objetos matemáticos podemos identificar diversos quadros (físico, geométrico, numérico, gráfico, algébrico e outros). Para cada um dos quadros podemos traduzir um conceito em termos de objetos e relações que podemos chamar de significados. Os significantes associados podem eventualmente simbolizar outros conceitos no mesmo quadro. Como exemplo, podemos citar o caso das representações gráficas de funções e das representações no plano do conjunto de elementos materiais, algébricos e outros, cujas propriedades geométricas também podemos estudar.

A mudança de quadro é um meio de os alunos obterem diferentes formulações de um problema sem que sejam necessariamente equivalentes, permitindo um novo acesso às dificuldades encontradas e ao desenvolvimento de ferramentas e técnicas que não surgem nas primeiras formulações.

O jogo de quadros, conforme Maranhão (2008), é uma mudança de quadro na qual o professor intencionalmente apresenta atividades nas quais o aluno deverá mudar de quadro, em movimento de ida e volta entre os mesmos para apresentar suas respostas, isto é, o professor intencionalmente provoca a mudança de quadro e assim conduz à construção de uma nova aprendizagem pelo aluno. Para exemplificarmos nossa compreensão sobre o jogo de quadros, apresentamos a seguinte atividade proposta por Douady (1995) para trabalhar com fatoração e desenvolvimento de expressões algébricas:

> A. Interessa os pontos do plano cujas coordenadas (x, y) estão definidas pela relação: y = $(x+3)\left(8-\frac{x}{2}\right)$. Se denomina E ao conjunto formado por estes pontos.
>
> a. Proponha 5 pares de coordenadas correspondentes a pontos de E e 5 pares de coordenadas correspondentes a pontos que não pertencem a E;
>
> b. Representar graficamente a maior quantidade possível de pontos de E;
>
> c. Existem pontos de E sobre o eixo das abscissas? E sobre o eixo das ordenadas? Em caso afirmativo, dar as coordenadas desses pontos. Se não, dizer por quê;
>
> d. Existem pontos de E que tenham a mesma abscissa? E outros que tenham a mesma ordenada? Se sim, dar exemplos; se não, dizer por quê.
>
> B. O interesse agora é no conjunto de pontos do plano cujas coordenadas (x, y) são definidas pela relação: $y = x^2 - 9$. Denomina–se F ao conjunto formado por estes pontos (responder às mesmas perguntas feitas ao ponto A);
>
> C. Existem pontos comuns entre E e F? Se sim, dar as possíveis coordenadas destes pontos.
>
> (DOUADY, 1995, p. 80-81, tradução nossa)

Nessa atividade estão envolvidos três quadros, a saber: o problema foi formulado no quadro gráfico, entretanto relaciona o quadro algébrico com as leis de formação e o quadro numérico como ambiente de trabalho. Ainda, Douady (1995), na análise do problema, observa que o aluno, com a ajuda de uma calculadora programável poderá perceber que as parábolas terão as concavidades com sentidos opostos e que os vértices não são muito distantes, o que lhe permitirá identificar a intersecção entre os gráficos. Assim, ele necessitará utilizar ferramentas algébricas para determinar as coordenadas desses pontos para provar sua existência, caracterizando o jogo de quadros entre os quadros algébricos e gráficos.

O jogo de quadro conduz frequentemente a resultados não conhecidos, a técnicas novas, à criação de objetos matemáticos novos. O uso desta concepção na pesquisa tem o intuito de que os alunos, ao realizarem as mudanças de quadros, possam validar os seus trabalhos no campo algébrico, aritmético e geométrico. Além da mudança de quadros, investigaremos também a ocorrência de idas e vindas entre os quadros, ou seja, possíveis interações entre eles. Acreditamos que jogos de quadros podem levá-los a estabelecer correspondências entre os diferentes quadros, seus objetos e a validar identidades.

Segundo Douady (1986), o meio no qual podemos conduzir o aluno a vivenciar momentos que simulem uma micro-sociedade de investigação Matemática, serão situações nas quais o contexto do jogo de quadro é fonte de desequilíbrio e permite a estruturação dos conhecimentos. A elaboração de um problema com o intuito de que ocorra a mudança de quadro considera a possibilidade de transferir uma situação do quadro no qual foi elaborado para outro quadro. Nessa elaboração, o professor deve considerar os conhecimentos antigos do aluno, as suas práticas, os seus hábitos. O aluno, ao examinar o problema, é conduzido a traduzir a totalidade ou parte do problema em outro quadro e a interpretar certas perguntas, estabelecendo relações entre quadros diferentes. Douady (1986) alerta que esta correspondência entre os quadros são imperfeitas, quer por razões matemáticas, quer pelos conhecimentos dos alunos que são insuficientes para concluir o processo. Conquanto, as mudanças de quadros permitem fazer progredir o conhecimento em cada um deles.

A comunicação entre quadros e em especial a comunicação com um quadro auxiliar de representação é um fator de reequilibração pelo fato de permitir ao aluno construir imagens mentais, as quais possibilitarão compreender conceitos e assim interagir com as situações propostas pelo professor.

Douady (1995, p. 78) observa que um problema deve atender algumas características, as quais garantirão que o aluno irá participar do processo assumindo a responsabilidade pelo mesmo, realizando a interpretação em quadros diferentes. Dentre suas características apontamos:

- Os conhecimentos do aluno são, em princípio, insuficientes, de modo que resolvam imediatamente o problema;
- A situação-problema deve permitir ao aluno decidir se uma solução encontrada é conveniente ou não;
- O conhecimento que se deseja ver adquirir pelo aluno deve ser o instrumento mais adequado para a resolução do problema ao nível do aluno;

- O problema pode ser formulado em vários quadros entre os quais é possível estabelecer correspondências.

Para compreendermos esta elaboração apresentamos o exemplo seguinte: Entre todos os retângulos de perímetro dado, qual é o que tem a área máxima? Este problema está formulado no quadro geométrico, porém também pode ser formulado no quadro gráfico, numérico e no algébrico. O aluno do 7º ano poderia iniciar com a representação numérica das medidas dos lados e o respectivo cálculo das áreas e, a seguir, construir a representação gráfica para verificar ou confirmar suas conclusões no quadro numérico.

De acordo com Gálvez (1996, p. 33), as condições para a existência de um problema com as características delineadas pelo jogo dos quadros coadunam com as condições necessárias para a existência de situação adidática proposta por Brousseau (1986) na elaboração da Teoria das Situações Didáticas.

Já para Maranhão (2009), Brousseau ao discutir a obra de Douady, considera que do ponto de vista didático é interessante o aluno utilizar diversos quadros durante a resolução de um problema, desde que a iniciativa seja dele. Desse modo, Brousseau divulga seu reconhecimento e sua visão sobre possíveis limitações dos elementos teóricos propostos por Douady.

Dessa forma, o jogo de quadros possibilita ao aluno, ao representar os objetos matemáticos em diferentes quadros, verificar a validade das suas estratégias e assim validar ou refutar sua produção. Neste contexto, cabe ao pesquisador propiciar situações que configurarão em situações adidáticas e que os alunos sintam-se atraídos para assumir a responsabilidade pela resolução do problema apresentado. Nesta pesquisa, procuramos criar atividades nas quais os alunos tivessem condições para iniciarem a análise das situações e a seguir pudessem elaborar um plano de ação com o objetivo de chegarem a uma solução. As atividades foram elaboradas utilizando dois quadros matemáticos de tal forma que o aluno, ao ler a situação, pudesse recorrer a conhecimentos anteriores.

Outros elementos teóricos que subsidiarão nossas análises em relação à concepção, ao uso das letras pelos alunos e sobre a influência das concepções dos professores em relação à atividade algébrica serão apresentados no decorrer do trabalho. Com efeito, são aspectos que permitirão conhecer um pouco mais sobre o agir do aluno que, ao verificar a validade de um resultado, poderá desvelar concepções que estão consolidadas e aquelas que não estão.

2.4 Elementos teóricos sobre álgebra na educação básica

Em relação ao ensino da álgebra no Ensino Básico, é necessária uma reflexão sobre os aspectos envolvendo as concepções da álgebra, o uso das letras e as concepções dos professores e alunos em relação à atividade algébrica para analisarmos as ações dos alunos no momento de realizar a verificação e a respectiva justificativa em relação a sua resposta. Para tanto, buscamos aporte em Usiskin (1995), Trigueros et al (2005) e Lins & Gimenez (2006) para complementar nosso referencial de análise.

2.4.1 Concepções da Álgebra

Para discorrermos sobre as concepções da álgebra, buscamos nos inspirar no que é proposto por Usiskin (1995), o qual procurou analisar a álgebra ensinada e quais sentidos são utilizados no ensino da mesma. Inicialmente, o autor alerta-nos que, dependendo da situação, podemos ter diferentes significados para o uso da letra; sendo assim, para compreendermos esses significados, tomaremos as seguintes equações, as quais têm a mesma forma:

1. $A=\frac{D.d}{2}$
2. $24 = 5y$
3. $cosx = senx.cotgx$
4. $1=n(1/n)$
5. $y= kx$

Analisando as equações supracitadas, o autor chama a atenção para os diferentes empregos da letra em cada uma. A primeira equação representa uma fórmula na qual as letras A, D e d representam valores conhecidos relacionados com a área, a diagonal maior e a diagonal menor de um losango; a segunda refere-se à equação em que o y assume o papel de incógnita; a terceira refere-se a uma identidade algébrica, em que o x é o argumento de uma função; a quarta trata-se de uma propriedade aritmética cujo intuito é a generalização de um modelo aritmético no qual o n aponta um exemplo particular desse modelo e a quinta trata-se da equação de uma função que traduz uma proporcionalidade direta, em que a letra x tem o significado de variável, enquanto o k indica uma constante de proporcionalidade e y o valor dependente. Nota-se que, dependendo do uso das mesmas, teremos diferentes nomes que indicam diferentes usos da ideia de variável.

Para Usiskin (1995), analisando os diferentes usos que são feitos pela letra podemos caracterizar qual a concepção de álgebra presente no currículo. Para ele, as diferentes concepções da álgebra determinam ou estão relacionadas com as finalidades da álgebra, visto que elas correspondem às valorizações dadas aos diversos usos da letra. Para tanto, Usiskin (1995), em seu artigo sobre "O que é álgebra para o Ensino Médio?" identifica quatro concepções de álgebra. A primeira é a álgebra como *aritmética generalizada*, o uso da letra como generalização de modelos aritméticos. Nesta concepção, a atividade central consiste em traduzir e generalizar, isto é, por meio de algumas atividades numéricas, busca-se uma generalização de um modelo. Por exemplo: $5 + 4 = 4+ 5$, $6 + 7 = 7 + 8$, chegando assim a um modelo no qual $a + b = b + a$.

A segunda concepção é a álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos problemas, diferente da anterior na qual generalizamos relações conhecidas entre números; dessa forma, não temos o estatuto de incógnita. Porém, nesta concepção, o problema de generalizar terminou, pois já temos um modelo, conquanto na concepção da álgebra como estudo de procedimentos, tal processo ainda não terminou. Essa concepção é utilizada para resolver certos tipos de problemas os quais dependem de realizar simplificações e solucionar a situação-problema proposta, como por exemplo: Carlos tem o dobro da idade de José. A soma da idade dos dois é 27 anos, qual a idade de cada um? No exemplo, a letra tem o papel de representar valores desconhecidos inicialmente, mas com a aplicação de alguns procedimentos matemáticos, chega-se aos respectivos valores.

A terceira concepção é a álgebra como estudo de relações, pois a palavra chave aqui seria uso da letra como argumento ou parâmetro, em que existe uma variável dependente e uma variável independente. Usiskin (1995) alerta para o fato de muitos educadores pensarem que o ensino da álgebra deveria começar por essa concepção.

A quarta trata da álgebra como estudo das estruturas. Nessa concepção, a letra aparece associada ao estudo das estruturas da Matemática como os corpos, anéis, grupos e domínios de integridade. Mas o que isso está relacionado com a álgebra da Educação Básica? De acordo com Usiskin (1995, p. 18), quando apresentamos uma atividade solicitando que o aluno fatore a expressão $3x^2 + 4ax - 132 a^2$, e ele encontra $(3x + 22a).(x – 6a)$, temos a letra com o significado de indeterminada. A letra foi utilizada com o intuito de verificar propriedades que atribuímos ao trabalho com números reais e expressões algébricas. Assim, quando utilizamos a letra com este significado, estamos lhe dando o status de um objeto arbitrário estabelecido por certas propriedades.

2.4.2 Usos da Letra

Observando a classificação feita por Usiskin (1995), verificamos que a concepção de álgebra depende muito do uso que fazemos da letra, e este uso nos remete aos estudos de Trigueros et al (2005), que pesquisaram os usos da letra presentes nos problemas algébricos. Esses autores evidenciam que o ensino da álgebra escolar é caracterizado pela introdução dos símbolos literais, para representar números.

O aluno, desde os anos iniciais da educação básica, tem acesso ao uso da letra na Matemática quando trabalha, por exemplo, com fórmulas geométricas, não dando à letra uma interpretação algébrica. Assim, ele está habituado a considerar a letra como etiqueta que se refere a entidades específicas ou a inicial de uma palavra, por exemplo, usa-se o b para referir-se a "base; o A para a "área"; h para a "altura", entre outros usos.

Conforme Trigueros et al (2005), os resultados de numerosas investigações mostram que a maioria dos alunos tem sérias dificuldades para desenvolver uma compreensão adequada do uso das letras na álgebra e alcançar uma habilidade satisfatória para trabalhar com elas.

Dessa maneira, os alunos na maioria das vezes memorizam regras e métodos para resolver equações e/ou manipular expressões sem compreender o significado da letra em cada situação. De acordo com Trigueros et al (2005, p. 14):

> [...] a maioria dos alunos aprendem a resolver as equações de segundo grau, porém isto não implica que não tenham problemas com a interpretação das variáveis e sua manipulação, recorrendo à memorização dos métodos.

Desta feita, o aluno pode cometer alguns erros ao trabalhar com a álgebra por não conseguir dar sentido ao uso que se faz das letras e de como se deve trabalhar com elas. E ainda, no esforço de lhe dar algum sentido, recorre a sua experiência aritmética que, em geral, não foi ensinada com o propósito de facilitar a aprendizagem da álgebra.

De acordo com Trigueros et al (2005), o aluno passa anos estudando quase que exclusivamente com os números e de repente os símbolos literais aparecem, em geral, sem maiores explicações, e sem situações que permitiriam delinear essa introdução. Dessa forma, eles começam a apresentar algumas dificuldades em relação à concepção que fazem do uso da letra como:

- Dificuldade para diferenciar entre os distintos usos da letra;
- Dificuldade para interpretar a letra quando aparece acompanhada de um coeficiente ou tem um expoente, por exemplo, $m^2 + m^2 = 4m$, indicando dificuldade para operar com os expoentes e diferenciá-los dos coeficientes;
- Dificuldade para aceitar uma expressão aberta ($x + 7$, $3x$) como resposta válida;
- Tendência a ignorar a letra que representa um parâmetro ou a atribuir um valor;
- Dificuldade para reconhecer a variação de duas letras relacionadas.

De acordo com Trigueros et al (2005) e analisando as pesquisas realizadas sobre o assunto, podemos identificar algumas propostas para melhorar a aprendizagem da álgebra. Dentre elas destacamos:

1. A generalização, em que se enfatiza o reconhecimento de padrões (numéricos e geométricos) e de métodos gerais, expressando as regras e os métodos pelo uso dos símbolos literais;
2. As funções, esta proposta sugere o ensino da álgebra por meio do trabalho com quantidades relacionadas, até chegar às expressões simbólicas das relações usando as letras e, em consequência, explorar as relações;
3. A resolução de problemas, este enfoque enfatiza as análises dos problemas e a resolução de equações;
4. Consideração da álgebra como uma linguagem com sua própria gramática. Trata-se de um ensino estrutural da álgebra.

Além disso, eles identificaram três formas diferentes para o uso e a interpretação da letra, classificadas como categorias, a saber:

- Uso da letra como incógnita, ou seja, a letra que aparece numa expressão algébrica inicialmente é desconhecida, mas com a aplicação de algumas regras aritméticas e algébricas é possível encontrar um valor para ela. Dessa forma, conforme aponta Trigueros et al (2005), para que o trabalho com a letra no sentido de incógnita tenha sucesso é necessário:

I1. Reconhecer e identificar numa situação-problema a presença de algo desconhecido que pode ser determinado considerando as limitações do problema;

I2. Interpretar a variável simbólica que aparece na equação, como um ente que pode assumir valores específicos;

I3. Substituir a variável pelo valor ou valores que fazem da equação um enunciado verdadeiro;

I4. Determinar a quantidade desconhecida que aparece em equação, ou nos problemas, realizando operações algébricas, aritméticas ou ambos os tipos;

I5. Simbolizar as quantidades desconhecidas, identificadas em situações específicas e utilizadas para formular equações;

- Uso da letra como número generalizado, ou seja, a letra é usada para representar uma situação qualquer, uma regra ou um método, ou ainda, relacionar expressões entre si. Dessa forma, o aluno perante uma expressão geral que pode ser apresentada ou formulada pelo mesmo, deverá interpretar os símbolos envolvidos como números genéricos ou números indeterminados os quais não se pode determinar, nem é necessário determinar, mas sim manipular expressões, ou seja, fatorar ou simplificar as expressões quando for solicitado pelo problema. De acordo com Trigueros et al (2005), para que o trabalho na sala de aula tenha o efeito necessário em relação a este tipo de uso da letra é necessário:

G1. Reconhecer padrões, perceber regras e métodos em sequências e em problemas similares;

G2. Interpretar uma variável simbólica como representação de uma entidade geral, indeterminada que pode assumir qualquer valor;

G3. Deduzir regras e métodos gerais, em sequências e em famílias de problemas;

G4. Manipular (simplificar, desenvolver) a variável simbólica;

G5. Simbolizar enunciados, regras e métodos gerais.

- Uso da letra como relação funcional, nesse caso, para trabalhar com a letra com o sentido de relação funcional é necessário ser capaz de reconhecer, primeiramente, que em certas situações estão envolvidas quantidades cujos valores estão relacionados e, posteriormente, que em tais situações a variação de uma quantidade afeta a variação da outra. Segundo Trigueros et al (2005), para o trabalho alcançar sucesso é necessário:

  F1. Reconhecer correspondências entre variáveis relacionadas, independentemente das representações utilizadas (tabelas, gráficos, problemas verbais, expressões analíticas);

  F2. Determinar os valores da variável dependente pelo valor dado a uma independente;

  F3. Determinar os valores da variável independente dado o valor da dependente;

  F4. Reconhecer a variação comum das variáveis envolvidas em uma relação independentemente da representação utilizada (tabelas, gráficos, expressões analíticas);

  F5. Determinar os intervalos de variação de uma variável dado o intervalo da variação da outra;

  F6. Simbolizar uma relação funcional baseada na análise dos dados de um problema.

Essas categorias são identificadas nas orientações dos PCNs de Matemática (1998) como concepções de ensino a serem desenvolvidas durante o Ensino Fundamental. Conforme Bonadiman (2007) afirma, são preocupações indicadas nesse documento como concepções de ensino da álgebra presente em muitas salas de aulas.

De acordo com os PCNs (1998, p. 116), há uma predominância no trabalho da letra como uma incógnita, quando podemos descobrir seu valor por meio da aplicação de procedimentos de cálculos e o uso da letra como relação funcional; neste caso, os parâmetros alertam sobre a questão de professores anteciparem esse trabalho para os anos finais do Ensino Fundamental, o que seria desenvolvido no Ensino Médio. Dessa forma, buscamos verificar quais as concepções dos professores em relação a atividade algébrica e como essas concepções influenciam a aprendizagem algébrica.

2.4.3 Atividade Algébrica

Na atividade algébrica, o papel do professor em planejar e propiciar situações nas quais os alunos possam vivenciar esses diferentes usos da letra é de suma importância. O uso das letras durante o ensino de álgebra perpassa pela concepção do professor sobre o que é atividade algébrica e, segundo Lins e Gimenez (2006), as discussões atuais sobre o que é álgebra baseiam-se no aspecto do conteúdo.

De acordo com os autores supracitados, a descrição do que é álgebra fica presa aos conteúdos e dessa forma sabemos que este ou aquele conteúdo é álgebra e deve ser trabalhado. A falta de uma definição desprendida de conteúdos para a educação algébrica impossibilita dizer se existiriam outros tópicos que deveriam ser incluídos na álgebra ou não, e como deveria ser organizado este currículo, respeitando a relevância de cada assunto, ou mesmo se a relevância dada a determinados conteúdos no currículo tradicional é mesmo relevante.

Lins e Gimenez (2006) tentaram caracterizar a atividade algébrica segundo a concepção do professor no momento de elaborar as atividades para o ensino da álgebra na sala de aula. A primeira concepção envolve o grupo de educadores que acreditam que trabalhar com álgebra consiste em aprender o algoritmo (técnica) e a seguir desenvolver exercícios. Dessa forma, fazer atividades algébricas significa "calcular com letras", não havendo uma reflexão sobre esta prática de ensino baseada na tradição, tradição esta criticada pelos autores e aportada nas pesquisas que demonstram não ser eficiente.

A segunda concepção segue uma linha letrista e envolve o grupo de educadores que acredita que a formalização de estruturas algébricas ocorre após a manipulação de materiais concretos, a qual utiliza elementos da geometria associada à álgebra. O uso desses materiais nas atividades algébricas teria o intuito de permitir a compreensão das ideias algébricas possibilitando que ocorresse a abstração, o que facilitaria o trabalho algébrico. Ainda, esta concepção segue uma linha letrista, porém com um aporte em materiais concretos ou situações concretas, as quais utilizam elementos da geometria associados à álgebra.

A terceira concepção, de acordo com Lins e Gimenez (2006) envolve o grupo de educadores que acreditam que o estudo da álgebra deve partir de situações concretas retiradas de situações reais, as quais buscam objetos matemáticos que possibilitam representar, por meio de modelos matemáticos, as situações estudadas. Nessa abordagem, a álgebra deixa de ocupar o papel primário de estudo e se torna uma ferramenta para compreender o mundo.

Para Lins e Gimenez (2006), os “letristas” e os “letristas-facilitadores”, a seu modo, estão equivocados. Os letristas por ignorarem que o “texto com letras” por si não carrega significados, dessa forma fica reduzido à técnica/exercício. Ainda, Lins e Gimenez afirmam que essa concepção de atividade algébrica é a que predomina nos livros didáticos utilizados nas escolas atuais. A predominância, segundo os autores, pode estar relacionada a fatores como “falta de preparo” dos professores, o que impossibilitaria identificar alternativas a esse processo ou a repetição dessa prática por tanto tempo, aliada ao papel do livro didático que se reveste de autoridade, determinando para a maioria dos professores que a atividade algébrica é “cálculo literal”.

Os letristas-facilitadores têm a preocupação de oferecer métodos de trabalhos nos quais o aluno possa vivenciar materiais concretos, cuja aprendizagem se tornaria mais fácil com a generalização. Lins e Gimenez, citando as pesquisas de Hart e Sinkinson, destacam que a passagem do concreto para a abstração não é algo natural, pelo contrário, há um vazio que precisa ser preenchido encontrando materiais intermediários para que assim possa realizar esta passagem, contribuindo para a aprendizagem. Ainda, Lins e Gimenez (2006) levantam outra hipótese de que o que ocorre na manipulação de materiais concretos (conceitos, procedimentos) não se repetiria na abstração, constituindo, assim, quadros diferentes sem uma ligação direta, configurando situações diferentes com tratamento matemático diferente.

O uso de quadros matemáticos diferentes configura-se como instrumento principal para a verificação da validade das ações no contexto desse trabalho. Com esse foco, procuramos elaborar nosso instrumento de investigação optando por atividades nas quais os alunos precisam analisar as resoluções e assim possam verificar a validade das ações.

Os PCNs (1998) na seção “Orientações Didáticas para o Terceiro e Quarto Ciclos” apresentam um quadro no qual sintetiza o trabalho da álgebra proposto para os anos finais do Ensino Fundamental e nesse quadro percebemos uma relação entre as concepções algébricas proposta por Booth (1995) e o uso das letras proposto por Trigueros et al (2005), assim como as concepções de atividades algébricas propostas por Lins e Gimenez (2006).

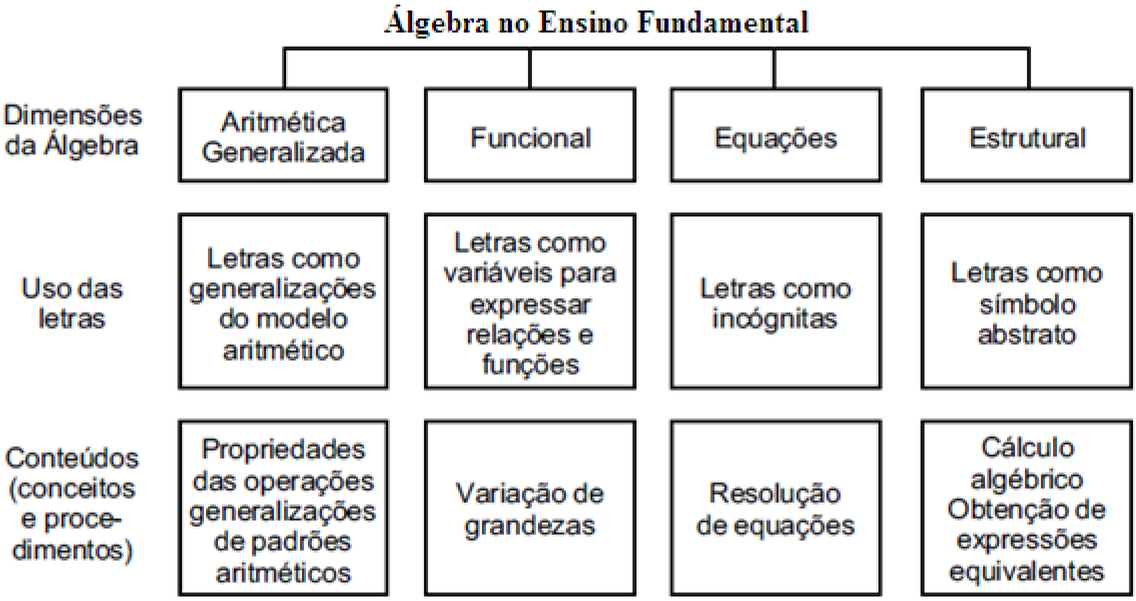


Figura 5 - Quadro síntese do trabalho algébrico proposto pelos PCNs

No quadro apresentado evidencia-se a sugestão de se trabalhar as quatro concepções propostas por Booth associadas com o uso das letras, de acordo com Trigueros et al (2005), porém o que se percebe nos livros didáticos é o uso excessivo de atividades que priorizam a manipulação de cálculo algébrico dissociado de uma significação que, segundo Lins e Gimenez, caracteriza uma concepção "letrista" da atividade algébrica.

Sendo assim, optamos em utilizar nesse trabalho a concepção algébrica estudo de estruturas, visto que pretendemos que os alunos, utilizando diferentes quadros, busquem verificar a validade de suas respostas e/ou dos resultados apresentados por alunos fictícios. Assim, nosso trabalho busca incentivar o uso da letra como número generalizado e, se possível, como símbolo abstrato, no intuito de que os alunos percebam a generalidade dos cálculos e identifiquem expressões equivalentes no quadro algébrico. Para tanto, optamos em apresentar atividades que não se diferenciem muito da prática adotada pelo professor em consonância com o livro didático, visto que segundo Douady (1986) propõe no Jogo de Quadros e Brousseau (1986) na Teoria das Situações Didáticas, uma situação-problema deve levar em consideração os conhecimentos antigos dos alunos para que possam se engajar na resolução dos problemas a eles propostos.

Em relação ao desenvolvimento da parte experimental da pesquisa, nos inspiramos no referencial metodológico da Engenharia Didática, do qual apresentamos a seguir alguns dos principais aspectos que o norteiam.

2.5 Engenharia Didática como referencial metodológico

Para alcançarmos o objetivo dessa pesquisa, trabalhamos com uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal da cidade de Campo Grande/MS. A turma era composta de 32 alunos, dos quais foram escolhidos 8 alunos que participaram de todos os encontros, visto que durante a pesquisa ocorreram vários imprevistos, dentre eles: chuva, alunos doentes, ingresso de novos alunos na turma, entre outros, o que ocasionou algumas variações no número de alunos pesquisados.

O uso da Engenharia Didática remete o trabalho do pesquisador a ações semelhantes àquela de um engenheiro (Artigue, 1996), no qual ambos precisam, antes de iniciar uma obra (pesquisa), pensar em aspectos possíveis de serem previstos em relação à ação a ser desenvolvida. Na educação, o uso da Engenharia cria uma falsa interpretação de que o pesquisador tem antes mesmo do início da investigação todos os resultados e que a investigação é somente para verificar a validade dos mesmos. Na realidade, o que é previsto são as possíveis situações que possam tornar-se obstáculos à investigação. Dessa forma, o pesquisador poderá pensar em algumas ações ou provocações que levariam ao prosseguimento da investigação.

A Engenharia Didática propõe que o pesquisador desenvolva quatro etapas distintas, mas que podem concomitantemente ter algumas fases imbricadas. A primeira trata de uma análise preliminar, em que é levantado o aspecto epistemológico dos conteúdos visados pelo ensino, o ensino usual e seus efeitos, as concepções dos alunos, as dificuldades e obstáculos que marcam suas avaliações e o campo de coação, no qual se situará a realização didática efetiva. Essas análises deverão ter como suporte, pesquisas já realizadas sobre aspectos epistemológicos do conteúdo do ponto de vista do professor e do aluno, bem como livros didáticos e documentos oficiais que norteiam o ensino no país. A leitura de trabalhos já publicados sobre o tema permitirá a identificação de nuances que ainda não foram abordadas e que poderiam se exploradas na pesquisa como o objeto da mesma.

> Numa investigação de engenharia didática, a fase de concepção efetua-se apoiando-se num quadro teórico didático geral e em conhecimentos didáticos já adquiridos no domínio estudado, mas também apoiando-se num certo número de análises preliminares que são, na maior parte dos casos:
>
> - a análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
> - a análise do ensino habitual e dos seus efeitos;

- a análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;
- a análise do campo de constrangimentos no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
- e, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação.

(ARTIGUE, 1996, p. 198)

A análise preliminar deve possibilitar uma determinação do objeto de estudo, dimensionando o alcance da pesquisa dentro do prazo que o pesquisador terá para desenvolvê-la.

É nessa etapa que o pesquisador deve investigar as bibliotecas disponíveis das universidades para encontrar o máximo de material sobre o objeto da pesquisa. A partir das leituras e investigações realizadas, o pesquisador terá definido seu objeto de pesquisa, seus objetivos e a questão norteadora.

A segunda etapa trata da concepção e da análise *a priori*, em que o pesquisador delimita algumas variáveis sobre as quais irá agir, definindo assim as variáveis que manipulará durante a elaboração das sessões. Artigue (1996) afirma que o objetivo da análise *a priori* é de determinar como as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos alunos e seu sentido.

> O objetivo da análise *a priori* é, pois, determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, fundamenta-se em hipóteses; será a validação dessas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*. (ARTIGUE, 1996, p. 205)

Ainda, a análise *a priori:*

> tradicionalmente, esta análise, que comporta uma parte descritiva e uma parte preditiva, é uma análise centrada nas características de uma situação adidática que se pretendeu constituir e que se vai procurar devolver aos alunos:
>
> – descrevem-se as escolhas efetuadas ao nível local (remetendo-as, eventualmente, para escolhas globais), e as características da situação adidática que delas decorrem,
>
> – analisa-se o peso que o investimento nesta situação pode ter para o aluno, particularmente em função das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele dispõe, uma vez operada a devolução, num funcionamento quase isolado do professor,
>
> – preveem-se os campos de comportamentos possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efetuada permite controlar o sentido desses campos e assumir, em particular, que os comportamentos esperados, se intervierem, resultarão claramente da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem.

(ARTIGUE, 1996, p. 205)

No contexto da análise a priori, comportamento é utilizado com o sentido de compreender a ação do aluno perante a resolução de uma situação-problema. Em nossa pesquisa, as variáveis escolhidas são a figura no enunciado (presença ou ausência), tipos de expressões (simplificada ou não) e conceitos envolvidos (área e/ou perímetro). As variáveis identificadas juntamente com as análises preliminares realizadas possibilitarão analisar possíveis respostas às questões, bem como possíveis bloqueios dos alunos. O surgimento de bloqueios necessitará de ações do pesquisador para prosseguir o processo de investigação. É importante ressaltar que é fundamental o pesquisador buscar fundamentações que darão confiabilidade a suas inferências em relação a bloqueios[9], erros e acertos.

Ainda nesta segunda etapa, cabe ao pesquisador elaborar a sequência didática, a qual deve ser composta por certo número de sessões planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar as produções dos alunos durante o desenvolvimento das sequências. Durante as sessões desta pesquisa será observado como os alunos transitam entre os conceitos aritméticos, geométricos e algébricos.

Em nossa pesquisa, a sequência foi composta por nove sessões, nas quais foram trabalhados os conceitos aritméticos, algébricos e geométricos necessários para os alunos validarem as respostas dadas às atividades, as quais envolviam o conceito de área, perímetro, simplificação de termos semelhantes, propriedade distributiva e figuras geométricas. Cada sessão foi analisada para possíveis correções de rumo no processo de investigação, em relação às sessões seguintes.

A terceira etapa é a experimentação, em que o pesquisador aplica as atividades da pesquisa junto à população de alunos. É nessa etapa que se estabelece o contrato didático, em que de fato ocorre a aplicação dos instrumentos de pesquisa e o registro das observações feitas durante a experimentação. O desenvolvimento dessa etapa em nossa pesquisa consistiu na aplicação das atividades durante as sessões, com duração de uma hora/aula cada, em que os alunos realizaram as anotações nas fichas de atividades, as quais foram respondidas utilizando caneta, o que permitiu analisar as tentativas, os conceitos e as propriedades utilizados para encontrar as soluções. Ainda nessa fase, ao final de cada sessão foi realizada uma primeira análise dos dados coletados confrontando com as expectativas levantadas na análise *a priori*.

[9] Bloqueios entendemos como sendo situações nas quais os alunos não conseguem avançar nas suas resoluções por motivo de não dominarem todos os conhecimentos antigos o que o impossibilitaria de estruturar uma estratégia de resolução.

Esse controle mais próximo possibilitou detectar aspectos que precisavam ser corrigidos, para que não ocorresse o desestímulo dos sujeitos e assim, a obstrução do processo de investigação.

A última etapa trata da análise *a posteriori* e da validação dos dados coletados e conforme Artigue (1996), nessa etapa o pesquisador debruça-se sobre os dados coletados durante a experimentação por meio das observações realizadas durante as sessões, bem como das produções dos alunos. É também nessa etapa que se dá a interpretação dos dados que constam nos protocolos produzidos pelos alunos. Muitas vezes, para melhor compreensão dos dados, tornam-se necessárias informações complementares como: questionários, entrevistas individuais ou em grupos, realizados tanto durante a experimentação quanto no final dela. Durante a análise dos dados realiza-se a confrontação das análises a priori e a posteriori que permitirá validar ou refutar as hipóteses levantadas no início.

> apoia no conjunto dos dados recolhidos quando da experimentação: observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos na sala de aula ou fora dela. [...] é no confronto das duas análises, *a priori e* a posteriori, que se fundamenta essencialmente a validação das hipóteses envolvidas na investigação. (ARTIGUE, 1996, p. 208)

Neste trabalho, não foi algo que ocorreu ao final do conjunto de sessões, mas realizado em paralelo com as mesmas. Para tanto, foram utilizados os protocolos dos alunos para confrontar com as análises *a priori.* Lembrando que a análise *a priori* é descritiva de possíveis ações a serem adotadas pelos alunos, na qual o pesquisador pode intervir e também preditiva.

A validação da pesquisa conforme Artigue (1996) ocorrerá pela confrontação da análise *a priori* com a análise dos dados coletados à luz do referencial teórico adotado, de tal maneira que se possamos verificar os avanços e dificuldades em relação aos aspectos levantados na análise *a priori*.

Analisamos nessa etapa, as validações realizadas pelos alunos por meio da confrontação de resultados de cálculos em diferentes quadros, procurando avanços e identificando dificuldades ao realizarem o processo de verificação por meio das mudanças de quadros em um processo dialético envolvendo as igualdades entre expressões algébricas.

CAPÍTULO III

3. ATIVIDADES DA EXPERIMENTAÇÃO EM SALA DE AULA

A seguir apresentamos as situações-problema que compõem a sequência didática com as respectivas análises *a priori*. Apresentamos inicialmente as variáveis com as quais trabalhamos durante a elaboração da sequência didática, de tal forma que provocassem mudança de atitude nas ações dos alunos no momento de resolver determinada atividade. Ainda, procuramos identificar variáveis didáticas envolvidas e possíveis resoluções utilizando os quadros algébrico, aritmético e geométrico, assim como a organização didática em relação à condução dos problemas durante a experimentação.

Além disso, procuramos prever possíveis dificuldades dos alunos e questionamentos a serem apresentados a eles de forma que pudessem continuar envolvidos nos problemas propostos. Para tanto, utilizamos os conteúdos programáticos e o livro didático do 8º ano, considerando que eles já haviam tido contato com os procedimentos para operar com letras, as regras para simplificar expressões algébricas, bem como os procedimentos para calcular a área e o perímetro de uma figura retangular.

3.1 Variáveis da pesquisa

3.1.1 Presença da figura no enunciado

Consideramos que apresentar ou não figuras no enunciado da atividade constitui uma variável que pode assumir os seguintes valores: estar presente no enunciado, o que pode favorecer o trabalho de compreensão do enunciado pelo aluno, ou não estar presente no enunciado, o que pode exigir do aluno uma necessidade maior de abstração. Acreditamos que a construção da figura correspondente ao enunciado seja um fator de dificuldade.

3.1.2 Conceito de área e perímetro

O conceito presente no enunciado pode provocar os alunos a revelação de possíveis dificuldades em relação aos procedimentos a serem desenvolvidos, visto que a pesquisa realizada por Teles (2007) aponta que os alunos têm dificuldades para distinguir o procedimento para calcular a área de uma figura e o perímetro da mesma figura.

Essa variável pode revelar quais aspectos do estudo do cálculo de perímetro e de área não ficaram claros para os alunos, o que provocaria erros quando realizamos mudança do quadro geométrico para o algébrico.

3.1.3 Tipo de expressão no enunciado

O tipo de expressão no enunciado poderá revelar possíveis dificuldades em relação aos procedimentos a serem desenvolvidos, visto que pesquisas realizadas (Chalouth e Hercosvics 1995) apontam que os alunos têm dificuldades para aplicar algumas propriedades aritméticas para a simplificação de expressões algébricas.

Dessa forma, a pesquisa pode revelar quais aspectos do estudo com igualdades entre expressões algébricas não ficaram claros para os alunos, o que provocaria erros nas operações envolvendo a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, bem como a associação de expressões algébricas com a representação geométrica correspondente à área e ao perímetro quando mudamos do quadro geométrico para o algébrico e vice-versa.

3.2 Análise a priori das situações-problema propostas

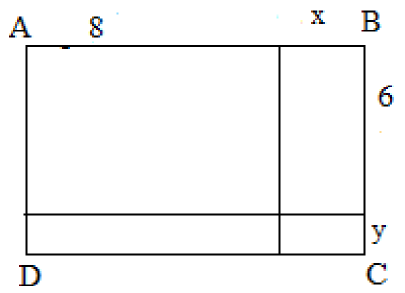
Na elaboração da sequência, optamos por explorar situações didáticas envolvendo pelo menos dois quadros, de tal forma que o aluno utilizasse o seu conhecimento nas resoluções em ambos os quadros. A preocupação em observar esses elementos está relacionada ao fato de garantir que os alunos tenham condições de iniciar a ação e que possam não se desestimular durante o processo inicial, mas sim, que tenham condições de buscar estratégias que lhes permitam chegar a condições de aprendizagem em relação ao processo de verificação.

Com efeito, faremos a análise das atividades que foram propostas aos alunos, no intuito de levantar possíveis estratégias e dificuldades para reconhecer os resultados duvidosos. Tal ação define quais questões serão realizadas durante o processo de experimentação para que este não seja interrompido em razão das dificuldades dos alunos.

3.2.1 Atividade 1

Para a **sessão 1** os alunos receberão a folha contendo o enunciado da situação didática. Ainda serão orientados a não utilizarem lápis, mas a resolverem tudo à caneta e, caso percebam algum erro na resolução, deverão passar um traço abaixo de sua resolução e realizar a nova formulação abaixo do mesmo traço. Utilizaremos aqui a denominação **atividade** tanto para situação-problema no sentido de Brousseau, quanto para problema ou exercício normalmente utilizado na prática de sala de aula. A atividade será realizada individualmente e, em seguida, será feita uma discussão coletiva das estratégias por eles utilizadas para responderem a atividade proposta.

Atividade 1 – Carlos ao calcular a área e o perímetro da figura abaixo encontrou:
Perímetro (ABCD) = 28 + 2x + 2y
Área (ABCD) = xy + 6x + 8y + 48



A resposta apresentada por Carlos está correta? Justifique.

O objetivo principal desse problema é propiciar ao aluno a retomada dos conceitos de área e perímetro como ferramenta para verificar a validade de igualdades envolvendo expressões algébricas do tipo (a+b).(c+d) e 2(a + b) + 2(c + d). A atividade envolve dois quadros matemáticos, o algébrico e o geométrico, os quais os alunos poderão utilizar, bem como utilizar um terceiro quadro matemático, o aritmético. A interação entre os quadros possibilitará ao aluno estabelecer estratégias de resolução, conforme os conhecimentos antigos já dominados e necessários para iniciarem os problemas; para tanto, nessa atividade trabalhamos com as variáveis didáticas: a presença da figura no enunciado, tipo de expressão e conceitos de área e perímetro.

Na a**tividade 1** espera-se que o aluno inicialmente realize os cálculos para determinar o perímetro e a área da figura com base nos dados fornecidos. Em seguida, que a partir dos resultados encontrados, verifique os resultados obtidos pelo aluno fictício "Carlos", utilizando o **cálculo algébrico** e faça uso de seus cálculos para justificar a sua resposta. Espera-se ainda que os alunos atribuam **valores numéricos** para x e y, tanto na figura como nas expressões correspondentes à área e ao perímetro da figura, com o intuito de verificar se, partindo de quadros diferentes, chegam ao mesmo resultado. Por exemplo, x = 3 e y = 1 obtendo, após a substituição, a expressão numérica 28 + 2.3 + 2.1= 28 + 6 + 2 = 36 para o cálculo do perímetro, e 3.1 + 6.3 + 8.1 +48 = 3 +18 + 8 + 48 = 77 para o cálculo da área.

Substituindo esses valores na figura obtêm-se comprimento igual a 11 e largura 7. Calculando o perímetro, encontra-se 11 + 7 + 11 +7 = 36 e área igual a 11.7 = 77, o que os levariam a perceber a igualdade entre as expressões dadas por Carlos, correspondentes à área e ao perímetro da figura apresentada. Alguns alunos, após verificarem que o resultado apresentado pelo aluno fictício Carlos está correto, poderão responder simplesmente que sim ou não e apresentar uma justificativa para sua resposta, que caracterizamos como uma **ausência de justificativa**. Nesse caso, ao perceber que isso ocorreu, o pesquisador deve questioná-lo novamente.

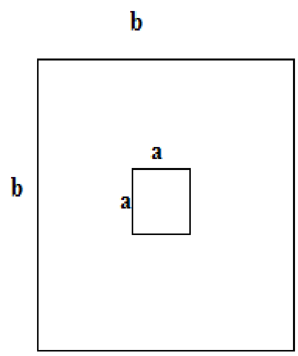
É provável que alguns alunos efetuem errado o cálculo do perímetro e/ou da área, levando-os a responderem que a resposta do aluno fictício Carlos está errada. Essa conclusão pode ser ocasionada pela dificuldade que possuem em fazer a distinção entre os **conceitos de área e perímetro**, conforme Teles (2007) verificou em sua pesquisa sobre o ensino de área de figuras. Por outro lado, os alunos podem errar os cálculos ao tentarem calcular o perímetro e a área da figura. Podem ainda, demonstrar **dificuldade para aceitar a aparente ausência da propriedade fechamento** nos cálculos algébricos e, dessa forma, poderão somar letras distintas com o intuito de encontrar um resultado (Bonadiman, 2007). Prevemos ainda, que eles podem errar quando da substituição dos valores na expressão e realizarem a **justaposição dos números** confundindo com a aritmética, por exemplo, no lugar de ler 2.3 (dois vezes três) lerem 23 (vinte e três) e no lugar de 2.1 (dois vezes um) lerem 21 (vinte e um) e nesse caso encontrar como resultado 72, conforme sinalizado por Booth (1995), em sua pesquisa com alunos ingleses.

3.2.2 Atividade 2

Na sessão **2** os alunos individualmente deverão resolver a **atividade 2** e novamente serão orientados sobre a importância de escreverem todas as estratégias utilizadas na folha e com caneta azul. O objetivo dessa atividade é propiciar ao aluno a retomada dos conceitos de área como ferramenta para verificar a validade de igualdades envolvendo expressões algébricas do tipo (a + b).(a - b). Nessa atividade exploramos as variáveis didáticas: presença da figura no enunciado, conceito de área e o tipo de expressão no enunciado.

Atividade 2 – Um professor pediu aos alunos que resolvessem o seguinte problema:

- No centro de uma praça quadrada de lado **b**, será construído um canteiro quadrado de lado **a**, como mostra a figura:



a) Qual é a expressão que representa a área da praça, que ficou fora do canteiro?

b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana	$b^2 + a^2$	João	$b(b-a) + (b-a)a$	Paulo	$2b + 2a$
Lucas	$2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia	b^2-a^2	Bia	$b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique.

A atividade envolve os quadros algébrico e geométrico, de tal forma que o aluno poderá inicialmente utilizar-se dos conhecimentos geométricos para iniciar a resolução, a seguir, passar para o quadro algébrico para resolver as operações pertinentes e, por último, como forma de verificar se sua interpretação está correta, poderá utilizar o quadro aritmético para verificar sua validade, conforme descrito abaixo.

No **item a** da **atividade 2** espera-se que o aluno inicie pelo cálculo da área da praça, determinando a área total por b^2 e depois a do canteiro por a^2, a qual deverá ser subtraída da área total, obtendo b^2-a^2. Outra forma de calcular a área da praça seria deslocando o canteiro para um dos vértices formando assim dois retângulos, cujas medidas são b(b-a) e (b-a)a, obtendo o mesmo resultado. Ainda poderá deslocar para um vértice e decompor o retângulo correspondente à praça em um quadrado de lado b-a e dois retângulos de medidas a(b-a), obtendo assim $(b-a)^2+a(b-a)+a(b-a)$, que resulta em $b^2-2ab+a^2+2ab-2a^2 = b^2-a^2$ (**cálculo algébrico).** Após realizar um dos cálculos acima, é esperado que o aluno indique que os alunos Lúcia, João e Lucas acertaram, utilizando um dos cálculos realizados anteriormente no item **a** para justificar sua resposta.

Outra forma de justificar é atribuindo **valor numérico** para **a** e **b** tanto na figura como nas expressões dadas no item **b.** Por exemplo: a = 6 e b = 2, encontrando como área total da praça 6.6 = 36 e área do canteiro 2.2 = 4, subtraindo da área da praça a área do canteiro obtendo 36 – 4 = 32 u.a, a seguir substituindo nas expressões do item **b** teremos (Ana $\rightarrow$ $6^2 +2^2 = 36 + 4 = 40$; João $\rightarrow$ $6.(6 - 2) + (6 - 2)2 = 6.4 + 4.2 = 24 + 8 = 32$; Paulo $\rightarrow$ $2.6 + 2.2 = 12 + 4 = 16$; Lucas $\rightarrow$ $2.2(6-2) + (6-2)^2 = 4. 4 + 4^2 = 16 + 16 = 32$; Lúcia $\rightarrow$ $6^2-2^2 = 36 – 4 = 32$; Bia $\rightarrow$ $6^2 - 4.2 = 36 – 8 = 28$) determinando, assim, que somente as respostas apresentadas por Lúcia, João e Lucas são corretas.

E, por último, os alunos poderão dizer que os três acertaram e justificarem dizendo que sim (**ausência de justificativa**). Diante de respostas desse tipo, o pesquisador deve questioná-los, perguntando Por quê? ou Como vocês descobriram?

Os alunos poderão responder erroneamente se calcularem a área da praça, mas se esquecerem de subtrair a área do canteiro. Ainda, os alunos poderão errar suas respostas ao tentarem resolver as expressões dadas no item **b**, não aplicarem a **propriedade distributiva** e assim realizarem a soma algébrica obtendo um resultado incorreto (Booth, 1995).

3.2.3 Atividade 3

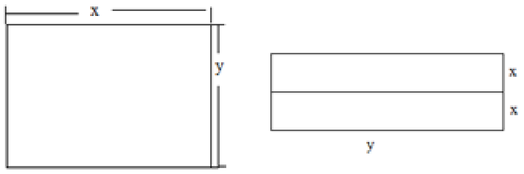
A **atividade 3** tem por objetivo propiciar ao aluno a retomada dos conceitos de perímetro como ferramenta para verificar a validade de igualdades envolvendo expressões algébricas do tipo 2(a + b) + 2(c + d), bem como a utilização de equivalência para representar segmentos com mesma unidade de medida. Os alunos trabalharão individualmente na produção de estratégias que lhes permitirão verificar a validade das afirmações apresentadas, bem como utilizar seus conhecimentos antigos para constituir novos conhecimentos, os quais passarão a ser objeto de seu estudo. Nessa atividade, optamos em trazer as variáveis didáticas: presença da figura no enunciado, conceito de perímetro e tipo de expressão no enunciado.

Atividade 3- A professora de Antônio solicitou que ele simplificasse as expressões

$x + y + x + y$ e $2x + y + 2x + y$, correspondentes ao perímetro de duas figuras retangulares dadas e, em seguida, construísse as respectivas figuras correspondentes às expressões.

Antônio simplificou as expressões e construiu as seguintes figuras retangulares correspondentes às expressões dadas pela professora:

$x+y+x+y = 2x + 2y$ $2x+y+2x+y = 4x + 2y$



Na atividade **3** o aluno poderá resolvê-la simplificando a expressão e desenhando os retângulos correspondentes à mesma para verificar as respostas do personagem fictício Antônio, justificando dessa maneira sua resposta por meio de seu cálculo, caracterizando assim a estratégia do **cálculo algébrico.** Ainda, poderá responder atribuindo valores para x e y tanto na expressão desenvolvida como na expressão simplificada e na figura correspondente, por exemplo, x igual a 4 e y igual a 2 escrevendo na primeira expressão e sua respectiva figura (4+2+4+2 =12 e 2.4+2.2 = 12) e na segunda expressão (2.4+2+2.4+2 = 20 e 4.4+2.2 = 20) caracterizando a estratégia do **valor numérico** para justificar sua resposta. E, por último, o aluno poderá responder que sim, porém não apresentar uma justificativa baseada em cálculos algébricos ou numéricos, caracterizando a estratégia da **ausência de justificativa**.

É importante ressaltar que, em relação à representação geométrica correspondente as expressões algébricas, esperamos que o aluno perceba a desproporcionalidade entre segmentos congruentes. Dessa forma, o aluno deverá indicar que a representação geométrica está incorreta, visto que as medidas correspondentes a x devem ser congruentes, caracterizando a estratégia **geométrica.**

É provável que alguns alunos errem o cálculo de simplificação das expressões, ou seja, somem todas as letras obtendo 4xy, levando–os a dizer que a resposta do aluno fictício Antônio está errada. De acordo com Bonadiman (2007, p. 193), o aluno apresenta essas respostas porque ao somar “coisas” às quais não sabe o valor, resulta em algo que não sabe o valor. Esse erro caracteriza dificuldade com o dilema “nome-processo”, segundo Booth (1995, p. 28). Outro erro que pode ser cometido é quando da substituição dos valores na expressão, e realizar a **justaposição dos números** confundindo com a aritmética, por exemplo, no lugar de ler 2.4 ler 24 e no lugar de 2.2 ler 22 e, nesse caso, encontra como resultado 52, no caso da primeira expressão (Booth, 1995, p. 28).

Além dos resultados duvidosos elencados anteriormente, os alunos poderão não perceber que há uma desproporcionalidade entre as figuras. Esse fato pode ocorrer pela ausência de atividades nas quais os alunos são convidados a verificar a validade das representações em um conjunto de atividades, nas quais os lados com mesma medida devem ter representações congruentes; assim, o resultado não configurará como um erro evidente.

3.2.4 Atividade 4

Para a **atividade 4** os alunos receberão a folha contendo o enunciado da atividade e continuarão sendo orientados a registrarem tudo na folha, utilizando a caneta azul. Inicialmente as atividades serão realizadas individualmente e, posteriormente será realizada a institucionalização coletivamente, na qual discutirão as estratégias tomadas em relação às perguntas feitas e nesse momento serão recolhidas as folhas com as resoluções individuais. As anotações feitas serão importantes para identificar tentativas de validação das respostas produzidas por meio da verificação dos resultados apresentados pelos colegas. O objetivo dessa atividade é utilizar a propriedade distributiva para verificar a validade das igualdades algébricas do tipo $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Na atividade 4 utilizamos as variáveis didáticas: ausência da figura no enunciado, o tipo de expressão e o .conceito de área.

Atividade 4- Na Atividade abaixo, complete a tabela atribuindo valores a w, x, y e z e responda as perguntas.

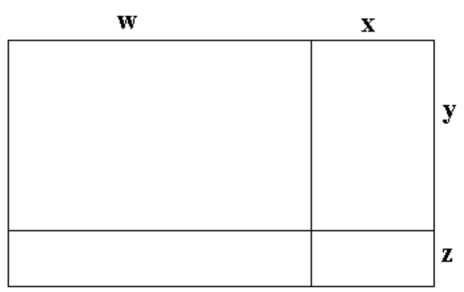
Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5				

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

Para resolver a atividade **4**[10] o aluno necessitará resolver o **valor numérico** completando a linha cujos valores são fornecidos, respeitando para isso as expressões da primeira linha da tabela e nas outras linhas deverá escolher valores para as letras e completar as colunas. No item a, espera-se que os alunos identifiquem que as colunas **E, F** e **H** possuem o mesmo resultado, justificando suas respostas por meio dos valores obtidos na tabela ou mesmo efetuando o cálculo das expressões algébricas da primeira linha, com isso mostrando que as mesmas chegam a um resultado comum. No item b, o aluno deverá iniciar utilizando a estratégia **cálculo algébrico**, aplicando a propriedade distributiva, obtendo como resultado wy + wz + xy + xz e a seguir ele deverá construir um retângulo conforme modelo abaixo:



[10] Atividade inspirada na situação-problema 10 (Bonadiman, 2007, p.171)

Um erro possível de ser cometido pelos alunos, no item a, será de substituir o x pelo valor fornecido na primeira linha e realizarem a justaposição dos números confundindo com a aritmética, por exemplo, no lugar de ler, 1.3 lerem 13 e no lugar de 2.5 lerem 25 e, nesse caso, encontram como resultado 38 (Booth, 1995) ao invés de encontrar 13. Segundo Bonadiman (2007), os alunos poderão cometer erros de multiplicação entre os números, os quais poderão indicar desatenção por configurar uma atividade de reinvestimento de conhecimento, como também dúvidas em relação à multiplicação**.** Outro erro possível seria realizar o produto (w+x).(y+z), multiplicar w pelo y e x pelo z encontrando wy + xz. Nesse caso, o pesquisador irá propor algumas perguntas de tal forma que utilizem a atividade como meio de retroação a sua formulação. Esperamos com isso levar o aluno a perceber o seu erro e procurar uma nova estratégia para encontrar o resultado correto.

O aluno poderá ainda, não representar a figura no item b e tal fato poderá ocorrer por não ser uma atividade familiar para ele. O livro didático também pode contribuir com esse erro por apresentar poucas atividades, nas quais os alunos são estimulados a representar geometricamente expressões algébricas fornecidas nas atividades.

Conforme disposto na descrição da experimentação, foram realizadas nove sessões, porém ao analisar cada sessão e comparar os resultados, percebeu-se que o número de informações necessárias para a análise já tinham surgido com apenas essas quatro sessões; portanto, demais serviram apenas como reforço às interpretações já realizadas.

CAPÍTULO IV

4. ANÁLISE A POSTERIORI E A VALIDAÇÃO DA EXPERIMENTAÇÃO

A escola cuja pesquisa foi desenvolvida pertence à Rede Municipal de Ensino de Campo Grande/MS (REME), na qual é oferecido o ensino do 1º ao 9º ano do Ensino Fundamental. A escola localiza-se numa região comercial, caracterizada por um público-alvo oriundo de vários bairros da cidade. A turma escolhida foi uma sala de 9º ano constituída de 32 alunos, dos quais foram escolhidos 8 alunos que participaram de todas as sessões. Para a análise das produções optamos por identificar os alunos, sujeitos da pesquisa, com os códigos **A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7** e **A8**.

A experimentação foi desenvolvida durante 4 sessões, as quais tinham a duração de 1 hora/aula, no caso da REME, as aulas duram 60 minutos. Cada sessão era composta de uma situação-problema, a qual deveria ser resolvida individualmente, o que nos permitiu acompanhar a produção de conhecimento e as respectivas dificuldades apresentadas pelos alunos. Os encontros foram realizados uma vez por semana no último tempo de aula, conforme combinado com a direção e supervisão da escola, com a concordância do professor de Matemática.

O professor foi orientado a permanecer na sala de aula durante as sessões e ajudaria na observação das ações dos alunos, anotando as considerações sobre os procedimentos adotados por eles, mas não deveria dizer se estava correto ou não, e sim, deixar que discutissem e chegassem à conclusão dos seus acertos ou erros.

A atividade 1 foi desenvolvida com o intuito de verificar os padrões de respostas adotados, bem como possíveis mudanças que ocorreriam nos seus procedimentos. As atividades 2, 3 e 4 foram desenvolvidas de tal maneira que os alunos deveriam elaborar a resposta individualmente e a seguir apresentarem suas respostas coletivamente, de tal forma que foi propiciada a discussão das soluções e possíveis resultados duvidosos[11]. No caso de

[11] Adotamos o significado de resultado duvidoso proposto por Margolinas(1993), isto é, são erros cometidos pelos alunos durante a resolução das atividades e que podem ser percebidos ou não. De acordo com Margolinas (1993) vai depender do conhecimento do aluno e do projeto para o resultado ser duvidoso (erro evidente, erro suposto – de acordo com essa autora seriam sinônimos).

respostas divergentes, os alunos deveriam apresentar suas justificativas para convencer os colegas da validade de sua estratégia. É importante ressaltar que o intuito não foi comparar resultados entre alunos, mas comparar os resultados de um aluno, no início, com seu resultado no final desse processo.

4.1 Atividade 1

No desenvolvimento da atividade o pesquisador circulou pela sala observando as produções dos alunos e, em alguns casos, indagava sobre a certeza da resposta apresentada na folha. Nesse caso, sem dar pistas dos procedimentos a serem utilizados, mas recomendando que caso quisessem mudar a resposta, deveriam fazer um traço abaixo do que já tinham feito, para então iniciarem a nova resolução.

Nesse primeiro momento, desejava-se ter um parâmetro dos conhecimentos que os alunos mobilizavam em relação ao objeto da pesquisa. Dessa forma, durante a sessão, buscou-se incentivar os alunos a produzirem suas respostas independentemente de estarem certas ou erradas. Para tanto, contamos com a colaboração do professor, conforme combinado, para ele não fornecer a solução diante das perguntas dos alunos, pois estava previsto para o final da sessão ocorrer um debate de resoluções em pequenos grupos e assim observar qual a segurança de cada aluno ao defender sua resposta. É importante ressaltar que essa primeira atividade serviu de apresentação da metodologia de trabalho que seria utilizada nas sessões seguintes.

A análise da **atividade 1** permitiu identificar alguns tipos de respostas nas quais os alunos elaboraram diferentes estratégias, algumas com sucesso e outras demonstrando dificuldade em determinados conceitos matemáticos. Todos demonstraram ter o conhecimento básico sobre os conceitos de área e perímetro, pois descreveram como calculá-los. Contudo, no quadro algébrico, alguns alunos mostraram algumas dificuldades, as quais inviabilizaram a verificação da validade dos resultados.

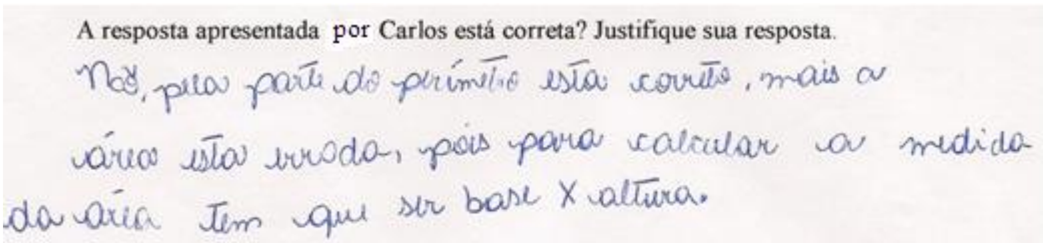
Foi observado ainda nessa atividade, que nenhum aluno utilizou o quadro numérico, provavelmente pela ausência desse tipo de atividade no livro didático utilizado na escola, cujo valor numérico é utilizado para verificar a igualdade entre membros de uma expressão algébrica.

Outro ponto observado foi em relação à postura do aluno em esperar que o professor corrigisse a atividade, dizendo se estava certa ou não. La Taille (2003), apoiado nas ideias de Piaget, enuncia que essa postura aproxima-se muito da heteronomia que é uma relação assimétrica entre "súdito" e "autoridade", isto é, deve-se respeito ao professor por ser a autoridade na sala de aula, portanto, é de responsabilidade dele dizer o que é certo ou errado.

Ainda, segundo o mesmo autor, alunos com idades a partir de 12 anos já estabeleceriam relações de autonomia, isto é, deveriam buscar uma relação simétrica na qual ocorre o respeito mútuo entre os sujeitos da relação, ou seja, o dever de respeitar as ideias do outro corresponde à exigência de ser respeitado.

Ainda, em relação a esse aspecto, La Taille (2003) apresenta uma reflexão sobre a maneira que é conduzida a relação de ensino e de aprendizagem na educação clássica. Afirma que esse fato interfere diretamente na ação do aluno identificar o erro cometido e assim retornar sobre sua resposta. Tal consideração baseia-se no número de alunos que se deram por satisfeitos com uma única análise, mesmo provocados a realizarem a atividade de forma diferente da que haviam realizado.

O aluno **A1** apresentou uma justificativa por escrito, sem demonstrar uma preocupação em realizar alguma estratégia de cálculo por escrito para verificar o resultado proposto, o que lhe possibilitaria ter argumentos para defender seu ponto de vista. Observando sua resposta, é possível perceber que o mesmo recorreu a conceitos do quadro geométrico, descrevendo o procedimento para calcular a área de uma figura retangular.

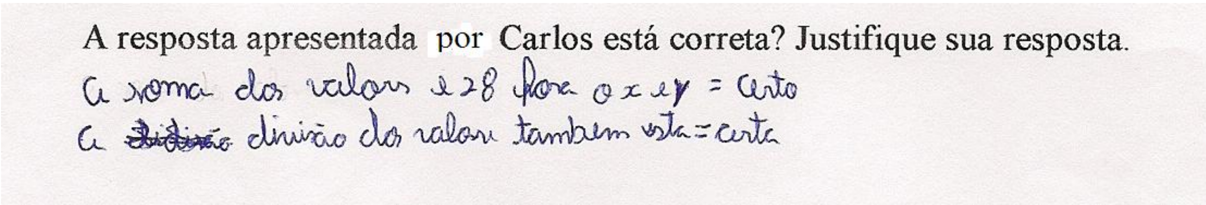

A resposta apresentada por Carlos está correta? Justifique sua resposta.

Não, pelo parte do perímetro esta correto, mais a área esta errada, pois para calcular a medida da ária Tem que ser base X altura.

Figura 6 - Protocolo do aluno A1 - Atividade 1

O aluno, mesmo com as provocações, possivelmente comparou a expressão algébrica com a representação geométrica, concluindo assim que o perímetro estaria certo, entretanto a área estaria errada. Diante desse protocolo, ficou mais evidente o quadro geométrico, porém não podemos afirmar nesse momento que ele não conseguiu operar com o conceito de área no quadro algébrico. Ainda pode ser um sinal de sua dificuldade em manipular letras em situações que envolvem, ao mesmo tempo, operações de adição e multiplicação. Consideramos tal fato provável, uma vez que o aluno não registrou sua estratégia na folha da atividade e nem utilizou outros recursos, o que nos leva a acreditar que possivelmente realizou os cálculos mentalmente. Essa possibilidade foi constatada a partir de questionamentos do pesquisador sobre como ele havia chegado à referida conclusão, obtendo respostas com argumentos assim elaborados: "ué, eu vi que o lado tem as medidas x e 8 de um lado e do outro y e 6, então vi que era igual" , no caso do perímetro.

O aluno **A2** evidenciou um diferencial em relação à resposta do aluno **A1**, pois ele analisou as informações constantes no enunciado para verificar a validade da resposta apresentada, apesar de não apresentar com clareza quais etapas seguiu no momento de identificar a resposta.


A resposta apresentada por Carlos está correta? Justifique sua resposta.

a soma dos valores e 28 para o x e y = certo

a ~~divisão~~ divisão dos valores tambem esta = certa

Figura 7 - Protocolo do aluno A2 - Atividade 1

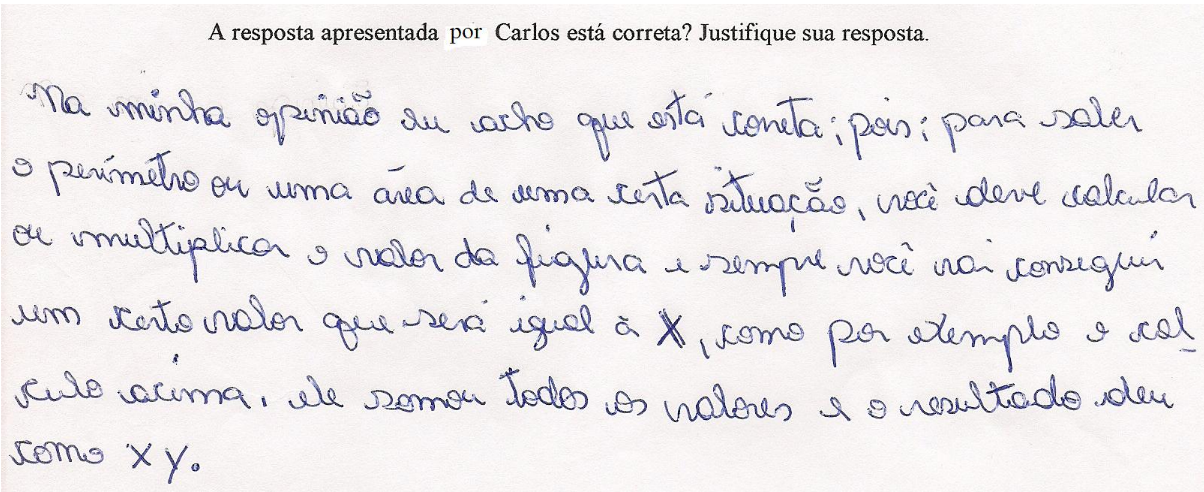
Para esse aluno, realizar uma atividade consiste apenas em apresentar uma resposta independente do caminho seguido para encontrá-la e nem tampouco o compromisso de validá-la. Dessa maneira o erro não provocou nenhum conflito cognitivo nesse aluno que o obrigasse a reformular suas estratégias e assim utilizar-se de outras para realizar o que era solicitado pela atividade.

De acordo com Margolinas (2003, p. 182), o erro provável (resultado duvidoso) depende da ideia que o aluno faz dos problemas matemáticos. Por conseguinte, para o aluno, depende do contrato didático firmado durante as aulas. *Exemplo: "No exame, resolver um exercício com conhecimentos que não faz parte do programa (sobretudo quando este simplifica notavelmente o exercício) pode ser considerado "incorreto", e receber nota zero*".

Ainda, a resposta do aluno não permitiu concluir se ele tinha dificuldade para operar letras, porém, o fato de recorrer a algumas letras sinalizou que mudou do quadro geométrico para o algébrico. Entretanto, não realizou a escrita detalhada de seu raciocínio, mesmo o pesquisador solicitando que procurasse produzir um texto matemático por meio do qual fosse possível comunicar suas ideias para resolver a referida atividade.

Outro aspecto que esse protocolo sinalizou foi uma possível confusão entre as operações apresentadas na situação, pois ao referir-se a área, o aluno informou que a divisão de valores estava correta, sinalizando uma possível dificuldade com o cálculo da área de uma figura decomposta em outras, o qual deve ser realizado a partir da área das partes, para que se encontre a área total.

Outro aluno que concordou com as respostas do aluno fictício foi o **A3**. Entretanto, ele não explicitou claramente suas ideias, ao afirmar que "*para saber o perímetro ou uma área de uma certa situação, você deve calcular ou multiplicar o valor da figura e sempre você vai conseguir um certo valor que será igual a x".* Os registros apontaram para o uso do método de resolver a equação para justificar sua resposta, porém não realizou nenhum registro na linguagem simbólica da matemática. Ainda, essa resposta não foi considerada por ele como um resultado duvidoso, o que o levaria a buscar uma nova resolução na qual seus raciocínios fossem objeto de estudo.



A resposta apresentada por Carlos está correta? Justifique sua resposta.

Na minha opinião eu acho que está correta; pois; para saber o perímetro ou uma área de uma certa situação, você deve calcular ou multiplicar o valor da figura e sempre você vai consegui um certo valor que será igual à X, como por exemplo o cal culo acima. ele somou todos os valores e o resultado deu como X Y.

Figura 8 - Protocolo do aluno A3 - Atividade 1

Analisando as respostas, foi possível perceber que o aluno inicialmente teve dificuldade para expressar os cálculos para perímetro e área de figura geométrica. Esse aluno demonstrou conhecer pouco sobre os procedimentos para calcular o perímetro e a área de uma região retangular, pois recorreu a conceitos do quadro geométrico para explicitar suas ideias, apresentando-as de forma superficial e errônea, demonstrando, assim, certa dificuldade para manipular esses conceitos, já que não conseguiu expressar-se com clareza. Ainda, sua resposta sinalizou uma dificuldade em relação ao que Booth (1995) chamou de dilema "nome-processo", isto é, ao perceber que há uma adição de dois termos contendo letras, adiciona os termos, encontrando "xy". Esse resultado sinalizou uma concepção de álgebra como estudo de procedimentos para resolver certos problemas, possivelmente por influência do estudo desenvolvido na sala de aula com o professor da turma. Desse modo, a representação geométrica não lhe serviu de suporte para evidenciar suas conclusões.

Podemos considerar que o aluno sinalizou que não conseguiu passar da fase de ação (tomada de decisão), pois de acordo com Margolinas (1993), esse é o momento do aluno, por meio dos seus conhecimentos, de levantar hipóteses que podem ser corretas ou não e, caso o resultado seja duvidoso, retornar sobre sua resposta para realizar a correção necessária. O não retornar pode ser indicação de uma inaptidão para construir concepções que conduziriam ao êxito da formulação de estratégias. Brousseau (2008) destaca que os conhecimentos permitem produzir e mudar essas "antecipações" e a aprendizagem é o processo em que os conhecimentos são modificados. Dessa forma, foi possível perceber que os conhecimentos antigos não foram suficientes para provocar dúvida no aluno sobre sua resposta, o que o levaria a retomar sua resolução, adotando um caminho diferente do seguido inicialmente.

Nessa atividade percebemos alguns conhecimentos equivocados que esse aluno possuía e que o impedia de realizar a verificação de seu resultado. Algumas dessas dificuldades estão relacionadas à concepção de álgebra que vivenciou ou vivencia por meio das atividades propostas por alguns professores, que na maioria das vezes, optam por apresentar atividades nas quais os alunos devem manipular a letra pela letra, sem uma relação direta com a aritmética e a geometria. Essa dicotomia contribui para uma aprendizagem setorizada e, em alguns casos, sem a percepção de relação entre os quadros citados.

Já o aluno **A4** utilizou a figura como meio antagônico de validação de suas análises, pois o mesmo foi levado a refazê-las ao comparar com a representação geométrica presente na atividade, concluindo de forma diferente o que tinha inicialmente proposto. Dessa forma, sua resposta passou a ser objeto de seu estudo e não a atividade propriamente dita. O retornar sobre as respostas pode tê-lo levado a procurar argumentos e estratégias que lhe permitissem reformular a atividade e ter condições de validá-la.

Foi possível verificar ainda, que ele se utilizou do quadro geométrico para perceber os elementos necessários para realizar a tarefa, mudando do quadro geométrico para o quadro algébrico, no qual pôde realizar os cálculos de área e perímetro. No quadro algébrico, ele recorreu ao conceito de soma dos termos semelhantes para fundamentar suas conclusões, caracterizando mudança do quadro geométrico para o quadro algébrico, em um movimento somente de ida, conforme pode ser observado no protocolo a seguir:

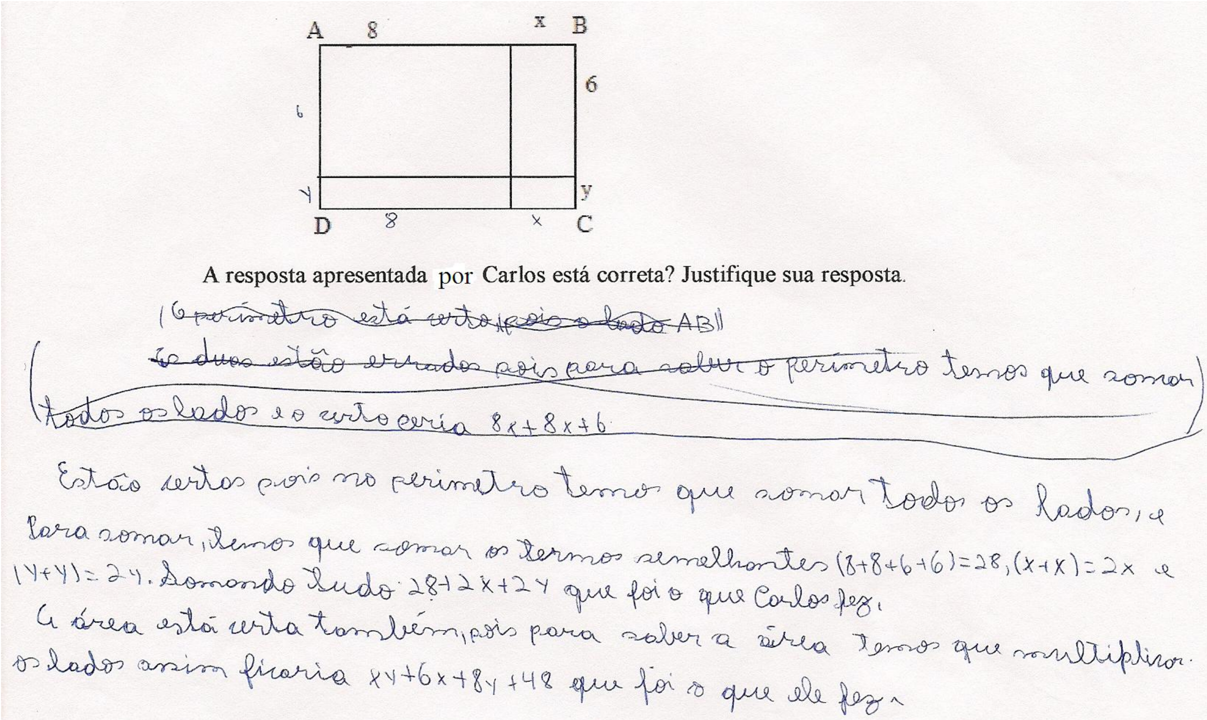


Figura 9 - Protocolo do aluno A4 - Atividade 1

A primeira resposta mostrou que o aluno teve certa dificuldade em relação ao conceito de perímetro, pois na dúvida, ele interrompeu a ação e tomou uma nova decisão. A mudança realizada indicou que ele ainda tinha dificuldade para aceitar, no quadro algébrico, o cálculo da soma de termos semelhantes, em concordância com o afirmado por Booth (1995) como sendo o dilema "nome-processo". Como o aluno A4 estava perto do **A6,** ele pode ter trocado informações para conferir o que ele já tinha feito, obtendo algumas indicações sobre a leitura da figura e acabando por reforçar o conceito de perímetro.

> A6 – "Veja os lados devem ter medidas iguais (apontando para os lados AB e DC, AD e BC), então temos que somar letra separado dos números."
>
> A4 – "Ah tá. Verdade tinha esquecido disso que o professor falou.
>
> Pesquisador – Você concorda então com as ideias do seu colega?"
>
> A4 – "Concordo. Tinha esquecido."

O conhecimento sobre os conceitos de perímetro e área do aluno A6 foi verificado em seu protocolo, no qual procurou explicitar suas ideias utilizando a linguagem retórica mesclada com o uso de símbolos algébricos, numéricos e respectivas propriedades algébrica e aritmética.

Os alunos **A5, A6** recorreram à figura do enunciado para identificarem as medidas dos lados, o que contribuiu para a realização da tarefa. Esses alunos inicialmente identificaram as medidas dos lados paralelos e a seguir mudaram para o quadro algébrico para encontrarem a expressão correspondente ao perímetro e à área. Conhecendo os resultados, eles identificaram as respostas encontradas com as propostas na atividade, o que lhes permitiram afirmar que as respostas apresentadas estavam corretas, realizando a verificação das mesmas. Foi possível observar, portanto, sinais de uma interação entre os quadros algébrico e geométrico.

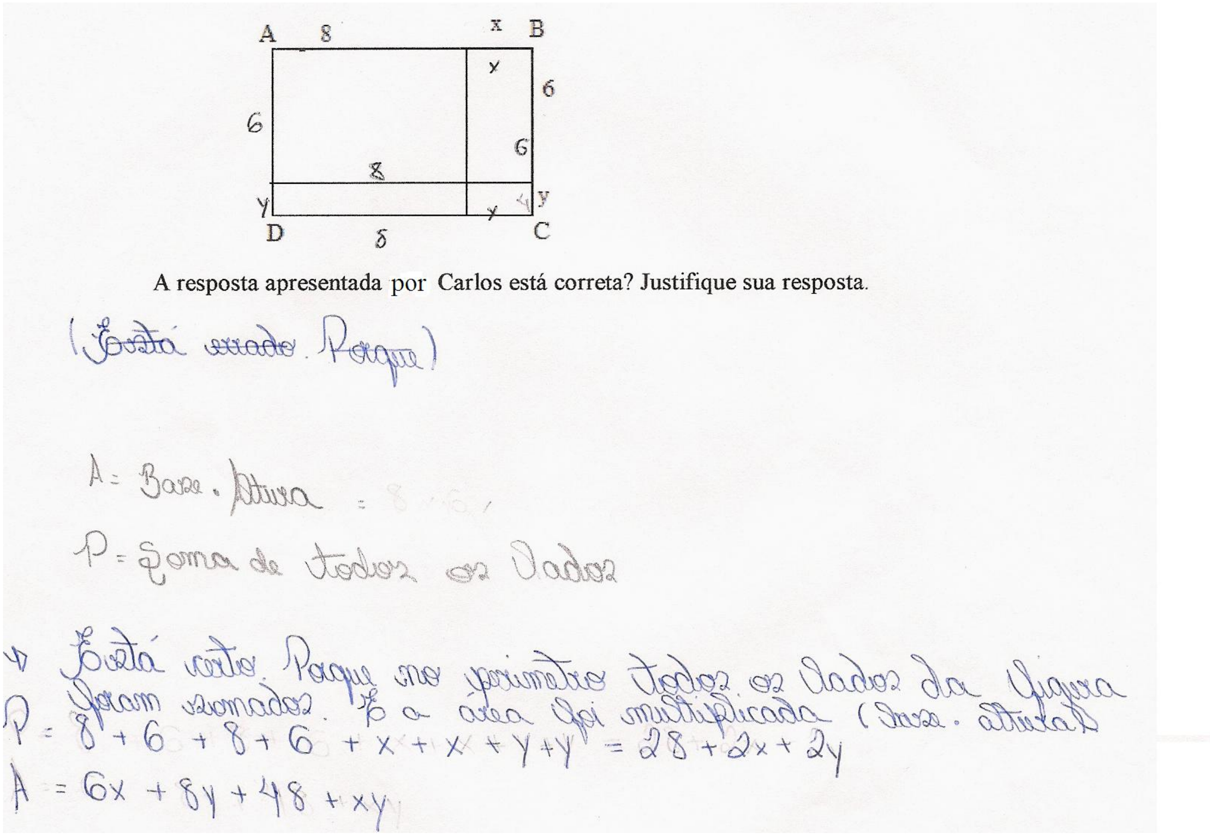


Figura 10 - Protocolo do aluno A5 - Atividade 1

Esse aluno analisou a figura no quadro geométrico identificando os dados que compõem a figura e, em seguida, com as medidas dos lados, realizou os respectivos cálculos no quadro algébrico, o que lhe possibilitou verificar a validade das respostas propostas na atividade. Observou-se, ainda, que o aluno não sentiu necessidade de utilizar o quadro numérico para verificar a validade dos resultados. A manipulação de letras como atividade algébrica na sala de aula, reforça a ideia de que basta apresentar os cálculos no quadro algébrico para verificar a validade das respostas em atividades apresentadas nas aulas de Matemática.

O aluno **A6** teve o cuidado de comunicar, na linguagem retórica, sua estratégia de resolução para que sua mensagem fosse compreendida por todos que viessem ler sua produção. Outra característica observada na resposta desse aluno foi o uso de símbolos mesclando números e propriedades algébricas, postura essa que lhe garantiu que as respostas apresentadas estavam corretas. De acordo com Almouloud (2007, p. 38), é na fase da formulação que o aluno ou grupo de alunos explicita, por escrito ou oralmente, as ferramentas utilizadas e a solução encontrada.

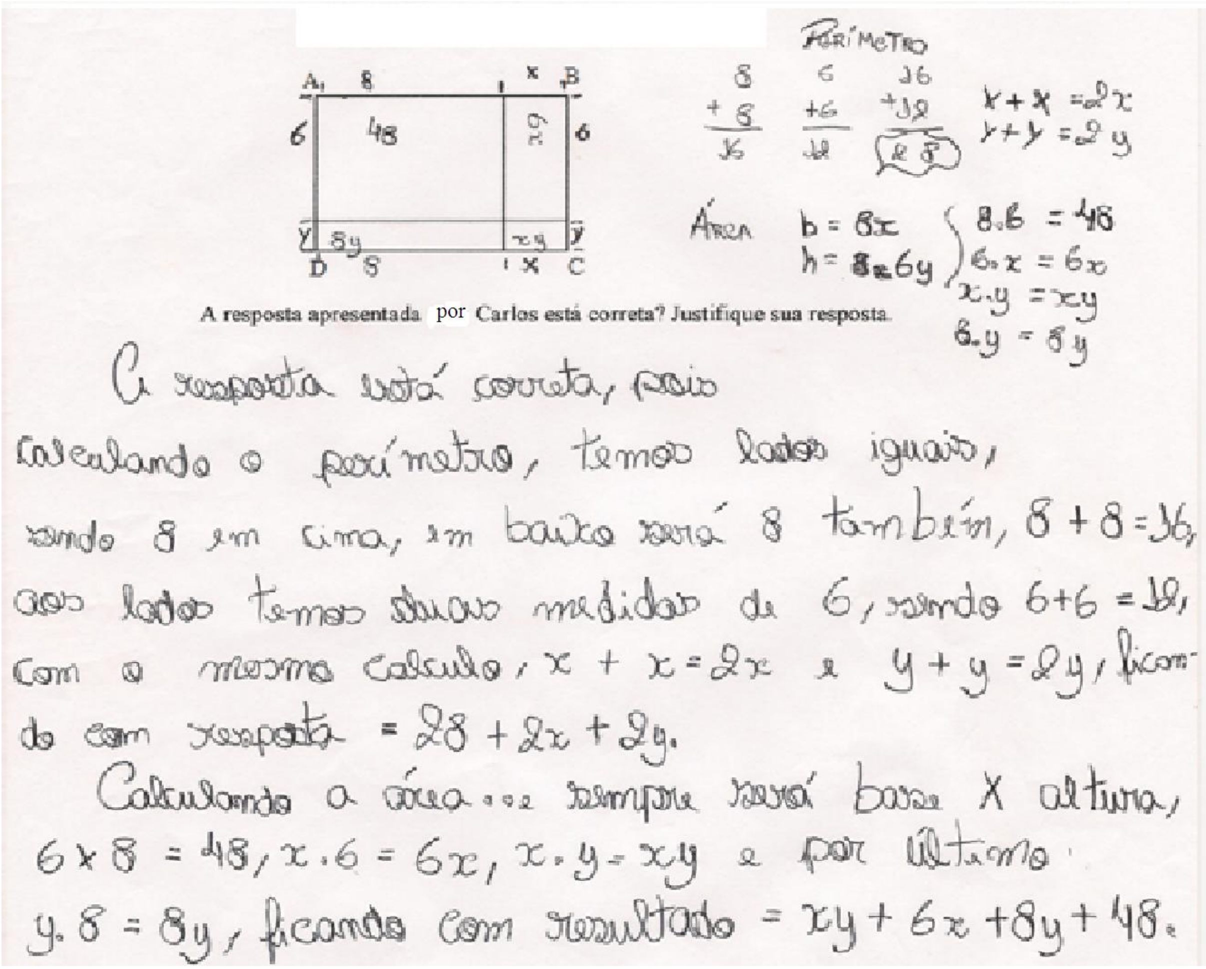


Figura 11 - Protocolo do aluno A6 - Atividade 1

Na sua comunicação, foi possível constatar que ele procurou verificar a validade de suas estratégias, utilizando justificativas que explicaram suas escolhas em relação aos valores e seus cálculos, descrevendo os procedimentos para calcular a área e o perímetro de uma figura.

O uso do quadro geométrico para validar a resposta apresentada foi um recurso utilizado pelo aluno **A7**, o qual fez uso dos conhecimentos sobre cálculo de área e perímetro para realizar sua verificação. Ele não utilizou registro algébrico para indicar suas ideias, entretanto, foi possível perceber em sua redação que ele decompôs a figura em partes para calcular a área e, a seguir, comparou com o cálculo da área total da figura. Assim, ele mostrou conhecimentos sobre formas válidas de composição e decomposição, bem como de equivalências de áreas. Ele utilizou sua formulação no quadro geométrico para comparar o resultado apresentado no enunciado com a sua resolução, caracterizando o uso do jogo de quadros para realizar a verificação, validando as respostas apresentadas.

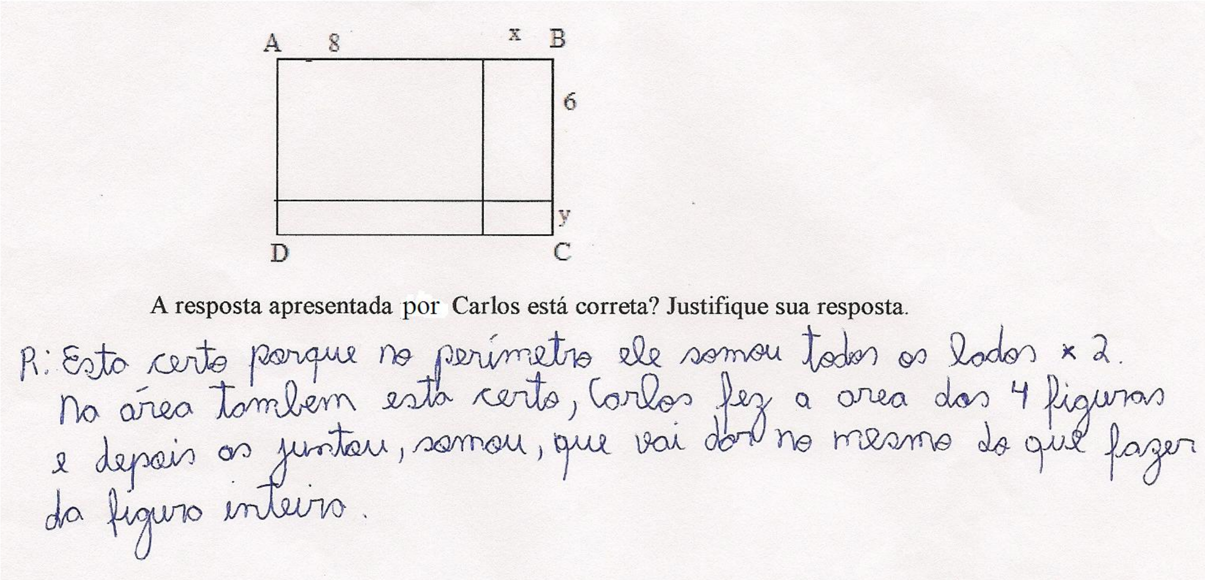
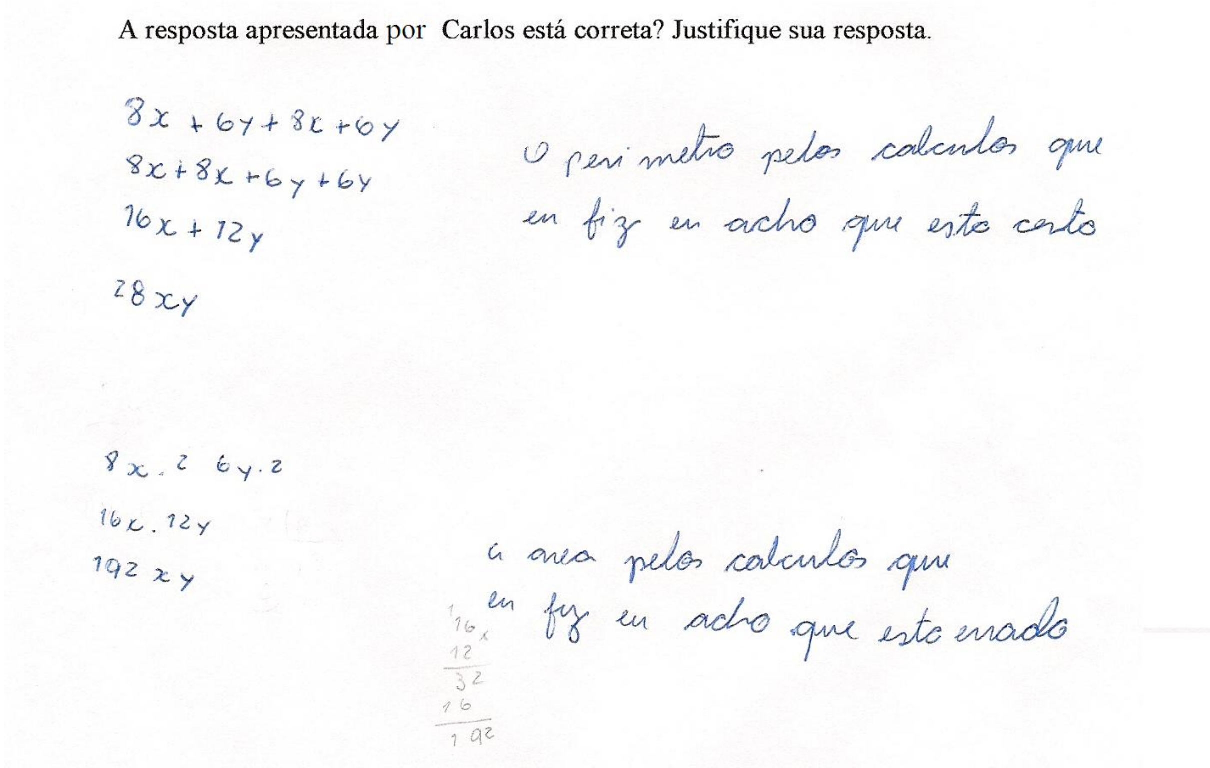


Figura 12 - Protocolo do aluno A7 - Atividade 1

A resposta do aluno **A7** demonstrou que ele teria o conhecimento em relação a soma de áreas equivalentes está associada a uma área que é a soma das áreas das superfícies partes, reforçando sua resolução no quadro geométrico. Esse aluno, preocupado com a escrita de todo o processo de verificação, especificou que o perímetro seria a soma de todos os lados explícitos multiplicados por 2. Possivelmente, o que ele pretendia escrever era a soma da largura com o comprimento multiplicado por 2.

O uso do quadro numérico pelo aluno **A7** pode ter sido com o intuito de utilizar as propriedades aritméticas para encontrar os respectivos valores para a soma e o produto dos segmentos que medem 8 e 6. Ainda, na sua resposta, percebemos traços da interação dos quadros algébrico, geométrico e aritmético, pois o mesmo recorreu a conceitos dos quadros para justificar sua concordância com as expressões apresentadas no enunciado.

O último aluno analisado foi o **A8,** o qual concordou com a resposta do perímetro da figura apresentado no enunciado, porém acreditou que um resultado não pode ser dado na forma de uma soma algébrica, pois no final, ele adicionou os números e juntou às letras encontrando uma única representação. Foi possível perceber uma tentativa desse aluno em apresentar resultados mais concisos, mas como não possuía bom domínio das propriedades e das regras, ele cometeu erros. Esse aluno sinalizou compreender uma concepção de álgebra como procedimentos para resolver certos problemas. Ainda de acordo com Trigueiros et al (2005), parece que esse aluno teve dificuldade para interpretar a letra quando aparece acompanhada de um coeficiente. Essa possível dificuldade pode caracterizar que ele não compreendeu os procedimentos para operar com letras, bem como não aceitou a ausência da propriedade fechamento, incorrendo no erro do dilema “nome-processo” (Booth, 1995). Esse aluno ainda não assimilou a concepção do uso da letra como estatuto de indeterminada para poder trabalhar com propriedades das estruturas das operações.


A resposta apresentada por Carlos está correta? Justifique sua resposta.

8x + 6y + 8x + 6y
8x + 8x + 6y + 6y
16x + 12y
28xy

o perimetro pelos calculos que eu fiz eu acho que esto certo

8x . 2 6y . 2
16x . 12y
192 xy

a area pelos calculos que eu fiz eu acho que esto errado

16x
12
32
16
192

Figura 13 - Protocolo do aluno A8 - Atividade 1

Provavelmente, para o aluno **A8**, quando se realiza uma soma de termos obtém-se como resultado um único termo e não a soma algébrica de monômios. Em relação ao cálculo de área foi possível notar que ele se equivocou e acabou realizando algo semelhante ao perímetro, mas entre os resultados 16x e 12y colocou o sinal de multiplicação, encontrando o resultado 192xy. Tal fato reforçou nossa interpretação de que esse aluno não tem bem definido o que é área e o que é perímetro, o que certamente o impossibilitou de perceber a diferença entre uma estratégia e outra. Outro fator que pode ter levado esse aluno a realizar esse cálculo é o uso da letra como incógnita, pois a turma estava estudando a resolução de equações para determinar os zeros da função. Nesse caso, a letra é usada como uma variável que assume vários valores dentro de um conjunto domínio. É importante ressaltar que, devido às dificuldades conceituais relatadas acima, não percebemos mudança de quadros na resposta desse aluno e, consequentemente, também não houve interação entre eles.

À luz do jogo de quadros, esses alunos demonstraram conhecimentos matemáticos em relação aos conceitos de área e perímetro, porém nesse momento não sentiram a necessidade de realizar a verificação das afirmações utilizando mais uma estratégia, que seria levar para o quadro aritmético e atribuir valores numéricos para x e y, o que os conduziria a confirmar ou refutar suas respostas.

Conquanto, foi possível notar que os alunos, ao analisarem suas respostas, comparando com o enunciado da atividade, uma parte expressiva deles retomou sua estratégia[12] e nesse caso, descartaram a resposta ao procurar validá-la, tendo o meio como antagonista da ação. Segundo Brousseau (2008, p. 27):

> [...] os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias – na qualidade de conjuntos de enunciados de referência – e tanto aprendem a convencer os demais alunos como a se deixarem convencer sem ceder a argumentos retóricos, à autoridade, à sedução, à soberba, a intimidações etc.

Nos protocolos dos alunos encontramos uma predominância de respostas que trazem traços do quadro geométrico e algébrico. Observamos que eles apresentaram algumas dificuldades para distinguir o cálculo de área e de perímetro de uma figura retangular e, principalmente, não conseguiram ser claros em relação à escrita de suas ideias envolvendo esses conceitos. Percebemos, ainda, que eles não sentiram a necessidade de utilizar o quadro numérico para verificar a validade de suas tentativas para encontrar uma resposta, aspecto que também foi verificado nas outras atividades para constatar se ocorreu mudança nessa atitude. Além disso, os erros (resultado duvidoso) não foram percebidos pelos alunos, o que pode significar falta de conhecimentos anteriores que lhes possibilitariam interagir com o meio, ou seja, com as atividades propostas. Margolinas (1993), em relação a esse aspecto, afirma que para ocorrer o retorno a uma fase de retificação é necessário que o aluno tenha os meios para compreender o que o levou a cometer o erro e como ele poderia agir para ter o êxito. Dessa forma, os alunos possivelmente não sentiram a necessidade de realizar a verificação no quadro aritmético por não terem o conhecimento necessário para alcançarem êxito conforme discorre a autora.

4.2 Atividade 2

A atividade 2 foi desenvolvida em uma hora/aula, na qual os alunos trabalharam individualmente, escolhendo estratégias e a executando de tal forma que fosse possível

---

[12] Estratégia é aqui utilizada no sentido de caminho a ser percorrido para chegar ao que está antecipadamente determinado.

justificar as respostas. No início, os alunos tiveram dificuldade em perceber que precisavam identificar qual resposta apresentada no item **b**[13] era válida, exigindo uma breve discussão sobre o enunciado e o significado dos comandos. Após serem informados de que precisavam registrar todas as estratégias na folha utilizando a caneta azul, foram avisados de que deveriam buscar estratégias que lhes possibilitassem verificar as expressões corretas do item **b**. Nesse caso, eles tiveram que, inicialmente, encontrar a área da praça após a construção de um canteiro no interior da mesma e, a seguir, identificar quais das respostas apresentadas pelos alunos fictícios no item **b** corresponderia à área final da praça. A identificação das respostas corretas exigia que os alunos resolvessem as expressões algébricas na tabela ou atribuíssem valores numéricos para as letras **a** e **b**. Observamos que vários alunos não recorreram ao quadro numérico para verificar a validade das expressões algébricas. Como a resposta encontrada no item **a** constava na tabela, isto pode ter contribuído para que não buscassem novas estratégias para verificar a validade das outras expressões.

Analisando as respostas dos sujeitos da pesquisa foi possível perceber que eles tiveram mais dificuldade para resolver o item **b** do que o item **a,** pois ao resolverem o item **a,** eles encontraram de imediato a resposta correta. Como a resposta constava na tabela, os alunos não tentaram verificar as outras respostas nela apresentadas para terem certeza se não havia outras respostas corretas. Diante disso, o pesquisador solicitou-lhes que apresentassem justificativas para as expressões que julgavam erradas.

Nessa atividade pudemos perceber que ocorreram respostas divergentes, dentre elas, algumas causadas pela dificuldade em manipular expressões algébricas. O aluno **A4** resolveu o item **a** recorrendo a conceitos geométricos, os quais foram utilizados no quadro algébrico para encontrar a expressão correspondente à área da praça menos a do canteiro (figura 14). Dessa forma, esse aluno realizou a interação entre os quadros geométrico e algébrico, num movimento que tem início no geométrico e depois alterna com o algébrico.

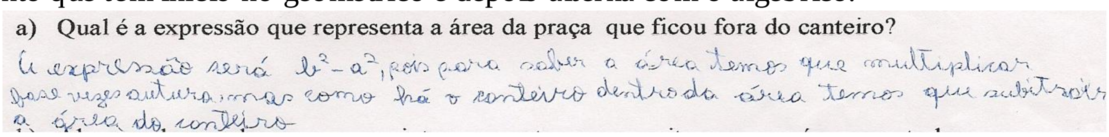
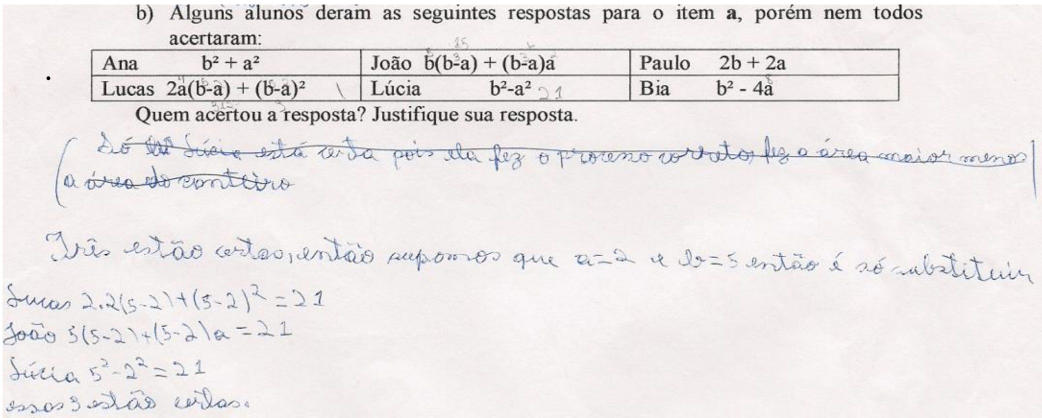

a) Qual é a expressão que representa a área da praça que ficou fora do canteiro?
A expressão será $b^2 - a^2$, pois para saber a área temos que multiplicar base vezes altura, mas como há o canteiro dentro da área temos que subtrair a área do canteiro

Figura 14 - Protocolo do aluno A4 - Atividade 2

Foi possível constatar que o aluno **A4** formulou sua comunicação tentando ser compreendido pelos seus interlocutores. No momento de resolver o item **b,** ele optou por atribuir valores numéricos para as letras **a** e **b**, mudando do quadro algébrico para o quadro aritmético, conforme pode ser observado na resposta abaixo.

---

[13] Ver figuras 13 e 14.



b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia b^2-a^2	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

~~Só a Lúcia está certa pois ela fez o processo correto, fez a área maior menos a área do canteiro~~

Três estão certos, então supomos que a=2 e b=5 então é só substituir

Lucas 2.2(5-2)+(5-2)² = 21

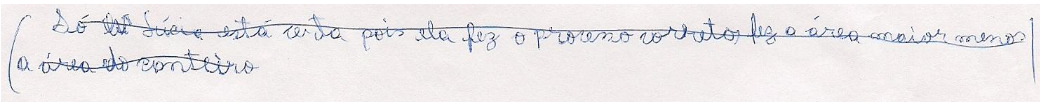
João 5(5-2)+(5-2)a = 21

Lúcia 5²-2² = 21

esses 3 estão certos.

Figura 15 - Protocolo do aluno A4 - Atividade 2

Observou-se que esse aluno, ao utilizar o quadro algébrico, percebeu somente a resposta de Lúcia como correta, mas a discussão sobre a necessidade de apresentar justificativas para as outras respostas, conduziu-o a nova reformulação e, com isso, ele mudou para o quadro aritmético.



~~Só a Lúcia está certa pois ela fez o processo correto, fez a área maior menos a área do canteiro~~

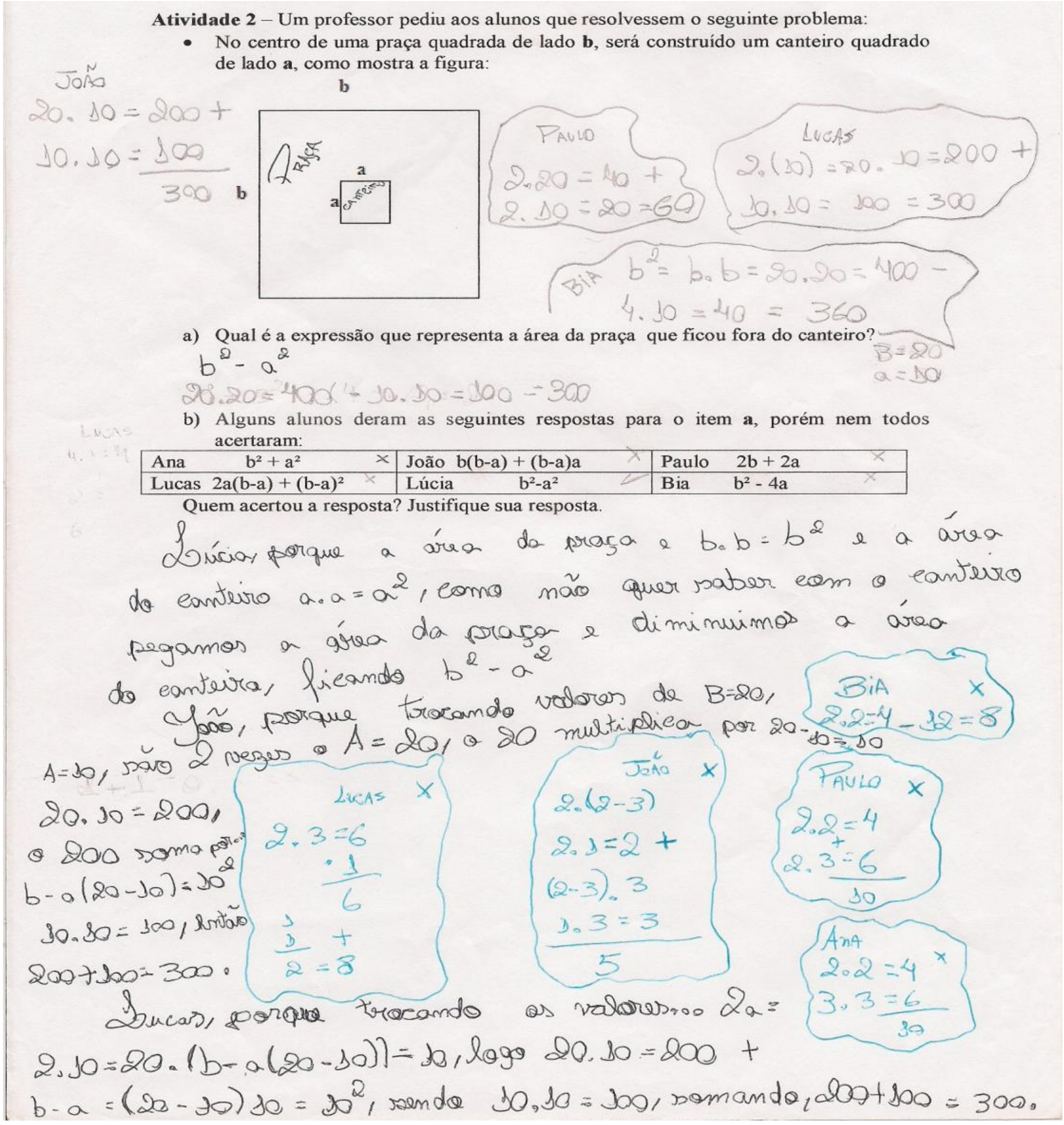
Figura 16 - Protocolo do aluno A4 - Atividade 2

Nessa atividade, ao perceber que os alunos não tentariam verificar a validade das outras respostas no item **b**, o pesquisador atuou como mediador, questionando por que as outras não estavam certas. Dessa maneira, ao serem provocados em relação às outras respostas, os alunos foram remetidos a interpretar o significado do termo “nem todos acertaram”, pois isso poderia levá-los a concluir que implicaria haver uma resposta correta ou mais de uma. Para terem essa certeza, precisavam analisar com cuidado todas as respostas, o que os levou a buscarem novos procedimentos para justificarem as outras respostas. Brousseau (2008) observa que a reação do oponente ao proponente de uma estratégia pode propiciar uma nova ação na busca de formular nova estratégia e assim verificar a validade de sua resposta, uma vez que nesse momento, ambos já haviam produzido uma estratégia.

Dessa forma, o aluno **A4** buscou certificar-se de suas análises realizando a substituição das letras **a** e **b** na figura pelos números 5 e 2, respectivamente. Realizada a substituição, ele eliminou as expressões que não apresentavam o **b** elevado ao quadrado, pois testou a expressão proposta pela aluna fictícia Bia e como o resultado da expressão não correspondia à área do canteiro encontrada no item **a,** ele eliminou essa expressão. Outra expressão eliminada por ele foi a proposta pela aluna fictícia Ana, possivelmente por ter verificado que não correspondia à subtração entre as áreas da praça e do canteiro, então deduziu que não poderia ser correta, ficando somente com as que julgava correta.

Para esse aluno, a letra parece ter o estatuto de número generalizado, pois na sua justificativa "*supomos que a=2 e b=5*" sinalizou que as letras poderiam assumir valores diferentes do proposto por ele. Assim, a sua postura pode indicar uma concepção de álgebra com o estatuto estudo de relações entre grandezas e, nesse caso, entre a área final e os valores das letras.

O aluno **A6** identificou inicialmente o que seria a praça e o canteiro no desenho. Em seguida, realizou a interação entre o quadro geométrico e o algébrico para expressar a área final da praça, o que lhe representou ser fácil. Em relação ao item **b**, inicialmente comparou seu resultado no item **a** com os registros do item **b**, indicando que Lúcia era a única que tinha acertado. No momento do questionamento do pesquisador sobre o número de respostas corretas, ele realizou mais uma mudança de quadro, agora do quadro algébrico para o numérico. O aluno **A6** primeiro atribuiu um valor numérico para as letras **a** e **b**, a seguir substituiu no item **a** as letras pelos números, encontrando um valor numérico que lhe serviu de referencial para comparar os resultados do item **b,** concluindo assim, que Lúcia, João e Lucas tinham acertado, conforme podemos observar na resposta a seguir:


Atividade 2 – Um professor pediu aos alunos que resolvessem o seguinte problema:

- No centro de uma praça quadrada de lado **b**, será construído um canteiro quadrado de lado **a**, como mostra a figura:

a) Qual é a expressão que representa a área da praça que ficou fora do canteiro?

b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia b^2-a^2	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

Figura 17 - Protocolo do aluno A6 - Atividade 2

Diante da atividade proposta (figura 17), observamos que o aluno fez uma reformulação de sua estratégia numérica com o intuito de validar sua formulação, o que não foi possível, levando-o a nova ação que resultou em uma nova formulação, sendo validada ao comparar com o resultado do item **a**. Em relação ao conhecimento matemático, o aluno possivelmente não observou a relação $b > a$. Nesse caso, o valor numérico obtido para a expressão algébrica apresentada por João funcionou como meio antagônico[14] levando-o a reformular seus valores atribuídos para **a** e **b** e assim atribuindo um valor maior para **b** do que para **a.** Alguns aspectos do conhecimento matemático ficaram implícitos na escrita desse aluno, dentre eles, o uso da letra com o estatuto de número indeterminado ao trabalhar com

[14] Considera-se como meio tudo o que age sobre o aluno e/ou sobre o qual o aluno age. Antagônico porque o meio reage colocando em xeque o conhecimento do aluno, levando-o a buscar soluções para o problema proposto.

pelo menos dois valores diferentes, no caso, ele inicialmente utilizou os valores 2 e 3 para as letras **b** e **a**, respectivamente. Possivelmente ele observou que esses valores chegavam a um resultado duvidoso e nesse caso, precisou reestruturar sua escrita adotando assim 10 e 20 para as letras **a** e **b,** respectivamente. A adoção desses valores indicou uma preocupação com a objetividade dos cálculos, visto que múltiplos de 10 ao serem elevado ao quadrado ou multiplicado um pelo outro, basta repetir os zeros e multiplicar os algarismos da dezena, obtendo o resultado imediatamente.

Nessa atividade houve alunos que acertaram o item **a,** porém erraram o item **b**, apresentando respostas que indicaram indícios de dificuldades para manipular símbolos matemáticos. Os alunos **A5** e **A7,** ao resolverem o item **a,** sinalizaram que primeiro encontraram a expressão para a área da praça sem o canteiro e a seguir a área do canteiro, subtraindo de um resultado o outro. Nesse caso, entendemos que ocorreu uma mudança do quadro geométrico para o quadro algébrico, quando os alunos **A5** e **A7** representaram a resposta da atividade no último quadro.

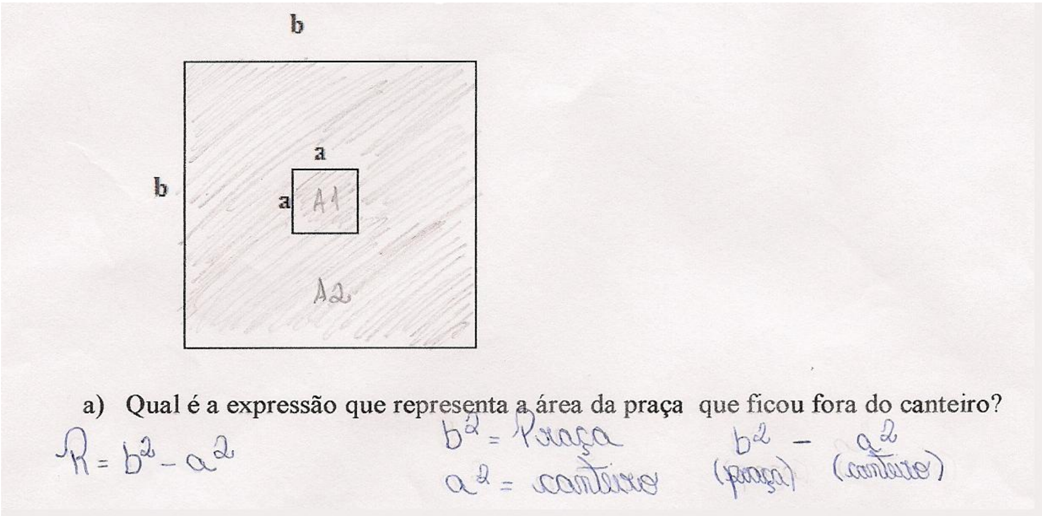
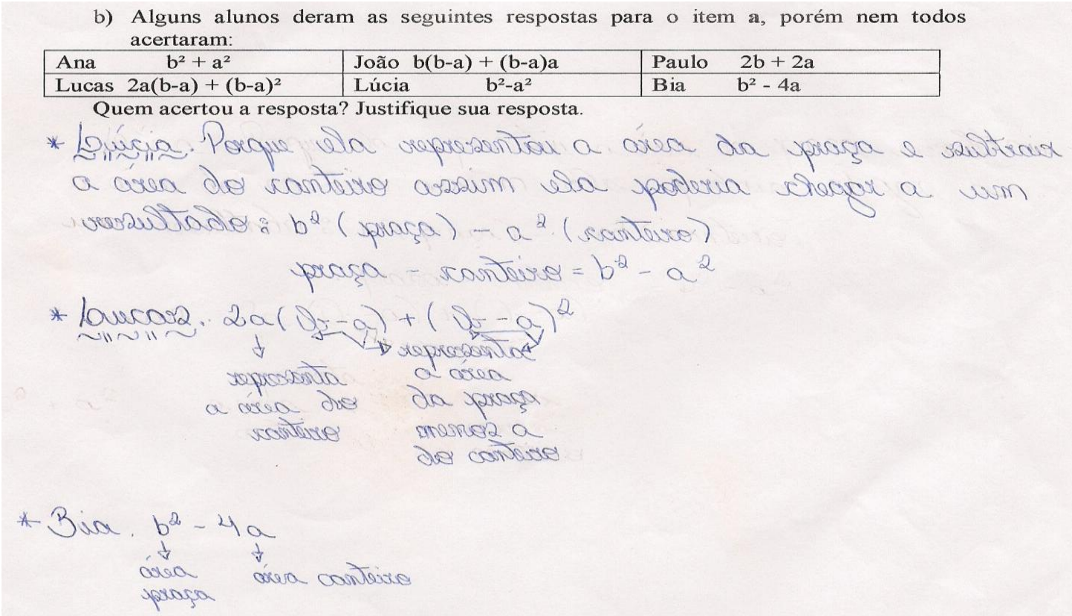


Figura 18 - Protocolo do aluno A5 - Atividade 2

Conforme protocolo (figura 18) desse aluno foi possível constatar que ele não sentiu necessidade de utilizar o quadro numérico para verificar se suas formulações estavam corretas, provavelmente por não ter o costume de realizar atividades que solicitam verificar a validade de seus resultados, prática que segundo Santos (2007), não é estimulada pelo livro didático e alguns professores quase não se utiliza desse artifício durante suas aulas.

No item **b**, o aluno **A5** demonstrou ter conhecimento matemático suficiente para calcular a área de figuras retangulares. Entretanto, foi possível observar que esse conhecimento não foi suficiente para verificar a validade de todas as expressões, pois ele indicou, de forma equivocada, os elementos das expressões que compõem as anotações do aluno fictício Lucas. Observamos, ainda, que ele estabeleceu uma formulação que lhe possibilitou responder à pergunta, porém não teve a preocupação de validá-la. Talvez isso tenha ocorrido pelo fato de não ter familiaridade com situações para as quais deveria formular estratégias, em que a mudança de quadro o conduzisse a verificar a validade das formulações propostas nas atividades.



b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b\text{-}a) + (b\text{-}a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b\text{-}a) + (b\text{-}a)^2$	Lúcia $b^2\text{-}a^2$	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

* Lúcia. Porque ela representou a área da praça e subtrair a área do canteiro assim ela poderia chegar a um resultado: b^2 (praça) $- a^2$ (canteiro)

praça − canteiro $= b^2 - a^2$

* Lucas. $2a(b-a) + (b-a)^2$

representa a área do canteiro

representa a área da praça menos a do canteiro

* Bia. $b^2 - 4a$

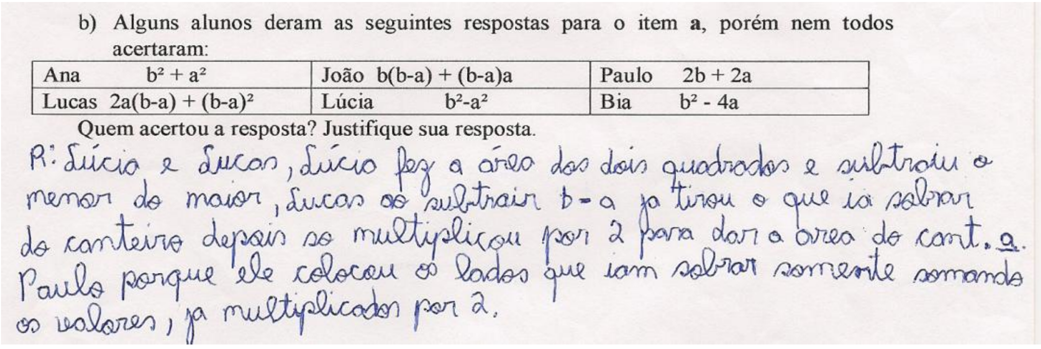
área praça

área canteiro

Figura 19 - Protocolo do aluno A5 - Atividade 2

Os conhecimentos matemáticos apresentados pelo aluno **A5** mostraram que esses conhecimentos não estão estabilizados, pois ele confundiu o quadrado com o quádruplo de um número, ao indicar Bia como um dos alunos fictícios que acertaram a medida, o que configura um sinal de concepção da atividade algébrica focada na manipulação de letras, que Lins e Gimenez (2006) qualificaram como sendo uma concepção de atividade algébrica “letrista”. Provavelmente, como já comentado, os conhecimentos matemáticos não foram suficientes para que o aluno percebesse o resultado duvidoso, levando-o a não realização de uma nova verificação.

No item **b,** o aluno A**7** apresentou a solução na linguagem retórica, explicando o procedimento para calcular a área da praça, semelhante aos manuscritos das antigas civilizações babilônica e egípcia.



b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia b^2-a^2	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

R: Lúcia e Lucas, Lúcia fez a área dos dois quadrados e subtraiu o menor do maior, Lucas ao subtrair b-a já tirou o que ia sobrar do canteiro depois só multiplicou por 2 para dar a área do cant. a. Paulo porque ele colocou os lados que iam sobrar somente somando os valores, já multiplicados por 2.

Figura 20 - Protocolo do aluno A7 - Atividade 2

Esse aluno mostrou uma dificuldade em trabalhar com expressões algébricas nas quais aparece potenciação, visto que ao reconhecer a expressão do aluno fictício Paulo como correta, ele considerou que b^2 é igual a 2b. Esse fato não é algo particular desse aluno, pois foi também observado no protocolo de outros alunos. O resultado apresentado na tabela para o aluno fictício Paulo não configurou uma dúvida para o aluno A7, talvez por não ter os conhecimentos estabilizados em relação a operações com letras. Dessa forma, os resultados sinalizaram uma predominância da concepção “letrista” nos protocolos dos alunos, mesmo prevalecendo no livro didático atividades nas quais as figuras e materiais aparecem para exemplificar as operações com letras, o que segundo Lins e Gimenez (2006) configuraria uma concepção “letrista–facilitador”, isto é, o uso de materiais com o intuito de facilitar a aprendizagem da álgebra. Esse fato indica que, mesmo os alunos vivenciando atividades do tipo “letrista-facilitador”, não as utilizam em situações diferentes daquelas nas quais são apresentadas.

O aluno **A8** identificou o canteiro e a praça na figura do enunciado, porém não utilizou essa informação para calcular a área da praça após a construção do canteiro. Por outro lado, esse aluno apresentou conhecimentos básicos para iniciar a atividade, contudo no item **a,** ele realizou a soma de dois lados do quadrado maior com o intuito de indicar a área solicitada, mas essa formulação foi descartada, indicando que tentou validar suas ações por meio de seus conhecimentos sobre o cálculo da área de uma figura retangular.

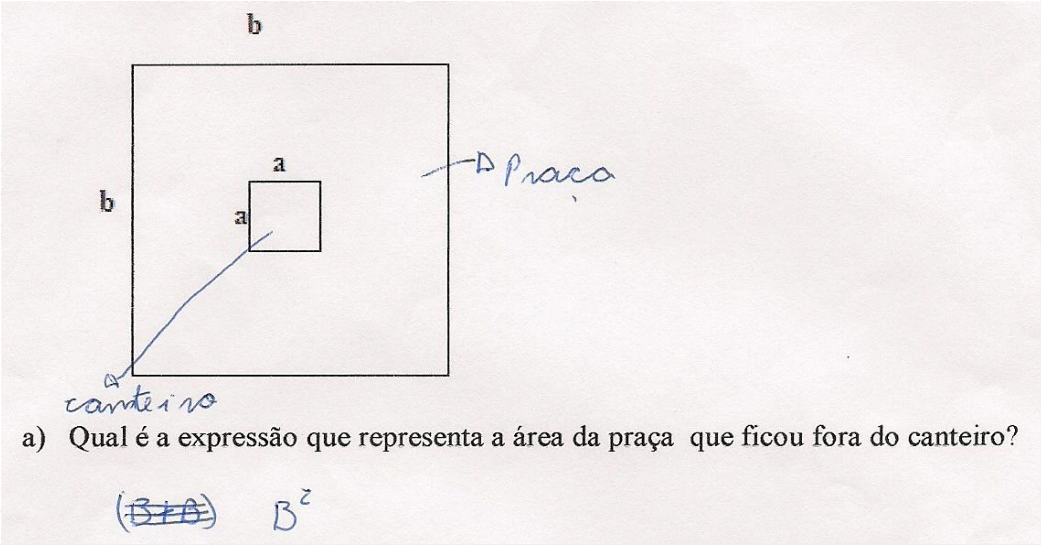
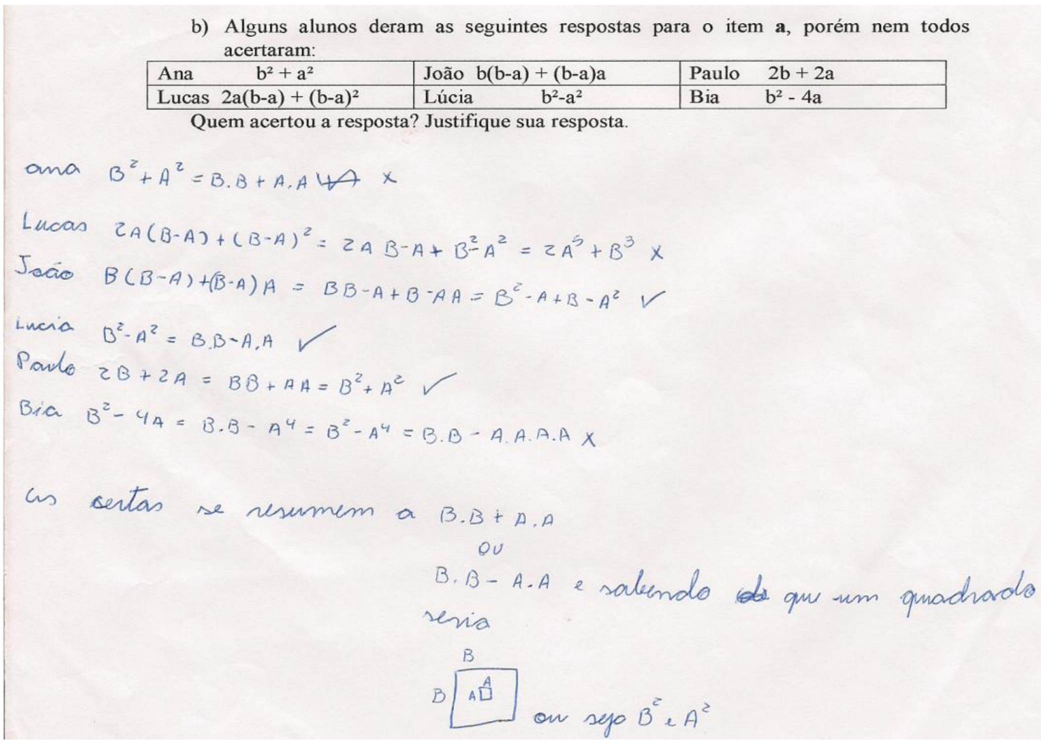


Figura 21 - Protocolo do aluno A8 - Atividade 2

Analisando a segunda parte da atividade foi possível constatar que o aluno **A8** cometeu alguns erros em relação a álgebra, pois o mesmo confundiu a soma de termos semelhantes com o produto de termos semelhantes. Não podemos afirmar que o **A8** não conhece o procedimento para calcular a área de figura retangular, pois ele anotou a área da praça e do canteiro, embora sem realizar a subtração das mesmas.


b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia b^2-a^2	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

Figura 22 - Protocolo do aluno A8 - Atividade 2

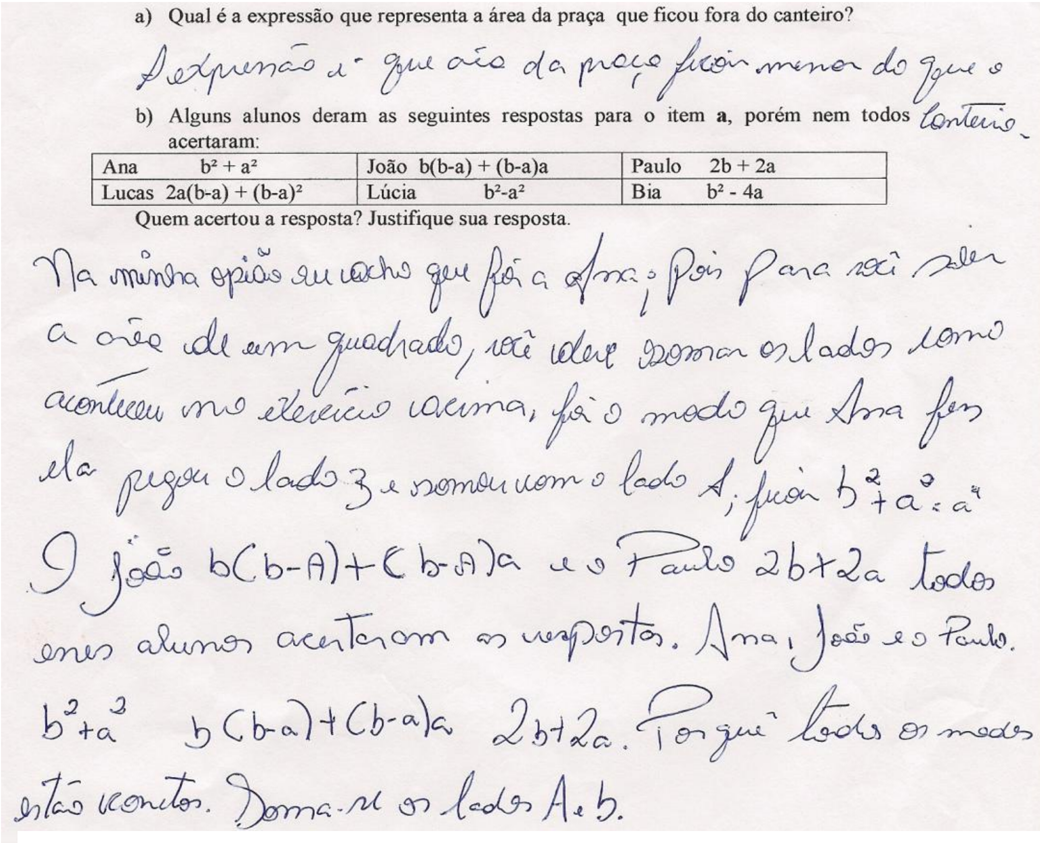
Esse aluno não percebeu o seu erro ao afirmar que B vezes B mais A vezes A equivale a B vezes B menos A vezes A. De acordo com Margolinas (1993), o erro certamente não provocou uma dúvida que o remetesse a buscar novos procedimentos para verificar a validade das respostas apresentadas, indicando que seu conhecimento sobre operações com expressões algébricas não está consolidado.

No caso do aluno **A8** temos um aparente sinal do que é criticado por Lins e Gimenez (2006) quanto ao uso de materiais e figuras com o intuito de facilitar a aprendizagem daqueles que estão na fase de aprendizagem da manipulação com letras. Afirmam que, na maioria das vezes, isso não é compreendido pelos alunos e consequentemente não colabora muito para a aprendizagem. Com base nas ideais desses autores, percebeu-se que o aluno realizou as operações mecanicamente, sem compreender os conceitos envolvidos em cada cálculo realizado durante o estudo das operações.

O aluno **A3,** no item **a,** registrou sua resposta utilizando a linguagem natural, "*a expressão é que área da praça ficou menor do que o canteiro*", com a qual sinalizou uma provável dificuldade de percepção espacial ao enunciar que a área da praça ficou menor que o canteiro. Pode ter ocorrido uma dificuldade de interpretação do enunciado, isto é, ele pode não ter compreendido que a superfície do canteiro seria a figura retangular menor construída dentro da maior.

A dificuldade geométrica pode estar associada ao tipo de abordagem utilizada por alguns professores ao trabalharem os conteúdos que envolvem a geometria e a álgebra, durante os anos de formação desse aluno (Gouvêa, 1998). Nesse período, presume-se que ele tenha estudado elementos geométricos com o intuito de desenvolver a percepção espacial e consequentemente a leitura de desenhos geométricos para identificar características como tamanho e forma; no entanto, observou-se que esses conhecimentos não estão estabilizados para esse aluno.

No item **b** o aluno **A3** novamente apresentou uma resposta textual na qual utilizou sua resposta ao item **a** para justificar a escolha da resposta de Ana como a correta. Esse aluno concluiu que para obter a área do quadrado deve somar os lados, mostrando que confundiu o conceito de área com o de perímetro. Esse aluno demonstrou que não compreendeu as operações com letras, pois para ele os coeficientes e/ou expoentes das letras devem ser somados para obtermos resultado, o que pode significar que não compreendeu a propriedade fechamento, configurando um dilema "nome-processo". Outro fato indicado por este erro é a provável falta de compreensão do estatuto da letra como indeterminada.



a) Qual é a expressão que representa a área da praça que ficou fora do canteiro?

A expressão é que área da praça ficou menor do que o canteiro.

b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

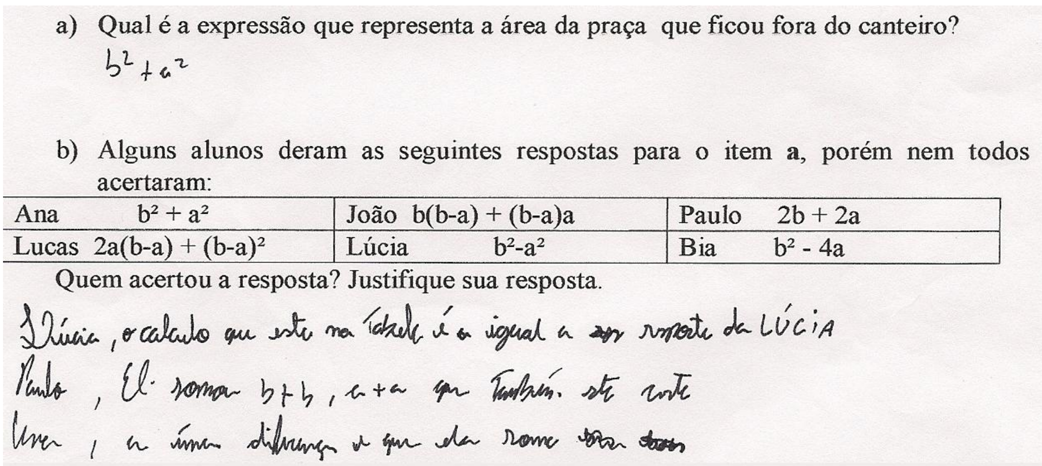
Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia b^2-a^2	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

Na minha opição eu acho que foi a Ana; Pois para você saber a área de um quadrado, você deve somar os lados como aconteceu no exercício acima, foi o modo que Ana fez ela pegou o lado B e somou com o lado A; ficou $b^2+a^2=a^4$ O João $b(b-A)+(b-A)a$ e o Paulo $2b+2a$ todos esses alunos acertaram as respostas. Ana, João e o Paulo. b^2+a^2 $b(b-a)+(b-a)a$ $2b+2a$. Porque todos os modos estão corretos. Soma-se os lados A e b.

Figura 23 - Protocolo do aluno A3 - Atividade 2

O aluno **A2** (figura 24) incorreu no mesmo erro do aluno **A3** ao indicar a resposta como a soma das áreas, sinalizando que não percebeu que a resposta consistia em subtrair da área da praça a área do canteiro. Esse aluno mostrou que sabe calcular a área de figuras quadradas, entretanto, verificamos que ele teve dificuldade para executar o que foi solicitado no enunciado, isto é, representar a área da praça que ficou fora do canteiro. Essa dificuldade sinalizou que esse tipo de atividade pode não ser algo familiar para ele.



a) Qual é a expressão que representa a área da praça que ficou fora do canteiro?

b^2+a^2

b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia b^2-a^2	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

A Lúcia, o calculo que esta na tabela é a igual a ~~sua~~ resposta da LÚCIA

Paulo, Ele soma b+b, a+a que também está certo

Ana, a única diferença é que ela soma ~~tudo~~ ~~todos~~

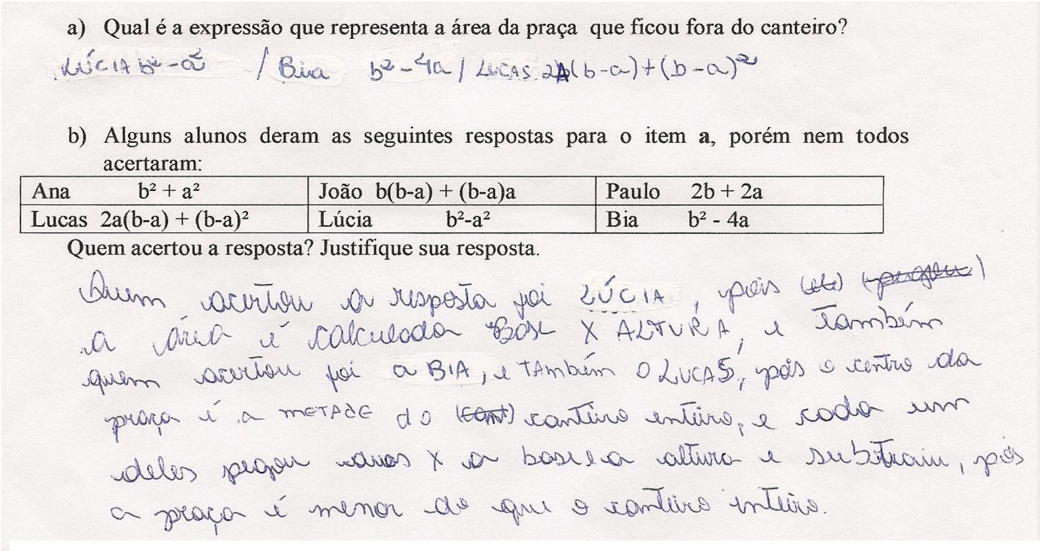
Figura 24 - Protocolo do aluno A2 - Atividade 2

Para esse aluno ter realizado a subtração, no caso de Lúcia, ou ter realizado a soma, no caso de Ana, não há diferença de resultado, indicando que para ele os conceitos das operações não estão bem claros e, por isso, não realizou a verificação dos seus resultados. A não verificação dos resultados pode estar relacionada ao fato dos resultados não terem provocado dúvidas para ele, portanto não sentiu necessidade de estudar sua resposta.

Comparando com o item **b,** foi possível observar que, aparentemente, ele conseguiu simplificar termos semelhantes, como se percebeu na justificativa referente a Paulo, cuja expressão algébrica 2b + 2a é expressa como sendo b+b e a+a. Entretanto, essa resposta sinalizou dúvidas entre o produto de letras semelhantes e a soma de letras semelhantes, sendo que na primeira aplicamos propriedades da potenciação e na segunda, utilizamos a propriedade da soma de termos semelhantes. Dessa forma, o aluno **A2** mostrou que não domina essas propriedades, consequentemente, tem dificuldade de aplicá-la em situações nas quais são ferramentas de resolução.

O aluno **A2** poderia ter percebido alguns dos seus equívocos se tivesse recorrido ao quadro aritmético para atribuir valores particulares para as letras **a** e **b**, substituindo nas expressões para verificar quais teriam resultados equivalentes.

O aluno **A1** (figura 25) inicialmente apresentou uma resposta, que na fase de validação se mostrou ineficaz, levando-o a sua reformulação. Esse aluno utilizou as expressões do item **b** para identificar a resposta correspondente à área da praça menos o canteiro e, para tanto, ele recorreu aos conhecimentos anteriores sobre o conceito de área de uma figura retangular. Verificou-se ainda, que durante sua formulação, ele não utilizou o quadro numérico para analisar suas respostas, mas apenas o quadro geométrico para conceituar área e comparar as expressões algébricas dadas com o conceito de área, conforme podemos observar no protocolo seguinte.



a) Qual é a expressão que representa a área da praça que ficou fora do canteiro?

LÚCIA $b^2 - a^2$ / Bia $b^2 - 4a$ / LUCAS $2A(b-a)+(b-a)^2$

b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia b^2-a^2	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

Quem acertou a resposta foi LÚCIA, pois (ela) ~~(pegou~~) a área é calculada BASE X ALTURA, e também quem acertou foi a BIA, e TAmbém O LUCAS, pois o centro da praça é a METADE do ~~(cant)~~ canteiro inteiro, e cada um deles pegou vários X a base e a altura e subtraiu, pois a praça é menor do que o canteiro inteiro.

Figura 25 - Protocolo do aluno A1 - Atividade 2

Esse aluno, como outros da turma, demonstrou ter dificuldade para manipular letras, bem como para distinguir o procedimento de cálculo de perímetro e de área. No momento em que indicou a resposta de Bia, a aluna fictícia, como a correta, ele não percebeu que o segundo termo da expressão correspondia ao perímetro do canteiro, logo não poderia ser a resposta certa. É relevante a questão da percepção geométrica, pois tanto esse aluno quanto o aluno **A3,** indicaram que a área da praça deveria ficar menor que a do canteiro, sinalizando que o princípio da inclusão de um elemento menor dentro do maior não está bem construído por eles e, consequentemente, têm dificuldades para perceberem tal fato, logo, não configuraram a resposta como um resultado duvidoso.

As respostas apresentadas pelos alunos demonstraram, em alguns casos, que eles buscaram retificar suas formulações de tal forma que pudessem corrigir possíveis erros detectados. De acordo com Margolinas (1993) o aluno, ao identificar por si mesmo um erro na formulação, está exercendo sua condição de aluno autônomo capaz de utilizar seus conhecimentos para realizar a verificação de uma resposta dada a uma situação-problema. Essa característica observada na escrita desse aluno, não é algo exclusivo dele, mas detectado também na produção de outros.

Notou-se que o recurso de recorrer à soma das áreas para indicar a nova área da praça foi algo recorrente, o que pode sinalizar uma dificuldade de interpretar a situação apresentada. Observou-se que os alunos não tiveram a compreensão de que se retirarmos um certo espaço de dentro de um maior espaço, o maior deverá reduzir de tamanho e, dessa forma, a operação a ser realizada seria a subtração. Há fatores que contribuíram para essa dificuldade de interpretação e um deles é a de que os alunos, na sua maioria, buscam no professor a validação de suas atitudes matemáticas, isto é, até o tipo de operação que devem realizar é, em muitos anos de estudo, indicada pelo professor, o que ocasiona uma situação de heteronomia (Camargo, 1999). Em relação a esse aspecto, alguns professores, desde os primeiros anos escolares, incentivam essa situação ao apresentarem situações nas quais o aluno já sabe o que deve usar para resolver cada uma, não tendo o trabalho de criar suas estratégias para chegar ao resultado e, concomitantemente, tentar verificar a validade dessas estratégias.

4.3 Atividade 3

A **atividade 3**[15] solicitava que os alunos verificassem se a resposta apresentada por um aluno fictício estava correta.

Os alunos resolveram a atividade individualmente e, em seguida, discutiu-se coletivamente algumas soluções de tal forma que pudessem perceber os possíveis erros e como realizarem a validação dos resultados encontrados.

A análise das produções nos permitiu verificar que os alunos não tiveram dificuldade para realizar o cálculo com letras, que eles dominaram o procedimento para calcular o perímetro de uma figura retangular presente na atividade, e que tiveram facilidade para trabalharem com expressões algébricas simples, isto é, que não envolvam na mesma atividade multiplicação e soma algébrica.

O uso do quadro algébrico associado ao quadro geométrico possibilitou que verificassem os resultados e observou-se que os erros cometidos por alguns alunos na atividade 1 não se repetiram. Esse fato reforça a hipótese de que os alunos pesquisados tinham dificuldade para operar com o cálculo de área e de perímetro em uma mesma atividade. Além disso, conforme observamos nas atividades anteriores, o conhecimento referente à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição não está suficientemente consolidado.

Nessa atividade, os alunos **A1, A2, A3** e **A4** utilizaram os quadros algébrico e o geométrico para verificarem a resposta presente no enunciado. As confrontações entre suas resoluções e as do enunciado lhes permitiram validar as respostas do enunciado. Dessa forma, a interação entre os dois quadros serviu para verificar também sua resolução. Para esses

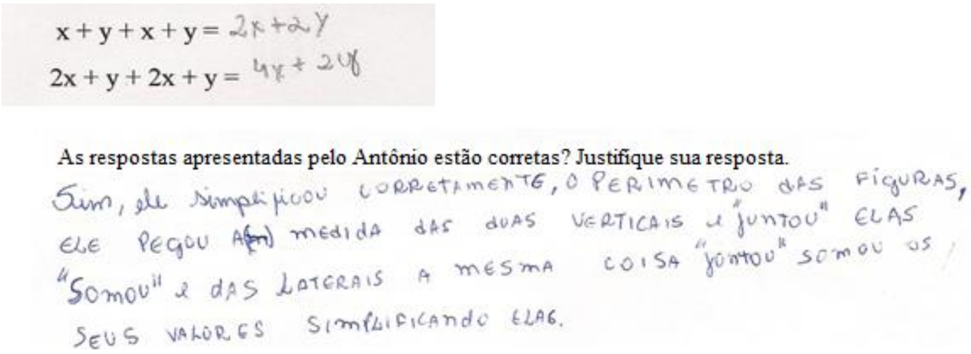
---

[15] Ver a figura 27, página 96.

alunos, o fato de a atividade envolver conhecimentos já adquiridos, não configurou uma dificuldade, mas uma situação de reinvestimento.

Um outro aspecto observado nessa atividade foi a medida do segmento, isto é, a presença de dois segmentos com medida x representados com tamanhos diferentes, o que poderia ter sido percebido visualmente por eles. Essa incoerência pode sinalizar a falta de percepção geométrica, ao aceitarem essa imprecisão. Pode também indicar que os alunos centraram mais a atenção nos dados literais ou nos números correspondentes aos elementos das figuras do que nas reais medidas das partes das figuras e das relações entre elas.

Vejamos a produção do aluno A1 a partir do seu protocolo a seguir.



$x + y + x + y = 2x + 2y$

$2x + y + 2x + y = 4x + 2y$

As respostas apresentadas pelo Antônio estão corretas? Justifique sua resposta.

Sim, ele simplificou corretamente, o perimetro das figuras, ele pegou ~~A~~ medida das duas verticais e "juntou" elas "somou" e das laterais a mesma coisa "juntou" somou os seus valores simplificando elas.

Figura 26 - Protocolo do aluno A1 - Atividade 3

Foi possível constatar que o aluno **A1** utilizou conceitos do quadro geométrico para formular suas justificativas, o que não foi suficiente para convencer da certeza de sua resposta, visto que ele realizou a operação algébrica entre os termos semelhantes. Podemos concluir que sua ação inicial não foi capaz de lhe oferecer segurança suficiente sobre sua resposta, levando-o a tomar uma nova decisão para ter segurança da validade de sua resposta. Em relação a esse aspecto, Margolinas (1993) afirma:

> A incerteza é explicitamente levada em consideração por Balacheff, e para ele ela deve conduzir à procura de provas. Contrariamente, nós pensamos que a incerteza quanto ao resultado pode levar os alunos a uma dúvida favorável a um projeto de verificação, em particular na conclusão da fase de ação. (MARGOLINAS, 1993, p. 188, tradução nossa)

Esse aluno permaneceu no quadro algébrico, não sentindo necessidade de utilizar, por exemplo, o quadro aritmético para verificar a validade de sua formulação, tanto é que sua justificativa descreveu o que foi realizado no quadro algébrico para somar e reduzir os termos. A não utilização do quadro numérico para verificar sua ação, provavelmente, está relacionada ao fato de o livro didático apresentar poucas atividades em que o aluno precisa justificar suas respostas (Santos, 2007) utilizando o mesmo quadro da Matemática ou recorrendo a outros para confirmar sua resposta.

Essa tomada de decisão em simplificar as expressões e a seguir utilizar-se do conceito de perímetro para analisar a resolução do aluno fictício Antônio, possibilitou-lhe uma verificação da validade da resposta. Isso foi suficiente para ele ter certeza de suas conclusões, não sentindo necessidade de utilizar o quadro numérico, o que caracterizamos como um reinvestimento do seu conhecimento, segundo Margolinas (1993).

O aluno **A5** realizou a simplificação das expressões algébricas apresentadas no enunciado (figura 27), utilizando conceitos do quadro geométrico. Inicialmente ele identificou cada figura por um símbolo, o qual lhe permitiu apresentar uma justificativa para indicar como chegou ao resultado a partir da representação geométrica. Esse procedimento lhe permitiu concluir pela validade das igualdades algébricas apresentadas na atividade.

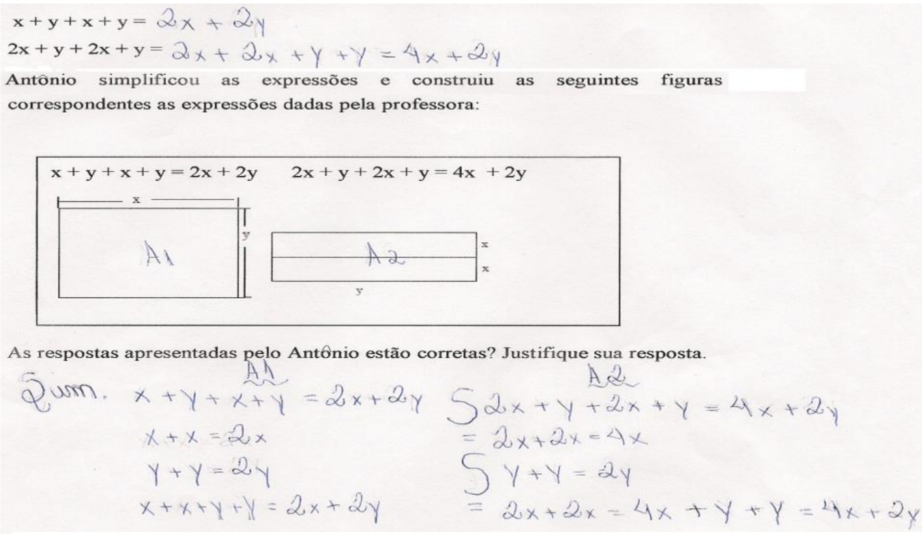


Figura 27 - Protocolo do aluno A5 - Atividade 3

Foi possível observar que houve envolvimento do aluno na atividade proposta, entretanto, ele precisava saber utilizar os respectivos quadros para validar suas ações. Percebeu-se que a primeira tomada de decisão não lhe deu segurança suficiente sobre sua resposta, levando-o a buscar um novo caminho para verificar a validade. A busca de novos caminhos para realizar a verificação surgiu da intervenção do pesquisador ao indagar sobre a certeza que ele tinha em relação à correspondência entre a expressão e a figura desenhada.

Como os alunos anteriores, ele não sentiu necessidade de utilizar o quadro aritmético e atribuir valores particulares para verificar as igualdades das expressões algébricas obtidas, possivelmente por configurar uma atividade de reinvestimento de conhecimento e, conforme apontado por Santos (2007) não é uma prática pedagógica proposta pelos livros didáticos e, consequentemente, pelo professor. Dessa forma, os alunos não são familiarizados com atividades nas quais precisam recorrer a outros quadros para justificar suas respostas ou produzir argumentos sobre a certeza dos seus cálculos.

O aluno **A6,** diferentemente dos alunos anteriores, analisou a resolução apresentada e, utilizando-se do conhecimento sobre perímetro de figura retangular, buscou produzir um texto no qual pudesse expressar suas conclusões. Verificou-se, no seu protocolo (figura 28), que ele soube como determinar o perímetro de uma figura retangular, porém na sua justificativa acrescentou a descrição para calcular a área de uma figura retangular. Tal ação pode ter sido uma influência da atividade anterior, visto que na sessão que resolveram essa atividade, também foram retomado alguns elementos da atividade 2, que envolvia o cálculo da área de uma praça, esse fato levou-o a acrescentar o procedimento para calcular área de uma figura retangular. Essa resposta pode sinalizar que as noções de perímetro e área não foram apropriadas adequadamente, indicando um certo grau de instabilidade no momento de utilizá-las. Como calcular o perímetro de uma figura retangular não é novidade para ele, mas sim um reinvestimento de conhecimento e, por isso, ele não sentiu necessidade de utilizar-se de outros quadros matemáticos para verificar a validade de suas conclusões.

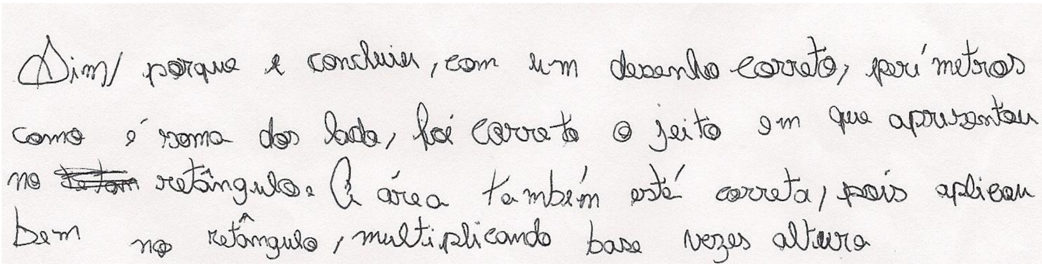

Sim/ porque e concluiu, com um desenho correto, perí metros como é soma dos lado, foi correto o jeito em que apresentou no ~~tatam~~ retângulo. A área também está correta, pois aplicou bem no retângulo, multiplicando base vezes altura

Figura 28 - Protocolo do aluno A6 - Atividade 3

Observamos também que o aluno **A6** não utilizou valor numérico para verificar a validade das igualdades, entretanto quando questionado pelo pesquisador em outras situações, ele utilizou o quadro aritmético para realizar a verificação e justificar sua resposta. Na atividade anterior, esse aluno recorreu ao quadro aritmético para realizar a verificação da validade das respostas apresentadas no enunciado, mas nessa ele não utilizou este recurso, talvez pelo fato da situação não apresentar dificuldade para ele, constituindo-se num exercício de reinvestimento do conhecimento sobre o perímetro. A utilização do cálculo de área pode ser um indício de que para ele toda vez que uma atividade traz uma figura, significa que ele deverá utilizar o conceito de área para realizar o cálculo, o que pode ser uma influência das atividades desenvolvidas durante as aulas com o professor e/ou influência das atividades 1 e 2, que solicitavam que utilizassem o conceito de área. Vale observar que esse aluno também não percebeu a incoerência entre as medidas dos lados, representados pela letra x nas duas figuras, como já observamos antes, provavelmente em razão de não centrar sua atenção nas medidas e sim na representação algébrica.

O aluno **A7,** conforme pode ser observado em seu protocolo (figura 29), analisou as respostas apresentadas, fazendo uso do conceito de perímetro de uma figura retangular para justificar sua resposta, o que caracterizamos como uma mudança entre os quadros algébrico e geométrico.

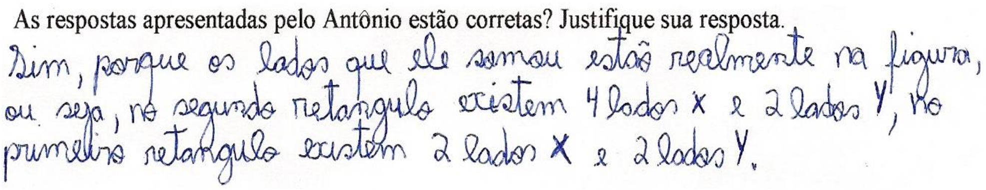

As respostas apresentadas pelo Antônio estão corretas? Justifique sua resposta.
Sim, porque os lados que ele somou estão realmente na figura, ou seja, no segundo retangulo existem 4 lados x e 2 lados y, no primeiro retangulo existem 2 lados x e 2 lados y.

Figura 29 - Protocolo do aluno A7 - Atividade 3

Foi possível perceber que o aluno A7 recorreu ao quadro geométrico para justificar sua resolução, a qual foi confrontada com a resposta apresentada na atividade. No entanto, ele não sentiu necessidade de usar o quadro algébrico ou aritmético para verificar se sua resolução estava correta e/ou a apresentada no enunciado da atividade. A procura por uma verificação levou-o a determinar um procedimento que lhe permitiu apresentar uma argumentação para convencer os demais alunos da sala sobre a validade de sua análise. Como os alunos anteriores, ele não procurou verificar a validade da representação geométrica apresentada pelo aluno fictício Antônio, provavelmente por dificuldade de realizar a passagem do quadro algébrico para o quadro geométrico; desse modo, ele resolveu aceitar como certa a representação e assim se preocupou em verificar a validade somente da resposta apresentada no quadro algébrico.

O aluno **A8** optou em partir do quadro geométrico para compor as expressões referentes ao perímetro das duas figuras retangulares desenhadas na atividade, assim pôde verificar se as expressões constantes do enunciado eram verdadeiras ou não.

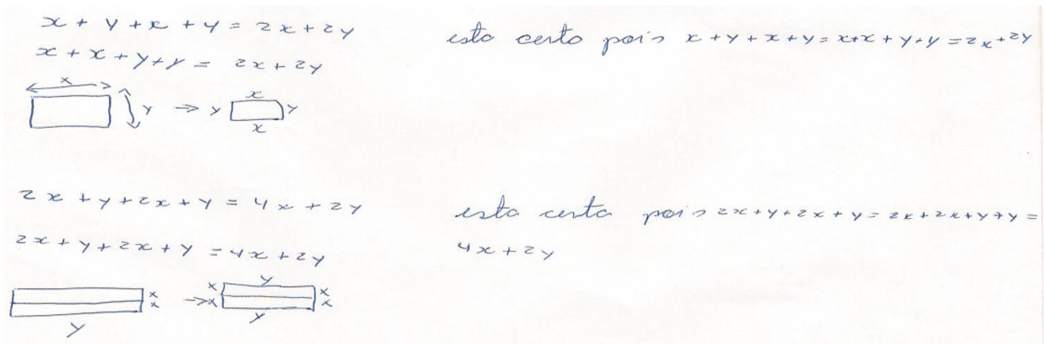


Figura 30 - Protocolo do aluno A8 - Atividade 3

Conforme protocolo (figura 30), observamos que esse aluno inicialmente utilizou o quadro geométrico identificando os lados paralelos com medidas congruentes e a seguir aplicou o método para calcular o perímetro de uma figura retangular, mudando para o quadro algébrico, visto que as medidas estavam na forma de letras no sentido de indeterminada e esse quadro foi utilizado para confrontar com a resposta apresentada no enunciado da atividade. Com base em Douady (1986), quando o aluno interage em dois quadros, possibilita progredir os conhecimentos que lhe servirão de base para resolver futuros desafios. Verificou-se que o uso da letra como indeterminada possibilitou a aplicação de propriedades das operações para o cálculo com letras, associando-o ao cálculo do perímetro de uma figura retangular. Como os demais alunos, ele também não percebeu a diferença entre as medidas dos segmentos representados pela letra x.

Em relação ao jogo de quadros, alguns alunos o utilizaram para verificar a validade dos resultados, porém foi necessária a ação do pesquisador, indagando-os sobre as certezas e incertezas em relação aos resultados apresentados por eles. Foi observado que inicialmente eles não estabeleceram valores particulares para as letras, o que lhes permitiriam realizar a verificação e, com isso, ocorrer à interação entre os três quadros. Essa dificuldade de interagir nos três quadros persistiu impossibilitando a verificação por meio da interação dos três quadros.

Para os alunos, o uso do quadro algébrico foi algo automático nas atividades, considerando que vários o utilizaram como procedimento para realizarem a verificação. Ainda durante a sessão, percebeu-se que alguns tiveram dificuldade para distinguir o momento de aplicar a propriedade de potência e soma de termos semelhantes, dificultando, assim, a validação das respostas.

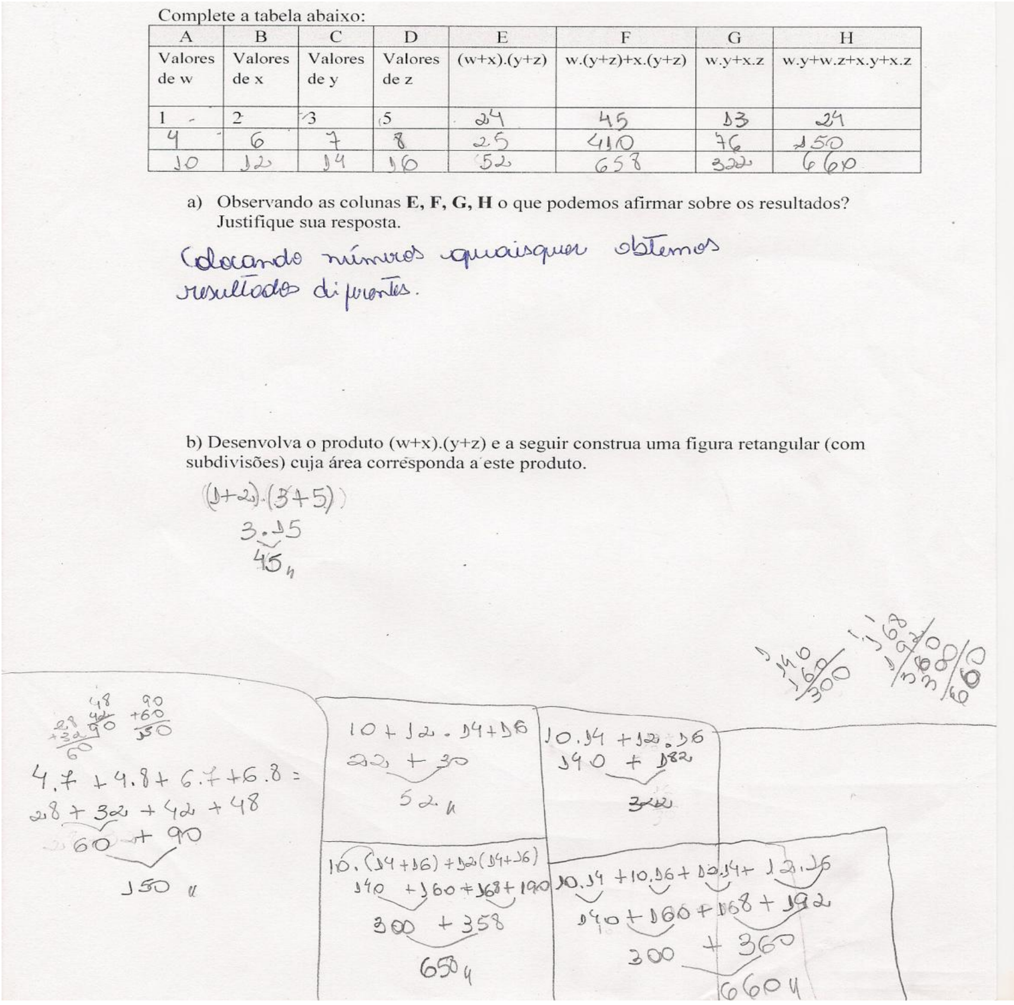
De acordo com Margolinas (1993), a fase de validação é de responsabilidade do aluno e ele precisa estabelecer critérios que a seu ver sejam suficientes para validar suas conclusões. Esses alunos optaram por realizar a verificação das igualdades entre as expressões algébricas usando o quadro geométrico e o algébrico, sinalizando que foi suficiente.

4.4 Atividade 4

O objetivo da atividade **4** foi verificar o uso da propriedade distributiva para confirmar a validade das igualdades entre expressões algébricas do tipo $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$, a qual foi desenvolvida em uma hora/aula. Os alunos receberam a atividade individualmente sendo orientados que deveriam completar a primeira linha e a seguir atribuir valores para as letras x, y, z, w. Encontrados os valores numéricos de cada linha-coluna, eles deveriam responder as perguntas a e b, procurando justificar suas respostas.

Por meio da análise dos protocolos foi possível constatar que muitos alunos tiveram dificuldade de trabalhar com as expressões numéricas que se formaram ao atribuir valores para as letras e, além disso, muitos também não trabalharam com os parênteses mesmo existindo nas expressões algébricas. Observou-se a resistência de alguns em atribuir outros valores para as letras e que esses alunos também tiveram dificuldades para operar utilizando parênteses. Interpretamos tal resistência como um indício de que o conhecimento não foi consolidado e, nesse caso, seria necessário um trabalho mais eficaz em relação ao uso da letra com o estatuto de número indeterminado.

Os alunos precisavam atribuir valores numéricos para a letra e assim, utilizando as propriedades aritméticas, encontrarem valores associados a cada coluna e analisarem as colunas comparando os resultados obtidos para identificarem as igualdades algébricas. O aluno **A1** não percebeu a igualdade entre as colunas E, F e H. Tomando uma linha da tabela, ele encontrou valores diferentes para as colunas. Analisando os protocolos (figura 31), verificamos que os erros nos valores não foram ocasionados pelo desconhecimento matemático, mas provavelmente pela falta de atenção ao anotar o resultado. A não adoção dos cálculos como objeto de estudo pode ter relação com o domínio das operações, ou seja, as contas que surgiram da substituição configuraram à primeira vista para esse aluno, um reinvestimento de conhecimentos. Dessa forma, de acordo com Margolinas (1993), os cálculos não configuraram um projeto de resolução do aluno, conforme podemos observar no protocolo a seguir.



Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	24	45	13	24
4	6	7	8	25	410	76	150
10	12	14	16	52	658	322	660

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

Colocando números quaisquer obtemos resultados diferentes.

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

(1+2).(3+5)
3.15
45

4.7 + 4.8 + 6.7 + 6.8 =
28 + 32 + 42 + 48
60 + 90
150

10 + 12 . 14 + 16
22 + 30
52

10.14 + 12.16
140 + 182
322

10.(14+16) + 12.(14+16)
140 + 160 + 168 + 190
300 + 358
658

10.14 + 10.16 + 12.14 + 12.16
140 + 160 + 168 + 192
300 + 360
660

Figura 31 - Protocolo do aluno A1 - Atividade 4

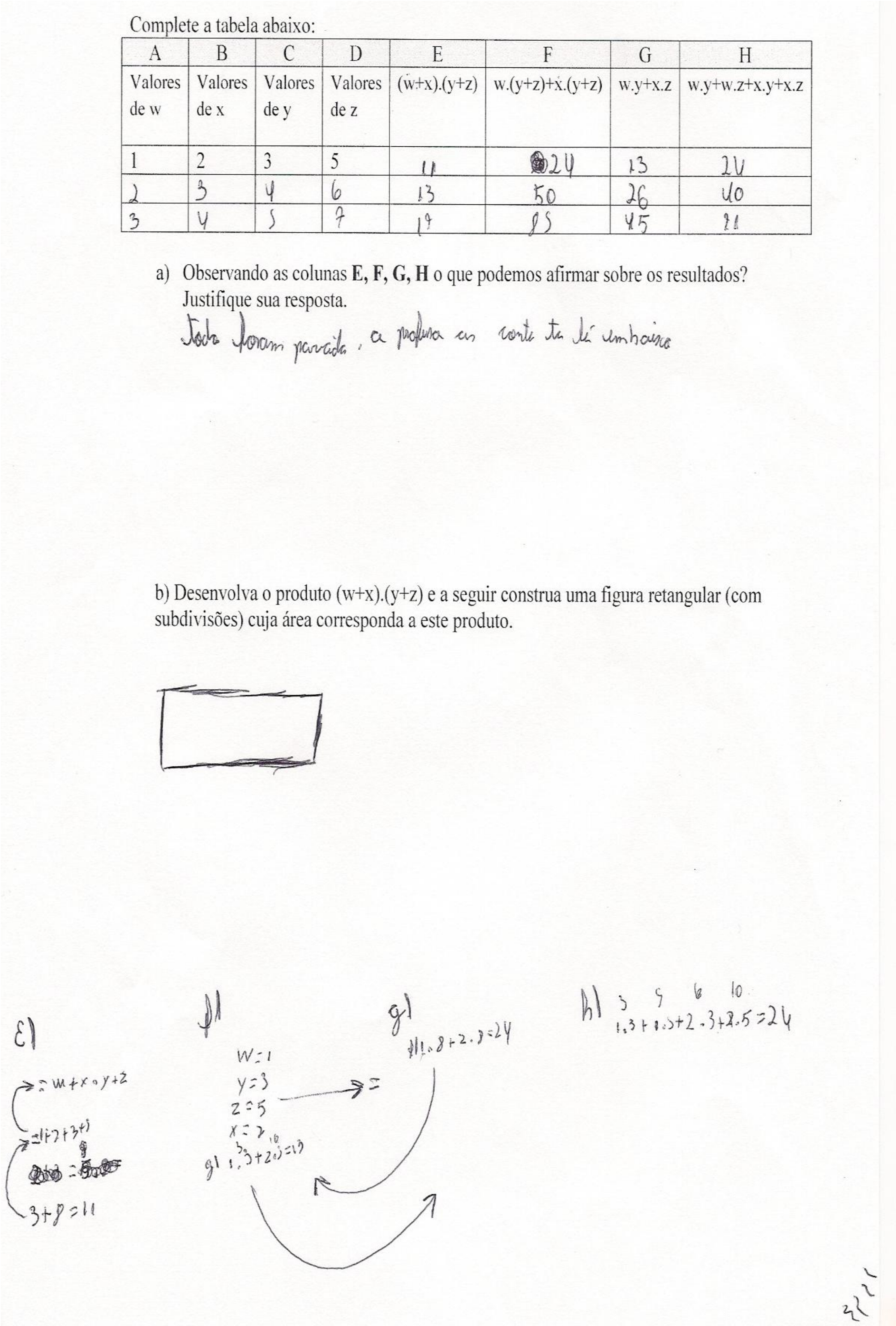
Observa-se que no produto 12 vezes 16 ele registrou 190 numa conta, e em outra, esse mesmo produto resulta 192. Não podemos afirmar que ele não soube calcular o valor numérico de uma expressão algébrica, pois no item **b** ele fez a substituição das letras por um número, realizando as contas corretamente. Comparando a tabela com o item **b**, notou-se que na conta 10 + 12 . 14 + 16, o aluno não percebeu a necessidade de utilizar os parênteses, o que provavelmente o induziu a realizar a soma no final. Chegou-se a essa conclusão após compararmos com o item **b** no qual ele realizou o cálculo do valor numérico para a expressão (w+x) (y+z), utilizando os parênteses e, nesse caso, respeitou as prioridades de operações chegando ao resultado correto.

Esse aluno não realizou a representação geométrica solicitada no item **b**, provavelmente por não ter vivenciado situações nas quais deveria, a partir de uma expressão algébrica, realizar a representação geométrica.

O aluno **A2,** de acordo com seu protocolo (figura 32), atribuiu valores numéricos para as letras realizando as operações, entretanto sua resposta ao item **a** não foi correta. Constatou-se que os erros foram provocados pelo não uso dos parênteses, levando-o a não perceber a multiplicação entre os termos (w+x)(y+z). Para o item **b,** o aluno representou um único retângulo sem as subdivisões e também não indicou as medidas dos lados. Possivelmente, para ele, ao somar "coisas" que não sabia o valor o resultado seria algo que ele não sabia o valor (Bonadiman, 2007). Ele não sentiu necessidade de utilizar valores numéricos para realizar a verificação da validade de sua formulação, mesmo sendo um procedimento provocado pela atividade. Para esse aluno, o erro cometido não caracterizou um resultado incoerente, razão pela qual não foi conduzido a uma retificação da ação. De acordo com Margolinas (1993), para esse aluno o conhecimento necessário não estava consolidado, consequentemente a atividade não se tornou um projeto de resolução seu.

É importante destacar que esse aluno realizou parte dos cálculos em um rascunho e, mesmo diante da solicitação para que passasse para a folha, ele afirmava que tinha feito os cálculos de "cabeça" e que não sabia como transcrever o que tinha pensado. Tal postura sinaliza que ele preocupa-se em apresentar um resultado final e não os cálculos e procedimentos utilizados para resolver uma atividade.

Como alguns alunos apresentaram somente um resultado final, essa situação foi contornada pelo pesquisador com indagações assim elaboradas: Como você chegou a esse resultado? Você poderia mostrar por que ele está certo? Se tivesse que explicar para seu colega como resolver, como você faria? E se essa explicação tivesse que ser por escrito, como você faria? A partir desses questionamentos, os alunos passaram a tentar expressar suas ideias em relação à atividade.



Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	11	24	13	24
2	3	4	6	13	50	26	40
3	4	5	7	19	85	45	21

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

Todos foram parecidos, a professora as contas tá lá embaixo

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

E)

= w + x . y + z

= 1 + 2 + 3 + 5

3 + 8 = 11

F)

w = 1

y = 3

z = 5

x = 2

g) 1.3 + 2.5 = 13

g)

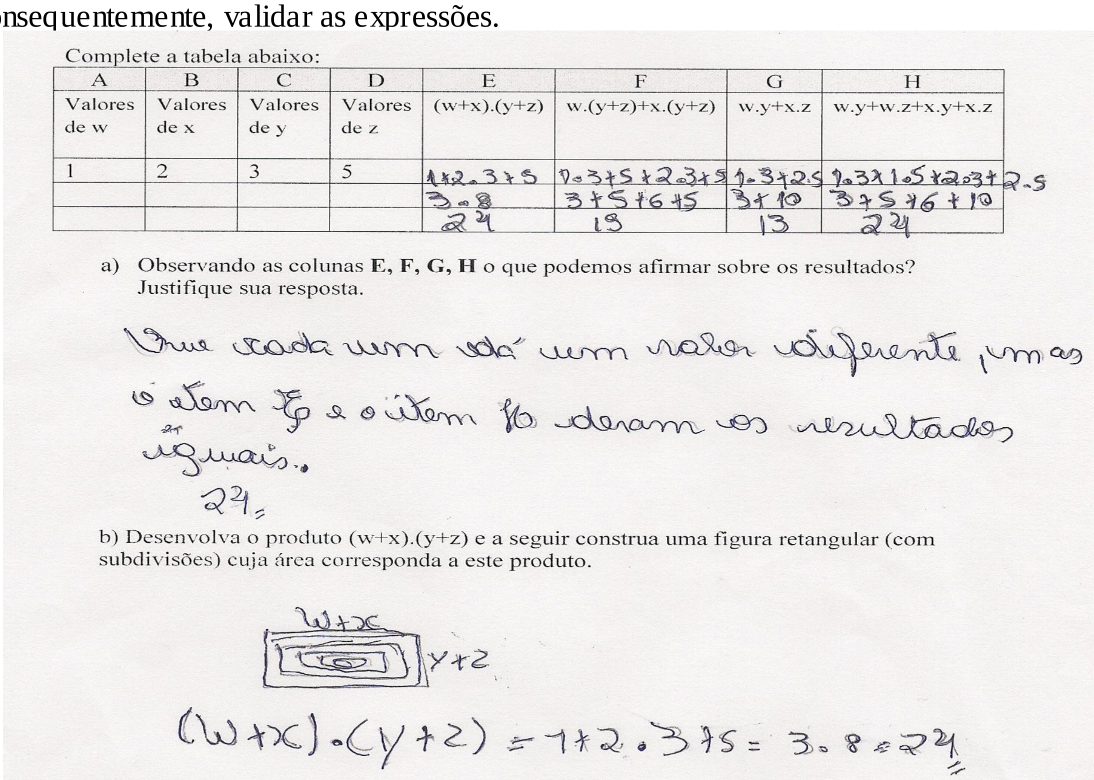
1.8 + 2.8 = 24

h) 1.3 + 1.5 + 2.3 + 2.5 = 24

Figura 32 - Protocolo do aluno A2 - Atividade 4

O aluno **A3** identificou a igualdade de resultados entre as colunas E e H, mas foi possível perceber que essa conclusão foi retirada da resolução de uma única linha. Nesse momento, o pesquisador questionou–o sobre a necessidade de realizar a verificação para as outras linhas, e o aluno enunciou que não sentiu essa necessidade, portanto não a realizou. No item **b** o aluno respondeu utilizando o campo algébrico e o campo numérico, retomando o que foi desenvolvido na tabela. Já sua dificuldade em produzir uma representação geométrica adequada pode ter como causa a falta de atividades nos livros didáticos, nas quais o aluno precisaria passar da representação algébrica para a geométrica.

O protocolo (figura 33) nos permitiu verificar que, mesmo após a provocação de indicar novos valores para as letras no item **a**, esse aluno não teve tal iniciativa. Ainda, como essa atividade foi realizada posterior a alguns debates sobre como poderia realizar a verificação dos resultados, bem como justificar suas estratégias, o aluno não recorreu a essa informação para verificar a validade da resposta apresentada, tanto por ele como pela própria atividade. Assim, mesmo o aluno tendo realizado atividades em que há vários caminhos para verificar a validade dos resultados, observou-se que ele não se utilizou desse conhecimento. Tal fato, pode indicar que o conhecimento referente ao uso de valores numéricos, para comprovar a igualdade entre expressões algébricas, não foi consolidado, o que impossibilitou-lhe estabelecer estratégias que lhe permitiria refutar o resultado para tomar novas decisões e, consequentemente, validar as expressões.



Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	1+2.3+5	1.3+5+2.3+5	1.3+2.5	1.3+1.5+2.3+2.5
				3.8	3+5+6+5	3+10	3+5+6+10
				24	19	13	24

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

Que cada um dá um valor diferente, mas o item E e o item H deram os resultados iguais.

24.

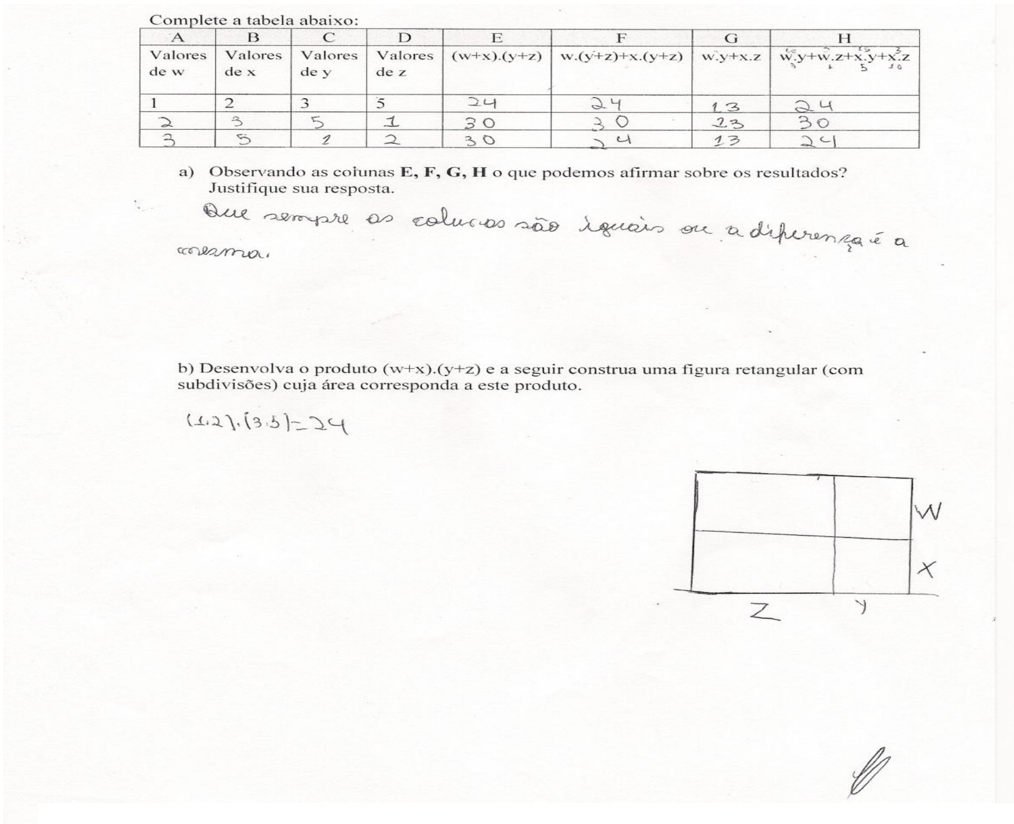
b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

(w+x).(y+z) = 1+2.3+5 = 3.8 = 24

Figura 33 - Protocolo do Aluno A3 - Atividade 4

Dessa forma, pudemos constatar que inicialmente esses alunos não identificaram a relação entre os objetos matemáticos. Provavelmente essa atitude esteja relacionada ao fato de que no livro utilizado predomina o uso algébrico sem muitas relações com os outros quadros matemáticos.

Na atividade 4, o aluno A4 atribuiu valores numéricos para as letras realizando as operações corretamente. Ele ainda identificou as semelhanças entre as colunas e no item **b** representou a figura geométrica adequadamente, associando assim a expressão algébrica apresentada no enunciado com a área de figura retangular. Constatou-se que, diferentemente dos outros colegas, ele percebeu que a soma w + x representa a adição de segmentos adjacentes. Sua passagem do quadro algébrico para o quadro geométrico ocorreu de forma correta, o que influenciou posteriormente o seu discurso ao responder ao debate de validação da atividade 4, na qual ele conseguiu identificar a representação geométrica para a expressão algébrica apresentada na atividade.


Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	24	24	13	24
2	3	5	1	30	30	23	30
3	5	1	2	30	24	13	24

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

Que sempre as colunas são iguais ou a diferença é a mesma.

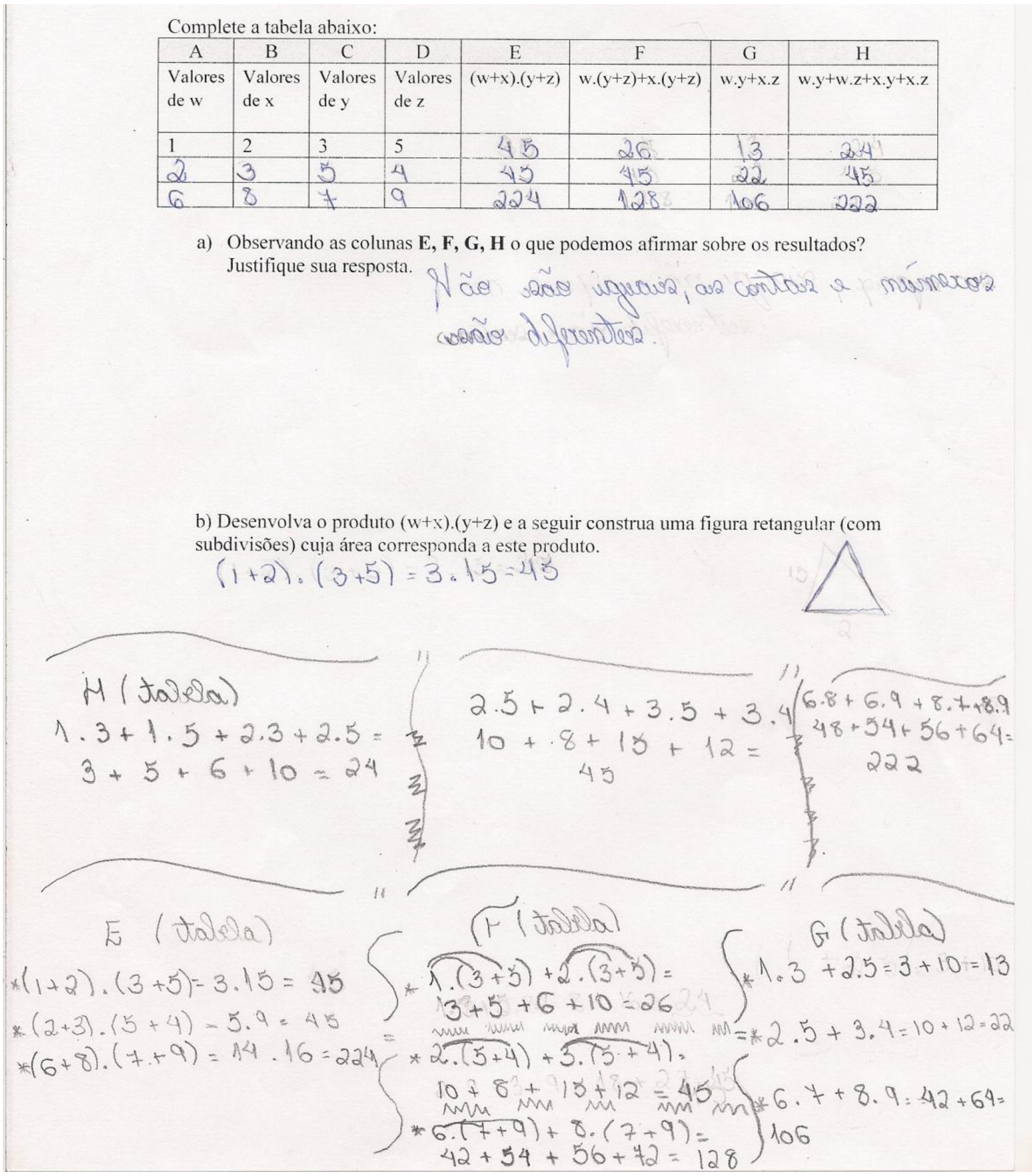
b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

(1.2).(3.5)=24

Figura 34 - Protocolo do aluno A4 - Atividade 4

Analisando o protocolo do aluno **A4** (figura 34) percebeu-se que ele dominou as regras básicas da aritmética, entretanto os erros encontrados não foram por motivo de falta de conhecimento, mas sim erros simples de soma que, quando questionado sobre sua validade, ele percebeu que tinha errado e ainda considerou que tinha sido erros tolos. Conforme já detectado por Margolinas (1993), quando citou Balacheff sobre erros dos alunos, o aluno **A4** não viu significado na sua resposta, isto é, o "meio" tabela não foi suficiente para provocar uma retroação, visto que a tabela não estava vinculada a uma situação-problema, a que seria respondida pelos valores da tabela, conforme pode ser observado na figura 33.

No item **b** o aluno **A4** demonstrou que percebeu a relação entre o produto dado no quadro algébrico com a respectiva representação no quadro geométrico, entretanto, o uso do quadro numérico, consideramos que ele o fez apenas para cumprir a solicitação de tentar utilizar os três quadros, pois não verificou a validade de seu desenho. Dessa forma, a mudança de quadro ocorreu não por vontade dele, mas para atender à solicitação, assim não foi utilizado como instrumento de verificação. Contudo, não podemos negar a sua evolução em relação à compreensão da interação dos conhecimentos em diferentes quadros. Nas primeiras atividades essa percepção não foi imediata, mas percebeu-se nessa atividade, uma aparente mudança de postura. Tal conclusão se fundamenta nas socializações anteriores nas quais buscou-se desenvolver nos alunos a percepção da importância de se usar mais de um quadro para justificar as afirmações e assim ter segurança para defender suas respostas. A dificuldade percebida durante a experimentação em utilizar um quadro diferente daquele que foi formulado, tem relação com aspectos já apontados por Santos (2007), isto é, não é uma prática realizada naturalmente.


Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	45	26	13	24
2	3	5	4	45	45	22	45
6	8	7	9	224	128	106	222

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

Não são iguais, as contas e números serão diferentes.

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

(1+2).(3+5) = 3.15 = 45

H (tabela)
1.3 + 1.5 + 2.3 + 2.5 =
3 + 5 + 6 + 10 = 24

2.5 + 2.4 + 3.5 + 3.4
10 + 8 + 15 + 12 =
45

6.8 + 6.9 + 8.7 + 8.9
48 + 54 + 56 + 64 =
222

E (tabela)
*(1+2).(3+5) = 3.15 = 45
*(2+3).(5+4) = 5.9 = 45
*(6+8).(7+9) = 14.16 = 224

F (tabela)
* 1.(3+5) + 2.(3+5) =
3 + 5 + 6 + 10 = 26
* 2.(5+4) + 3.(5+4) =
10 + 8 + 15 + 12 = 45
* 6.(7+9) + 8.(7+9) =
42 + 54 + 56 + 72 = 128

G (tabela)
*1.3 + 2.5 = 3 + 10 = 13
*2.5 + 3.4 = 10 + 12 = 22
*6.7 + 8.9 = 42 + 64 =
106

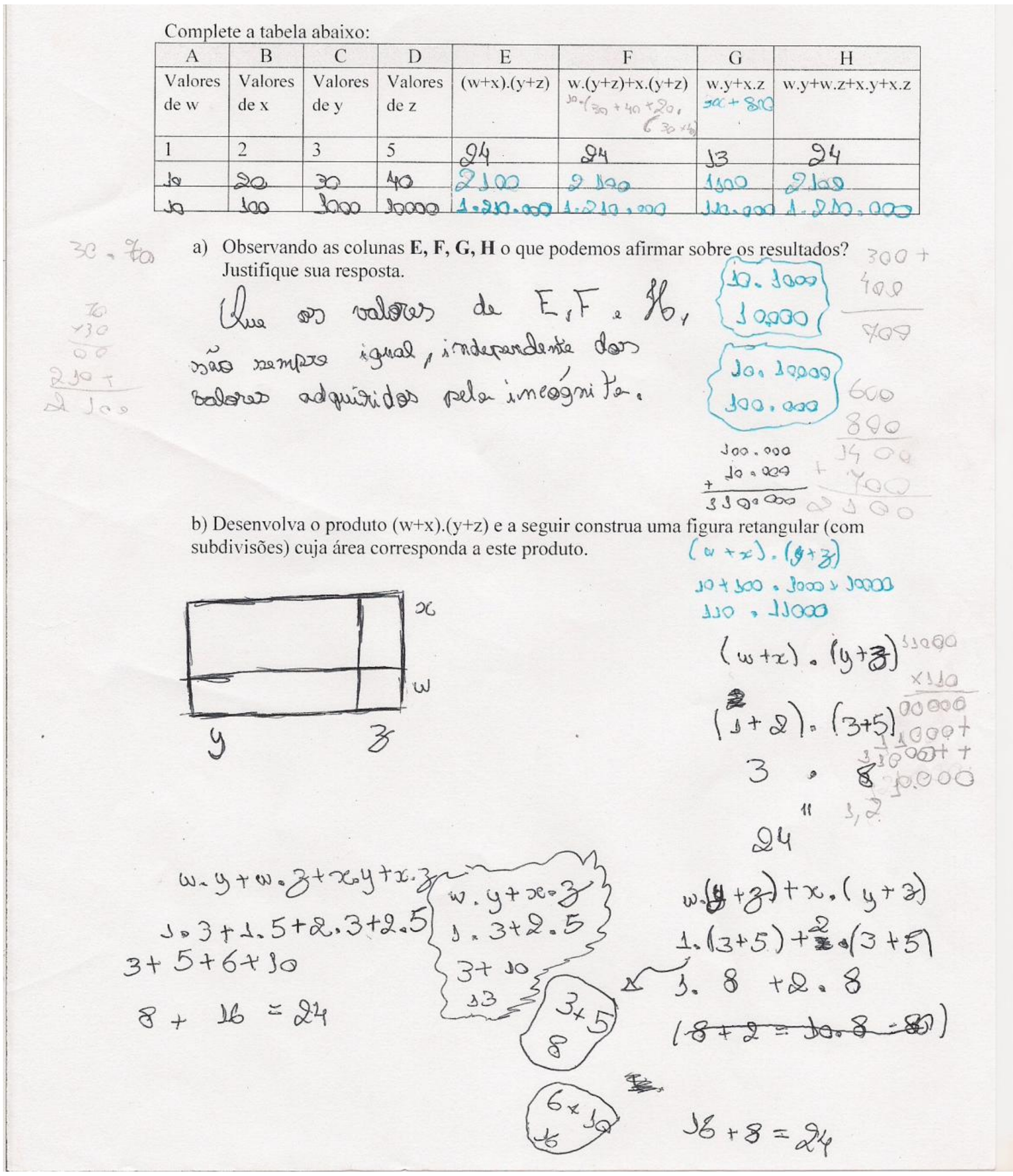
Figura 35 - Protocolo do aluno A5 - Atividade 4

Já o aluno **A5**, conforme observado no protocolo da atividade 4 (figura 35), na elaboração da sua resposta notou-se que, por equívoco, ele registrou a resposta da multiplicação do 8 pelo 9, no caso da coluna G e H, como sendo 8 vezes 8. Tal fato contribuiu para que ele não percebesse a semelhança entre as colunas E, F, e H. Ainda, foi possível verificar que cometeu um erro casual ao realizar as operações, pois no caso da terceira linha da coluna F, somou apenas os dois últimos valores (56 e 72), sendo este outro fator que interferiu na sua análise e consequente conclusão. Dessa forma, seus resultados sinalizaram que o item **a** não configurou uma situação-problema capaz de denotar para esse aluno, a devolução no sentido da Teoria das Situações Didáticas, pois caso tivesse sido, o aluno teria notado seu erro e assim retomado sua resolução como objeto de estudo. Outro aspecto verificado foi em relação ao resultado da primeira linha, no qual foi possível observar que inicialmente ele teria feito o cálculo certo, porém no momento em que foi conferir o resultado, acabou somando errado os valores obtidos após aplicação da propriedade distributiva em relação à adição. Tal fato também foi observado por Bonadiman (2007) no grupo de alunos pesquisados por ela.

O aluno no item **b** não conseguiu passar do quadro algébrico para o quadro geométrico e ainda nesse caso, o uso do quadro numérico no item **a** não inspirou a busca por uma representação geométrica que correspondesse a seus registros numéricos utilizados no item **b**.

Observando o protocolo do aluno **A6** (figura 36) foi possível constatar que mudou do quadro algébrico para o geométrico, verificando a congruência de resultados entre as colunas E, F e H. Ainda, ele não teve dificuldade de responder ao item **b**, pois realizou a representação correta, o que caracterizou uma mudança do quadro algébrico para o geométrico. Constatou-se que como os seus colegas, ele não sentiu necessidade de utilizar os parênteses no momento de substituir as letras por valores numéricos, mostrando que domina o conhecimento sobre operações com expressões numéricas. Seu protocolo apresentou a ocorrência de uma primeira formulação que o levou a uma retomada sobre seus cálculos para retificar os que estavam errados e assim produzir uma nova formulação.

Para o aluno A**6** o uso do quadro numérico configurou-se como um recurso para convencer-se e também os colegas da validade de suas estratégias, assim como demonstrou a necessidade de realizar a verificação dos resultados em mais de um quadro como forma de certificar-se das suas respostas, passando, assim, de um estado de heteronomia para um estado de autonomia. O uso de valores múltiplos de dez sinalizou um tipo de contrato didático proposto pelo professor de Matemática da turma, isto é, havia um combinado entre o professor e os alunos de que se quisessem testar uma fórmula para verificar se correspondia à situação estudada, eles deveriam pegar um número pequeno e um número grande e se chegassem ao resultado esperado, estaria certo.



Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	24	24	13	24
10	20	30	40	2100	2100	1100	2100
10	100	1000	10000	1.210.000	1.210.000	110.000	1.210.000

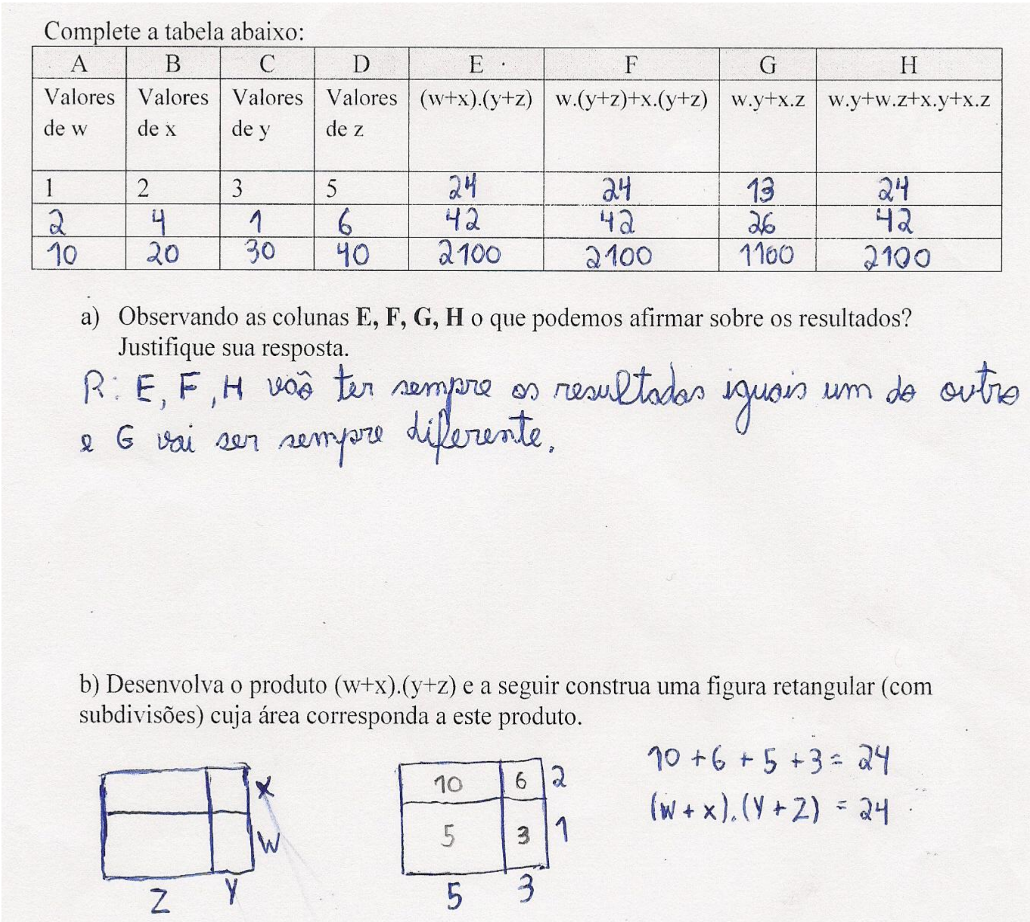
a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

Que os valores de E, F e H, são sempre igual, independente dos valores adquiridos pela incógnita.

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

Figura 36 - Protocolo do aluno A6 - Atividade 4

Observando o protocolo referente à atividade 4 (figura 37), foi constatado que o aluno **A7** não teve dificuldade para realizar a mudança do quadro algébrico para o quadro numérico, utilizando essa mudança para validar as igualdades algébricas propostas na tabela do item **a.** Ainda, os seus resultados reforçaram aquela presença de um contrato didático estabelecido entre o professor e os alunos durante os estudos iniciais de padrões e regularidades, em que a partir do momento em que se identifica a expressão algébrica que generaliza o processo, esta deve ser testada para valores pequenos e valores grandes e caso corresponda à situação estudada, está certa. No item **b** ele também realizou a passagem do quadro algébrico para o geométrico. Conquanto, ele procurou validar sua construção utilizando o quadro numérico, e dessa forma, conseguiu realizar a passagem do quadro algébrico para o geométrico e para o numérico.



Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	24	24	13	24
2	4	1	6	42	42	26	42
10	20	30	40	2100	2100	1100	2100

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

R: E, F, H vão ter sempre os resultados iguais um do outro e G vai ser sempre diferente.

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

Figura 37 - Protocolo do aluno A7 - Atividade 4

O uso do quadro numérico permitiu-lhe que verificasse a validade de sua representação, ao atribuir valores para x, w, y e z, que foram os mesmos já utilizados na tabela, possibilitando-lhe validar sua formulação. Notou-se que, na representação geométrica, ele não observou a proporcionalidade entre o valor atribuído à letra e à medida do segmento. Dessa forma, observa-se na sua representação, desproporcionalidade entre os segmentos, reforçando a análise realizada na atividade anterior na qual ele não notou o erro de proporcionalidade entre as medidas dos lados de duas figuras, cujos lados tinham a mesma letra para indicar as respectivas medidas.

A análise do protocolo do aluno A**8** para essa atividade 4 não apresentou muitas novidades em relação ao já visto na análise dos alunos anteriores, portanto não apresentamos a sua descrição. A título de apreciação, o referido protocolo encontra-se nos anexos desse trabalho.

Analisando o conjunto de protocolos observamos que os alunos conseguiram realizar a passagem do quadro algébrico para o quadro numérico, bem como alguns alunos conseguiram passar do quadro algébrico para o quadro geométrico. Conquanto, encontraram dificuldades em associar a expressão algébrica à figura correta, sinalizando que as vivências com atividades propostas no quadro geométrico para serem representadas no quadro algébrico indicam elementos insuficientes para contribuir com a associação entre as representações. Isso demonstra que são necessárias atividades em que o aluno tenha que realizar o processo contrário.

Observou-se, ainda, que alguns alunos tiveram dificuldade em recorrer ao quadro numérico para verificar os registros, o que pode estar relacionado ao não uso de parênteses para indicar a prioridade das operações, provocando, assim, alguns erros de cálculo.

4.5 Algumas considerações gerais sobre a experimentação

Para finalizar as análises, apresentamos um quadro síntese retomando os procedimentos adotados pelos alunos e outro quadro retomando os erros cometidos por eles durante o processo de verificação das igualdades entre expressões algébricas. Pretendemos, assim, realizar algumas considerações a respeito do que foi observado.

Tabela 1 - Quadro comparativo dos erros presentes nos protocolos

	Atividade 1	**Atividade 2**	**Atividade3**	**Atividade 4**
Uso de parênteses				A1, A2, A3
Troca de operações (potenciação-multiplicação)		A1, A2, A3, A5, A7, A8		
Reconhecimento de propriedades geométricas de figuras retangulares		A2, A3, A5, A8	A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8	A1, A2, A3, A7
Distinção entre medidas de segmentos e de superfícies	A3, A8	A2, A7		A2, A3

Letra como número indeterminado	A3, A4, A6, A8	A3,		A2
Propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição	A1, A2, A3, A8	A1,A2, A3, A7, A8		A1, A2

Conforme a tabela acima, os erros observados ocorreram nos três quadros trabalhados nesta pesquisa, isto é, aritmético, algébrico e geométrico.

Os erros aritméticos foram de dois tipos: erros em razão do uso dos parênteses e troca de operações (multiplicação-potenciação). O primeiro levou os alunos, em alguns casos, a trocarem a multiplicação pela adição, por exemplo, o registro do aluno **A1,** o qual na atividade **4,** ao realizar a substituição das letras no produto (w + x) (y + z), não colocou os parênteses e, no final, acabou somando os resultados dos parênteses ao invés de multiplicar.

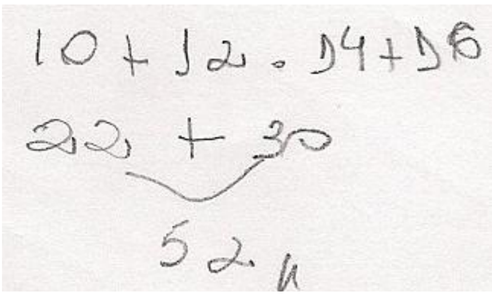


Figura 38 - Erro pela ausência dos parênteses

Esse tipo de erro contribuiu para que o aluno não verificasse a igualdade entre as colunas na atividade 4. De acordo com Margolinas (1993), esse erro não configurou um resultado duvidoso para o aluno talvez por não configurar um projeto de ação para ele. O fato de não configurar um projeto de ação dele, pode ter vínculo com o tipo de contrato didático desenvolvido durante as aulas, isto é, o professor é aquele que informa o que deve ser feito e se o que foi realizado está correto ou não (Camargo, 1999). Essa reflexão se baseia em afirmações como “ué, você não é o professor? Então diga se está correto (sic)” ou “você fica fazendo perguntas e não me diz se está certo (sic)”.

O segundo erro aritmético, inicialmente poderia ser interpretado como uma distração e/ou uma resposta somente para cumprir o contrato didático da sala de aula, no qual o aluno precisa apresentar uma resposta independente dos procedimentos adotados, porém em outros momentos da experimentação, foram sugeridas situações nas quais foi notado que configurava um erro resistente. Esse erro indicou uma dificuldade para interpretar a letra quando aparece acompanhada de um coeficiente ou tem um expoente. Um exemplo é o aluno A3 que incorreu nesse tipo de erro no momento de responder a atividade 2, na qual identificou a resposta do aluno fictício Paulo como correta. E quando solicitado que realizasse a verificação de algumas expressões propostas pelo pesquisador, na qual deveria utilizar valores numéricos, esse aluno no momento de realizar $2n^2$ fez o cálculo do n^2 como sendo 2n. Ainda, na expressão n^2, ele somou o expoente com a base. Esse erro sinalizou que não tem domínio do conceito de potência e, assim, não conseguiu utilizar esse conhecimento como ferramenta de resolução de situações-problema apresentadas a ele.

O erro algébrico de não reconhecimento da letra como número indeterminado influiu no processo de verificação, ao conduzir os alunos a concluírem que alguns resultados apresentados não estavam corretos. Ainda, esse erro no primeiro momento em que surgiu, foi interpretado como sendo um efeito do contrato didático, entretanto, com a apresentação de expressões nas quais deveriam verificar a validade, voltaram a incorrer no mesmo erro. Dessa forma, concluímos que não se tratava de um efeito do contrato, mas uma dificuldade em relação ao conhecimento matemático. É importante destacar que esse erro foi superado por alguns alunos durante a experimentação, porém outros demonstraram que necessitariam de mais atividades para que pudessem superar a dificuldade.

Um exemplo dessa superação é o caso do aluno **A6** que no primeiro momento, realizou a adição de 8 com x, porém durante a resolução ele percebeu a incoerência entre a expressão anotada e as medidas da figura geométrica. Ao perceber seu erro, corrigiu-o refazendo os cálculos, porém, em outro momento esse aluno voltou a incorrer nesse erro, não conseguindo percebê-lo e, por esse motivo, não o corrigiu.

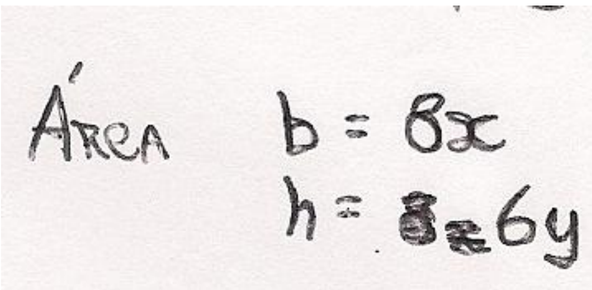


Figura 39 - Erro não reconhecimento da letra como número indeterminado.

O uso dos conhecimentos antigos foi importante para o aluno A6 identificar seu erro inicial e assim refazer seus cálculos utilizando o procedimento correto. Em outro momento esse aluno, sinalizou que, em alguns casos, a tendência é a utilização dos conhecimentos momentâneos para responder os problemas que lhe são apresentados. Um exemplo desse fato ocorreu quando foi apresentada uma figura em que eles deveriam apresentar a resposta para o perímetro e esse aluno recorreu ao procedimento para resolver equações, o que não interpretamos como uma dificuldade de aceitar a ausência aparente da propriedade do fechamento.

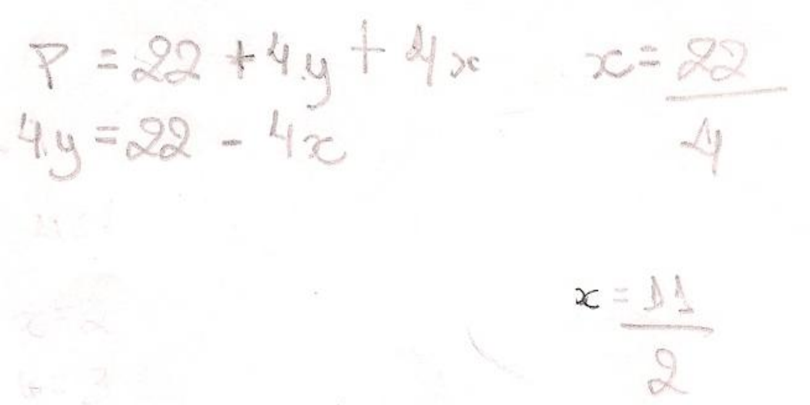


Figura 40 - Exemplo de erro não reconhecimento da letra como número indeterminado.

O fato de esse erro não ter sido corrigido pelo aluno, nos permitiu concluir que ele associou com o conteúdo estudado e, no momento em que foi questionado sobre sua resolução, citou o procedimento de equações.

Ainda referente ao quadro algébrico, os alunos incorreram no erro relativo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, sendo a influência desse erro considerável, visto que interferiu na identificação da expressão correta, assim como não possibilitou que alguns alunos realizassem a verificação de suas respostas ou as propostas nas atividades. Percebe-se essa dificuldade na resposta do aluno **A8** (figura 41), o qual não realizou a verificação correta das expressões algébricas que corresponderiam à área da praça, após construção do canteiro.

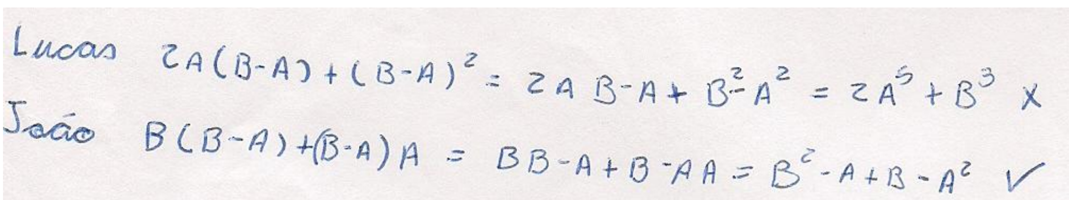


Figura 41 - Erro por não aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação a adição.

Esse erro foi resistente sinalizando que precisaria de mais atividades para que fosse superado, assim como indicou que o trabalho com atividades algébricas não propiciou a aprendizagem da estrutura aritmética referente a essa propriedade muito utilizada no estudo de multiplicação de polinômios. De acordo com Trigueros et al (2005), esse erro é cometido pelos alunos que não conseguiram dar sentido ao uso que se faz das letras. No esforço de dar um sentido à letra, descrito anteriormente, eles recorrem a sua experiência aritmética, a qual não lhes possibilita nenhuma intervenção nesse processo, pois em geral, não é ensinada com o propósito de facilitar a aprendizagem algébrica.

Analisando os protocolos e tendo como referência o quadro geométrico, percebemos que os alunos incorreram em dois tipos de erros, que estão relacionados à dificuldade de reconhecer propriedades geométricas de figuras retangulares e de distinguir entre medidas de segmentos e de superfície. De acordo com Trigueros et al (2005), o aluno teria dificuldade para diferenciar os distintos usos da letra durante a resolução de atividades matemática. No caso da nossa pesquisa, os alunos mostraram ter dificuldade no momento em que a atividade apresentou a letra associada à medida do lado da figura.

Um exemplo é a atividade 2 na qual a medida do lado foi indicada como sendo b e, nesse caso, os alunos deveriam calcular a área da figura multiplicando a letra por ela mesma. Entretanto, alguns alunos indicaram que b^2 é igual a $2b$ no momento de interpretar as expressões presentes no item b dessa atividade. Entendemos que, além de ser uma dificuldade algébrica, esse erro sinalizou uma possível dificuldade em distinguir entre medida de segmento e de área. A resistência desse erro indicou que esse tipo de conhecimento não foi construído pelos alunos de tal maneira que pudessem utilizá-lo para resolver outras atividades.

Ainda no quadro geométrico percebemos que os alunos tiveram dificuldade para reconhecer as propriedades geométricas de figuras retangulares, isto é, durante as atividades eles sinalizaram maior atenção às medidas dos lados das figuras do que à representação geométrica e suas características. Um fato que exemplifica essa possível dificuldade foi observado nas atividades 2 e 4, pois na primeira não perceberam a pertinência entre a área do canteiro e da praça e na segunda, alguns alunos tiveram dificuldade para representar a figura retangular que seria associada à expressão $(w + x)(y + z)$. Quando foram apresentadas outras figuras que respeitavam a relação de tamanho e outras que não, para verificar se perceberiam, novamente não foi percebido por eles, indicando que o erro ocorreu por não dominarem algumas propriedades geométricas.

Dessa forma, para alguns alunos o processo de verificação ficou comprometido durante a realização das atividades, sinalizando que precisavam de mais tempo para que superassem suas dificuldades e assim utilizassem seus conhecimentos para fazerem a verificação por meio da interação de quadro ou mesmo da mudança de quadro entre dois ou mais quadros.

A seguir discorreremos sobre o processo de verificação e o uso dos quadros para alcançarem êxito nesse processo. Para tanto, elaboramos uma tabela na qual listamos os quadros utilizados pelos alunos em cada atividade e, dessa forma, podemos propiciar ao leitor uma síntese dos procedimentos de verificação desenvolvidos por eles.

Tabela 2-Quadro comparativo das decisões dos alunos.

Alunos	Atividade 1	Atividade 2	Atividade 3	Atividade 4
A1	*geométrico-algébrico	*geométrico-algébrico	*geométrico-algébrico	*algébrico-numérico
A2	Não realizou mudança	*geométrico-algébrico	*geométrico-algébrico	*algébrico-numérico algébrico-geométrico
A3	*geométrico-algébrico	*geométrico-algébrico	*geométrico-algébrico	*algébrico-numérico *algébrico-geométrico *geométrico-algébrico
A4	*geométrico-algébrico	*geométrico-algébrico-numérico	*geométrico-algébrico	*algébrico-numérico *algébrico-geométrico
A5	*geométrico-algébrico	*geométrico-algébrico	*geométrico-algébrico	*algébrico-numérico *algébrico-geométrico
A6	*geométrico-algébrico	*geométrico-algébrico-numérico	*algébrico-geométrico	*algébrico-numérico *algébrico-geométrico *geométrico-algébrico
A7	*geométrico-algébrico	*geométrico-algébrico	*geométrico-algébrico	*algébrico-numérico *algébrico-geométrico *geométrico-algébrico
A8	*algébrico	*geométrico-algébrico	*geométrico-algébrico	*algébrico-numérico *algébrico-geométrico

Por meio da análise da tabela, concluímos que o processo de verificação das atividades apresentadas pode ser classificado em três grupos, considerando os procedimentos utilizados pelos alunos ao realizarem as atividades e justificarem suas respostas.

O primeiro grupo são os procedimentos que ficaram no quadro proposto na atividade. Esse tipo de procedimento sinalizou que as atividades não configuraram desafios que levassem os alunos a mudarem de um quadro para outro, a fim de verificarem suas respostas, ou que não havia o domínio necessário sobre os objetos matemáticos que lhes permitissem realizar qualquer mudança de quadro.

Foi possível verificar que essa atitude de permanência no quadro foi resistente durante a experimentação, o que levou alguns alunos a não perceberem seus erros ou, de acordo com Margolinas (1993), seus resultados duvidosos. Um fator que possibilitou essa conclusão foi o uso recorrente do quadro algébrico como único procedimento de verificação.

O segundo grupo reuniu os casos de verificação na qual os alunos utilizaram mais de um quadro em um processo somente de ida, sem retornarem aos outros quadros para confirmarem suas conclusões. Nesse grupo, percebemos uma predominância do uso do quadro geométrico e algébrico quando já propostos no enunciado e/ou, no caso da atividade 4, do quadro aritmético e algébrico, em que, de modo geral, os alunos partiram do quadro algébrico para o aritmético chegando a alguns resultados congruentes, mostrando-se satisfeitos com os resultados para responderem a pergunta **a**. Conquanto, esperávamos que tentassem realizar a multiplicação dos binômios para encontrarem a expressão equivalente e nessa também realizassem a substituição, o que caracterizaria a interação de quadros.

E, por último, as verificações nas quais os alunos realizaram a interação de quadros, isto é, iniciaram pelas informações do enunciado e durante a resolução recorreram a outro quadro para verificarem a validade. Esse uso ocorreu por meio das idas e voltas entre os quadros utilizados na resposta. Vale ressaltar que esse foi um tipo de verificação utilizado por poucos alunos, principalmente envolvendo os três quadros propostos nesta pesquisa.

Um exemplo que caracterizamos como interação dos três quadros foi a resposta do aluno **A4** na atividade 2, em que inicialmente utilizou o quadro geométrico para identificar os elementos para realizar o cálculo no quadro algébrico e a seguir, retornou ao quadro geométrico para realizar a verificação, no caso das medidas serem dadas por valores particulares, encontrando um valor numérico para representar a área final da praça. Na sequência, atribuiu os mesmos números para verificar se a expressão algébrica obtida estava correta. Esse não foi um caso único, pois em outras atividades percebemos que alguns alunos também realizaram esse tipo de verificação, para que pudessem se assegurar da validade de suas respostas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo estudar procedimentos utilizados pelos alunos para validarem igualdades entre expressões algébricas. Para tanto, realizamos leituras de trabalhos com temas correlatos e de documentos oficiais da educação brasileira, assim como a análise dos protocolos dos alunos ao resolverem atividades nas quais precisavam verificar os resultados apresentados.

Para a realização desta pesquisa nos inspiramos em Brousseau (1986), o qual considera que o processo de ensino e de aprendizagem ocorre por meio da desequilibração que é o momento em que o aluno não possui todo o conhecimento necessário para interagir em uma situação proposta e requilibração consiste no segundo momento em que ele, após investigações, consegue adaptar-se ao meio proposto lhe possibilitando elaborar uma solução para a situação. Além desse autor, buscamos aporte teórico nos Jogos de Quadros proposto por Douady (1986), em que o aluno, ao vivenciar os objetos matemáticos nos diferentes quadros, terá favorecido a construção do conhecimento sobre estes. No que concerne ao processo de verificação proposto por Margolinas (1993), o aluno durante a resolução de situações-problema constituiria estratégias que lhe permitiriam verificar a validade ou não de suas ideias e, no caso da não validação, possibilitaria tornar sua resolução o seu objeto de estudo. Para o desenvolvimento da parte experimental da pesquisa nos baseamos na Engenharia Didática descrita por Artigue (1986).

Considerando a temática e a análise desta pesquisa, infere-se que o professor ao elaborar as aulas de Matemática, deveria pensar em situações nas quais os alunos fossem conduzidos a vivenciarem momentos de descobertas, como ocorre com o matemático quando as investiga. É relevante destacar que, para a ocorrência desses momentos adidáticos, é fundamental que o professor proponha situações em que os alunos tenham conhecimentos necessários para compreendê-las e agirem sobre elas. Entretanto, esses conhecimentos não são suficientes para que cheguem à solução desejada, obrigando-os a investigarem caminhos diferentes para lograrem sucesso na resolução.

Nesse contexto educacional, o professor tem o papel importante de saber escolher situações-problema que sejam interessantes para os alunos e que respeite o conhecimento inicial que eles possuem, pois cabe a ele gerir todo o processo, de maneira que suas intervenções sejam instigadoras das ações dos alunos.

Nesta pesquisa, optamos por explorar atividades que contivessem situações que contemplassem pelo menos dois quadros matemáticos, de forma que os alunos fossem convidados a transitar entre os quadros para perceberem as relações entre os mesmos e assim identificarem o uso dos respectivos conhecimentos como ferramenta para validarem igualdades entre alguns tipos de expressões algébricas.

Observamos a dificuldade dos alunos em romperem o contrato didático, no qual o professor diz o que deve ser feito e como deve ser feito. Nesse caso, durante a experimentação, procurou-se forçar tal rompimento de contrato. Para tanto, a cada indagação feita pelos alunos se estava correta a resolução, uma nova pergunta era apresentada, afim de que os conduzisse a formular novos argumentos para justificar os procedimentos utilizados na realização e na verificação das atividades propostas. É importante destacar que, durante esses momentos, foi possível perceber alguns erros dos alunos decorrente do pouco domínio em relação aos conteúdos matemáticos. Os erros, detectados nas resoluções de alguns alunos, inviabilizaram a realização da verificação dos resultados e, consequentemente, de suas estratégias, indicando, assim, que conhecimentos antigos que lhes possibilitariam interagir com as atividades, não estavam consolidados.

As correspondências entre os quadros não são perfeitas, mas não podemos ignorar que há elementos invariantes entre os conceitos nos diferentes quadros, os quais constituem o conhecimento sobre determinado objeto matemático. Referente a esse aspecto, podemos categorizar os erros em três grupos: a primeira categoria, de erros aritméticos, a segunda, de erros algébricos e a terceira, de erros geométricos. Os erros aritméticos envolvem o uso de parênteses e o erro de troca de operações (multiplicação-potenciação). Os erros algébricos envolvem os erros da letra como número indeterminado e os erros que envolvem a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Os erros geométricos envolvem o reconhecimento de propriedades geométricas de figuras retangulares e distinção entre comprimento de segmento e superfície de quadrado.

Os **erros envolvendo o uso de parênteses** surgiram quando os alunos precisavam substituir as letras por valores particulares e, nesse momento, não utilizavam os parênteses para indicar prioridade de operações. Com o término da experimentação, reconhecemos que esse erro não foi totalmente superado pelos alunos que incorreram nele, indicando que há caminhos a serem percorridos no terreno da investigação sobre as concepções dos alunos em relação ao uso dos parênteses no cálculo de expressões numéricas e valores numéricos de expressões algébricas. Estamos, portanto, diante de um terreno fértil para uma investigação sobre o uso do quadro aritmético associado ao quadro algébrico para superar essa dificuldade e, assim, tornar a aprendizagem mais prazerosa em uma ação intradisciplinar.

O **erro pela troca de operações (multiplicação-potenciação)** levou alguns alunos a conclusões que influenciaram no processo de verificação. Por exemplo, no caso da atividade 2, na qual um grupo de alunos identificou a representação algébrica b^2 como sendo o mesmo que 2b, a troca das operações interferiu diretamente na verificação das expressões corretas. Esse erro sinalizou que o estudo algébrico não foi consolidado e que os alunos precisam perceber que as ideias associadas a cada escrita são diferentes. A primeira escrita tem relação com o conceito de área de um quadrado, enquanto 2b tem relação com a soma de dois segmentos congruentes.

Assim, esse erro demonstrou a necessidade de estudos mais detalhados em relação a essa dificuldade, identificando o que leva o aluno a esta troca e como poderia ser superada. No término da experimentação foi possível observar que essa dificuldade é recorrente e não foi superada com essa sequência de atividades.

No quadro geométrico detectamos o **erro** "**distinção entre medidas de segmentos e de superfície**"**.** Conforme a análise dos dados coletados, esse erro está relacionado com o erro envolvendo a troca de operações, pois durante a experimentação percebemos que o aluno não teve clareza da relação entre a medida do lado indicada no quadro algébrico ou aritmético com o segmento geométrico representante do lado da figura e/ou medida de superfície da mesma. Essa dificuldade influiu no momento de realizar a verificação da igualdade entre expressões algébricas dadas na atividade 2. Em relação a essa atividade, observamos a dificuldade dos alunos em transitarem entre o quadro aritmético e o geométrico, assim como entre o quadro algébrico e geométrico. Tal dificuldade impossibilitou que eles percebessem a diferença entre uma expressão que representa medida de comprimento de uma medida de superfície, o que provavelmente pode contribuir com a aprendizagem de potenciação e multiplicação no quadro algébrico.

A associação da representação geométrica para compreender algumas operações aritméticas poderia facilitar ao aluno perceber o que significa, por exemplo 3^2 que, na maioria das vezes, os alunos realizam a multiplicação da base pelo expoente, obtendo um resultado errado. Com o uso da representação, eles poderiam associar essa operação com a área de um quadrado de lado 3 e, dessa forma, apresentar um significado para a operação.

Ainda no quadro geométrico identificamos mais um erro. Os alunos indicaram em suas respostas que uma superfície maior estava inserida em uma superfície menor, sinalizando um **erro de reconhecimento de propriedades geométricas de figuras retangulares.** Esse fato levou alguns alunos a indicarem que a área da praça ficou menor que a do canteiro após a construção do mesmo. Esse erro influiu na identificação e na verificação das respostas corretas atribuídas por alunos fictícios, já que aqueles que incorreram nesse erro anotaram que a nova área era $b^2 + a^2$.

Em relação ao **erro interpretação da letra como número indeterminado**, os alunos encontraram dificuldade em aceitar a propriedade no quadro algébrico, como já detectado por Booth (1995), visto que a expressão algébrica do tipo 3a + 4 representa, ao mesmo tempo, o triplo de um número acrescido de quatro unidades e o resultado da soma 3a + 4. Acreditamos que essa dificuldade pode ter relação com o contrato didático implícito estabelecido desde o momento em que o aluno aprende a realizar as operações de adição, o qual determina que tem que existir um único número como resposta. Ainda, Trigueros et al (2005) sinalizam que esse tipo de erro tem relação com o processo de ensino, no qual os alunos são habituados a considerar a letra como etiquetas que se referem a entidades específicas ou a inicial de uma palavra. Ainda segundo os mesmos autores, esse fato contribui para não distinção dos diferentes usos da letra presente nas atividades.

Nesta pesquisa, esse erro provocou nos alunos uma desestabilização, gerando dúvidas em relação ao procedimento correto para estabelecer estratégias de resolução e, como não tinham conhecimentos necessários para aceitar essa representação da propriedade, não conseguiram superar as dificuldades. É importante destacar que as discussões e provocações feitas pelo pesquisador fizeram com que os alunos utilizassem o quadro aritmético para verificarem os resultados dos cálculos com as expressões algébricas, o que contribuiu com o processo de aprendizagem desse tema.

Esse erro pode ser consequência de uma concepção de álgebra, na qual a atividade algébrica se limita à utilização da letra com o estatuto de incógnita. Esse uso tem objetivo de descobrir o valor numérico que satisfaça a equação.

Outra dificuldade observada nos alunos foi em relação à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Tanto no quadro aritmético como no quadro algébrico, os erros sugerem que essa propriedade ainda não foi dominada pelos alunos como conhecimento antigo. O **erro relativo à propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição** interferiu consideravelmente em seus processos de verificação, visto que o não domínio desse conhecimento levou-os a não perceberem as congruências de resultados ou, até mesmo, os erros produzidos.

Ao final da experimentação, observou-se que esse é um erro que não foi superado completamente pelos alunos, pois havia alunos que ainda não conseguiam resolver o produto entre binômios. É o caso do aluno **A3** que, ao fazer $(x + 2)(x + 4)$, respondeu $x^2 + 8$, sinalizando a necessidade de mais tempo e atividades para superar essa dificuldade e, assim, adquirir condições para utilizar esse conhecimento para realizar a verificação.

Uma análise de possíveis influências do livro didático utilizado pelos alunos pesquisados

A proposta de ensino da Matemática contida nos livros didáticos pode ter funcionado como bloqueio à ação de alguns alunos durante o processo de verificação.

Em nossa pesquisa, buscamos nas análises do guia do PNLD/2008 e em leituras de outras pesquisas sobre o livro didático o que é priorizado nas atividades de álgebra presentes neles. Segundo o guia do PNLD/2008 (2007, p. 43), "*tradicionalmente, o estudo da álgebra no Ensino Fundamental tem-se iniciado no final da 6ª série, valorizando-se o cálculo algébrico e seu uso para resolver problemas de valores desconhecidos.*" Dessa maneira, priorizam atividades algorítmicas que não incentivam os alunos a levantarem hipóteses e produzirem argumentações para balizarem suas resoluções.

Ainda, o PNLD/2008 destaca que muitas coleções apresentam atividades que podem induzir o aluno para a acreditar que ações como levantar hipóteses, argumentar, justificar e verificar suas respostas sejam atitudes exclusivas do quadro geométrico.

> [...] No entanto, ainda persistem várias delas que simplesmente enunciam regras para resolução. Esse tipo de atitude pode induzir no aluno a crença de que justificativas (provas) em Matemática só existem em geometria, e que todo o campo da álgebra e dos números e operações consiste exclusivamente de regras. (PNLD, 2008, p. 45)

Na análise do PNLD/2008 notou-se que no 6º e no 7º ano predomina a concepção de álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas. No 8º ano, os autores priorizam o estudo de estruturas, porém não é proposto que os alunos testem suas respostas substituindo a letra por um número. Dessa forma, a atividade algébrica assume, de acordo com Lins e Gimenez (2006), o caráter de situações "letristas", na qual o aluno acaba não compreendendo os conceitos e propriedades de manipulação, fato que contribuiu para deixar a impressão de que a álgebra é algo difícil e que somente poucos compreendem.

Além disso, observamos que nos livros do 9º ano há uma tendência ao uso de regras para encontrar o valor do x, que ora é utilizado com o estatuto de número desconhecido, ora como argumento de função. Segundo Santos (2007), essa decisão dos autores é acompanhada por alguns professores que, às vezes, não sabem como sugerir atividades diferentes daquelas propostas pelo livro adotado. Dessa forma, o livro acaba sendo para o professor o melhor referencial para o trabalho didático.

Uma provável influência desse aspecto no ensino de Matemática, em sala de aula, foi percebida nas atividades em que os alunos usaram a letra, ora com o estatuto de incógnita nas quais era necessário descobrir um valor específico, ora não considerando a letra, operando com os números utilizados como coeficientes dos monômios, acarretando uma dúvida em relação à propriedade fechamento da adição. Nas atividades propostas nesta pesquisa o uso da letra com o estatuto de indeterminada ocorreu por provocação do pesquisador e não como uma iniciativa dos alunos para verificarem a validade de suas respostas e/ou das afirmações apresentadas no enunciado da atividade.

Considerações sobre as respostas na ótica da verificação por meio dos quadros

Na primeira atividade, os alunos não sentiram a necessidade de utilizar o quadro numérico para verificar a validade de suas tentativas para encontrar uma resposta; já na quarta atividade, notou-se uma mudança de postura, porém, esta mudança não foi adotada por todos, sinalizando que as propriedades aritmética, algébrica e geométrica, não configuraram conhecimentos antigos que lhes possibilitaram investir nas situações-problema para chegarem à resposta correta.

As respostas apresentadas pelos alunos demonstraram, em alguns casos, que a busca em retificar sua formulação não é uma prática natural, o que interferiu no envolvimento deles na fase de correção. De acordo com Margolinas (1993), no ensino clássico, a fase de correção cabe ao professor, que deve indicar o que está errado, de tal forma que o aluno, com esta informação, retorne para verificar o que errou e assim poder estabelecer uma nova estratégia para chegar à resposta correta.

Esperávamos que os alunos assumissem a responsabilidade de exercer a correção de suas respostas de forma autônoma, o que possibilitaria a construção de novos conhecimentos. Segundo Margolinas (1993), o aluno ao identificar por si mesmo um erro na formulação, está exercendo sua condição de aluno autônomo capaz de utilizar seus conhecimentos para realizar a verificação de uma resposta dada a uma situação-problema.

Analisando as respostas e as comparando com os objetivos propostos, constatamos que as atividades foram elucidativas para os alunos, isto é, os protocolos permitiram verificar os tipos de procedimentos utilizados por eles e suas dificuldades para realizar a verificação da igualdade algébrica utilizando os quadros geométrico e aritmético. A dificuldade de utilizar outros quadros para realizar a verificação dos resultados sinalizou a pouca exploração de atividades, que conduzem os alunos a perceberem as relações entre os quadros ou que solicitem a eles a justificativa da validade de suas estratégias.

O uso do quadro algébrico foi algo automático nas atividades, considerando o fato de que os alunos o utilizaram como procedimento para realizarem a verificação. Entretanto, isso não significa que todos sabem perfeitamente operar com as letras e com base nas diferentes concepções propostas por Usiskin (1995), sinalizou-se uma possível consequência das atividades algébricas apresentadas pelo professor durante o estudo da álgebra.

De acordo com Margolinas (1993), a fase de validação é de responsabilidade do aluno e ele precisa estabelecer critérios que, a seu ver, sejam suficientes para verificar a validade das suas conclusões. No caso desta pesquisa, os alunos optaram por justificar suas ações pelo quadro geométrico e algébrico. O uso do quadro geométrico foi muito mais descritivo do que representativo, isto é, eles utilizaram a retórica para descrever elementos geométricos associados à escrita algébrica ou não. Dessa forma, concluiu-se que, para esses alunos, justificar utilizando os dois quadros foi suficiente para garantir a validade das suas respostas. Acreditamos que a atitude de não recorrer ao quadro numérico tem como possível causa o número de atividades presentes no livro didático utilizado pela turma em que ocorreu a pesquisa, que solicita aos alunos que realizem o cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica. Esses cálculos não têm o intuito de verificar a igualdade entre expressões e/ou entre expressões e representações geométricas.

Pelo fato de os alunos terem estudado os procedimentos para realizarem o cálculo do valor numérico de expressões, era esperado que recorressem a esta estratégia para verificarem a igualdade de expressões algébricas, entretanto, como na maioria das vezes é o professor que realiza a correção, isso contribuiu para que os alunos não compreendessem que poderiam utilizar esta estratégia para verificarem se as expressões algébricas escritas por eles estavam corretas. Nesta pesquisa, almejávamos que os alunos adotassem uma postura mais autônoma e que produzissem conhecimentos em relação ao uso do jogo de quadros para verificar a validade de igualdades entre expressões algébricas.

O conjunto de protocolos sinalizou que os alunos sabem que podem atribuir valores particulares para a letra, encontrando assim um valor particular. Esse fato nos permitiu concluir que eles foram capazes de realizar a passagem do quadro algébrico para o quadro aritmético. No entanto, na passagem do quadro algébrico e/ou aritmético para o geométrico, observamos que os alunos, na sua maioria, não conseguiram estabelecer relações e dessa maneira, não realizaram a referida passagem entre os quadros.

A dificuldade em associar a expressão algébrica à figura correta assinalou que não basta somente a apresentação de atividades propostas no quadro geométrico para serem representadas no quadro algébrico para o aluno construir a associação entre os quadros, mas que são necessárias atividades em que o aluno tenha que realizar o processo contrário, ou seja, a passagem entre os quadros algébrico, geométrico e aritmético. Segundo Douady (1986), quando o aluno muda de um quadro para outro seu conhecimento poderá progredir. A interação entre os quadros possibilitará ao aluno descobrir as relações entre eles e assim compreender outros diferentes significados conceituais que compõem um objeto matemático.

A dificuldade percebida em relação à variável *figura no enunciado* nos remete a um dos nossos objetivos específicos que foi analisar verificações realizadas por meio de confrontação de resultados de cálculos em diferentes quadros. Os protocolos mostraram que alguns alunos tiveram dificuldade para realizarem verificações confrontando resultados em diferentes quadros, indicando que eles não dominam os conhecimentos sobre perímetro, área e operações com expressões algébricas. Essa constatação confirma o que também foi verificado por Teles (2007), ao apresentar atividades envolvendo esses elementos.

Além disso, referente às propriedades algébricas, em vários momentos os alunos quiseram realizar a soma de termos algébricos não semelhantes. Esse erro interferiu ativamente na verificação de igualdades algébricas, como por exemplo na atividade 2, em que a influência ocorreu na análise e na comparação das respostas corretas, levando os alunos a apresentarem respostas que indicaram confusão entre as operações de multiplicação e adição de termos semelhantes, o que configura-se a necessidade de se trabalhar com situações nas quais os alunos possam superar a dificuldade em aceitar a ausência da propriedade fechamento em relação à adição. Esse fato também foi verificado por Booth (1995) em suas pesquisas realizadas com alunos de diferentes faixas etárias, e alertou para a necessidade de reformulação do ensino da álgebra, a fim de possibilitar aos alunos a superação dessa dificuldade.

Outro objetivo específico foi identificar e analisar dificuldades para calcular áreas de retângulos, cujas medidas dos lados estão representadas por números ou por letras, bem como o uso de propriedades geométricas. Nas primeiras atividades apresentadas, os alunos demonstraram que não percebiam que poderiam calcular a área de uma figura por meio das áreas das partes que a formavam no entanto, na atividade 4 esta dificuldade foi parcialmente superada.

Ainda na atividade 4, alguns protocolos mostraram que parte dos alunos tiveram dificuldade em identificar que a expressão $(x + y).(w + z)$ correspondia à área total de uma figura retangular formada por partes retangulares que possuíam suas respectivas áreas particulares. Esse fato indicou a necessidade de se retomar atividades nas quais os alunos associem o quadro algébrico, geométrico e aritmético para que eles percebam a relação existente entre os mesmos. Dessa forma, o quadro aritmético serviria de suporte para a interação entre os quadros algébrico e geométrico, assim como ajudaria a compreender o significado do conceito de área.

Categorias de verificação surgidas na experimentação

Descritos os aspectos que influíram no processo de verificação, faremos as considerações acerca do processo de verificação como parte da validação das estratégias formuladas pelos alunos durante a resolução das atividades. Margolinas (1993), afirma que o processo de verificação depende muito do envolvimento do aluno com a situação e da aceitação da sua responsabilidade pela resolução.

Analisando os protocolos dos alunos pesquisados, podemos categorizar o processo de verificação em três grupos, baseados na quantidade de quadros utilizados e no processo de ida e vinda entre os quadros. O primeiro grupo de verificação é aquele que ocorreu dentro do **próprio quadro** dado, o segundo, o que envolveu **dois quadros com o sentido de mudança de quadro** e o terceiro, é aquele que envolveu **a interação de três quadros**.

Um dos objetivos específicos foi identificar e analisar procedimentos de verificação por substituição de letras por números particulares e cálculos aritméticos realizados, bem como o uso de propriedades aritméticas. Ao observar se os alunos realizariam essas substituições de forma autônoma percebeu-se que esse processo ocorreu, mas provocado pelo pesquisador e não por decisão própria dos alunos. Dessa forma, temos a identificação da primeira categoria de verificação, isto é, que permanece no **próprio quadro** em que foi formulada. Esse tipo de verificação não configurou uma mudança de quadro, mas sim um processo resistente, visto que foi adotado por vários alunos. Por meio da análise dos protocolos observou-se que o quadro mais utilizado foi o algébrico e, nesse caso, ele foi considerado pelos alunos como suficiente para justificar suas respostas, os quais não recorreram a outros quadros que pudessem auxiliar na verificação dos resultados.

Um exemplo dessa categoria de verificação é o que foi feito pelo aluno **A8** na atividade 1, em que utilizou somente o quadro algébrico para justificar sua resposta à afirmação apresentada no enunciado. O uso de somente um quadro parece evidenciar que o conhecimento não foi consolidado, o que conduziu a cometer erros que não foram percebidos. Já nas atividades 2, 3 e 4 ele utilizou mais de um quadro para verificar as proposições, bem como para verificar suas respostas. É certo que em virtude de suas dificuldades em relação a alguns conteúdos matemáticos, ele não logrou sucesso na identificação de seus erros e consequente superação dos mesmos.

Vale destacar que alguns alunos utilizaram **dois quadros** para realizarem a validação de suas formulações, ratificando, assim, a identificação do segundo grupo de verificação. Nesse grupo estão as respostas dos alunos que inicialmente utilizaram o quadro proposto na atividade, como por exemplo, o quadro geométrico e a seguir transferiram para o quadro algébrico para realizarem cálculos que possibilitassem verificar a validade das afirmações. Nesse caso, esses alunos não retornaram para o quadro geométrico e nem recorreram ao quadro aritmético para verificar a igualdade algébrica proposta. Como eles realizaram a transferência para um segundo quadro e não retornaram, consideramos que esses alunos fizeram somente mudança de quadro para efetuarem a verificação.

Um exemplo desse procedimento de verificação foi o do aluno **A4** ao resolver a atividade 3, em que inicialmente utilizou o quadro geométrico para apropriar-se do conceito de perímetro e a seguir transferiu para o quadro algébrico, no qual realizou o cálculo de perímetro utilizando os termos algébricos que indicavam os lados da figura. Durante a experimentação, esse aluno não conseguiu realizar o processo de verificação por meio do jogo de quadros. No caso dessa atividade, não ocorreu o retorno ao quadro geométrico para verificar se a formulação estava satisfatória, porque não sentiu necessidade de fazer essa passagem.

Finalmente, a terceira categoria de verificação surgida na experimentação constituiu-se do uso de **interação de três quadros**. Nessa categoria, concentramos as verificações nas quais os alunos utilizaram os três quadros propostos, de maneira que, iniciando por um quadro, retornava a ele no final para validar todo o processo adotado. É importante ressaltar que esse foi o caso de verificação que menos ocorreu, por constituírem atividades que solicitavam procedimentos não comuns aos alunos.

É importante destacar que esses tipos de atividades funcionaram como ferramentas para que alguns alunos identificassem seus erros e pudessem buscar a sua superação. Alguns tiveram maior segurança em responder as atividades, no momento em que passaram a trabalhar com os três quadros, de forma autônoma, significando uma superação de suas limitações em relação ao conteúdo matemático.

Um exemplo desse procedimento é o do aluno **A7** que, no momento de resolver o item **b** da atividade 4, inicialmente utilizou o quadro geométrico para responder e a seguir ainda utilizou o quadro aritmético, substituindo as letras que representavam as medidas dos lados da figura, calculando o valor da área da figura no quadro aritmético. Para confirmar seu resultado, ele realizou a substituição das letras na expressão algébrica dada, pelos mesmos números utilizados para substituir na figura, permitindo que verificasse que a expressão algébrica e a figura geométrica eram correspondentes.

Esse aluno, nas discussões seguintes, demonstrou que havia assimilado esse procedimento, tanto é que recorreu à mudança entre os quadros para justificar suas respostas aos colegas, representando um avanço em sua aprendizagem. Porém, o jogo de quadros não foi adotado por todos e quando adotado, foi para apenas algumas atividades. Dessa forma, percebemos que os conceitos matemáticos não estão bem construídos pelos alunos, o que impossibilitou alguns de realizarem a verificação das suas respostas.

À guisa da conclusão, pode-se dizer que um grupo pequeno de alunos realizou a interação de quadros para verificar a validade dos resultados. Era esperado que eles utilizassem os dois quadros propostos, porém foi necessária a ação do pesquisador indagando sobre as certezas e incertezas em relação aos resultados apresentados por eles. Essa ação teve por intuito provocar nos alunos o interesse em recorrer ao quadro aritmético para verificar a validade dos resultados, o que caracterizaria, no mínimo, uma mudança para esse quadro e, no caso do aluno que não retornou para o quadro inicial, contudo é importante destacar que essa atitude caracterizaria a não interação com o mesmo. Todavia, foi notório que os alunos não procuraram inicialmente estabelecer valores particulares para as letras, o que lhes permitiriam verificar suas validades.

Ao final deste trabalho, concluímos que parte de nossos objetivos foram alcançados, assim como nossa indagação sobre como os alunos utilizariam seus conhecimentos para realizar a verificação de igualdades das expressões algébricas, já que constatamos que, na maioria das vezes, eles apresentam dificuldade para relacionar os conhecimentos antigos com o que estão realizando. Observou-se, ao final das sessões realizadas, que eles ainda se comportam de acordo com o que Lins e Gimenez (2006) destacam sobre a separação de conhecimentos realizada pelos alunos quando estudam os conteúdos algébricos associados com o geométrico e o aritmético, e não percebem as relações que existem entre esses quadros, o que dificulta perceberem a continuidade de ideias.

Por fim, é preciso registrar que este estudo não se esgota nessa pesquisa, mas indica vários aspectos importantes que podem ser aprofundados em estudos relacionados ao processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, dos quais destacamos:

- O uso de atividades, desde o 6º ano, que envolvam vários quadros, pelo menos, em que o uso dos quadros seja uma forma de verificar a validade das respostas propostas;
- O ensino da álgebra utilizando a interação dos quadros aritméticos, e geométricos durante o processo em que as representações algébricas não configuram situações muito complexas para serem representadas geometricamente;
- Proposta de atividades em que os alunos vivenciem mais momentos de composição e decomposição de figuras geométricas para calcular a área das mesmas;
- E, por último, concordando com Santos (2007), a apresentação de atividades diversas nas quais os alunos tenham que levantar hipóteses, justificar e argumentar sobre suas estratégias.

Ressaltamos que vários aspectos ainda poderão surgir com a retomada e aprofundamento da análise dos protocolos concernentes às produções dos alunos durante as sessões envolvendo as situações-problema propostas. Conquanto, espera-se que o estudo ora realizado, possa contribuir com o trabalho didático dos professores de Matemática, muitas vezes necessitam de estudos específicos para o aperfeiçoamento de sua prática pedagógica, cujo trabalho torna-se mais eficiente se respaldado em teorias e investigações.

E que possa, de alguma forma, colaborar com o professor na seleção e na elaboração de atividades as quais possibilitem que o aluno seja mais autônomo e se sinta co-responsável pelo próprio processo de aprendizagem do qual é o principal elemento, bem como suscitar nele a consciência de que o conhecimento quando bem apropriado, pode oportunizar a formação de um cidadão mais crítico, reflexivo e capaz de atuar no mercado de trabalho que se apresenta cada vez mais exigente e competitivo.

REFERÊNCIAS

AABOE, A. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 1984.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** Curitiba: UFPR, 2007.

ARTIGUE, M. **Engenharia Didática**. **In.** BRUN, J. (org) **Didáctica das matemáticas.**Lisboa, Instituto Piaget, 1996.

BALACHEFF, N. **Une étude des processus de preuve em mathématique chez des eleves de Collège**, Thèse d'Etat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

BONADIMAN, A. **Álgebra no Ensino Fundamental: produzindo significados para as operações básicas com expressões algébricas**, 2007. Dissertação (mestrado), UFRGS, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática.

BOOTH, L. R., Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra**. In.** COXFORD, A. e SHULTE, A. O. **As ideias da álgebra,** trad. DOMINGUES, H. H., São Paulo: Atual,1995.

BOYER, C. **História da Matemática**. Trad. GOMIDE, E. F., São Paulo: Edgar Blücher, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.** Terceiro e quarto ciclo. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_________. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2008:** Matemática. Brasília: MEC. 2007.

_________. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2005:** Matemática. Brasília: MEC. 2004.

_________. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional** – LDB Lei nº 9394/96.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques.** Recherches en Didactique de Mathématiques. Vol. 7 Nº 2. p 33-115. 1986.

_________. **Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdo e métodos de ensino.** São Paulo: Ática, 2008.

CAMARGO, D. A. F. de. **Estruturação da sala de aula: efeitos sobre o desenvolvimento intelectual e sobre o estilo de funcionamento cognitivo dos alunos**. **In.** BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em educação matemática: concepção e perspectivas**. São Paulo. UNESP, 1999.

CARVALHO, C. C. S. **Uma análise praxeológica das tarefas de prova e demonstração em tópicos de álgebra abordados no primeiro ano do Ensino Médio**. 2007. 163f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC-SP.

CHALOUH, L. e HERSCOVICS, N. Ensinando expressões algébricas de maneira significativa**. In.** COXFORD, A. e SHULTE, A. O. **As ideias da álgebra,** trad. DOMINGUES, H. H., São Paulo: Atual, 1995.

DOUADY, R. **La ingenieria didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento.**, **In.** GÓMEZ, P. **Ingenierie didáctica en educación matemática.** Bogotá: Iberoamérica, 1995.

_________. **Jeux Cadre et dialectiques outil-objet. Recherche en Didáctique des Mathématiques.** Grenoble. La Penseé Sauvage-Éditions, v. 7.2, p. 5-31. 1986.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Trad. BICUDO, I. São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática.** Trad. BICUDO, I. Campinas: Unicamp, 2004.

FONTALVA, G. M. **Um Estudo sobre inequações: entre alunos do ensino médio**. 2006. 145f. Dissertação (Mestrado em Educação de Matemática) PUC- SP.

FREITAS, J. L. M. de. Teoria das situações didáticas**. In.** MACHADO, S. D. A.. **Educação Matemática: uma (nova) introdução.** São Paulo: Educ, 2008.

GÁLVEZ, G. A didática da matemática**.** In. PARRA, C. **Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas**. Trad. LLORENS, J. A., Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GOUVÊA, F. A. T. **Aprendendo e Ensinando Geometria com a Demonstração: Uma contribuição para a Prática Pedagógica do Professor de Matemática do Ensino Fundamental.** 1998. 256f Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) PUC- SP.

HOUSE, P. Reformular a álgebra da escola média: por que e como? **In.** COXFORD, A. e SHULTE, A. O. **As ideias da álgebra,** trad. DOMINGUES, H. H., São Paulo: Atual, 1995.

LA TAILLE, Y. de. **Limites: três dimensões educacionais**. São Paulo: Ática, 2003.

LINS, R. C. e GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 2006.

MARANHÃO, M. C. S. de A. Dialética Ferramenta-Objeto. **In.** MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática: uma (nova) introdução.** São Paulo: Educ, 2008.

________________________. **Síntese de pesquisas sobre relações no tempo focalizando o conceito de institucionalização**. **In.** MARANHÃO, M. C. S. de A. **Educação matemática nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio: pesquisas e perspectivas**. São Paulo, Musa, 2009.

MARGOLINAS, C. **De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques**. Grenoble-França: La Pensée Sauvage, 1993.

MIGUEL. A. e MIORIN, M. A. **História na Educação Matemática: propostas e desafios**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MORA, J. F. **Dicionário de Filosofia,** Lisboa: Dom Quixote, 1978.

NCTM (2000). **Principles and standards for school mathematics**. Reston, VA: Autor.

PONTE, J. P. da . **Número e álgebra no currículo escolar.** [S.I]: .Disponível em:< http://www.spce.org.pt/sem/2jp.pdf>. Acessado em: 01 mar.2009.

SANTOS, J. B. S. **Argumentação e Prova: análise de argumentos algébricos de alunos da educação básica**. 2007. 145f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) PUC- SP.

SCHUBRING, G. **Análise histórica de livros de matemática: notas de aula**. Trad. GOMES, M. L. M., Campinas: Autores Associados, 2003.

SILVA, M. H. da. **Estudos das visões sobre álgebra presentes nos parâmetros curriculares nacionais de matemática do ensino fundamental em relação a números e operações**. 2006. 145f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) PUC- SP

TELES, R. A. de M. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas**. 2007. 297f. Tese (Doutorado) Programa de Pós-Graduação em Educação. UFPE.

TRIGUEROS, M. et al. **Enseñanza Del álgebra elementar: uma proposta alternativa**; Ensenanza de las ciencias, México, trillas, 1996.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis, **In.** COXFORD, A. e SHULTE, A. O. **As ideias da álgebra,** trad. DOMINGUES, H. H., São Paulo: Atual, 1995.

VALENTE, V. R. **Uma história da matemática escolar no Brasil (1730 – 1930).** São Paulo, FAPESP, 1999.

ANEXOS

ANEXO A - ATIVIDADE 1

Aluno A1

A resposta apresentada pelo Carlos está correta? Justifique sua resposta.

Não, pela parte do perímetro está correto, mais a área está errado, pois para calcular a medida da área tem que ser base X altura.

Aluno A2

A resposta apresentada pelo Carlos está correta? Justifique sua resposta.

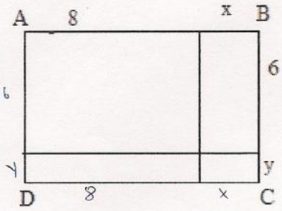
a soma dos valores é 28 fora o x e y = certo
a ~~divisão~~ divisão dos valores tambem esta = certa

Aluno A3

A resposta apresentada pelo Carlos está correta? Justifique sua resposta.

Na minha opinião eu acho que está correta; pois; para saber o perímetro ou uma área de uma certa situação, você deve calcular ou multiplicar o valor da figura e sempre você vai conseguir um certo valor que será igual à X, como por exemplo o cal culo acima, ele somou todos os valores e o resultado deu como X Y.

Aluno A4



A resposta apresentada pelo Carlos está correta? Justifique sua resposta.

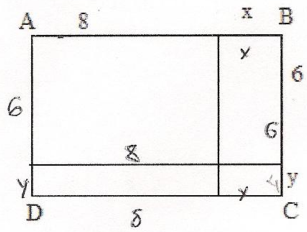
(~~O perímetro está certo pois o lado~~ AB))

(~~os dois estão errados pois para saber~~ o perímetro temos que somar ~~todos os lados e o certo seria~~ $8x+8x+6$)

Estão certos pois no perímetro temos que somar todos os lados, e para somar, temos que somar os termos semelhantes $(8+8+6+6)=28$, $(x+x)=2x$ e $(y+y)=2y$. Somando tudo: $28+2x+2y$ que foi o que Carlos fez.

A área está certa também, pois para saber a área temos que multiplicar os lados assim ficaria $xy+6x+8y+48$ que foi o que ele fez.

Aluno A5



A resposta apresentada pelo Carlos está correta? Justifique sua resposta.

(~~Está errado~~. Porque)

A = Base . Altura = 8 . 6 /

P = Soma de todos os lados

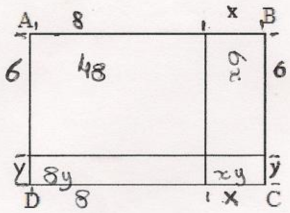
Está certo. Porque no perímetro todos os lados da figura foram somados. E a área foi multiplicada (base . altura)

$P = 8+6+8+6+x+x+y+y = 28+2x+2y$

$A = 6x+8y+48+xy$

Aluno A6

Área (ABCD) = xy + 6x + 8y + 48



PERÍMETRO

$8 + 8 = 16$

$6 + 6 = 12$

$16 + 12 = 28$

$x + x = 2x$

$y + y = 2y$

ÁREA

$b = 8x$

$h = 8 + 6y$

$8 . 6 = 48$

$6 . x = 6x$

$x . y = xy$

$8 . y = 8y$

A resposta apresentada pelo Carlos está correta? Justifique sua resposta.

A resposta está correta, pois calculando o perímetro, temos lados iguais, sendo 8 em cima, em baixo será 8 também, 8 + 8 = 16, aos lados temos duas medidas de 6, sendo 6+6 = 12, com o mesmo calculo, x + x = 2x e y + y = 2y, ficando com resposta = 28 + 2x + 2y.

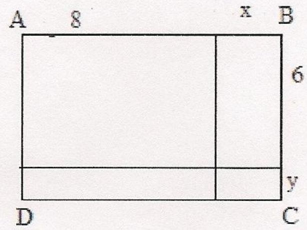
Calculando a área... sempre será base X altura, 6 x 8 = 48, x . 6 = 6x, x . y = xy e por último y . 8 = 8y, ficando com resultado = xy + 6x + 8y + 48.

Aluno A7

Atividade 1 – Carlos ao calcular a área e o perímetro da figura abaixo encontrou:

Perímetro (ABCD) = $28 + 2x + 2y$

Área (ABCD) = $xy + 6x + 8y + 48$



A resposta apresentada pelo Carlos está correta? Justifique sua resposta.

R: Esta certo porque no perímetro ele somou todos os lados × 2. Na área tambem está certo, Carlos fez a area dos 4 figuras e depois os juntou, somou, que vai dar no mesmo do que fazer da figura inteira.

Aluno A8

A resposta apresentada pelo Carlos está correta? Justifique sua resposta.

$8x + 6y + 8x + 6y$

$8x + 8x + 6y + 6y$

$16x + 12y$

$28xy$

O perimetro pelos calculos que eu fiz eu acho que esta certo

$8x \cdot 2 \quad 6y \cdot 2$

$16x \cdot 12y$

$192\,xy$

a area pelos calculos que eu fiz eu acho que esta errado

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times\ 12 \\ \hline 32 \\ 16\ \ \\ \hline 192 \end{array}$$

ANEXO B – ATIVIDADE 2

Aluno A1

a) Qual é a expressão que representa a área da praça, que ficou fora do canteiro?

LÚCIA $b^2 - a^2$ / Bia $b^2 - 4a$ / LUCAS $2a(b-a) + (b-a)^2$

b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia $b^2 - a^2$	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

Quem acertou a resposta foi LÚCIA, pois ~~(ele)~~ ~~(pegou)~~ a área é calculada BASE X ALTURA, e também quem acertou foi a BIA, e também o LUCAS, pois o centro da praça é a METADE do ~~(cant)~~ canteiro inteiro, e cada um deles pegou vezes X a base e a altura e subtraim, pois a praça é menor do que o canteiro inteiro.

Aluno A2

a) Qual é a expressão que representa a área da praça, que ficou fora do canteiro?

$b^2 + a^2$

b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia $b^2 - a^2$	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

Lúcia, o calculo que esta na tabela é a igual a ~~ser~~ resposta da LÚCIA

Paulo, Ele soma b+b, a+a que também esta certo

Lucas, a única diferença é que ela soma ~~tudo~~ ~~tudo~~

Aluno A3

a) Qual é a expressão que representa a área da praça, que ficou fora do canteiro?

A expressão é que área da praça ficou menor do que o canteiro.

b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia b^2-a^2	Bia $b^2 - 4a$

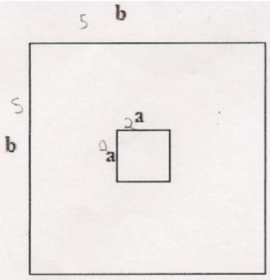
Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

Na minha opião eu acho que foi a Ana; Pois para você saber a área de um quadrado, você deve somar os lados como aconteceu no exercício acima, foi o modo que Ana fez ela pegou o lado B e somou com o lado A, ficou $b^2 + a^2 = a^4$

O João $b(b-A)+(b-A)a$ e o Paulo $2b+2a$ todos esses alunos acertaram as respostas. Ana, João e o Paulo.

b^2+a^2 $b(b-a)+(b-a)a$ $2b+2a$. Porque todos os modos estão corretos. Soma-se os lados A e b.

Aluno A4



a) Qual é a expressão que representa a área da praça, que ficou fora do canteiro?

A expressão será $b^2 - a^2$, pois para saber a área temos que multiplicar base vezes altura, mas como há o canteiro dentro da área temos que subtrair a área do canteiro

b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia b^2-a^2 21	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

~~Só Lúcia está certa pois ela fez o processo correto, fez a área maior menos a área do canteiro~~

Três estão certos, então supomos que a=2 e b=5 então é só substituir

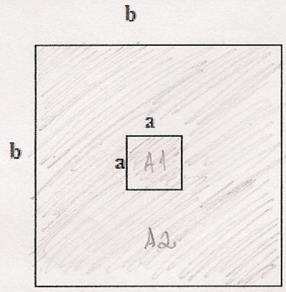
Lucas $2.2(5-2)+(5-2)^2 = 21$

João $5(5-2)+(5-2)a = 21$

Lúcia $5^2-2^2 = 21$

esses 3 estão certos.

Aluno A5



a) Qual é a expressão que representa a área da praça, que ficou fora do canteiro?

$R = b^2 - a^2$

b^2 = Praça
a^2 = canteiro

b^2 (praça) − a^2 (canteiro)

b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia $b^2 - a^2$	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

* Lúcia. Porque ela representou a área da praça e subtrair a área do canteiro assim ela poderia chegar a um resultado: b^2 (praça) − a^2 (canteiro)

praça − canteiro = $b^2 - a^2$

* Lucas. $2a(b-a) + (b-a)^2$

$2a(b-a)$ → representa a área do canteiro

$(b-a)^2$ → representa a área da praça menos a do canteiro

* Bia. $b^2 - 4a$

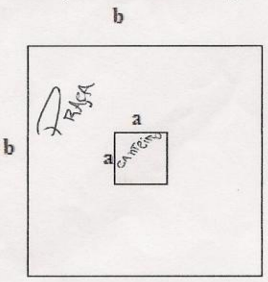
b^2 → área praça

$4a$ → área canteiro

Aluno A6

Atividade 2 – Um professor pediu aos alunos que resolvessem o seguinte problema:

- No centro de uma praça quadrada de lado **b**, será construído um canteiro quadrado de lado **a**, como mostra a figura:



JOÃO
20 . 10 = 200 +
10 . 10 = 100
300

PAULO
2 . 20 = 40 +
2 . 10 = 20 = 60

LUCAS
2 . (10) = 20 . 10 = 200 +
10 . 10 = 100 = 300

BIA $b^2 = b . b = 20 . 20 = 400 -$
4 . 10 = 40 = 360

a) Qual é a expressão que representa a área da praça, que ficou fora do canteiro?

$b^2 - a^2$

20 . 20 = 400 + 10 . 10 = 100 = 300

B = 20
a = 10

b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$ ×	João $b(b-a) + (b-a)a$ ×	Paulo $2b + 2a$ ×
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$ ×	Lúcia b^2-a^2 ✓	Bia $b^2 - 4a$ ×

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

Lúcia, porque a área da praça é $b . b = b^2$ e a área do canteiro $a . a = a^2$, como não quer saber com o canteiro pegamos a área da praça e diminuímos a área do canteiro, ficando $b^2 - a^2$

João, porque trocando valores de B = 20, A = 20, o 20 multiplica por 20 - 10 = 10 2 vezes o A = 10, são 20 . 10 = 200, o 200 soma por $b - a(20 - 10) = 10^2$ 10 . 10 = 100, então 200 + 100 = 300.

BIA ×
2 . 2 = 4 - 12 = 8

LUCAS ×
2 . 3 = 6
· 1
6
1
1 +
2 = 8

JOÃO ×
2 . (2 - 3)
2 . 1 = 2 +
(2 - 3) . 3
1 . 3 = 3
5

PAULO ×
2 . 2 = 4
+
2 . 3 = 6
10

ANA ×
2 . 2 = 4
3 . 3 = 6
10

Lucas, porque trocando os valores... 2a = 2 . 10 = 20 . (b - a(20 - 10)) = 10, logo 20 . 10 = 200 + b - a = (20 - 10) 10 = 10^2, sendo 10 . 10 = 100, somando, 200 + 100 = 300.

Aluno A7

$b^2 - a^2$

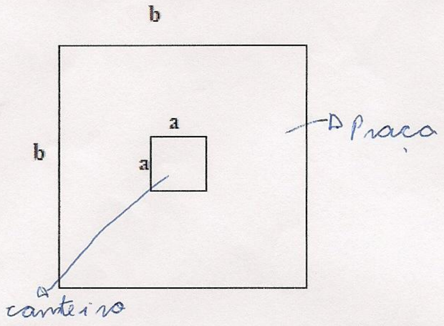
b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia $b^2 - a^2$	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

R: Lúcia e Lucas, Lúcia fez a área dos dois quadrados e subtraiu o menor do maior, Lucas ao subtrair b - a ja tirou o que ia sobrar do canteiro depois so multiplicou por 2 para dar a área do cant. a. Paulo porque ele colocou os lados que iam sobrar somente somando os valores, ja multiplicados por 2.

Aluno A8



a) Qual é a expressão que representa a área da praça, que ficou fora do canteiro?

(~~B+B~~) B^2

b) Alguns alunos deram as seguintes respostas para o item **a**, porém nem todos acertaram:

Ana $b^2 + a^2$	João $b(b-a) + (b-a)a$	Paulo $2b + 2a$
Lucas $2a(b-a) + (b-a)^2$	Lúcia b^2-a^2	Bia $b^2 - 4a$

Quem acertou a resposta? Justifique sua resposta.

ana $B^2+A^2 = B.B+A.A$ ~~4A~~ x

Lucas $2A(B-A)+(B-A)^2 = 2AB-A+B^2-A^2 = 2A^5+B^3$ X

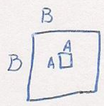
João $B(B-A)+(B-A)A = BB-A+B-AA = B^2-A+B-A^2$ ✓

Lucia $B^2-A^2 = B.B-A.A$ ✓

Paulo $2B+2A = BB+AA = B^2+A^2$ ✓

Bia $B^2-4A = B.B-A^4 = B^2-A^4 = B.B-A.A.A.A$ X

as certas se resumem a $B.B+A.A$
ou
$B.B-A.A$ e sabendo ~~de~~ que um quadrado seria



ou seja B^2 e A^2

ANEXO C – ATIVIDADE 3

Aluno A1

$x + y + x + y = 2x + 2y$

$2x + y + 2x + y = 4x + 2y$

As respostas apresentadas pelo Antônio estão corretas? Justifique sua resposta.

Sim, ele simplificou corretamente, o perimetro das figuras, ele pegou a(m) medida das duas verticais e "juntou" elas "somou" e das laterais a mesma coisa "juntou" somou os seus valores simplificando elas.

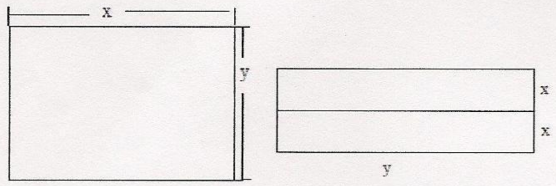
Aluno A2

$x + y + x + y =$ 2x + 2y

$2x + y + 2x + y =$ 4x + 2y

Então Antônio simplificou as expressões e construiu as seguintes figuras correspondentes as expressões dadas pela professora:

$x + y + x + y = 2x + 2y$ $\quad$ $2x + y + 2x + y = 4x + 2y$

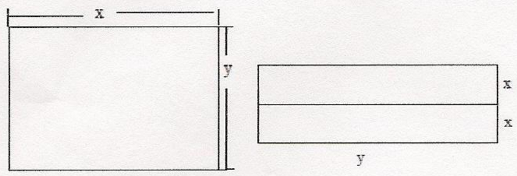


As respostas apresentadas pelo Antônio estão corretas? Justifique sua resposta.

Sim, a soma do perímetro está certa 4x + 2y, 2x + 2y

Aluno A3

$x + y + x + y = 2x + 2y$ $\quad$ $2x + y + 2x + y = 4x + 2y$



As respostas apresentadas pelo Antônio estão corretas? Justifique sua resposta.

Sim; Pois ele somou todos os valores de x e y Como está acima x+y+x+y=2x+2y. Foi o que ele fez ele simplificou os valores de x e y.

Atividade 3- A professora de Antônio solicitou que ele simplificasse as expressões correspondentes ao perímetro de figuras retangulares, e construísse as respectivas figuras.

$x + y + x + y =$ 2x + 2y

$2x + y + 2x + y =$ 4x + 2y

Aluno A4

$x + y + x + y = 2y + 2x$

$2x + y + 2x + y = 4x + 2y$

As respostas apresentadas pelo Antônio estão corretas? Justifique sua resposta.

Estão corretos pois para saber os perímetros das figuras é só somar as medidas dos lados: na 1ª $x+y+x+y=2x+2y$ e na 2ª $2x+y+2x+y=4x+2y$

Aluno A5

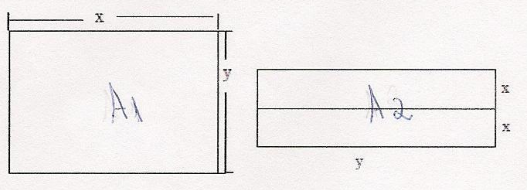
Atividade 3- A professora de Antônio solicitou que ele simplificasse as expressões correspondentes ao perímetro de figuras retangulares, e construísse as respectivas figuras.

$x + y + x + y = 2x + 2y$

$2x + y + 2x + y = 2x + 2x + y + y = 4x + 2y$

Então Antônio simplificou as expressões e construiu as seguintes figuras correspondentes as expressões dadas pela professora:

$x + y + x + y = 2x + 2y$ $\quad$ $2x + y + 2x + y = 4x + 2y$



As respostas apresentadas pelo Antônio estão corretas? Justifique sua resposta.

Sim. A1 $x+y+x+y=2x+2y$

$x+x=2x$

$y+y=2y$

$x+x+y+y=2x+2y$

A2 $2x+y+2x+y=4x+2y$

$=2x+2x=4x$

$y+y=2y$

$=2x+2x=4x+y+y=4x+2y$

Aluno A6

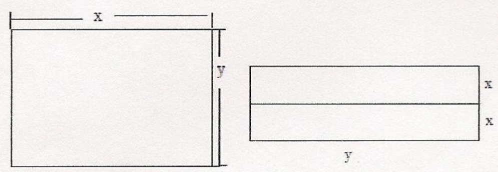
Atividade 3- A professora de Antônio solicitou que ele simplificasse as expressões correspondentes ao perímetro de figuras retangulares, e construísse as respectivas figuras.

x + y + x + y =

2x + y + 2x + y =

Então Antônio simplificou as expressões e construiu as seguintes figuras correspondentes as expressões dadas pela professora:

x + y + x + y = 2x + 2y   2x + y + 2x + y = 4x + 2y



As respostas apresentadas pelo Antônio estão corretas? Justifique sua resposta.

Sim, porque e concluir, com um desenho correto, perímetros como é soma dos lado, foi correto o jeito em que apresentou no ~~retam~~ retângulo. A área também está correta, pois aplicou bem no retângulo, multiplicando base vezes altura

Aluno A7

As respostas apresentadas pelo Antônio estão corretas? Justifique sua resposta.

Sim, porque os lados que ele somou estão realmente na figura, ou seja, no segundo retangulo existem 4 lados x e 2 lados y, no primeiro retangulo existem 2 lados x e 2 lados y.

Aluno A8

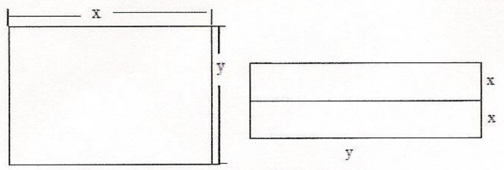
Atividade 3- A professora de Antônio solicitou que ele simplificasse as expressões correspondentes ao perímetro de figuras retangulares, e construísse as respectivas figuras.

$x + y + x + y =$

$2x + y + 2x + y =$

Então Antônio simplificou as expressões e construiu as seguintes figuras correspondentes as expressões dadas pela professora:

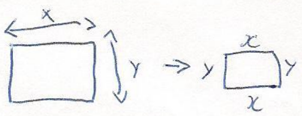
$x + y + x + y = 2x + 2y$ $\quad$ $2x + y + 2x + y = 4x + 2y$



As respostas apresentadas pelo Antônio estão corretas? Justifique sua resposta.

$x + y + x + y = 2x + 2y$

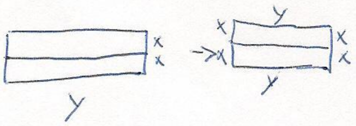
$x + x + y + y = 2x + 2y$



esta certo pois $x + y + x + y = x + x + y + y = 2x + 2y$

$2x + y + 2x + y = 4x + 2y$

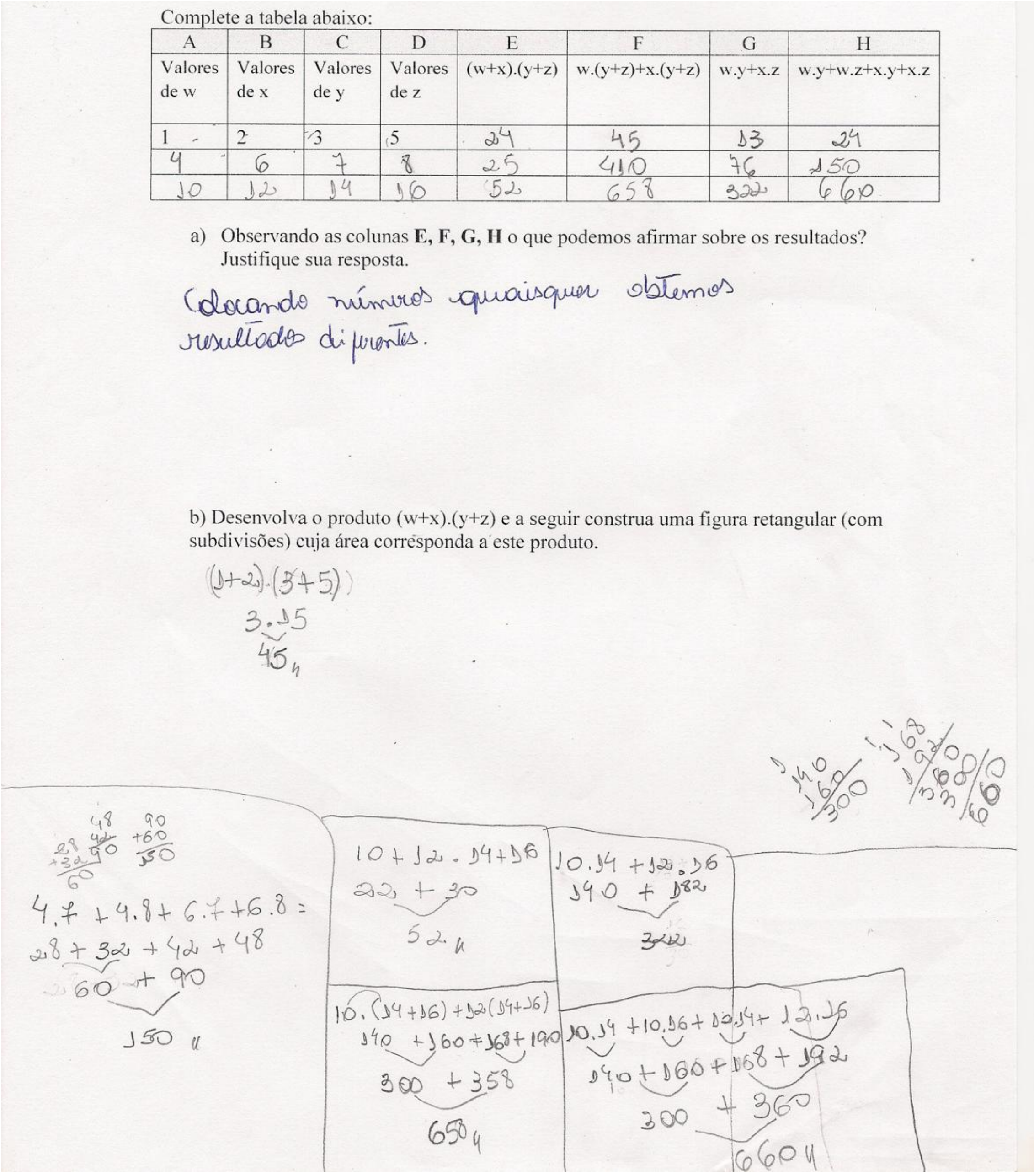
$2x + y + 2x + y = 4x + 2y$



esta certo pois $2x + y + 2x + y = 2x + 2x + y + y = 4x + 2y$

ANEXO D – ATIVIDADE 4

Aluno A1



Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	24	45	13	24
4	6	7	8	25	410	76	150
10	12	14	16	52	658	322	660

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

Colocando números quaisquer obtemos resultados diferentes.

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

(1+2).(3+5)
3.15
45

4.7 + 4.8 + 6.7 + 6.8 =
28 + 32 + 42 + 48
60 + 90
150

10 + 12 . 14 + 16
22 + 30
52

10.14 + 12.16
140 + 182
322

10.(14+16) + 12(14+16)
140 + 160 + 168 + 190
300 + 358
658

10.14 + 10.16 + 12.14 + 12.16
140 + 160 + 168 + 192
300 + 360
660

Aluno A2

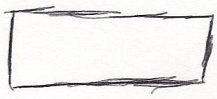
Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	11	24	13	24
2	3	4	6	13	50	26	40
3	4	5	7	19	85	45	21

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

Todo foram parecida, a profesa as conta ta lá embaixo

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.



E)

= w + x . y + z

= 1 + 2 + 3 + 5

3 + 8 = 11

f)

w = 1

y = 3

z = 5

x = 2

g) 1 . 3 + 2 . 5 = 13

g)

f) 1 . 8 + 2 . 8 = 24

h) 1 . 3 + 1 . 5 + 2 . 3 + 2 . 5 = 24

3 5 6 10

Aluno A3

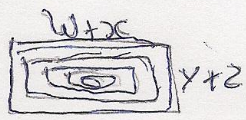
Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	1+2.3+5	1.3+5+2.3+5	1.3+2.5	1.3+1.5+2.3+2.5
				3.8	3+5+6+5	3+10	3+5+6+10
				24	19	13	24

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

Que cada um dá um valor diferente, mas o item E e o item H deram os resultados iguais.
24.

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.



(w+x).(y+z) = 1+2.3+5 = 3.8 = 24

Aluno A4

Complete a tabela abaixo:

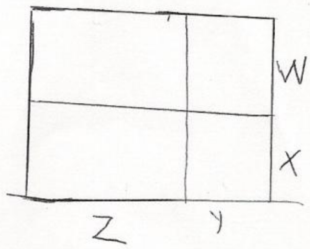
A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	24	24	13	24
2	3	5	1	30	30	13	30
3	5	1	2	30	24	13	24

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

Que sempre as colunas são iguais ou a diferença é a mesma.

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

(1.2).(3.5)=24



Aluno A5

Complete a tabela abaixo:

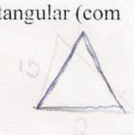
A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	45	26	13	24
2	3	5	4	45	45	22	45
6	8	7	9	224	128	106	222

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

Não são iguais, as contas e números são diferentes.

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

(1+2).(3+5) = 3.15 = 45



H (tabela)
1.3 + 1.5 + 2.3 + 2.5 =
3 + 5 + 6 + 10 = 24

2.5 + 2.4 + 3.5 + 3.4
10 + 8 + 15 + 12 =
45

6.8 + 6.9 + 8.7 + 8.9
48 + 54 + 56 + 64 =
222

E (tabela)
*(1+2).(3+5) = 3.15 = 45
*(2+3).(5+4) = 5.9 = 45
*(6+8).(7+9) = 14.16 = 224

F (tabela)
* 1.(3+5) + 2.(3+5) =
3 + 5 + 6 + 10 = 26
* 2.(5+4) + 3.(5+4) =
10 + 8 + 15 + 12 = 45
* 6.(7+9) + 8.(7+9) =
42 + 54 + 56 + 72 = 128

G (tabela)
*1.3 + 2.5 = 3 + 10 = 13
*2.5 + 3.4 = 10 + 12 = 22
*6.7 + 8.9 = 42 + 64 =
106

Aluno A6

Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z) 10.(30+40+20.(30+40)	w.y+x.z 300+800	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	24	24	13	24
10	20	30	40	2100	2100	1100	2100
10	100	1000	10000	1.210.000	1.210.000	110.000	1.210.000

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

Que os valores de E, F e H, são sempre igual, independente dos valores adquiridos pela incógnita.

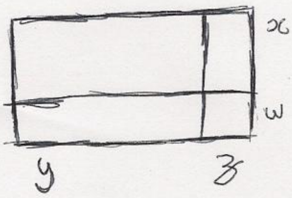
10 . 1000
10000

10 . 10000
100.000

100.000
10.000 +
110.000

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

(w+x).(y+z)
10+100 . 1000 + 10000
110 . 11000



(w+x) . (y+z)
(1+2) . (3+5)
3 . 8
=
24

w.y+w.z+x.y+x.z
1.3+1.5+2.3+2.5
3+5+6+10
8 + 16 = 24

w.y+x.z
1.3+2.5
3+10
13

w.(y+z)+x.(y+z)
1.(3+5)+2.(3+5)
1. 8 + 2. 8
(~~8+2 = 10.8 = 80~~)

3+5
8

6+10
16

16 + 8 = 24

Aluno A7

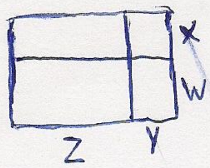
Complete a tabela abaixo:

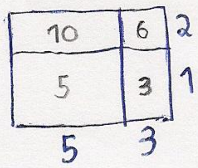
A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	24	24	13	24
2	4	1	6	42	42	26	42
10	20	30	40	2100	2100	1100	2100

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

R: E, F, H vão ter sempre os resultados iguais um do outro e G vai ser sempre diferente.

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.





10 + 6 + 5 + 3 = 24

(W + x).(Y + Z) = 24

Aluno A8

ATIVIDADE 4 - Na atividade abaixo, complete a tabela atribuindo valores a w, x, y e z e responda as perguntas.

Complete a tabela abaixo:

A	B	C	D	E	F	G	H
Valores de w	Valores de x	Valores de y	Valores de z	(w+x).(y+z)	w.(y+z)+x.(y+z)	w.y+x.z	w.y+w.z+x.y+x.z
1	2	3	5	11 24	35	11 25	340
5	3	2	1	340	11	35	61
6	7	8	9	10	11	12	13

a) Observando as colunas **E, F, G, H** o que podemos afirmar sobre os resultados? Justifique sua resposta.

quase o mesmo resultado

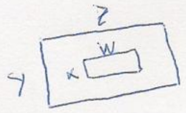
que a letra E G deu o (~~mesmo~~) (~~[illegible]~~) resultado

(w + x) . (y + z) = 11 24

w . y + x . z = 11 25

b) Desenvolva o produto (w+x).(y+z) e a seguir construa uma figura retangular (com subdivisões) cuja área corresponda a este produto.

(w + x) . (y + z) = w + x . y + z = 1 + 2 . 3 + 5 = 3 . 8 = 24



4
68 x
5
340

22 x
3
66

OBs o que tem a cor preta e a respostas certas