MARIA JOSÉ SANTANA VIEIRA GONÇALVES

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: ESTRATÉGIAS MOBILIZADAS POR ALUNOS A PARTIR DE UMA ABORDAGEM ENVOLVENDO A ORALIDADE

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Campo Grande / MS
2010

MARIA JOSÉ SANTANA VIEIRA GONÇALVES

RACIOCÍNIO PROPORCIONAL: ESTRATÉGIAS MOBILIZADAS POR ALUNOS A PARTIR DE UMA ABORDAGEM ENVOLVENDO A ORALIDADE

Dissertação apresentada como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, à Comissão Julgadora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, sob orientação do Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Campo Grande / MS
2010

BANCA EXAMINADORA

Prof.Dr. José Luiz Magalhães de Freitas - Orientador-UFMS

Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva - PUC/SP

Prof^a^. Dr^a^. Suely Scherer - UFMS

Prof^a^. Dr^a^. Marilena Bittar - UFMS

Dedico este trabalho
ao meu esposo e ao meu filho,
pelo amor e compreensão que
me ajudaram a enfrentar
esse desafio.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente a Deus, por ter me fortalecido e me capacitado em todos os momentos, permitindo alcançar mais essa vitória em minha vida pessoal e profissional.

À minha família, em especial, ao meu esposo e ao meu filho, pelo apoio, carinho e compreensão nos momentos de ausência.

Ao meu orientador, Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas pela paciência, confiança e orientações que possibilitaram a realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora: Prof. Dr. Benedito Antonio da Silva, Profª. Drª. Suely Scherer, Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas e Profª. Drª. Marilena Bittar que contribuíram de forma dedicada, criteriosa e com sugestões para o aprimoramento deste trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram e me incentivaram nesse período de desafio, superação e aprendizado.

RESUMO

O objetivo desta pesquisa é identificar e analisar as principais estratégias relativas ao raciocínio proporcional mobilizadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, ao resolverem problemas que envolvem proporções (direta e inversa) e problemas que não apresentam relações proporcionais, a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade. Para atingir o objetivo proposto buscou-se aporte na Teoria das Situações Didáticas desenvolvida por Brousseau e nos procedimentos metodológicos previstos pela Engenharia Didática conforme descrição de Artigue. A investigação foi realizada com um grupo de alunos voluntários, no contraturno do horário de suas aulas regulares. Para dar fundamentação teórica e didática à pesquisa foi realizado, nas análises preliminares, um levantamento bibliográfico sobre as concepções de proporcionalidade e raciocínio proporcional. Na fase da experimentação os dados foram coletados por meio de observações, produções escritas e gravações em áudio das discussões dos alunos. Durante o desenvolvimento da sequência didática em classe privilegiou-se a oralidade na apresentação e na resolução das situações-problema, o que contribuiu para a participação intensa dos alunos. Observamos que os alunos não conseguiram, num primeiro momento, distinguir situações proporcionais das não proporcionais, apresentando alguns erros que podem ser atribuídos às regras do contrato didático. Contudo, após discussões ocorridas no *meio* organizado, identificamos e analisamos três tipos de estratégias mobilizadas pela maioria dos alunos do grupo ao resolverem os problemas que envolvem proporção: a estratégia escalar, a funcional e a regra de três. Os resultados da pesquisa indicaram que a escolha de uma estratégia pelo aluno parece depender dos conhecimentos prévios que ele tem em relação aos números e às operações. Verificamos que o emprego da estratégia escalar predominou nos problemas que envolviam números de mesma grandeza que são múltiplos enquanto a estratégia funcional foi utilizada quando os números múltiplos apareciam em grandezas diferentes e quando os números dados nos problemas não eram múltiplos. Já a regra de três foi empregada de forma mecânica por alguns alunos, sem manifestação de compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas.

Palavras-chave: Proporcionalidade. Raciocínio Proporcional. Estratégias. Oralidade. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

The objective of this paper is to identify and analyze key strategies on the proportional reasoning employed by 7th graders while solving problems involving proportions (direct and reverse) as well as problems that do not show any proportional relationships, from an approach involving verbal expressions. To achieve this purpose, we based our studies on the Theory of Didactic Situations as developed by Brousseau and on methodological procedures provided by the Didactic Engineering as described by Artigue. The investigation was made with a group of volunteer students, after their regular classes. To assure theoretical and didactic grounds during the preliminary analysis, a bibliographic research on the concepts of proportionality and proportional reasoning was carried out. During the trial phase, the data were collected through observation, written production, and audio recordings of the students's discussions. During the development of didactic sequence in class, emphasis has been on oral presentation and resolution of problem situations, which contributed to the intense involvement on the students's part. We observed that students were unable, at first, to tell the difference between proportional and non-proportional situations, leading to some errors that can be justified by the rules of the didactic contract. However, after discussions were made in an organized fashion, we identified and analyzed three types of strategies used by most students to solve problems involving proportion: the scalar strategy, the functional strategy and the rule of proportion. The results of the survey indicated that the choice of a strategy by the students seem to have been based on their prior knowledge of numbers and operations.
We found that the scalar strategy was mostly used to solve problems involving numbers of the same magnitude and that are multiples, whereas the functional strategy was used when multiples are of different magnitude, and when the numbers involved in the problems were not multiples. On the other hand, the rule of proportion was employed mechanically by some students, without expressing any understanding of the relationship among the quantities.

Keywords: Proportionality. Proportional Reasoning. Strategies. Verbal Expression. Elementary School.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Diversos conteúdos da Matemática têm sido objeto de pesquisas que pretendem contribuir para um melhor ensino e aprendizagem dessa disciplina. Algumas investigações no campo da Educação Matemática têm por objetivo propor um ensino que estimule nos alunos o interesse pela Matemática para que ocorra uma aprendizagem mais significativa, capaz de promover o desenvolvimento de competências e habilidades necessárias à resolução de problemas de natureza científica ou que fazem parte do cotidiano.

A busca por possíveis respostas às dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem da Matemática começou no início de nossa docência. Lidar com essas dificuldades tornou-se um desafio e uma motivação para realizar vários cursos, entre os quais, duas especializações: uma em Metodologia do Ensino de Matemática e outra em Psicopedagogia. Esses cursos trouxeram contribuições para a prática pedagógica, porém, ainda não era possível ter respostas para os casos aparentemente críticos e específicos na aprendizagem da Matemática, como por exemplo, alunos no 9º ano do Ensino Fundamental que, para realizar operações básicas de multiplicação ou divisão, precisam utilizar representação concreta (como riscar palitinhos) ou alunos do Ensino Médio que não sabem ou têm dificuldades em realizar operações envolvendo números racionais.

Passado algum tempo, o foco passou a ser a comparação entre os alunos que tinham mais ou menos dificuldades em aprender Matemática. Foi quando percebemos, de maneira mais nítida, a diferença na forma de calcular desses alunos. Chamou-nos a atenção entre os discentes com bom desempenho em Matemática, os que faziam cálculos mentalmente e com certa rapidez. Isso nos pareceu um dado significativo e que merecia ser investigado. A partir disso, começamos a nos interessar pelo cálculo mental e ler sobre o assunto.

Iniciando um mestrado na área de Educação, tínhamos a intenção de pesquisar a temática do cálculo mental, pois já estávamos estudando sobre o assunto e aplicando algumas das noções aprendidas em um projeto existente na escola em que trabalhamos, junto a alunos que apresentavam dificuldades na aprendizagem de Matemática. Não tendo as expectativas atendidas no referido mestrado, o mesmo foi suspenso. Posteriormente, iniciamos o Mestrado em Educação Matemática na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS).

Ao ingressar no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS apresentamos uma intenção de pesquisa cuja temática consistia em *verificar se a dificuldade na aprendizagem da Matemática pode ter como fator gerador a falta da habilidade de* *cálculo mental*, propondo um trabalho com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. No entanto, ao realizar as primeiras orientações com o professor orientador, sentimos a necessidade de incluir um conteúdo matemático para justificar o estudo do cálculo mental no ano escolar em que se propunha realizar a pesquisa. Desse modo, fizemos a opção pela proporcionalidade e construímos um novo objeto de pesquisa, com o qual pretendíamos *investigar os procedimentos de cálculo mental no estudo da proporcionalidade.*

Depois de muitos estudos sobre o cálculo mental e sobre a proporcionalidade, percebemos que ficaria inviável conduzir uma pesquisa com a abrangência desses dois temas, o que nos levou a fazer opção por um deles. Não foi uma escolha fácil, pois por um lado, acreditávamos e ainda acreditamos nas diversas contribuições do cálculo mental para a aprendizagem da Matemática e, por outro, estávamos mais convencidos ainda da grande importância do raciocínio proporcional no contexto da Matemática e em outras áreas do conhecimento. Optamos pelo raciocínio proporcional haja vista o pouco tempo que tínhamos, bem como algumas dificuldades que inviabilizariam a realização do estudo com o cálculo mental.

Foi uma satisfação aprofundar os conhecimentos sobre esse tipo de raciocínio. Na prática docente, quase toda no Ensino Médio, observamos situações de dificuldades dos alunos relacionadas à proporcionalidade, como por exemplo, no estudo de funções, onde alguns não conseguem distinguir as que envolvem relações proporcionais das que não apresentam essas relações ou, quando utilizam o algoritmo da regra de três de forma mecânica, algumas vezes, de forma incorreta, demonstrando dificuldades em distinguir entre as grandezas diretamente e inversamente proporcionais.

Ao optarmos pelo raciocínio proporcional decidimos trabalhar com uma das características do cálculo mental, a oralidade, por entendermos que isso favoreceria a concentração, a memória e a atenção dos alunos.

Portanto, com a expectativa de obter novas respostas às questões referentes ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, lançamo-nos nesse desafio de pesquisa sobre a temática do raciocínio proporcional, apoiando-nos nas teorias da Didática da Matemática propostas para a pesquisa na área da Educação Matemática.

Organizamos essa pesquisa em seis capítulos:

No Capítulo 1 apresentamos a construção do objeto de pesquisa relativo ao raciocínio proporcional e os objetivos que pretendemos atingir com esse estudo.

No Capítulo 2 é apresentado o referencial teórico e metodológico que deu suporte e orientações para a execução desta pesquisa. Da Teoria das Situações Didáticas utilizamos as noções de situação didática, devolução, situações adidáticas de ação, formulação e validação, bem como de situação didática de institucionalização e contrato didático. Os procedimentos metodológicos utilizados foram os preconizados pela Engenharia Didática: análises preliminares, concepção e análise a *priori* de situações didáticas, experimentação e análise a *posteriori* e validação.

No Capítulo 3 abordamos a proporcionalidade na história da Matemática e o conceito de raciocínio proporcional na perspectiva de diversos autores. Apresentamos nele uma análise sobre a abordagem do raciocínio proporcional em relação aos documentos oficiais e livros didáticos e relatamos as dificuldades em relação ao ensino e a aprendizagem da proporcionalidade, os tipos de problemas e as estratégias de resolução, de acordo com a revisão da literatura sobre o tema.

No Capítulo 4 expusemos as escolhas metodológicas, destacando a oralidade, as variáveis didáticas escolhidas, os critérios de seleção dos problemas para aplicação e caracterizamos os alunos participantes da pesquisa.

No Capítulo 5 apresentamos as análises a *priori*, destacando as principais estratégias relativas ao raciocínio proporcional e as análises a *posteriori* dos problemas propostos aos alunos, confrontando os dados coletados com as estratégias previstas nas análises a *priori.*

E, finalmente no Capítulo 6, efetuamos considerações acerca desse estudo, elaborando, inclusive, algumas propostas para novas pesquisas.

1 PROBLEMÁTICA E OBJETIVOS DA PESQUISA

1.1 CONSTRUÇÃO DO OBJETO DE PESQUISA

A noção de proporcionalidade é uma das mais antigas da Matemática. A história nos mostra que a importância desse conceito deve-se ao fato de sua aplicabilidade em problemas práticos e no contexto matemático, bem como em diversas áreas do conhecimento. A necessidade humana de resolver seus problemas de cunho prático ou científico levou o homem a buscar uma maneira de raciocinar proporcionalmente. Nos tempos contemporâneos, a noção de proporcionalidade se torna cada vez mais importante, sendo utilizada por cientistas, engenheiros, comerciantes, entre outros.

A importância desse conceito é destacada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), com orientações detalhadas sobre procedimentos a serem utilizados no seu ensino, visando ao desenvolvimento do raciocínio proporcional. Estudos têm sido realizados em busca de uma melhor compreensão desse tipo de raciocínio e com o objetivo de contribuir com alternativas que possam minimizar as dificuldades, tanto de quem aprende quanto de quem ensina o conceito de proporcionalidade.

De acordo com Post, Behr e Lesh (1995, p. 90), o raciocínio com proporções não se limita a resolver problemas por meio do uso de algoritmos, mas “envolve um senso de covariação, comparações múltiplas e a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações”.

Segundo Lamon (*apud* COSTA, 2007), o conceito de raciocínio proporcional está muito além da mecanização, ou seja, do uso de algoritmo na resolução de problemas sobre proporcionalidade. O raciocínio proporcional está relacionado à habilidade de fazer análises conscientes da relação entre quantidades, o que é perceptível quando se analisa argumentos e explicações sobre as relações proporcionais.

Ao considerar os fatores relevantes ao ensino e à aprendizagem do conceito de proporcionalidade, Spinillo (1997) reforça a importância do professor ter conhecimento tanto do desenvolvimento cognitivo do aluno quanto da natureza do raciocínio proporcional. Na concepção da autora, conhecer a natureza do raciocínio proporcional implica, além do domínio do conteúdo a ser ensinado, ter compreensão das relações envolvidas nesse tipo de pensamento e das dificuldades que podem aparecer durante o processo de ensino e aprendizagem. Essas noções contribuiriam para a identificação de obstáculos epistemológicos pertinentes à construção do conceito de proporcionalidade. Havendo professores com esses conhecimentos, a autora afirma ainda que é possível evitar, entre outras coisas, um ensino de proporção restrito a um algoritmo (regra de três) como objeto principal da aprendizagem desse conteúdo.

Em relação ao ensino de proporções, pesquisas relatam o quanto esse processo tem se limitado à prática do uso de algoritmos e memorização de técnicas. Martins (2007) investigou as práticas vigentes nas aulas sobre proporção em duas turmas do 7^o ano e constatou uma prática docente centrada no método da cópia e repetição, sendo constante o hábito de o professor propor listas de exercícios que propiciavam aos alunos somente a memorização de técnicas de resolução. A autora verificou que o algoritmo da regra de três foi utilizado como a principal estratégia de resolução dos exercícios.

Pontes (2009) focou seus estudos na atuação dos professores em sala de aula, analisando o conteúdo, a metodologia e as atividades que estes desenvolviam para ensinar determinados conteúdos de Matemática na 5^a e 6^a séries (atuais 6^o e 7^o anos). Em relação ao ensino de Razão e Proporção na 6^a série, a autora presenciou um ensino conduzido por regras e um discurso narrativo monopolizado pelo professor. Apesar de o professor manifestar algumas atitudes que evidenciavam sua preocupação com a aprendizagem do aluno, o mesmo adotava uma metodologia que desprezava os conhecimentos prévios adquiridos na vivência fora da escola. Sua metodologia não permitia ao aluno participar do processo de construção do conceito em estudo, nem criar suas próprias estratégias para resolver os problemas propostos. Essa autora destacou que, em momento algum, o professor discutiu estratégias variadas de resolução dos problemas, mesmo quando algum aluno propunha uma estratégia diferente da ensinada pelo docente.

Face aos estudos apresentados, verificamos que as escolhas metodológicas adotadas por esses professores são uma negação das orientações de ensino propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) que preconizam, para o 7^o ano, um estudo da proporcionalidade que promova o desenvolvimento do raciocínio proporcional do aluno, com estímulos à autonomia de estratégias de resolução de problemas sem a utilização de procedimentos convencionais, como a regra de três.

Um ensino nessa vertente nos parece ser possível, haja vista o relato de autores (SCHLIEMANN e CARRAHER, 2006; SPINILLO, 1997) que pesquisaram sobre o raciocínio proporcional. Em suas investigações eles constataram que este modo de pensar foi utilizado, de forma intuitiva, por adultos e crianças quando resolveram determinados problemas que envolviam o pensamento proporcional, mesmo não tendo recebido previamente instrução formal sobre proporcionalidade.

Entendemos, a partir das considerações expostas, que em alguns casos as dificuldades dos alunos na utilização do conceito de proporcionalidade dentro da Matemática e em outras áreas do conhecimento têm suas origens no ensino desse conteúdo. Acreditamos que a falta ou o pouco conhecimento de alguns professores em relação à estrutura do raciocínio proporcional tem limitado o desenvolvimento desse tipo de raciocínio nos alunos. Assim, neste estudo, levantamos a hipótese de que os alunos possuem conhecimentos prévios e noções intuitivas de proporção que podem ser consideradas pelo trabalho escolar como ponto de partida para o ensino formal do conceito de proporcionalidade e desenvolvimento do raciocínio proporcional.

1.2 OBJETIVO DA PESQUISA

Para verificar a confirmação da hipótese levantada propomos como objetivos principais dessa pesquisa: *identificar e analisar as principais estratégias relativas ao raciocínio proporcional mobilizadas por alunos do 7º ano do ensino fundamental ao resolverem problemas que envolvam proporções (direta e inversa) e problemas que não apresentam relações proporcionais, a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade.*

1.3 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Alguns objetivos específicos nos orientaram na busca de indícios que representassem a presença do raciocínio proporcional nos alunos. Também nos dirigiram para a observação de seus comportamentos durante o processo de resolução dos problemas propostos. Para tanto, buscamos:

a) identificar a manifestação do pensamento qualitativo e quantitativo dos alunos nas estratégias utilizadas por eles durante a resolução de problemas que envolvem relações proporcionais e não proporcionais;

b) verificar de que forma a oralidade pode contribuir na formulação e/ou transformação de estratégias utilizadas pelos alunos ao resolverem os problemas propostos;

c) verificar se os discentes distinguem situações proporcionais das não proporcionais e como reagem na busca de soluções para as mesmas;

d) verificar a ocorrência de regras do contrato didático frente aos problemas que não envolvem relações proporcionais.

Em função da hipótese considerada e dos objetivos propostos, conduzimos esta pesquisa por meio da prática de resolução de problemas e com aporte nos referenciais teóricos e metodológicos apresentados a seguir.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E METODOLÓGICA

2.1. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Na perspectiva de conduzir esta pesquisa por meio da exploração de atividades envolvendo situações-problema com os objetivos de identificar e analisar a manifestação do raciocínio proporcional nas estratégias elaboradas pelos alunos, sem a intervenção da pesquisadora, buscamos aporte na teoria das situações didáticas. Essa teoria foi desenvolvida na França por Guy Brousseau (1986) e propõe uma forma de apresentação do conteúdo matemático a alunos em sala de aula, com a finalidade de possibilitar a aprendizagem de conteúdos específicos de Matemática.

Destacamos que a prática de resolução de situações-problema, à qual nos referimos, não se identifica com aquela é praticada pelo ensino tradicional, mas com a teoria das situações didáticas. Segundo Freitas (2008, p.88), o que diferencia a resolução de problemas, concebida como prática do ensino tradicional e a noção de situação didática "é principalmente a presença, a valorização e a funcionalidade de situações adidáticas no transcorrer de uma situação didática".

Neste trabalho nos remetemos às noções de situações didáticas, situações adidáticas e outros elementos propostos pela teoria das situações didáticas que deram embasamento teórico para o desenvolvimento desta pesquisa.

A *situação didática* é a noção principal da teoria das situações didáticas. Brousseau (*apud* FREITAS, 2008, p.80) a define como:

> Um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição.

No relacionamento proposto pela situação didática envolvendo professor, aluno e saber, existem atribuições específicas a serem executadas pelo professor, pelo aluno e pelos dois conjuntamente no processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo matemático.

Compete ao professor o trabalho inicial com os alunos, o qual deve estar baseado na contextualização e na devolução de um problema. Segundo Brousseau (1996), na *contextualização* o professor deve realizar um trabalho inverso ao do cientista matemático, fazendo uma recontextualização do saber, ou seja, elaborar situações considerando um contexto que dê significado ao conteúdo a ser ensinado aos alunos.

Na *devolução*, o papel do professor consiste em propor um problema ao aluno, comunicando-o de tal maneira que ele o adote como seu e sinta-se responsável por resolvê-lo, por vontade própria e não para atender a um desejo do professor.

Para Freitas (2008), o professor deve propiciar condições em sala de aula para que os alunos vivenciem as etapas de reflexões, escolhas inadequadas, tentativas erradas, pelas quais passam os pesquisadores, a fim de que possam construir seus conhecimentos.

A devolução tem, portanto, o objetivo de promover uma interação capaz de permitir ao aluno agir de forma autônoma, independente. Sobre isso Brousseau (2008, p.34-35) afirma que

> As concepções atuais do ensino exigirão do professor que provoque no aluno – por meio da seleção sensata dos "problemas" que propõe – as adaptações desejadas. Tais problemas, escolhidos de modo que o estudante os possa aceitar, devem fazer, pela própria dinâmica, com que o aluno atue, fale, reflita e evolua. Do momento em que o aluno aceita o problema como seu até aquele em que se produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo.

Quando o professor consegue que o aluno aceite a responsabilidade de resolver o problema sem a sua intervenção sobre o conteúdo, a partir desse momento ocorre um tipo de situação que Brousseau denomina de *adidática*.

Na concepção de Freitas (2008, p. 84),

> Uma *situação adidática* caracteriza-se essencialmente pelo fato de representar determinados momentos nos quais o aluno trabalha de maneira independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto do professor relativamente ao conteúdo matemático em jogo.

Para Brousseau citado por Almouloud (2007, p.33), uma situação adidática tem as seguintes características:

> - o problema matemático é escolhido de modo que possa fazer o aluno agir, falar, refletir e evoluir por iniciativa própria;

- o problema é escolhido para que o aluno adquira novos conhecimentos que sejam inteiramente justificados pela lógica interna da situação e que possam ser construídos sem apelo às razões didáticas;
- o professor, assumindo o papel de mediador, cria condições para o aluno ser o principal ator da construção de seus conhecimentos a partir da(s) atividade(s) proposta(s).

A situação adidática é, portanto, o momento em que o aluno se torna o protagonista da situação, com possibilidade de agir, refletir, formular e, quando possível, validar. Porém, ele só terá tais atitudes se o professor, na elaboração e apresentação dos problemas considerar um *meio* criado e organizado por ele, e sobre o qual possa intervir.

Brousseau (2008) propõe uma estruturação do ambiente na qual podem ser identificados cinco tipos de meios: meio material, meio objetivo, meio de referência, situações de aprendizagem e situações metadidáticas. O *meio* material, por exemplo, pode ser organizado pelo professor, quando ao preparar sua aula, elabora as peças de um jogo, um desafio, um problema, entre outras atividades. Nessa pesquisa, o *meio* material que organizamos é constituído por problemas que envolvem o conceito de proporcionalidade.

O *meio* é descrito por Brousseau (2008, p. 19) como “um sistema autônomo, antagônico ao sujeito”. Segundo Margolinas (2002) citada por Almouloud (2007), um *meio* é considerado antagonista quando é capaz de promover retroações sobre os conhecimentos do sujeito. Essas retroações, que podem ser representadas por conflitos e contradições, levam o aluno a refletir sobre suas ações, sua resposta a um problema, contribuindo dessa forma para sua aprendizagem. Um exemplo é o que ocorreu nesta pesquisa. Como todos os alunos da sala formavam um grande grupo e trabalhavam juntos, os conhecimentos de cada aluno faziam parte do *meio* de cada um, o que no desenvolvimento das atividades acabou promovendo retroações, que influenciavam nas tomadas de decisões individuais.

Ao organizar um *meio*, o professor cria oportunidade para que o aluno possa estabelecer relações com este. Segundo Brousseau (2008), essas relações podem ser agrupadas em três categorias: troca de informações sem linguagem, por meio de ações ou decisões; troca de informações por meio de linguagem codificada e troca de opiniões (argumentos). Por meio dessas relações, o aluno manifesta também suas relações com o saber.

2.1.1 Tipologia das Situações Adidáticas

A fim de descrever as relações do aluno com o saber, Brousseau (2008) estabeleceu a tipologia das situações adidáticas, composta pelas situações de *ação*, *formulação* e *validação*. Quando essas três situações ocorrem, verifica-se a manifestação das atribuições de competência exclusiva do aluno no contexto da teoria das situações didáticas. Vejamos o que caracteriza cada uma delas.

Situação de ação

Numa situação de *ação*, o aluno age com a intenção de apresentar uma solução ao problema que lhe foi proposto sem, contudo, se preocupar em apresentar argumentos teóricos que justifiquem sua resposta. Nesse tipo de situação, ao atuar sobre o *meio*, ele poderá receber retroações deste que o leve a repensar sua ação e, caso julgue necessário, modifique sua decisão anterior.

Situação de formulação

Nesse tipo de situação, além de o aluno comunicar a solução encontrada para o problema em estudo, ele tenta explicar a estratégia que utilizou na resolução, por meio da linguagem oral ou escrita (natural ou matemática), que seja compreensível para seus interlocutores, caso existam. Nessa comunicação, o discente deve considerar as relações matemáticas presentes na situação, utilizando regras já conhecidas ou criando novas, sem a obrigação de convencer o outro sobre a validade do que propõe.

Segundo Brousseau (2008), a comunicação de uma estratégia pode levar o aluno a receber dois tipos de retroações: uma por parte de outro aluno (que pode compreender ou não, concordar ou não com a estratégia) e outra por parte do meio, quando, por exemplo, o aluno for empregar a estratégia adotada a um novo problema e esta ser capaz ou não de levá-lo à solução correta.

Situação de validação

Na situação de validação, o aluno não comunica simplesmente uma estratégia; ele deixa de ser apenas um emissor e assume o papel de proponente de uma afirmação que considera verdadeira. Nessa situação, ele usa argumentos, organiza enunciados e debate com seu receptor (que se torna um oponente), tentando convencê-lo de que sua afirmação é válida.

Segundo Brousseau (2008, p. 30), proponente e oponente,

> colaboram na busca da verdade, ou seja, no esforço de vincular de forma segura um conhecimento a um campo de saberes consolidados, mas entram em confronto quando há dúvidas. Juntos encarregam-se das relações formuladas entre um meio e um conhecimento relativo a ele. Cada qual pode posicionar-se em relação a um enunciado e, havendo desacordo, pedir uma demonstração ou exigir que o outro aplique suas declarações na interação com o meio.

Para Almouloud (2007), o principal objetivo da situação de validação é o debate, as discussões entre os alunos, como um meio de aceitar ou rejeitar provas. Como afirma Brousseau (2008), nessa situação o aluno tanto aprende a convencer o colega, como se deixa convencer por ele.

Importante destacar a observação de Freitas (2008) quanto à produção de provas na situação de validação. Segundo o autor, essa produção requer, assim como na formulação, um recurso de linguagem que pode ser oral ou escrito. O mais comum, em sua visão, é que o aluno utilize os dois tipos. Contudo, afirma ainda que, muitas das dificuldades identificadas na produção de provas decorrem do uso da linguagem escrita, devido ao pouco domínio dos alunos em relação à linguagem simbólica formal da Matemática.

Ao final dessa etapa das situações adidáticas, o professor continua a interagir com o aprendiz e assume seu papel sobre o saber, numa situação que deixa de ser adidática, pois o objetivo principal dela é o de realizarem juntos a *institucionalização*.

Situações de institucionalização

Nas situações de institucionalização o professor desempenha funções como: organizar as produções dos alunos, conferir status de saber aos conhecimentos construídos por eles e relacionar as produções com outros saberes. Para Brousseau (1996, p.56),

> a institucionalização se realiza tanto sobre uma situação de ação - reconhece-se o valor de um procedimento que se converterá em um recurso de referência - como também sobre uma situação de formulação. Há formulações que serão conservadas ("isto se diz assim", "aquilo deve ser lembrado"). O mesmo acontece com as provas: é necessário identificar o que será retido das propriedades dos objetivos que encontramos.

No momento da institucionalização, o professor sistematiza as produções que foram previamente elaboradas pelos alunos, sem que tivesse dito inicialmente a eles o que queria que aprendessem; diferente do papel de um professor que lhes diz o que deseja que eles saibam, que explica o conteúdo e depois verifica o que foi aprendido. Como afirma Pais (2002, p.74), "a institucionalização só faz sentido quando o aluno compreende o significado do conteúdo e percebe a necessidade de integrar seu conhecimento a uma teoria mais ampla".

Assim, ao realizar a institucionalização, o professor que tem o controle sobre o saber pode até apresentar a teoria (definições, teoremas, propriedades, etc) relacionada ao problema em estudo, de uma maneira formalizada, porém, sem antecipar o conhecimento já validado pelo meio científico.

Na perspectiva de Almouloud (2007, p. 40),

> - Se feita muito cedo, a institucionalização interrompe a construção do significado, impedindo uma aprendizagem adequada e produzindo dificuldades para o professor e os alunos;
> - quando feita após o momento adequado, ela reforça interpretações inexatas, atrasa a aprendizagem, dificulta as aplicações;
> - é negociada numa dialética.

Nesse estudo, considerando os objetivos de identificar e analisar as estratégias mobilizadas pelos alunos em diversas sessões que contenham problemas que envolvem proporcionalidade, optamos por fazer institucionalizações de alguns conceitos referentes ao conteúdo em estudo, somente ao final de algumas sessões, considerando que institucionalizações antecipadas poderiam influenciar as estratégias que os alunos viessem utilizar ao resolverem problemas na sessão seguinte, mesmo percebendo que determinadas ações ou formulações pudessem ser mais exploradas.

Dessa maneira, nosso papel, na maioria das sessões, limitou-se a realizar intervenções que possibilitassem aos alunos continuarem vivenciando momentos adidáticos. Ao identificarmos, por exemplo, uma formulação incorreta por algum aluno, fazíamos questionamentos a ele ou ao grupo, a fim de provocar reflexões que permitissem a reformulação de estratégias, até que ocorresse a apresentação de uma solução correta para o problema proposto.

Quando verificávamos uma estratégia correta, também solicitávamos ao grupo que observassem a estratégia apresentada. Em cada problema, após validação de uma solução correta, confirmávamos a solução, o que entendemos que funcionava como a institucionalização de uma formulação.

2.1.2 Contrato Didático

As relações estabelecidas entre professor, alunos e saber, não só na institucionalização, mas em todos os momentos da situação didática, são submetidas a uma espécie de contrato, denominado por Brousseau como *contrato didático*.

Conforme afirma Brousseau (1986), citado por Silva (2008, p.50),

> Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor (...). Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro.

Para Almouloud (2007), ao se fazer referência ao contrato didático, é importante destacar a diferença existente entre este e o contrato pedagógico. Segundo o autor, o grande diferencial entre os dois tipos de contrato está no fato do contrato pedagógico não considerar o saber como um dos elementos da relação didática, privilegiando somente as relações sociais, as regras e as convenções estabelecidas na relação entre *professor* e alunos.

Quanto ao funcionamento do contrato didático, tanto Almouloud (2007) quanto Silva (2008) consideram que este depende dos diversos contextos adotados no processo de ensino e aprendizagem, como por exemplo, as escolhas pedagógicas, os objetivos do curso, o tipo de trabalho requisitado ao aluno e outros. Na análise de Silva (2008, p.52), “a prática pedagógica mais comum em Matemática parece ser aquela em que o professor cumpre seu contrato dando aulas expositivas e passando exercícios aos alunos”.

Esse contexto nos remete ao tipo de contrato que constatamos ao investigar o ensino do conceito de proporcionalidade. Verificamos alguns casos em que o professor resumiu o ensino deste conceito à aplicação do algoritmo da regra de três, de forma mecânica, sem dar condições ao aluno para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Dessa forma, restou-lhe memorizar uma regra e aplicá-la nos exercícios que envolviam proporcionalidade, muitas vezes, sem compreensão do que estava realizando.

Vamos supor, no entanto, uma prática pedagógica diferente em que o professor, com o objetivo de ensinar um conteúdo, apresentasse um problema aos alunos envolvendo um assunto ainda não explorado e solicitasse aos mesmos que trabalhassem em busca de uma solução. Essa atitude possivelmente lhes causaria uma surpresa, pois talvez, esperassem primeiro explicações sobre a teoria a ser estudada para depois realizarem o exercício proposto. Nessa situação, a referida atitude representa um exemplo do que Brousseau denominou como *ruptura do contrato didático*.

E como afirma Silva (2008), é justamente quando um dos parceiros da relação didática (professor ou aluno) quebra o contrato, que as regras se manifestam. Segundo o autor, a ruptura e a renegociação do contrato podem provocar um avanço no processo de aprendizagem.

Num contexto como o suposto anteriormente, o contrato didático possui regras que permitem aos alunos participarem ativamente da construção do conhecimento. Contudo, ao se aventurarem no processo em busca de solução para um problema proposto, eles provavelmente viriam a cometer determinados tipos de erros, que poderiam ser decorrentes de regras de algum contrato didático vivenciado anteriormente. Nessa pesquisa, por exemplo, ao propormos aos alunos o problema “Jogando dois dados eu fiz 7 pontos. Quantos pontos eu farei se jogar 4 dados?”, tivemos respostas como: “Acho que é 14 pela pergunta, mas em nenhum dado ele vai fazer os mesmos pontos seguidos”. Observamos que esse pode ter vivenciado um tipo de contrato didático em que somente foram propostos problemas que admitissem apenas soluções numéricas determinadas. Logo, ao se deparar com um problema como o apresentado, mesmo mostrando a compreensão de que não é possível prever uma solução determinada, ele a apresenta.

Com essa preocupação, Silva (2008) analisou as respostas apresentadas por alunos ao resolverem um problema, com ruptura de contrato por parte dele, na função de professor. O autor verificou, em sua experiência, que os erros cometidos por eles advinham de regras de contrato didático, às vezes implícitas, mas que já tinham sido internalizadas. Algumas dessas regras apresentadas pelo autor, são oriundas de estudos realizados por Chevallard, que atribui a incoerência de algumas respostas dos alunos ao contrato didático e não aos dados apresentados em um problema. Conforme constatou Chevallard (*apud* SILVA, 2008, p.59-60) algumas regras afirmariam que:

> - sempre há uma resposta a uma questão matemática e o professor a conhece. Deve-se sempre dar uma resposta que eventualmente será corrigida;
> - para resolver um problema é preciso encontrar os dados no seu enunciado. Nele devem constar todos os dados necessários e não deve haver nada de supérfluo;
> - em matemática resolve-se um problema efetuando-se operações. A tarefa é encontrar a boa operação e efetuá-la corretamente. Certas palavras-chave contidas no enunciado permitem que se adivinhe qual é ela.
> - os números são simples e as soluções também devem ser simples, senão, é possível que se engane;
> - as questões colocadas não têm, em geral, nenhuma relação com a realidade cotidiana, mesmo que pareçam ter, graças a um habilidoso disfarce. Na verdade, elas só servem para ver se os alunos compreenderam o assunto que está sendo estudado.

Nesta pesquisa verificamos a ocorrência de algumas dessas regras, principalmente quando os alunos resolveram problemas que não envolviam relações proporcionais. Diversos deles apresentavam uma solução numérica ao problema, mesmo quando entendiam que não havia a relação proporcional entre as grandezas, justificando que todo problema de matemática deve ter uma resposta, o que na concepção deles seria sempre um número.

Assim como a noção de contrato didático, os elementos teóricos aqui destacados foram essenciais para a condução deste estudo. Destacamos que, embora a teoria das situações didáticas seja uma teoria que estuda formas de exploração de situações-problema visando à aprendizagem de um determinado conteúdo e, mesmo não sendo este o objetivo principal desta pesquisa, foi possível utilizá-la apoiando-nos nas noções de devolução, situações de ação, formulação, validação, institucionalização e de contrato didático. Este quadro teórico nos auxiliou quanto à forma de apresentação dos problemas para os alunos, por meio de situações não convencionais e quanto ao exercício do papel da pesquisadora como mediadora das situações propostas. Contribuiu ainda para que pudéssemos identificar o raciocínio empregado pelos alunos durante a resolução dos problemas que envolviam proporcionalidade, a partir das ações e explicações utilizadas para justificar as estratégias e soluções apresentadas.

2.2 ENGENHARIA DIDÁTICA

Para o desenvolvimento desta pesquisa nos inspiramos na metodologia denominada Engenharia Didática descrita por Artigue (1996), com a finalidade de analisar as situações didáticas. Consideramos, em nossa escolha, as características específicas dessa metodologia que abrange tanto a dimensão teórica (caso metodológico da pesquisa) quanto a experimental (caso das sequências de atividades em sala de aula).

Como metodologia de pesquisa, Artigue (1996, p.196) caracteriza a Engenharia Didática como "um esquema experimental baseado em 'realizações didáticas' na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino". A autora ainda destaca duas características dessa metodologia, que a torna diferente de outras: o registro dos estudos de casos e a validação. Nessa metodologia, a validação é interna, ou seja, é baseada na comparação entre a análise a *priori* e a análise a *posteriori*. Assim, é possível validar a pesquisa, sem a necessidade de trabalhar com grupo experimental e grupo controle como procedem as metodologias que fazem uma validação externa.

2.2.1 Fases da Metodologia da Engenharia Didática

A Engenharia Didática propõe uma organização de procedimentos metodológicos a serem adotados em uma pesquisa por meio das quatro fases que compõem o seu processo experimental: (1^a) análises preliminares, (2^a) concepção e análise a *prior, (3^a)* experimentação e (4^a) análise a *posteriori* e validação, que descrevemos a seguir.

2.2.1.1 As Análises Preliminares

As análises preliminares são realizadas com base em um quadro teórico geral da didática e nos conhecimentos didáticos já adquiridos sobre o conteúdo a ser pesquisado. Segundo Artigue (1996), essa primeira fase da engenharia também se apoia em outras análises prévias como as análises:

- epistemológica do conteúdo abordado pelo ensino;
- do ensino usual e de seus efeitos;

- dos conhecimentos dos alunos, das dificuldades e obstáculos que determinam sua evolução;
- do campo de restrições no qual se situará a efetiva realização didática.

Cada uma dessas análises será realizada ou não, com maior ou menor nível de exigência, dependendo do objetivo da investigação. No entanto, todas devem considerar os objetivos específicos da pesquisa e têm como objetivo principal, fundamentar a construção da engenharia. Conforme afirma a autora, mesmo sendo realizadas previamente, as análises são retomadas e aprofundadas durante o processo de pesquisa, de acordo com as necessidades que possam surgir.

2.2.1.2 Concepção e Análise a *Priori*

Nessa fase, a partir das análises preliminares, o pesquisador escolhe as variáveis didáticas que julga importante para o processo de ensino e de aprendizagem do objeto de estudo de sua pesquisa.

Para Artigue (1996), há dois tipos de variáveis didáticas a serem consideradas:

- as *variáveis macrodidáticas* ou *globais*, que se referem à organização global da engenharia;
- as variáveis *microdidáticas* ou *locais*, referentes à organização local da engenharia, ou seja, à organização de uma sessão ou de uma fase.

Dependendo do conteúdo matemático a ser estudado, essas variáveis podem ser de ordem geral ou específica.

O objetivo de uma análise a *priori* segundo Artigue (1996, p. 205) é

> Determinar de que forma as escolhas efetuadas permitem controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, funda-se em hipóteses; será a validação dessas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise a *priori* e a análise a *posteriori*.

A análise a *priori* é composta de duas partes: uma que envolve descrição e outra que envolve previsão. Ela é baseada nas características de uma situação adidática, que se quer criar e depois propor aos alunos na fase da experimentação. Conforme explica Artigue (1996, p. 205), na análise a *priori*

> - descrevem-se as escolhas efetuadas ao nível local (remetendo-as, eventualmente, para escolhas globais), e as características da situação adidática que delas decorrem;
> - analisa-se o peso que o investimento nesta situação pode ter para o aluno, particularmente em função das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele dispõe, uma vez operada a devolução, num funcionamento quase isolado do professor;
> - preveem-se os campos de comportamentos possíveis e procura-se mostrar de que forma a análise efetuada permite controlar o sentido desses campos e assumir, em particular, que os comportamentos esperados, se intervierem, resultarão claramente da aplicação do conhecimento visado pela aprendizagem.

A análise a *priori* é uma fase muito importante, pois permite ao professor prever as possíveis ações que os alunos poderão realizar durante a experimentação.

2.2.1.3 Experimentação

A experimentação é a fase em que o pesquisador realiza a engenharia com os alunos que são sujeitos da pesquisa. É nessa fase que o pesquisador coleta os dados realizando observações durante as sessões de ensino, por meio das produções dos alunos, dentro ou fora da sala de aula. Sendo necessário, esses dados são complementados por outros colhidos com o emprego de metodologias externas como: questionários, entrevistas individuais ou em pequenos grupos, que podem ser efetuadas em diversos momentos do ensino ou ao final da experimentação.

Os dados podem ser recolhidos utilizando-se gravações audiovisuais e relatórios que permitirão a construção dos protocolos de pesquisa.

2.2.1.4 Análise a *Posteriori* e Validação

A análise a *posteriori* é realizada com base nas informações colhidas durante a fase da experimentação. A partir das análises dos protocolos e das observações, o pesquisador confronta os dados obtidos na análise a *posteriori* com a análise a *priori* realizada, com o objetivo de validar ou não as hipóteses elencadas ao iniciar a engenharia. Como observa Artigue (1996), essa validação interna é uma das características da Engenharia Didática.

Considerando esse referencial metodológico organizamos os procedimentos executados nessa pesquisa. Descrevemos a seguir, as ações realizadas em cada uma dessas fases, a fim de apresentarmos uma visão geral da metodologia adotada. Ressaltamos que os dados coletados nessas quatro fases auxiliaram na composição dos dois capítulos seguintes desse trabalho.

2.2.2 Fases da Engenharia Didática nessa Pesquisa

2.2.2.1 Análises Preliminares

Na primeira fase, *as análises preliminares* tiveram por objetivo levantar informações para compor o quadro teórico e auxiliar nas definições do objeto e da hipótese da pesquisa. Para tanto, num primeiro momento realizamos um estudo da gênese histórica do conceito de proporcionalidade, com a finalidade de verificar a constituição desse conceito e como evoluiu o pensamento proporcional no contexto da história da matemática. Num segundo momento analisamos a noção de raciocínio proporcional proposta pela perspectiva de diversos autores, a fim de escolhermos a que melhor atenderia aos objetivos dessa pesquisa.

Num terceiro momento analisamos como está o ensino do conceito de proporcionalidade e se este promove o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Utilizamos como parâmetros para essa análise as orientações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), as resenhas sobre coleções de livros didáticos apresentadas pelo Guia de Livros Didáticos, do Programa Nacional do Livro Didático - PNLD (2007), de publicação do Ministério da Educação e pesquisas que investigaram essa temática.

Por fim, num quarto momento levantamos possíveis fatores que interferem no processo do ensino e aprendizagem do conceito de proporcionalidade e no desenvolvimento do raciocínio proporcional, por meio do estudo de tipos de problemas e de estratégias de resolução de situações-problema que envolvem proporcionalidade.

2.2.2.2 Concepção e Análise *a Priori*

Na segunda fase, a da *concepção e análise a priori das situações didáticas*, elaboramos e analisamos uma sequência didática composta por cinco sessões. Os problemas que compõem cada sessão foram elaborados tomando por base os estudos prévios, de modo que permitissem ao aluno entender, agir, expressar, refletir e evoluir por conta própria, com a possibilidade de desenvolver o raciocínio proporcional. Na realização da análise a *priori* descrevemos as variáveis escolhidas: forma de apresentar as atividades aos alunos (oral / escrita), campo numérico (inteiro / decimal), instrumento didático (uso do lápis e papel / sem uso do lápis e papel), tipos de relações entre grandezas (diretamente e inversamente proporcionais / não-proporcionais) e multiplicidade (números múltiplos de mesma grandeza / números múltiplos de grandezas diferentes / sem multiplicidade entre os valores das duas grandezas). A caracterização como variáveis didáticas se deve ao fato de que mudanças nos valores das mesmas podem provocar alterações nas estratégias de resolução dos alunos. Nessa análise ainda fizemos uma previsão de possíveis estratégias de resolução que poderiam ser utilizadas pelos alunos e das dificuldades que estes poderiam enfrentar na resolução dos problemas.

2.2.2.3 Experimentação

Na terceira fase, a da *experimentação*, aplicamos a sequência didática a um grupo de 16 alunos do 7º ano do ensino fundamental, que ainda não havia estudado o conteúdo referente à proporcionalidade. Como optamos por trabalhar com a oralidade e a escrita, os alunos tinham que expressar suas estratégias verbalmente mesmo quando resolviam os problemas por escrito. Dessa forma, os dados foram coletados por meio das produções escritas, de gravação em áudio e das pautas de observação em todas as sessões, o que permitiu construir posteriormente os protocolos de pesquisa.

2.2.2.4 Análise a *Posteriori* e Validação

Na quarta fase, *análise a posteriori e validação*, confrontamos os dados coletados na experimentação com as análises a *priori*.

Os resultados obtidos em cada uma dessas fases são expostos nos capítulos 4, 5 e 6. Na sequência, apresentamos uma revisão da literatura referente à proporcionalidade na história da Matemática e ao raciocínio proporcional, com informações coletadas na fase da análise preliminar.

3 PROPORCIONALIDADE E RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

3.1 PROPORÇÃO NA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Muitos dos conceitos matemáticos que são utilizados na resolução de problemas atuais surgiram na antiguidade. É o caso do conceito de proporcionalidade, com grandes aplicações hoje em diversas áreas do conhecimento, dentre elas, Engenharia, Arquitetura, Física e Química. Além disso, a proporcionalidade aparece com frequência na resolução de problemas do cotidiano envolvendo ampliação e redução de valores de duas grandezas, por exemplo.

A fim de compreendermos o raciocínio proporcional que é mobilizado durante a resolução de situações-problema, faremos uma revisão histórica sobre o conceito de proporção sem, contudo, nos aprofundarmos nos acontecimentos ocorridos na história da Matemática no período analisado. Nossa intenção é procurar compreender como o conceito de proporção surgiu e como o raciocínio proporcional vem sendo utilizado no decorrer do processo de construção e desenvolvimento dos conceitos matemáticos.

De acordo com textos e documentos analisados por historiadores da Matemática, já havia registros relacionados a proporções no Papiro de Rhind (ou Ahmes), um texto matemático datado de 1650 a.C., publicado em 1927 e que trazia informações referentes à matemática egípcia antiga (EVES, 2004).

Segundo Boyer (1974), nesse papiro existem registros de problemas aritméticos, que envolvem objetos concretos relacionados a situações práticas, cujas soluções dão evidências do conhecimento e uso de um algoritmo que se assemelha ao que hoje chamamos de regra de três. Um exemplo disso é a resolução apresentada para o problema 72 que questiona: "Qual o número de pães de força[1] 45 que são equivalentes a 100 de força 10?" (BOYER, 1974, p.12). A solução 450 pães é encontrada a partir da resolução da expressão $\frac{100}{10}x45$.

Outros problemas envolvendo proporção, que constam do papiro de Rhind, são citados por Boyer (1974) como sendo problemas algébricos. Estes não mencionam objetos específicos como os problemas aritméticos, mas problemas com incógnitas denominadas

---

[1] Segundo Boyer (1974, p. 12), "Força (ou pesu) é o inverso da densidade de grão, sendo o quociente do número de pães ou de unidades de volume dividido pela quantidade de grão".

"aha". Um exemplo retratado por Boyer (1974) é o problema 24 que solicita o valor de aha sabendo que aha mais um sétimo de aha dá 19. A solução proposta é encontrada por meio do "método da falsa posição", segundo o qual se atribui um valor qualquer para aha e, após a realização das operações indicadas no problema, compara-se o valor encontrado com o resultado que se deseja e, usando o conceito de proporção durante a resolução, chega-se à resposta correta.

Vale mencionar que no campo da Geometria os egípcios obtiveram uma fórmula para a área do círculo a partir da proporcionalidade entre a área do quadrado de lado igual ao diâmetro do círculo e área de um octógono inscrito nesse quadrado a qual não difere muito da área do círculo.

A história antiga da Matemática ainda aponta aplicações da teoria das proporções na Geometria. Eves (2004, p.61) relata que há mais de mil anos da era cristã, os babilônios " tinham conhecimento de que os lados correspondentes de dois triângulos retângulos semelhantes são proporcionais".

Adentrando na Matemática da Grécia antiga, observa-se que os pitagóricos também faziam uso do raciocínio proporcional e tiveram sua concepção das proporções revogada quando da descoberta das grandezas incomensuráveis. Até então, os pitagóricos acreditavam que dados dois segmentos quaisquer, sempre existia um segmento que "cabia" uma quantidade inteira de vezes em cada um dos segmentos considerados, ou seja, que os segmentos eram comensuráveis. Ainda é atribuído aos pitagóricos o estudo das médias e o uso da proporção áurea, o que faz os historiadores cogitarem a hipótese de que os pitagóricos possuíam uma teoria de proporções para trabalharem com números.

A novidade em relação aos incomensuráveis gerou um "colapso" nos fundamentos da Matemática, que só foi reestruturada com a teoria das proporções de Eudoxo[2]. Para Eves (2004), a definição de proporção apresentada por Eudoxo é tão importante que merece ser transcrita tal qual aparece nos *Elementos* de Euclides.

---

[2] Eudoxo de Cnido (408-355 a.C.) foi discípulo de Platão e o mais célebre matemático e astrônomo de seu tempo (BOYER, 1974).

3.1.1.Proporção em Euclides

No Livro V dos Elementos, Euclides registra de forma organizada a teoria das proporções de Eudoxo. Expõe a definição de proporção como sendo a definição 5:

> Diz-se que grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta quando, tomando-se equimúltiplos quaisquer da primeira e da terceira e equimúltiplos quaisquer da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos são ambos maiores que, ou ambos iguais a, ou ambos menores que os últimos equimúltiplos considerados em ordem correspondentes (EVES, 2004, p. 173).

Utilizando a linguagem simbólica que a Matemática passou a adotar ao longo dos tempos, a definição proposta por Eudoxo pode ser escrita como: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se, e somente se, dados inteiros m e n sempre que $ma < nb$, então $mc < nd$; se $ma = nb$, então $mc = nd$; se $ma > nb$, então $mc > nd$.

No livro V, Euclides ainda apresenta a definição de grandezas proporcionais, (def.6), no qual afirma que “as grandezas, que tem entre si a mesma razão, se chamam proporcionais” (COMMANDINO, 1944, p.75).

Encontra-se no Livro VI dos Elementos de Euclides, a aplicação das proporções eudoxianas à geometria plana. São apresentados nesse livro, os teoremas fundamentais da semelhança de triângulos; construções de terceiras, quartas e médias proporcionais; a proposição que afirma que a bissetriz de um ângulo de um triângulo divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos outros dois lados, entre outras afirmações.

Além da aplicação à geometria, a teoria das proporções foi aplicada aos números, como é possível observar no Livro VII dos Elementos de Euclides citado por Araújo *et al.*, (2005, p.9), quando apresenta a definição 20: “Números são proporcionais quando o primeiro é o mesmo múltiplo, ou a mesma parte, ou as mesmas partes, de um segundo número, que o terceiro é do quarto.” E ainda a proposição 19:

> Se quatro números são proporcionais, então o número originado pelo primeiro e o quarto é igual ao número originado pelo segundo e o terceiro; e, se o número originado pelo primeiro e o quarto é igual ao número originado pelo segundo e o terceiro, então os quatro números são proporcionais (ARAÚJO *et al.*, 2005, p.16).

Esta proposição é hoje conhecida como a propriedade fundamental das proporções. Em simbologia atual tem-se o seguinte enunciado: Se a:b = c:d, então a.d = b.c, e, se a.d = b.c, então a:b = c:d.

Boyer (1974) constatou que a teoria das proporções de Euclides foi substituída pela teoria de Omar Khayyam[3], que ao propor um método numérico em substituição ao método anterior, se aproximou muito das noções de números irracionais e lidou com o conceito de um tipo de número que hoje, representa o conceito de número real.

Para Dalmedico e Peiffer (*apud* BERNAL, 2004), Khayyam propôs uma teoria das proporções mais elaborada, pois em sua visão, no Livro V Euclides não expressava o verdadeiro significado de uma razão que é a medida de uma grandeza por outra. Conforme esses autores, Khayyam fazia a comparação de razões incomensuráveis decompondo-as em frações contínuas.

Bernal (2004, p.34) observa que a teoria das proporções tal como foi instituída por Khayyam serviu como “fonte para a evolução dos números irracionais”.

Apesar da concepção de Khayyam, a teoria das proporções contida nos *Elementos* de Euclides foi aplicada a questões científicas por estudiosos antigos e medievais. Destaca-se, por exemplo, no final do período medieval, os físicos e também matemáticos, Thomas Bradwardine (1290 ?-1349) e Nicole Oresme (1323 ?-1382) que, segundo Boyer (1974, p.191) foram responsáveis por “uma visão mais ampla da proporcionalidade”.

Thomas Bradwardine constatou que Aristóteles (384-322 a.C.) havia considerado equivocadamente, que “a velocidade de um objeto sujeito a uma força propulsora atuando num meio resistente é proporcional à força e inversamente proporcional à resistência” (BOYER, 1974, p.191), ou seja, V = K.F/R. Para corrigir esse engano de Aristóteles, Bradwardine desenvolveu uma teoria generalizada de proporções e, ao publicar o *Tractatus de proportionibus* em 1328, considerou quantidades que variavam como potência ou como raízes. Após seus estudos, Bradwardine enunciou uma nova lei de movimento em substituição à de Aristóteles. Generalizando, propôs que para multiplicar por n a velocidade devia-se elevar a n-ésima potência a razão F/R.

Quanto a Nicole Oresme, este generalizou a teoria das proporções desenvolvida por Bradwardine. Em sua obra intitulada *De proportionibus proportionum*, escrita em meados de 1360, Oresme enunciou regras para combinar proporções, que em notação moderna

[3] Omar Khayyam (1050-1122), árabe, era considerado como um cientista pelo Oriente e como um importante poeta persa pelo Ocidente. Escreveu uma Álgebra mais avançada que a de al – Khowarizmi, incluindo equações do terceiro grau (BOYER, 1974).

representam as regras de potenciação: $x^m.x^n = x^{m+n}$ e $(x^m)^n = x^{m.n}$ e para as quais já era considerado o uso de expoente racional.

3.1.2 Regra de Três

Tradicionalmente os problemas que envolvem proporções, nos quais são conhecidos três valores e deseja-se determinar um quarto valor, são resolvidos por um processo prático denominado *Regra de Três* e que, supostamente, surge das noções apresentadas na proposição 19 do Livro VII dos Elementos de Euclides. Por exemplo, empregando a simbologia atual da Matemática, verifica-se que dados a,b,c conhecidos e x desconhecido, tem-se $a:b = c:x$, o que pode ser escrito como $a.x = b.\ c$, ou $x = b.c/a$. No entanto, a regra de três só veio a ser associada às proporções no final do século XIV (EVES, 2004). Anteriormente a regra era puramente verbal, não sendo expressa por nenhum tipo de fórmulas ou equações.

Historicamente, a regra de três teve sua origem na China. Segundo Boyer (1974), há a constatação de problemas resolvidos com o uso desse algoritmo no livro *Chui-Chang Suan-Shu* ou *Nove capítulos sobre a arte matemática* [4].

Eves (2004) relata que a regra de três chegou até a Arábia por meio da Índia, recebendo de Brahmagupta e Bháskara a mesma nomeação. Brahmagupta considerava que "Na regra de três, os nomes dos termos são *argumento*, *fruto* e *requisito*. O primeiro e o último termos devem ser semelhantes. *Requisito* multiplicado por *fruto* e dividido por *argumento* é o *produto*" (EVES, 2004, p.263)

Para ilustrar esse enunciado da regra de três Eves (2004, p.263) apresenta como exemplo um problema proposto por Báskara: "Se dois palas e meio de açafrão custam três sétimos de niska, quantos palas se comprarão com nove niskas?" A partir dos conceitos enunciados por Brahmagupta, tem-se que $\frac{3}{7}$ e 9 são termos semelhantes, logo são o *argumento* e o *requisito* . O *fruto* é $\frac{5}{2}$. A solução, ou seja, o *produto* é obtido da resolução de

[4] Este foi o mais influente livro de matemática chinês. Contém 245 problemas sobre mensuração de terras, agricultura, sociedades, engenharia, impostos, cálculos, solução de equações e propriedades dos triângulos retângulos. (BOYER, 1974).

$9.\frac{5}{2}.\frac{3}{7}$, o que resulta em $52\frac{1}{2}$. Considerando a regra que hoje é familiar, bastaria resolver a proporção $\frac{5}{2}:\frac{3}{7}=x:9$, donde resultaria x = $52\frac{1}{2}$.

Encontra-se também problema envolvendo a regra de três no *Líber Abaci,* publicado por Leonardo de Pisa em 1202 e que Eves (2004, p.316) descreve com o seguinte enunciado: “Um certo rei envia 30 homens a seu pomar para plantar árvores. Se eles podem plantar 1000 árvores em 9 dias, em quantos dias 36 homens plantariam 4400 árvores?”

No contexto em que esse problema foi apresentado, entendemos que o mesmo envolve relações proporcionais. No entanto, ao propor esse problema para alunos, a fim de evitar algum tipo de dúvida quanto à existência da proporcionalidade, consideramos que seria importante acrescentar algumas informações, como por exemplo, explicitar que o serviço realizado pelos homens se daria nas mesmas condições dos anteriores ou que a média de trabalho por dia seria a mesma.

3.1.3 Definição de Proporcionalidade

O conceito de proporcionalidade é um dos mais antigos em Matemática. Além do conceito proposto em Euclides, analisamos algumas definições de autores como Trajano, Lima e Ávila, bem como suas observações acerca do tema em questão.

Lima (2006) apresenta uma definição dada por Antônio Trajano em seu livro “Aritmética Progressiva” cuja 2ª edição data de 1884. Segundo Lima (2006, p.125), Trajano apresenta a seguinte definição para grandezas proporcionais:

> Diz-se que duas grandezas são proporcionais quando elas se correspondem de tal modo que, multiplicando-se uma quantidade de uma delas por um número, a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número. No primeiro caso a proporcionalidade se chama direta e, no segundo, inversa; as grandezas se dizem diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais.

Em relação a essa definição, Lima (2006, p.126) observa que Trajano se refere a um número real (positivo) qualquer e que, na prática, é difícil verificar que “a quantidade correspondente da outra fica multiplicada ou dividida pelo mesmo número”, a não ser quando esse número é inteiro.

Lima (2006) considera que Trajano apresenta uma definição simples, clara e elementar. No entanto, ele observa que mesmo após um século da definição dada por Trajano, autores contemporâneos ainda fazem certas confusões sobre grandezas direta e inversamente proporcionais. Na tentativa de esclarecer o conceito e a importância da proporcionalidade, Lima (2006, p.127) apresenta sua visão sobre esse tema. Esse autor propõe inicialmente a seguinte definição:

> Suponhamos que a grandeza y seja função da grandeza x, isto é, y = f(x). Diremos que y é *diretamente proporcional* a x quando as seguintes condições forem satisfeitas: 1ª) y é uma função crescente de x; 2ª) se multiplicarmos x por um número natural n, o valor correspondente de y também fica multiplicado por n. Em termos matemáticos:f(n.x) = n. f(x) para todo valor de x e todo n $\in$ N.
> Analogamente, diz-se que y é *inversamente proporcional* a x quando y = f(x) é uma função decrescente de x e, além disso, ao se multiplicar x por um número natural n, o valor correspondente de y fica dividido por n, isto é, f(n.x)= $\frac{1}{n}$.f(x) para todo valor de x e todo n $\in$ N.

Contudo, ao testar as condições propostas em situações-problema, Lima (2006) observou que uma grandeza y pode ser uma função crescente (ou decrescente) de uma grandeza x sem que haja uma relação proporcional (direta ou inversamente) entre as mesmas. Assim, Lima (2006, p.129-130) estabelece dois teoremas, os quais considera como resultados fundamentais no que concerne às grandezas proporcionais:

> **Teorema 1**. As seguintes afirmações a respeito de y = f(x) são equivalentes: 1) y é diretamente proporcional a x; 2) para todo número real c > 0, tem-se f(c.x) = c. f(x); 3) existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade" entre x e y, tal que f(x) = k.x para todo x.
> **Teorema 2**. As seguintes afirmações a respeito de y = f(x) são equivalentes: 1) y é inversamente proporcional a x; 2) para todo número real c, tem-se f(c.x) = f(x)/c; 3) existe um número k, chamado a "constante de proporcionalidade" entre x e y, tal que f(x) = k/x para todo x.

Lima (2006) considera que sua definição de proporcionalidade é equivalente à definição apresentada por Trajano. Entretanto, ao olhar sob a perspectiva da aplicabilidade, o mesmo acredita que a definição apresentada por ele permite de maneira mais simples constatar em um problema se uma grandeza y é proporcional (direta ou inversamente) a uma grandeza x.

A partir das fórmulas y = k.x e y = k/x, Lima (2006, p.131) propõe uma nova maneira de definir proporcionalidade entre duas grandezas:

> Sejam x’, x’’, x’’’, etc, valores assumidos por x e y’, y’’, y’’’, etc, os valores correspondentes de y. Então, a fim de que y seja diretamente proporcional a x é necessário e suficiente que $\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = \frac{y'''}{x'''} = \ldots$ sendo o valor comum desses quocientes igual à constante de proporcionalidade k. Com efeito, afirmar que y’=k.x’, y’’=k.x’’, y’’’= k.x’’’, etc, equivale a dizer que $\frac{y'}{x'} = \frac{y''}{x''} = \frac{y'''}{x'''} = \ldots =$ k. Analogamente, a fim de que y seja inversamente proporcional a x é necessário e suficiente que x’.y’= x’’.y’’ = x’’’.y’’’= ...= k.

Concordamos com Lima (2006) quando sugere que ao resolver um problema, é necessário verificar primeiro se existe uma relação proporcional (direta ou inversamente) entre as grandezas envolvidas, pois nem sempre o modelo de proporcionalidade apresentado nas definições é o mais adequado. Em sua opinião, a qual apoiamos, ao se resolver uma questão que envolve proporcionalidade, a equação y= k.x ou y = k/x deve ser a etapa final da resolução.

A fim de verificarmos as mudanças que ocorreram no ensino da proporcionalidade, analisamos um artigo da Revista do Professor de Matemática, no qual Ávila (1986) fez suas observações sobre o que constatou em relação ao ensino desse conteúdo matemático na década de 1980. Segundo esse autor, o ensino da proporcionalidade nessa época ainda não havia se modernizado, apresentando linguagem (antecedente e consequente) e representação simbólica (A:B::C:D ou A:B=C:D) iguais às usadas na antiguidade, propostas pela teoria de Eudoxo.

Ávila (1986) discordava da forma como estava posto o ensino de proporcionalidade nesse período. Afirmava que a partir do momento em que se criou a teoria dos números reais, houve a aceitação dos números irracionais, o que permitiu mensurar todas as grandezas e calcular a razão entre elas. Em sua concepção julgava que ao ensinar proporcionalidade não era mais preciso

> usar a superada teoria geométrica das proporções, muito menos resquícios que dela ficaram na terminologia, na notação e, sobretudo, na maneira de apresentar fatos, como os problemas de “regra de três”. Estes podem ser ensinados no contexto algébrico de resolução de equações, com a dupla vantagem da simplificação e da unificação do ensino da Matemática (ÁVILA, 1986, p.2).

Ressaltando seu ponto de vista, Ávila (1986, p.3) apresentou sua definição de proporcionalidade direta e inversa:

> **Definição 1**. Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são proporcionais - mais especificamente, diretamente proporcionais - se estiverem assim relacionadas: y = kx ou y /x = k, onde k é uma constante positiva, chamada constante de proporcionalidade.
> **Definição 2**. Diz-se que duas variáveis (ou grandezas) x e y são inversamente proporcionais y = k/x ou xy = k, onde k é uma constante positiva (constante de proporcionalidade).

Posteriormente, Ávila (1986, p.3-4) propôs uma nova definição, que a seu ver, era mais geral e abrangia as outras duas anteriormente definidas. Desse modo, sugeriu a definição seguinte:

> **Definição 3**. Se várias variáveis, digamos, x,y,z,w,r,s estão relacionadas por uma equação do tipo $z = k\frac{xyw}{rs}$, onde k é constante, então dizemos que z é diretamente proporcional a x, a y e a w; e inversamente proporcional a r e a s.

Para exemplificar e mostrar o que considerava que fosse a forma mais simples de se ensinar proporcionalidade no período em questão e dentro de um contexto algébrico, Ávila (1986, p.4) apresentou alguns problemas resolvidos, dentre os quais destacamos o seguinte:

> **Problema 1**. Uma pessoa, datilografando 60 toques por minuto e trabalhando 6 horas por dia, realiza certo trabalho em 10 dias. Quantos dias x levará outra pessoa para fazer o mesmo trabalho se ela datilografa 50 toques por minuto e trabalha 4 horas por dia?
> Temos aqui duas pessoas, A e B e três variáveis: toques por minuto T, horas de trabalho por dia H e dias de trabalho D. Esquematicamente,

Pessoa	T	H	D
A	60	6	10
B	50	4	x

> Seja k o número de toques necessários para realizar o trabalho. Uma pessoa que faz T toques por minuto fará 60T toques por hora e, trabalhando H horas por dia, durante D dias, fará 60THD toques ao todo. Portanto,
> 60 THD = k. (1).
> Esta equação nos diz, segundo a definição 3, que qualquer das grandezas H, T e D é inversamente proporcional às outras duas. Substituindo em (1) as duas sequências de valores dados no problema, obtemos 60x60x6x10 = k e 60x50x4x *x* = k, donde segue-se que 60x50x4x *x* = 60x60x6x10. Ora, esta é uma equação muito simples, cuja solução é x = 18 dias.

Para Ávila (1986) a solução do problema se reduz a um cálculo algébrico que ele considera simples, bastando para isso que se conheça a equação de dependência entre as duas ou mais variáveis (ou grandezas).

Assim como Lima, Ávila chama a atenção para o cuidado que se deve ter ao aplicar o modelo proposto, pois duas grandezas podem aumentar ou diminuir simultaneamente sem, contudo, existir uma relação proporcional entre elas.

Ávila (1986) afirma que se deve dar ênfase a problemas de interesse atual quando se ensina proporcionalidade, não ficando presos às terminologias e notações arcaicas. Concordamos nesse ponto, entretanto, quanto à sua maneira de propor as soluções dos problemas que envolvem grandezas proporcionais a partir de equações pré-estabelecidas, acreditamos que se deve oferecer ao aluno a oportunidade de compreender inicialmente a situação em estudo, buscando verificar se existe ou não uma relação proporcional entre as grandezas envolvidas no problema dado. Dessa forma, vamos ao encontro da opinião de Lima (1986, p.21) quando afirma que ao se compreender bem o conceito de grandezas proporcionais, “todos os problemas relativos a regra de três e proporções se resolvem naturalmente, sem haver necessidade de regras mnemônicas ou quaisquer outros artifícios.”

Ressaltamos a publicação de um artigo de Lima (1986) na Revista do Professor de Matemática, acerca das definições proposta por Ávila (1986), onde expõe sua opinião concordando com a definição de Ávila (1986) sob o ponto de vista matemático, porém discordando do ponto de vista da aplicabilidade da definição.

Segundo Lima (1986), a definição de Ávila (1986) apresenta dificuldades sob três aspectos: a) para saber se existe relação proporcional entre duas grandezas, ou seja, para saber (de acordo com a definição de Ávila) que z é diretamente proporcional a x, y, w e inversamente proporcional a r, s, seria necessário conhecer a fórmula; observa-se que a mesma não é dada no problema; b) para deduzir a fórmula haveria a necessidade de se conhecer as propriedades das grandezas envolvidas; c) conhecendo-se a fórmula não há a necessidade de saber acerca da proporcionalidade, haja vista a fórmula conter todas as informações de que se precisaria.

A partir de suas considerações Lima (1986, p.22) sugere uma definição que acredita ser mais adequada:

> Suponhamos que uma grandeza z dependa de várias outras: x, y, w etc. Isto significa que o valor de z fica determinado quando se conhecem os valores de x, y, w etc. Nessa situação, diz-se que z é uma função das variáveis x, y, w etc. e escreve-se $z = f(x,y,w,...)$.

> Nas condições acima, diz-se que z é diretamente proporcional a x quando, ao multiplicarmos x por uma constante c (mantendo fixas as outras variáveis), o valor correspondente de z fica multiplicado pela mesma constante c. Analogamente, diz-se que x é inversamente proporcional a x quando, ao multiplicarmos x por uma constante c (mantendo fixas as outras variáveis), o valor correspondente de z fica dividido por aquela constante c. (Definições semelhantes para as demais variáveis y, w, etc).

Lima (1986) considera que, do ponto de vista matemático, essa definição que ele propõe é equivalente à de Ávila (1986) e faz questão de enfatizar que discorda apenas da proposta metodológica sugerida por Ávila.

Como foi possível constatar no decorrer da retrospectiva histórica realizada, a noção de proporcionalidade é uma das mais antigas da Matemática. A história nos relata que a importância desse conceito deve-se ao fato de sua aplicabilidade em problemas práticos dentro do contexto matemático, bem como em diversas áreas do conhecimento. Observamos a comprovação dessa aplicabilidade por meio dos problemas relatados pelos historiadores da Matemática, em diversas épocas e em lugares diferenciados.

A necessidade humana em resolver seus problemas, quer de natureza prática ou científica, levou o homem a buscar uma maneira de raciocinar proporcionalmente. Observamos que para resolver os problemas imediatos relacionados, principalmente ao comércio, usava-se a regra de três, sem compreensão, de forma mecânica e que apresentasse uma resposta imediata. A história mostra que foi só no final do século XIV que se associou a regra de três com proporções.

Acreditamos que mesmo sem essa associação formal, o pensamento proporcional esteve presente na maneira de raciocinar do homem desde tempos muito remotos. E essa forma de pensar foi evoluindo, haja vista esse tipo de pensamento se fazer presente em outras áreas do conhecimento, como conferimos sua aplicação na Física por Bradwardine e Oresme, por exemplo.

Nos tempos contemporâneos, o raciocínio proporcional se torna cada vez mais importante, sendo utilizado nas aplicações baseadas na proporcionalidade por cientistas, engenheiros, comerciantes, entre outros.

3.2 RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

O raciocínio proporcional não se restringe a um tipo de pensamento que está presente somente quando se estuda Matemática, mas também é utilizado em outras áreas do conhecimento e em diversas situações do cotidiano. Algumas pesquisas sobre o raciocínio proporcional apontaram que este modo de pensar foi utilizado, de forma intuitiva, por adultos e crianças quando resolveram determinados problemas que envolviam o pensamento proporcional, mesmo não tendo recebido previamente instrução formal sobre proporcionalidade (SCHLIEMANN e CARRAHER, 2006; SPINILLO, 1997).

Schliemann e Carraher (1997) acreditam que a criança desenvolve uma compreensão de razão e proporção fora da escola, mas reconhecem que o raciocínio proporcional envolve conhecimentos que podem ser desenvolvidos no âmbito escolar.

As expressões “raciocínio proporcional” e “pensamento proporcional” são utilizadas por vários autores para descrever uma maneira de se pensar em Matemática diante de situações que envolvem relações proporcionais.

Apesar de encontrarmos na literatura os termos raciocínio e pensamento considerados como sinônimos, optamos em nossa pesquisa pela expressão raciocínio, considerando este como um “encadeamento de argumentos” (MICHAELIS, 2000, p.498) e também como sendo uma “operação do espírito pela qual de dois ou mais juízos se tira outro como conclusão” (ROCHA, 1996, p.515).

Contudo, no decorrer desse texto utilizaremos as duas terminologias, preservando assim a opção dos autores que analisamos.

Mas afinal, o que vem a ser o raciocínio proporcional?

De acordo com Post, Behr e Lesh (1995), várias tentativas foram realizadas com o objetivo de definir o raciocínio proporcional. Muitas dessas tentativas consideravam como forma de raciocinar proporcionalmente, a capacidade do indivíduo em dar respostas corretas a problemas de valor ausente.[5] Esses autores, no entanto, acreditam que o raciocínio com proporções não se limita a resolver problemas por meio do uso de algoritmos e afirmam que o raciocínio com proporções “envolve um senso de covariação, comparações múltiplas e a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações” (POST, BEHT e

[5] Problema onde são dados, por exemplo, a, b, c, na expressão a/b=c/x e pede-se para determinar o valor de x.

LESH, 1995, p.90). De fato, ao comparar duas razões, há que se compreender que as grandezas envolvidas se relacionam e variam conjuntamente.

Apontam, ainda, que o raciocínio proporcional requer formas de pensamento qualitativo e quantitativo. O pensamento qualitativo seria mais abrangente que o pensamento quantitativo. Isso se justifica pelo fato de o pensamento qualitativo permitir fazer uma análise prévia do problema e elaborar conclusões a partir de comparações realizadas entre taxas ou razões dadas, antes da realização dos cálculos para a obtenção de uma resposta. O pensamento qualitativo ainda possibilita a análise dos resultados encontrados, levando o indivíduo a se questionar quanto à sua coerência no contexto do problema resolvido.

Como asseguram Post, Behr e Lesh (1995, p.90), "o raciocínio qualitativo exige a capacidade de interpretar o significado de duas taxas, guardar essa informação e então comparar as interpretações de acordo com alguns critérios predeterminados".

Em relação ao pensamento quantitativo, pode-se considerar que este diz respeito ao envolvimento e domínio de cálculos a fim de determinar uma solução numérica ao problema em questão. Isto exige, conforme os autores, o domínio de alguns conceitos matemáticos, entre eles, os relacionados aos números racionais, como por exemplo, divisão, ordem, equivalência e relação entre unidade e suas partes.

Uma condição que os autores julgam ser importante para identificar o raciocínio proporcional é que o indivíduo tenha a capacidade de diferenciar situações proporcionais das que não possuem tais relações.

Na concepção de Post, Behr e Lesh (1995), o raciocínio proporcional envolve aspectos tanto matemáticos como psicológicos. Quanto aos aspectos matemáticos, deve-se considerar que a noção de proporcionalidade se deixa modelar por uma fórmula dada por equações do tipo $y = kx$ (diretamente proporcional) ou $y = k/x$ (inversamente proporcional) quando relacionam duas grandezas, ou por equação do tipo $y = kxy/uvw$ quando envolve muitas grandezas (ÁVILA, 1986; LIMA, 2006).

Os aspectos psicológicos, por sua vez, estariam relacionados à exigência de uma capacidade mental para realizar operações que, segundo Schliemann e Carraher (1997), os estudos piagetianos relatam que somente seria desenvolvida pela criança no período das operações formais do desenvolvimento cognitivo, por volta dos 15 anos de idade.

Em seus estudos, Spinillo (1997) também observou que muitos pesquisadores se apoiam em Piaget e em seus colaboradores (PIAGET e INHELDER, 1975; INHELDER e PIAGET, 1976) para reforçarem a crença de que crianças não possuem pensamento proporcional, sendo este tipo de pensamento de domínio dos adolescentes. No entanto, a autora realizou investigações que mostraram indícios de pensamento proporcional em crianças a partir dos 6-7 anos (MULLER, 1978; SPINILLO, 1990; SPINILLO e BRYANT, 1989, 1990,1991).

Para a autora, o pensamento proporcional refere-se à habilidade em estabelecer relações, podendo estas ser de dois tipos: de primeira ordem e de segunda ordem. Essas relações estão presentes na resolução de problemas que envolvem proporção.

As relações de primeira ordem se classificam em dois tipos: as relações parte-parte (razão) estabelecidas entre partes diretamente comparáveis (por exemplo, a relação que se tem considerando o espaço com água e o espaço vazio em um recipiente) e as relações parte-todo (fração) estabelecidas entre partes que não são diretamente comparáveis (por exemplo, a relação obtida ao considerar o espaço com água e o volume total de um recipiente).

As relações de segunda ordem referem-se a comparações entre duas relações de primeira ordem, a fim de verificar se são equivalentes ou não. Spinillo (1997) destaca a importância das relações de segunda ordem para o pensamento proporcional, considerando este tipo de relação como sendo o "cerne do pensamento proporcional". A autora identifica, porém, que essa relação é responsável pelas dificuldades das crianças ao trabalharem com proporções.

Spinillo (2002) relata que, além da capacidade de estabelecer relações de primeira e segunda ordem, estudiosos concordam que o raciocínio proporcional ainda requer duas outras condições: a) que se reconheça a equivalência entre situações e b) que se pense em termos relativos e não em termos absolutos.

Para outros autores como Lins e Gimenez (2006, p.52) o pensamento proporcional é um tipo de pensamento que implica em "uma estrutura de comparação entre partes ou entre todos, ou entre as partes e um todo, ou como um esquema instrumental que resolve algumas situações especiais de comparação em forma multiplicativa e não aditiva". Consideram que como esquema instrumental, as situações de proporcionalidade podem ser resolvidas por meio de diversas técnicas, como redução à unidade, modelagem proporcional, modelagem fracionária ou modelagem algébrica. Destacam ainda que o pensamento proporcional abrange as operações de multiplicação e divisão.

Na perspectiva de Lamon (1994) citada por Barreto (2001, p.11), o raciocínio proporcional "desempenha um papel tão importante no desenvolvimento matemático do estudante que foi descrito como um conceito limítrofe, a pedra fundamental dos níveis mais altos da matemática e o arremate dos conceitos elementares".

Segundo Lamon (*apud* COSTA, 2007), há que se destacar a diferença entre o conceito de proporcionalidade e o conceito de raciocínio proporcional. Enquanto a proporcionalidade tem suas aplicações em situações dominadas por princípios físicos, o raciocínio proporcional é entendido como um pré-requisito necessário para a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade. Dessa forma, para essa autora, o conceito de raciocínio proporcional está muito além da mecanização, ou seja, do fazer uso de algoritmo na resolução de problemas sobre proporcionalidade. O raciocínio proporcional está relacionado à habilidade de fazer análises conscientes da relação entre quantidades, o que é perceptível quando se analisa argumentos e explicações sobre as relações proporcionais. Para essa autora, o raciocínio proporcional envolve a compreensão de dois tipos de relações entre grandezas. Abrange tanto a compreensão de uma relação constante entre duas grandezas (invariância), quanto a compreensão de que essas grandezas se relacionam e variam conjuntamente (covariância).

Assim como já citado por Spinillo (2002), Lamon (*apud* COSTA, 2007) também afirma que o raciocínio proporcional requer um pensamento que considere os termos relativos e não os absolutos. Para Lamon isto significa dizer que a razão é uma “entidade” que se difere das duas grandezas que se relacionam. Por exemplo, quando se determina a razão entre o número de meninos e o número de meninas de uma turma, a razão encontrada não representa nem meninos e nem meninas, mas uma nova “entidade”. A autora ainda ressalta a importância que a equivalência de duas razões tem para o entendimento da proporcionalidade. Portanto, é primordial compreender que quando se relacionam duas razões, as quantidades absolutas se alteram, enquanto a proporção se mantém sempre constante.

Dentre os conceitos de raciocínio proporcional expostos, optou-se por adotar nessa pesquisa as noções apresentadas por Post, Behr e Lesh (1995) e por Lamon (*apud* COSTA, 2007). Acredita-se que os conceitos de raciocínio proporcional propostos por esses autores, além de ter pontos em comum (como a noção de covariação), se complementam.

Com Post, Behr e Lesh (1995) pretende-se identificar e analisar o raciocínio proporcional dos alunos, por meio das noções de pensamentos qualitativo e quantitativo e da capacidade dos mesmos em distinguir situações proporcionais e não proporcionais.

A partir dos conceitos de invariância e covariância propostos por Lamon (*apud* COSTA, 2007), buscamos analisar como os alunos identificam as relações entre as grandezas envolvidas nos problemas. Acreditamos que seja possível identificar o raciocínio proporcional dos discentes a partir da análise das explicações e argumentos dados por eles durante a resolução das atividades propostas.

3.3 A PROPORCIONALIDADE E O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL EM DOCUMENTOS OFICIAIS E LIVROS DIDÁTICOS

3.3.1 Parâmetros Curriculares Nacionais

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) que dão diretrizes para o ensino da Matemática, propõem para o terceiro e quarto ciclos[6] do Ensino Fundamental, o estudo da proporcionalidade. Esse documento apresenta como um dos objetivos a serem atingidos no ensino da Matemática, no terceiro ciclo, desenvolver

> O raciocínio que envolva a proporcionalidade, por meio da exploração de situações de aprendizagem que leve o aluno a observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam a proporcionalidade (BRASIL, 1998, p. 65).

Por reconhecer a aplicabilidade das regras da proporcionalidade em problemas reais no mundo do trabalho, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p.67) reforçam que no terceiro ciclo deva-se dar ênfase ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, afirmando que este tipo de raciocínio "é útil na interpretação de fenômenos do mundo real".

Verificamos no ensino atual da Matemática que o conceito de proporcionalidade tem seu estudo iniciado na série final do terceiro ciclo, atualmente, no 7º ano.

Observamos também que a série escolar indicada pelos PCN (1998) para o início do estudo de proporcionalidade coincide basicamente com o período das operações formais, considerado por Piaget, analisado por Schliemann e Carraher (1997), como o período em que a criança possuiria estruturas suficientes para a compreensão da proporcionalidade. Contudo, não encontramos nos Parâmetros nenhum indício dos estudos piagetianos usados como justificativa para o início do estudo de proporções.

Apesar de os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) estabelecerem o ensino de proporcionalidade a partir do terceiro ciclo, diversas pesquisas, entre elas, as realizadas por Spinillo (1997; 2002) mostram que crianças desde os 6 anos já são capazes de fazer julgamentos proporcionais.

---

[6] Os Parâmetros Curriculares Nacionais propõe um agrupamento das séries do Ensino Fundamental em quatro ciclos: o 1º ciclo é formado pela 1ª e 2ª séries; o 2º ciclo abrange a 3ª e 4ª séries; o 3º ciclo é composto pela 5ª e 6ª séries e o 4º ciclo engloba a 7ª e 8ª séries.

Quanto à metodologia para o ensino da proporcionalidade no terceiro ciclo, os Parâmetros sugerem que esta seja baseada na resolução de problemas que estimulem os alunos a utilizarem procedimentos não-convencionais e a realizarem questionamentos que envolvam o pensamento quantitativo e qualitativo.

Para o quarto ciclo são propostos entre outros objetivos para o ensino da Matemática, desenvolver

> o raciocínio proporcional, por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:
> * representar em um sistema de coordenadas cartesianas a variação de grandezas, analisando e caracterizando o comportamento dessa variação em diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não-proporcional;
> * resolver situações-problema que envolvem a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três (BRASIL, 1998, p.82).

Uma das preocupações destacada nesse ciclo, diz respeito às relações que devem ser estabelecidas entre os diversos conteúdos matemáticos para que os alunos compreendam que não estão estudando conceitos isolados uns dos outros. Em relação à proporcionalidade, por exemplo, sugerem que se devam mostrar-lhes as conexões existentes entre esse conceito e os diversos problemas, entre eles, os multiplicativos, os que envolvem porcentagem, semelhança de figuras, entre outros.

Na concepção desse documento, para que ocorra uma significativa compreensão da proporcionalidade, é necessário propor aos discentes situações proporcionais e não-proporcionais.

Em relação aos conceitos e procedimentos para o ensino de proporções no quarto ciclo, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998, p. 87) sugerem a

> - identificação da natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não-proporcionais (afim ou quadrática), expressando a relação existente por meio de uma sentença algébrica e representando-a no plano cartesiano.
> - resolução de problemas que envolvem grandezas diretamente ou inversamente proporcionais por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três.

A noção de proporcionalidade aparece associada à comparação entre razões; apresentam exemplos que ilustram a ideia de proporcionalidade em problemas de multiplicação e divisão. As soluções apresentadas mostram a utilização de estratégias diversificadas e sugerem que estas devem ser empregadas antes dos procedimentos convencionais como a regra de três.

Apresentam, ainda, orientações para o ensino da proporcionalidade relacionada com a Geometria, o que não abordaremos nesse estudo, haja vista os objetivos dessa pesquisa.

3.3.2 Programa Nacional do Livro Didático

Outro documento governamental que tem como objetivo contribuir com o ensino da Matemática no país é o Guia de Livros Didáticos, do Programa Nacional do Livro Didático-PNLD (2007), de publicação do Ministério da Educação. Este Guia apresenta resenhas sobre coleções de livros didáticos que foram avaliadas e aprovadas, com o propósito de auxiliar o professor na escolha dos livros didáticos que ele utilizará em sala de aula.

Segundo o Guia PNLD (2007), os livros didáticos analisados têm, em sua maioria, trabalhos propostos com situações contextualizadas e que envolvem a interdisciplinaridade, sendo que a contextualização é influenciada pelo conteúdo a ser ensinado. No caso da proporcionalidade, o Guia declara que há uma grande evidência de contextos sociais nas situações-problema apresentadas nos livros didáticos avaliados.

Ao descrever a abordagem dos campos de conteúdos nas coleções aprovadas, o Guia PNLD (2007, p. 44) destaca no campo da álgebra que

> o estudo de razão e proporção vem ganhando articulações com a ideia de função nas novas abordagens. Em muitas coleções, já se observa um tratamento que valoriza o modelo funcional para dar sentido à regra de três, que é a proporcionalidade entre grandezas. No entanto, ainda há outras em que prevalece a abordagem convencional dessa regra.

Em relação ao emprego dos termos “razão” e “proporção” nos livros didáticos, o Guia constatou que alguns autores fazem uso inadequado dessas terminologias, confundindo razão com proporção.

Em todas as coleções aprovadas, o Guia PNLD (2007) realizou uma análise considerando os seguintes quesitos: seleção e distribuição dos conteúdos, abordagem dos conteúdos, metodologia de ensino-aprendizagem, contextualização e manual do professor. Verificamos ao conferir os relatos do Guia (2007) sobre esses quesitos, alguns comentários envolvendo o estudo de proporções. O documento destacou que em algumas coleções,

- existe a articulação da proporcionalidade com equações, o que é considerado como uma forma de justificar a regra de três;

- os autores utilizam o estudo de proporções para abordar a ideia de função, o que é considerado como uma colaboração para o desenvolvimento do pensamento algébrico;

- o estudo de proporções é articulado ao estudo de escalas e ampliações;

- o estudo da proporcionalidade envolve muitas situações que possibilitam o aluno perceber a aplicação da Matemática no cotidiano.

Constatamos que, das 16 coleções aprovadas pelo Guia PNLD (2007), 14 delas apresentam o estudo de proporções após o estudo de equações do 1º grau, o que parece ser uma característica da organização dos conteúdos nos livros didáticos de Matemática no Brasil.

3.3.3 Organização de Conteúdos nos Parâmetros Curriculares Nacionais e em Livros Didáticos

Para selecionar os conteúdos de Matemática a serem ensinados no ensino fundamental, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) levaram em consideração conceitos matemáticos, procedimentos e atitudes que julgaram necessários para a produção de novos conhecimentos e que contribuiriam para a formação de um cidadão crítico e capaz de interpretar os fatos e fenômenos do mundo em que vive.

Os conteúdos selecionados para o ensino da Matemática no ensino fundamental são organizados em quatro blocos: Números e Operações, Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação. A proporcionalidade aparece entre os conteúdos citados no bloco Grandezas e Medidas.

Após a seleção, os conteúdos foram distribuídos em ciclos, o que não obriga o professor, na prática de sala de aula, seguir a sequência proposta. Segundo o documento, os conteúdos devem ser organizados de acordo com o projeto educacional de cada escola.

Ao relacionar os conteúdos propostos para o ensino de Matemática no terceiro ciclo, não há a apresentação de uma lista sistematizada e hierarquizada, de forma que haja uma dependência entre os conteúdos, ou seja, que exista uma sequência na qual um conteúdo é apontado como pré-requisito para a aprendizagem de outro.

Já ao mencionar o estudo do conceito de proporcionalidade, os Parâmetros propõem um ensino baseado em procedimentos não convencionais, os quais estão relacionados com os procedimentos algébricos. Em relação aos conceitos e procedimentos algébricos, o documento sugere que no terceiro ciclo não sejam realizados estudos aprofundados das expressões algébricas e nem das equações. A indicação é que, se na resolução de situações-problema que envolva a variação de grandezas aparecer equações, deve-se orientar o aluno a buscar outros procedimentos para encontrar a solução.

Orientam, ainda, que os procedimentos convencionais sejam trabalhados no quarto ciclo. Verifica-se na lista de objetivos referentes ao pensamento algébrico para este ciclo, que o ensino da Matemática deve propiciar o desenvolvimento deste tipo de pensamento por meio de situações que possibilite o aluno

> - produzir e interpretar diferentes escritas algébricas – expressões, igualdades e desigualdades - , identificando as equações, inequações e sistemas;
> - resolver situações-problema por meio de equações e inequações do primeiro grau, compreendendo os procedimentos envolvidos.(BRASIL, 1998, p. 81).

Percebemos que os Parâmetros não sugerem que seja feita de forma rígida a organização dos conteúdos e, no caso do estudo de proporcionalidade, esse conceito é proposto antes do ensino de equações.

No entanto, a ordenação dos conteúdos de proporcionalidade e equações nos livros didáticos não é a mesma proposta pelo documento, como já foi possível constatar na análise do Guia dos Livros Didáticos (2007) e em outras pesquisas. Costa (2005) analisou e comparou os conteúdos referentes a Razões e Proporções entre três livros didáticos dos anos 60, 70, 80 e 2000 e os documentos oficiais dos órgãos governamentais dessas décadas. Dentre os objetivos dessa pesquisa, pretendia-se investigar se a disponibilização desses conteúdos estava de acordo com as propostas dos documentos governamentais e verificar se no decorrer do período analisado havia ocorrido modificações na disponibilização dos conteúdos Razões Proporções nos livros didáticos.

Nessa pesquisa o autor descreve, para cada livro analisado, a disposição dos conteúdos, conforme estão apresentados em seus índices. Em nossa análise verificamos que o estudo de proporção vem sempre precedido pelo estudo de equações do 1º grau, conforme tabela:

Décadas	Livros analisados	Capítulos
60/70	NETO, Scipione di Pierro. *Matemática para Escola Moderna*, 2ª série, São Paulo: IBEP, 1967.	Cap V - As equações do Primeiro Grau. Cap VI - Razões e Proporções.
80	TROTTA, Fernando. *Matemática*, 6ª série. 5. ed, São Paulo: Scipione, 1987.	Cap 3 - Equações e Problemas do 1º grau. Cap 4 - Inequações do 1º grau. Cap 5 - Sistemas de Equações do 1º Grau a duas incógnitas. Cap 6 - Razões e Proporções.
2000	CENTURIÓN, M.R., JAKUBOVIC, C.J., LELLIS, M.C.T. *Novo Matemática na Medida Certa*, 6ª série. 8. ed. São Paulo: Scipione, 2003.	Cap 3 - Equações. Cap 4 - Razões, Proporções e Porcentagens.

Tabela 1 – Proporções em livros didáticos.

Costa (2005, p.138) realizou a análise das atividades propostas pelos livros didáticos e constatou que, para resolver muitas delas, era necessário que os alunos mobilizassem seus conhecimentos de números racionais e de equações. Quanto às estratégias, o autor identificou que

> As técnicas fundamentais utilizadas nas resoluções dos exemplos e ou exercícios resolvidos (segundo Lins e Gimenes) nos três livros foram a modelagem fracionária, a modelagem proporcional e a modelagem algébrica. A redução à unidade não foi utilizada em nenhum dos livros.

Ao realizar a comparação dos livros didáticos com as propostas curriculares da época de cada um, Costa (2005) observou que os três livros não atenderam totalmente às indicações dos documentos oficiais, citando como exemplo, a não-utilização da estratégia de redução à unidade entre as estratégias identificadas nos livros e que segundo ele, é prevista pelos documentos governamentais.

Em relação aos objetivos de sua pesquisa, o autor concluiu que houve modificações quanto à disponibilização dos conteúdos Razões e Proporções nos livros didáticos analisados. Constatou por exemplo, que o livro dos anos 60/70 prezava as demonstrações das fórmulas estudadas. Já nos livros dos anos 80 e 2000 essa prática foi substituída pelas novas orientações dos documentos dos órgãos governamentais, as quais preconizam um ensino baseado em estímulos que levem os alunos a buscarem estratégias não convencionais para a resolução de problemas que envolvem a proporcionalidade.

Uma outra pesquisa sobre livros didáticos revela que a organização do conteúdo de proporcionalidade após o estudo de equações não é somente característica dos livros brasileiros. Marques (2006) realizou uma pesquisa em Lisboa, e analisou como se apresenta o conceito de proporcionalidade em livros didáticos de quatro paises: Brasil, Portugal, Espanha e Estados Unidos da América. A autora investigou como é introduzido e desenvolvido o conceito de proporcionalidade e de que maneira os livros didáticos procedem na consolidação e sistematização dos conhecimentos estudados. A análise dos capítulos que abordavam a proporcionalidade foi baseada na estrutura, organização, conteúdo, grafismo e recursos didáticos.

Marques (2006) constatou que nos livros didáticos portugueses e espanhóis o estudo de proporcionalidade é precedido pelo estudo dos números racionais, enquanto nos livros brasileiros e americanos o conceito de proporcionalidade aparece após o estudo de equações e números racionais. Para a autora, isso caracteriza duas formas distintas de abordagem do conceito de proporcionalidade. Apesar das abordagens diferenciadas, verificou ainda que, com exceção dos livros espanhóis, os demais apresentam o produto cruzado como estratégia de resolução dos problemas e que, somente os livros brasileiros e portugueses enunciam explicitamente a propriedade fundamental das proporções antes da utilização desse processo de resolução de problemas.

Em relação à metodologia de ensino presente nos livros brasileiros, a autora destaca que esta é conduzida pela resolução de situações-problema, o que a seu ver, possibilitaria a sistematização de conceitos e a elaboração de estratégias diversificadas em busca de uma solução pertinente aos problemas propostos.

Apesar dessa constatação, algumas pesquisas (OLIVEIRA e SANTOS, 2000; COSTA, 2007) afirmam que após o ensino formal da proporcionalidade, a estratégia mais utilizada pelos alunos é a regra de três, e às vezes, de maneira incorreta, demonstrando a não-compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas.

Verificamos, ao compararmos a organização dos conteúdos de proporcionalidade e equações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) e pelos livros didáticos, que os livros apresentam uma proposta diferente dos Parâmetros, mantendo a característica do estudo de equações antes do estudo de proporcionalidade. Entendemos, a partir dos resultados apontados pelas pesquisas analisadas nesse estudo que, na prática, essa organização adotada pelos livros tem influência sobre as estratégias de resolução dos problemas de proporcionalidade utilizadas no ensino desse conceito, contrariando as orientações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) para o terceiro ciclo.

3.4 TIPOS DE PROBLEMAS

Estudos e pesquisas na área de Educação Matemática vêm, ao longo dos últimos anos, buscando compreender e apontar caminhos visando à melhoria do ensino e da aprendizagem em Matemática. Efeitos das produções dessa comunidade são percebidos nas orientações contidas nos PCN (1998), em particular, quando sugerem uma abordagem que deve levar o aluno a desenvolver procedimentos próprios de resolução de problemas e ser capaz de refletir sobre as soluções encontradas, sabendo usar argumentos que permitam validar os resultados apresentados. Em relação ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, os PCN (1998, p. 40) afirmam que “conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração de problemas, ou seja, de situações em que os alunos precisem desenvolver algum tipo de estratégia para resolvê-las”.

Na concepção dos PCN (1998), problemas são situações que possuem algumas características específicas. Uma dessas características está relacionada à solução do problema, o qual deve ser estruturado de maneira que não seja possível encontrar sua solução de imediato, mas que permita ao aluno elaborar uma estratégia e realizar determinados procedimentos para encontrar a solução. Outra característica é que o problema deve representar uma situação desafiadora para o aluno, porém respeitando os conhecimentos prévios que o mesmo possui e que dariam condições para resolvê-lo. Deve-se considerar também que uma situação pode representar um problema para um aluno e não ser um problema para outro, pois isso depende dos conhecimentos matemáticos que cada indivíduo possui. Na perspectiva desse documento, a resolução de problemas, além de possibilitar aos alunos a aquisição de conceitos e procedimentos matemáticos, permite entre outros fatores, que o aluno tenha um novo olhar em relação à Matemática e desenvolva novas atitudes, como a autoconfiança.

Os PCN (1998) propõem orientações metodológicas e didáticas para o ensino do terceiro e quarto ciclos que valorizam a resolução de problemas. Quanto ao ensino do conceito de proporcionalidade, mais especificamente em relação ao desenvolvimento do raciocínio proporcional, afirmam que

> é desejável explorar no terceiro ciclo problemas que levem os alunos a fazer predições por meio de questões que envolvam aspectos qualitativos e quantitativos (o número encontrado deveria ser maior ou menor? Quanto maior? Essa resposta faz sentido?). (BRASIL, 1998, p. 67).

Com a intenção de melhor orientar, apresentam exemplos de problemas que envolvem a ideia de proporcionalidade. Verificamos que são problemas de valor omisso (ou tarefas[7] de incógnita), como definem Lesh, Post e Behr (1988) e Spinillo (1997). É conveniente ressaltar que esse documento reafirma junto aos exemplos, a importância de se propor aos alunos do terceiro ciclo, situações-problema que os levem a elaborar estratégias de resolução próprias, não utilizando procedimentos convencionais.

Partindo da concepção de que a resolução de problemas colabora para a aprendizagem de conceitos matemáticos, buscamos saber quais seriam os tipos de problemas que contribuiriam para a aprendizagem do conceito de proporcionalidade e para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. A literatura aponta alguns tipos de problemas que, na concepção dos autores, atenderiam tal objetivo.

Para Lesh, Post e Behr (1988) existem sete tipos de problemas sobre proporções:

(a) Problemas de valor omisso, nos quais são dados três valores de uma proporção e pede-se para determinar o quarto termo.

(b) Problemas de comparação, em que são dadas duas razões $\left(\frac{A}{B}\, e \,\frac{C}{D}\right)$ e cujo objetivo é compará-las para indicar dentre as situações $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}, \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}<\frac{C}{D}$ ou $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}>\frac{C}{D}$ qual é a verdadeira.

(c) Problemas de transformação, que podem envolver dois níveis: (i) alteração de raciocínio, em que aumenta-se ou diminui uma certa quantidade de um dos valores da equivalência $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$ com o objetivo de indicar qual das situações (<, > ou =) se torna verdadeira; (ii) transformações para obter uma igualdade, em que a partir de uma desigualdade $\left(\text{por exemplo}, \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}>\frac{C}{D}\right)$ determina-se uma quantidade que acrescida a um dos valores A, B, C ou D, se obtenha uma igualdade entre as razões.

---

[7]Observamos em alguns textos analisados que os autores usaram o termo “tarefa” com as mesmas características apresentadas pelos PCN (1998) para o termo “problema”. Dessa forma, optamos por manter o termo “tarefa” tal qual os autores utilizaram nos textos, mas entendendo que, aqui nesse momento, esta expressão assume o mesmo conceito adotado para o termo “problema”.

(d) Problemas de valor médio, em que são dados dois dos quatro valores de uma proporção, com o objetivo de encontrar um terceiro que determine uma média geométrica $\left(\frac{A}{X}=\frac{X}{B}\right)$ ou uma média harmônica $\left(\frac{A}{B}=\frac{A-X}{X-B}\right)$.

(e) Proporções que envolvem a conversão entre razão, taxa e frações.

(f) Proporções que envolvem unidades de medida assim como números.

(g) Problemas de conversão entre sistemas de representação, que consistem numa mudança na forma de representação de uma razão (taxa, fração, quociente) de um sistema de representação para outro.

Quanto à utilização desses tipos de problemas esses autores destacam que, tanto os livros didáticos quanto às investigações, têm trabalhado somente com os problemas de valor omisso e os problemas de comparação, ignorando os outros tipos. Salientam que existem alguns motivos que justificariam não trabalhar com alguns tipos de problemas, como por exemplo, os problemas de transformação que exigem ações dinâmicas difíceis de serem descritas nos livros didáticos e nos testes escritos. Outro motivo seria a grande ênfase dada na ‘determinação do x’, como se isso fosse o essencial no estudo da Matemática.

Spinillo (1997) apresenta em seus estudos com crianças, dois tipos de tarefas relacionadas ao pensamento proporcional. As tarefas de incógnita e comparação que sugere assemelham-se aos problemas de valor omisso e comparação, propostos por Lesh, Post e Behr (1988). Todavia, a autora enfatiza, em suas tarefas, os tipos de relações que envolvem os valores: as relações de primeira ordem e as relações de segunda ordem.

Na tarefa de incógnita, três valores são conhecidos e o quarto valor (a incógnita) deve ser determinado, conservando-se no segundo par de valores a mesma relação proporcional existente no primeiro par (relação de primeira ordem). Spinillo (1997, p.42) exemplifica esse tipo de tarefa por meio de um problema proposto por Karplus e Peterson (1970), conhecido como o problema do Sr Altão e Sr Baixinho: “A altura do Sr Baixinho era de quatro botões ou de seis clipes. A altura do Sr Altão era de seis botões. Qual a altura do Sr Altão em clipes?”.

A resolução desse problema passa pelo estabelecimento das relações de primeira ordem entre o número de clipes e o número de botões para cada um dos senhores, o que permite inferir a altura do Sr Altão em clipes.

Na tarefa de comparação, os quatro valores são conhecidos e o objetivo é comparar o primeiro e o segundo par de valores (relações de primeira ordem) para verificar se existe ou não uma equivalência (relação de segunda ordem). O exemplo apresentado por Spinillo (1997) foi elaborado por Bruner e Kenney (1966) e consistia num problema em que a criança tinha que verificar dois recipientes com água e determinar qual dos dois era o mais cheio. Para resolver esse problema, seria necessário, primeiramente, estabelecer as relações de primeira ordem entre o espaço com água e o espaço vazio em cada recipiente. Depois, realizar a comparação entre as duas relações de primeira ordem (relação de segunda ordem) e verificar se são equivalentes ou não e assim encontrar a resposta desejada.

Spinillo (1997) observou em seus estudos com crianças a partir de 6 anos que as tarefas de incógnitas são mais difíceis. Por esse motivo, ela sugere que se inicie o ensino de proporções propondo tarefas de comparações. Em sua concepção, um ensino que tenha como ponto de partida a realidade perceptiva da criança e que considere as situações de estimativas em vez de priorizar o uso de algoritmos e cálculos numéricos, traz grande contribuição para o desenvolvimento do pensamento e para a elaboração de julgamentos qualitativos. Posteriormente, ao trabalhar com estratégias semi-numéricas, a criança adquire a noção de proporção e evolui, passando da elaboração dos julgamentos qualitativos para os quantitativos, essenciais para os julgamentos proporcionais mais complexos.

Spinillo (2002) ainda sugere que o ensino de proporções deveria envolver situações-problema que pudessem ser resolvidas por meio da estratégia ‘metade’ e com a utilização de estimativas, bem diferente das práticas observadas, centradas em cálculos e no emprego da regra de três.

Marques (2006) optou por investigar os tipos de problemas que envolvem proporção em livros didáticos de quatro países: Brasil, Portugal, Espanha e Estados Unidos. Em sua análise, a autora verificou que os livros brasileiros apresentam problemas de reprodução[8], conexão[9] e reflexão[10], sendo as maiores frequências para os problemas de conexão e reflexão. As tarefas de estrutura fechada[11] apareceram em maior número que as de estrutura aberta[12] e semi-aberta[13].

---

[8] Problemas de reprodução: requerem a repetição de conhecimentos já exercitados, num contexto relativamente familiar (MARQUES, 2006, p. 69).

[9] Problemas de conexão: requerem o estabelecimento de relações, em situações familiares ou quase familiares, e um certo grau de interpretação (MARQUES, 2006, p.69).

[10] Problemas de reflexão: constituído por um conjunto de questões com maior exigência que as anteriores, visto apelar a uma certa intuição e reflexão por parte dos alunos, bem como a um certo grau de criatividade para identificar os conceitos matemáticos subjacentes ou no estabelecimento de relações importantes no sentido de gerar uma estratégia de resolução (MARQUES, 2006, p.69).

[11] Nesse tipo de problema é claramente dito o que é dado e o que é pedido, comportando apenas uma única solução (MARQUES, 2006, p.69).

[12] Admite um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas, aceitando várias soluções (MARQUES, 2006, p.69).

[13] Nesses problemas o que é dado e o que é pedido obedece a uma estrutura, mas admite várias soluções (MARQUES, 2006, p.69).

Como verificamos, existem propostas diversificadas de problemas que, segundo os autores pesquisadores, contribuem para a aprendizagem do conceito de proporcionalidade e para o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Compreendemos a preocupação de Lesh, Post e Behr (1988) em relação ao trabalho com os problemas de valor omisso, porém o que nos parece mais prejudicial ao ensino e a aprendizagem, não é trabalhar com esse tipo de problema, mas sim, a metodologia empregada para trabalhar com eles. Como observado por Spinillo (2002) e outros pesquisadores, as consequências negativas para a aprendizagem do conceito de proporcionalidade advém, entre outros fatores, do ensino conduzido por métodos mecânicos, que prioriza cálculos e regras em detrimento dos conceitos em estudo.

Entendemos que os problemas de valor omisso como definidos por Lesh, Post e Behr (1988) podem ser utilizados no ensino introdutório de proporções na série preconizada pelos PCN (1998), especificamente no terceiro ciclo (no 7º ano), por meio de situações-problema devidamente elaboradas, com o objetivo de permitir ao aluno a construção de estratégias próprias de resolução, bem como o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Partindo dessa concepção é que neste estudo optamos por trabalhar com os problemas de valor omisso, conforme apresentaremos posteriormente. Consideramos que esse tipo de problema nos permitirá a identificar e a analisar as estratégias mobilizadas pelos participantes de nossa investigação a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade.

Destacamos que os outros tipos de problemas apresentados por Lesh, Post e Behr (1988) também podem ser propostos aos alunos em estudos sobre o raciocínio proporcional, desde que sejam considerados os objetivos da pesquisa. Como exemplo temos a pesquisa realizada por Spinillo (1997) que utilizou problemas de comparação ao investigar crianças a partir de 6 anos de idade.

3.5 ESTRATÉGIAS

O conceito de raciocínio proporcional, como apresentado por diversos autores, é muito mais do que simplesmente a habilidade em resolver um problema que envolva proporções por meio do uso de um algoritmo (regra de três). Este raciocínio se caracteriza pela compreensão das relações existentes entre as grandezas de uma proporção. A compreensão dessas relações pode se manifestar por meio das estratégias de resolução que são utilizadas para resolver os problemas que envolvem proporcionalidade.

Vergnaud (*apud* SCHLIEMANN e CARRAHER, 1997) considera que é possível determinar a solução de um problema de proporcionalidade utilizando-se uma das seguintes estratégias: estratégia escalar, estratégia funcional ou regra de três.

Segundo esse autor, a *estratégia escalar* consiste em encontrar a solução para um problema de proporcionalidade, observando as relações estabelecidas entre os valores de uma mesma grandeza. Neste procedimento as grandezas permanecem independentes uma da outra e operações são realizadas em cada uma, conservando-se a relação proporcional. Por exemplo, se um carro consome, em média, 8 litros de combustível a cada 100 km rodados, então para percorrer 300 km ele consumirá 24 litros de combustível porque se a quilometragem triplicou, isto implica que a quantidade de litros de combustível também triplicará.

O raciocínio empregado nessa resolução, considerando a estratégia escalar, demonstra a compreensão de relações multiplicativas, primeiramente observadas para os valores da grandeza quilômetros e posteriormente aplicada na grandeza litros.

Outra forma de raciocínio para resolver o exemplo acima, também considerado escalar, mas utilizando adições sucessivas seria: se com 8 litros de combustível o carro percorre 100 km, com 16 litros percorrerá 200 km e com 24 litros percorrerá 300 km. Schliemann e Carraher (1997) apontam que este tipo de estratégia que emprega adições sucessivas é o mais utilizado por alunos que não estudaram os conceitos de proporcionalidade formalmente, assim como por crianças e adultos com pouca escolaridade. Os autores afirmam ainda que, diferente do que ocorre com o algoritmo da regra de três ensinado pela escola, a estratégia escalar é usada pelos alunos compreendendo as relações existentes entre as grandezas. Para Schliemann e Carraher (1997), as adições sucessivas representam um raciocínio que envolve relação multiplicativa entre as grandezas. Em suas análises, isto se comprova ao verificar que as transformações realizadas entre os valores de mesma grandeza são as mesmas efetuadas no âmbito da outra grandeza, mantendo-se a relação proporcional.

A *estratégia funcional* na concepção de Vergnaud (*apud* SCHLIEMANN e CARRAHER, 1997), é o tipo de estratégia que estabelece relações entre duas grandezas, determinando a razão entre elas, ou seja, encontrando a constante que possibilita relacionar os valores de uma grandeza aos valores correspondentes na outra grandeza. Para o problema: "Tatiana comprou 8 metros de tecido por R$ 480,00. Quanto vai pagar por 10 metros do mesmo tecido?", uma solução utilizando a estratégia funcional seria: como a grandeza reais é 60 vezes a grandeza metros, então o valor a ser pago por 10 metros é obtido multiplicando 10 por 60, resultando em R$ 600,00. Nesse exemplo, 60 é a razão que liga as grandezas metros e reais. Essa razão recebe o nome de constante de proporcionalidade.

A fim de apresentar um outro exemplo, retomemos o problema do combustível que foi resolvido anteriormente com o emprego da estratégia escalar. Podemos resolvê-lo também utilizando a estratégia funcional, o que implicaria em observar que a cada km corresponde 0,08 litro de combustível. Logo, para percorrer 300 km, serão necessários 300 vezes 0,08 que são 24 litros. Nesse caso, 0,08 é a constante de proporcionalidade.

O raciocínio empregado nesse problema envolve o conceito de função, haja vista verificar a relação existente entre as duas grandezas do problema, isto é, para cada quantidade de quilômetro rodado será estabelecida uma quantidade de litros de combustível. Matematicamente, a relação proporcional do exemplo dado acima poderia ser representada por uma função cuja lei de formação é $y = 0{,}08x$ (onde y indica litros e x indica quilômetros).

A *regra de três*, por sua vez, é uma estratégia que consiste, segundo Vergnaud (*apud* SCHLIEMANN e CARRAHER, 1997), em comparar duas razões equivalentes. Dessa forma, dadas duas razões equivalentes, a/b e c/x, sendo conhecidos os valores de a, b, c e desconhecido o valor de x, tem-se que $a/b = c/x$, o que implica que $a.x = b.c$, donde resulta que $x = b.\ c/a$. Entretanto, alguns autores fazem restrições quanto à utilização dessa regra.

Para Post, Behr e Lesh (1995), a regra de três representa um “processo mecânico” e que não possibilita uma compreensão dos problemas do cotidiano que envolve proporcionalidade. Esses autores reconhecem a importância da aplicação desse algoritmo na resolução de problemas, porém acreditam que isso só deva ocorrer após o aluno compreender o conceito de proporcionalidade. Partindo desse princípio, sugerem algumas estratégias para resolver problemas que envolvam situações proporcionais com valor ausente.

A primeira estratégia proposta por Post, Behr e Lesh (1995) é denominada *método da taxa unitária*. Segundo os autores, esta estratégia faz uma abordagem intuitiva considerando as experiências de compras que as crianças já possuem para determinar o preço unitário de um objeto, sabendo o preço de um conjunto deles ou para calcular o valor de um conjunto conhecendo o valor da unidade. Problemas dentro desse contexto poderiam ser resolvidos com o uso de uma divisão ou de uma multiplicação. Na concepção dos autores, mesmo os problemas de valor ausente que não informem explicitamente o valor unitário podem ser resolvidos com o uso do método da taxa unitária. Para ilustrar essa afirmação eles propõem o seguinte problema: “Sally pagou $4,50 por 5 disquetes. Quanto ela pagaria por uma dúzia?” (POST, BEHR e LESH, 1995, p. 94). A resolução apresentada pelos autores envolve uma divisão (4,50/5) para determinar o valor unitário de um disquete e depois uma multiplicação (0,90 x 12) para determinar o preço a ser pago pelos 12 disquetes.

Esse método já era descrito por Trajano (1929, p.42) em seu livro ‘Arithmetica Progressiva: curso completo theorico e pratico de Arithmetica Superior’ como uma estratégia denominada ***redução à unidade*** e consistia em “achar o valor ou o preço de uma unidade, para depois se calcular o importe de qualquer número de unidades”. O autor propôs dois processos de redução à unidade para resolver problemas que envolvem razão direta. O primeiro servia somente para resolver problemas em que se deseja determinar o valor referente a uma unidade e o segundo processo seria utilizado para se calcular um número qualquer de unidades. Exemplificando, Trajano (1929, p.42) apresenta o seguinte problema resolvido: “Custando 5 laranjas 300 réis, 8 laranjas quanto devem custar?”, cuja solução proposta é: “5 laranjas custando 300 réis, 1 só laranja deve custar 300:5 = 60 réis, e 8 laranjas devem custar 8 vezes 60 réis, que são 480 réis”.

Da mesma forma, Trajano (1929, p.43) propôs dois processos para resolver os problemas de razão inversa, sendo que o primeiro processo era utilizado para resolver problemas em que se desejava encontrar o valor de uma unidade e o segundo para calcular uma quantidade qualquer de unidades. Encontramos o seguinte problema resolvido como exemplo: “Se 4 homens podem fazer um serviço em 9 dias, em quantos dias 12 homens o poderão fazer?”. A solução dada pelo autor é: “Se 4 homens fazem o serviço em 9 dias, 1 homem o fará em 4x9=36 dias, e 12 homens o farão em 36:12=3 dias”.

Observamos que o autor resolve o problema considerando que o mesmo envolve grandezas inversamente proporcionais. Contudo, o enunciado proposto não deixa explícito que existe uma relação proporcional entre as grandezas. Entendemos que ao apresentar esse problema ao aluno, seria conveniente acrescentar a informação de que todos os homens realizam o serviço com a mesma capacidade, o que evitaria qualquer tipo de dúvida quanto à compreensão da proporcionalidade.

Em relação à estratégia da redução à unidade, entendemos como Barreto (2001), que essa estratégia utiliza um pensamento que remete ao mesmo empregado na estratégia escalar, o qual se apoia em um raciocínio do tipo: “...vezes mais...” ou “...vezes menos...” , a partir da análise dos valores de uma mesma grandeza. Tomando o exemplo das laranjas proposto por Trajano (1929), teríamos o seguinte raciocínio: como 5 laranjas custam 300 réis, então 1 laranja custa 5 vezes menos, ou seja, 60 réis (resultante do quociente 300:5). Assim, 8 laranjas custam 8 vezes mais que 1 laranja, isto é, 8 vezes 60.

Por outro lado, observamos ao utilizar a estratégia funcional que também é possível empregar a redução à unidade, estabelecendo uma relação entre as grandezas. Sendo assim, nesse estudo iremos considerar a estratégia da redução à unidade como sendo tanto uma estratégia escalar, quanto uma estratégia funcional, porém utilizando a “passagem pela unidade”. A classificação como estratégia escalar ou funcional dependerá, portanto, das relações que forem estabelecidas para a redução à unidade, se estas ocorrerem entre valores de uma mesma grandeza ou entre valores de grandezas diferentes.

Retornando à Post, Behr e Lesh (1995, p.95), eles apresentam uma segunda sugestão para resolver problemas de valor ausente denominada de *método do fator de mudança*. Para os autores essa estratégia consiste em analisar que “se uma variável é x vezes uma outra num dado par-taxa, essa variável deverá ser igualmente x vezes a outra no par-taxa equivalente”. Para exemplificar, os autores apresentam o seguinte problema: “Se Sally pagou $3,60 por 4 disquetes, quanto pagaria por uma dúzia?”. O raciocínio empregado por eles na resolução deste problema explicita que o preço a ser pago por uma dúzia de disquetes deve ser o triplo do valor pago por 4 disquetes, considerando que a quantidade de disquetes (12) é o triplo de 4.

Entendemos que o raciocínio empregado nesta estratégia proposta por Post, Behr e Lesh (1995) coincide com o que Vergnaud (1983) classificou como estratégia escalar.

As estratégias de resolução de problemas que envolvem proporcionalidade foram temas de diversas pesquisas que investigaram o ensino e a aprendizagem deste conceito.

Schliemann e Carraher (1997) realizaram estudos em que compararam as estratégias de resolução de problemas de proporcionalidade em crianças com idade variando entre 11 e 14 anos. As 90 crianças pesquisadas formaram três grupos de 30 crianças cada. O grupo 1, composto por crianças vendedoras e o grupo 2, formado por alunos da 6ª série (atual 7º ano), não haviam estudado proporcionalidade. O grupo 3, composto por alunos da 7ª série (atual 8º ano), já haviam estudado proporcionalidade.

Os autores apresentaram às crianças quatro problemas que julgavam mais fáceis de serem resolvidos pela estratégia escalar (problemas escalares) e outros quatro que seriam facilmente resolvidos pela estratégia funcional (problemas funcionais). Para os problemas escalares, Schliemann e Carraher (1997) constataram que não houve uma diferença significativa na porcentagem de acertos dos três grupos. No entanto, observaram diferença quanto ao uso da estratégia escalar. As crianças vendedoras empregaram adições sucessivas, paralelamente aos valores de cada grandeza até encontrarem a solução, enquanto as crianças da 6ª e 7ª séries buscavam determinar o operador escalar em uma mesma grandeza para posteriormente aplicá-lo ao valor dado na outra grandeza, por meio da multiplicação.

Os pesquisadores verificaram também que para um determinado problema, as crianças escolarizadas recorreram ao cálculo escrito ou à calculadora para determinar a resposta, enquanto as vendedoras dispensaram o uso da calculadora e os algoritmos escritos, preferindo o cálculo mental. Uma grande porcentagem das crianças escolarizadas resolveu o problema determinando primeiro o valor unitário para depois obter a resposta solicitada. Já a maioria das crianças vendedoras resolveu o problema utilizando a estratégia escalar, a partir dos valores dados no problema, sem recorrer ao valor unitário.

Em relação aos problemas funcionais, Schliemann e Carraher (1997) verificaram que a maioria das crianças vendedoras não mudou sua estratégia, continuando a empregar a estratégia escalar. Algumas dessas crianças utilizavam a estratégia escalar em uma parte da resolução e depois calculavam o valor unitário para então finalizar o exercício, apresentando uma resposta. As crianças da 6^{a} e 7^{a} séries em grande número, empregavam a estratégia funcional, fazendo uso da calculadora e dos algoritmos escritos. Optavam em suas soluções por primeiramente determinar o valor unitário, para depois encontrarem a resposta procurada.

Assim, concluíram que as crianças vendedoras preferiam a estratégia escalar, empregando adições sucessivas, independente do tipo de problema, mesmo encontrando algumas dificuldades, como por exemplo, em relação aos números envolvidos. Diferentemente, as crianças escolarizadas, em sua maioria, escolhiam sua estratégia de resolução de acordo com o tipo de problema a ser resolvido ou em função dos números apresentados, sendo a multiplicação e/ou a divisão as operações mais usadas.

Nos estudos realizados por Spinillo (1997) a autora analisou as estratégias que crianças a partir dos 6 anos utilizavam para resolver problemas que envolviam comparações do tipo parte-parte (razão), como por exemplo, comparar as partes branca e preta de um retângulo com um modelo dado. A autora verificou que uma das estratégias adotada pelas crianças para resolverem os problemas propostos era o referencial "metade" e que este lhes possibilitava comprovar a existência ou não da equivalência entre razões. Essa estratégia do referencial "metade" consistia em estabelecer uma relação que assegurava a criança dizer se uma medida dada era "maior que a metade", "menor que a metade" ou "igual a metade" e a partir de suas análises, realizar julgamentos proporcionais.

A pesquisa realizada por Oliveira e Santos (2000) investigou quais estratégias foram utilizadas por 494 alunos de 5^{a} a 8^{a} séries (atuais 6^{o} a 9^{o} anos) do Ensino Fundamental para resolverem problemas de proporção simples e como estes demonstravam a compreensão do conceito de proporcionalidade. Os autores realizaram suas análises a partir de testes escritos realizados pelos alunos. Os testes envolviam quatro problemas de proporção direta e quatro de proporção inversa.

Após a investigação identificaram seis tipos de estratégias utilizadas pelos alunos, as quais classificaram como: estratégia não identificada, adições sucessivas/replicação, tarefa total, valor unitário, fator de proporcionalidade e regra de três. Os autores relatam que não encontraram referências na literatura sobre a estratégia “tarefa total” que foi utilizada pelos alunos para resolverem problemas que envolviam proporção inversa. Segundo as análises desses autores, essa estratégia consiste na divisão do problema em dois subproblemas. Dessa forma, o aluno, primeiro calcula o valor que se refere ao valor total e, em seguida, utiliza esse valor para determinar o valor solicitado pelo problema. Ilustram, ainda, a aplicação dessa estratégia em um problema referente à velocidade: “Um carro percorre a distância entre duas cidades em 5 horas, a uma velocidade de 90 quilômetros por hora. Em quanto tempo ele fará essa mesma viagem, se a velocidade média for de 75 quilômetros por hora?” (OLIVEIRA e SANTOS, 2000, p.12). Na análise, constataram que os alunos, primeiro encontraram o percurso total percorrido (5x90 = 450 km) e, em seguida, procuraram o tempo gasto empregando a nova velocidade (450:75 = 6 h).

Tanto para os problemas de proporção direta quanto para os problemas de proporção inversa, os autores constataram que um fator que determinava a escolha das estratégias pelos alunos era a relação destes com os números, sendo priorizadas as operações que eram consideradas mais fáceis de serem realizadas. Segundo eles, a regra de três foi a estratégia empregada com maior frequência pelos alunos que já haviam recebido instrução formal sobre proporção. Para eles, isso se deve ao modelo como a escola trabalha o ensino desse conteúdo.

Floriani (2004) também investigou as diversas estratégias utilizadas por alunos da 6ª e 8ª séries (7º e 9º anos) do Ensino Fundamental e da 2ª série (2º ano) do Ensino Médio para resolverem problemas que envolviam proporcionalidade. Seu objetivo principal era buscar indícios que comprovassem a compreensão desse conceito pelos alunos. Nessa pesquisa o autor dividiu os problemas apresentados aos alunos em duas categorias: a 1ª categoria era formada por problemas de proporção direta e a 2ª categoria composta por problemas de proporção inversa.

Para a 1ª categoria, o pesquisador identificou cinco tipos de estratégias empregadas pelos alunos: operação aritmética, adição sucessiva, fator de proporção, diferença e regra de três. O uso dessas estratégias não foi verificado em todas as séries investigadas. Segundo o autor, os alunos da 6ª série (7º ano) não variaram muito as estratégias e não utilizaram a regra de três, pois os mesmos ainda não haviam estudado o conceito de proporcionalidade formalmente.

O autor constatou que os alunos da 8ª série (9º ano) utilizaram diversas estratégias e que apesar de os mesmos já terem passado pelo estudo formal da proporcionalidade, não houve o uso frequente da regra de três. Comparando o desempenho dos alunos do Ensino

Fundamental, concluiu que os alunos que não haviam estudado proporção formalmente superaram os alunos da 8^{a} série (9^{o} ano) que já o tinham estudado.

Em relação às estratégias utilizadas pelos alunos da 2^{a} série (2^{o} ano) do Ensino Médio, Floriani (2004) constatou que predominou o uso da regra de três. Ele atribui o uso desse algoritmo ao fato dos alunos estarem empregando a regra de três no estudo da Química.

Ao finalizar as análises da 1^{a} categoria de problemas, o autor concluiu que houve o uso de estratégias inadequadas por alunos, principalmente do Ensino Fundamental, que já haviam estudado o conteúdo, o que a seu ver revela a não-compreensão do conceito de proporção direta.

Para a 2^{a} categoria de problemas, Floriani (2004) identificou o emprego de apenas três tipos de estratégias: operação aritmética, fator de proporção e regra de três. Segundo o autor, a operação aritmética se refere ao emprego de uma única operação simples de multiplicação ou divisão, enquanto a estratégia fator de proporção se destina à determinação do fator de proporção dentro de uma mesma grandeza. Em nossa concepção, consideramos essa estratégia como a estratégia escalar definida anteriormente.

Na análise do autor, a variação das estratégias foi mais evidente entre os alunos da 2^{a} série (2^{o} ano) do Ensino Médio. O mesmo constatou que nessa categoria de problemas os alunos de todas as séries apresentaram dificuldades para encontrar solução correta aos problemas propostos. Em determinados problemas, mesmo os alunos que já haviam estudado o conteúdo não percebiam a relação inversa existente entre as grandezas. Segundo o autor, alguns alunos utilizaram a regra de três sem, contudo, observar que as grandezas eram inversamente proporcionais. Para ele, isto significa simplesmente o emprego de um algoritmo sem a compreensão do conceito.

As estratégias de resolução de problemas que envolvem situações proporcionais também têm sido temas de pesquisas em outros países, como constatamos em estudos realizados em Lisboa. Silvestre (2006) analisou o modo como se desenvolve a aprendizagem da proporcionalidade nos alunos do 6^{o} ano (no Brasil, atual 7^{o} ano) e entre os seus objetivos, investigou as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução dos problemas que envolviam proporção direta. A autora verificou que os alunos usaram estratégias diversificadas, como a estratégia da equivalência entre razões, a estratégia do fator escalar e o método da razão unitária. A regra de três não foi utilizada pelos alunos, pois segundo a autora, estes não haviam recebido nenhuma instrução formal sobre proporcionalidade.

Silvestre (2006) afirma não ser possível identificar os motivos que justificam as opções dos alunos por uma ou outra estratégia. Para ela, a escolha parece depender de alguns fatores, como por exemplo, o conhecimento do aluno sobre números e sua capacidade de interpretar e resolver problemas.

Em outra pesquisa realizada em Lisboa, Costa (2007) investigou alunos do 6º ano (no Brasil, atual 7º ano) de escolaridade, antes e após o ensino formal da proporcionalidade direta. Ela buscou analisar, entre outros objetivos, quais eram as estratégias empregadas pelos alunos ao resolverem problemas que envolviam o raciocínio proporcional.

A autora coletou os dados de sua pesquisa por meio de um teste inicial, antes do ensino formal do conceito de proporcionalidade direta. Após o ensino formal, aplicou um teste final e uma entrevista. A análise do teste inicial revelou que a estratégia mais utilizada foi a estratégia que envolvia procedimentos aditivos, sendo também identificado o uso de estratégias multiplicativas, envolvendo procedimentos escalares.

No teste final, a autora observou a utilização de estratégias mais formais, havendo uma maior frequência do uso da regra de três, em comparação ao emprego das estratégias multiplicativas (escalares e funcionais) e da estratégia aditiva. Ao comparar as estratégias utilizadas pelos alunos no teste inicial e no teste final, Costa (2007) considera que ocorreu uma evolução, pois verificou uma maior incidência do uso dos procedimentos multiplicativos em vez de procedimentos aditivos.

Durante as entrevistas realizadas com seis alunos, a autora constatou que os alunos optaram, em alguns problemas, por empregar estratégias intuitivas (uso de procedimentos aditivos), enquanto que para os problemas de valor omisso, a preferência foi pelo uso da regra de três.

Fazendo um estudo comparativo das estratégias empregadas pelos alunos nos testes escritos (inicial e final) e nas entrevistas, Costa (2007) concluiu que a escolha das estratégias pelos alunos parece estar, entre outros fatores, relacionada à maneira proposta ao aluno para resolver os problemas, ou seja, à formalidade (no caso dos testes escritos) ou a uma condição menos formal, como nas entrevistas, onde havia a possibilidade de um diálogo. A autora verificou que houve mudanças de estratégias na resolução de um mesmo tipo de problema, quando este era resolvido por escrito ou durante a entrevista. Na resolução por escrito os alunos recorriam mais ao uso de estratégias formais, como a regra de três, enquanto que nas entrevistas utilizavam estratégias diversificadas. Segundo a autora, o tempo limitado da avaliação escrita parece justificar a opção do aluno, que talvez se sentindo pressionado, recorria à regra de três por considerá-la mais rápida. Ao contrário, durante as entrevistas, não havia um tempo limitado, sendo este determinado pelo ritmo do aluno, o que possivelmente o permitia pensar em outras estratégias de resolução.

As diversas estratégias utilizadas pelos alunos para resolverem os problemas que envolvem proporcionalidade parecem estar relacionadas ao fato de já terem recebido instrução formal ou não desse conceito. Conforme as pesquisas citadas, as estratégias não convencionais são empregadas pelos alunos com maior frequência antes destes terem estudado o conceito de proporcionalidade. Exemplos dessas estratégias são a estratégia escalar e a estratégia funcional. Segundo os pesquisadores, os alunos utilizam essas estratégias com compreensão das relações entre as grandezas e empregando os conhecimentos prévios que possuem.

Após o estudo formal do conceito de proporcionalidade, o algoritmo da regra de três passa a ser a estratégia mais empregada pelos alunos, muitas vezes sem a devida compreensão das relações existentes entre as grandezas, conforme verificaram diversos pesquisadores. O uso da regra de três parece estar vinculada ao processo de ensino do conteúdo “proporções”. Diferente do que ocorre com as estratégias não convencionais, acreditamos que o uso desse algoritmo nem sempre propicia o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

3.6 DIFICULDADES NO ENSINO E NA APRENDIZAGEM DA PROPORCIONALIDADE

Considerando a importância do raciocínio proporcional, pesquisas têm sido realizadas com o objetivo de melhor compreender esse tipo de raciocínio e de contribuir com alternativas que possam minimizar as dificuldades, tanto de quem aprende quanto de quem ensina.

As dificuldades dos alunos na utilização do conceito de proporcionalidade na Matemática e em outras áreas do conhecimento, em alguns casos, parece ter suas origens no ensino deste conteúdo. A falta ou o pouco conhecimento de alguns professores em relação à estrutura do raciocínio proporcional tem limitado o desenvolvimento desse tipo de raciocínio nos discentes.

Além das considerações de Spinillo (1997), citadas anteriormente sobre o conhecimento do professor em relação ao raciocínio proporcional, estudos relatam o quanto o ensino de proporções tem se limitado à prática do uso de algoritmos e memorização de técnicas. Martins (2007, p.85) investigou práticas vigentes nas aulas sobre proporção em duas turmas de 6ª série (atual 7º ano) e afirma que, em muitas das observações que realizou, as práticas docentes “encaixam-se no método da cópia e repetição, sendo uma das mais recorrentes o professor trazer para os alunos listagens de exercícios parecidos e de resolução mecanizada. Os alunos memorizam técnicas de resolução, que aplicam nos exercícios". Observou-se que o algoritmo da regra de três foi utilizado como a principal estratégia de resolução dos exercícios. Na perspectiva da autora esse algoritmo serve como um auxílio, mas no caso observado "foi ensinado aos alunos como uma regra em que os dados do problema deviam ser aplicados para encontrar valores desejados, o que tornou a resolução dos exercícios mecanizada; deixou de ser resolução de problemas" (MARTINS, 2007, p. 110).

Após o ensino formal da proporção, Martins (2007) aplicou um teste (composto por exercícios semelhantes aos dados em aula pela professora) em seis alunos e verificou que nenhum aluno resolveu de forma correta todos os problemas. Para a autora, esse fato demonstrou lacunas ocorridas na aprendizagem da proporção, decorrentes do método de ensino adotado pela professora.

Pontes (2009) focou seus estudos na atuação dos professores em sala de aula analisando o conteúdo, a maneira de trabalhar dos professores e as atividades que estes desenvolviam para ensinar determinados conteúdos de Matemática na 5ª e 6ª séries (atual 6º e 7º anos). Em relação ao ensino de Razão e Proporção na 6ª série, a autora verificou um ensino conduzido por regras e um discurso narrativo monopolizado pelo professor. Apesar de o professor manifestar algumas atitudes que evidenciavam sua preocupação com a aprendizagem do aluno (ritmo da aula e interligação entre os conteúdos estudados), o mesmo adotava uma metodologia que desprezava os conhecimentos prévios dos alunos adquiridos na vivência fora da escola. Sua metodologia não permitia o aluno participar do processo de construção do conceito em estudo, nem criar suas próprias estratégias para resolver os problemas propostos. Essa autora comenta que, em momento algum, o professor discutiu estratégias variadas de resolução dos problemas, mesmo quando algum aluno propunha uma estratégia diferente da ensinada pelo docente. Para Pontes (2009), esta atitude do professor vai no sentido contrário às propostas de ensino dos estudiosos da Educação Matemática, as quais sugerem uma metodologia que permita o aluno ser o protagonista no processo de construção de seu conhecimento.

Verifica-se nas escolhas metodológicas adotadas por esses professores, uma negação das orientações de ensino propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) que preconizam, para o 7º ano, um estudo da proporcionalidade que promova o desenvolvimento do raciocínio proporcional, com estímulos à autonomia de estratégias de resolução de problemas, sem a utilização de procedimentos convencionais como a regra de três.

Assim como Martins (2007), Pontes (2009, p.99) verificou que uma boa parte do tempo das aulas de proporção eram ocupadas por cópia e treinamento de exercícios. Para a autora os exercícios propostos “eram meros meios de treinar mecanismos de cálculo, representando, na maioria das vezes, pouca ou nenhuma significação lógica”. Na análise dessa autora, a condução do ensino de proporção pelos professores observados não contribui para o desenvolvimento do raciocínio e, ainda concluiu que a Matemática ensinada na escola tem características diferentes da Matemática utilizada no cotidiano dos trabalhadores. Como sugere Pontes (2009), faz-se necessário um trabalho que modifique as concepções dos professores quanto ao ensino, para que seja priorizado o desenvolvimento do raciocínio em detrimento da capacidade de determinar uma simples resposta correta para um problema.

Para Chaim, Ilany e Keret (2008) o trabalho não deve ser realizado somente com os professores por meio da formação continuada, mas iniciar com os futuros professores. Estudos realizados por eles, com futuros professores de Matemática, revelaram que a maioria deles não tinha compreensão sobre o raciocínio proporcional. A partir de um trabalho com “atividades investigativas autênticas” que abordavam tanto o conteúdo quanto o conhecimento pedagógico relativos aos conceitos de Razão e Proporção, estes estudantes melhoraram seus conhecimentos em relação ao conteúdo, às questões didático-pedagógicas e suas atitudes em relação à Matemática, além da compreensão das relações envolvidas no raciocínio proporcional.

Podemos considerar, com base nessas pesquisas, que algumas dificuldades relativas ao raciocínio proporcional advêm, dentre outros fatores, da forma como o professor conduz o ensino de proporções. Assim, a falta de conhecimento do professor em relação ao modo de raciocinar proporcionalmente pode levá-lo a um ensino que prioriza a utilização de algoritmos, não propiciando aos alunos condições para que desenvolva estratégias próprias de resolução de problemas que envolvam proporcionalidade por meio de procedimentos não convencionais.

Ao investigar um grupo de alunos de 5ª série (atual 6º ano) sobre os procedimentos utilizados para resolver problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional, Barreto (2001) constatou um número elevado de erros nos resultados apresentados pelos alunos. Apesar de o estudo dos erros não fazer parte dos seus objetivos, a pesquisadora julgou o dado relevante e se propôs a analisá-los, classificando-os em cinco categorias: (a) produto dos termos na mesma grandeza; (b) quociente entre os termos extremos; (c) produto entre os extremos; (d) quociente entre os termos da mesma grandeza e (e) cálculo do valor unitário. Para Barreto (2001), alguns dos erros evidenciam que os alunos não compreendem a noção de multiplicação e divisão, o que levaria a dificuldade na aprendizagem de outros conceitos matemáticos que exijam um raciocínio proporcional. Outros tipos de erros revelam uma compreensão parcial das relações estabelecidas entre as grandezas, quando, por exemplo, o aluno realizava uma divisão para encontrar o valor unitário e o apresentava como solução, deixando de determinar a incógnita da questão.

Dificuldades também foram identificadas por Magalhães (1990), citado por Schliemann e Carraher (1997), quando investigou a resolução de problemas de proporção e sua transferência entre diferentes contextos. Ao propor a 60 cozinheiras, participantes de um curso de alfabetização para adultos, problemas que envolviam o conceito de proporcionalidade em três contextos diferentes (receitas de cozinha, compra e venda, fórmulas de remédios), Magalhães constatou uma significativa influência destes contextos na resolução dos problemas. Quando o contexto inicialmente não era familiar às cozinheiras, nesse caso o da fórmula de remédios, a porcentagem de acertos era bem inferior à porcentagem obtida nos outros dois contextos. O contexto de compra e venda, considerado mais presente no cotidiano das cozinheiras, obteve quase 100% de respostas corretas nas resoluções apresentadas.

Magalhães (1990) concluiu que o conceito de proporcionalidade desenvolvido por uma pessoa em um determinado conteúdo não é aplicado automaticamente em outro, principalmente se este novo conteúdo envolver um contexto desconhecido ao indivíduo.

Schliemann e Carraher (1997) sugerem como contextos favoráveis para se trabalhar a compreensão de razão e proporção, as diversas situações práticas da vida que envolvem a proporção direta entre quantidades. No entanto, trabalhando com contexto de compra e venda os autores perceberam que outros fatores como tipos de problemas (escalar e funcional), direção do cálculo e tamanho dos números geram dificuldades, principalmente, para as crianças.

No estudo que envolvia crianças que não haviam passado pela instrução formal do conceito de proporcionalidade (30 vendedoras e 30 alunos da 6ª série) e as que já tinham recebido tal instrução (7ª série), os autores conferiram que os problemas construídos para serem resolvidos pela estratégia funcional foram tidos como mais difíceis que os problemas a serem resolvidos pela estratégia escalar.

Quanto à direção do cálculo, foi observado que os problemas em que a relação entre os valores de uma mesma grandeza era de números menores para números maiores, eram mais fáceis que os problemas em que essa relação era de números maiores para menores. No caso das crianças vendedoras, a dificuldade de trabalhar com a relação de números maiores para menores justifica-se pelo fato de elas terem que realizar uma operação contrária a que estavam habituadas em sua prática cotidiana. No que se refere ao tamanho dos números, as autoras verificaram que os problemas nos quais o número que indicava o preço era menor que o número que indicava itens a serem comprados, representaram maior dificuldade para as crianças.

Dificuldades relacionadas ao contexto e à terminologia não familiares aos alunos também foram verificadas em estudos recentes realizados por Costa (2007). Verificou-se que determinadas expressões utilizadas nos enunciados e termos específicos de um certo contexto não foram compreendidos pelos alunos. Ao analisar os resultados apresentados no teste inicial, no teste final e na entrevista, a autora identificou diferenças quanto ao tipo de dificuldades. No teste inicial as dificuldades e erros estavam relacionados à relação estabelecida entre os dados fornecidos no problema ou ao uso parcial deles. No teste final, as dificuldades estavam associadas à interpretação das tarefas propostas e dos respectivos dados. Já na entrevista, houve uma dificuldade localizada, referente a um termo que não foi compreendido pelo aluno.

A autora também constatou que os alunos sentiram grande dificuldade no momento de explicar o pensamento utilizado durante a resolução de algumas tarefas, ou quando eram motivados a justificar a resposta apresentada. Eles sabiam, por exemplo, identificar as tarefas em que não havia relações proporcionais entre as grandezas, porém não conseguiam explicar o porquê.

Com uma visão mais focada na natureza do pensamento proporcional, Spinillo (2002) aponta a distinção entre dimensões complementares e não complementares como um fator importante para que se compreenda as dificuldades que as crianças apresentam ao resolver problemas de proporção. Na concepção da autora, há que se entender que as dimensões complementares são quantidades (contínuas ou discretas) que fazem parte de um mesmo todo e as dimensões não complementares não fazem parte do mesmo todo. Spinillo (1997) enfatiza que o professor deve compreender e saber explicar aos alunos que, somente quando as dimensões são complementares, é possível fazer comparações do tipo parte-parte e que estas não são aplicáveis em dimensões não complementares. A autora também aponta como fator de dificuldade de aprendizagem da proporcionalidade, a incapacidade das crianças em estabelecerem relações de segunda ordem, exceto quando a tarefa envolve relações de primeira ordem do tipo parte-parte.

Conforme observamos nas pesquisas analisadas, a incapacidade de estabelecer relações entre grandezas ou a compreensão parcial dessas relações são exemplos de dificuldades relacionadas ao raciocínio proporcional. Verificamos também em Schliemann e

Carraher (1997), ao analisarem os estudos de Magalhães, que o contexto em que se apresentam os problemas pode se constituir em um fator de dificuldade para a aplicação do conceito de proporcionalidade. Segundo esse autor, os alunos não conseguem fazer a ‘transferência’ do conceito aprendido em um contexto, para outro que não lhe seja familiar.

Algumas das dificuldades descritas pelos autores em relação ao ensino e à aprendizagem da proporcionalidade foram constatadas nessa pesquisa, conforme descrevemos nas análises que apresentamos no capítulo seguinte.

4 ESCOLHAS METODOLÓGICAS

Apresentamos neste capítulo as escolhas realizadas, como a opção em trabalhar com a oralidade além da linguagem escrita, as variáveis didáticas e os critérios adotados para a seleção dos problemas. Descrevemos ainda o modo de seleção dos alunos e a organização geral das sessões.

4.1 ESCRITA E ORALIDADE NO ENSINO DA MATEMÁTICA

Diversas pesquisas (OLIVEIRA e SANTOS, 2000; MARQUES, 2006; MARTINS, 2007 e PONTES, 2009) têm revelado que o ensino de proporcionalidade ainda tem como características predominantes, as aulas expositivas, o excesso de cálculos mecânicos, o emprego de algoritmos; a escrita quase se constitui no único recurso utilizado pelos alunos ao resolverem exercícios. Essas características, além de outros fatores, são apontadas pelas pesquisas como causas que interferem no processo de ensino e aprendizagem da proporcionalidade.

Refletindo especificamente sobre a escrita no ensino da Matemática, concordamos com Knijnik (2006) quando afirma que a escrita utilizada nas aulas de Matemática assemelha-se à linguagem empregada pelos matemáticos da academia, marcada por uma linguagem formal e abstrata, visivelmente identificada nos enunciados matemáticos e nos algoritmos propostos em sala de aula.

Há que se ressaltar que a linguagem matemática, como relata Cândido (2006), é elaborada e sistematizada para que seja mais concisa e precisa que a linguagem materna, evitando assim qualquer problema que leve a uma dupla interpretação em seus enunciados e conceitos. Considerando, além dessas características, o fato de que a linguagem escrita da Matemática é formada pelos símbolos matemáticos, é compreensível a dificuldade que alguns alunos manifestam ao ter que se expressarem por meio desse tipo de linguagem.

Não pretendemos propor a substituição da linguagem escrita pela linguagem oral nas aulas de Matemática, mas julgamos importante que os professores compreendam e valorizem a linguagem oral e as habilidades que decorrem dessa prática. Como sugere Cândido (2006, p. 17),

> a tarefa dos professores em relação à linguagem matemática deve desdobrar-se em duas direções. Em primeiro lugar, na direção do trabalho sobre os processos de escrita e representação, sobre a elaboração de símbolos, sobre o esclarecimento quanto às regras que tornam certas formas de escrita legítimas e outras inadequadas. Em segundo, em direção ao trabalho sobre o desenvolvimento de habilidades de raciocínio que, para as crianças, se inicia com o apoio da linguagem oral e vai, com o tempo, incorporando textos e representações mais elaboradas.

Para a autora, a oralidade é um recurso que pode ser utilizado na escola por todos os alunos, em qualquer idade e qualquer série, e em todas as áreas, inclusive na Matemática. Para ela, esse recurso é simples, rápido e permite intervenções no momento imediato em que surge uma dúvida por parte do aluno. Pode ainda ser empregado principalmente quando a criança não domina a escrita ou quando não tenha habilidade suficiente sobre ela, a ponto de manifestar seu pensamento por escrito.

Para Cândido (2006, p. 17), ao solicitar aos alunos, por exemplo, que apresentem oralmente os procedimentos utilizados ao resolver um problema e que os justifique, permite-se que estes “modifiquem conhecimentos prévios e construam novos significados para as ideias matemáticas”.

Cavalvanti (2006) compartilha o entendimento de Cândido (2006) sobre o emprego da oralidade na resolução de problemas e julga, que é no momento da exposição dos seus procedimentos de resolução para os colegas, que o aluno usa expressões e argumentos para explicar seu raciocínio, o que não apareceria no registro escrito. A autora defende o uso da linguagem oral argumentando que este é um recurso utilizado pela criança desde pequena para demonstrar, por exemplo, desejos e sentimentos, e que mesmo antes da escolaridade ela consegue resolver determinados problemas expressando oralmente sua resposta e seu raciocínio.

Nessa perspectiva, Cavalcanti (2006, p.126) entende que

> A oralidade utilizada como recurso na resolução de problema pode ampliar a compreensão do problema e ser veículo de acesso a outros tipos de raciocínio. Falar e ouvir nas aulas de Matemática permite uma maior troca de experiências entre as crianças, amplia o vocabulário matemático e linguístico da classe e faz com que ideias e procedimentos sejam compartilhados.

Estudos realizados por Schliemann *et al.* (2006) sobre a matemática oral versus a matemática escrita reforçam as contribuições da linguagem oral para o estudo da Matemática. Em suas análises sobre os procedimentos utilizados por crianças durante a resolução de problemas aritméticos, os autores constataram que

> A maior facilidade do procedimento oral em comparação com o escrito era evidente especialmente quando as crianças não conseguiam resolver algum problema através do procedimento escrito ensinado pela escola, mas imediatamente encontravam a solução quando o examinador sugeria-lhes que usasse o procedimento oral (SCHLIEMANN *et al*., 2006, p. 55).

Isso parece ter justificativa nas considerações realizadas por Cândido (2006) quando observa que a escrita não é tão rápida e maleável quanto a oralidade, como também não permite 'ir para todos os lados como no oral'.

Nesse mesmo estudo, Schliemann *et al.* (2006) verificaram alguns procedimentos empregados pelas crianças em relação aos cálculos realizados oralmente. Para realizarem os cálculos orais, as crianças

(a) modificavam os valores apresentados no problema para trabalharem com quantidades mais fáceis de serem manipuladas;
(b) usavam os métodos da decomposição ou do agrupamento, dependendo das quantidades a serem trabalhadas;
(c) preferiam trabalhar primeiro com as centenas, depois com as dezenas e por último com as unidade (oposto ao algoritmo escrito), exceto na divisão;
(d) faziam um acompanhamento contínuo dos valores durante o processo de cálculo;
(e) optavam por trabalhar com quantidades que, se escritas, terminariam em um ou mais zeros.

Além dos pesquisadores, os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) também destacam o emprego da linguagem oral pelos alunos durante o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Segundo os PCN (1998, p.48), um dos objetivos do ensino da Matemática no ensino fundamental é capacitar o aluno para

> Comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas.

No entanto, esse objetivo parece não ser plenamente executado nas práticas de sala de aula. Pesquisas realizadas por Knijnik (2006), Schliemann e Carraher (1997) e Schliemann *et al.*(2006), evidenciam que a linguagem oral é um recurso comumente adotado por pessoas pouco escolarizadas ou analfabetas e pouco valorizado pela escola. Knijnik (2006) investigou as práticas matemáticas orais de camponeses do Movimento Sem Terra do Sul do Brasil e observou que sujeitos pertencentes a uma cultura marcada pela oralidade, analfabetos ou não, utilizavam procedimentos orais para resolverem seus problemas cotidianos, como compra ou venda de produtos. A autora constatou que os camponeses utilizavam estratégias próprias de cálculos que envolviam determinadas regularidades. Ao relatar a observação de um determinado camponês realizando cálculos, a autora destaca algumas características, como profunda concentração e destreza em usar a memória para lembrar-se dos resultados das diversas etapas que o conduzira ao resultado final.

A oralidade também foi o recurso preferido por crianças vendedoras em pesquisa realizada por Schliemann e Carraher (1997). Ao proporem problemas que envolviam o conceito de proporcionalidade a crianças vendedoras e crianças escolarizadas, os autores identificaram que a oralidade influenciava nas estratégias de resolução das crianças vendedoras, que utilizavam procedimentos próprios, diferentes das crianças escolarizadas que adotavam, na maioria das resoluções, a escrita e as regras ensinadas pela escola.

4.2 A OPÇÃO PELA ORALIDADE

A partir dessas considerações sobre a oralidade em Matemática, fizemos a opção em trabalhar com esse recurso de linguagem na maioria das atividades da pesquisa, por entendermos que essa escolha metodológica facilitaria a comunicação entre os alunos, possibilitando o debate sobre as estratégias de resolução, além de favorecer a concentração, a memória e a atenção dos discentes, segundo analisamos nos estudos de Knijnik (2006), Cândido (2006) e nos PCN (1998).

Outro motivo pelo qual decidimos usar o recurso da oralidade é a intenção de analisar a forma como os alunos raciocinam durante a resolução dos problemas que envolvem proporcionalidade. Consideramos a hipótese de que a análise dos dados ficaria limitada em relação ao raciocínio proporcional utilizado pelos alunos, caso fosse analisada somente a produção escrita dos mesmos. Segundo Costa (2007), ao realizar sua pesquisa sobre raciocínio proporcional e coletar dados inicialmente só por escrito, ela sentiu a necessidade de recorrer a entrevistas com os discentes para tentar compreender como estes haviam raciocinado ao realizar os problemas por escrito. E como reconheceu a autora, “foi através de entrevistas realizadas que se obtiveram dados mais preciosos” (COSTA, 2007, p. 72). A esse respeito temos também as observações de Cavalcanti (2006) quando afirma ser possível verificar o raciocínio dos alunos quando estes expõem seus procedimentos de resolução de problemas aos colegas.

Por fim, esperamos que os participantes possam construir estratégias próprias para resolver os problemas propostos, conforme relataram Knijnik (2006) e Schliemann e Carraher (1997). Além disso, quando apresentarem e justificarem suas estratégias aos colegas, esperamos também que consigam compreender mais sobre o conceito de proporcionalidade e desenvolvam o raciocínio proporcional.

Nesse estudo, quando nos referimos à oralidade, entendemos a forma falada como a pesquisadora e os alunos se expressam durante a experimentação. Na coleta de dados, exceto quando os dados forem coletados por escrito, os cálculos necessários para encontrar a solução dos problemas serão realizados oralmente, o que não significa que os alunos utilizarão somente procedimentos de cálculo mental. Ressaltamos, todavia, que nosso objetivo está direcionado para o raciocínio proporcional envolvendo a oralidade e não para os procedimentos de cálculos empregados pelos alunos.

4.3 VARIÁVEIS DIDÁTICAS

Segundo a teoria das situações, uma situação didática fica caracterizada pelo meio, que por sua vez, é organizado a partir da escolha das variáveis didáticas.

As variáveis didáticas são, segundo Almouloud (2007, p.36), “aquelas para as quais a mudança de valores provoca modificações nas estratégias ótimas, o que a torna um ponto importante no estudo de modelos de aprendizagem”.

Nessa pesquisa escolhemos algumas variáveis didáticas, entendendo como propõe Almouloud (2007), que alterações nos valores das mesmas provocam mudanças nas estratégias de resolução, contribuindo para a manifestação do raciocínio proporcional dos alunos. São elas: forma de apresentar as atividades aos alunos, campo numérico, instrumento didático, tipos de relações entre grandezas e multiplicidade.

Os valores que essas variáveis assumirão em cada problema foram determinados a partir da revisão da literatura sobre o tema e em função dos objetivos a que nos propomos nesse estudo.

Vejamos as descrições das variáveis didáticas e os valores que poderão assumir cada uma delas.

4.3.1 Variável 1: Forma de Apresentação dos Problemas

Por diversas vezes, em nossa prática em sala de aula, nos deparamos com situações em que os alunos ao lerem os enunciados de alguns problemas, nos questionavam sobre "o que é para fazer?" ou "não entendi o que está escrito". Presenciamos essas dúvidas em enunciados considerados simples e com indicações diretas e explícitas do que o autor estava solicitando que fosse calculado nos problemas. Em alguns casos, quando solicitávamos aos alunos que lessem novamente o enunciado ou quando nós mesmos líamos o enunciado para eles, já era suficiente para que compreendessem as informações e o pedido contidos no problema.

A partir dessas experiências, consideramos que a forma utilizada para apresentar os problemas aos alunos pode gerar dúvidas quanto à interpretação do mesmo, influenciando na sua resolução. Assim, entendemos que essa forma é uma variável didática a ser considerada nessa pesquisa, podendo assumir, por exemplo, os valores oral e escrito.

Nesta pesquisa, apresentamos os enunciados para os alunos tanto por escrito quanto na forma oral. No caso da última forma, lemos os enunciados dos problemas para os alunos e estes não recebem os textos por escrito. Caso haja necessidade, os enunciados são lidos novamente.

4.3.2 Variável 2: Campo Numérico

Considerando que durante a resolução de alguns problemas os cálculos são realizados oralmente, optamos por escolher dois valores para essa variável didática: números inteiros pequenos e números decimais.

Escolhemos números inteiros pequenos, pois durante a resolução de alguns problemas, os cálculos são realizados oralmente. Quanto aos números decimais, tanto a prática de sala de aula quanto resultados de algumas pesquisas, apontam as dificuldades dos alunos em resolverem operações que envolvem esse tipo de número. Contudo, essa opção nos ajudará a verificar se diante da dificuldade em operar com esse tipo de número, os alunos manifestam sua estratégia de resolução por meio do pensamento qualitativo, fazendo uma previsão da solução, se esta deve ser "maior que" ou "menor que" ou ainda, façam uma descrição da estratégia.

4.3.3 Variável 3: Instrumento Didático

Ao resolver um problema de Matemática, o aluno pode fazê-lo por escrito, utilizando, por exemplo, lápis e papel ou pode realizá-lo mentalmente, sem recorrer a qualquer tipo de instrumento.

Considerando que culturalmente a escola prioriza a escrita e que a linguagem escrita na Matemática pode se constituir como uma dificuldade para os alunos se expressarem, optamos por trabalhar na coleta de dados com a oralidade, não excluindo essa forma escrita. Dessa forma, adotamos o instrumento didático como uma variável didática, cujos valores são: uso do lápis e papel, e sem uso do lápis e papel.

Maiores justificativas sobre o uso da oralidade e da escrita já foram mencionadas anteriormente.

4.3.4 Variável 4: Tipos de Relações entre Grandezas

Essa variável didática refere-se aos tipos de relações entre as grandezas, assumindo valores como grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais e grandezas não proporcionais. Esses valores nos ajudarão a identificar se os alunos conseguem distinguir entre os tipos de relações, se compreendem, por exemplo, que para as diretamente proporcionais, quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta na mesma razão.

A opção pelas grandezas não proporcionais tem justificativa, em primeiro lugar nos estudos de Post, Behr e Lesh (1995), quando afirmam que uma condição importante para identificar o raciocínio proporcional é que o indivíduo tenha a capacidade de diferenciar situações proporcionais das que não possuem tais relações. Em segundo lugar, na verificação de ocorrências da manifestação de regras do contrato didático, como por exemplo, o aluno entender que todo problema de Matemática tem resposta numérica.

4.3.5 Variável 5: Multiplicidade

Estudos realizados por Schliemann e Carraher (1997) constataram que problemas que possuem números de uma mesma grandeza que são múltiplos, são mais facilmente resolvidos por meio da estratégia escalar, enquanto problemas que possuem números de grandezas diferentes que são múltiplos, são mais fáceis de serem resolvidos com a utilização da estratégia funcional.

A partir desse estudo, optamos por escolher como valores para essa variável didática, números de mesma grandeza que são múltiplos, números de grandezas diferentes que são múltiplos e números sem multiplicidade em nenhuma das grandezas.

Os problemas que não envolvem números múltiplos nos auxiliarão na prova da capacidade dos alunos de estabelecerem outros tipos de relações entre as grandezas e se combinam estratégias diferentes para determinarem a solução.

4.4 ESCOLHAS DOS PROBLEMAS

A elaboração da sequência de problemas levou em consideração o objetivo principal dessa pesquisa que busca identificar e analisar as principais estratégias relativas ao raciocínio proporcional, mobilizadas por alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, ao resolverem problemas que envolvam proporcionalidade (direta e inversa) e os que envolvem relações não proporcionais, a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade.

Para tanto, escolhemos problemas do tipo valor omisso, envolvendo grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais e grandezas não proporcionais. Entendemos que problemas desse tipo, por um lado propiciariam aos alunos expressarem suas estratégias de resolução e por outro, nos permitiria identificar indícios do raciocínio proporcional que fossem manifestados por eles.

Com a finalidade de verificar a hipótese de que os alunos possuem conhecimentos prévios e noções intuitivas de proporção que podem ser consideradas pelo trabalho escolar como ponto de partida para o ensino formal do conceito de proporcionalidade e desenvolvimento do raciocínio proporcional, decidimos elaborar a sequência didática, extraindo a maioria dos problemas de livros didáticos que são adotados nas escolas e, outros que compõem a seqüência, de pesquisas e artigos sobre o tema.

Escolhemos problemas cujos enunciados fossem de fácil compreensão pelos alunos, permitindo que os mesmos pudessem agir em busca de uma solução a partir de seus conhecimentos prévios. Essa opção justifica-se pelo fato de estarmos interessados no objetivo principal da pesquisa que é identificar e analisar estratégias relativas ao raciocínio proporcional. Destacamos ainda que o contexto foi considerado um fator importante durante a seleção dos problemas, a fim de evitar dificuldades relacionadas à terminologia e situações não familiares para os alunos. A nosso ver, problemas mais elaborados ou determinados contextos poderiam inibir a ação dos alunos, impedindo-os de resolverem os problemas por diversos fatores, como por exemplo, dificuldades na interpretação dos mesmos ou na realização dos cálculos.

Ressaltamos que os problemas selecionados serão apresentados posteriormente na fase da análise a *priori*.

4.5 ALUNOS PARTICIPANTES

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998), o estudo da proporcionalidade tem seu início no terceiro ciclo do Ensino Fundamental, especificamente no 7º ano, o que justifica nossa escolha por esse ano escolar.

Considerando os objetivos propostos nessa pesquisa, optamos por realizar a experimentação com alunos que ainda não haviam recebido instrução formal sobre proporcionalidade. Essa foi uma questão apresentada à professora de Matemática do 7º ano logo no primeiro contato em fevereiro de 2009.

O fato de termos decidido realizar a experimentação na mesma escola em que trabalhamos gerou um impedimento na realização da coleta de dados no horário regular de aula, no período matutino, pois os nossos horários de aula coincidiam com os da professora de Matemática do 7º ano. Pensamos em procurar outra escola, mas também houve problema quanto a horários e à distância.

Como a escola em que trabalhamos desenvolve um projeto de reforço no contraturno com alunos que apresentam dificuldades em Matemática, procuramos a coordenação do projeto e mostramos nossa intenção em realizar a experimentação com os alunos do 7º ano que faziam parte desse grupo. No entanto, apesar da boa vontade da coordenadora em nos ajudar, não foi possível a realização da experimentação por conta da questão da carga horária e do planejamento a ser cumprido. Porém, compreendendo os objetivos da nossa pesquisa, a coordenação do projeto sugeriu à professora de Matemática do 7º ano a indicação de alguns alunos para a realização do experimento, no contraturno. Como ela estava com um grupo de alunos em recuperação e estes vinham para o reforço no contraturno, propôs que trabalhássemos com eles após sua aula.

Assim, recebemos uma lista com os nomes dos 20 alunos que estavam em recuperação. Todos foram convidados a participar dos encontros, mas somente 15 aceitaram.

No primeiro encontro, duas alunas que não tinham sido indicadas pela professora por não estarem em recuperação, mas ficaram sabendo dos encontros pelas colegas, pediram para participar. Temendo que houvesse muitas desistências, permitimos suas participações. Desse modo, o grupo foi composto por 17 alunos, sendo 11 meninas e 6 meninos, com idades variando entre 12 e 13 anos.

Considerando nosso objetivo, que é realizar a experimentação com alunos que ainda não haviam estudado os conceitos de proporcionalidade, verificamos a situação dos participantes, atentando para que entre eles não houvesse reprovados.

4.6 AS SESSÕES

Foram programadas cinco sessões com os alunos em sala de aula, com duração de 50 minutos cada uma. Os encontros foram realizados semanalmente, às terças-feiras, no período vespertino. A quantidade de sessões foi considerada suficiente para identificarmos as principais estratégias mobilizadas pelos discentes durante a resolução dos problemas propostos.

As sessões foram organizadas levando em consideração os objetivos propostos para cada uma. Dessa forma, na primeira sessão propusemos aos participantes problemas que envolviam somente grandezas diretamente proporcionais. Na 2ª e 3ª sessões, problemas com grandezas diretamente proporcionais e problemas em que não existiam relações proporcionais. A quarta sessão foi organizada com problemas que envolviam grandezas inversamente proporcionais e problemas nos quais não existiam as relações proporcionais e a quinta sessão foi composta por problemas que tinham relações proporcionais (diretamente e inversamente) e os que não apresentavam tais relações.

Na maioria das sessões os problemas foram apresentados oralmente aos alunos, os quais deveriam resolvê-los mentalmente, pois não era autorizado o uso de lápis e papel para a realização dos cálculos. Nas sessões em que os problemas foram apresentados por escrito, houve a liberação do uso do lápis e papel de modo que os cálculos fossem efetuados por escrito. No entanto, em todas as sessões os alunos tinham que expor oralmente para a turma suas estratégias e soluções encontradas. Assim, poderiam apresentar seu raciocínio, julgar os resultados de suas ações e formulações, a partir das interações entre os colegas e com algumas intervenções da pesquisadora.

Os alunos foram orientados a não falarem todos ao mesmo tempo, que deveriam levantar a mão para pedir a palavra e estarem atentos para ouvirem a exposição dos colegas, podendo fazer comentários e questionamentos quando julgassem necessários.

Em todas as sessões foram coletados dados por meio da gravação em áudio das falas dos discentes, das anotações nas pautas de observações e dos registros escritos dos problemas resolvidos por eles. Todos esses dados permitiram construir posteriormente os protocolos de pesquisa.

As descrições específicas referentes a cada sessão, como por exemplo, tempo de duração e número de participantes, serão detalhados posteriormente na fase da experimentação.

5 ANÁLISES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA E RESULTADOS DA EXPERIMENTAÇÃO

Neste capítulo apresentamos, para cada uma das sessões que compõe a sequência didática, as análises a *priori*, as condições em que foi realizada a experimentação, as análises a *posteriori* e as considerações gerais. As análises a *posteriori* foram realizadas com base nos dados coletados no decorrer da experimentação, considerando as interações dos alunos com o *meio* organizado.

5.1 1ª SESSÃO

O objetivo dessa sessão consiste em possibilitar que o aluno compreenda que existe uma relação proporcional entre as grandezas envolvidas e que, nesse caso, quando uma grandeza aumenta, a outra grandeza também aumenta na mesma razão. Sendo assim, todos os problemas envolvem grandezas diretamente proporcionais.

Os números associados às grandezas são inteiros ou decimais, havendo números múltiplos em uma mesma grandeza ou em grandezas diferentes.

Cada um dos problemas é apresentado oralmente aos alunos que, nesta sessão, não podem utilizar lápis e papel. Dessa forma, eles ouvem o enunciado do problema e quando acham que encontraram a solução, a apresentam ao grupo. É solicitado aos alunos que não apresentem somente a solução, mas também a estratégia utilizada para obtenção da mesma.

As estratégias aqui descritas referem-se às que foram apresentadas no capítulo 3. Dessa forma, a fim de facilitar a leitura, mencionaremos nas análises que se seguem somente os nomes das estratégias, em itálico, sem redefini-las nem fazer referências aos autores que as classificaram.

A regra de três é uma estratégia que permite obter a solução de todos os problemas dessa sessão, por meio da comparação de razões equivalentes, apesar de ser considerada como um processo mecânico por Post, Behr e Lesh (1995). No entanto, não esperamos que esse tipo de estratégia seja utilizada pelos alunos, pois nos propomos trabalhar com alunos que ainda não tenham recebido instrução formal sobre o conteúdo de proporcionalidade.

Análise a *priori*

Apresentamos a análise a *priori* de cada problema da 1ª sessão, tomando por base os estudos realizados nas fases anteriores e considerando as possíveis estratégias de resolução.

Problema 1

O carro de Raul consome, em média, 8 litros de combustível a cada 100 km rodados. Para percorrer 300 km, quantos litros de combustível seu carro gastará?[14]

Estudos realizados por Schliemann e Carraher (1997) mostram que esse tipo de problema é mais fácil de ser resolvido utilizando a *estratégia escalar*, pois apresenta no enunciado números de uma mesma grandeza que são múltiplos.

Considerando esse estudo, esperamos que os alunos realizem o problema por meio da *estratégia escalar* utilizando o seguinte raciocínio, com estrutura multiplicativa: "como 300 km são três vezes mais que 100 km, então será preciso três vezes mais combustível, isto é, 3 vezes 8, o que daria 24 litros".

Outra estratégia, também escalar, mas substituindo a multiplicação por adições sucessivas seria: "se o carro percorre 100 km com 8 litros, ele percorre 200 km com 16 litros e percorre 300 km com 24 litros". Apesar do emprego das adições em vez da multiplicação, entendemos, como Schliemann e Carraher (1997), que essa estratégia representa a compreensão de uma relação multiplicativa, pois as transformações que ocorrem em uma grandeza, ocorrem de maneira idêntica na outra grandeza.

A solução do problema também poderá ser obtida por meio da *estratégia funcional*, observando que a cada km corresponde 0,08 litro de combustível. Se queremos percorrer 300 km, serão necessários 300 vezes 0,08 que são 24 litros. No entanto, é possível que os alunos encontrem dificuldade em relação aos cálculos, que têm que ser realizados mentalmente, pois não é permitido o uso de lápis e papel. Uma possibilidade nessa situação é que o aluno, sentindo a dificuldade em realizar os cálculos mentalmente, possa por meio do *pensamento qualitativo*, descrever a estratégia sem, contudo, apresentar uma resposta numérica para o problema. Assim o aluno poderia, por exemplo, formular: "se dividir 8 litros por 100 km,

---

[14] CAVALCANTE, L. G., SOSSO, J., VIEIRA, F. P. *Para saber Matemática*. 7º ano. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2007.p. 164.

determino quanto gasto para percorrer 1 km. Como queremos descobrir quantos litros são gastos para percorrer 300 km, então multiplicamos a quantidade de litros gasta em 1 km por 300”.

Consideramos que se o aluno utilizar alguma destas estratégias estará manifestando o raciocínio proporcional, pois as mesmas envolvem pensamentos dos tipos quantitativo e qualitativo conforme propõem Post, Behr e Lesh (1995) e demonstram a compreensão dos dois tipos de relações entre grandezas (invariância e covariância) abordadas por Lamon (*apud* COSTA, 2007).

Esperamos que ocorram situações adidáticas de ação, formulação e validação (BROUSSEAU, 2008), pois estudos afirmam que o problema proposto é de fácil resolução por determinado tipo de estratégia e o *meio* organizado possibilita ao aluno que apresente sua estratégia oralmente ao grupo, o que pode provocar discussões e trocas de informações.

Problema 2

Uma impressora imprime 50 folhas em 3 minutos. Quantos minutos ela gastará para imprimir 500 folhas?[15]

Esse problema possui a mesma estrutura do problema 1, portanto, espera-se que os alunos possam resolve-lo, com facilidade, utilizando a *estratégia escalar*. Dessa forma, observando que o valor da grandeza folha passou de 50 para 500, ou seja, aumentou em 10 vezes, então a grandeza minutos também aumentará 10 vezes, devendo ser multiplicada por 10. Logo, para imprimir 500 folhas, serão gastos 10x3, isto é, 30 minutos.

Outra forma de resolução, que também é considerada como sendo uma *estratégia escalar,* porém envolvendo adições sucessivas seria: 50 folhas são impressas em 3 minutos, 100 folhas seriam impressas em 6 minutos; 150 folhas em 9 minutos; 200 folhas em 12 minutos; 250 folhas em 15 minutos; 300 folhas em 18 minutos; 350 folhas em 21 minutos; 400 folhas em 24 minutos; 450 folhas em 27 minutos e 500 folhas seriam impressas em 30 minutos.

No entanto, tomando por base um estudo realizado por Schliemann e Carraher (2006), no qual os autores constataram que é mais fácil para uma criança adicionar de 100 em 100 do

---

[15] DANTE, L.R., *Tudo é Matemática*. 7º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2008. p. 199.

que de 50 em 50, mesmo que não tenha um bom domínio do sistema numérico, esperamos que a *estratégia escalar* possa ser empregada com o seguinte raciocínio: se 50 folhas são impressas em 3 minutos, 100 folhas seriam impressas em 6 minutos; 200 folhas em 12 minutos; 300 folhas em 18 minutos; 400 folhas em 24 minutos e 500 folhas em 30 minutos.

O fato de os alunos entenderem que quando uma grandeza aumenta, a outra também aumenta na mesma razão, representa a compreensão da relação entre as duas grandezas, o que segundo Lamon está associado às noções de invariância e covariância e expressam indícios do raciocínio proporcional.

Em relação à *estratégia funcional*, é possível que eles encontrem dificuldades para realizarem os cálculos mentalmente e procurem então empregar o pensamento qualitativo, somente enunciando a estratégia que iriam utilizar para resolver o problema. Uma formulação possível, passando pela redução à unidade seria: "determina-se o tempo que corresponde à impressão de uma folha e depois multiplica esse valor por 500, encontrando assim o tempo que corresponde à impressão das 500 folhas". Caso sejam realizados os cálculos propostos nessa estratégia, a cada 0,06 minutos (resultado do quociente de 3 por 50) corresponderia à impressão de uma folha, e assim, para imprimir 500 folhas seriam necessários 30 minutos (500 x 0,06).

<u>Problema 3</u>

Tatiana comprou 8 metros de tecido por R$ 480,00. Quanto vai pagar por 10 metros do mesmo tecido?[16]

Nesse problema, há números de grandezas diferentes que são múltiplos. Estudos realizados por Schliemann e Carraher (1997) afirmam que esse tipo de problema é mais facilmente resolvido com o uso da *estratégia funcional.*

Considerando esse estudo e a vivência dos alunos com relação a compras, prevemos que eles resolvam o problema por meio da *estratégia funcional*, fazendo a redução à unidade, da seguinte forma: "a cada 1 metro do tecido paga-se R$ 60,00. Logo, para encontrar o preço de 10 metros de tecido basta multiplicar 10 por 60 e obter R$ 600,00 como solução."

---

[16] IEZZI, G., DOLCE, O., MACHADO, A. *Matemática e realidade*. 7º ano. 4. ed. São Paulo: Atual, 2000. p. 227.

Também podem utilizar essa mesma estratégia fazendo uma formulação sem mencionar o preço de 1 metro de tecido. Assim, poderão, por exemplo, explicitar o seguinte raciocínio: “observamos que R$ 480,00 são 8 vezes 60; então, o preço de 10 metros é dado por 10 vezes 60, ou seja, R$ 600,00.” Entendemos que nesse raciocínio o aluno expressaria a sua compreensão das relações entre as duas grandezas e que elas variam conjuntamente (covariância).

Uma dificuldade prevista estaria relacionada aos cálculos a serem realizados ao utilizar a *estratégia escalar*, porque os números dados na grandeza metros não são múltiplos. Entretanto, é provável que os alunos percebam que de 8 metros para 10 metros, faltam 2 metros. Assim, eles podem calcular o quanto se pagaria por 2 metros. Para tanto, divide-se 8 metros por 4, como também R$ 480,00 por 4, donde resulta que 2 metros custam R$ 120,00. Logo, o valor a ser pago por 10 metros (8m + 2m) seria R$ 600,00 (480,00 + 120,00).

Problema 4

Uma foto de largura 1,5 cm e comprimento 2,6 cm foi ampliada. Se a nova foto for feita com largura de 4,5 cm, qual será a medida de seu comprimento?[17]

Entendemos que ao propor esse problema, o autor tenha considerado as condições necessárias para que exista a proporcionalidade, ou seja, que a foto ampliada continue mantendo o mesmo formato da original.

Esse problema possui o mesmo padrão dos problemas 1 e 2, com números de mesma grandeza que são múltiplos. Entretanto, fizemos a opção pelos números decimais com o objetivo de analisar se esse tipo de número influenciaria de alguma maneira no raciocínio proporcional dos alunos, pois pesquisas mostram dificuldades dos discentes em operar com os decimais.

Temos expectativas de que eles não tenham dificuldades em relação ao raciocínio para formular uma estratégia, mas que as dificuldades apareçam em relação aos cálculos com os números decimais. Assim como nos problemas 1 e 2, uma estratégia esperada é a *escalar*, em que o aluno ao perceber que a largura aumentou 3 vezes, entenda que o comprimento também deve aumentar 3 vezes. Dessa maneira, fazendo 3x2,6 obtenha o comprimento 7,8 cm.

---

[17] DANTE, L.R., *Tudo é Matemática*. 7º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2008. p. 207 (adaptado).

Outra maneira de resolver o problema seria por meio da *estratégia funcional.* Contudo, entendemos que essa seja uma estratégia difícil para eles, em virtude da não-utilização de lápis e papel para a realização dos cálculos e dos números de grandezas diferentes não serem múltiplos.

Problema 5

Desenvolvendo sempre a mesma velocidade, Luisinho percorre de bicicleta 1400 metros em 7 minutos. Quantos metros vai percorrer em 30 minutos? [18]

Consideramos que o autor tenha proposto este problema observando as condições que envolvam relações proporcionais, como por exemplo, admitir que o indivíduo não tenha cansado e nem parado durante o percurso.

Assim como no problema 3, esse problema apresenta números de grandezas diferentes que são múltiplos, o que nos leva a considerar que os alunos procurem resolvê-lo, principalmente, por meio do emprego da *estratégia funcional*.

É esperado nesse contexto que o aluno perceba que aumentando o tempo, a distância a ser percorrida também aumente na mesma razão. Utilizando a *estratégia funcional*, com passagem pela unidade, tem-se que a cada minuto são percorridos 200 metros. A partir desse resultado, calcula-se a distância percorrida em 30 minutos, multiplicando 30 por 200, o que resulta em 6000 metros.

É provável que os participantes tenham dificuldades em utilizar a *estratégia escalar* para resolver esse problema porque os números de mesma grandeza não são múltiplos. Contudo, pode ocorrer de empregarem a *estratégia escalar*, utilizando adições sucessivas e irem somando 7+7+7+7 até obterem a distância percorrida em 28 minutos, que seria 5600 m e depois tentarem determinar o quanto ele andaria em 2 minutos, para completar os 30 minutos. Com esse procedimento, terão que fazer a redução à unidade, dividindo 1400 por 7 e, obtendo 200 m por minuto, multiplicar esse valor por 2, encontrando 400 m. Em seguida, adicionar 5600 com 400 para obter os 6000 metros percorridos em 30 minutos.

[18] IEZZI, G., DOLCE, O., MACHADO, A. *Matemática e realidade*. 7º ano. 4. ed. São Paulo: Atual, 2000. p. 227.

Experimentação

A 1ª sessão durou 38 minutos e contou com a presença de 15 alunos. Todos os problemas foram apresentados aos alunos oralmente pela pesquisadora, sendo que após a leitura de cada um, havia o tempo para as apresentações e discussões das estratégias. Como proposto na análise a *priori*, os participantes resolveram os problemas oralmente, sem o recurso do lápis e papel.

Verificamos durante a realização da sessão que a maioria dos alunos participou das discussões ocorridas no grupo. Houve momentos em que vários queriam falar ao mesmo tempo, o que exigiu um gerenciamento de nossa parte, no sentido de organizar e acompanhar a participação de cada um. Foi solicitada a participação dos poucos alunos que não se manifestaram, sendo que alguns ficavam receosos em se expor por acharem que sua estratégia estava inadequada.

Ressaltamos que em todas as sessões apresentamos a análise a *posteriori* descrevendo, inicialmente, as estratégias elaboradas pelos alunos em cada problema e, na sequência, relatamos as considerações gerais acerca dos resultados obtidos em cada sessão. Destacamos ainda que os alunos são identificados por duas letras maiúsculas e a pesquisadora pela letra P e que as transcrições foram fiéis às falas dos participantes, o que justifica falhas em alguns aspectos linguísticos.

Análise a *posteriori*

A fim de facilitar a compreensão das análises apresentaremos novamente, em todas as sessões, os enunciados dos problemas.

<u>Problema 1</u>

O carro de Raul consome, em média, 8 litros de combustível a cada 100 km rodados. Para percorrer 300 km, quantos litros de combustível seu carro gastará?

Após a leitura do problema pela pesquisadora, uma aluna se manifestou e a pesquisadora fez interferências a fim de compreender o raciocínio utilizado pela mesma.

> LI: *É 24.*
> P: *Como você encontrou 24?*
> LI: *Eu multipliquei 8 vezes 3.*
> P: *Por que 8 vezes 3?*
> LI: *Por que é assim... com 8 litros ele anda 100 km e 100 vezes 3 é 300. Então 8 vezes 3 é 24.*

Identificamos, por meio da *estratégia escalar* utilizada por essa aluna, um raciocínio proporcional, pois ela observa a relação entre os valores da grandeza km, determina a razão, no caso 3, e a emprega (por meio de uma relação multiplicativa) para encontrar o valor da grandeza litros, que era desconhecido. Nesse caso, o raciocínio empregado na estratégia *escalar* proposta pela aluna demonstra a compreensão de que as grandezas se relacionam e variam conjuntamente (covariância) como propõe Lamon (*apud* COSTA, 2007).

Houve a ocorrência de uma situação adidática de validação, onde MA tenta convencer a aluna JU e os demais de que sua estratégia leva a uma solução correta. MA também faz uso da estratégia escalar, porém opera com adições sucessivas, ao contrário do que fez a aluna LI. Vejamos:

> JU: *Eu acho que é 8 x 300. Não é 300 que ele quer andar?*
> MA: *Não. É 24, porque é 8 litros pra cada 100 km. É como se fosse 3 "oitos", porque é 300, entendeu? No primeiro 100 km é 8, no segundo mais 8 e mais 8. Daí são 24 litros.*

Pela fala da aluna LE[19] identificamos que ela já conhecia o algoritmo da regra de três. Essa não era uma estratégia prevista, pois tínhamos escolhido um grupo de alunos que ainda não havia estudado proporcionalidade e que, segundo a professora de Matemática do 7º ano, isso só ocorreria no bimestre subsequente. No entanto, procuramos observar a reação do grupo diante da estratégia apresentada e fizemos alguns questionamentos à aluna e ao grupo:

> LE: *Eu acho que é 300 vezes 8 dividido por 100... Dá 24.*
> P: *Por que seria 300 vezes 8 dividido por 100?*
> LE: *Porque seria mais ou menos a regra de três. Se com 8 litros ele anda 100 km, aí no final descobre quanto é pra andar 300 km.*
> P: *Vocês concordam com a fala da LE?*
> MR: *vai percorrer 300 km... a cada 100 km consome 8 litros... aí 100 km pra dá 300 km , multiplica por 3, então multiplica 8 vezes 3 que dá 24.*
> *P: A resposta é essa mesma. A cada 100 km, nós temos o consumo de 8 litros, então para percorrer 300 km, o consumo será de 24 litros.*

---

[19] Verificamos que LE era uma das alunas que não tinham sido indicadas pela professora por não estarem em recuperação e que ela já havia estudado proporcionalidade em um cursinho que realizara anteriormente.

O grupo demonstrou não compreender a estratégia formulada por LE, por isso foi solicitada novamente a explicação de sua estratégia; a aluna alegou que não sabia explicar, mas garantia que aquelas eram as “contas” e afirmava que a solução era 24. Nessa situação, evidenciamos o uso da regra de três desprovido de compreensão, conforme afirmam Post, Behr e Lesh (1995).

Enquanto LE usando a regra de três como estratégia, parece estar presa à mecanização do algoritmo, MR apresenta um raciocínio organizado demonstrando a compreensão da invariância e covariância por meio da estratégia apresentada.

A partir das discussões que ocorreram durante a resolução desse problema, notamos que o *meio* propiciou retroações aos alunos, permitindo-lhes refletir sobre suas ações e formulações.

Após observarmos que a solução proposta havia sido validada por vários alunos, apresentamos a confirmação de que estava correta, porém, sem fazer institucionalização explícita sobre as relações proporcionais existentes entre as grandezas.

<u>Problema 2</u>

Uma impressora imprime 50 folhas em 3 minutos. Quantos minutos ela gastará para imprimir 500 folhas?

Logo após a leitura do problema, observamos a ocorrência da situação de ação por parte de alguns alunos, que inicialmente apresentavam somente as soluções numéricas, sem descrever a estratégia utilizada. Houve então, necessidade de intervenção verificada no trecho do protocolo a seguir:

> GI: *10 minutos..*
> JU: *30 minutos. Meia hora.*
> P: *Como você pensou? Qual seria o cálculo?*

O aluno GI não conseguiu explicar sua estratégia. Uma hipótese para a solução apresentada é que o mesmo tenha realizado a divisão de 500 por 50. Para Barreto (2001), esse é um tipo de erro em que o aluno realiza uma divisão entre os valores de uma mesma grandeza e o considera como solução do problema, mostrando a não-compreensão da existência da relação estabelecida entre as duas grandezas.

Já a aluna JU apresentou a sua estratégia, a qual identificamos como sendo a *estratégia escalar* prevista na análise a *priori*.

> JU: *Eu fiz assim... eu peguei quantas vezes o 50 cabe em 500, aí deu 10 e eu multiplique 3 por 10. Deu 30 minutos.*

A formulação apresentada dá evidências de que a aluna compreende a relação existente entre as duas grandezas do problema, percebendo que se uma aumenta, a outra também aumenta na mesma razão, o que caracterizamos como uma manifestação do raciocínio proporcional, segundo Lamon (*apud* COSTA, 2007) e Post, Berh e Lesh (1995).

Como o *meio* foi organizado para permitir a apresentação e a discussão das estratégias dos alunos no grupo, ocorreram diversas interações entre eles e algumas retroações desse *meio*, fazendo-os refletir sobre suas formulações. Registramos a ocorrência do debate entre alguns alunos:

> AD: *O certo não seria pegar, se 50 folhas é 3 minutos, então não era certo pegar 3 minutos vezes 500 folhas que dá 1500 minutos?*
> LU: *Não. Por 50. Não é 50?*
> GI: *Não.*
> LE: *Não. Porque a cada 3 minutos seria 50 folhas. Então 50 x 3 que dá 150 e divide por 5 que dá 30 minutos.*

Identificamos na formulação do aluno AD que o mesmo cometeu um dos erros constatados por Barreto (2001), que é apresentação do produto entre os extremos como solução do problema. Vários alunos discordaram de sua solução, porém somente LE formulou uma estratégia procurando validá-la junto aos colegas. No entanto, quando solicitamos que explicasse sua estratégia, a mesma não conseguiu justificar o porquê dessas operações. Assim como procedeu no problema anterior, somente argumentou que eram essas contas por causa da regra de três. A esse argumento, vários alunos reagiram, dizendo: *"E lá vem com regra de três...."*.

Entendemos que os colegas desprezaram o algoritmo apresentado pela aluna LE por não compreenderem no mesmo as relações entre as grandezas, parecendo-lhes algo desprovido de significado, o que não ocorreu diante da *estratégia escalar* proposta pela aluna JU. Optamos por não intervir em relação à regra de três por entendermos que seria uma intervenção precoce naquele momento. Tínhamos também a expectativa de que no decorrer da sessão, a aluna que a estava utilizando, pudesse compreender o significado das operações que realizava, a partir das formulações dos colegas.

Fizemos questionamentos a fim de verificarmos se validariam as soluções corretas apresentadas; a maioria validou. Assim, confirmamos que a resposta estava correta sem, contudo, fazermos comentários sobre as estratégias.

Não foi observada a ocorrência da *estratégia funcional,* nem a manifestação do pensamento qualitativo.

<u>Problema 3</u>

Tatiana comprou 8 metros de tecido por R$ 480,00. Quanto vai pagar por 10 metros do mesmo tecido?

Conforme constatado por Schliemann e Carraher (1997) e previsto na análise a *priori*, vários alunos resolveram o problema utilizando a *estratégia funcional*, fazendo a redução à unidade. Mesmo antes de realizarem os cálculos alguns alunos já descreviam sua estratégia para os colegas, o que segundo Post, Behr e Lesh (1995) mostra indícios de um pensamento qualitativo. Vejamos, por exemplo, a estratégia apresentada por MR:

> MR: *Tem que descobrir quanto é o preço de 1 metro e depois descobrir quanto é 10 metros.*

Assim como na resolução dos problemas anteriores, o *meio* permitiu a interação entre os alunos e destes, com o problema. Após a fala de MR, outros se manifestaram, com procedimentos incorretos e corretos, conforme podemos verificar nos trechos do protocolo transcrito abaixo:

> FE: *Divide 8 por 480....(pausa).*
> LE: *10 x 480 : 8 que deu 600.*
> LA: *Dividiria 8 por 480...ah...(pausa).*
> LU: *Divide 480 por 8, acha 1 metro e multiplica por 10 e vai dá 600.*

A aluna LE continuou apresentando a resolução do problema empregando a regra de três, enquanto outros alunos, como LU, utilizaram a *estratégia funcional,* mostrando compreensão das relações entre as grandezas, como ocorreu diante da estratégia incorreta proposta por um participante:

> MR: *Como é 10 metros, 8 é 480, aí seria 480 x 2 que daria 960.*
> P: *O que vocês acham da explicação do MR?*
> LU: *Isso aí é 16 metros.*
> MR: *Não. 480 é 8 metros, se fosse 10 metros, aí 8, 9, 10. Dá 2, aí 480 multiplica por 2.*
> LU: *Não tem sentido. Tá errado.*
> P: *O que não tem sentido?*
> JU: *Ele tá errado porque é 8 metros, 9 e 10, fez 2. Ele multiplicou 2 vezes 480. Tem alguma coisa errada. Não tem cabimento.*
> MT*: A dele tá errada porque 8 metros é 480, se ele fizer 2 vezes 480 é como se ele tivesse somado mais 8 metros.. É improvável.*
> P*:MR, você entendeu o que o MT falou?*
> MR*: Não. É 960.*
> MT*:É como se você tivesse somado mais 8 metros. É 16 metros. E é só mais 2 metros.*
> P*: E aí MR?*
> MR*: O branquinho está certo.*

Mesmo com uma estratégia incorreta, MR tentou validar sua solução junto aos colegas, que não se deixaram convencer e ainda apontaram onde acharam que estava o erro. JU e MT perceberam que MR estava calculando o preço do dobro de tecido.

Ao tentarem mostrar a MR que sua resolução estava incorreta, alguns alunos apresentaram outras estratégias, além das já mencionadas, como por exemplo, a proposta por GI:

> GI: *480 dividido por 8 vai dar 60, daí 8 pra 10 é 2. Multiplica 60 por 2 que é 120 e soma 120 com 480 que dá 600.*

Entendemos que esse aluno utiliza a *estratégia da redução à unidade* juntamente com a *estratégia escalar*, pois percebe a variação que ocorre na grandeza metros. O mesmo demonstra possuir um senso de covariação, quando observa que as duas grandezas devem variar conjuntamente, conforme constatamos em Lamon (*apud* COSTA, 2007) e Post, Behr e Lesh (1995).

Com a finalidade de verificar a compreensão dos alunos quanto às estratégias e soluções apresentadas, fizemos alguns questionamentos ao grupo:

> P*: E os demais o que acham da ideia do MT?*
> ALUNOS*: Certo.*

> P*: Então qual seria o preço de 10 metros?*
> ALUNOS*: 600.*
> P*: O que acham do resultado?*
> ALUNOS*: Certo.*
> P*: Quantas ideias diferentes tivemos?*
> ALUNOS*: Três.*
> P*: E as três ideias...*
> ALUNOS*: Com o mesmo resultado. Certas.*
> MR*: E a do preto que deu errado.*
> P*: Por que será que a ideia do MR não estava certa?*
> FE*: Ele somou 8m com 8m.*
> LA*: Ele tinha que somar os 2 m que faltavam e não os 8 m. Seria 60 mais 60, 120.*

A maioria dos alunos validou a solução apresentada e identificaram as três estratégias que foram propostas. Foi possível ainda verificar a observação que MR fez sobre sua estratégia e as argumentações dos colegas quanto à formulação incorreta.

Constatamos que, com exceção da regra de três, as outras estratégias apresentadas foram compreendidas e validadas por eles.

Problema 4

Uma foto de largura 1,5 cm e comprimento 2,6 cm foi ampliada. Se a nova foto for feita com largura de 4,5 cm, qual será a medida de seu comprimento?

Após a leitura do enunciado desse problema, os alunos solicitaram, além da representação da figura, lápis e papel para a realização dos cálculos. Quanto à figura, desenhamos um retângulo no quadro-negro e em relação ao lápis e papel, não foi autorizada a sua utilização.

Apesar da dificuldade de alguns alunos em relação aos cálculos com números decimais, estes conseguiram formular uma estratégia de resolução para o problema, como por exemplo, FE:

> FE: *Eu não cheguei ao resultado final, mas eu acho que tem que a largura vai ser 4,5 e 1,5 cm pra 4,5 cm dá 3, aí 3 vezes o comprimento.*

Essa aluna demonstrou, por meio da *estratégia escalar*, possuir uma compreensão das relações estabelecidas entre os valores de uma mesma grandeza e entre valores de grandezas diferentes, o que segundo Lamon (*apud* COSTA, 2007), indica uma forma de pensar proporcionalmente e, nesse caso, utilizando um pensamento qualitativo.

Devido às interações promovidas pelo *meio*, outra aluna complementou a resposta de FE:

> LE: *É 7,8 cm. Eu pensei da mesma maneira.*

Vários alunos expuseram uma solução incorreta, oriunda de uma estratégia que envolvia subtração e adição entre os valores das grandezas largura e comprimento. Considerando que esse tipo de erro não ocorreu na resolução dos problemas anteriores, levantamos a hipótese de que a não-compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas, esteja vinculada ao contexto no qual se inseriu o problema, pois como verificamos em Magalhães (*apud* SCHLIEMANN e CARRAHER, 1997), o contexto em que se apresentam os problemas se constitui em um fator de dificuldade para a aplicação do conceito de proporcionalidade. Segundo esse autor, os alunos não conseguem fazer a 'transferência' do conceito aprendido em um contexto, para outro que não lhe seja familiar.

Os trechos do protocolo apresentados a seguir ilustram as soluções incorretas apresentadas:

> GI: *Não tem que saber primeiro a área?*
> P: *O que vocês acham?*
> MT: *Não. O novo comprimento não seria 5,6?*
> P: *Como você está pensando?*
> MT: *1,5 e 2,6 vai dá tanto, a mesma coisa vai dar 4,5 e somando com as casas que vai até o 2,6 vai dá esse número 5,6.*
> MA: *A diferença das duas é 1,1 cm, se ali (largura) seria 4,5cm, ali embaixo (comprimento) seria mais 1,1 cm.*
> LA: *Eu pensei quase igual a MA. Se a diferença é 1,1, você ia somar com 4,5, então dá 5,6.*
> AD: *A largura é 4,5 e como a diferença é 1,1, então pega a largura e soma com o comprimento.*
> JU: *Eu acho que o pensamento da AD está um pouco errado, porque a diferença é 1,1, a largura vai ser 4,5...foi multiplicada por 3, então não pode ser 1,1, vai ter que ser 3x1,1 para dar o resultado lá de baixo, o comprimento.*

Observamos que, para esses alunos, a dificuldade não estava relacionada à realização de operações com os números decimais, e sim com o raciocínio proporcional, pois não compreenderam as relações entre as grandezas envolvidas no problema. Porém, a partir das retroações recebidas do *meio*, foram refletindo sobre suas ações e alguns perceberam a relação estabelecida com os valores da grandeza largura, elaborando uma solução com o emprego da *estratégia escalar,* como prevista na análise a *priori*.

Entretanto, assim como constatou Costa (2007), também verificamos que alguns alunos apresentavam grande dificuldade no momento da explicação do pensamento utilizado durante a resolução do problema proposto ou quando eram motivados a justificar a resposta apresentada. Foi necessário, portanto, algumas intervenções, a fim de compreender os raciocínios expostos, como ilustrado no protocolo seguinte:

> MT: *O valor vai triplicar.*
> P: *O que está triplicando, MT?*
> MT: *A largura.*
> P: *Se triplicou a largura, o que vai acontecer?*
> MT: *Vai ficar 7,8.*
> P: *E de onde aparece esse 7,8?*
> MT: *2,6 x 3.*

Outros já conseguiram formular uma estratégia mais elaborada e procuraram validá-la junto aos colegas, tentando convencer aqueles que ainda não haviam compreendido as relações existentes entre as grandezas. O protocolo a seguir retrata algumas das discussões entre os alunos:

> LE: *Como 1,5 é 4,5 então tem que multiplicar 2,6 por 3 que dá 7,8.*
> MT: *O que eu falei.*
> MR: *Pra chegar no 4,5 teve que triplicar o 1,5, triplicou o tamanho da foto, então tem que triplicar junto o 2,6 que dá 7,8.*
> MF: *1,1 eu entendi que ela ia somar com o outro e 1,1 mais 1,5 não vai dar 4,5. Como você chegou a 4,5 pra largura?*
> JU: *A professora falou.*
> P: *AD, o que você acha?*
> AD: *Não concordo.*
> LU: *Não tem nada a ver esse 1,1. Se vai aumentar a largura, tem que aumentar o comprimento, fazer 1,5 chegar em 4,5, então você tem que usar esse 3 e aumentar e fazer 3x2,6 que dá 7,8.*
> AD: *E de onde saiu esse 3?*
> ALUNOS: *Ah.....*
> P: *Deixe o MT falar com a AD.*
> MT: *Ele deu 4,5, ele triplicou 1,5, ou seja, tem que triplicar o comprimento, ou seja, 2,6,vai dar 7,8. Tem que triplicar tudo.*
> AD: *Não concordo.*

As discussões no grupo colaboraram para que alunos, como MT, mudasse sua estratégia. Inicialmente, ele apresentou uma estratégia incorreta que envolvia subtração e adição entre os valores das grandezas e, em seguida, formulou uma solução correta utilizando a *estratégia escalar* mostrando a compreensão das relações (invariância e covariância), conforme afirma Lamon (*apud* COSTA, 2007). Por outro lado, verificamos que as explicações dos colegas a construção da figura no quadro não foram suficientes para que a aluna AD compreendesse as relações envolvidas no problema.

Conforme previsto na análise a *priori*, nenhum aluno resolveu o problema utilizando a *estratégia funcional*.

<u>Problema 5</u>

Desenvolvendo sempre a mesma velocidade, Luisinho percorre de bicicleta 1400 metros em 7 minutos. Quantos metros vai percorrer em 30 minutos?

Na resolução desse problema, os primeiros alunos a se manifestarem apresentaram soluções incorretas, não percebendo os seus erros. Preocuparam-se mais em descrever as operações que tinham realizado do que explicar as estratégias utilizadas, mesmo após algumas intervenções. Observamos que eles apenas apresentavam um resultado numérico e não verificavam se este tinha coerência ou não com o problema. Exemplificamos esses fatos com trechos do protocolo:

> MA: *2400 minutos.*
> P: *Como você raciocinou para encontrar esse resultado?*
> MA: *Eu fiz 30 vezes 1400.*
> CL: *É 1400 vezes 7dividido por 30.*
> MA: *É 3200, porque 4 vezes 7é 28, e é 30, eu multipliquei por 4, aí somei 1400 mais 1400 mais 1400 mais 1400 que deu 6200, aí eu multipliquei 1400 por 4, que foi 4. Aí deu 6000.*
> CL: *1400 vezes 7 é igual a 9800 e 9800 dividido por 30 deu 6000.*

Consideramos que a incapacidade desses alunos em estabelecer relações entre grandezas e a compreensão parcial dessas relações são exemplos de dificuldades relacionadas ao raciocínio proporcional. Por outro lado, entendemos que essas ações podem estar vinculadas às regras do contrato didático que possam ter vivenciado anteriormente, acreditando que em matemática resolve-se um problema efetuando-se operações e que sua tarefa é encontrar a boa operação e efetuá-la corretamente.

Na posição de mediadora das discussões e a fim de provocar reflexões sobre as ações, levantamos algumas questões, o que permitiu que alguns formulassem estratégias que levaram à solução correta do problema:

> P: *Vamos analisar as ideias que apareceram.*
> MF: *Eu peguei 1400 e dividi por 7 que deu 200 e multipliquei por 30 que deu 6000 metros.*
> P: *O que significa 1400 dividido por 7?*
> LU: *1400 foi o que andou em 7 minutos, aí dividindo por 7 dá 200 metros, que é o que ele andou em 1 minuto. Aí multiplica por 30 para saber o que ele anda em 30 minutos.*
> CL: *1400 vezes 7 dá 9800 aí divide por 30 e dá 6000.*
> P: *O que vocês acham dessa estratégia?*
> MF: *É melhor dividir primeiro, desse jeito é mais difícil.*
> P: *O que significa 1400 vezes 7?*
> CL: *Dá 9800. Aí divide por 30, dá 6000.*
> P: *Vocês concordam?*
> GI: *Essa conta está errada. Eu acho que ela está calculando para 49 minutos e não para 30 minutos. Ela multiplicou 1400 por 7.*
> FE: *A conta 1400 vezes 7 não dá 9800. Dá 98000. Aí dividido por 30 dá 6000.*
> P: *Vocês concordam com a FE?*
> LU: *Está estranho 1400 vezes 7 dá 98000. Acho que é 9800. Está muito alto.*
> MF: *Dá 9 mil e pouquinho.*

MF e LU utilizaram a *estratégia funcional*, reduzindo à unidade e depois efetuaram a multiplicação para encontrar a solução final do problema. No caso de LU, ele detalhou mais a sua explicação, com a intenção de validá-la junto aos colegas e ainda fez uma intervenção junto a FE quanto ao resultado apresentado pela mesma. Entendemos que esses alunos possuem um senso de covariação, como afirma Lamon (*apud* COSTA, 2007), percebendo que as grandezas variam conjuntamente.

As alunas CL e FE, no entanto, insistiram em uma estratégia incorreta, mesmo após outros colegas apresentarem uma solução diferente das propostas por elas, e não percebiam o erro na divisão que realizavam. O erro só foi percebido pelo aluno GI, que ainda observou corretamente que elas estavam calculando a distância relativa a um tempo de 49 minutos.

Observamos nesse problema, que o valor (1400) considerado grande pelos alunos, se constituiu em um fator de dificuldade na realização do cálculo mental, o que entendemos que não tenha interferido no raciocínio proporcional dos mesmos. Como previsto na análise a *priori*, nenhum aluno utilizou a *estratégia escalar*, o que parece confirmar a hipótese de Silvestre (2006), de que a escolha do aluno por uma determinada estratégia depende de alguns fatores, como por exemplo, o conhecimento do mesmo sobre números e sua capacidade de interpretar e resolver problemas.

Considerações gerais sobre a 1ª Sessão

Os resultados obtidos na aplicação dessa sessão evidenciam que os alunos conseguem perceber as relações estabelecidas entre as grandezas envolvidas nos problemas, e nesse caso, entre as grandezas diretamente proporcionais, mesmo antes do estudo formal sobre o conceito de proporcionalidade.

Em relação às estratégias adotadas pelos alunos, constatamos que foram utilizadas as previstas na análise a *priori*. No entanto, observamos que houve a predominância da *estratégia escalar*, tanto envolvendo relações aditivas quanto multiplicativas entre os valores das grandezas.

A *estratégia funcional* foi empregada somente para resolverem os problemas 3 e 5. Entendemos que essa escolha se justifica em função do valor da variável multiplicidade, que para esses problemas assumia o valor de números múltiplos em grandezas diferentes. Da mesma forma, a opção pela *estratégia escalar* nos outros problemas pode ter sido influenciada por apresentar números de uma mesma grandeza que são múltiplos.

Por meio das estratégias utilizadas, verificamos que eles possuem, como afirmam Post, Berh e Lesh (1995), um senso de invariância e covariância, o que para esses autores, representam indícios de um raciocínio proporcional. Consideramos que mesmo usando uma linguagem empírica, alguns conseguiram expressar o raciocínio proporcional. Entendemos que o *meio* proposto, utilizando a oralidade, contribuiu para as discussões e provocou retroações imediatas, colaborando para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos discentes.

Constatamos a utilização da estratégia da regra de três por uma aluna e verificamos que a mesma empregou o algoritmo de maneira correta, porém de forma mecânica. Apesar das diversas solicitações para que explicasse sua estratégia e das retroações dadas pelo *meio*, não observamos por parte dela, demonstração de compreensão das operações que realizava como manifestação do raciocínio proporcional.

Nessa sessão, optamos por não fazer nenhuma institucionalização em relação às grandezas diretamente proporcionais, pois não queríamos influenciar as estratégias a serem utilizadas pelos alunos na sessão seguinte. Assim, assumimos o papel de mediadora das discussões, fazendo intervenções que lhes permitissem vivenciar momentos adidáticos e refletir sobre os resultados e estratégias apresentados, com a finalidade de validarem ou refutarem as soluções.

5.2 2ª SESSÃO

Na segunda sessão o objetivo é verificar se os alunos são capazes de distinguir situações proporcionais das não proporcionais e como reagem na busca de soluções para as mesmas. Para tanto, os problemas selecionados envolvem grandezas diretamente proporcionais e problemas em que não existem relações proporcionais. Além da variável tipo de relações entre grandezas, as variáveis didáticas instrumento didático e multiplicidade terão alterações nos seus valores. Porém, para todos os problemas, a variável forma de apresentação assumirá o valor oral e a variável campo numérico, o valor inteiro.

Análise a *priori*

Problema 1

Um padeiro gasta 20 kg de farinha para fabricar 500 pãezinhos. Quantos pãezinhos ele pode fabricar com 50 kg de farinha ? [20]

Para resolver esse problema, os alunos não podem utilizar lápis e papel. A fim de verificar se reinvestem os conhecimentos adquiridos na sessão anterior, apresentamos mais um problema que envolve números de grandezas diferentes que são múltiplos. Assim esperamos que os discentes utilizem a *estratégia funcional* pelos mesmos motivos que explicamos em problemas anteriores. Dessa forma, uma solução empregando esse tipo de estratégia e passando pela unidade, seria a seguinte: com cada quilo de farinha fabrica-se 25 pães. Logo, com 50 kg é possível fabricar 1250 pães (50 x 25).

Entendemos que a *estratégia funcional* pode ser utilizada de outra maneira, também com redução à unidade, porém calculando a quantidade de farinha em cada pão. Para tanto, basta realizar a divisão de 20 por 500, obtendo 0,04 kg. Logo, para encontrar a quantidade de

---

[20] CAVALCANTE, L. G., SOSSO, J., VIEIRA, F. POLI . *Para saber Matemática*. 7º ano. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2007. p.165.

pãezinhos a serem fabricados com 50 kg, efetua-se a divisão de 50 por 0,04. Assim, encontra-se 1250 pãezinhos. É esperado que os alunos abandonem essa estratégia e procurem outra, devido à provável dificuldade em realizar cálculos oralmente com números decimais. Porém, é possível que os alunos apenas descrevam essa estratégia, utilizando o pensamento qualitativo, não realizando os cálculos.

Prevemos que os alunos possam fazer opção pela *estratégia escalar* e, realizando adições sucessivas, obtenha a seguinte solução: com 20 kg de farinha fabrica-se 500 pãezinhos e com 40 kg de farinha fabrica-se 1000 pãezinhos. Para completar os 50 kg, faltam 10 kg. Faz-se então necessário descobrir quantos pãezinhos podem ser fabricados com 10 kg. Para tanto, divide-se 20 kg por 2, o que implica em dividir também 500 por 2, resultando em 250 pãezinhos. Assim, com 50 kg de farinha fabrica-se 1250 pãezinhos (1000 + 250).

Entendemos que se adotarem qualquer uma das estratégias descritas para resolverem esse problema, estarão manifestando o raciocínio proporcional, pois segundo Lamon (*apud* COSTA, 2007), o raciocínio proporcional está relacionado à habilidade de fazer análises conscientes da relação entre quantidades, o que é perceptível quando se analisa argumentos e explicações sobre as relações proporcionais.

Problema 2

Se um jogador de futebol fez 2 gols em 3 jogos, quantos gols ele fará em 6 jogos?[21]

Assim como no problema 1 desta sessão, não será disponibilizado lápis e papel para os alunos.

Para Post, Behr e Lesh (1995), uma condição importante para identificar o raciocínio proporcional em uma pessoa é que a mesma tenha a capacidade de diferenciar situações proporcionais das que não possuem tais relações. Isso justifica a escolha desse problema nessa sessão.

Consideramos como resposta correta para esse problema a afirmação de que não é possível prever quantos gols o jogador fará, pois não existe relação proporcional entre as grandezas gols e jogos.

Entretanto, é esperado que o aluno não consiga, num primeiro momento, distinguir a situação proporcional da não proporcional e apresente uma solução, tomando por base um

---

[21] DANTE, L.R., *Tudo é Matemática*. 7º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2008. p.199.

raciocínio que envolva grandezas diretamente proporcionais. Sendo assim, uma solução a ser considerada é a seguinte: como o número de jogos dobrou, isso significa que o número de gols também deve dobrar. Logo, a resposta seria 4 gols.

Outra possibilidade de erro estaria vinculada às regras do contrato didático, que segundo Silva (2008), mesmo implícitas, são internalizadas pelos alunos e, quando aplicadas, levam ao erro. Chevallard, citado por Silva (2008), elaborou uma lista com as regras que julga fazer parte do contrato didático. Entre elas, destacamos duas que supomos que possam levá-los os alunos ao erro nesse problema: (a) o aluno acredita que todo problema de matemática sempre tem uma resposta e que o professor a conhece; (b) em matemática resolve-se um problema efetuando-se operações.

Esperamos que o *meio* organizado possa promover retroações que lhes permitam agir e refletir sobre suas ações, chegando à compreensão de que as relações estabelecidas nesse problema não são proporcionais.

<u>Problema 3</u>

Se 20 litros de álcool custam R$ 25,00, quanto custarão 34 litros desse combustível no mesmo posto de abastecimento?[22]

Esse problema será apresentado oralmente aos alunos e como não há números de grandezas diferentes e nem de mesma grandeza que são múltiplos, será liberado o uso de lápis e papel para que os cálculos sejam realizados por escrito. É provável que eles tenham algum tipo de dificuldade ao realizarem os cálculos, em função de terem que realizar divisão e multiplicação envolvendo números decimais.

Uma estratégia prevista é a *estratégia funcional* com redução à unidade, a partir da qual o aluno obtém o preço de um litro de álcool dividindo R$25,00 por 20 litros, o que daria R$ 1,25. Em seguida, ao multiplicar esse valor por 34, encontrará R$ 42,50 que representa o preço dos 34 litros. No entanto, um erro que pode ocorrer, é o aluno indicar a divisão de 20 por 25 como a operação a ser realizada para encontrar o preço de 1 litro de combustível.

Outra estratégia que os participantes podem utilizar é a *estratégia escalar*, percebendo que 34 pode ser decomposto em 20 + 10 + 4, e assim, encontrar o preço dos 34 litros

[22] BONJORNO, J. R., AZENHA, R., OLIVARES, A. *Matemática- fazendo a diferença.* 6ª série. São Paulo: FTD, 2006. p. 207.

calculando a soma dos preços de 20 litros, 10 litros e 4 litros. Para encontrar o valor de 10 litros divide-se 20 por 2 e R$25,00 por 2, o que dá R$12,50. Para calcular o valor a ser pago por 4 litros, divide-se 20 litros por 5 e R$25,00 por 5, obtendo-se R$5,00. Assim, somando R$ 25,00 + R$12,50 +R$5,00 tem-se R$42,50.

Empregando qualquer uma das estratégias descritas para resolver esse problema, entenderemos que eles estarão utilizando o pensamento quantitativo, que diz respeito ao envolvimento e domínio de cálculos, a fim de determinar uma solução numérica ao problema em questão, conforme descrevem Post, Behr e Lesh (1995).

Problema 4

Rosa tem um carro que consome, em média, 10 litros de combustível a cada 120 km rodados. Quantos litros de combustível esse carro consumirá em 60 km?[23]

Esse problema tem a mesma estrutura do problema 5, proposto na 1ª sessão. No entanto, para este, os alunos podem utilizar lápis e papel para resolverem os cálculos por escrito, pois pretendemos verificar se essa alteração influencia na escolha das estratégias utilizadas pelos alunos.

Diferente do que propomos em problemas anteriores, esse envolve números múltiplos para os valores de grandezas diferentes e para valores de mesma grandeza. Dessa forma, há a possibilidade de que eles possam utilizar, com facilidade, tanto a *estratégia escalar* quanto a *estratégia funcional*, conforme afirmam Schliemann e Carraher (1997).

Para utilizar a *estratégia escalar*, os discentes têm que perceber que a grandeza quilômetro foi reduzida pela metade, ou seja, 120 km foi dividido por 2 e, compreendendo que a grandeza litros também deve ser reduzida pela metade, dividam 10 por 2, obtendo 5 litros.

Para empregar a *estratégia funcional* será necessário observar que 120 dividido por 10 é igual a 12, ou seja, que existe um coeficiente de proporcionalidade que permite estabelecer uma relação entre os valores das duas grandezas. Logo, há que utilizá-lo, dividindo 60 por 12, para obter os 5 litros que é a solução do problema.

Consideramos que a escolha por uma das estratégias dependerá, conforme afirma Silvestre (2006), da interpretação que eles tenham do problema e das suas habilidades com

---

[23] CAVALCANTE, L.G., SOSSO, J., VIEIRA, F. P. *Para saber Matemática*. 7º ano. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2007. p.168.

cálculos. De qualquer forma, seja qual for a opção, entendemos que ao utilizarem uma das estratégias mencionadas, os alunos estarão manifestando a compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas, o que significa uma manifestação do raciocínio proporcional.

Problema 5

Comprei 10 latinhas de refrigerante e paguei R$ 15,00. Quanto teria pago se tivesse comprado apenas 4 latinhas?[24]

Considerando que esse problema não possui números de grandezas diferentes e nem de mesma grandeza que são múltiplos, esperamos que os alunos recorram à *estratégia funcional*, com redução à unidade, encontrando o preço a ser pago por uma latinha de refrigerante por meio da divisão de R$15,00 por 10, obtendo R$1,50. Em seguida, multiplicando 4 por R$1,50 obtenham R$ 6,00 que é o preço a ser pago pelas 4 latinhas de refrigerante.

Outra opção seria a *estratégia escalar*, observando que é possível encontrar o preço de 2 latinhas dividindo 10 por 5 e R$ 15,00 por 5, o que resulta em R$ 3,00. Depois, calcula-se o preço de 4 latinhas (2+2) somando R$ 3,00 + R$ 3,00, que dá R$ 6,00.

Esperamos que não haja dificuldades em relação aos cálculos, pois é permitido o uso do lápis e papel.

Entendemos que, ao utilizarem essas estratégias, eles estejam compreendendo as relações de invariância e covariância (POST, BEHR e LESH, 1995) que existem entre as grandezas desse problema observando que, se diminuiu a quantidade de latinhas, então o valor a ser pago também deve diminuir na mesma razão.

Experimentação

Na 2ª sessão todos os problemas foram apresentados oralmente para os alunos. Os problemas 1 e 2 foram resolvidos por eles oralmente, sem recurso do lápis e papel. Para os

---

[24] GIOVANNI, J.R., PARENTE, E. *Aprendendo Matemática.* 7º ano. São Paulo: FTD, 2007. p. 211.

problemas 3, 4 e 5 foi liberado o uso do lápis e papel, porém nem todos quiseram utilizar o recurso proposto. Essa sessão durou 43 minutos e contou com a participação de 16 alunos.

Verificamos durante a realização da sessão que houve a participação da maioria dos alunos. Em alguns momentos, principalmente quando havia a apresentação de uma resposta incorreta, eles queriam se manifestar ao mesmo tempo, o que nos fazia intervir para que todos pudessem expor suas estratégias ou argumentações.

Análise a *posteriori*

Problema 1

Um padeiro gasta 20 kg de farinha para fabricar 500 pãezinhos. Quantos pãezinhos ele pode fabricar com 50 kg de farinha?

Os alunos utilizaram a *estratégia escalar* empregando adições sucessivas, conforme foi comprovado por Schliemann e Carraher (1997) em seus estudos com alunos que ainda não haviam estudado proporções. Observamos nas estratégias empregadas pelos participantes, que eles possuem a compreensão de que as grandezas variam e variam conjuntamente, como afirmam Post, Behr e Lesh (1995). Destacamos como exemplo, as estratégias apresentadas por dois alunos, sendo que um deles, o MR, emprega a *estratégia escalar* diferente da prevista na análise a *priori:*

> MA: *20 dá 500, mais 20 dá 1000; metade de 20 dá 10 e de 500 dá 250, então somando dá 1250.*
> MR: *O meu deu 1250, igual do MA. Eu peguei 20 dividido por 2 deu 10 quilos e 250 pães e multiplicado por 5 e deu 50 quilos e 250 vezes 5 deu 1250.*

A opção do aluno por uma determinada estratégia parece ter relação com suas habilidades em realizar cálculos, como destaca Silvestre (2006). Uma estratégia considerada fácil para um, parece ser difícil para outro, como ilustramos nos trechos do protocolo a seguir:

> MA: *Eu fiz mais fácil porque eu peguei a metade de 20 que é 10 e a metade de 500 que é 250 e depois somei com 20 mais 20 e deu 1250.*
> JU: *Eu acho que as duas estão certas, mas a do MR é mais fácil.*
> BA: *A do MA é mais fácil. O MR faz por etapas.*

Apesar de considerarem uma estratégia mais fácil que a outra, os alunos compreenderam o raciocínio utilizado pelos colegas, como comprovamos por meio de alguns questionamentos:

> P: *Quando MA fez a divisão de 20 por 2, o que ele encontrou?*
> ALUNOS[25]: *10 quilos.*
> P: *Eram 10 quilos que queríamos saber?*
> ALUNOS: *Não, eram 50 quilos.*
> P: *E o que ele fez?*
> ALUNOS: *Dividiu 500 por 2.*
> P: *Por que ele somou 500 mais 500 mais 250?*
> BA: *Porque somando tudo daria os 50 quilos.*

Ao contrário do que foi observado nas estratégias utilizadas por esses alunos, LE utilizou o algoritmo da *regra de três*, sem conseguir apresentar argumentos que mostrassem a compreensão das relações existentes entre as grandezas:

> LE: *O meu dá 12500 porque multiplicando 500 vezes 50 e dividindo por 20 ... não sei...*
> LE: *Eu fiz 50 vezes 500 e dividi por 20 que deu 1250.*
> P: *E a sua estratégia é igual à do MA ou do MR?*
> LE: *Eu fiz os cálculos e deu 1250. Eu tinha feito a conta errada.*

Observamos que o automatismo ao utilizar os algoritmos pode levar ao erro como, por exemplo, o que ocorreu com LE ao apresentar a sua resolução. Constatamos ainda que, mesmo solicitando à aluna que comparasse sua estratégia com as dos colegas, ela somente fazia referências às operações realizadas, não sendo capaz de utilizar argumentos em relação ao aumento dos valores das grandezas. Optamos por não antecipar comentários em relação ao algoritmo utilizado, na expectativa de que ela ou os outros alunos fossem capazes de perceber a validade da regra empregada.

Alguns alunos tentaram resolver o problema utilizando a *estratégia funcional*, porém não conseguindo realizar os cálculos oralmente e apresentar a solução numérica, utilizaram o pensamento qualitativo para descrever suas estratégias, como ocorreu com o aluno GI:

> GI: *500 dividido por 20 dá quantos quilos tem cada pão porque com 20 quilos ele fez 500 pães. Depois multiplica por 50 quilos e sabe quantos pães.*
> JU: *Que loucura...*

---

[25] ALUNOS: significa que vários alunos falavam juntos a mesma resposta.

> LG: *O que o GI falou é que você primeiro tem que descobrir quantos pães faz com 1 quilo e depois multiplicar por 50 quilos e vai dá o resultado final.*

Apesar de ter enunciado de maneira incorreta a sua estratégia, GI foi compreendido pelo seu colega, que a validou de maneira correta para o grupo. Dessa forma, entendemos que o *meio*, a partir das discussões ocorridas no grupo e com poucas interferências da pesquisadora, colaborou para que os participantes agissem e refletissem sobre suas estratégias, propiciando o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

<u>Problema 2</u>

Se um jogador de futebol fez 2 gols em 3 jogos, quantos gols ele fará em 6 jogos?

Num primeiro momento, a maioria dos alunos resolveu esse problema como se o mesmo envolvesse grandezas diretamente proporcionais, insistindo em 4 gols como solução, ao que houve a necessidade de intervenção. Após algumas retroações do *meio*, alguns perceberam a não-existência da relação proporcional.

Observemos algumas das estratégias apresentadas por vários alunos no protocolo transcrito abaixo:

> LG: *A resposta é 4 gols.*
> LI: *4 gols, porque fez 2 gols em 3 jogos, então ele faz 4 gols em 6 jogos*.
> JU: *4, porque 3 vezes 2 é 6, então ele faz 4 porque 2 vezes 2 é 4.*
> MA: *Se ele faz 2 gols em 3 jogos, obviamente que 2 vezes 2 é 4.*
> MR: *É 4, porque 2 gols em 3 jogos, então 2 mais 2 é 4 ....porque 3 mais 3 é igual a 6.*
> FR:*12 gols*.
> LI: *Eu discordo.*
> FR: *É, eu fiz conta errada.*
> MA: *É 4.*
> BA: *Em 6 jogos, 3 mais 3 dá 6 e 2 mais 2 é 4, então é 4.*

Após todas essas exposições, perguntamos ao grupo se todos concordavam com a resposta dada ao problema. A essa pergunta, percebemos uma manifestação que pode ser atribuída a uma regra do contrato didático, na qual o aluno acredita que todo problema de matemática sempre tem uma resposta e que o professor a conhece:

> JU: *Só falta está errado...*

GI: *Está certo professora?*

Assumindo o papel de mediadora do processo, como preconizado pela teoria adotada, devolvemos a questão ao grupo:

P: *É o que nós queremos saber. O que vocês acham?*
ALUNOS: *Tá certo.*

Foram necessárias diversas intervenções e retroações do *meio* para que alguns alunos percebessem que não há relação proporcional entre as grandezas, como podemos verificar nas situações de ações e formulações seguintes:

P: *Pensem em um jogador... Esse jogador faz a mesma quantidade de gols em todos os jogos que participa?*
LG: *Eu pensei nisso, mas a senhora fez uma pergunta então tinha que ter uma resposta. Eu estou fazendo o que o exercício pede.*
P: *Nessa situação do jogador, a gente pode questionar alguma coisa?*
ALUNOS: *Pode.*
P: *O que a gente pode questionar?*
LA: *Como a gente tem certeza que ele faz 2 gols em 3 jogos?*
P: *O que vocês pensam dessa pergunta?*
BA: *Esse resultado que a gente achou, acho que seria aproximadamente porque ele pode fazer mais ou menos gols. Ele poderia não fazer sempre 2 gols.*
P: *Vocês concordam com a BA?*
LG: *O resultado seria aproximadamente*.
P: *Qual seria então a resposta do exercício? Seria possível dar uma resposta exata?*
MG: *Não, porque ele poderia ter feito mais ou menos gols.*
P: *Certo, então nesse problema não teríamos uma solução numérica determinada.*

Consideramos que ao sugerir aos alunos que pensassem em jogador, antecipamos conclusões que deveriam ser feitas por eles. Entretanto, nosso questionamento promoveu a participação de LG, que justificando sua solução, dá evidências de uma das regras do contrato didático, segundo a qual, o aluno acredita que para toda questão de matemática deve-se dar uma resposta, nesse caso, numérica e determinada.

Apesar de darem indícios de que compreenderam que não há relação proporcional entre as grandezas do problema, eles não apresentaram como solução, por exemplo, a formulação de que não é possível prever a quantidade de gols. Entendemos que ao proporem como resposta “aproximadamente 4”, alguns alunos mostraram a compreensão de que não seria possível prever o resultado, pois este poderia ser maior ou menor, como argumenta MG.

Constatamos que é importante provocar rupturas do contrato didático, como fizemos ao propor esse tipo de problema, para que o aluno possa compreender em que condições existem relações proporcionais entre duas grandezas. Concordamos com Post, Behr e Lesh (1995), quando afirmam que para que uma pessoa raciocine com proporções, é necessário que ela seja capaz de diferenciar as situações proporcionais e as não proporcionais.

Problema 3

Se 20 litros de álcool custam R$ 25,00, quanto custarão 34 litros desse combustível no mesmo posto de abastecimento?

Como previsto na análise a *priori*, foi liberado o uso de lápis e papel para a resolução desse problema. Somente 9 dos 16 alunos que participaram dessa sessão utilizaram esses instrumentos. Verificamos a ocorrência da situação de ação e formulação por parte dos alunos, que se envolveram na resolução e discussão dos problemas. A *estratégia funcional* utilizando a redução à unidade foi proposta com evidências de raciocínio proporcional, porém apresentando erros quanto aos cálculos realizados. Conferimos nos trechos extraídos do protocolo:

> FE: *Eu não cheguei no resultado, mas acho que tem que dividir 20 por 25 que vai dá o valor de cada litro e depois multiplicar por 34.*
> LG: *Dá 40, 97.*
> GI: *Eu fiz a mesma coisa, eu dividi 20 por 25*.
> LG: *É o mesmo raciocínio, mas eu dividi 25 por 20 que deu 1,205, aí eu multipliquei por 34 que deu 40,97.*

Identificamos na estratégia formulada pela aluna FE, indícios do pensamento qualitativo (POST, BEHR e LESH, 1995), pois a mesma descreveu as operações que julgava serem necessárias para encontrar a solução, estabelecendo uma relação entre as grandezas do problema, porém indicando a divisão a ser realizada de maneira incorreta, o que a levaria encontrar uma resposta errada. Observamos que esse tipo de estratégia foi utilizado por outros alunos, com a mesma dúvida em relação à divisão que resultasse no valor correspondente ao preço de 1 litro do combustível.

Em relação ao aluno LG consideramos que este utilizou um pensamento quantitativo (POST, BEHR e LESH, 1995), indicando, além das relações estabelecidas entre as grandezas, os resultados dos cálculos realizados, apesar do erro na divisão.

As interações entre os alunos contribuíram para a formulação de estratégias por outros, como também para que os mesmos refletissem, validando ou não as estratégias apresentadas no grupo. Verificamos que o *meio* provocou retroações não só em função das estratégias, mas também em relação a outras dúvidas que surgiram nas discussões, como ocorreu quando a aluna KA expôs sua *estratégia funcional* de maneira correta:

> KA: *Eu dividi 25 por 20 que deu 1,25 e eu multipliquei por 34 que deu 42,50.*
> LG: *Eu discordo. Acho que ela errou na divisão porque 25 dividido por 20 dá 1,205, tem uma hora que tem que emprestar um zero.*
> KA: *Dá 1,25.*
> P: *LG faça a sua divisão aqui no quadro, por favor*.
> LG: *25 dividido por 20 dá 1, e sobra 5, coloca virgula depois do 1 e acrescenta zero no 5. Dividindo 50 por 20 dá 2 e sobra 10; tem que por zero depois do 2 e colocar zero no 10 prá dá 100; divide 100 por 20 que dá 5 e sobra resto zero. Deu 1,205.*
> JU: *Não precisa.*
> LG: *Mas quando eu coloquei a vírgula depois do 1, eu tive que colocar zero no 5, então 10 não dá pra dividir por 20, eu coloco zero aqui (quociente) e zero no 10.*
> JU: *Não precisa. Vamos supor que colocando zero dá 10 ai não daria pra dividir, ai você colocaria zero (no quociente) e outro zero pra ficar 100. Então não precisa.*

Conforme afirma Cândido (2006), a oralidade é um recurso simples, rápido e permitiu intervenções no momento imediato em que surgiu a dúvida por parte do aluno em relação à divisão. Nossa intervenção nesse momento limitou-se a perguntar ao grupo se haviam entendido a explicação dada por JU, ao que os alunos responderam afirmativamente.

Durante a experimentação observamos que as ações de determinados alunos parecem ter sido influenciadas pela utilização do lápis e do papel para a realização dos cálculos, pois os mesmos se mostraram preocupados em realizar operações e apresentar uma resposta para o problema, não analisando se a mesma era viável ou não, o que levou a retroações do *meio*. Ilustramos com trechos do protocolo:

> MR: *20 dividido por 25 dá 0,8 que é o preço de 1 litro, aí multipliquei por 34 e deu 27,2.*
> CL: *Eu fiz 34 vezes 20 e dividi por 25*.
> P: *Por quê?*
> CL: *Não sei explicar*.

CL: *20 vezes 34 dividido por 25 é igual a 20,7.*
LA: *Está errado.*
P: *Por quê?*
KA: *Se 20 litros dá 25 reais, como 34 litros vai dá 20,7 reais?*
P: *E aí CL?*
CL: *É mesmo, não está certo.*

Além da *estratégia funcional* apresentada corretamente pela aluna KA, identificamos outra estratégia correta em que a aluna decompõe o 34 como (20 + 14) e calcula, a partir do preço de 1 litro, o preço para 14 litros e depois soma com o valor de 20 litros, operando de maneira diferente da prevista na análise a *priori*:

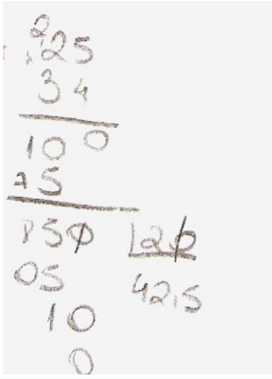
LA: *Eu peguei o 1,25 e multipliquei por 14, 20 falta 14 para 34, deu 17,50. Aí eu somei com 25 que deu 42,50.*

Como afirma Silvestre (2006), a opção do aluno por uma estratégia parece que está relacionada a sua capacidade de interpretar e resolver problemas.

Com o objetivo de que todos os alunos compreendessem as relações que deveriam ser estabelecidas entre as grandezas, consideramos necessário fazer questionamentos em relação às divisões apresentadas:

P: *E então? Vamos decidir sobre a discussão anterior: as divisões 20 por 25 ou 25 por 20. Qual divisão gera o preço de 1 litro?*
MR: *Tem que dividir 20 por 25 porque 20 é a quantidade, então tem que dividir a quantidade e dividir pelo valor que é 25 reais.*
JU: *Está errado professora. Tem que ser 25 dividido por 20.*
LA: *25 é o preço e 20 é a quantidade.*
P: *Então essa divisão é que vai dá o preço de 1 litro. Logo, o preço dos 34 litros é igual a 42,50.*

Houve a utilização da *estratégia da regra de três* somente pela aluna LE, como na resolução dos problemas anteriores. Porém, a aluna só manifestou sua estratégia por meio dos registros escritos, não apresentando-a, oralmente, ao grupo durante as discussões. Isso impossibilitou intervenções, pois nesse problema elas só ocorreram no momento das apresentações orais. Levantamos a hipótese de que a aluna não tenha exposto sua estratégia devido ao fato de que sempre que utilizava a estratégia da regra de três, era solicitada a explicar seu raciocínio.



(Resolução do problema 4 apresentada pela aluna LE)

Percebemos nas estratégias apresentadas, com exceção da *regra de três*, que ocorreram muitas incertezas quanto à operação que permitiria encontrar o preço de 1 litro de combustível. Por outro lado, consideramos que as estratégias propostas representam indícios de raciocínio proporcional, no sentido de que pensaram que, descobrindo o preço da unidade, poderiam calcular o preço de qualquer quantidade, como relatam Post, Behr e Lesh (1995) ao fazerem referência à *estratégia da taxa unitária*.

Problema 4

Rosa tem um carro que consome, em média, 10 litros de combustível a cada 120 km rodados. Quantos litros de combustível esse carro consumirá em 60 km?

Verificamos que os alunos não manifestaram dificuldades para resolver esse problema. Apesar de já terem resolvido vários problemas, alguns participantes ainda continuavam a apresentar somente um valor numérico, sem expor a estratégia utilizada:

MA: *5 litros.*
LG: *5 litros*.

Apesar de o problema apresentar números múltiplos para os valores de grandezas diferentes e para os de mesma grandeza, as estratégias formuladas evidenciam que os alunos preferiram considerar os números múltiplos de mesma grandeza, utilizando assim a *estratégia escalar* para resolvê-lo. Essa estratégia era esperada, pois segundo Schliemann e Carraher (1997), os alunos que ainda não passaram pela instrução formal sobre proporções, preferem esse tipo de estratégia.

Diferente dos alunos MA e LG, a aluna BA formulou sua estratégia e utilizou argumentos tentando convencer os demais:

> BA: *5 litros, porque 60 mais 60 é igual a 120 ou 120 dividido por 2, então significa que 10 dividido por 2 dá 5 litros. Daí 60 quilômetros mais 60 quilômetros vai dar 10 litros.*

A estratégia e solução proposta por BA foram validadas pelos colegas, pois após sua exposição não houve nenhuma manifestação contrária ao resultado apresentado.

Entendemos que a aluna, mesmo usando uma linguagem empírica, manifestou por meio do pensamento quantitativo (POST, BEHR e LESH, 1995) um raciocínio proporcional, mostrando a compreensão das relações de invariância e covariância estabelecidas entre as grandezas (LAMON *apud* COSTA, 2007).

A fim de motivar a participação de outros alunos, perguntamos ao grupo se alguém mais tinha outra estratégia. Somente a aluna LE se manifestou, apresentando uma estratégia que identificamos como sendo a regra de três:

> LE: *É 60 vezes 10 dividido por 120.*

Assim como procedeu na resolução de problemas anteriores, a aluna mencionou as operações a serem realizadas, mas não soube explicar a estratégia por ela apresentada, o que nos faz levantar a hipótese de que essa aluna teve um ensino de proporções como os relatados por Martins (2007) e Pontes (2009), ou seja, limitado à prática do uso de algoritmos e à memorização de técnicas.

Diante da estratégia exposta por essa aluna, outros alunos fizeram comentários que podem ser atribuídos à não-compreensão do algoritmo apresentado:

> LA: *Lá vem ela com aquelas contas*.
> MA: *As contas são difíceis*.

Verificando que LE não conseguia explicar a estratégia que utilizava e que os outros alunos não compreendiam "as contas" que ela realizava, decidimos não interferir porque levantamos a possibilidade de que ela pudesse compreender as relações entre as grandezas a partir das estratégias propostas pelos colegas e estes pudessem relacionar os cálculos com as estratégias apresentadas.

Apesar de os alunos terem a sua disposição lápis e papel para a realização dos cálculos por escrito, observamos que a maioria não utilizou esses recursos.

Consideramos que os participantes manifestaram o raciocínio proporcional por meio das estratégias utilizadas, com exceção da aluna que empregou a *estratégia da regra de três*.

<u>Problema 5</u>

Comprei 10 latinhas de refrigerante e paguei R$ 15,00. Quanto teria pago se tivesse comprado apenas 4 latinhas?

Novamente constatamos que a aluna LE utilizou a *regra de três*, sem indícios de que compreendia as relações estabelecidas entre as grandezas. Ao ser questionada sobre as operações apresentadas em sua estratégia, a mesma foi incapaz de usar argumentos que dessem evidências da compreensão de que se a quantidade de latinhas compradas diminuiu, o preço a ser pago também deveria diminuir. Entendemos que essa aluna usa o algoritmo de forma mecânica, o que segundo Oliveira e Santos (2000) ocorre devido ao modelo como a escola trabalha o ensino de proporções. Ilustramos o raciocínio da aluna com trechos do protocolo:

> LE: *6 reais.*
> P: *Como você pensou para obter esse resultado?*
> LE: *4 vezes 15 dividido por 10.*
> P: *Por quê?*
> LE: *Não sei. Eu multipliquei e dividi.*

Observando que a aluna não conseguia explicar sua estratégia, mesmo quando sugeríamos que a comparasse com outras, optamos por não insistir no momento, a fim de não anteciparmos o algoritmo para os outros alunos.

Outra aluna apresentou sua resolução, empregando a *estratégia funcional*, com redução à unidade, na qual identificamos o pensamento qualitativo (POST, BEHR e LESH, 1995), pois a mesma somente descreveu as operações que deviam ser realizadas para encontrar a solução. Apesar disso, manifestou a compreensão das relações existentes entre as grandezas envolvidas no problema:

> FE: *É 15 reais dividido por 10 e acha o preço de uma lata. Depois pega esse preço e multiplica por 4. Eu não fiz a conta.*

Outro aluno também empregou a *estratégia funcional* com passagem pela unidade, porém utilizando uma relação que envolve adições sucessivas, diferente da aluna FE que empregou uma relação multiplicativa :

> FR: *15 reais dividido por 10 dá 1,5. Aí eu somei 1,5 mais 1,5 mais 1,5 mais 1,5 que é igual a 6 reais.*

Ao compararmos as estratégias dos alunos FE e FR constatamos, como afirma Silvestre (2006), que a opção do aluno por uma determinada estratégia parece depender, entre outros fatores, de sua habilidade com cálculos. Consideramos que esses alunos manifestaram um raciocínio proporcional, pois deixaram evidências de que compreendem as relações existentes entre as grandezas e que se diminuiu a quantidade de refrigerantes, deve diminuir o valor a ser pago.

Observamos, por meio de intervenções, que alguns pareciam se apropriar das estratégias e dos resultados apresentados por outros, pois repetiam estratégias propostas pelos colegas, sem a compreensão do significado das operações que estavam realizando:

> JU: *Eu multipliquei 15 por 4 e dividi por 10.*
> P: *E por que desses cálculos?*
> JU: *Eu só fiz. É o contrário do outro. Dá o mesmo resultado.*
> CL: *15 dividido por 10, multiplica por 4 que deu 6 reais.*

Identificamos pela formulação de JU, a indicação de operações que foram apresentadas pela aluna LE. Ela tentou validar sua estratégia junto aos colegas, informando que "dá o mesmo resultado", porém não conseguiu expressar argumentos que dessem evidências do raciocínio proporcional.

Não ocorreu a *estratégia escalar* prevista na análise a *priori*. No entanto, consideramos que os alunos conseguiram reinvestir conhecimentos adquiridos durante a resolução dos problemas anteriores. Não constatamos durante a resolução desse problema, nenhum aluno com dúvida quanto à divisão que deveria ser realizada para obter o valor unitário, como ocorreu na resolução do problema 3.

Realizamos alguns questionamentos, com a finalidade de fazer a institucionalização das relações estabelecidas entre as grandezas diretamente proporcionais:

> P: *Analisando esses problemas e os do encontro anterior, o que podemos dizer sobre eles? O que a gente percebe em relação aos valores que*

> *aparecem? Por exemplo, esse problema dos refrigerantes: nós tínhamos o preço de 10 latinhas e queríamos saber o preço de 4 latinhas. O que percebemos?*
> FE: *O preço diminuiu.*
> P: *Por quê?*
> FE: *Porque comprou menos.*
> P: *Então se diminuir a quantidade, tem que diminuir o preço.*

Os alunos compreenderam as relações estabelecidas entre as grandezas dentro desse contexto e para verificar se essa compreensão se manifestava em outra situação, retomamos outros problemas resolvidos anteriormente:

> P: *Lembram do problema de ampliação da foto? A largura era 1,5 cm e passava a ser 4,5 cm. O que podemos concluir?*
> MA: *Quando a gente multiplicou a largura por um número tinha que multiplicar o comprimento pelo mesmo número.*
> GI: *Se aumentou a largura tem que aumentar o comprimento. Tem que aumentar a mesma quantidade.*

A partir das respostas dadas, finalizamos a sessão destacando algumas noções como grandeza, razão e relação existentes entre as grandezas:

> P*: O que podemos dizer sobre esses problemas quando comparamos os "elementos"? Por exemplo, refrigerante é um elemento e o preço é outro elemento. O que podemos concluir?*
> FE*: Quando aumenta um elemento tem que aumentar o outro.*
> P*: E no problema do álcool, quando aumentou a quantidade de álcool o que aconteceu com o preço?*
> MR*: Aumentou.*
> P*: Na Matemática, chamamos esses "elementos" de grandezas. Podemos dizer no exercício das latinhas de refrigerantes que a quantidade de latas e o preço são grandezas. Então o que dissemos aqui agora: se aumentar uma grandeza ...*
> ALUNOS*: Tem que aumentar a outra.*
> P*: E se diminuir uma grandeza?*
> ALUNOS*: Tem que diminuir a outra.*
> P*:E tem que aumentar e diminuir...*
> ALUNOS*: Ao mesmo tempo.*
> P*: Com a mesma razão.*
> BA*: Professora, então o que se faz é igual com uma balança. O que fizer com uma tem que fazer com a outra pra ficar igual.*
> P*: Turma, observe o que a BA está dizendo: tem que manter o "equilíbrio", no sentido de que se deve realizar a mesma operação entre as grandezas e com o mesmo valor (razão).*

Com essa dialética procuramos, como propõe Brousseau (2008), sistematizar algumas das produções que haviam sido previamente elaboradas pelos discentes.

Considerações gerais sobre a 2ª Sessão

Durante toda a sessão, a oralidade foi muito importante para que os participantes pudessem manifestar suas estratégias e discutir dúvidas com os colegas. Observamos que ocorreram as situações adidáticas de ação, formulação e validação (BROUSSEAU, 2008), pois os mesmos se envolveram na busca de soluções para os problemas propostos.

Em relação aos problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais, eles conseguiram formular estratégias próprias, não convencionais para resolverem os mesmos. Assim como constatado por Schliemann e Carraher (1997), verificamos que optaram pela *estratégia escalar* quando percebiam que o problema apresentava números múltiplos em uma mesma grandeza, o que para eles, pareceu tornar a resolução mais fácil. Já a *estratégia funcional* foi utilizada quando os problemas não apresentavam números múltiplos, ou quando não os identificavam com facilidade. Nessas situações, utilizaram a *redução à unidade*.

Consideramos que alguns conseguiram manifestar o raciocínio proporcional por meio das estratégias mencionadas, ao contrário do que identificamos com a utilização da estratégia da regra de três por uma aluna que, após várias intervenções, não demonstrou a compreensão das relações entre as grandezas.

Verificamos que alguns alunos não conseguiram fazer distinção, num primeiro momento, entre os problemas que envolviam grandezas diretamente proporcionais e o que não possuía grandezas proporcionais, no caso, o problema 2; essa distinção somente ocorreu após algumas intervenções e retroações do *meio*. Mesmo dando evidências de que compreendiam que não existia relação proporcional entre as grandezas do problema, insistiam em apresentar uma solução. Identificamos alguns erros cometidos durante a resolução do problema 2, os quais atribuímos às regras do contrato didático.

Ao final dessa sessão foi possível destacar algumas das produções elaboradas pelos alunos sem, contudo, formalizar conceitos.

5.3 3ª SESSÃO

Um dos objetivos nesta sessão é verificar se após a resolução dos problemas anteriores, os alunos conseguem distinguir entre as situações que envolvem grandezas proporcionais e não proporcionais. Outro objetivo é identificar quais estratégias os alunos reinvestem ao resolverem os problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais, realizando os cálculos por escrito. Todos os problemas são apresentados aos alunos oralmente e apesar de ser autorizado o uso do lápis e papel, os alunos também devem apresentar suas estratégias para o grupo oralmente.

Análise a *priori*

Problema 1

Se com 40 kg de laranja é possível fazer 24 litros de suco, quantos litros de suco serão obtidos com 30 kg de laranja?[26]

Considerando que esse problema não apresenta números de grandezas diferentes e nem de uma mesma grandeza que são múltiplos, é esperado que os alunos utilizem a *estratégia funcional,* com redução à unidade. Dessa maneira, determina-se quantos litros de suco são obtidos com cada 1 kg de laranja, realizando a divisão de 24 por 40, o que resulta em 0,6 litros. Em seguida, multiplica-se 30 por 0,6, obtendo 18 litros.

Uma dificuldade prevista na utilização dessa estratégia é quanto à divisão, podendo realizar 40: 24. Temos a expectativa que, após terem resolvido o problema 3 da 2ª sessão, essa dificuldade não apareça.

Outra resolução possível seria por meio da *estratégia escalar*, da seguinte maneira: se com 40 kg de laranja obtém-se 24 litros de suco, então com 10 kg se produz 6 litros (dividindo os valores das duas grandezas por 4). Como o interesse é descobrir quanto suco se faz com 30 kg de laranja, basta multiplicar os valores das duas grandezas por 3. Logo, com 30 kg de laranja serão obtidos 18 litros de suco.

Uma variação de resolução que poderia ocorrer na utilização dessa estratégia seria: ao descobrir que com 10 kg de laranja se produz 6 litros de suco, realizar adições sucessivas com

---

[26] DANTE, L.R., *Tudo é Matemática*. 7º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2008. p.201.

os valores das grandezas (SCHLIEMANN e CARRAHER, 1997). Portanto, se com 10 kg tem-se 6 litros, com 20 kg tem-se 12 litros e com 30 kg tem-se 18 litros.

Entendemos que ao utilizarem qualquer uma das estratégias previstas acima, os alunos estarão manifestando o raciocínio proporcional, com compreensão das relações de invariância e covariância estabelecidas entre as grandezas do problema (POST, BEHR e LESH, 1995; LAMON *apud* COSTA, 2007).

<u>Problema 2</u>

Jogando dois dados eu fiz 7 pontos. Quantos pontos eu farei se jogar 4 dados?[27]

Ao propor esse problema que não envolve relação proporcional entre as grandezas, pretendemos verificar se os alunos já conseguem distinguir situações proporcionais das não proporcionais, o que segundo Post, Behr e Lesh (1995) seria uma das condições para que o indivíduo possa raciocinar com proporções. Outro objetivo é verificar se ao resolverem o problema, ainda irão cometer erros vinculados às regras do contrato didático.

A solução correta para o problema é afirmar que não é possível prever o resultado, pois não existe relação proporcional entre as grandezas pontos e dados. Caso os alunos ainda não consigam distinguir situações proporcionais de não proporcionais, uma solução incorreta esperada é "14 pontos". Essa resposta tem sua explicação a partir do entendimento de que o problema envolve grandezas diretamente proporcionais e, nesse caso, como os números da grandeza dados são múltiplos, é provável que eles utilizem a *estratégia escalar* para determinar uma solução (SCHLIEMANN e CARRAHER, 1997). Assim, ao perceberem que o valor dessa grandeza dobrou, concluam que o valor da grandeza pontos também deva dobrar. Nesse caso, entendemos que estaria ocorrendo um erro vinculado às regras do contrato didático.

<u>Problema 3</u>

Elvira comprou 3 relógios iguais e pagou R$ 144,00. Quanto pagaria se comprasse 7 relógios do mesmo tipo? [28]

---

[27] DANTE, L.R., *Tudo é Matemática*. 7º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2008. p. 199.

De acordo com os estudos de Schliemann e Carraher (1997), este tipo de problema que envolve números de grandezas diferentes que são múltiplos, é mais fácil de ser resolvido pelos alunos por meio da *estratégia funcional*. Nesse caso, observando que o valor da grandeza preço não é um número relativamente pequeno, prevemos que os discentes utilizem a estratégia funcional empregando a *redução à unidade*. Assim, calculem o preço de 1 relógio dividindo R$144,00 por 3, obtendo R$48,00. Em seguida, multipliquem 7 por R$ 48,00 obtendo R$336,00 que representa o valor a ser pago pelos 7 relógios. Esperamos que não ocorram dificuldades quanto à execução dos cálculos, pois os participantes poderão realizá-los por escrito.

Considerando a *estratégia escalar*, o resultado poderia ser encontrado por meio de adições sucessivas: se 3 relógios custam R$ 144,00, então 6 relógios custam R$ 288,00. Para ter o preço dos 7 relógios, haveria a necessidade da determinação do preço de um relógio, dividindo R$ 144,00 por 3 e obtendo R$ 48,00. Em seguida, somando o valor a ser pago por 6 relógios com o preço de 1 relógio, encontra-se o valor a ser pago por 7 relógios, isto é, R$ 336,00.

Entendemos que ao utilizar tanto a *estratégia funcional* quanto a *estratégia escalar*, os alunos estarão expressando raciocínio proporcional, haja vista a manifestação da compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas do problema (POST, BEHR e LESH, 1995; LAMON *apud* COSTA, 2007).

Experimentação

Todos os problemas desta sessão foram apresentados oralmente aos alunos. Foram disponibilizados lápis e papel para a realização dos cálculos, porém somente 8 dos 11 participantes dessa sessão realizaram os cálculos por escrito. Houve 4 faltas justificadas, sendo: uma aluna doente e os outros que foram participar de uma aula de reforço. A sessão durou 52 minutos, com grande parte do tempo utilizado para discussão do problema 2.

Verificamos, mais uma vez, a participação intensa dos alunos em busca de soluções para os problemas propostos e nas discussões que ocorreram durante a experimentação.

---

[28] BONJORNO, J. R., AZENHA, R., OLIVARES, A. *Matemática-fazendo a diferença.* 6ª série. São Paulo: FTD, 2006. p. 207.

Observamos que eles já apresentam suas estratégias sem receio de estarem inadequadas, como nas sessões anteriores.

Análise a *posteriori*

<u>Problema 1</u>

Se com 40 kg de laranja é possível fazer 24 litros de suco, quantos litros de suco serão obtidos com 30 kg de laranja?

Ao propormos esse problema, verificamos que alguns alunos se preocupavam em realizar operações matemáticas e apresentar uma solução, não analisando se os cálculos estavam corretos e se sua resposta era coerente ou não, conforme ilustrado com trechos do protocolo:

> LI: *Eu achei 480 litros.*
> LI: *Não, não, eu errei.*
> JU: *Professora eu fiz assim: eu peguei 40 que é o quilo e dividi por 24 para saber com quantas laranjas se consegue fazer 1 litro. Deu 11. Então com 11 laranjas se faz um litro. Aí eu fiz 11 vezes 30 porque é quanto você quer saber e deu 330 litros.*
> LA: *Eu peguei 40 dividido por 24 e deu 1,25 e eu multipliquei por 30 e deu 3750 litros.*

A aluna JU tentou utilizar a *estratégia da redução à unidade*. No entanto, incorreu no erro de dividir 40 por 24, em vez de dividir 24 por 40. Mais do que errar na divisão, não percebeu que o valor a determinar deveria ser menor que os 24 litros e apresentou 330 como solução.

Fizemos uma intervenção, a fim de despertar a atenção de alguns alunos como também da própria aluna ao erro cometido:

> P: *O que acham da solução da JU?*
> FE: *Está errado, tem que dá menos.*
> KA: *Tem que dá menos litros porque tem menos quilos de laranja*.
> P: *LA, o que você acha do comentário da KA?*
> LA: *É mesmo, eu fiz errado.*
> JU: *Professora, tem que dá menos de 24 porque com 40 quilos já faz 24 litros e com 30 quilos tem que fazer menos de 24 litros.*

Mesmo sem saberem a solução correta, vários alunos manifestaram um pensamento qualitativo (POST, BEHR e LESH, 1995), fazendo uma comparação entre o resultado a ser calculado e o valor indicado no problema. As retroações provocadas pelo *meio* contribuíram para que outros formulassem estratégias que levavam à solução correta do problema:

> FE: *Deu 18 litros.*
> P: *Qual a sua estratégia FE?*
> FE: *Eu peguei 24 e dividi por 40, deu 6. Aí eu multipliquei 6 por 30 e deu 18 litros.*

Apesar do erro em relação ao resultado da divisão, identificamos que a aluna utilizou a *estratégia funcional*, passando pela redução à unidade. Verificamos dificuldades de alguns em relação à operação de divisão, porém como afirma Cândido (2006), a oralidade é um recurso simples, rápido e permite intervenções no momento imediato em que surge a dúvida:

> GI: *Como vai dividir 24 por 40?*
> LI: *Como vai dividir 24 por 40 se 24 é menor?*
> LA: *Coloca zero. Tem que dá zero vírgula alguma coisa*.

As discussões no grupo foram provocando reflexões e contribuindo para que os participantes fossem formulando estratégias corretas:

> MA: *Professora, eu fiz assim: eu dividi 24 por 40 e deu 0,6 e eu fiz 0,6 vezes 30 que deu 18.*
> CL: *Eu fiz 24 dividido por 40 e deu 0,6. Aí eu multipliquei por 30 e deu 18 litros.*
> LI: *Professora, eu tinha feito 40 por 24, mas tem que ser 24 por 40 porque 24 é litro e 40 é a quantidade. Aí tem que dividir o litro pela quantidade. Eu tinha feito o contrário*.

Entendemos que eles compreenderam as relações estabelecidas entre as grandezas, pois usaram argumentos para convencer um colega que apresentara uma estratégia incorreta:

> MR: *Eu acho que tem que dividir 40 por 24 e descobrir quantos litros faz com 1 quilo. Daí multiplica por 30 e tem o resultado*.
> LI: *MR eu tinha pensado assim mais deu errado*.
> GI: *É porque o resultado tem que ser menor que 24 e assim dá mais que 24 litros.*
> LI: *É que se dividir 40 por 24 como eu tinha feito e multiplicar vai dar 480 litros. Dá mais que os 24 litros.*
> P: *O que você acha, MR?*
> MR: *Ah... entendi*.

Como dito anteriormente, percebemos que houve influência do recurso do lápis e papel nas resoluções apresentadas pelos alunos, que insistiam propor resultados, às vezes incoerentes, sem conseguirem explicar a validade de suas respostas. Devido a isso, houve a necessidade de intervenções:

> LA: *Professora, eu fiz 24 vezes 30 que dá 720 e dividi por 40 que deu 18 litros.*
> P: *E o que esses cálculos representam?*
> LA: *Eu não sei. Mas dá 18 litros.*
> CL: *Eu fiz 30 menos 40, deu 10, vezes 24 que deu 20 litros.*
> JU: *Errado.*
> P: *Por quê?*
> JU: *Vai fazer 10 vezes 24?*
> P: *Repita sua estratégia, CL.*
> CL: *30 menos 40 deu 10 e 10 vezes 24 deu 20.*
> LI: *20?*
> CL: *Não, dá 200.*
> LA: *Tá errado.*
> LI: *Eu fiz diferente: 30 vezes 24 e dividi por 40 e deu 18 litros.*
> P: *Qual o raciocínio envolvido nessa estratégia?*
> LI: *Tinha 30 litros... não, desse jeito não dá não.*
> KA: *Eu dividi 30 por 40, deu 0,5 e multipliquei por 24 que deu 12 litros.*

Mesmo com a ausência de LE, que havia utilizado a *estratégia da regra de três* nas sessões anteriores, as alunas LA e LI empregaram essa estratégia na resolução desse problema. Ao serem questionadas, observamos que ambas não souberam explicar o porquê das operações realizadas e nem argumentar o raciocínio empregado. Essa constatação somente foi possível devido ao *meio* organizado, o qual, além da escrita, envolveu a oralidade.

Consideramos que essas alunas foram influenciadas pelas retroações do *meio*, ou seja, pelos comentários de alguns colegas que afirmaram que a solução tinha que ser menor que a resposta apresentada por elas inicialmente. Supomos que, a partir do comentário, elas realizaram cálculos em busca de um valor menor sem, contudo, buscar compreender as relações estabelecidas entre as grandezas.

Entendemos que as formulações incorretas propostas, não só por essas alunas, mas por outros, como exemplos CL e KA, estão vinculadas a regras implícitas do contrato didático que, segundo Chevallard (*apud* SILVA, 2008, p.59), levam o aluno a pensar que “em matemática resolve-se um problema efetuando-se operações e que a tarefa é encontrar a boa operação e efetuá-la corretamente”.

Decidimos não continuar insistindo diretamente com as alunas sobre a estratégia da regra de três para não anteciparmos conclusões que desejávamos que realizassem. Dessa forma, questionamos o grupo sobre a validade ou não das soluções propostas. Observando que alguns já haviam refutado a solução “20 litros”, fizemos intervenções com o objetivo de verificar quais das outras estratégias os alunos validariam:

> P: *Como vocês explicam e garantem que são 18 ou que são 12 litros?*
> GI: *Porque a gente achou quantos litros faz com 1 quilo e como multiplicou por 30 quilos, você acha quantos litros faz com 30 quilos.*
> MA: *Quando a gente divide 24 por 40, quer saber o valor do litro e quando sabe o litro vai multiplicar por 30. Aí acha quantos litros faz com 30 quilos, que é 18.*
> P: *Todos concordam que são 18 litros?*
> ALUNOS: *Sim.*
> P: *Entre 18 e 12 litros, o que vocês acham?*
> ALUNOS: *18 litros.*
> P: *Certo, a resposta é 18 litros.*

Apesar de os argumentos terem sido realizados de forma empírica, consideramos que alguns alunos compreenderam as relações estabelecidas entre as grandezas do problema, validando a solução “18 litros” como sendo a correta, ao que confirmamos, entendendo como sendo a institucionalização de uma formulação.

Consideramos que alguns conseguiram manifestar o raciocínio proporcional, por meio do pensamento qualitativo e quantitativo (POST, BEHR e LESH, 1995), ao resolverem esse problema, percebendo que o valor a ser determinado para a grandeza litros deveria ser menor do que o valor já assumido por essa grandeza.

Não houve a utilização da *estratégia escalar* prevista na análise a *priori*.

<u>Problema 2</u>

Jogando dois dados eu fiz 7 pontos. Quantos pontos eu farei se jogar 4 dados?

Logo após a leitura do enunciado do problema, houve a manifestação de vários alunos, porém com soluções que demonstraram uma compreensão incorreta das relações estabelecidas entre as grandezas:

> MF: *14 pontos*.
> LA: *14 pontos*.

> LI: *A minha é 14 porque 2 vezes deu 7, é só fazer 2 vezes 2 que dá 4. Aí vai dar 14, porque dá 4.*
> GI: *Dá 14 porque é só aumentar mais 7.*

No entanto, sem que tivesse ocorrido nossa intervenção, uma aluna retomou o que havia sido comentado na sessão anterior sobre esse tipo de problema, o que entendemos ser uma manifestação da compreensão de que não existe relação proporcional entre as grandezas:

> JU: *Eu acho que não tem como chegar num resultado porque você jogou 2 dados e deu 7. Se jogar de novo 2 dados você não sabe se vai dar 7, quanto mais 4 dados.*

A fim de provocar reflexões nos alunos, fizemos um questionamento:

> P: *Vocês concordam com a JU?*
> FE: *Eu acho que o problema tá pedindo como se fosse 7 pontos, então tem que levar em conta o que o problema pede.*
> P: *E qual a sua resposta, FE?*
> FE: *14 pontos.*

Julgamos que soluções incorretas apresentadas por vários alunos parecem estar vinculadas às regras do contrato didático, pois dão indícios de que compreendem que não existe relação proporcional entre as grandezas, mas insistem em apresentar uma solução numérica determinada para o problema. Com o propósito de que repensassem as soluções apresentadas, intervimos. Ilustramos com trechos do protocolo:

> P: *O GI e a LI encontraram 14. JU, e agora?*
> GI: *Nesse problema, mas em outro caso não saberia quanto ia dá na segunda...*
> MA: *Acho que é 14 pela pergunta, mas em nenhum dado ele vai fazer os mesmos pontos seguido. Só se tivesse viciado.*
> P: *E qual é a resposta do problema*?
> MA: *Acho que é 14 porque cai uma vez 7 e 2 vezes 7 vai dá 14.*
> MR: *É tipo... a cada duas vezes que ele joga ele faz 7 pontos, então a média de jogo dele é 3,5. Ai a cada dois jogos ele faz 7, a cada 3 jogos faz 10,5 e a cada 4 jogos seria 14. Não seria preciso... é como se fosse uma estatística.*

Novamente fizemos algumas intervenções, o que fez com que relembrassem discussões da sessão anterior:

> P: *Mas inicialmente alguém estava discordando disso, por quê?*
> ALUNOS: *Como saber se vai sair 7?*
> JU: *Não é que eu desconfio, é que tem dois lados de entender o problema. Um que pode cair qualquer número, não precisa dar 7 em 2 dados e outro é que em 2 dados faz 7 então em 4 vai fazer 14.*
> MR: *Mas professora, o problema fala que dá 7 então tem que dá 14.*
> GI: *Na aula passada você passou um problema como esse, não lembro quantos gol... você falou a cada 2 jogos um jogador faz 3 gols e em 6 jogos quantos gols ele fará? E todo mundo respondeu 6 porque no problema tava falando.*
> P: *E qual foi a conclusão que havíamos chegado sobre aquele problema?*
> MA: *Que não tem como prever o total de gols que o jogador iria fazer.*
> GI: *Então, é como esse problema. Um dado pode ou não cair em 7.*

Observamos que apesar das retroações do *meio* e da compreensão da relação estabelecida entre as grandezas envolvidas nesse problema, os alunos se deixaram influenciar pelas regras implícitas do contrato didático e não admitiam a possibilidade de ter um problema de matemática em que a solução não fosse um número. Fizemos alguns questionamentos e retomamos o problema anterior, a fim de que pudessem comparar as relações estabelecidas entre as grandezas:

> P*: Então qual seria a solução para o problema?*
> ALUNOS*: 14.*
> P*: Vamos retornar ao problema das laranjas. A solução era determinada?*
> ALUNOS*: Sim.*
> P*: Dependia de alguma coisa para encontrar o resultado?*
> *ALUNOS: Sim, os quilos da laranja.*
> P*: Era possível falar o resultado sem dúvida?*
> *ALUNOS: Sim.*
> P*: E no problema dos dados, vocês ouviram o que o MR explicou?*
> MR*: Pode dar qualquer resultado.*
> P*: Podemos comparar com o problema das laranjas?*
> MF*: Não tem como achar uma solução.*
> FE*: Pode ser que tire qualquer número nos 2 dados, mas de acordo com o problema vai dar 7. Fica esquisito num problema de matemática se a resposta for provavelmente.*
> P*: E qual seria sua resposta?*
> FE*: Ué, professora, se você joga 2 dados e dá 7, se você joga mais 2 dados vai dá 14.*
> LA: *No problema tem dois tipos de raciocínio: se for no raciocínio matemático vai dar 14 porque vai dá 7 em dois dados e 7 nos outros 2 dados. Agora no raciocínio lógico não tem como dá nada porque não vai saber se os dados vão dá 7 e 7.*
> MR: *A resposta tem que ser entre 4 e 24.*

Consideramos, a partir das formulações e argumentações apresentadas, que vários alunos compreenderam que o problema não envolve grandezas diretamente proporcionais, o que demonstra indícios do raciocínio proporcional, conforme Post, Behr e Lesh (1995). As soluções incorretas que foram propostas, provavelmente deve-se ao fato de que esses alunos, em sua vida escolar, ainda não tivessem passado por situações de ruptura do contrato didático, sempre resolvendo problemas de matemática com solução numérica determinada.

A fim de não anteciparmos nenhum conceito aos alunos, decidimos por suspender as discussões sobre esse problema, anunciando que retornaríamos a ele, após a resolução do problema 3, para que pudessem chegar à uma decisão sobre a solução.

Problema 3

Elvira comprou 3 relógios iguais e pagou R$ 144,00. Quanto pagaria se comprasse 7 relógios do mesmo tipo?

Vários alunos, logo após a leitura do problema, já se manifestaram oralmente por meio de um pensamento qualitativo, apresentando suas estratégias, as quais interpretamos como sendo a *estratégia funcional,* passando pela redução à unidade:

> FE: *Eu não fiz as contas, não sei o resultado, mas eu sei que tem que dividir 144 por 3 que vai dá o resultado e o resultado multiplica por 7.*
> LA: *Eu também pensei assim.*
> MY: *Eu também.*

Mesmo formulando corretamente a estratégia, vários alunos erraram os cálculos e apresentaram solução incorreta, o que nos levou a algumas intervenções:

> GI: *Já fiz a divisão. Eu fiz como a FE, eu descobri quanto custava cada relógio e multipliquei por 7 e deu 264 reais.*
> P: *O que os outros acham?*
> KA: *Eu fiz 144 por 3, deu 48 reais e multipliquei por 7 que deu 324 reais.*
> P: *Por que o resultado do GI é diferente do resultado da KA?*
> GI: *Eu fiz a conta errada.*
> LI: *Eu fiz assim: ela comprou 3 relógios e pagou 144, tem que dividir 144 por 3 para achar o preço de cada relógio. Cada relógio vale 548.*

Alguns alunos se preocupavam em realizar operações e apresentar uma solução, não analisando se a solução era coerente com os dados propostos pelo problema. No entanto, observamos que eles estavam atentos às formulações apresentadas pelos colegas e que, por exemplo, logo após a exposição de LI, o *meio*, em função da oralidade, propiciou retroações que levaram a algumas discussões, sem necessidade de nossa interferência:

> GI: *Como que cada relógio vai custar 548 se 3 relógios custa 144?*
> JU: *Como?*
> CL: *Professora, não pode dar um valor maior que o preço de 3.*
> LI: *Deu 538 aí eu multipliquei por 7 e deu 336 reais.*
> ALUNOS: *Tá errado.*
> JU: *Eu fiz como ela, mas o resultado dela está errado. Eu fiz 144 dividido por 3 que dá 48 e multipliquei por 7 que deu 336 reais e o dela deu diferente*.
> KA: *Eu fiz assim: 3 relógios é 144 e mais 3 relógios deu 144 que dá 228, e mais um que é 48, aí deu 336 reais*.

A aluna JU utilizou a *estratégia funcional* com redução à unidade, enquanto KA empregou a *estratégia escalar* em conjunto com a redução à unidade. Entendemos que essas alunas manifestaram o raciocínio proporcional (LAMON *apud* COSTA, 2007) por meio das estratégias utilizadas, pois estabeleceram relações entre as grandezas e observaram que ao aumentar a quantidade de relógios, o preço também deveria aumentar. Considerando essas estratégias, questionamos o grupo a fim de verificar se validariam a estratégia proposta por KA e com a intenção de sistematizar alguns conceitos:

> P: *Essa é a mesma estratégia da JU?*
> ALUNOS: *Não.*
> P: *E o que vocês acham?*
> ALUNOS: *Está certo*.
> P: *Concordam que o preço dos 7 relógios são 336 reais?*
> ALUNOS: *Sim.*
> P: *Como garantimos que esse valor é o correto?*
> FE: *Porque o preço de um é 48, vezes 7 é 336 reais*.
> P: *Se tivesse dado um valor menor que 144 reais, estaria correto?*
> ALUNOS: *Não.*
> FE: *Porque 3 é 144 então 7 tem que dá mais.*
> P: *Se eu aumento o número de relógios tem que aumentar o que?*
> ALUNOS: *O preço.*
> P: *O preço que vou pagar depende de alguma coisa?*
> MY: *Da quantidade que vou comprar.*

Entendendo que os alunos haviam compreendido a relação existente entre as duas grandezas desse problema, retornamos ao problema 2 com a finalidade de que eles pudessem analisar as relações estabelecidas entre suas grandezas:

> P: *Voltando ao problema dos dados. Quando eu jogo 4 dados o resultado depende de alguma coisa?*
> JU: *Depende dos números que vão sair.*
> P: *Depende dos 7 pontos anteriores?*
> ALUNOS: *Não.*
> P: *Então o que posso dizer sobre a solução do problema?*
> LA: *Que não tem solução.*
> LI: *Mas no problema tem 7 pontos. Ele não ia falar à toa.*

A argumentação de LI é mais uma manifestação das regras do contrato didático, as quais explicitam que “para resolver um problema é preciso encontrar os dados no seu enunciado. Nele devem constar todos os dados necessários e não deve haver nada de supérfluo” (CHEVALLARD *apud* SILVA, 2008, p. 59). Assim, fizemos questionamentos diretamente a essa aluna, com a finalidade de que a mesma pudesse refletir sobre as relações envolvidas no problema:

> P: *LI, voltando ao problema dos relógios, o valor que pagaria depende da informação dada anteriormente?*
> LI: *Sim, do preço do relógio.*
> P: *E o preço de cada um dependeu da informação dada?*
> LI: *Sim.*
> P: *E quando eu jogo os 4 dados, o resultado depende dos 7 pontos anteriores?*
> LI: *Eu já falei, automaticamente tem que usar o 7 porque não aparece outro número. Se cair na prova, por exemplo, vai deixar sem resposta?*
> P: *E o que a LA apresenta é uma resposta?*
> LI: *Mas na prova não pode dizer que não tem resposta.*

Mesmo após insistentes questionamentos, até com antecipações de conclusões que julgamos deveriam ser realizadas pelos alunos, constatamos que para a aluna LI prevaleciam diversas regras do contrato didático que possivelmente a mesma tenha vivenciado até então em sua vida escolar. Entretanto, observamos que outros alunos manifestaram a compreensão da não relação proporcional entre as grandezas do problema, com argumentos e validação à solução apresentada por colegas:

> GI: *A mesma coisa que falar: eu jogo dois dados e vai dar um valor e quando jogo 4 dados vai dar outro valor. Não tem solução.*
> P: *Vocês concordam com a LA?*
> GI: *Sim.*
> MA: *Eu também. É como fazer uma prova de Matemática. Posso tirar 6,5 ou posso tirar 7, não dá pra saber.*
> P: *Então vocês concordam com a LA e o GI?*
> MA: *Sim.*
> P: *E os demais?*
> ALUNOS: *Sim.*

> P: *Realmente, não há relação de dependência entre os pontos obtidos ao jogar 4 dados e os pontos obtidos ao jogar 2 dados. Logo, não é possível estimar um resultado*.

A maioria dos alunos validou as soluções apresentadas por LA e GI. Assim, encerramos a sessão sem, contudo, realizar institucionalizações que pudessem influenciar a resolução dos problemas das próximas sessões.

Considerações gerais sobre a 3ª Sessão

Assim como nas sessões anteriores, verificamos que os alunos se envolveram na busca de soluções para os problemas propostos, ocorrendo assim, as situações adidáticas de ação, formulação e validação (BROUSSEAU, 2008).

Em relação às estratégias utilizadas, observamos que tanto no problema 1 quanto no problema 3, houve preferência pela *estratégia funcional*, com redução à unidade. No problema 1, verificamos que apesar de perceberem que poderiam encontrar a solução estabelecendo uma relação entre as grandezas laranja e suco, eles demonstraram dificuldade em identificar qual deveria ser a divisão realizada. Os discentes se preocupavam em realizar cálculos e apresentar uma solução, sem, no entanto, analisar se a solução encontrada era pertinente ao problema. Atribuímos essa atitude ao fato de estarem utilizando o recurso do lápis e papel para realizarem os cálculos por escrito, pois em sessão anterior quando resolviam os cálculos oralmente (ou mentalmente), percebemos que eles refletiam mais em relação às soluções apresentadas. Levantamos a hipótese de que ao realizarem os cálculos por escrito, eles se preocupavam com as operações e, ao encontrarem um valor qualquer, já o aceitavam como sendo uma solução, sem questionar se esse era adequado ou não para o problema e se apressavam em apresentá-lo como solução. Ao contrário, quando os problemas eram realizados oralmente, parece que refletiam sobre o que estavam fazendo.

Quanto ao problema 3, atribuímos a utilização da *estratégia funcional* ao fato de haver números múltiplos de grandezas diferentes, como Schliemann e Carraher (1997) já haviam constatado em seus estudos.

Apesar das soluções incorretas apresentadas por alguns alunos nos problemas 1 e 3, consideramos que os erros estavam relacionados aos cálculos e não ao raciocínio utilizado. Assim, entendemos que houve a manifestação do raciocínio proporcional, pois eles compreenderam as relações estabelecidas entre as grandezas, percebendo que se uma aumentava (ou diminuía), a outra também deveria aumentar (ou diminuir) com a mesma razão.

Nas estratégias formuladas para o problema 2 os participantes perceberam que as grandezas não eram proporcionais, porém não aceitavam o fato de um problema de Matemática ter como solução a afirmação “não é possível prever um resultado”, o que os levou a incorrer no erro de o resolverem como se envolvesse grandezas diretamente proporcionais. Atribuímos esses erros às regras implícitas do contrato didático. Concordamos com Post, Behr e Lesh (1995) quando afirmam sobre a importância de se propor ao aluno as situações não proporcionais como uma condição para que se raciocine com proporções.

O *meio* e o trabalho com a oralidade foram muito importantes, permitindo que os alunos discutissem suas estratégias, reprovando algumas e validando outras. E como membro desse *meio*, realizamos algumas intervenções com a finalidade de fazê-los refletir sobre suas formulações, limitando-nos, em alguns momentos, para não antecipar conclusões que desejávamos que eles fizessem.

5.4 4ª SESSÃO

A quarta sessão é composta por problemas que envolvem grandezas inversamente proporcionais e problemas em que as relações proporcionais não existem. Além de verificar se os alunos identificam as grandezas inversamente proporcionais e quais estratégias eles utilizam para resolver os problemas que as contém, pretendemos verificar o reinvestimento dos participantes em relação aos problemas que não apresentam relações proporcionais.

Nessa sessão todos os problemas envolvem números inteiros e são apresentados oralmente aos alunos, os quais não recebem os instrumentos lápis e papel para a realização dos cálculos.

Análise a *priori*

<u>Problema 1</u>

Se Marta ler 8 páginas por hora, ela lerá um livro em 12 horas. Se ela ler 16 páginas por hora, em quantas horas ela vai ler esse livro?[29]

É possível que inicialmente os alunos não percebam as relações estabelecidas entre as grandezas como sendo inversamente proporcionais, pois como constatou Floriani (2004) em seus estudos, muitos alunos sentiram dificuldades para encontrar a solução correta para esse tipo de problema, mesmo já tendo passado pela instrução formal sobre o conteúdo. Assim, nossa primeira expectativa é que os participantes resolvam o problema considerando as relações entre as grandezas como diretamente proporcionais, apresentando como possíveis soluções incorretas, 2 horas ou 24 horas.

A partir das retroações do *meio*, em função das discussões entre eles, esperamos que compreendam que ao aumentar o número de páginas lidas, o tempo deva diminuir. Como o problema envolve números de uma mesma grandeza que são múltiplos, podem utilizar a *estratégia escalar*. Observa-se que na grandeza página, o número de páginas está dobrando, o resulta que o tempo deva reduzir pela metade. Assim, Marta levará 6 horas para ler o livro. Consideramos que essa estratégia representa a compreensão das relações (invariância e covariância) estabelecidas entre as grandezas envolvidas no problema (LAMON *apud* COSTA, 2007).

Outra estratégia que pode aparecer, segundo estudos de Oliveira e Santos (2000) é a *estratégia tarefa total*. Dessa forma, os alunos calculariam quantas páginas tem o livro, multiplicando 12 por 8, obtendo 96 páginas. Dividindo 96 por 16 encontrariam o número de horas para ler o livro, ou seja, 6 horas.

Entendemos que se o aluno apresentar sua resolução por meio de qualquer uma dessas estratégias, ele estará manifestando um raciocínio proporcional, utilizando um pensamento quantitativo (POST, BEHR e LESH, 1995).

---

[29] BIANCHINI. E., *Matemática.* 6ª série. 6. ed. São Paulo: Moderna, 2006. p. 199.

<u>Problema 2</u>

Em seu carro Luciana andou a uma velocidade média de 90 km/h e gastou 20 minutos. Qual seria o tempo gasto para fazer o mesmo percurso, se a velocidade média fosse de 45 km/h?[30]

Assim como no problema anterior, é provável que os alunos sintam dificuldades em entender que as relações estabelecidas entre as grandezas são inversamente proporcionais, pois conforme Floriani (2004), esse tipo de problema é de difícil compreensão para eles. Assim, um erro esperado é que resolvam o problema como se este envolvesse grandezas diretamente proporcionais e, utilizando a *estratégia escalar*, apresentem a seguinte solução: como a velocidade reduziu pela metade (de 90 km/h para 45 km/h), ou seja, (90:2 = 45km/h), então o tempo também deve ser reduzido pela metade. Dessa forma, 20:2 = 10, isto é, o tempo gasto é de 10 minutos.

No entanto, esperamos que após terem resolvido o problema 1, alguns alunos percebam as relações estabelecidas entre as grandezas e reinvistam os conhecimentos adquiridos anteriormente. Assim, o problema pode ser resolvido por meio da *estratégia escalar*, observando que a velocidade reduziu pela metade (90:2 =45km), então o tempo deve dobrar (20 x2). Dessa forma, leva-se 40 minutos para fazer o mesmo percurso.

Por meio da estratégia *tarefa total*, os alunos podem calcular o valor total, 90 x 20 = 1800 km e depois dividindo esse valor por 45 km/h, obtém-se o tempo de 40 minutos.

Consideramos que se utilizarem qualquer uma dessas estratégias, estarão manifestando o raciocínio proporcional, pois essas estratégias mostram a compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas envolvidas no problema, conforme propõe Post, Behr e Lesh (1995) e Lamon (*apud* COSTA, 2007).

<u>Problema 3</u>

Nos 5 primeiros dias de janeiro choveu em 3 dias. E nos 10 primeiros dias de janeiro choveu quantos dias?[31]

---

[30] DANTE, L.R., *Tudo é Matemática*. 7º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2008. p. 198.
[31] DANTE, L.R., *Tudo é Matemática*. 7º ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2008. p. 199.

Esse problema possui a mesma característica do problema 2, apresentado na 2ª sessão e do problema 2 proposto na 3ª sessão, no sentido de que não possui relações proporcionais entre as grandezas. Assim, julgamos que são válidas as mesmas considerações realizadas anteriormente quanto aos estudos de Post, Behr e Lesh (1995) e ao contrato didático.

A resposta correta para esse problema é a afirmação: não é possível prever quantos dias irá chover, pois não há relação proporcional entre as grandezas.

No entanto, é provável que os alunos ainda não consigam distinguir situações proporcionais das não proporcionais. Dessa forma, podem considerar que o problema envolva grandezas diretamente proporcionais e pensarem que se dobrou o número de dias, então dobrará o número de dias com chuva, o que levaria a apresentar como solução incorreta, 6 dias.

Problema 4

Seis pedreiros, com a mesma capacidade de trabalho, levam 27 dias para concluir uma certa obra. Com apenas 3 desses pedreiros, em quanto tempo a obra será concluída?[32]

Temos a expectativa de que após terem resolvido os problemas 1 e 2, os alunos não tenham mais dificuldades em compreender que nesse problema as relações estabelecidas são inversamente proporcionais.

Esperamos que utilizem a *estratégia escalar*, já que o problema apresenta números de uma mesma grandeza que são múltiplos. Assim, empregando um pensamento quantitativo, poderão apresentar a seguinte resolução: como a quantidade de pedreiros foi reduzida pela metade (6:2 = 3), então a quantidade de dias dobrará (27 x 2). Logo, serão necessários 54 dias.

Outra estratégia possível seria a *tarefa total*, por meio da qual calculariam a quantidade total de dias em que 1 pedreiro realizaria o serviço, multiplicando 6 x 27, obteriam 162 dias e em seguida, dividindo 162 por 3, encontrariam 54 dias.

Entendemos que se utilizarem a *estratégia escalar* ou a estratégia da *tarefa total* estarão apresentando a compreensão de que as grandezas variam e que variam conjuntamente (invariância e covariância), o que segundo Post, Behr e Lesh (1995), representa a manifestação do raciocínio proporcional.

---

[32] IEZZI, G., DOLCE, O., MACHADO, A. *Matemática e realidade.* 7º ano. 4. ed. São Paulo: Atual, 2000. p. 229.

Experimentação

Nesta 4ª sessão, como previsto na análise a *priori*, os problemas foram apresentados oralmente aos alunos. Após a leitura de cada problema, foi dado um tempo para que apresentassem e discutissem suas estratégias, também oralmente. Não foi autorizado o recurso do lápis e papel porque queríamos observar se ocorreriam alterações nas estratégias formuladas por eles. A duração da sessão foi de 55 minutos e somente 8 alunos estavam presentes porque os demais foram liberados para visitar uma fábrica de refrigerantes. Essa quantidade de alunos permitiu a participação de todos, principalmente quando era apresentada uma solução incorreta. Nesses momentos, ocorriam muitas discussões e eles queriam falar ao mesmo tempo para contestar e apresentar sua estratégia, o que necessitava de nossa intervenção para organizar as participações.

Análise a *posteriori*

Problema 1

Se Marta ler 8 páginas por hora, ela lerá um livro em 12 horas. Se ela ler 16 páginas por hora, em quantas horas ela vai ler esse livro?

Mesmo após a resolução de vários problemas, alguns alunos continuavam apresentando somente a solução, sem descreverem a estratégia utilizada. Isso retrata o que foi verificado por Costa (2007) quanto à grande dificuldade dos alunos no momento de explicar o pensamento utilizado durante a resolução de algumas tarefas ou quando eram motivados a justificar a resposta apresentada.

A fim de compreender o raciocínio utilizado pelos participantes, efetuamos algumas indagações:

MA: *96 horas.*
P: *Como você pensou?*
MA: *Eu multipliquei 12 vezes 8.*
BA: *24 horas.*
P: *Qual a sua estratégia*?
BA: *Não sei explicar.*

A estratégia utilizada pela aluna MA indica que ela somente realizou alguns cálculos, o que poderíamos entender como uma manifestação de uma das regras do contrato didático.

No caso da aluna BA, entendemos que ela resolveu o problema considerando que a relação entre as grandezas é diretamente proporcional.

O *meio* organizado foi propício para que os alunos, aos poucos, fossem modificando suas atitudes e expondo suas explicações, mesmo quando não eram corretas:

> LG: *2 horas.*
> P: *Qual a sua estratégia?*
> LG: *8 páginas é 1 hora, 16 páginas, que é 8 mais 8, então 1 hora mais 1 hora dá 2 horas.*

Após alguns questionamentos, verificamos alguns erros que podem demonstrar tanto a incompreensão das relações estabelecidas entre as grandezas quanto a incompreensão do enunciado do problema:

> P: *Quanto tempo ele leva para ler o livro?*
> LG: *Para ler o livro ou 16 páginas?*
> P: *Se ela ler 8 páginas por hora ela lerá o livro em 12 horas. Se ela ler 16 páginas por hora, em quantas horas ela lerá o livro?*
> LG: *Ah! Agora entendi.*
> MY: *Tem que ser menos de 12 horas.*

Depois das intervenções, os alunos já apresentavam algumas manifestações que entendemos como sendo a compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas, como a aluna MY e outros:

> GI: *Ela lê 8 páginas em 12 horas...*
> MA: *8 páginas não, lê o livro inteiro em 12 horas.*
> GI: *Se ela lê 8 e gasta 12 horas, então se lê 16 tem que ser menos tempo, tá certo.*
> MA: *16 páginas por hora? Então é 96.*
> LG: *Não! Nada a vê. Tem que ser menos.*

Identificamos nas formulações de alguns alunos, como por exemplo GI e LG, o emprego do pensamento qualitativo, ao estimarem que o tempo deva ser menor. A partir dessas formulações, somente GI apresentou uma estratégia exibindo a solução correta para o problema, por meio da *estratégia escalar*:

> GI: *Eu acho que vai ser 6 horas, porque ela vai lê 16 páginas que é o dobro de 8 páginas, então vai gastar metade do tempo que é 6 horas*.

Essa estratégia foi validada por alguns, mas gerou dúvidas em outros, inclusive no próprio aluno GI. Assim, interviemos a fim de que pudessem refletir um pouco mais sobre a questão ora apresentada:

> LU: *É isso mesmo.*
> JU: *Tá certo.*
> BA: *Eu tinha pensado diferente, mas acho que está certo*.
> LI: *Não entendi direito.*
> GI: *Eu também fiquei com dúvida ainda*.
> P: *Como vocês garantem que esse tempo que vocês encontraram está correto, se vocês estão com dúvidas?*
> GI: *Faz uma prova, não sei.*
> LG: *Ela gasta a metade do tempo porque leu mais páginas, o dobro, então gasta a metade.*
> ALUNOS: *Tá certo.*
> P: *Ainda há dúvidas quanto ao tempo encontrado?*
> ALUNOS: *Não. É 6.*

Apesar de vários alunos validarem a solução proposta por GI, outros ainda mostravam incompreensão. Porém, após nossa intervenção, observamos que a formulação de LG, falando em "metade" foi fundamental para validação de todos.

Consideramos que as retroações do *meio* foram fundamentais para a validação e compreensão das estratégias apresentadas. Conforme estudos de Floriani (2004), os alunos tiveram dificuldades para compreenderem que as relações estabelecidas entre as grandezas eram inversamente proporcionais. No entanto, levantamos a possibilidade de que possam ter sido influenciados pelos problemas anteriores que envolviam grandezas diretamente proporcionais. Assim, ao perceberem que para aqueles suas estratégias funcionavam, quiseram utilizá-las para resolver esse problema.

<u>Problema 2</u>

Em seu carro Luciana andou a uma velocidade média de 90 km/h e gastou 20 minutos. Qual seria o tempo gasto para fazer o mesmo percurso, se a velocidade média fosse de 45 km/h?

Apesar de terem resolvido o problema 1, alguns alunos não perceberam inicialmente, que esse problema também envolvia grandezas inversamente proporcionais, resolvendo-o como se as grandezas fossem diretamente proporcionais:

> LG: *Metade*.
> JU: *Não é a metade*.
> LG: *10 minutos.*
> JU: *Não é a metade.*
> LG: *Se 90 quilômetros ela demora 20 minutos, 45 quilômetros por hora é 10 minutos.*

Apesar da aluna JU não aceitar essa solução, o aluno LG num primeiro momento tentou validar sua estratégia. Porém, após retroações do *meio*, o mesmo reformulou sua estratégia, percebendo seu erro:

> LI: *É 40 minutos*.
> LI: *45 mais 45 é 90, por 2, a metade de 90 é 45, aí é só diminuir..., de 90 diminui 2...*
> P: *E qual o tempo?*
> LG: *40 minutos, porque 90 ele fazia em 20 minutos para chegar num lugar, ai vai diminuir para 45 para chegar naquele lugar, então 45 mais 45 é 90, então vai ser multiplicado o tempo também por 2, 20 vezes 2, que vai dá 40.*

LG expressou seu pensamento, manifestando a compreensão das relações que são estabelecidas entre as grandezas do problema. Já o aluno LI, mesmo apresentando uma solução correta, não conseguiu explicar sua estratégia. Desse modo, identificamos que LG utilizou a *estratégia escalar*, empregando um pensamento quantitativo. Apesar de usar uma linguagem empírica, entendemos que o mesmo foi compreendido e apoiado pelos colegas GI e MA:

> GI: *Se você fizer em menos velocidade vai gastar mais tempo, deve tá certo.*
> P: *LI o que você acha da explicação do LG e do GI?*
> LI: *Entendi*.
> GI: *Se fosse dividir ia dá 10 minutos, nada a vê.*
> MA: *É, nada a vê.*

A fim de preparar os alunos para uma posterior institucionalização, fizemos alguns questionamentos:

> P: *O que aconteceu com a velocidade?*
> ALUNOS: *Diminuiu.*

> P: *Então se eu fosse andar mais devagar...*
> ALUNOS: *Ia gastar mais tempo, vai demorar mais*.
> P: *Então qual é o tempo gasto?*
> ALUNOS: *40 minutos*.

Assim como ocorrido no problema 1, os alunos, inicialmente, sentiram dificuldades para compreender as relações estabelecidas entre as grandezas desse problema. Contudo, após várias discussões, que foram possíveis em função do trabalho com a oralidade, houve reformulações de estratégias. As respostas aos nossos questionamentos mostraram que eles perceberam as relações entre as grandezas envolvidas no problema.

Não constatamos o emprego da estratégia *tarefa total* como prevíamos na análise a *priori.*

<u>Problema 3</u>

Nos 5 primeiros dias de janeiro choveu em 3 dias. E nos 10 primeiros dias de janeiro choveu quantos dias?

Os participantes interpretaram esse problema, inicialmente, como se envolvesse grandezas diretamente proporcionais, assim como ocorreu nos problemas desse tipo, propostos nas sessões anteriores. Porém, sem a necessidade de nossa interferência, alguns retomaram ideias utilizadas na resolução do problema 2 da 2ª sessão, que também não envolve grandezas proporcionais:

> LI: *6 dias.*
> MA: *Aproximadamente 6 porque seria o dobro conforme a atividade, mas não é provável saber que vai chover o mesmo tanto, então é aproximadamente 6.*
> JU: *Aproximadamente 6.*
> GI: *É o que tinha falado na aula passada do futebol, provavelmente 6.*

Havia, nas formulações realizadas, manifestações de regras do contrato didático, pois apesar de darem evidências de que compreendiam que não existia relação entre as grandezas do problema, não aceitavam uma solução que não fosse numérica e determinada. Assim, houve necessidade de nossa participação nas discussões:

> P: *E que conclusão tínhamos chegado sobre esse "provavelmente"? Foi aceito como resposta?*
> ALUNOS: *Não.*
> FE: *Aproximadamente 6.*
> JU: *Provavelmente 6.*
> LI: *Exatamente 6.*
> MA: *Você não sabe se vai chover a mesma coisa.*
> LI: *É exatamente 6 porque se não fosse exatamente ele não ia por esses números aí.*
> LG: *É, segundo a interpretação da pergunta, dá 6, exatamente 6, mas se você pensar teoricamente vai dá aproximadamente 6.*

Os alunos tentaram validar suas estratégias e utilizaram a *estratégia escalar*, como se o problema envolvesse grandezas diretamente proporcionais:

> FE: *De acordo com o problema ele tá pedindo que em 5 dias chove 3 dias, então nos outros 5 dias vai chover 3 dias também, daí 6 dias.*
> P: *A gente tem essa certeza?*
> LG: *Não.*
> FE: *De acordo com o problema sim.*

A fim de provocar reflexões e procurar compreender melhor o raciocínio dos alunos, fizemos algumas intervenções, o que nos levou à percepção de que as respostas dadas por eles pareciam estar vinculadas às regras do contrato didático e não à incompreensão das relações existentes entre as grandezas, como podemos verificar no trecho transcrito do protocolo:

> P: *Qual seria a resposta?*
> LI: *A resposta é 6.*
> P: *Todo problema tem que ter uma resposta?*
> ALUNOS: *Tem.*
> LI: *Lógico que tem.*
> LG: *Não, nem sempre, às vezes dá vazio, zero.*
> P: *LG quando você fala vazio, o vazio é uma resposta?*
> LG: *É.*
> FE: *Não tem resposta.*
> JU: *Aproximadamente 6.*
> P: *Se chover hoje, eu tenho garantia de que choverá amanhã?*
> ALUNOS: *Não.*
> P: *E em relação ao problema, temos certeza de quantos dias choverá em 10 dias?*
> ALUNOS: *Não.*
> P: *E qual seria então a resposta para o problema?*
> LG: *Aproximadamente 6.*
> LE: *Aproximadamente 6.*
> MY: *Não tem resposta.*

Somente as alunas FE e MY pareceram admitir que não era possível determinar uma solução única para o problema. Entendemos, a partir de nossos questionamentos, que alguns alunos perceberam que não existia relação proporcional entre as grandezas do problema. As regras do contrato didático pareciam predominar sobre essa compreensão, levando-os a admitir “aproximadamente 6” como solução.

Finalizamos a atividade confirmando as respostas propostas por FE e MY, esclarecendo ao grupo que no problema em questão não era possível apresentar uma única solução e destacando a não existência de uma relação proporcional entre as grandezas envolvidas.

Problema 4

Seis pedreiros, com a mesma capacidade de trabalho, levam 27 dias para concluir uma certa obra. Com apenas 3 desses pedreiros, em quanto tempo a obra será concluída?

Apenas um aluno resolveu o problema como se o mesmo envolvesse grandezas diretamente proporcionais. Porém, após as formulações apresentadas por outros participantes, ele reformulou sua estratégia e apresentou uma solução correta:

> LG: *13,5 dias.*
> LI: *54 dias*.
> P: *Qual a sua estratégia?*
> LI: *Tinha 6, aí ficou pela metade então tem que dobrar o tempo, porque tirou, aí tem que aumentar.*
> MA: *Acho que é 54 porque se tirar 3 pedreiros, eles vão demorar mais, então tem que aumentar o tempo que eles levaram, então tem que aumentar o dobro porque 3 mais 3 é 6, por isso é 27 mais 27, que é 54 dias.*
> BA: *Eu também confirmo que é 54 dias porque com 6 pedreiros seria bem mais rápido a obra e diminuir 3 pedreiros iria aumentar esse tempo porque você teria que ter muito mais habilidade para fazer, acho que aumenta pra 54 dias.*
> LG: *Mas como o exercício tá falando que todos os pedreiros conseguem fazer o mesmo serviço, o mesmo tempo, não vai ter aquela indecisão, indecisão não, dúvida, como na questão de antes.*

LI utilizou um pensamento qualitativo em sua estratégia, fazendo uma previsão da solução. Já nas formulações dos alunos MA e BA, os mesmos utilizaram a *estratégia escalar*, manifestando a compreensão das relações de invariância e covariância (LAMON *apud* COSTA, 2007).

Verificamos uma situação de validação quando a aluna BA confirmou a solução apresentada por MA e ainda uma comparação feita por LG entre esse problema e o anterior. Seu objetivo foi mostrar que nesse existe relação entre as grandezas, o que foi expressado na afirmativa "não vai ter aquela indecisão, indecisão não, dúvida, como na questão de antes".

Constatou-se que o *meio*, em função da oralidade permitiu que os alunos pudessem agir, discutir e ajudar os colegas que não haviam compreendido o problema. Ao solicitar a alguém do grupo que esclarecesse a dúvida de JU, observamos que BA interagiu com a colega, fazendo-a refletir sobre a relação entre as grandezas:

> JU: *Ah! Não entendi nada.*
> P: *Quem pode explicar para a JU?*
> FE: *São 6 pedreiros para fazer uma construção em 27 dias. Se tirar 3 pedreiros vai ficar 3. Como é metade, então 27 mais 27 vai ficar 54, ah, não sei explicar...*
> BA: *Você vai fazer uma obra, daí você contrata 6 pedreiros, daí pra fazer a obra inteira esses 6 pedreiros vão levar 27 dias. Daí 3 pedreiros decidem, ah, não vou mais fazer porque tenho uma obra mais importante, vou ganhar melhor e 3 vão embora, tchau. Daí só restam 3, com esse tanto você acha que vai aumentar ou diminuir*?
> JU: *Vai aumentar*.
> GI: *É porque vai ter mais trabalho.*
> BA: *Então se 3 mais 3 dá 6, então 27 mais 27?*
> JU: *54.*

GI participou da discussão e destacou a noção de razão:

> GI: *E a professora disse que os pedreiros tem a mesma capacidade de fazer, daí se sai 3, diminui, vai ter que aumentar, multiplicar por 2.*

Para termos a certeza de que JU havia compreendido as explicações dadas pelos colegas e que os demais haviam validado a solução, fizemos algumas perguntas:

> P: *Entendeu, JU?*
> JU: *Entendi*.
> *GI: Muito fácil.*
> *P: Todos concordam com as explicações, com a estratégia, com o resultado?*
> *ALUNOS: Sim.*
> *P: Certo, são necessários 54 dias.*

Alguns alunos manifestaram o raciocínio proporcional por meio das estratégias utilizadas, dando evidências da compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas, principalmente quando explicaram para JU, que não havia compreendido.

Por fim, realizamos diversos questionamentos para que juntos, fizéssemos a sistematização de alguns conceitos:

> P: *Nesses tipos de problemas que resolvemos, temos grandezas que são números que representam uma medida. Nos problemas de hoje, como o que falava dos pedreiros, quais eram as grandezas?*
> FE: *Pedreiros e dias.*
> P: *Tinha-se 6 pedreiros que trabalhavam 27 dias. De 6 passaram para 3 pedreiros. Qual seria uma operação realizada aqui entre esses valores?*
> LG: *Divisão por 2.*
> P: *E com a grandeza dias, o que ocorreu?*
> MY: *Multiplicou por 2.*
> P: *Por que em uma grandeza o valor foi dividido por 2 e na outra grandeza o valor foi multiplicado por 2?*
> JU:*Porque como diminuiu o número de pedreiros tinha que aumentar o número de dias.*
> P: *Então houve uma inversão. Uma grandeza está diminuindo e a outra está aumentando.*
> JU: *Se de um lado está multiplicando passa para o outro lado dividindo, se está dividindo passa multiplicando.*
> P: *Se eu diminuo o número de pedreiros...*
> ALUNOS: *Tem que aumentar o número de dias.*
> P: *Então foram realizadas operações inversas. Observamos que quando a grandeza pedreiro diminuiu, a grandeza dias aumentou na mesma razão, que no caso foi 2. Nessa situação, dizemos que as grandezas pedreiros e dias são inversamente proporcionais.*

Após essa intervenção, alguns alunos, como por exemplo JU, buscaram relacionar o que estava em discussão com conhecimentos anteriores, que julgamos, nesse caso, ser o estudo de equações. Concluímos retomando problemas resolvidos em outras sessões, destacando as relações entre as grandezas diretamente proporcionais e as não proporcionais.

Considerações gerais sobre a 4ª Sessão

Os resultados dos primeiros problemas dessa sessão se assemelham aos dos estudos de Floriani (2004) em relação às dificuldades dos alunos em reconhecer as relações estabelecidas entre as grandezas, como sendo inversamente proporcionais. As primeiras estratégias propostas pelos participantes em todos os problemas dessa sessão, evidenciaram que eles consideravam grandezas diretamente proporcionais. Essa evidência nos fez levantar a hipótese de que, além das dificuldades, como propõe Floriani (2004), eles podem ter reinvestido as estratégias utilizadas ao resolverem os problemas das sessões anteriores que envolviam grandezas diretamente proporcionais.

Ressaltamos que, após algumas intervenções e retroações do *meio*, originadas das discussões, eles conseguiram perceber as relações entre as grandezas e apresentaram uma solução correta, utilizando a *estratégia escalar*.

Em relação ao problema 3, entendemos que compreenderam que o mesmo não envolve grandezas proporcionais e atribuímos as soluções incorretas apresentadas por eles como vinculadas à regra do contrato didático, segundo a qual, todo problema admite uma solução que, no entendimento dos alunos, tem que ser numérica e determinada.

Não foi empregada em nenhum problema a estratégia *tarefa total*, como havíamos previsto na análise a *priori*.

Alguns alunos manifestaram o raciocínio proporcional, mostrando a compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas, através dos argumentos e explicações que utilizaram nas estratégias apresentadas. Além disso, o *meio* proposto, envolvendo a oralidade, também permitiu discussões que os levaram a agir, refletir, argumentar e validar suas estratégias, o que segundo Brousseau (2008) são as situações de ação, formulação e validação. Concordamos com Cândido (2006, p.17) sobre o emprego da oralidade na resolução de problemas, pois quando solicitamos aos alunos que apresentem oralmente os procedimentos utilizados e que os justifiquem, permite-se que eles “modifiquem conhecimentos prévios e construam novos significados para as ideias matemáticas”.

Como membro integrante do meio, participamos de algumas discussões, elaborando questões que lhes possibilitaram repensar procedimentos ou validar estratégias. Também foi possível, juntos, sistematizar alguns conceitos referentes ao tema em estudo.

5.5 5ª SESSÃO

A quinta sessão é composta por problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais e os que não apresentam tais relações. Os principais objetivos nessa sessão são: verificar quais estratégias os alunos mobilizam diante de situações diversificadas e quais reinvestimentos aparecem após institucionalizações realizadas anteriormente.

Nessa sessão os dois primeiros problemas são apresentados oralmente e resolvidos pelos alunos sem a utilização dos instrumentos didáticos lápis e papel. Os seguintes são apresentados impressos e resolvidos por escrito, sendo que o segundo é entregue aos participantes somente após a resolução e apresentação oral do primeiro. A mudança nos valores da variável instrumento didático é mais uma oportunidade de analisarmos se a utilização da escrita tem influência ou não nas estratégias de resoluções apresentadas.

A maioria dos problemas apresenta números inteiros múltiplos, podendo aparecer para os valores de mesma grandeza ou para valores de grandezas diferentes.

Análise a *priori*

Problema 1

Com 2 kg de cobre, faço 8 pulseiras. Quantas pulseiras farei com 7 kg de cobre?[33]

Considerando os estudos de Schliemann e Carraher (1997), este tipo de problema é de fácil solução para os alunos, se resolvido por meio da *estratégia funcional*, pois o valor dado em uma grandeza é múltiplo do valor correspondente na outra grandeza. Assim, esperamos que os alunos utilizem a *estratégia funcional*, podendo expressar a resolução de duas maneiras. Uma delas, fazendo a redução à unidade: a cada 1 kg de cobre fabrica-se 4 pulseiras. Então, para encontrar a quantidade de pulseiras que se fabrica com 7 kg de cobre, é necessário multiplicar 7 por 4, obtendo 28 pulseiras. A outra maneira seria uma formulação sem mencionar a quantidade de pulseiras produzidas com 1 kg de cobre, mas analisando somente a razão que liga as duas grandezas. Portanto, os alunos podem apresentar o seguinte raciocínio: “observamos que 8 é 4 vezes 2, então a quantidade de pulseiras fabricadas com 7 kg é encontrada multiplicando 7 vezes 4, que resulta em 28 pulseiras”.

Outra estratégia que pode ser utilizada para resolver esse problema é a *estratégia escalar*. Caso isso ocorra, prevemos que será com o emprego de adições sucessivas, pois os valores dados para a grandeza cobre não são múltiplos. Dessa maneira, um raciocínio possível seria o seguinte: “com 2 kg de cobre fabricam-se 8 pulseiras; com 4 kg fabricam-se 16 pulseiras; com 6 kg fabricam-se 24 pulseiras. Para completar os 7 kg, é preciso acrescentar a

[33]TINOCO, L. A. de A. Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade. In: *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 14, 1989. p. 16.

informação de que com 1 kg fabricam-se 4 pulseiras. Assim, com 7 kg são confeccionadas 28 pulseiras (24 + 4)".

Ao empregar uma dessas estratégias, os alunos estarão manifestando a compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas, ou seja, que elas variam e variam conjuntamente (invariância e covariância), como propõem Post, Behr e Lesh (1995).

Problema 2

Se 5 torneiras enchem um tanque em 45 minutos, 10 torneiras iguais a essas encheriam esse tanque em quantos minutos?[34]

Considerando que esse problema é apresentado logo após um que envolve grandezas diretamente proporcionais, é provável que os alunos, de início, não o identifiquem como contendo grandezas inversamente proporcionais e reinvistam o raciocínio utilizado na resolução do problema anterior. Caso isso ocorra, uma resposta incorreta, a partir do entendimento de que as grandezas são diretamente proporcionais, é propor 90 minutos como solução. Contudo, esperamos que as retroações do *meio* promovam reflexões que os conduzam para a compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas do problema e que percebam que aumentando a quantidade de torneiras, o tempo deve diminuir.

Uma estratégia prevista, que pode ser recorrente da estrutura dos problemas propostos na 4ª sessão, é a *estratégia escalar*. Observando que a quantidade de torneiras aumentou o dobro, então o tempo deve reduzir pela metade. Logo, as 10 torneiras encheriam o tanque em 22, 5 minutos (45: 2).

Outra possibilidade de resolução para esse problema é por meio da *estratégia da redução à unidade*, com a seguinte formulação: "se 5 torneiras enchem um tanque em 45 minutos, 1 torneira o enche em 5 x 45 = 225 minutos, e 10 torneiras o encherá em 225 : 10 = 22,5 minutos".

Se for apresentada a solução correta, a partir do uso da *estratégia escalar* ou da *redução à unidade*, entenderemos que houve a manifestação do raciocínio proporcional, com o entendimento das relações de invariância e covariância descritas por Post, Behr e Lesh (1995) e Lamon (*apud* COSTA, 2007).

---

[34] BIANCHINI. E., *Matemática.* 6ª série. 6. ed. São Paulo: Moderna, 2006. p.196.

<u>Problema 3</u>

Priscila foi ao supermercado com a sua mãe. Como o estacionamento grátis do supermercado estava lotado, sua mãe precisou deixar o carro num outro estacionamento rotativo que tinha a tabela de preços abaixo:[35]

Tempo	Preço
1 h	R$ 3,00
2 h	R$ 7,00
3 h	R$ 11,00
4 h	
5 h	

Complete a tabela acima.

Existe uma relação proporcional entre o tempo e o preço a ser pago? Por quê?

O problema é apresentado impresso, os alunos resolvem por escrito e apresentam a solução oralmente ao grupo para que ocorra ou não a validação. Prevemos que percebam que enquanto na coluna tempo a hora aumenta de 1 em 1 hora, na coluna preço o valor aumenta, após a primeira hora, de quatro em quatro reais. Assim, a solução esperada quanto ao preenchimento da tabela é: R$ 15,00 referente a 4 horas e R$ 19,00 referente a 5 horas.

Quanto à pergunta sobre a existência da relação proporcional, a resposta correta é dizer que não existe relação proporcional entre o tempo e o preço, pois os valores não aumentam na mesma razão. No entanto, é possível que eles respondam afirmativamente ao observarem que ao aumentar os valores referentes ao tempo, os valores correspondentes ao preço também estão aumentando, não considerando a razão e demonstrando assim, a não-compreensão das relações estabelecidas entre grandezas proporcionais, o que segundo Post, Behr e Lesh (1995) caracteriza a não-manifestação do raciocínio proporcional.

<u>Problema 4</u>

Para preparar a tinta, um pintor mistura, a cada 4 latas de tinta concentrada, 6 latas de água. Quantas latas de água são necessárias para dissolver 8 latas de tinta?[36]

---

[35] TINOCO, L. A. de A. Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade. In: *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 14, 1989. p. 13. (adaptado)

A partir do resultado obtido acima, complete a tabela abaixo:

Tinta concentrada	**Água**	**Operações realizadas**
4	6	
8		
	3	
1		

Existe uma relação proporcional entre as grandezas tinta e água? Por quê?

Este problema é apresentado impresso aos alunos, os quais devem resolvê-lo por escrito. Por ser um problema que envolve grandezas diretamente proporcionais e apresentar números de mesma grandeza que são múltiplos, esperamos que seja utilizada a *estratégia escalar*, prevendo que os alunos possam reinvistir estratégias usadas anteriormente. Com o emprego dessa estratégia, uma solução que envolva uma estrutura multiplicativa seria: como a quantidade de latas de tinta concentrada dobrou (2 x 4 = 8), então a quantidade de latas de água também dobrará (2 x 6 = 12). Logo, para dissolver as 8 latas de tinta são necessárias 12 latas de água.

Mas como afirmam Schliemann e Carraher (1997), essa estratégia também pode ser utilizada com o emprego de adições sucessivas: se para 4 latas de tinta são necessárias 6 latas de água, para 8 latas de tinta são necessárias 12 latas de água.

Outra estratégia que pode ser empregada pelos é a *estratégia funcional*, com redução à unidade. Por meio desta, determina-se quantas latas de água são necessárias para dissolver 1 lata de tinta, dividindo 6 por 4, que resulta em 1,5 latas de água. Logo, para saber quantas latas de água são necessárias para dissolver 8 latas de tinta, é preciso multiplicar 8 por 1,5, obtendo 12 latas de água.

Esperamos que eles percebam a relação proporcional entre as grandezas e preencham a tabela com os valores correspondentes para cada uma, indicando as operações realizadas na terceira coluna. Prevemos que eles possam continuar empregando a *estratégia escalar*, pois os

---

[36] TINOCO, L. A. de A. Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade. In: *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 14, 1989. p. 10. (adaptado)

números de mesma grandeza são múltiplos, o que Schliemann e Carraher (1997) apontam como facilitador para a utilização dessa estratégia. Assim, uma solução prevista é a seguinte:

Tinta concentrada	**Água**	**Operações realizadas**
4	6	-
8	**12**	**2x4= 8 e 2 x 6 = 12 ou** **4 + 4=8 e 6 + 6=12**
2	3	**6:2=3 e 4:2=2 ou** **12:4=3 e 8:4=2**
1	**1,5**	**4:4=1 e 6:4=1,5 ou** **2:2=1 e 3:2=1,5**

Os valores destacados em negrito, na tabela, representam as soluções para o problema em função do que foi solicitado.

Entendemos que ao utilizarem uma das estratégias apresentadas na resolução desse problema e ao completarem a tabela, os participantes estarão manifestando o raciocínio proporcional por meio do pensamento quantitativo, conforme Post, Behr e Lesh (1995).

Quanto às perguntas "Existe uma relação proporcional entre as grandezas tinta e água? e Por quê?", esperamos que respondam afirmativamente e justifiquem essa resposta com argumentos que manifestem a compreensão de que, quando aumenta a quantidade de latas de tinta, também deve aumentar a quantidade de latas de água na mesma razão. Por outro lado, quando diminui a quantidade de latas de tinta, a quantidade de latas de água também diminui na mesma razão.

Consideramos que, se utilizarem argumentos como os aqui expostos, estarão dando indícios do raciocínio proporcional, mostrando a compreensão das relações de invariância e covariância estabelecidas entre as grandezas, como relata Lamon (*apud* COSTA, 2007).

No entanto, pode ocorrer de os alunos apresentarem uma resposta afirmativa em relação à existência da proporcionalidade, mas terem dificuldades em explicar o porquê, conforme constatou Costa (2007) quando solicitou aos sujeitos participantes de sua pesquisa que justificassem os resultados apresentados ou o raciocínio empregado para encontrar a solução.

No final dessa sessão é prevista a institucionalização de alguns conceitos como razão, grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

Experimentação

Nesta quinta sessão os problemas 1 e 2 foram apresentados oralmente aos alunos que os resolveram sem usar lápis e papel. Já os problemas 3 e 4 foram apresentados impressos por possuírem uma estrutura diferente dos anteriores. Essa sessão durou 50 minutos e teve a presença de 12 alunos, pois 4 foram preparar um trabalho do ensino regular. Todos participaram intensamente das discussões, havendo necessidade de intervenções para permitir que as estratégias fossem acompanhadas pelos participantes.

Análise a *posteriori*

<u>Problema 1</u>

Com 2 kg de cobre, faço 8 pulseiras. Quantas pulseiras farei com 7 kg de cobre?

Logo após a leitura desse problema, vários alunos manifestaram 28 como solução, porém sem apresentar a estratégia utilizada. Tivemos que intervir questionando as estratégias usadas, no sentido de compreender o raciocínio que estavam empregando. Apesar de apresentarem uma solução correta, as estratégias formuladas mostraram erros e dúvidas em relação à divisão realizada, mas com indícios da utilização da *estratégia funcional,* com passagem pela *redução à unidade*, como pode ser observado nas seguintes formulações:

> LI: *28. Eu fiz 8 dividido por 2, quer dizer, 2 dividido por 8 que é igual a 4 e 4 multiplicado por 7 que deu 28.*
> LG: *Não, está errado.*
> ALUNOS: *Não, não, está certo.*
> LG: *É, está certo, eu que fiz errado. Mas é 8 dividido por 2 ou 2 dividido por 8?*

Ao discordar de LI, LG recebeu reprovação dos colegas. Em seguida, mesmo concordando com eles, ainda expôs o mesmo tipo de dúvida referente à divisão a ser realizada, como ocorreu na resolução do problema 3 da 2ª sessão. Esse fato nos fez imaginar inicialmente duas hipóteses: que esse aluno tinha dificuldade relacionada ao algoritmo da divisão ou ainda não compreendia as relações estabelecidas entre as grandezas desse tipo de problema.

No entanto, além das interações ocorridas entre os alunos, o *meio* proposto também permitiu interações entre a pesquisadora e os participantes, o que possibilitou rever essas hipóteses e observar que LG estava discordando da divisão de 2 por 8.

Quanto à manifestação dos outros alunos, entendemos que estavam validando somente a solução 28 proposta por LI; não fizeram comentários sobre a divisão de 2 por 8, até que houve uma intervenção:

> MA: *Eu descobri o valor da pulseira, que dá 4 e multiplica pelo quilo, aí dá 28.*
> P: *Quais foram as operações envolvidas?*
> MA: *Divisão e multiplicação. O quilo do cobre pelas pulseiras.*
> P: *2 dividido por 8?*
> MA: *Não. É 8 dividido por 2 que dá 4.*

A fim de compreender a expressão “o valor da pulseira” utilizada por MA e também provocar a participação de outros alunos, fizemos alguns questionamentos ao grupo:

> P: *O que o 4 representa?*
> MA: *Representa o quanto vale 1 quilo de cobre.*
> LG: *A metade de 2 é 1 e a metade de 8 é 4.*
> ALUNOS: *1 quilo de cobre.*
> P: *Quantas pulseiras se faz com 1 quilo de cobre?*
> JU: *4 pulseiras. Olha, com 1 quilo faz 4, então com 2 quilos faz 8 pulseiras. Multiplica por 2.*
> P: *Foi essa a estratégia apresentada pela LI?*
> LG: *Não. Ela fez 2 dividido por 8. Eu falei.*
> P: *Então, o que concluímos?*
> GI: *Que com 1 quilo de cobre faz 4 pulseiras e com 7 quilos faz 28 pulseiras.*

As formulações, mesmo empíricas ou incompletas, contribuíram para a construção de uma estratégia que apresentasse a solução correta para o problema. LG empregou a *estratégia escalar* de forma parcial, identificando as metades dos valores nas grandezas diferentes. Em seguida, JU validou sua formulação, fazendo relações entre as grandezas diferentes, mas também sem apresentar a solução do problema. Já o aluno GI propôs uma solução utilizando a *estratégia escalar* com redução à unidade. Segundo Schliemann e Carraher (1997), a resolução desse tipo de problema empregando essa estratégia é mais difícil para os alunos do que usando a *estratégia funcional*, pois nesse problema os números de mesma grandeza não são múltiplos.

Consideramos que esses alunos manifestaram o raciocínio proporcional, utilizando um pensamento quantitativo (POST, BEHT e LESH, 1995), mostrando a compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas do problema, assim como outros que o resolveram com o uso da *estratégia funcional*.

Além da utilização das estratégias *escalar* e *funcional,* identificamos o uso da *estratégia da regra de três*, não prevista na análise a *priori*. O algoritmo foi empregado por LA, mesmo com a ausência da aluna LE que o havia utilizado nas duas primeiras sessões. A formulação de LA provocou questionamentos e retroações do *meio* por parte dos colegas:

> LA: *Eu fiz diferente. Eu peguei 8 e multipliquei por 7 que é 56 e dividi por 2, deu 28.*
> P: *O que vocês acham dessa estratégia?*
> LA: *É....não sei.*
> MR: *Ela só inverteu a ordem. Primeiro multiplicou e depois dividiu, mas o resultado é o mesmo.*
> JU: *Professora, estou com uma dúvida: por que dividiu por 2?*
> P: *E aí LA?*
> LA: *Porque tem 2 quilos.*
> LG: *Ela só trocou a ordem das operações, mas vai dar o mesmo resultado.*
> LA: *4 vezes 7 é igual a 28 e 7 vezes 4 é igual a 28.*
> MR: *O resultado é o mesmo, mas o pensamento é errado. Esse 8 é uma coisa diferente do 7. Então o 7 é outra coisa. Você não pode multiplicar porque são coisas diferentes. O pensamento é errado.*
> P: *Temos que ter cuidado para não fazer só operações, mas compreender o que estamos fazendo. É permitido relacionar os valores das grandezas diferentes.*

A aluna LA procurou explicar por que as operações realizadas em sua estratégia eram válidas e tentou validá-la junto aos colegas, mostrando que a ordem em que efetuou os cálculos não alterou o resultado. Levantamos a hipótese de que a aluna poderia estar somente realizando cálculos, sem a compreensão de que estaria utilizando um algoritmo, o que atribuímos à regra do contrato didático, em que o aluno acredita que em Matemática resolve-se um problema efetuando-se operações.

Apesar de os argumentos de LA não convencerem MR, ele deu evidências de que compreendia a existência das grandezas diferentes, mas não aceitava que as mesmas podiam se relacionar. Diante disso, optamos por limitar nossa atuação dizendo que seria possível relacionar os valores de grandezas diferentes, sem, contudo, fazermos uma institucionalização do conceito da regra de três, pois entendemos que isso influenciaria na formulação das estratégias utilizadas na resolução dos problemas subsequentes.

<u>Problema 2</u>

Se 5 torneiras enchem um tanque em 45 minutos, 10 torneiras iguais a essas encheriam esse tanque em quantos minutos?

Inicialmente vários alunos reivestiram a *estratégia funcional* com redução à unidade utilizada para resolver o problema 1, admitindo que o mesmo envolvia grandezas diretamente proporcionais. Porém, rapidamente houve retroações do *meio*, por parte da aluna JU, que empregou um pensamento qualitativo, fazendo comparações entre os dados do problema e o resultado a ser determinado, o que segundo Post, Behr e Lesh (1995) representa um raciocínio proporcional. Observemos as discussões ocorridas entre os alunos:

> ALUNOS: *90 minutos*.
> JU: *Não, não,... vai ser men*os.
> GI: *Divide 45 por 5 que dá 9 que é quanto tempo gasta com uma torneira aí multiplica por 10, dá 90 minutos.*
> JU: *Não é, não é, sabe por quê? Se com 5 torneiras a gente demora 45 minutos, com 10 tem que ser menos*.
> LG: *22,5 minutos*.
> GI: *Verdade, eu errei.*

LG apresentou a solução correta, porém não explicou a estratégia empregada. Ao contrário, MR fez uma formulação detalhada, com argumentos que mostraram o uso da *estratégia escalar* e a compreensão da razão, porém não indicando a solução:

> MR: *5 torneiras, cada uma é igual cada uma das 10 torneiras, então as 10 torneiras, como é um valor maior, elas encherão mais rápido que as 5, então o valor tem que ser menor, não maior, então divide por 2 como no caso é a mais, então multiplicou por 2, que é o dobro, então você divide o tempo por 2 que daria...*
> LG: *22,5 minutos*.

O *meio* proposto a partir das interações entre os alunos, influenciava alguns e outros não, como por exemplo, a formulação de MR que pareceu ter feito LG refletir sobre a razão e validar sua estratégia, enquanto LI continuava propondo uma solução incorreta para o problema:

> LG: *A água vem na mesma quantidade?*
> LI: *5 mais 5 é 10, aí como é 10 então 45 mais 45 é 90.*
> *JU: Não, está errado.*
> MR: *Está errado.*

> LG: *LI, com 5 torneiras tem uma velocidade e gasta 45 minutos, assim com mais 5 torneiras vai encher mais rápido, então vai diminuir o tempo.*
> P: *Concorda LI?*
> LI: *Sim*.

O *meio* organizado com o recurso da oralidade, permitiu a discussão das estratégias e a reflexão sobre suas formulações, pois como relata Cândido (2006), ao solicitar aos alunos que apresentem oralmente os procedimentos utilizados ao resolver um problema e que os justifique, propicia-se que os mesmos façam a construção de significados para as ideias matemáticas, como por exemplo:

> FE: *5 torneiras faz 45 minutos, a gente podia pegar 45 mais 45 dividido por ... não, não dá.*
> MA: *Eu concordo com o LG porque mais torneiras vão encher mais rápido.*

Apesar das soluções incorretas que foram apresentadas, não houve a necessidade de nossa intervenção em muitos momentos, pois os próprios alunos interagiam aprovando ou reprovando estratégias e soluções expostas pelo grupo. Dessa forma, consideramos que houve a manifestação do raciocínio proporcional por parte de alguns, com indícios da noção de invariância e covariância, conforme propõe Post, Behr e Lesh (1995) e Lamon (*apud* COSTA, 2007).

Não foi utilizada a estratégia redução à unidade conforme previsto na análise a *priori*.

<u>Problema 3</u>

Priscila foi ao supermercado com a sua mãe. Como o estacionamento grátis do supermercado estava lotado, sua mãe precisou deixar o carro num outro estacionamento rotativo que tinha a tabela de preços abaixo:

Tempo	**Preço**
1 h	**R$ 3,00**
2 h	**R$ 7,00**
3 h	**R$ 11,00**
4 h	
5 h	

Complete a tabela acima.

Existe uma relação proporcional entre o tempo e o preço a ser pago? Por quê?

Após os alunos terem resolvido esse problema individualmente e por escrito, eles tiveram que apresentar e discutir suas estratégias com o grupo.

Apresentamos primeiramente as análises referentes aos resultados propostos pelos alunos para o preenchimento da tabela. Verificamos nas respostas escritas que somente a aluna LI, dentre os 12 alunos participantes, preencheu a tabela com valores incorretos, propondo R$ 14,00 para 4 horas e R$ 18,00 para 5 horas. Assim, se a análise fosse realizada somente sobre a produção escrita dos alunos, poderíamos afirmar que eles não tiveram dúvidas para resolver essa primeira etapa do problema. No entanto, como consideramos para análise também as apresentações orais, observamos que apesar de completarem corretamente a tabela, alguns questionaram os dados propostos no problema:

> JU: *A diferença entre eles, de 3 a 7 dá 4 reais, de 3 horas conseguiu 11, e se a diferença deles são 4 reais, então dá 15 reais para 4 horas e depois em 5 horas vai conseguir 19 reais.*
> LI: *Se 1 hora é 3 reais, 2 horas tinha que ser 6 reais, porque aumentou 2 reais, não tinha que ser 6 reais?*
> GI: *Não tinha.*
> LI: *Deixa eu falar... tinha que ser 6 reais, aumentou 1, no 3 tinha que ser 15 reais, ah, não.*
> LG: *Se 1 hora é 3 reais, 2 horas devia ser 6 reais porque 1 mais 1 é 2 horas, e como 1 hora é 3 reais, então 3 mais 3 deveria se 6 reais. Essa foi minha dúvida, mas pelo que está aqui vai ser 4 reais.*

Entendemos que as dúvidas se referiam à constante de proporcionalidade, pois além de LI, outros alunos comentavam, empiricamente, que as grandezas não aumentavam com a mesma razão. LG, por exemplo, teve a dúvida, mas mostrou compreender a situação proposta no problema.

O *meio*, a partir dos debates, propiciou interações entre os alunos, que tentavam esclarecer as dúvidas dos colegas e validar suas soluções:

> MR: *Depois de uma hora vai aumentando 4 reais, eles estabeleceram uma taxa de juros para cada hora a mais.*
> P: *MR como você preencheu sua tabela?*
> MR: *Para 4 horas, 15 reais e para 5 horas, 19 reais.*
> MA: *Eu pensei que a cada hora que passava ele aumentava 4 reais que é a diferença no preço que já tinha estipulado.*
> P: *Todos encontraram esses valores?*
> GI: *Professora, depois de 1 hora vai aumentando 4 reais, mas na primeira hora é 3 reais.*

A fim de verificar se haviam compreendido as relações estabelecidas entre as grandezas, passamos a segunda parte do problema, na qual identificamos situações de ações e formulações (BROUSSEAU, 2008):

> P: *E sobre a pergunta, se existe ou não uma relação proporcional entre o tempo e o valor a ser pago, o que responderam?*
> MA: *Sim, a cada hora que passa aumenta 4 reais.*
> P: *LA, você acha que existe uma relação proporcional?*
> LA: *Sim.*
> LG: *Sim, há diferença de 4 reais em 4 reais a cada hora porque quanto mais tempo no local, tem que pagar mais.*
> GI: *É, tem uma lógica nisso.*
> MA: *Sim, porque cada hora que passava aumentava o preço.*
> P: *Todos concordam que existe uma relação proporcional?*
> ALUNOS: *Sim.*

Para os alunos, a relação proporcional se referia apenas ao fato de ocorrer aumento para os valores nas duas grandezas, não considerando a constante de proporcionalidade. Esse entendimento pode ter sido recorrente dos resultados de problemas anteriores. Houve então a necessidade de intervenções com o objetivo de possibilitar que repensassem suas formulações. Retomamos então os problemas anteriores:

> P: *Vamos voltar aos problemas realizados anteriormente. Quando aumentava a quantidade de cobre, o que acontecia com a quantidade de pulseiras?*
> JU: *Aumentava.*
> P: *E no caso das torneiras, o que aconteceu com o tempo quando aumentou a quantidade de torneiras?*
> JU: *Quando aumentou a quantidade de torneiras, diminuiu o tempo.*
> P: *Que relação vocês observaram na quantidade de torneiras, de 5 para 10, para depois encontrarem o tempo?*
> LA: *Aumentava 5 torneiras.*
> P: *Por meio de qual operação?*
> LG: *Divisão.*
> JU: *Somava 5.*
> MA: *Multiplicava por 2.*
> P: *E entre os valores para o tempo, que operações vocês realizaram?*
> MY: *Dividiu por 2.*
> MA: *Dividiu por 2.*
> P: *O valor envolvido nas operações foi o mesmo?*
> ALUNOS: *Sim.*
> P: *E na atividade que estamos realizando agora, olhando na tabela para a coluna do tempo, aumenta como?*
> LG: *De 1 em 1 hora.*
> P: *E na coluna reais, como aumenta?*
> LG: *De 4 em 4 reais.*
> LG: *Não está aumentando a mesma quantidade, mas estão aumentando, é tipo uma balança.*

> JU: *Os dois aumentam.*
> P: *Se é uma balança, você está colocando o mesmo "peso" nos dois lados?*
> JU: *Não.*

Ao realizar essas intervenções, julgamos que em determinados momentos antecipamos informações para os alunos, o que não foi percebido por todos e nem resultou em compreensão quanto à não existência de relação proporcional, porém parece que despertaram dúvidas em alguns:

> P: *Existe uma relação proporcional entre o tempo e o valor pago?*
> MA: *Sim, porque mais tempo ele ficar, mais ele vai pagar.*
> MY: *Eu acho que não, porque aqui está perguntando se entre o tempo e o preço tem relação proporcional. Não, porque o tempo está andando de 1 em 1 hora e o preço de 4 em 4 reais.*
> P: *O que vocês acham da explicação da MY?*
> LG: *É como eu falei, se o tempo aumenta, o preço também tem que aumentar.*

Apesar de MY responder que não havia relação proporcional, não pudemos concluir que a mesma tenha manifestado um raciocínio proporcional, pois nos pareceu que seus argumentos se referiam à análise baseada nas relações aditivas que ocorrem com os valores de mesma grandeza e não em uma relação multiplicativa que envolve a unidade.

As nossas intervenções e as discussões ocorridas entre os alunos permitiram reflexões como, por exemplo, a de LG que percebeu uma diferença entre as operações realizadas nesse e no problema anterior:

> LG: *Por que aqui vai somando e no outro exercício usa multiplicação e divisão?*
> P: *O que vocês podem dizer sobre a pergunta do LG?*
> LI: *Qual a pergunta?*
> LG: *Se tem alguma influência que aqui é só adição, que vai somando 4 em 4 em 1 hora em 1 hora e lá é multiplicação e divisão?*
> LI: *Não tem relação.*

Observamos que os questionamentos em relação à formulação de LG não estavam sendo suficientes para que eles percebessem que não havia relação proporcional entre as grandezas do problema. Então decidimos não mais intervir para não influenciar a resolução do problema seguinte. Assim, dissemos aos alunos que iríamos resolver outro problema e depois retornaríamos a este para que decidissem sobre a existência ou não da relação proporcional, já que apresentavam soluções diferentes. Recolhemos as atividades e entregamos o próximo problema.

<u>Problema 4</u>

Para preparar a tinta, um pintor mistura, a cada 4 latas de tinta concentrada, 6 latas de água. Quantas latas de água são necessárias para dissolver 8 latas de tinta?

A partir do resultado obtido acima, complete a tabela abaixo:

Tinta concentrada	Água	Operações realizadas
4	6	
8		
	3	
1		

Existe uma relação proporcional entre as grandezas tinta e água? Por quê?

Os alunos tiveram um tempo para resolver o problema individualmente e por escrito. Em seguida solicitou-se que fizessem as apresentações das estratégias e das soluções para o grupo, orientando-os para que não alterassem os registros escritos, mesmo verificando diferenças em relação às soluções dos colegas durante as apresentações.

Analisando as produções escritas, observamos que dos 12 alunos participantes, 1 não resolveu, 1 deixou incompleto, 1 apresentou solução incorreta e os outros 9 completaram a tabela com a solução correta, utilizando a *estratégia escalar* a partir dos valores dados na 1ª linha ou em outra linha, como por exemplo, completaram a 4ª linha tomando por referência os valores da 3ª linha. Para as análises realizadas consideramos as apresentações orais e as produções escritas.

Como previsto na análise a *priori*, alguns alunos utilizaram a *estratégia escalar* para encontrar a solução do problema referente à 2ª linha da tabela, com formulações semelhantes as de JU e LG que mostraram compreensão das relações de invariância e covariância conforme Post, Behr e Lesh (1995) e Lamon (*apud* COSTA, 2007):

> JU: 12. *Eu fiz 2 multiplicado por 4 porque ele queria 8 latas de tinta, já que multipliquei o tanto de lata de tinta, então eu tinha que multiplicar o mesmo no tanto de água. Aí eu multipliquei 2 por 6 que deu 12.*
> LI: *4 multiplicado por 2 é 8, 6 multiplicado por 2 é 12.*
> LG: *12 porque multiplicou 4 latas por 2 para ter 8 latas de tinta, então tinha que multiplicar o de água para igualar.*

No entanto, houve estratégias incorretas, como ocorreu com o aluno MF, que resolveu o problema tentando utilizar a *estratégia funcional*, porém considerando o aumento do valor de uma grandeza para outra por meio de adição, conforme seu registro escrito:

Para preparar a tinta, um pintor mistura, a cada 4 latas de tinta concentrada, 6 latas de água. Quantas latas de água são necessárias para dissolver 8 latas?

R = 2 latas

A partir do resultado obtido acima, complete a tabela abaixo:

Tinta concentrada	Água	Operações realizadas
4	6	Somei 2
8	10	Somei 2
1	3	Somei 2
1	3	Somei 2

(Resolução do problema 4 apresentado pelo aluno MF)

Por meio desse registro, notamos que a estratégia utilizada por esse aluno demonstrou a não-compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas do problema, conforme Post, Behr e Lesh, (1995). Contudo, consideramos a hipótese de que o mesmo tenha reinvestido a estratégia utilizada no problema anterior. Quando MF apresentou sua estratégia oralmente, houve retroações do *meio*, por parte dos colegas:

> P: *E para a 3ª linha a ser completada da tabela, ou seja, para 3 latas de água, quantas latas de tinta seriam?*
> MF: *Eu achei 2 porque é 4 de tinta e 6 latas de água, aí 6 menos 4 é 2.*
> P: *Ouviram o MF? O que acham?*
> LU: *A diferença de água que está 6, e a diferença dá pra ver que 6 é o dobro de 3, 6 dividido por 2, então tem que dividir 4 por 2 para manter a igualdade. Daí 2 latas de tinta.*
> LA: *Eu também achei 2.*

LU formulou uma solução correta, utilizando a *estratégia escalar* e argumentou dando indícios de compreensão das relações de invariância e covariância (POST, BEHR e LESH, 1995), evidenciando a razão. Verificamos ainda uma situação de validação (BROUSSEAU, 2008) quando LA confirmou a solução proposta por LU.

Conforme previsto na análise a *priori,* os alunos utilizaram a *estratégia escalar* considerando outros valores que não os apresentados na 1ª linha da tabela, como por exemplo, LG. Também empregaram a *estratégia funcional* com redução à unidade, como fez LA:

> P*: E para a 4ª linha, ou seja, para 1 lata de tinta, quantas são as latas de água?*
> LA*: 1,5, porque no começo temos 4 latas de tinta e 6 de água. Aí eu dividi 6 por 4 para descobrir quantas latas de água dissolve 1 lata de tinta. Aí 1,5 de água dissolve 1 lata de tinta.*
> LG*: Como 2 latas de tinta dividido por 2 é igual a 1, então 3 latas de água dividido por 2 é a resposta, então deu 1,5.*
> P*: E os demais alunos?*
> ALUNOS*: Mesma resposta.*

Constatamos que houve a situação de validação (BROUSSEAU, 2008) por grande parte dos alunos que concordaram com a solução apresentada pelos colegas. Consideramos ainda que ocorreu a manifestação do raciocínio proporcional por parte de alguns alunos, com compreensão da relação proporcional entre as grandezas, conforme conceitos de Post, Behr e Lesh (1995) e Lamon (*apud* COSTA, 2007). Realizamos algumas intervenções a fim de a compreensão dos alunos quanto à segunda parte do problema:

> P*: Existe relação proporcional entre as grandezas tinta e água?*
> LI*: Sim, porque divide e multiplica por 2 em todas.*
> LA*: Não, porque com 4 latas de tinta usa 6 latas de água e com 8 latas de tinta usa 12 de água, então no lado (coluna) de tinta soma 4 e do lado (água) soma 6, então quando aumenta lata de tinta não é o mesmo tanto que aumenta as latas de água.*
> MR*: Tem proporção 4 latas de tinta e 6 latas de água. O que 8 é de 4? O dobro. E de 6 para 12 eu multiplico por 2. O que 2 é de 4? Metade, e de 6 para 3 é metade. Se colocar numa ordem crescente, vai dobrando.*
> P*: Temos duas opiniões, da LA e do MR. A LA verificou que nas colunas de tinta e água os valores vão aumentando com soma de valores diferentes. O MR observou que nas duas colunas, os valores em cada linha vão sendo obtidos com operações de multiplicação ou divisão envolvendo o mesmo valor. Então para ele existe a relação proporcional porque consegue fazer a mesma operação nas duas colunas com o mesmo valor. O que vocês acham?*
> LA*: Sim, porque observando as operações de multiplicação e divisão vão ser sempre as inversas, porque se você vai dividir uma coisa ou se você multiplica por um mesmo número você vai obter o mesmo resultado sempre, assim proporcionalmente você vai obter o mesmo resultado.*

LI*: Quando dá pra multiplicar e dividir igual.*

Apesar das retroações do *meio,* com as discussões entre os alunos e formulações como a exposta por MR, que mostra a compreensão da relação proporcional entre as grandezas, outros ainda continuavam discordando quanto à existência da relação proporcional. Isso nos levou a intervir, fazendo algumas institucionalizações:

P*: Vamos comparar esse exercício com aquele do estacionamento. Será que com a observação que o MR fez nesse problema, seria possível no exercício do estacionamento, ir de 1 hora para 2 horas e de 3 reais para 7 reais, multiplicando os valores da hora e do preço a ser pago por um mesmo valor?*
LG*: Não.*
P*: Naquele, os valores aumentavam, porém com valores diferentes para cada grandeza, ou seja, não aumentavam na mesma razão. Nesse as grandezas aumentam (ou diminuem) por meio da multiplicação (ou divisão) de um mesmo valor nas duas grandezas, isto é, aumentam na mesma razão. Logo, nesse problema existe relação proporcional entre as grandezas tinta e água e no outro não.*

No final da sessão fizemos questionamentos, com o propósito de continuar a institucionalização de alguns conceitos, a partir dos problemas resolvidos:

P*: Para finalizar esse assunto, vamos rever o seguinte: quando nós falamos do problema do cobre e das pulseiras, tínhamos 2 quilos de cobre e era possível fazer 8 pulseiras. Quando colocamos 7 quilos de cobre, encontramos 28 pulseiras, certo? Então, cobre e pulseiras nós chamamos de grandezas. Nesse problema, eu posso dizer que existe relação proporcional entre as grandezas?*
JU*: Sim.*
LG*: Sim, porque multiplicamos o mesmo valor na quantidade de cobre e pulseira para encontrar as 28 pulseiras.*
LI: *Não, porque foi de 4 em 4 nos dois.*
MA*: De 7 em 7.*
P*: De 2 quilos para obter 7 quilos, o que vocês haviam feito?*
LG*: Dividi por 2 e depois multipliquei por 7.*
P*: E se fossem 6 quilos de cobre?*
JU*: 24 porque multiplica por 3.*
LG*: Isso que eu falei, é proporcional porque está multiplicando o mesmo valor dos dois lados.*
P: *Então este é um tipo de problema em que existe a relação proporcional entre as grandezas cobre e pulseiras? Quando a grandeza cobre aumenta, a grandeza pulseira aumenta?*
ALUNOS*: Sim, aumenta.*
P*: Aqui nós dizemos que as grandezas aumentam na mesma razão, onde a razão nesse caso é 2. Assim, as grandezas cobre e pulseiras são diretamente proporcionais.*

Alguns alunos, como JU e LG demonstraram compreender a relação proporcional entre grandezas, enquanto outros, como foi o caso de LI, não compreenderam a relação proporcional como uma relação de estrutura multiplicativa, mas como uma relação aditiva entre os valores de uma mesma grandeza.

A fim de destacar mais alguns conceitos, retomamos o problema 2:

> P*: No problema das torneiras, quando a quantidade de torneiras aumentava, o tempo diminuía. O que podemos concluir a partir disso?*
> LG*: Essas grandezas são inversas porque aqui multiplicou por 2 e ali dividiu por 2. Então são proporcionalmente inversas.*
> P*: Os valores das grandezas torneiras e tempo aumentaram na mesma razão?*
> ALUNOS*: Não.*
> P*: Posso dizer que existe uma relação proporcional entre essas grandezas?*
> JU*: Sim, elas são inversas.*
> P*: Quando uma grandeza aumenta e a outra diminui na mesma razão, dizemos que existe uma relação inversamente proporcional*.

A noção de razão não foi compreendida por alguns, o que nos fez levantar a hipótese de que quando estes respondiam que havia relação proporcional, podiam estar analisando somente o fato de as duas grandezas aumentarem, não considerando a razão.

Entretanto, após direcionar algumas reflexões, determinados alunos deram indícios da compreensão das relações de invariância e covariância descritas por Post, Behr e Lesh (1995) e Lamon (*apud* COSTA, 2007).

Considerações gerais sobre a 5ª Sessão

Nesta sessão, os alunos se envolveram na busca de soluções para os problemas propostos, o que identificamos como situações de ação, formulação e validação conforme descritas por Brousseau (2008). Observamos que ao resolverem os problemas 1 e 4 que envolviam grandezas diretamente proporcionais, eles conseguiram reinvestir conhecimentos anteriores. Entendemos que os erros e dúvidas apresentados na resolução do problema 1 foram referentes à realização da divisão, ao reduzir à unidade e não em relação ao raciocínio proporcional.

Identificamos a utilização das *estratégias escalar* e *funcional* para a resolução desses problemas. No problema 4 houve a predominância da *estratégia escalar*, o que pode ter ocorrido devido à apresentação dos dados na forma de tabela, com números de mesma grandeza sendo múltiplos.

Apesar do problema 1 ter sido resolvido oralmente e o problema 4 ter sido resolvido por escrito, observamos que nesses problemas, não ocorreu diferença significativa nas escolhas das estratégias utilizadas e nem erros, como verificado na resolução por escrito dos problemas da 3ª sessão.

Quanto ao problema 2, que envolvia grandezas inversamente proporcionais, chegamos aos mesmos resultados de Floriani (2004), porém levantamos a hipótese de que as estratégias incorretas apresentadas podem ser atribuídas ao contrato didático ou ao reinvestimento das estratégias utilizadas anteriormente para resolver os problemas que envolviam grandezas diretamente proporcionais. Constatamos que as retroações do *meio*, por parte dos colegas, contribuíram para a reflexão e reformulação das estratégias propostas.

Durante a resolução dos problemas 3 e 4, a noção de relação proporcional entre grandezas não foi compreendida por alguns alunos. Para estes, a relação proporcional existe quando as grandezas aumentam ao mesmo tempo, sem considerar a razão.

A fim de esclarecer as dúvidas surgidas, realizamos intervenções, com institucionalização de alguns conceitos referentes ao assunto abordado.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a revisão da literatura sobre o raciocínio proporcional como, por exemplo, os estudos de Schliemann e Carraher (1997), Martins (2007) e Pontes (2009), observamos que o ensino dos conceitos de Proporcionalidade ainda é caracterizado por um ensino “mecânico”, tendo, na maioria das vezes, o algoritmo da regra de três como estratégia única de resolução de problemas. Essa estratégia, conforme os estudos apresentados, oferece poucas oportunidades para o aluno desenvolver o raciocínio proporcional.

Com vista a mudar essa realidade, estudiosos apostam no ensino da proporcionalidade por meio de estratégias ditas não convencionais. Efeitos desses estudos foram percebidos nos PCN (1998) quando propuseram orientações metodológicas e didáticas pautadas em uma abordagem que leve o aluno a formular estratégias próprias para a resolução de problemas, bem como refletir sobre as soluções encontradas, sabendo usar argumentos que permitam a validação dos resultados. No entanto, para que isso ocorra, entendemos que o trabalho do professor deva consistir, como afirma Brousseau (2006, p.49), em “propor ao aluno uma situação de aprendizagem para que ele elabore seus conhecimentos como resposta pessoal a uma pergunta, e os faça funcionar ou os modifique como resposta às exigências do meio e não a um desejo do professor”.

Tomando por base esse pressuposto de Brousseau, nessa pesquisa realizamos um trabalho com o raciocínio proporcional, elaborado com o propósito de propiciar aos alunos situações adidáticas de ação, formulação e validação (BROUSSEAU, 2008). Os estudos e análises indicaram a possibilidade de uma metodologia sob essa perspectiva, na qual a abordagem dos conceitos de proporcionalidade é realizada a partir de estímulos à autonomia de escolha das estratégias para a resolução de problemas, contribuindo, desse modo, para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Esse estudo propiciou a análise das principais estratégias mobilizadas por um grupo de alunos na resolução de problemas que envolviam proporções e problemas que não apresentavam relações proporcionais, a partir de uma abordagem envolvendo a oralidade.

As análises a *posteriori* das sessões da sequência didática deram evidências de que os alunos possuem uma noção intuitiva de proporção como afirmam Schliemann e Carraher (1997). Em todas as sessões que apresentavam problemas envolvendo relações diretamente proporcionais, constatamos que os alunos mobilizaram estratégias próprias, não convencionais relativas ao raciocínio proporcional, empregando tanto um pensamento quantitativo quanto qualitativo (POST, BEHR e LESH, 1995), mostrando compreensão das relações de invariância e covariância (LAMON *apud* COSTA, 2007) estabelecidas entre esse tipo de problemas. Foi possível identificar, principalmente por meio da oralidade, o raciocínio proporcional dos alunos no momento da análise dos argumentos e das explicações dos mesmos sobre as relações proporcionais envolvidas nos problemas e manifestadas nas estratégias não convencionais utilizadas.

Assim como identificado por Silvestre (2006), a escolha de uma estratégia pelo aluno parece depender dos conhecimentos prévios que ele tem em relação aos números e às operações. Diante do que nos propomos a pesquisar, identificamos, de forma geral, em nossa investigação, que a maioria dos participantes mobilizou três tipos de estratégias ao resolverem os problemas que envolvem proporção: a estratégia escalar, a estratégia funcional e a regra de três.

O emprego da estratégia escalar predominou nos problemas que envolviam números de mesma grandeza que são múltiplos. Também foi empregada tanto com uso de procedimentos aditivos como multiplicativos para a resolução de problemas envolvendo grandezas diretamente proporcionais. Já a estratégia funcional foi utilizada quando os números múltiplos apareciam entre as grandezas diferentes, conforme haviam constatado Schliemann e Carraher (1997) em seus estudos. A estratégia funcional com passagem pela unidade também foi bastante utilizada quando os números dados nos problemas não eram múltiplos.

A estratégia da regra de três foi utilizada na 1ª e 2ª sessões por uma única aluna que já sabia usá-la. No entanto, observamos que ela empregava esse algoritmo de forma mecânica, pois não conseguia justificar as soluções que apresentava para os problemas. Quando solicitávamos que explicasse sua estratégia, fazia somente referências às operações realizadas, de multiplicação e divisão, não usando nenhum tipo de argumento que demonstrasse compreender as relações estabelecidas entre as grandezas. Foi observado que os demais alunos do grupo mostraram incompreensão da técnica utilizada pela aluna e optaram por permanecer utilizando procedimentos próprios. Entretanto, identificamos a utilização da regra de três por outros alunos na 3ª e na 5ª sessões, quando realizavam os cálculos tanto por escrito quanto oralmente. Quando questionados sobre o procedimento efetuado, não souberam justificar as operações realizadas. Assim, entendemos que eles possam ter empregado a regra de três porque incorporaram o que ouviram anteriormente dos colegas, o que atribuímos ao uso da oralidade e do movimento de cooperação e colaboração presente no grupo.

Observamos que o movimento colaborativo contribuiu para o surgimento de diferentes estratégias ou para a compreensão de algumas estratégias levantadas por alguns alunos.

Verificamos ainda que os alunos não conseguiam, num primeiro momento, distinguir entre os problemas que envolviam grandezas diretamente proporcionais e os que envolviam relações não proporcionais. Na resolução desses últimos, observamos determinados erros cometidos que atribuímos às regras implícitas do contrato didático. Alguns participantes demonstraram compreender que não existe relação proporcional entre as grandezas, no entanto, não admitiam que o problema tivesse como solução uma afirmação “não é possível prever uma solução, pois não há relação proporcional entre as grandezas”, o que os levava a resolvê-los como se envolvessem grandezas diretamente proporcionais.

Em relação aos problemas que envolviam grandezas inversamente proporcionais, constatamos que os alunos demonstraram algumas dificuldades iniciais em identificar esse tipo de relações entre as grandezas. Quanto a esse aspecto, chegamos aos mesmos resultados de Floriani (2004), mas levantamos a hipótese de que os resultados incorretos apresentados podem estar relacionados ao reinvestimento de estratégias utilizadas anteriormente na resolução de problemas que envolviam grandezas diretamente proporcionais. Contudo, após retroações do *meio*, eles reformulavam suas estratégias, propondo uma solução correta. Para a resolução desses problemas, eles optaram pela estratégia escalar, o que entendemos que tenha ocorrido devido os números de mesma grandeza serem múltiplos.

Como foram propostos problemas diversificados na 5ª sessão, pudemos observar que os alunos identificaram com maior facilidade os problemas com grandezas diretamente proporcionais. Quanto ao problema envolvendo grandezas inversamente proporcionais e o que não apresenta grandezas proporcionais, verificamos que poucos demonstraram dúvidas, mas tão logo houve manifestações contrárias dos colegas às estratégias incorretas, eles as reformularam e conseguiram validá-las. Constatamos que vários erros apresentados estavam relacionados à realização de operações e não ao raciocínio proporcional. Isso nos leva a entender que houve, portanto, a manifestação do raciocínio proporcional, com compreensão das relações de invariância e covariância conforme Post, Behr e Lesh, (1995) e Lamon (*apud* COSTA, 2007).

Concluímos que os problemas escolhidos contribuíram para a participação dos alunos, pois possuíam enunciados de fácil compreensão e dentro de contextos familiares para eles. Assim, conseguiram resolvê-los, expondo oralmente suas estratégias, o que nos permitiu alcançar os objetivos propostos nessa pesquisa, verificando a manifestação dos pensamentos qualitativo e quantitativo.

Os problemas envolvendo situações não proporcionais possibilitaram a ruptura do contrato didático, propiciando a compreensão das relações estabelecidas entre as grandezas. A escolha do problema 3 da 5ª sessão foi muito oportuna porque até então os alunos poderiam estar vinculando a proporcionalidade com a possibilidade de uma resposta numérica e esse problema admite uma resposta numérica e não envolve proporcionalidade.

Observamos que o *meio* organizado, no qual foi priorizado o trabalho com a oralidade para a apresentação das estratégias mostrou-se muito importante. Desse modo, nas cinco sessões, a participação foi bastante intensa, pois os alunos podiam se expressar e agir rapidamente diante das dúvidas que surgiam em relação às estratégias e soluções apresentadas e poucos foram aqueles que se intimidaram e tiveram receio de apresentar suas estratégias com medo errar. A maioria se empolgava durante a apresentação das estratégias, principalmente durante os debates, quando defendiam suas opiniões e tentavam convencer os colegas que discordavam de sua estratégia ou solução. Nesses momentos, eles discutiam e refletiam, evidenciando diversos tipos de fases adidáticas, favorecendo ao pesquisador a identificação, a análise dos raciocínios utilizados e a institucionalização de alguns conceitos, como por exemplo, o de razão e o de grandezas. Assim, a oralidade contribuiu para que ocorresse o envolvimento dos alunos na busca de soluções, o debate de validação, a construção e/ou mudanças de estratégias, uma maior compreensão do conceito de proporcionalidade e o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Foi observado que, quando era solicitada a resolução dos problemas por escrito, o nível de atenção quanto à coerência dos dados e das respostas era menor e os erros foram mais frequentes do que quando resolviam os problemas oralmente. Em sessões em que os alunos tinham que primeiro resolver individualmente os problemas por escrito para depois apresentar oralmente os resultados para o grupo, constatamos que vários participantes utilizavam estratégias incorretas, mostrando preocupação em relação aos cálculos a serem realizados, sem, contudo, analisar se a solução encontrada era pertinente ao problema. Somente ao realizarem a explanação, percebiam o erro cometido ou recebiam retroações do *meio*, por parte dos colegas e nesse momento reformulavam suas estratégias. Ao contrário, em sessões em que os alunos resolviam os problemas oralmente verificamos que eles refletiam mais em relação às soluções apresentadas.

Destacamos que essa forma de trabalho foi o que fez diferença entre essa pesquisa e as que analisamos sobre a temática investigada.

Esperamos, ao concluir essa investigação, ter contribuído para o avanço dos estudos sobre o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos discentes, principalmente aqueles voltados para o ensino da proporcionalidade baseado na utilização de procedimentos não convencionais, com ênfase na oralidade. Além disso, podem ser levantadas novas questões sobre o tema investigado, tomando por base os resultados encontrados. Com referência aos problemas que envolveram grandezas inversamente proporcionais, nossa investigação demonstrou dificuldades dos participantes em identificar grandezas desse tipo, conforme constatado também nos estudos de Floriani (2004). Assim, uma questão que pode gerar uma nova investigação é: Será que esse fato não ocorreu porque esse tipo de problema foi proposto aos alunos somente após ter trabalhado três sessões com problemas que possuem grandezas diretamente proporcionais?

Diante dessa interrogação, uma proposta para novas pesquisas seria, primeiramente, a proposição de situações envolvendo grandezas inversamente proporcionais; na sequência, apresentar-se-iam, sucessivamente, as não proporcionais e as diretamente proporcionais, finalizando com uma sessão composta por problemas de todos esses tipos.

Outra questão que pode ser investigada está relacionada aos problemas que não envolvem proporcionalidade. Em nossos estudos, quando o problema não envolvia relações proporcionais, foram enfatizados os problemas que apresentavam incerteza. Seria interessante um trabalho que enfocasse mais ostensivamente problemas em que não houvesse grandezas proporcionais e que não apresentassem incerteza, como por exemplo, o problema 3 da 5ª sessão ou problemas que envolvam leis que satisfaçam a equação de uma reta que não passa pela origem, do tipo $y = ax + b$, com $b \neq 0$, para verificar a não-existência da relação proporcional.

Em relação ao papel do pesquisador, nesse estudo assumimos uma postura que propiciou aos alunos agirem de forma autônoma na elaboração de estratégias e na resolução dos problemas. O fato das intervenções terem ocorrido no âmbito do coletivo, no momento da formulação das estratégias, pode ter contribuído para a obtenção dos resultados apresentados. Caso o nosso papel tivesse sido outro, os resultados e estratégias poderiam ser diferentes. Assim, levantamos a seguinte questão: Que outras estratégias poderíamos identificar se as intervenções fossem pontuais, individualizadas, no processo de construção das estratégias?

Uma proposta para possíveis investigações seria a adoção de uma postura diferente do pesquisador, a qual possuísse um caráter mais provocativo, motivador, partindo do trabalho individualizado para o coletivo, a fim de compreender a organização do pensamento do aluno no momento da formulação de estratégias.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da matemática*, Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARAÚJO, H., GARAPA, M., LUIS, R. *Elementos de Euclides* **-** *Livros VII e IX***.** Universidade da Madeira, Funchal, 2005. Disponível em: < http://www.ebah.com.br/elementos-de-euclides-pdf-a13093.html> Acesso em: fev.2009.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. In: BRUN, J. *Didáctica das Matemáticas*, Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

ÁVILA, G. Razões, proporções e regra de três. *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 8, p.1-8, 1986.

BARRETO, I. M. A. *Problemas verbais multiplicativos de quarta-proporcional: a diversidade de procedimentos de resolução*. 2001. 123f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2001.

BERNAL, M.M. *Estudo do objeto proporção: elementos de sua organização matemática como objeto a ensinar e como objeto ensinado*. 2004. 170 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade de Santa Catarina, Florianópolis, 2004.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Ensino de quinta a oitava séries. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação. *Guia de livros didáticos PNLD 2008: Matemática. Anos finais do ensino fundamental.* Brasília: MEC, 2007.

BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches Didactiques des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v. 7, n. 2, p.33-116, 1986, *apud* FREITAS, 2008.

______. Os diferentes papéis do professor. In: PARRA, C., SAIZ, I. (Org.). *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. Tradução de Juan Acuña Llorens. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996, p. 48 - 72.

______. *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino*. Tradução de Camila Bogéa. São Paulo: Ática, 2008.

CÂNDIDO, P.T. Comunicação em Matemática. In: SMOLE, K.S., DINIZ, M.I. (Org.). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2006. p.15-28.

CAVALCANTI, C. T. Diferentes formas de resolver problemas. In: SMOLE, K.S., DINIZ, M.I. (Org.). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática.* Porto Alegre: Artmed, 2006. p.121-150.

CHAIM, D., ILANY, B., KERET, Y. “Atividades Investigativas Autênticas” para o ensino de Razão e Proporção na formação de professores de Matemática para os níveis elementar e médio. In: *BOLEMA.* Rio Claro, Ano 21, n. 31, p.129-159, 2008.

CHEVALLARD, Y**.** *Sur l’analyse didactique: deux estudes sur les notions de contract et de situation.* Publication de l’IREM d’Aix Marseille, 14, 1988, *apud* SILVA, 2008.

COMMANDINO, F. *Euclides-Elementos de Geometria*. São Paulo: Edições Cultura, 1944. Disponível em: <http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/be00001a.pdf >Acesso em: nov.2008.

COSTA, C. R. *Panorama de um estudo sobre Razões e Proporções em três livros didáticos.* 2005. 146 f. Dissertação (Mestrado em ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

COSTA, S.C.H.C. *O Raciocínio Proporcional dos alunos do 2º Ciclo do Ensino Básico*. 2007. 149 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2007. Disponível em: <http://ia.fc.ul.pt/textos/Sara%20Costa%20(Tese%20mestrado%2007).pdf. Acesso em: nov.2008.

DALMEDICO, A. D., PEIFFER, J. *Une histoire des mathématiques*. Paris: Èditions du Seuil, 1986 *apud* BERNAL, 2004.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

FLORIANI, E.F. *Resolução de problemas de proporcionalidade: um estudo com alunos do ensino fundamental e médio*. 2004. 104 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, 2004.

FREITAS, J. L.M. Teoria das situações didáticas. In: MACHADO, S.D.A. (Org.). *Educação Matemática: uma (nova) introdução*. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2008, p.77-111.

KNIJNIK, G. La oralidad y la escritura em la educación matemática: reflexiones sobre el tema. In*: Educación Matemática*. Distrito Federal, México: Santillana, agosto, año/vol. 18, n.2, p.149-165, 2006.

LAMON, S. Ratio and proportion: cognitive foundations in unitizing and norming. In: HAREL, G., CONFREY, J. *The development of multiplicative reasoning. In the learning of mathematics,* p.89 -117, 1994 *apud* BARRETO, 2001.

______. *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers.* 2 ed. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2005 a*pud* COSTA, 2007.

LESH, R., POST, T., & BEHR, M. (1988). Proportinal reasoning. In: J. Hiebert & M. Behr (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (p.93-118). Reston, A: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.Tradução de Ana Isabel Silvestre, Escola EB 2,3 de Fernão Lopes. Disponível em: <

http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS/Lesh-Post-Behr-Raciocinio%20Proporcional_PT_.pdf > Acesso em: fev.2009.

LIMA, E.L. Que são grandezas proporcionais? *Revista do Professor de Matemática*, Rio de Janeiro, n. 9, p.21-29, 1986..

______. *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. 5. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

LINS, R.C., GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. 7. ed. Campinas: Papirus, 2006.

MARGOLINAS, C. Situations, milieux, connaissances. Analyse de l'activité du professeur. Actes de la 11[e] Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques. *Recherche en didactique des mathématiques***.** Grenoble : La Pensée Sauvage, p. 141-155, 2002 *apud* Almouloud, 2007.

MARTINS, L. C. *Abstração Reflexionante e Aprendizagem de Proporção: Ensino de Matemática na sexta série*. 2007. 124 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

MARQUES, S.I.C. *A proporcionalidade direta em manuais escolares de diversos países*. 2006. 281 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2006.

MICHAELIS: *Minidicionário escolar da língua portuguesa*. São Paulo: Companhia Melhoramentos, 2000.

OLIVEIRA, I., SANTOS, M. *O ensino fundamental e a resolução de problemas de proporção simples: Uma análise das estratégias*. 23[a] ANPEd, 2000. Disponível em: <http://168.96.200.17/ar/libros/anped/1913T.PDF> Acesso em: Jun. 2006.

PONTES, M.G.O. *Medidas e proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho*. João Pessoa: Ideia, 2009.

POST, T., BEHR, M., LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, A., SHULTE, A. *As idéias da álgebra*. Tradução de Hygino H. Domingues. 4. ed. São Paulo: Atual, 1995.

ROCHA, R. *Minidicionário*. São Paulo: Scipione, 1996.

SCHLIEMANN, A. L. D., CARRAHER, D. Razões e proporções na vida diária e na escola. In: SCHLIEMANN, A. et al. *Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife: UFPE. p.13-39, 1997.

SCHLIEMANN, A.D., CARRAHER, T., CARRAHER, D. *Na vida dez, na escola zero*. 14. ed. São Paulo: Cortez, 2006.

SILVA, B.A. Contrato Didático. In: MACHADO, S.D.A. (Org.). *Educação Matemática: uma (nova) introdução.* 3. ed. São Paulo: EDUC. p.49-75, 2008.

SILVESTRE, A.I. *Investigações e novas tecnologias no ensino de proporcionalidade direta: uma experiência no 2º ciclo*. 2006. 202 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2006.

SPINILLO, A. G. Proporções nas séries iniciais do primeiro grau. In*:* SCHLIEMANN, A. et al. *Estudos em Psicologia da Educação Matemática***.** Recife: UFPE. p.40-61, 1997.

______. O Papel de Intervenções Específicas na Compreensão da Criança sobre Proporção. In: *Psicologia: Reflexão e Crítica*. 15 (3), p.475-487, 2002.

TINOCO, L. A. de A. Como e quando os alunos utilizam o conceito de proporcionalidade. In: *Revista do Professor de Matemática*. Rio de Janeiro, n. 14. p. 8-16, 1989.

TRAJANO, A. *Arithmetica Progressiva: curso completo theorico e pratico de Arithmetica Superior*. 65. ed. Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1929.

VERGNAUD, G. *Multiplicative structures*. New York: Academic Press, 1983 a*pud* SCHLIEMANN, A. et al**.,**1997.

ANEXOS

ANEXO A – PROTOCOLO DA 1ª SESSÃO

Problema 1

O carro de Raul consome, em média, 8 litros de combustível a cada 100 km rodados. Para percorrer 300 km, quantos litros de combustível seu carro gastará?

LI: É 24.
P: Como você encontrou 24?
LI: Eu multiplique 8 vezes 3.
P: Por que 8 vezes 3?
LI: Porque é assim... com 8 litros ele anda 100 km e 100 vezes 3 é 300. Então 8 vezes 3 é 24.
JU: Eu acho que é 8 vezes 300. Não é 300 que ele quer andar?
MA: Não. É 24 porque é 8 litros para cada 100 km. É como se fosse 3 oitos, porque é 300 ,entendeu? no primeiro 100 km é 8 ,no segundo mais 8 e mais 8. Daí é 24 litros.
P: O que vocês acham da explicação do MA ?
LU: É a mesma coisa.
LE: Eu acho que é 300 vezes 8 dividido por 100. Dá 24.
P: Por que seria 300 vezes 8 dividido por100?
LE : Porque seria mais ou menos a regra de três. Se com 8 litros ele anda 100 km, aí no final descobre quanto é pra andar 300 km.
P: Concordam com a fala da LE? Acham que a resposta é essa?
ALUNOS: Sim.
P: Mais alguém teve alguma idéia?
MR: Vai percorrer 300 km, a cada 100 km consome 8 litros, aí 100 km pra dá 300 km , multiplica por 3, então multiplica 8 vezes 3 que dá 24.
P: Mais alguma idéia sobre o exercício?
Alunos: Não.
P: A resposta é essa mesma.A cada 100 km, nós temos o consumo de 8 litros, então para percorrer 300 km, o consumo será de 24 litros.

Problema 2:
Uma impressora imprime 50 folhas em 3 minutos. Quantos minutos ela gastará para imprimir 500 folhas?

GI: 10 minutos.
P: Seria 50 folhas em 3 minutos. E para 500 folhas quanto tempo seria?
Ju: 30 minutos. Meia hora.
P: Como você pensou? Qual seria o cálculo?
LE: Usa regra de três.
Alunos: E lá vem com regra de três.....
Ma: seria 50, 100,500... ah, não sei...
Ju: Eu fiz assim, eu peguei quantas vezes o 50 cabe em 500, aí deu 10 e eu multiplique 3 por 10. Deu 30 minutos.
P: Entenderam a ideia da Ju?
AD: O certo não seria pegar, se 50 folhas é 3 minutos, então não era certo pegar 3 minutos vezes 500 folhas que dá 1500 minutos?
LU: Não. Por 50. Não é 50?
GI: Não.
LE: Não. Porque a cada 3 minutos seria 50 folhas. Então 50 vezes 3 que dá 150 e divide 5 que dá 30 minutos.
JU: Deu a mesma coisa.
LE: Mas é outra maneira.
P: Isso, é outro raciocínio, e nós temos que pensar nesse raciocínio. O que estamos buscando é esse raciocínio e não ficar preso a alguma regra que tenhamos visto. Então se eu tivesse 50 folhas em 3 minutos, 500 folhas seriam impressas em 30 minutos. (fala junto com os alunos repetindo)
P: Todos concordam que seriam em 30 minutos?
Alunos: Sim.
P: Está certo.

Problema 3
Tatiana comprou 8 metros de tecido por R$ 480,00. Quanto vai pagar por 10 metros do mesmo tecido?

LU: Repete.
MU: Que caro.
MR: Tem que descobrir quanto é o preço de 1 metro e depois descobrir quanto é 10 metros.
P: E como faremos para descobrir 1 metro?
FE: Divide 8 por 480.
LE:10 vezes 480 dividido 8 que deu 600.
LA: Dividiria 8 por 480...ah...
LU: Divide 480 por 8, acha 1 metro e multiplica por 10 e vai dá 600.
MR: Como é 10 m, 8 é 480, aí seria 480 vezes 2 que daria 960.
P: O que acham da explicação do MR?
LU: Isso aí são 16 metros.
MR: Não. 480 é 8 metros, se fosse 10 metros, aí 8, 9, 10. dá 2, aí 480 multiplica por 2.
LU: Não tem sentido.
P: O que não tem sentido?
LU: tá errado.
JU: Ele está errado porque é 8 metros, 9 e 10, fez 2, ele multiplicou 2 vezes 480. Tem alguma coisa errada. Não tem cabimento.
LU: Vai dar 600.
MR: Dá 960.
LU: Vai dar 600.
P: Um por vez.
MT: A dele está errada porque 8 metros é 480, se ele fizer 2 vezes 480 é como se ele tivesse somado mais 8 metros . É improvável.
P: MR você entendeu o que ele falou?
MR: Não. É 960.

MT: É como se você tivesse somado mais 8 metros. É 16 metros e é só mais 2 metros.
P: E aí MR, o que você acha do comentário do Mt?
MR: O branquinho está certo.
P: E os demais o que acham da ideia do Mt?
Alunos: Certo.
P: Então qual seria o preço de 10 metros?
Alunos: 600.
P: Quero um de cada vez para analisarmos as ideias.
LU: Primeiro descobri 1 metro, com 480 dividido por8 que é 60 e multiplica por 10 que dá 600.
P: Alguém pensou diferente?
LE: 480 vezes 10 dividido por 8 . A regra de três.
P: Outra maneira qual seria?
GI:480 dividido por 8 e vai dá 60, daí 8 pra 10 é 2. multiplica 60 por 2 que é 120 e soma 120 com 480 que dá 600.
P: Entenderam a ideia do Gi?
LU: É complicada.
P: Vou pedir para o Gi repetir.
GI: Igual ele disse .Divide 480 por 8 dá 60, 8 pra 10 é 2. 60 vale cada metro, aí vezes 2 dá 120 e somado com 480 dá 600.
P: O que vocês acham?
MR: Gi virou nerd.
P: O que acham do resultado?
Alunos: Certo.
P: Quantas ideias diferentes tivemos?
Alunos:Três.
P: E as três ideias...
Alunos: Com o mesmo resultado,certas.
MR: E a do preto que deu errado
P: Por que será que a ideia do MR não estava certa?
FE: Ele somou 8 metros com 8 metros.
P: A Fe está explicando que tinha somado 8 metros com 8 metros, então ele encontrou o preço de...
Alunos: 16 metros.
GI:Ele não dividiu por 8 e multiplicou por 2 e tinha que somar os 2 metros.
LA: Ele tinha que somar os 2 metros que faltavam e não os 8 metros. Seria 60 mais 60, 120.
P: Muito bem.

Problema 4:
Uma foto de largura 1,5 cm e comprimento 2,6 cm foi ampliada. Se a nova foto for feita com largura de 4,5 cm, qual será a medida de seu comprimento?

LU: Desenha a foto do “quadrado”.
P: Desenha um retângulo no quadro.
P: Onde seriam essas medidas (apontando para o desenho)?
GI: Aí do lado (largura).
P: S e uma nova foto fosse feita com largura 4,5cm, qual seria a medida do comprimento?
MA: Precisa do caderno agora.
GI: Não tem que saber primeiro a área?
P: O que vocês acham?
MT: Não. O novo comprimento não seria 5,6?
P: Como você está pensando?
MT:1,5 e 2,6 vai dar tanto , a mesma coisa vai dar 4,5 e somando com as casas que vai até o 2,6 vai dá esse número 5,6
P: O que vocês acham?
FE: Eu não cheguei ao resultado final, mas eu acho que tem que a largura vai ser 4,5 e 1,5 cm pra 4,5 cm dá 3, aí 3 vezes o comprimento..
LE: É 7,8 cm. Eu pensei da mesma maneira
P: E os demais como pensaram?
MA: A diferença das duas é 1,1 cm, se ali seria 4,5cm , ali embaixo seria mais 1,1 cm
P: O que vocês acham?
LA: Eu pensei quase igual a Ma. Se a diferença é 1,1, você ia somar com 4,5, então dá 5,6.
MT: O valor vai triplicar.
P: O que está triplicando Mt?
MT: A largura.
P: Se triplicou a largura, o que vai acontecer?
MT: Vai ficar 7,8.
P: E de onde aparece esse 7,8?
MT: 2,6 vezes 3.
AD: A largura é 4,5 e como a diferença é 1,1, então pega a largura e soma com o comprimento.
JU: Eu acho que o pensamento da Ad esta um pouco errado, porque a diferença é 1,1, a largura vai ser 4,5 foi multiplicada por 3, então não pode ser 1,1, vai ter que ser 3 vezes 1,1 para dar o resultado lá de baixo, o comprimento.
MT: Eu acertei é 7,8 cm.
MF:1,1 eu entendi que ela ia somar com o outro e 1,1 mais 1,5 não vai dar 4,5. como você chegou a 4,5 pra largura?
JU: A professora falou.
LE: Como 1,5 é 4,5 então tem que multiplicar 2,6 por 3 que dá 7,8.
MT: O que eu falei.
P: O que vocês acham? Quem concorda com a Le e com a Ad?
MR: Pra chegar no 4,5 teve que triplicar o 1,5, triplicou o tamanho da foto, então tem que triplicar junto o 2,6 que dá 7,8.
P: Então o MR chega no mesmo resultado do Lu e da Fe e a Ad ainda discorda.
P: Ad o que você acha?
AD: Não concordo.
LU: Não tem nada a ver esse 1,1. Se vai aumentar a largura, tem que aumentar o comprimento, fazer 1,5 chegar em pra 4,5. Então você tem usar esse 3 e aumentar e fazer 3 vezes 2,6 que dá 7,8
AD: E de onde saiu esse 3?
Alunos: ah.....
P: Deixa o Mt falar com a Ad.
MT: Ele deu 4,5 ele triplicou 1,5 ou seja, tem que triplicar o comprimento, ou seja 2,6,vai dar 7,8. tem que triplicar tudo.
AD: Não concordo
P: Qual seria o comprimento então? Todos concordaram com o resultado?

Alunos: sim.

<u>Problema 5:</u>

Desenvolvendo sempre a mesma velocidade, Luisinho percorre de bicicleta 1400 metros em 7 minutos. Quantos metros vai percorrer em 30 minutos?

MA: 2400 minutos.
P: Como você raciocinou para encontrar esse resultado ?
MA: Eu fiz 30 x 1400.
P: O que vocês acham?
Alunos: Errado.
CL: É 1400 vezes 7 dividido por 30.
P: E qual é o resultado?
[A aluna não soube responder. Outros alunos diziam que estava errado. Outros alunos tentavam resolver].
LE: É 1400 vezes 30 dividido por 7, deu ...
MA: É 3200, porque 4 vezes7é 28, e é 30, eu multipliquei por 4, aí somei 1400 mais 1400 mais 1400 mais 1400 que deu 6200, aí eu multipliquei 1400 por 4, que foi 4. Aí deu 6000.
MF: Eu peguei 1400 e dividi por 7 que deu 200 e multipliquei por 30 que deu 6000 metros.
LA: Eu fiz 1400 vezes 30 e dividi por 7.
GI: Eu também fiz assim.
CL: 1400 vezes 7 é igual a 9800 e 9800 dividido por 30 deu 6000.
P: Vamos analisar as ideias que apareceram.
MF: Vai dar 6000 de qualquer jeito.
P: O que significa 1400 divido por 7?
LU: 1400 foi o que andou em 7 minutos, aí dividindo por 7 dá 200 metros, que é o que ele andou em 1 minuto. Aí multiplica por 30 para saber o que ele anda em 30 minutos.
CL: 1400 vezes 7 dá 9800 aí divide por 30 e dá 6000.
P: O que vocês acham dessa estratégia?
MF: É melhor dividir primeiro, desse jeito é mais difícil.
P: O que significa 1400 vezes 7?
CL: Dá 9800. Aí divide por 30, dá 6000.
P: Vocês concordam?
GI: Essa conta tá errada. Eu acho que ela está calculando para 49 minutos e não para 30 minutos. Ela multiplicou 1400 por 7.
FE: A conta 1400 vezes 7 não dá 9800. Dá 98000. Aí dividido por 30 dá 6000.
P: Vocês concordam com a FE?
LU: Está estranho 1400 vezes 7 dá 98000. Acho que é 9800. Está muito alto.
MF: Dá 9 mil e pouquinho.
LU: Dá 9800.
P: E 9800 divido por 30 dá quanto?
LA: Dá mais ou menos 3000.
P: O que significa para vocês 1400 vezes 7?
[Os alunos não sabiam responder]
P: E 1400 dividido por 7, o que representa para vocês?
JU: O quanto ele anda em 1 minuto.
P: E multiplicar por 7 tem o mesmo significado?
[Vários alunos disseram que não].
P: Então o que vocês concluem?
GI: É o mesmo que ele anda em 49 minutos.
P: Vocês concordam? Vamos calcular quanto ele andaria em 49 minutos?
GI: Eu estou falando disso ai. 1400 dividido por 7 dá o quanto ele anda em 1 minuto, que é 200. Daí multiplica por 49, dá 9800 que ela falou.
P: Concordam com a explicação do GI?
Alunos: Sim.
P: O que vocês acharam das atividades que realizaram? Foi difícil?
Vários alunos: Não.
P: Precisaram escrever os cálculos?
Alunos: Não.

ANEXO B – PROTOCOLO DA 2ª SESSÃO

Problema 1

Um padeiro gasta 20 kg de farinha para fabricar 500 pãezinhos. Quantos pãezinhos ele pode fabricar com 50 kg de farinha ?

MA: 1250.
P: Explique para o grupo como você encontrou esse resultado.
MA: 20 dá 500, mais 20 dá 1000; metade de 20 dá 10 e de 500 dá 250, então somando dá 1250.
P: O que vocês acham dessa estratégia?
LE: O meu dá 12500 porque multiplicando 500 vezes 50 e dividindo por 20 ... não sei...
MR:O meu deu 1250, igual do MA. Eu peguei 20 dividido por 2 deu 10 kg e 250 pães e multiplicado por 5 e deu 50 kg e 250 vezes 5 deu 1250.
P: Essa estratégia é a mesma do MA?
MA: Eu fiz mais fácil porque eu peguei a metade de 20 que é 10 e a metade de 500 é 250 e depois somei com 20 mais 20 e deu 1250.
P: E a turma o que pensa?
JU: Eu acho que as duas estão certas, mas a do MR é mais fácil.
BA: A do MA é mais fácil. O MR faz por etapas.
P: Quais as operações que estão envolvidas na estratégia apresentada pelo MA?
Alunos: Divisão e soma.
P: Quando ele fez a divisão de 20 por 2, o que ele encontrou?
Alunos: 10 kg.
P: Era 10 kg que queríamos saber?
Alunos: Não, era 50 kg.
P: O que ele fez?
Alunos: Dividiu 500 por 2.
MA: Eu peguei e somei 20 mais 20 mais 10 que deu 50. Depois peguei 250 mais 500 mais 500 que é igual a 1250.
P: Por que ele somou 500 mais 500 mais 250?
BA: Porque somando tudo daria os 50 kg.
P: FE, a estratégia que o MR apresentou foi a mesma do MA?
FE: É parecida.
P: O que você acha que tem de diferente?
FE: Não sei.
P: Vamos analisar essa estratégia do MA. Ele fez 20 dividido por 2 que deu 10 kg.
MA: 20 dá 500, mais 20 dá 1000; metade de 20 dá 10 e de 500 dá 250, então somando dá 1250. [repetiu a estratégia].
LE: Eu fiz os cálculos e deu 1250. Eu tinha feito a conta errada.
P: E a sua estratégia é igual à do MA ou do MR?
LE: Eu fiz 50 vezes 500 e dividi por 20 que deu 1250. [A aluna não soube explicar a estratégia utilizada: a regra de três simples]
P: Alguém pensou em outra estratégia diferente dessas?
JU: Não tem. Se tiver eu não sei.
P: Será que não tem?
GI: Eu não fiz, só pensei.
P: Então diga.
BA: Eu peguei e somei 20 mais 20 mais 10 que deu 50. Depois peguei 250 mais 500 mais 500 que é igual a 1250.
GI: 500 dividido por 20 dá quantos quilos tem cada pão porque como 20 kg ele fez 500 pães. Depois multiplica por 50 kg e sabe quantos pães.
P: O que vocês acham da estratégia do GI?
JU: Que loucura...
MT: 500 dividido por 20 não será a metade, porque 20 dá 500, mais 20 dá mais 500 e sobrou 10 e 10 dá a metade, como se tivesse cortado o pão no meio e dividido por 5 não vai dar a metade. Daí tem que dividir por 2 pra dá a metade. Daí dá 1250.
P: MT você entendeu a estratégia que o GI apresentou?
MT: Entendi.
P: GI repete a sua estratégia, por favor.
LG: O que o GI falou é que você primeiro tem que descobrir quantos pães faz com 1 kg e depois multiplicar por 50 kg e vai dá o resultado final.
P: O que vocês pensam? Essa estratégia levaria ao resultado correto?
FR: Sim.
P: Teria outra estratégia?
JU: Tem?
P: É o que queremos saber.
MG: Não.
P: 1250 é a resposta correta.

Problema 2

Se um jogador de futebol fez 2 gols em 3 jogos, quantos gols ele fará em 6 jogos?

LG: 4 gols.
LI: 4 gols, porque fez 2 gols em 3 jogos, então ele faz 4 gols em 6 jogos.
P: Vocês concordam?
JU: 4, porque 3 vezes 2 é 6, então ele faz 4 porque 2 vezes 2 é 4.
P: Todos concordam?
MA: Se ele faz 2 gols em 3 jogos obviamente que 2 vezes 2 é 4.
MR: É 4 porque 2 gols em 3 jogos, então 2 mais 2 é 4 porque 3 mais 3 é igual a 6.
P: O que acham? Todos concordam?
JU: Só falta está errado.
GI: Está certo professora?
P: É o que queremos saber.
Alunos: Tá certo.

FR:12 gols.
P: Por quê?
LI: Eu discordo.
P: FR a LI discorda de você.
FR: É, eu fiz conta errada.
MA: É 4.
BA: Em 6 jogos, 3 mais 3 dá 6 e 2 mais 2 é 4, então é 4.
P: Todos concordam?
P: Pensem em um jogador.
P: Esses jogadores mantêm uma média de gols em todos os jogos?
Alunos: Não.
LG: Eu pensei nisso, mas a senhora fez uma pergunta então tinha que ter uma resposta. Então eu estou fazendo o que o exercício pede.
P: Quando vocês estavam resolvendo as atividades anteriores, vocês estavam só fazendo contas ou estavam analisando os problemas apresentados?
Alunos: Analisando e fazendo contas.
P: Nessa situação do jogador, a gente pode questionar alguma coisa?
Al: Pode.
P: O que a gente pode questionar?
LA: Como a gente tem certeza que ele faz 2 gols em 3 jogos?
P: O que vocês pensam dessa pergunta?
BA: Esse resultado que a gente achou, acho que seria aproximadamente porque ele pode fazer mais ou menos gols. Ele poderia não fazer sempre 2 gols.
P: Vocês concordam com a BA?
LG: O resultado seria aproximadamente.
P: Qual seria então a resposta do exercício? Seria possível dar uma resposta exata?
MG: Não, porque ele poderia ter feito mais ou menos gols.
P: Certo, então nesse problema não teríamos uma solução numérica determinada.

<u>Problema 3</u>
Se 20 litros de álcool custam R$ 25,00, quanto custarão 34 litros desse combustível no mesmo posto de abastecimento?

JU: Agora eu preciso de papel para resolver.
FE: Eu não cheguei no resultado, mas acho que tem que dividir 20 por 25 que vai dá o valor de cada litro e depois multiplicar por 34.
P: Concordam com a FE?
LG: Dá 40, 97.
GI: Eu fiz a mesma coisa, eu dividi 20 por 25.
LG:É o mesmo raciocínio, mas eu dividi 25 por 20 que deu R$ 1,205, aí eu multipliquei por 34 que deu R$40,97.
P: E vocês concordam com a estratégia e o resultado apresentado?
KA: Eu dividi 25 por 20 que deu R$1,25 e eu multipliquei por 34 que deu R$42,50.
P: A KA encontrou um resultado diferente. O que vocês acham?
LG: Eu discordo. Acho que ela errou na divisão porque 25 dividido por 20 dá 1,205, tem uma hora que tem que emprestar um zero.
P: Qual a divisão que você fez?
LG: 25 por 20. Só que não deu 1,25, deu 1,205.
LA: Dá 1,25.
P: Vamos ouvir o MR.
MR: 20 dividido por 25 dá 0,8 que é o preço de 1 litro, aí multipliquei por 34 e deu R$ 27,2.
P: KA o que você acha da estratégia do MR?
KA:Não sei, eu fiz diferente.
P: Como?
FE: Eu concordo com o MR.
P: E os demais, o que pensam?
LA: Eu fiz 25 dividido por 20.
P: Por que dividiu 25 por 20?
LA: Para encontrar o preço de cada litro.
P: E o que você acha da explicação do MR? Ele fez 20 dividido por 25.
CL: Eu fiz 34 vezes 20 e dividi por 25.
P: Por quê?
CL:Não sei explicar.
LA: Eu peguei o 1,25 e multipliquei por 14, 20 falta 14 para 34, deu 17,50. Aí eu somei com R$ 25 que deu 42,50.
P: Vejam, outra estratégia apresentada pela LA.
LG: Mas 25 dividido por 20 dá 1,205.
P: MR, o que você acha disso? Você dividiu 20 por 25. O que o 20 representa?
MR: 20 litros.
P: E fazendo 20 dividido por 25, o que o resultado representa?
MR: O valor de 1 litro.
P: Concordam com ele (MR)?
Alunos: Sim.
BA: Eu fiz 25 dividido por 20 que é igual a 1,25 e multipliquei 1,25 por 34 que deu 42,50.
LG: Tem alguma coisa errada nessa divisão?
P: LG faça a sua divisão aqui no quadro por favor.
LG:25 dividido por 20 dá 1, e sobra 5,coloca virgula depois do 1 e acrescenta zero no 5. Dividindo 50 por 20 dá 2 e sobra 10; tem que por zero depois do 2 e colocar zero no 10 prá dá 100; divide 100 por 20 que dá 5 e sobra resto zero. Deu 1,205.
JU: Não precisa.
LG: Mas quando eu coloquei a vírgula depois do 1, eu tive que colocar zero no 5, então 10 não dá pra dividir por 20, eu coloco zero aqui (quociente) e zero no 10.
JU: Não precisa. Vamos supor que colocando zero dá 10 ai não daria pra dividir, ai você colocaria zero (no quociente) e outro zero pra ficar 100. Então não precisa.
P: E os demais concordam com a JU?
Alunos: Sim.
MR: Não precisa. Dá 1,25.
P: Entendeu LG? Então 25 dividido por 20 dá quanto?

Alunos: 1,25.
P: Muito bem, mas ainda estamos em um empasse: tem um grupo que está fazendo 25 dividido por 20 e outro que está dividindo 20 por 25. E aí?
CL: 20 vezes 34 dividido por 25 é igual a 20,7.
LA: Está errado.
P: Por quê?
KA: Se 20 litros dá 25 reais, como 34 litros vai dá 20,7 reais?
P:E aí CL?
CL: É mesmo, não está certo.
P: E então? Vamos decidir sobre a discussão anterior: as divisões 20 por 25 ou 25 por 20. Qual divisão gera o preço de 1 litro?
MR: Tem que dividir 20 por 25 porque 20 é a quantidade, então tem que dividir a quantidade e dividir pelo valor que é 25 reais.
JU: Está errado professora. Tem que ser 25 dividido por 20.
P: MR acompanhe a explicação de quem fez diferente de você.
LA: 25 é o preço e 20 é a quantidade.
P: Então essa divisão é que vai dá o preço de 1 litro. Logo, o preço dos 34 litros é igual a R$ 42,50. Teria outra maneira de encontrar esse resultado?
Alunos: Não.

<u>Problema 4</u>
Rosa tem um carro que consome, em média, 10 litros de combustível a cada 120 km rodados. Quantos litros de combustível esse carro consumirá em 60 km?

MA: 5 litros.
LG: 5 litros.
BA: 5 litros, porque 60 mais 60 é igual a 120 ou 120 dividido por 2, então significa que 10 dividido por 2 dá 5 litros. Daí 60 km mais 60 km vai dar 10 litros.
P: E vocês (referindo aos outros alunos)?
LE: É 60 vezes 10 dividido por 120.
LA: Lá vem ela com aquelas contas.
MA: As contas são difíceis.
P: Mais alguma estratégia diferente?
Alunos: Não.
P: Estão certos desse resultado?
Alunos: Sim.
P: Está certo.

<u>Problema 5</u>

Comprei 10 latinhas de refrigerante e paguei R$ 15,00. Quanto teria pago se tivesse comprado apenas 4 latinhas?

LE: 6 reais.
P: Como você pensou para obter esse resultado?
LE: 4 vezes 15 dividido por 10.
P: Por quê?
LE: Não sei. Eu multipliquei e dividi.
FE: É 15 reais dividido por 10 e acha o preço de uma lata. Depois pega esse preço e multiplica por 4. Eu não fiz a conta.
P: O que vocês acham?
GI: Dá 6 reais.
FR: 15 reais divido por 10 dá 1,5. Aí eu somei 1,5 mais 1,5 mais 1,5 mais 1,5 que é igual a 6 reais.
JU: Eu multipliquei 15 por 4 e dividi por 10.
P: E por que desses cálculos?
JU: Eu só fiz. É o contrário do outro. Dá o mesmo resultado.
P: Vocês concordam? Tem mais alguma estratégia?
CL: 15 dividido por 10, multiplica por 4 que deu 6 reais.
P: Acham que é a mesma ideia anterior?
Alunos: Sim.
P: Está certo. O preço de 4 latas é R$ 6,00.
P: Analisando esses problemas e os do encontro anterior, o que podemos dizer sobre eles? O que a gente percebe em relação aos valores que aparecem? Por exemplo, esse problema dos refrigerantes: nós tínhamos o preço de 10 latinhas e queríamos saber o preço de 4 latinhas. O que percebemos?
FE: O preço diminuiu.
P: Por quê?
FE: Porque comprou menos.
P: Então se diminuir a quantidade, tem que diminuir o preço.
P: Lembram do problema de ampliação da foto? A largura era 1,5 cm e passava a ser 4,5 cm. O que podemos concluir?
MA: Quando a gente multiplicou a largura por um número tinha que multiplicar o comprimento pelo mesmo número.
GI: Se aumentou a largura tem que aumentar o comprimento. Tem que aumentar a mesma quantidade.
P: O que podemos dizer sobre esses problemas quando comparamos os "elementos"? Por exemplo, refrigerante é um elemento e o preço é outro elemento. O que podemos concluir?
FE: Quando aumenta um elemento tem que aumentar o outro.
P: E no problema do álcool, quando aumentou a quantidade de álcool o que aconteceu com o preço?
MR: Aumentou.
P: Na Matemática, chamamos esses "elementos" de grandezas. Podemos dizer no exercício das latinhas de refrigerantes que a quantidade de latas e o preço são grandezas. Então o que dissemos aqui agora: se aumentar uma grandeza ...
Alunos: Tem que aumentar a outra.
P: E se diminuir uma grandeza?

Alunos: Tem que diminuir a outra.
P:E tem que aumentar e diminuir...
Alunos: Ao mesmo tempo.
P: Com a mesma razão.
BA: Professora, então o que se faz é igual com uma balança. O que fizer com uma tem que fazer com a outra pra ficar igual.
P: Turma observe o que a BA está dizendo: tem que manter o "equilíbrio", no sentido de que se deve realizar a mesma operação entre as grandezas e com o mesmo valor (razão).
P: Muito bem.

ANEXO C – PROTOCOLO DA 3ª SESSÃO

Problema 1

Se com 40 kg de laranja é possível fazer 24 litros de suco, quantos litros de suco serão obtidos com 30 kg de laranja?

LI: Eu achei 480 litros.
P: Temos uma solução.
LI: Não, não, eu errei.
JU: Professora eu fiz assim: eu peguei 40 que é o quilo e dividi por 24 para saber com quantas laranjas se consegue fazer 1 litro. Deu 11. Então com 11 laranjas se faz um litro. Aí eu fiz 11 vezes 30 porque é quanto você quer saber e deu 330 litros.
P: O que acham da solução da JU?
FE: Está errado, tem que dá menos.
LA: Eu peguei 40 dividido por 24 e deu 1,25 e eu multipliquei por 30 e deu 3750 litros.
P: Vocês concordam?
FE: Está errado.
KA: Tem que dá menos litros porque tem menos quilos de laranja.
P: LA o que você acha do comentário da KA?
LA: É mesmo, eu fiz errado.
JU: Professora tem que dá menos de 24 porque com 40 kg já faz 24 litros e com 30 kg tem que fazer menos de 24 litros.
P: O que vocês acham da observação da JU?
LI: Eu sei, mas eu não tenho culpa se a conta deu isso (480 litros), deu errado, né?
P: E então?
CL: Acho que fiz errado. Eu fiz 40 dividido por 24 mas meu resultado deu 16 e 16 vezes 30 deu 4,80 litros. Eu fiz errado.
P: Qual a opinião de vocês sobre a estratégia da CL?
FE: Acho que tá errado.
LI: O meu deu 480 litros.
P: Qual foi a sua estratégia?
LI: 40 dividido por 24 para saber quantos litros. Aí deu 16 e aí eu fiz 16 vezes 30 que deu 480.
FE: Deu 18 litros.
P: Qual a sua estratégia FE?
FE: Eu peguei 24 e dividi por 40, deu 6. Aí eu multipliquei 6 por 30 e deu 18 litros.
GI: Como vai dividir 24 por 40?
LI: Como vai dividir 24 por 40 se 24 é menor?
LA: Coloca zero. Tem que dá zero virgula alguma coisa.
MA: Professora, eu fiz assim: eu dividi 24 por 40 e deu 0,6 e eu fiz 0,6 vezes 30 que deu 18.
P: E o 18 representa o que?
MA: 18 litros.
P: Turma, o que vocês acham da estratégia do MA?
FE: Deu a mesma coisa, deu 18.
P: E a sua divisão tinha dado quanto?
FE: 6.
P: E então?
FE: Não. É 0,6.
CL: Eu fiz 24 dividido por 40 e deu 0,6. Aí eu multipliquei por 30 e deu 18 litros.
P: É a mesma estratégia do MA?
CL: É.
KA: Eu usei a mesma estratégia.
P: O que você acha LI?
LI: Professora, eu tinha feito 40 por 24, mas tem que ser 24 por 40 porque 24 é litro e 40 é a quantidade. Aí tem que dividir o litro pela quantidade. Eu tinha feito o contrário.
P: Então você concorda com a estratégia do MA?
LI: Sim.
P: E o demais? Alguma outra estratégia?
P: MR qual seria a sua estratégia?
MR: Eu acho que tem que dividir 40 por 24 e descobrir quantos litros faz com 1 kg. Daí multiplica por 30 e tem o resultado.
LI: MR eu tinha pensado assim mas deu errado.
P: Por que vocês acham que estava errado? Até agora a gente não sabe a solução.
LI: Porque tem que dividir o litro pelo quilo.
GI: É porque o resultado tem que ser menor que 24 e assim dá mais que 24 litros.
LI: É que se dividir 40 por 24 como eu tinha feito e multiplicar vai dar480 litros. Dá mais que os 24 litros.
P: O que você acha MR?
MR: Ah... entendi.
P: Há outra estratégia?
LA: Professora, eu fiz 24 vezes 30 que dá 720 e dividi por 40 que deu 18 litros.
P: E o que esses cálculos representam?
LA: Eu não sei. Mas dá 18 litros.
P: E os demais?
CL: Eu fiz 30 menos 40, deu 10, vezes 24 que deu 20 litros.
JU: Errado.
P: Por quê?
JU: Vai fazer 10 vezes 24?
P: Repete sua estratégia CL.
CL: 30 menos 40 deu 10 e 10 vezes 24 deu 20.
LI: 20 ?
CL:Não, dá 200.
LA: Tá errado.
P: O que está errado?
GI: Tudo.
P: Então qual seria outra estratégia?
JU: Deixa pensar...
P: E então, alguma outra estratégia?

LI: Eu fiz diferente: 30 vezes 24 e dividi por 40 e deu 18 litros.
P: Qual o raciocínio envolvido nessa estratégia?
LI: Tinha 30 litros... não, desse jeito não dá não.
KA: Eu dividi 30 por 40, deu 0,5 e multipliquei por 24 que deu 12 litros.
P: A KA encontrou outro resultado. Vocês concordam?
P: O que significa 30 dividido por 40?
LI: Significa dividir quilo por quilo.
P: E o que se encontra?
LI: Se encontra quilo.
P: A LI encontrou um resultado diferente do anterior, e agora? Qual está correto?
GI: Eu acho que é 18.
P: Como você garante que é 18?
JU: Eu acho que é 18.
P: Achar e ter certeza é a mesma coisa?
JU: Não.
P: Como vocês explicam e garantem que são 18 ou que são 12 litros?
GI: Porque a gente achou quantos litros faz com 1 kg e como multiplicou por 30 kg, você acha quantos litros faz com 30 kg.
MA: Quando a gente divide 24 por 40, quer saber o valor do litro e quando sabe o litro vai multiplicar por 30. Ai acha quantos litros faz com 30 kg, que é 18.
P: Todos concordam que é 18 litros?
Alunos: Sim.
P: Alguém pensou em outra estratégia?
Alunos: Não.
P: Entre 18 e 12 litros, o que a maioria acha?
Alunos: 18 litros.
P: Certo, a resposta é 18 litros.

<u>Problema 2</u>

Jogando dois dados eu fiz 7 pontos. Quantos pontos eu farei se jogar 4 dados?

MF: 14 pontos.
LA: 14 pontos.
JU: Eu acho que não tem como chegar num resultado porque você jogou 2 dados e deu 7. Se jogar de novo 2 dados você não sabe se vai dar 7, quanto mais 4 dados.
P: Vocês concordam com a JU?
FE: Eu acho que o problema tá pedindo como se fosse 7 pontos, então tem que levar em conta o que o problema pede.
P: E qual a sua resposta FE?
FE: 14 pontos.
LI: A minha é 14 porque 2 vezes deu 7, é só fazer 2 vezes 2 que dá 4. Aí vai dar 14, porque dá 4.
GI: Dá 14 porque é só aumentar mais 7.
P: O GI e a LI encontraram 14 JU, e agora?
GI: Nesse problema, mas em outro caso não saberia quanto ia dá na segunda...
MA: Acho que é 14 pela pergunta, mas em nenhum dado ele vai fazer os mesmos pontos seguido. Só se tivesse viciado.
P: E qual é a resposta do problema?
MA: Acho que é 14 porque cai uma vez 7 e 2 vezes 7 vai dá 14.
MR: É tipo... a cada duas vezes que ele joga ele faz 7 pontos, então a média de jogo dele é 3,5. Ai a cada dois jogos ele faz 7, a cada 3 jogos faz 10,5 e a cada 4 jogos seria 14. Não seria preciso... é como se fosse uma estatística.
P: Então qual a sua resposta?
MR: 14.
LI: Eu tenho outra estratégia: dá 14 porque jogou 1 vez deu 7. Jogou outra vez dá 14 porque 2 vezes 7.
P: Todos acham que a solução é 14?
Alunos: Sim.
P: Mas inicialmente alguém estava discordando disso, por quê?
Alunos: Como saber se vai sair 7?
JU: Não é que eu desconfio, é que tem dois lados de entender o problema. Um que pode cair qualquer número, não precisa dar 7 em 2 dados e outro é que em 2 dados faz 7 então em 4 vai fazer 14.
P: O que acham da fala da JU?
MR: Mas professora, o problema fala que dá 7 então tem que dá 14.
P: Vou ler novamente o problema: Jogando dois dados eu fiz 7 pontos. Quantos pontos eu farei se jogar 4 dados? Há dúvida quanto a isso?
Alunos: Não.
P: É algo que pode acontecer?
Alunos: Sim.
P: E quantos pontos farei se jogar 4 dados? Essa é a pergunta.
GI: Na aula passada você passou um problema como esse, não lembro quantos gol... você falou a cada 2 jogos um jogador faz 3 gols e em 6 jogos quantos gols ele fará? E todo mundo respondeu 6 porque no problema tava falando.
P: E qual a conclusão que havíamos chegado sobre aquele problema?
MA: Que não tem como prevê o total de gols que o jogador iria fazer.
GI:Então, é como esse problema. Um dado pode ou não cair em 7.
P: Mas na Matemática pode ter uma resposta assim? Que pode ou não pode?
GI: Tem que ser específica.
FE: Mas a resposta é talvez, é provavelmente.
P: Qual a conclusão que chegamos na aula passada?
JU: Poderia.
P: E qual a resposta para esse problema de hoje?
LI: Uma média de 14 pontos.
P: Média é a resposta para esse problema?
Alunos: Não.
LA: Pode ser qualquer número.

P:Quando eu jogo os 4 dados?
Alunos: Sim.
P: Vamos pensar num resultado possível quando eu jogo os 4 dados. Quantos pontos faria?
LI: Se os 4 sair 1 daria 4 pontos.
CL: Professora vai dar 14 aproximadamente.
P: A CL acha que é 14 aproximadamente, concordam?
MY:Eu concordo com o MR.
P: Qual seria outro resultado possível jogando os 4 dados LA?
LA: Qualquer número.
P: Diga-me um resultado possível.
LA: 8.
P: O que sairia em cada dado para ter 8 pontos?
LA: 2 em cada dado.
MR: O resultado seria de 4 pontos até 24 pontos, saindo 1 nos 4 dados e 6 nos 4 dados.
P: Então qual seria a solução para o problema?
Alunos: 14.
P: Vamos retornar ao problema das laranjas. A solução era determinada?
Alunos: Sim.
P: Dependia de alguma coisa para encontrar o resultado?
Alunos: Sim, os quilos da laranja.
P: Era possível falar o resultado sem dúvida?
Alunos: Sim.
P: E no problema dos dados, vocês ouviram o que o MR explicou?
MR: Pode dar qualquer resultado.
P: Podemos comparar com o problema das laranjas?
MF: Não tem como achar uma solução.
FE: Pode ser que tire qualquer número nos 2 dados, mas de acordo com o problema vai dar 7. Fica esquisito num problema de matemática se a resposta for provavelmente.
P: E qual seria sua resposta?
FE: Ué, professora, se você joga 2 dados e dá 7, se você joga mais 2 dados vai dá 14.
LA: No problema tem dois tipos de raciocínio: se for no raciocínio matemático vai dar 14 porque vai dá 7 em dois dados e 7 nos outros 2 dados. Agora no raciocínio lógico não tem como dá nada porque não vai saber se os dados vão dá 7 e 7.
P: Mas aqui temos que ter uma solução.
JU: Não tem resposta.
MR: A resposta tem que ser entre 4 e 24.
P: Nesse problema tem uma afirmação. Será que essa afirmação garante a resposta que estou dando ao problema? Há garantia de que se tirei 7, o resultado com os 4 dados depende do 7 obtido?
Alunos: Não.
MR: O problema fala que com 2 dadas dá 7. Ta afirmando que a cada 2 dados dá 7.
P: Concordam com o MR?
FE: Não.
P: Jogando 2 dados o resultado poderia ser 5?
Alunos: Sim.
P: E quando jogasse os 4 dados o resultado dependeria desse resultado 5?
MR: Sim.
LA: Não.
JU: Sim.
P: Vamos pensar em outra atividade e depois retornamos nessa.

Problema 3

Elvira comprou 3 relógios iguais e pagou R$ 144,00. Quanto pagaria se comprasse 7 relógios do mesmo tipo?

FE: Eu não fiz as contas, não sei o resultado, mas eu sei que tem que dividir 144 por 3 que vai dá o resultado e o resultado multiplica por 7.
P: Ouviram a estratégia da FE?
LA: Eu também pensei assim.
MY: Eu também.
GI: Já fiz a divisão. Eu fiz como a FE, eu descobri quanto custava cada relógio e multipliquei por 7 e deu 264 reais.
P: O que os outros acham?
KA: Eu fiz 144 por 3, deu 48 reais e multipliquei por 7 que deu 324 reais.
P: A KA encontrou um resultado diferente do GI. O que 48 representa?
Alunos: O preço de um relógio.
P: Por que o resultado do GI é diferente do resultado da KA?
GI: Eu fiz a conta errada.
LI: Eu fiz assim: ela comprou 3 relógios e pagou 144, tem que dividir 144 por 3 para achar o preço de cada relógio. Cada relógio vale 548.
GI: Como que cada relógio vai custar 548 se 3 relógios custa 144?
JU: Como?
CL: Professora não pode dar um valor maior que o preço de 3.
P: E aí LI?
LI: Deu 538 aí eu multipliquei por 7 e deu 336 reais.
Alunos: Tá errado.
JU: Eu fiz como ela, mas o resultado dela está errado. Eu fiz 144 dividido por 3 que dá 48 e multipliquei por 7 que deu 336 reais e o dela deu diferente.
P: E aí LI?
LI: Não sei.
KA: Eu fiz assim: 3 relógios é 144 e mais 3 relógios deu 144 que dá 228, e mais um que é 48 ,ai deu 336 reais.
P: Essa é a mesma estratégia da JU?
Alunos: Não.
P: E o que vocês acham?
Alunos: Tá certo.

LI: Professora, eu não sei como apareceu um 5 aqui quando eu dividi 144 por 3. A divisão dá 48 e vezes 7 deu 336 reais.
P: Concordam que o preço dos 7 relógios é 336 reais?
Alunos: Sim.
P: Como garantimos que esse valor é o correto?
FE: Porque o preço de um é 48 vezes 7 é 336 reais.
P: Se tivesse dado um valor menor que 144 reais estaria correto?
Alunos: Não.
FE: Porque 3 é 144 então 7 tem que dá mais.
P: Então o valor tem que ser maior?
Alunos: Sim.
P: Se eu aumento o número de relógio tem que aumentar o que?
Alunos: O preço.
P: E se tivesse comprado 10 relógios?
Alunos: 480 .
P: O preço que vou pagar depende de alguma coisa?
MY: Da quantidade que vou comprar.
FE: 7 vezes 8 é 54 ou 56?
P: MF a FE está com uma dúvida: 7 vezes 8 é 54 ou 56?
MF: 56.
P: Voltando ao problema. E se comprasse 2 relógios?
Alunos: Ia pagar menos.
JU: 48 mais 48 que é 96 reais.
P: Para finalizar: o preço dos relógios depende de que?
Alunos: Da quantidade de relógios.
P: Voltando ao problema dos dados. Quando eu jogo 4 dados o resultado depende de alguma coisa?
JU: Depende dos números que vão sair.
P: Depende dos 7 pontos anteriores?
Alunos: Não.
P: Então o que posso dizer sobre a solução do problema?
LA: que não tem solução.
LI: Mas no problema tem 7 pontos. Ele não ia falar à toa.
P: LI, voltando ao problema dos relógios, o valor que pagaria depende da informação dada anteriormente?
LI: Sim, do preço do relógio.
P: E o preço de cada um dependeu da informação dada?
LI: Sim.
P: E quando eu jogo os 4 dados, o resultado depende dos 7 pontos anteriores?
LI: Eu já falei, automaticamente tem que usar o 7 porque não aparece outro número. Se cair na prova por exemplo, vai deixar sem resposta?
P: E o que a LA apresenta é uma resposta?
LI: Mas na prova não pode dizer que não tem resposta.
GI: A mesma coisa que falar: eu jogo dois dados e vai dar um valor e quando jogo 4 dados vai dar outro valor. Não tem solução.
P: Vocês concordam com a LA?
GI: Sim.
MA: Eu também. É como fazer uma prova de matemática. Posso tirar 6,5 ou posso tirar 7, não dá pra saber.
P: Então vocês concordam com a LA e o GI?
MA: Sim.
P: E os demais?
Alunos: Sim.
P: Realmente, não há relação de dependência entre os pontos obtidos ao jogar 4 dados e os pontos obtidos ao jogar 2 dados. Logo, não é possível estimar um resultado.

ANEXO D- PROTOCOLO DA 4ª SESSÃO

Problema 1

Se Marta ler 8 páginas por hora, ela lerá um livro em 12 horas. Se ela ler 16 páginas por hora, em quantas horas ela vai ler esse livro?

MA: 96 horas.
P: Como você pensou?
MA: Eu multipliquei 12 vezes 8.
P: O que vocês acham dessa resposta?
BA: 24 horas.
P: Qual a sua estratégia?
BA: Não sei explicar.
LG: 2 horas.
P: Qual a sua estratégia?
LG: 8 páginas é 1 hora, 16 páginas, que é 8 mais 8, então 1 hora mais 1 hora dá 2 horas.
MA: É mesmo, eu multipliquei errado. É 2 horas.
MY: Eu não entendi professora.
P: Não entendeu o problema ou a explicação do LG?
MY: Não entendi a explicação do LG.
P: LG a MY não entendeu sua explicação. Explique novamente sua estratégia, por favor.
LG: Se ela lê 8 páginas em 1 hora então ela vai ler 16 páginas em 2 horas porque 8 vezes 2 é 16 então 2x1 é 2.
P: Quanto tempo ele leva para ler o livro?
P: Quanto tempo ela leva para ler o livro todo? Quantas horas?
LG: Para ler o livro ou 16 páginas?
P: O livro.
MA: 8 páginas leva 1 hora, então 16 páginas 2 horas.
P: E o livro?
LG:12 horas.
P: Se ela ler 8 páginas por hora ela lê o livro em 12 horas. Se ela ler 16 páginas por hora, em quantas horas ela lerá o livro?
LG: Ah! Agora entendi.
MY:Tem que ser menos de 12 horas.
P: O que vocês acham da fala da MY?
MA:Tá errado.
P: LG, quanto tempo ela leva para ler o livro?
MA: 12 horas.
P: A MY está dizendo que tem que ser menos de 12 horas, você concorda com a observação dela?
LG: Sim, porque se ela...
GI: Ela lê 8 páginas em 12 horas...
MA:8 páginas não, lê o livro inteiro em 12 horas.
GI: Se ela lê 8 e gasta 12 horas, então se lê 16 tem que ser menos tempo, tá certo.
P: E em quanto tempo então?
LG: Já sei, dá 48 horas! Eu fiz assim... calma aí... 8 páginas em 1 hora, se lê o livro inteiro leva 12 horas. 8 vezes 12 dá quantas folhas que ela leu, dá 96 páginas. Tá perguntando quantas páginas?
P: Está perguntando em quantas horas ela vai ler o livro todo.
MA: 16 páginas por hora? Então é 96.
LG: Não! Nada a vê...tem que ser menos.
BA: Como 8 vezes 2 dá 16, então no caso você tem que pegar a hora mais x, por exemplo, e fazer também o dobro do 12, que é 24.
P: Então se ela lê 16 páginas ela gasta o dobro do tempo, é isso?
GI: Não, ela vai gastar menos, se ela lê 16 páginas por hora ela vai lê o dobro do que ela tava lendo, então vais gastar menos tempo.
MA: Ela vai lê mais, 8 páginas por hora, o dobro do que estava lendo.
P: E quanto tempo?
MA: Menos tempo.
P: E quanto é esse menos tempo?
GI: Eu acho que vai ser 6 horas, porque ela vai lê 16 páginas que é o dobro de 8 páginas, então vai gastar metade do tempo que é 6 horas.
LU: É isso mesmo.
P: Vocês concordam com a explicação do GI?
JU: Tá certo.
P: O que aconteceu com o número de páginas?
Alunos: Aumentou.
P: O que aconteceu com o tempo BA, o que você acha?
BA: Eu tinha pensado diferente , mas acho que está certo.
P: MY, o que você acha? Você que disse que tinha que ser menos tempo, você concorda com eles?
MY: Sim.
LI: Não entendi direito.
P: A LI ainda está com dúvida...
GI: Eu também fiquei com dúvida ainda.
P: Como vocês garantem que esse tempo que vocês encontraram está correto, se vocês estão com dúvidas?
GI: Faz uma prova, não sei.
LG: Ela gasta a metade do tempo porque leu mais páginas, o dobro, então gasta a metade.
P: Os demais o que acham?
Alunos: Tá certo.
P: Ainda há dúvidas quanto ao tempo encontrado?
Alunos: Não. É 6 (horas).
P: Certo, vamos para a próxima atividade.

Problema 2

Em seu carro Luciana andou a uma velocidade média de 90 km/h e gastou 20 minutos. Qual seria o tempo gasto para fazer o mesmo percurso, se a velocidade média fosse de 45 km/h?

LG: Metade.
JU: Não é a metade.
LG: 10 minutos.
JU: Não é a metade.
LG: Se 90 km ela demora 20 minutos, 45 km por hora é 10 minutos.
LI: É 40 minutos.
P: Qual a sua estratégia LI?
LI: 45 mais 45 é 90, por 2, a metade de 90 é 45, ai é só diminuir..., de 90 diminui 2...
P: E qual o tempo?
LG: 40 minutos, porque 90 ele fazia em 20 minutos para chegar num lugar, ai vai diminuir para 45 para chegar naquele lugar, então 45 mais 45 é 90, então vai ser multiplicado o tempo também por 2 , 20 vezes 2, que vai dá 40.
GI: Se você fizer em menos velocidade vai gastar mais tempo, deve tá certo.
P: LI o que você acha da explicação do LG e do GI?
LI: Entendi.
GI: Se fosse dividir ia dá 10 minutos , nada a vê.
MA: É, nada a vê.
P: O que aconteceu com a velocidade?
Alunos: Diminuiu.
P: Então se eu fosse andar mais devagar...
Alunos: Ia gastar mais tempo, vai demorar mais.
P: Então qual é o tempo gasto?
Alunos: 40 minutos.
P: Com certeza?
Alunos: Sim.
P: Certo, isso mesmo.

Problema 3

Nos 5 primeiros dias de janeiro choveu em 3 dias. E nos 10 primeiros dias de janeiro choveu quantos dias?

LI: 6 dias.
LI: 6.
MA: Aproximadamente 6 porque seria o dobro conforme a atividade, mas não é provável saber que vai chover o mesmo tanto, então é aproximadamente 6.
FE: Sempre tem essa atividade assim...
JU: Aproximadamente 6.
P: O que vocês acham?
GI: É o que tinha falado na aula passada do futebol, provavelmente 6.
P: E que conclusão tínhamos chegado sobre esse provavelmente? Foi aceito como resposta?
Alunos: Não.
FE: Aproximadamente 6.
JU:Provavelmente 6.
LI: Exatamente 6.
MA: Você não sabe se vai chover a mesma coisa.
LI: É exatamente 6 porque se não fosse exatamente ele não ia por esses números ai.
LG:É, segundo a interpretação da pergunta, dá 6, exatamente 6, mas se você pensar teoricamente vai dá aproximadamente 6.
P: Vamos pensar matemáticamente....
Alunos: 6 [em coro]
MA:Aproximadamente 6.
LG: Não, aproximadamente 6 não.
P: Por que aproximadamente?
MA: Porque é impossível saber se vai chover...
LG: Teoricamente é 6.
FE: De acordo com o problema ele ta pedindo que em 5 dias chove 3 dias, então nos outros 5 dias vai chover 3 dias também, daí 6 dias.
P: A gente tem essa certeza?
LG: Não.
FE: De acordo com o problema sim.
MA: Na língua matemática, sim, porque tá passando da língua portuguesa para matemática, ou seja, dá interpretação para a conta.
LI:Não, tá passando da ciência para matemática, né?
P: Qual seria a resposta?
LI: A resposta é 6.
P: Todo problema tem que ter uma resposta?
Alunos: Tem.
LI:Lógico que tem.
LG: Não, nem sempre, as vezes dá vazio, zero.
P: LG quando você fala vazio, o vazio é uma resposta?
LG: É.
P: Nesse problema eu posso dizer que existe relação entre a quantidade de dias que choveu nos 5 dias e a quantidade de dias que choverá nos 10 dias?
LG: Se levar para interpretação sim, pelo raciocínio, teoricamente.
P: E vocês o que acham?
FE: Não tem resposta.
JU: Aproximadamente 6.
P: Se chover hoje, eu tenho garantia de que choverá amanhã?
Alunos: Não.
P: E em relação ao problema, temos certeza de quantos dias choverá em 10 dias?
Alunos: Não.
P: E qual seria então a resposta para o problema?
LG: Aproximadamente 6.
FE: Aproximadamente 6.
MY: Não tem resposta.
P: Nesse problema não há relação entre a quantidade de dias que choveu em 5 dias e a quantidade de dias que choveria em 10 dias.

Logo não poderia ser apresentado um valor determinado como resposta.

Problema 4

Seis pedreiros, com a mesma capacidade de trabalho, levam 27 dias para concluir uma certa obra. Com apenas 3 desses pedreiros, em quanto tempo a obra será concluída?

LG: 13,5 dias.
LI: 54 dias.
P: Qual a sua estratégia?
LI: Tinha 6 aí ficou pela metade então tem que dobrar o tempo, porque tirou, aí tem que aumentar.
P: Concordam com a LI?
MA: Acho que é 54 porque se tirar 3 pedreiros, eles vão demorar mais, então tem que aumentar o tempo que eles levaram, então tem que aumentar o dobro porque 3 mais 3 é 6, por isso é 27 mais 27, que é 54 dias.
BA: Eu também confirmo que é 54 dias porque com 6 pedreiros seria bem mais rápido a obra e diminuir 3 pedreiros iria aumentar esse tempo porque você teria que ter muito mais habilidade para fazer, acho que aumenta pra 54 dias.
LG: Mas como o exercício tá falando que todos os pedreiros conseguem fazer o mesmo serviço, o mesmo tempo, não vai ter aquela indecisão, indecisão não, dúvida como na questão de antes.
JU:Ah! Não entendi nada.
P: Quem pode explicar para a JU?
FE: São 6 pedreiros para fazer uma construção em 27 dias. Se tirar 3 pedreiros vai ficar 3. Como é metade, então 27 mais 27 vai ficar 54, ah, não sei explicar...
Ba: Você vai fazer uma obra, daí você contrata 6 pedreiros, daí pra fazer a obra inteira esses 6 pedreiros vão levar 27 dias. Daí 3 pedreiros decidem, ah, não vou mais fazer porque tenho uma obra mais importante, vou ganhar melhor e 3 vão embora, tchau. Daí só restam 3, com esse tanto você acha que vai aumentar ou diminuir (o número de dias)?
JU: Vai aumentar.
GI: É porque vai ter mais trabalho...
BA: Então se 3 mais 3 dá 6, então 27 mais 27?
JU: 54.
BA: Então é a mesma coisa do que aqueles 3 pedreiros valessem por dois...
GI: E a professora disse que os pedreiros tem a mesma capacidade de fazer , daí se sai 3, diminui, vai ter que aumentar, multiplicar por 2.
P: Entendeu JU?
JU: Entendi.
GI: Muito fácil...
P: Todos concordam com as explicações, com a estratégia, com o resultado?
Alunos: Sim.
P: Certo, são necessários 54 dias.
P: Nesses tipos de atividades que realizamos temos grandezas, que são números que representam uma medida. Nas atividades de hoje, como a que falava dos pedreiros, quais eram as grandezas?
FE: Pedreiros e dias.
P: Tinha-se 6 pedreiros que trabalhavam 27 dias. De 6 passou para 3 pedreiros. Qual seria uma operação realizada aqui entre esses valores?
LG: Divisão por 2.
P: E com a grandeza dias, o que ocorreu?
MY: Multiplicou por 2.
P: Por que em uma grandeza o valor foi dividido por 2 e na outra grandeza o valor foi multiplicado por 2?
JU: Porque como diminuiu o número de pedreiros tinha que aumentar o número de dias.
P: Então houve uma inversão. Uma grandeza está diminuindo e a outra está aumentando.
JU: Se de um lado está multiplicando passa para o outro lado dividindo, se está dividindo passa multiplicando.
P: Se eu diminuo o número de pedreiros...
Alunos: Tem que aumentar o número de dias.
P: Então foram realizadas operações inversas. Isso é diferente do que observamos na atividade que envolvia metros e calças, pois quando diminuiu o valor do metro, diminuiu a quantidade de calças. Se tivesse aumentado a quantidade de metros teria aumentado a quantidade de calças, na mesma razão. Nesse caso, dizemos que as grandezas metros e calças são diretamente proporcionais. Já no caso dos pedreiros, observamos que quando a grandeza pedreiro diminuiu, a grandeza dias aumentou na mesma razão, que no caso foi 2. Nessa situação, dizemos que as grandezas pedreiros e dias são inversamente proporcionais.
Em atividades realizadas anteriormente, como por exemplo, da chuva, quando aumentava o número de dias , não podíamos dizer que iria aumentar o número de dias com chuva, porque nessa situação não há relação proporcional entre os valores envolvidos. Na atividade dos dados também não há relação proporcional entre o número de dados e o número de pontos.

ANEXO E – PROTOCOLO DA 5ª SESSÃO

Problema 1

Com 2 kg de cobre, faço 8 pulseiras. Quantas pulseiras farei com 7 kg de cobre?

P: Vamos ouvir as estratégias de cada um.
LI: 28. Eu fiz 8 dividido por 2, que dizer, 2 dividido por 8 que é igual a 4 e 4 multiplicado por 7 que deu 28.
LG: Não, tá errado.
Alunos: Não, não, tá certo.
LG: É, tá certo, eu que fiz errado. Mas é 8 dividido por 2 ou 2 dividido por 8?
MA: Eu descobri o valor da pulseira, que dá 4 e multiplica pelo quilo, aí dá 28.
P: Quais foram as operações envolvidas?
MA: Divisão e multiplicação. O quilo do cobre pelas pulseiras.
P: 2 dividido por 8?
MA: Não. É 8 dividido por 2 que dá 4.
P: O que o 4 representa?
MA: Representa o quanto vale 1 kg de cobre.
LG: A metade de 2 é 1 e a metade de 8 é 4.
P: O 4 representa o quê?
Alunos: 1 quilo de cobre.
P: Quantas pulseiras se faz com 1 kg de cobre?
JU: 4 pulseiras. Olha, com 1 kg faz 4, então com 2 kg faz 8 pulseiras. Multiplica por 2.
P: Foi essa a estratégia apresentada pela LI?
LG: Não. Ela fez 2 dividido por 8. Eu falei.
LI: É o contrário.
P: Então, o que concluímos?
GI: Que com 1 kg de cobre faz 4 pulseiras e com 7 kg faz 28 pulseiras.
P: Todos concordam com a resposta?
LA: Eu fiz diferente. Eu peguei 8 e multipliquei por 7 que é 56 e dividi por 2, deu 28.
P: O que vocês acham dessa estratégia?
LA: É....não sei.
MR: Ela só inverteu a ordem. Primeiro multiplicou e depois dividiu, mas o resultado é o mesmo.
JU: Professora, estou com uma dúvida, por que dividiu por 2?
P: E aí LA?
LA: Porque tem 2 kg.
LG: Ela só trocou a ordem das operações, mas vai dar o mesmo resultado.
LA: 4 vezes 7 é igual a 28 e 7 vezes 4 é igual a 28.
MR: O resultado é o mesmo, mas o pensamento é errado. Esse 8 é uma coisa diferente do 7. Então o 7 é outra coisa. Você não pode multiplicar porque são coisas diferentes. O pensamento é errado.
P: Temos que ter cuidado para não fazer só operações, mas compreendermos o que estamos fazendo. É permitido relacionar os valores das grandezas diferentes.

Problema 2

Se 5 torneiras enchem um tanque em 45 minutos, 10 torneiras iguais a essas encheriam esse tanque em quantos minutos?

Alunos: 90 minutos.
JU: Não, não,... vai ser menos.
GI: Divide 45 por 5 que dá 9 que é quanto tempo gasta com uma torneira aí multiplica por 10, dá 90 minutos.
JU: Não é, não é, sabe por quê? Se com 5 torneiras a gente demora 45 minutos, com 10 tem que ser menos.
LG: 22,5 minutos.
GI: Verdade, eu errei.
MR: 5 torneiras, cada uma é igual cada uma das 10 torneiras, então as 10 torneiras, como é um valor maior, elas encherão mais rápido que as 5, então o valor tem que ser menor, não maior, então divide por 2 como no caso é a mais, então multiplicou por 2, que é o dobro, então você divide o tempo por 2 que daria...
LG: 22,5 minutos.
LG: A água vem na mesma quantidade?
LI: 5 mais 5 é 10, aí como é 10 então 45 mais 45 é 90.
JU: Não, tá errado.
MR: Tá errado.
LG: LI, com 5 torneiras tem uma velocidade e gasta 45 minutos, assim com mais 5 torneiras vai encher mais rápido, então vai diminuir o tempo.
P: Concorda LI?
LI: Sim.
FE: 5 torneira faz 45 minutos, a gente podia pegar 45 mais 45 dividido por ... não, não dá.
MA: Eu concordo com o LG porque mais torneiras vão encher mais rápido.
P: Então qual a resposta de vocês?
JU: 22,5 minutos.
MR: 22 minutos e 30 segundos.

Problema 3

Priscila foi ao supermercado com a sua mãe. Como o estacionamento grátis do supermercado estava lotado, sua mãe precisou deixar o carro num outro estacionamento rotativo, que tinha a tabela de preços abaixo:

Tempo	Preço
1 h	R$ 3,00
2 h	R$ 7,00
3 h	R$ 11,00
4 h	
5 h	

Complete a tabela acima.

Existe uma relação proporcional entre o tempo e o preço a ser pago? Por quê?

JU: A diferença entre eles, de 3 a 7 dá 4 reais, de 3 horas conseguiu 11, e se a diferença deles são 4 reais, então dá 15 reais para 4 horas e depois em 5 horas vai conseguir 19 reais.
LI: Se 1 hora é 3 reais, 2 horas tinha que ser 6 reais, porque aumentou 2 reais, não tinha que ser 6 reais?
GI: Não tinha.
LI: Deixa eu falar... tinha que ser 6 reais, aumentou 1, no 3 tinha que ser 15 reais, ah, não.
LG: Se 1 hora é 3 reais, 2 horas devia ser 6 reais porque 1 mais 1 é 2 horas , e como 1 hora é 3 reais, então 3 mais 3 deveria se 6 reais, essa foi minha dúvida, mas pelo que está aqui vai ser 4 reais.
MR: Depois de uma hora vai aumentando 4 reais, eles estabeleceram uma taxa de juros para cada hora a mais.
P: MR como você preencheu sua tabela?
MR: Para 4 horas, 15 reais e para 5 horas, 19 reais.
AX: Eu pensei cada hora que passava ele aumentava 4 reais que é a diferença no preço que já tinha estipulado.
P: Todos encontraram esses valores?
GI: Professora, depois de 1 hora vai aumentando 4 reais, mas na primeira hora é 3 reais.
ALUNOS: Sim.
P: E sobre a pergunta, se existe ou não uma relação proporcional entre o tempo e o valor a ser pago, o que responderam?
MA: Sim, a cada hora que passa aumenta 4 reais.
LA: Sim, o estacionamento é rotativo, não pode ficar muito tempo, tem que ir trocando a vaga.
P: LA, você acha que existe uma relação proporcional?
LA: Sim.
LG: Sim, a diferença de 4 reais em 4 reais a cada hora porque quanto mais tempo no local, tem que pagar mais.
GI: É, tem uma lógica nisso.
AX: Sim, porque cada hora que passava aumentava o preço.
P: Todos concordam que existe uma relação proporcional?
Alunos: Sim.
P: Vamos voltar ao exercício que acabamos de fazer. Quando aumentava a quantidade de cobre, o que acontecia com a quantidade de pulseiras?
JU: Aumentava.
P: E no caso das torneiras, o que aconteceu com o tempo quando aumentou a quantidade de torneiras?
JU: Quando aumentou a quantidade de torneiras, diminuiu o tempo.
P: Que relação vocês observaram na quantidade de torneiras, de 5 para 10, para depois encontrarem o tempo?
LA: Aumentava 5 torneiras.
P: Por meio de qual operação?
LG: Divisão.
JU: Somava 5.
MA: Multiplicava por 2.
P: E entre os valores para o tempo, que operações vocês realizaram?
MY: Dividiu por 2.
MA: Dividiu por 2.
P: O valor envolvido nas operações foi o mesmo?
Alunos: Sim.
P: E na atividade que estamos realizando agora, olhando na tabela para a coluna do tempo, aumenta como?
MF: De 4 em 4.
P: Na coluna tempo.
LG: De 1 em 1 hora.
P: E na coluna reais, como aumenta?
LG: De 4 em 4 reais.
P: Aumenta o mesmo valor nas duas colunas?
LG: Não está aumentando a mesma quantidade, mas estão aumentando, é tipo uma balança.
JU: Os dois aumentam.
P: Se é uma balança, você está colocando o mesmo "peso" nos dois lados?
JU: Não.
LA: Mas está aumentando.
MA: Se o carro ficar 1 hora ele paga 3 reais, se ficar 2 horas paga 7 reais, se ficar 3 horas paga 11, se ficar 4 horas paga 15 e 5 horas ele paga 19.
P: Existe uma relação proporcional entre o tempo e o valor pago?
MA: Sim, porque mais tempo ele fica, mais ele vai pagar.
MY: Eu acho que não, porque aqui está perguntando se entre o tempo e o preço tem relação proporcional. Não, porque o tempo está andando de 1 em 1 hora e o preço de 4 em 4 reais.
P: O que vocês acham da explicação da MY?
LG: É como eu falei, se o tempo aumenta, o preço também tem que aumentar.

P: O que entendemos por proporcional, por relação proporcional?
LA: É assim, tipo uma balança, tem que equilibrar, ele coloca 1 numa coluna e 4 na outra, então não vai ficar ...proporcional.
P: Então qual a conclusão que vocês chegaram?
LA: Que não tem .
JU: Que não tem relação proporcional porque a hora aumenta de 1 em 1 e o preço de 4 em 4 reais.
P: Todos concordam?
LG: Por que aqui vai somando e no outro exercício usa multiplicação e divisão?
P: O que vocês podem dizer sobre a pergunta do LG?
LI: Qual a pergunta?
LG: Se tem alguma influência que aqui é só adição, que vai somando 4 em 4 em 1 hora em 1 hora e lá é multiplicação e divisão?
FE: Eu acho que existe relação proporcional porque é como se 1 hora e 3 reais estivesse equilibrado.
P: Turma, parece que a FE está discordando da conclusão anterior. O que vocês dizem para ela?
[Alunos começam a discordar uns dos outros]
LI: Eu acho que 1 hora tinha que ser 4 reais e não 3 reais.
MY: Eu falei que não tem relação proporcional porque o tempo está andando de 1 em 1 hora e o preço está aumentando de 4 em 4 reais.
LG: Eu também estava com essa dúvida, mas eu não...Olha, se de 1 em 1 hora sobe 4 reais, porque no tempo zero, é nenhuma hora, para 1 ficou 3 em vez de 4, tipo se sobe 4 reais em cada hora, porque zero hora é 3?
MR: O dono do estacionamento estabeleceu o valor que ele quis.
LI: Não tem relação.
P: Bom, vamos resolver outra atividade e depois voltamos nessa para vocês decidirem se tem ou não relação proporcional.

<u>**Problema 4**</u>

Para preparar a tinta, um pintor mistura, a cada 4 latas de tinta concentrada, 6 latas de água. Quantas latas de água são necessárias para dissolver 8 latas de tinta concentrada?

A partir do resultado obtido acima, complete a tabela abaixo:

Tinta concentrada	**Água**	**Operações realizadas**
4	6	
8		
	3	
1		

Existe uma relação proporcional entre as grandezas tinta e água? Por quê?

JU: 12. Eu fiz 2 multiplicado por 4 porque ele queria 8 latas de tinta, já que multipliquei o tanto de lata de tinta, então eu tinha que multiplicar o mesmo no tanto de água. Aí eu multipliquei 2 por 6 que deu 12.
LI: 4 multiplicado por 2 é 8, 6 multiplicado por 2 é 12.
LG: 12 porque multiplicou 4 latas por 2 para ter 8 latas de tinta, então tinha que multiplicar o de água para igualar.
P: E para a 3ª linha a ser completada da tabela, ou seja, para 3 latas de água, quantas seriam a quantidade de latas?
MF: Eu achei 2 porque é 4 tinta e 6 latas de água, aí 6 menos 4 é 2.
P: Ouviram o MF? O que acham?
LU: A diferença de água que tá 6, e a diferença dá pra ver que 6 é o dobro de 3, 6 dividido por 2, então tem que dividir 4 por 2 para manter a igualdade. Daí 2 latas de tinta.
LA: Eu também achei 2.
P: E para a 4ª linha, ou seja, para 1 lata de tinta, quantas são as latas de água?
LA: 1,5, porque no começo temos 4 latas de tinta e 6 de água. Aí eu dividi 6 por 4 para descobrir quantas latas de água dissolve 1 lata de tinta. Aí 1,5 de água dissolve 1 lata de tinta.
LG: Como 2 latas de tinta dividido por 2 é igual a 1, então 3 latas de água dividido por 2 é a resposta, então deu 1,5.
P: E os demais alunos?
Alunos: Mesma resposta.
P: Existe relação proporcional entre as grandezas tinta e água?
LI: Sim, porque divide e multiplica por 2 em todas.
LA: Não, porque com 4 latas de tinta usa 6 latas de água e com 8 latas de tinta usa 12 de água, então no lado (coluna) de tinta soma 4 e do lado (água) soma 6, então quando aumenta lata de tinta não é o mesmo tanto que aumenta as latas de água.
MR: Tem proporção 4 latas de tinta e 6 latas de água. O que 8 é de 4? O dobro. E de 6 para 12 eu multiplico por 2. O que 2 é de 4? Metade, e de 6 para 3 é metade. Se colocar numa ordem crescente, vai dobrando.
P: Temos duas opiniões, da LA e do MR. A LA verificou que na coluna da tinta e água os valores vão aumentando com soma de valores diferentes. O MR observou que nas duas colunas, os valores em cada linha vão sendo obtidos com operações de multiplicação ou divisão envolvendo o mesmo valor. Então para ele existe a relação proporcional porque consegue fazer a mesma operação nas duas colunas com o mesmo valor.
P: Vamos comparar esse exercício com aquele do estacionamento. Será que com a observação que o MR fez nessa atividade, seria possível no

exercício do estacionamento, ir de 1 hora para 2 horas e de 3 reais para 7 reais, multiplicando os valores da hora e do preço a ser pago por um mesmo valor?
LG: Não.
P: Esse problema das tintas é "igual" ao do estacionamento?
Alunos: Não.
P: Naquele, os valores aumentavam, porém com valores diferentes para cada grandeza, ou seja, não aumentavam na mesma razão. Nesse as grandezas aumentam (ou diminuem) por meio da multiplicação (ou divisão) de um mesmo valor nas duas grandezas, isto é, aumentam na mesma razão. Logo, nesse problema existe relação proporcional entre as grandezas tinta e água e no outro não.
P: Para finalizar esse assunto, vamos rever o seguinte: quando nós falamos do problema do cobre e das pulseiras, tínhamos 2 kg de cobre e era possível fazer 8 pulseiras. Quando colocamos 7 kg de cobre, encontramos 28 pulseiras, certo? Então, kg e pulseiras nós chamamos de grandezas. Nesse problema, eu posso dizer que existe relação proporcional entre as grandezas?
JU: Sim.
LG: Sim, porque multiplicamos o mesmo valor na quantidade de cobre e pulseira para encontrar as 28 pulseiras.
LI: Não, porque foi de 4 em 4 nos dois.
Alunos: Ah...
LI: 7, 14, 21 e 28. 2, 4, 6 ,8.
JU: 21, menina.
MA: De 7 em 7.
P: De 2 kg para obter 7kg o que vocês haviam feito?
LG: Dividi por 2 e depois multipliquei por 7.
P: E se fosse 6 kg de cobre?
JU: 24 porque multiplica por 3.
LG: Isso que eu falei, é proporcional porque está multiplicando o mesmo valor dos dois lados.
P: Então esse é um tipo de problema em que existe a relação proporcional entre as grandezas cobre e pulseiras. Quando a grandeza cobre aumenta, a grandeza pulseira aumenta?
Alunos: Sim, aumenta.
P: Aqui nós dizemos que as grandezas aumentam na mesma razão, onde a razão nesse caso é 2. Assim, as grandezas cobre e pulseiras são diretamente proporcionais.
P: No problema das torneiras tínhamos que quando a quantidade de torneiras aumentava, o tempo diminuía. O que podemos concluir a partir disso?
LG: Essas grandezas são inversas porque aqui multiplicou por 2 e ali dividiu por 2. Então são proporcionalmente inversas.
P: Os valores das grandezas torneiras e minutos aumentaram na mesma razão?
Alunos: Não.
P: Posso dizer que existe uma relação proporcional entre essas grandezas?
JU: Sim, elas são inversas.
P: Quando uma grandeza aumenta e a outra diminui na mesma razão, dizemos que existe uma relação inversamente proporcional.
P: E voltando ao problema do estacionamento? Existe relação proporcional entre o tempo e o valor a ser pago?
Alunos: Não.
P: E o problema dos dados? Da chuva? Existia relação proporcional entre as grandezas envolvidas?
Alunos: Não.