SUSILENE GARCIA DA SILVA OLIVEIRA

UM ESTUDO DE ARGUMENTAÇÕES PRODUZIDAS POR ALUNOS DO 8º ANO EM ATIVIDADES DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS ENVOLVENDO PONTOS NOTÁVEIS DE TRIÂNGULO.

Campo Grande

2009

SUSILENE GARCIA DA SILVA OLIVEIRA

UM ESTUDO DE ARGUMENTAÇÕES PRODUZIDAS POR ALUNOS DO 8º ANO EM ATIVIDADES DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS ENVOLVENDO PONTOS NOTÁVEIS DE TRIÂNGULO.

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Educação Matemática, do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Educação Matemática.

Campo Grande
2009

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
CENTRO DE CIENCIAS EXATAS E TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UM ESTUDO DE ARGUMENTAÇÕES PRODUZIDAS POR ALUNOS DO 8º ANO EM ATIVIDADES DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS ENVOLVENDO PONTOS NOTÁVEIS DE TRIÂNGULO.

Profª.drª. Marilena Bittar – UFMS
Orientadora

Susilene Garcia da Silva Oliveira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

CENTRO DE CIENCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UM ESTUDO DE ARGUMENTAÇÕES PRODUZIDAS POR ALUNOS DO 8º ANO EM ATIVIDADES DE CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS ENVOLVENDO PONTOS NOTÁVEIS DE TRIÂNGULO.

Dissertação defendida em ______ de ________________ de 2009.

BANCA EXAMINADORA

____

Professora Drª. Marilena Bittar – UFMS
Presidente

____

Professor Dr. José Luiz Magalhães de Freitas – UFMS

____

Professor Dr. Marcelo Câmara dos Santos – UFPE

____

Professor Dr. Luiz Carlos Paes

DEDICATÓRIA

A Deus, por ter me dado forças quando achei que não conseguiria. A minha mãe, que mesmo sem entender o para quê nunca me questionou o porquê, lhe bastava o meu objetivo. Ao Márcio, que procurou entender as ausências em momentos importantes.

AGRADECIMENTOS

Profª. Drª. Marilena Bittar, amiga, professora e orientadora pela dedicação, atenção e apoio não só no trabalho, mas também na vida.

Ao Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas e Prof. Dr. Luiz Carlos Pais mestres em nos fazer acreditar que ensinar é possível quando se está disposto a aprender.

Ao Prof. Dr. Chateaubriand Nunes Amâncio, pela passageira mas inesquecível participação na minha vida.

Ao amigo Renato Nogueira que influenciou profundamente minha visão da Matemática.

A direção, coordenação, professores e funcionários do Instituto Educacional Falcão por ter acreditado no meu projeto mesmo quando não era possível ver seus resultados.

Aos meus amigos mestrandos que de forma especial participaram de uma fase muito importante na minha vida.

A Adriana, Carla, Eva que tanto ajudaram mesmo quando nem nos conheciam. Vocês são muito especiais.

A Fundação de Apoio ao Desenvolvimento do Ensino, Ciência e Tecnologia do Estado de Mato Grosso do Sul.

RESUMO

O objetivo dessa pesquisa foi acompanhar a evolução das argumentações que aparecem nas validações de atividades envolvendo Construções Geométricas. Preparamos uma sequência didática com atividades de construções envolvendo pontos notáveis do triângulo onde os alunos poderiam justificar essas construções ou os procedimentos utilizados apresentando argumentações. Essas argumentações são estudadas segundo a Tipologia de Provas que se dividem em: empirismo ingênuo, experiência crucial, exemplo genérico e experiência mental. As atividades de construção geométrica se inspiraram na Teoria das Situações Didáticas sendo organizadas pela Engenharia Didática. Acompanhamos 08 alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada do município de Aquidauana/MS. Os resultados alcançados nos levam a acreditar que atividades de Construções Geométricas podem constituir um meio propício para a produção e evolução de argumentações dos alunos. Entretanto, as situações propostas não foram suficientes para que todos os alunos evoluíssem dentro dos níveis de prova como esperado, utilizando a linguagem escrita adequada e libertando-se de elementos gráficos, ou seja, desenhos e construções.

RÉSUMÉ

L'objectif de cette recherche est de suivre l'évolution des arguments qui semblent la validation des activités comportant des Constructions Géométriques. A préparé un À la suite des cours dans des activités de construction impliquant des points remarquables du triangle où les étudiants peuvent justifier ces bâtiments ou les procédures utilisées présentation d'arguments. Ces arguments sont étudiées en fonction de la Typologie de Preuve qui sont divisés en: l'empirisme naïf, expérience cruciale, l'exemple générique et mentale expérience. Les activités de construction sont inspirés par la Théorie Situations Didactiques organisées par le Ingénierie Didactique. Nous avons suivi 08 élèves 8 année dans une école privée dans la ville de Aquidauana / MS. Les résultats nous portent à croire que les activités Constructions géométriques peuvent offrir un environnement fertile pour la production et l'évolution desarguments des étudiants. Toutefois, les situations proposées n'étaient pas suffisantes pour les élèves évoluent dans les niveaux de preuve comme prévu, en utilisant le langage Se débarrasser correctement écrit de graphiques, à savoir, des dessins et des constructions.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

A grande preocupação com o aprendizado dos alunos na Educação Básica vem se tornando uma constante para o Governo Federal. Ao longo dos anos, várias foram as avaliações instituídas e realizadas pelo Ministério da Educação com o intuito de diagnosticar possíveis problemas nos mais diversos campos do conhecimento que têm dificultado o processo de ensino e aprendizagem. A Matemática e as dificuldades provenientes desse campo representam um dos pontos dessa investigação. Há hoje uma busca por novas metodologias que provoquem mudanças nos resultados obtidos nos últimos anos pelo Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB[1]).

Uma das mudanças pretendidas na aquisição do conhecimento matemático é a valorização da Geometria. Nas últimas décadas, pesquisas como a de Serrazina (1999) e Smole (2003) constataram que o ensino da Geometria na Educação Fundamental não vem apresentando resultados satisfatórios. É notório que tanto seu ensino quanto sua aprendizagem apresentam diversas dificuldades. Este ensino, comparado com o ensino de outras áreas da Matemática, ainda é muito ausente nas salas de aula no Brasil, não apenas na escola elementar, mas também ao longo de todo o Ensino Fundamental e Médio. Na prática, seu ensino foi consideravelmente reduzido. Isso ocorreu por muitos motivos; dentre eles, Miguel & Miorim (1986) ressaltam que os tópicos geométricos acabam por aparecer em menor número em relação aos demais assuntos em alguns livros didáticos.

Outro fator que surgiu a partir da publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), que podemos destacar, é que mesmo com o direcionamento dado por este documento, em algumas escolas, particularmente no município onde foi realizada a pesquisa, a Geometria ainda não está integrada a outras disciplinas do currículo e até mesmo não relacionada com outros conteúdos matemáticos, tratados como um assunto à parte, o que dificulta as relações entre os mesmos. Mas como fazer esta integração? Responder a esta pergunta não é uma tarefa tão simples, porém podemos encontrar na Educação Matemática algumas respostas.

[1] O IDEB é um novo indicador de qualidade da educação que combina informações sobre fluxo (aprovações) e desempenho escolar (Prova Brasil e SAEB) com notas variando de 0 a 10 dadas a cada instituição de ensino da Unidade Federativa de acordo com o desempenho de seus alunos. (GREMAUD, 2007, p. 22)

Essa tem se preocupado com o ensino e aprendizagem da Matemática e respondido a algumas questões pedagógicas.

Segundo Alves (2005, p. 11) a "Educação Matemática no Brasil já é considerável, possibilitando mudanças educacionais dentre as quais podemos destacar as relativas aos currículos de Matemática no ensino fundamental e médio", o que traz, ao cenário educacional, várias pesquisas que discutem, entre outros, os processos de ensino e aprendizagem da Geometria.

Algumas dessas pesquisas, como a de Zuin (2001), mostram a importância do ensino de Geometria aliado a outros campos do conhecimento matemático como a Álgebra e principalmente o Desenho Geométrico. Atualmente, alguns livros didáticos buscam relacionar a Geometria com cada conteúdo matemático, exigindo, assim, que o professor, transite seguramente por todos os campos da Matemática, de modo que possa contribuir na compreensão dos conhecimentos matemáticos pelos alunos. Consideramos que o Desenho Geométrico, nesse trabalho chamado de Construções Geométricas, "tem uma importância teórica (e prática) fundamental no ensino e aprendizagem de geometria, além de representarem uma poderosa ferramenta nas investigações matemáticas" (ARAÚJO, 2007, p.22), corroborando assim, com Almeida (2007) e Barreto (2005) dentre outros. Esses autores acreditam que os conceitos envolvidos em uma construção geométrica abordam uma diversidade de conhecimentos em Geometria que auxiliarão o aluno no desenvolvimento de uma atividade.

As pesquisas de Pavanello (1993) e Liblik e Pinheiro (1996) já nos mostravam a importância de se aliar as Construções Geométricas ao ensino de Geometria. Wagner (1998) mostra que as construções geométricas auxiliam a construção do conhecimento em Geometria. Discussões em eventos científicos dirigidos para a Matemática, Educação e Educação Matemática apontavam para isso e acabaram por influenciar as propostas dos PCN e a volta de um saber matemático que ficou esquecido por vários anos.

Ao concluir a graduação eu não fazia ideia do que iria encontrar no campo profissional; os anseios e a vontade superou, a princípio, todos os problemas. Mas esses foram surgindo e senti que só a vontade não seria suficiente para resolvê-los. Iniciei a minha vida profissional como educadora trabalhando com a disciplina de Geometria e com material didático especialmente preparado para as aulas acreditando, por um bom tempo, que esta era a melhor forma de ensinar.

A realidade nesta escola, e sem dúvida a realidade de muitas escolas brasileiras, na época, fossem elas públicas ou privadas, era o ensino de uma Matemática dividida em várias disciplinas: Álgebra, Aritmética e Geometria. Ao ensinar Geometria, uma das dificuldades dos alunos era entender conceitos geométricos como mediatriz, bissetriz e semelhança de triângulos. Mesmo apresentando definições, discutindo-as, dando exemplos diferenciados e inúmeras atividades, a compreensão não era alcançada pela totalidade dos alunos e, por mais que tentasse métodos diferentes, não conseguia a compreensão de todos, o que representava uma frustração para mim.

A aprendizagem, mesmo para aqueles que obtinham resultados favoráveis expressos por meio de avaliações, não era realmente apropriada. Sentia que para a grande maioria os conceitos haviam sido memorizados por ocasião dessas avaliações. Segundo Barreto (2005, p. 1) “Um dos problemas mais comuns observados nas aulas de Matemática é que os alunos são expostos a situações padrão acarretando uma aprendizagem de memorização e mecanizada.”.

Diante desta dificuldade sempre acreditei que o problema se encontrava na série anterior, que a culpa era de quem deveria ter dado pré-requisitos essenciais ao conteúdo necessário àquela série, mas com o tempo descobri que isso não era verdade. Acabei por sair do Ensino Médio e passei a dar aula no Ensino Fundamental; porém os problemas eram os mesmos e não tinha ideia do que fazer; os saberes docentes[2] não eram suficientes. Em sala, durante as aulas de Geometria, os alunos continuavam com as mesmas dificuldades na aprendizagem. A exemplo, as relações métricas do triângulo retângulo: apesar de fazer algum tipo de demonstrações das fórmulas utilizando recurso exterior ao livro didático todos acabavam por decorar momentaneamente todas as fórmulas.

Essas demonstrações estavam mais próximas, do que era exposto no livro didático utilizado, ou seja, uma explicação do que já estava proposto, mas que ao final não conseguia atingir os alunos, pois a atividade apresentada em seguida não tem, segundo Carlovich (2005),

---

[2] Formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional, dos saberes das disciplinas, dos currículos e da experiência. (TARDIF, 1991, pág.219)

relação com essas provas. O ensino de provas, ainda segundo essa autora, teve início de forma mais incisiva a partir de 2000.

As demonstrações que eu realizava em sala de aula estavam distantes do que Balacheff (1982) propôs, prova como explicação que uma comunidade aceita num dado momento e demonstração, uma prova aceita pela comunidade matemática. As aulas teriam sido mais significativas se essas definições e práticas estivessem claras para mim; ao final das tentativas de inovação das aulas eu terminava por ministrar o conteúdo de forma tradicional, expor o conteúdo, fazer alguns exemplos e aplicar os exercícios. E esta era a única forma que conseguia ministrar as aulas.

Com a publicação dos PCN em 1998, pelo Ministério de Educação e Cultura, a discussão sobre conteúdos, metodologias, recursos, livros didáticos tornou-se uma constante nas diversas instituições de ensino. Vários encontros foram propostos pelos diferentes segmentos da Educação e, em 1998, tive a oportunidade de participar do Encontro Nacional de Educação Matemática em São Leopoldo, Rio Grande do Sul. Neste encontro, pude compreender o que era a Educação Matemática e, principalmente, como ela podia me ajudar a mudar o cenário das minhas aulas.

As mudanças foram executadas lentamente, e concentrei-me na aprendizagem de conteúdos geométricos com o auxílio das Construções Geométricas. José Carlos Putnoki, autor de coleções de livros didáticos de Desenho Geométrico para o Ensino Fundamental e Médio, considera de fundamental importância o ensino das Construções Geométricas: “o aprendizado das construções amplia as fronteiras do aluno e facilita muito a compreensão das propriedades geométricas” (apud ZUIN, 2002, p. 9-10). Mas esse aprendizado precisa estar vinculado a conceitos geométricos utilizados nesse campo do conhecimento.

A integração das construções geométricas no ensino de Geometria é uma tendência que há muito vem sendo cobrada por parte dos pesquisadores (KODAMA, 2006; SOUZA, 2001). Algumas pesquisas, como a realizada por Assude (2002) com alunos das séries iniciais na França, apresentam o uso do compasso, régua e papel na aquisição de um conteúdo geométrico e, posteriormente com o uso de um *software* na realização de atividades relacionadas a esse conteúdo o que não representa uma regra a ser seguida. No Brasil, pesquisas mais recentes como as de Zullato (2002) apontam para a utilização de um *software* na discussão das atividades relacionadas às Construções Geométricas, visto que essas promovem o desenvolvimento de hipóteses na elaboração de conceitos. Atualmente, o uso de um *software* no auxílio de aquisição de conhecimento matemático é um dos temas de grande discussão na Educação Matemática o que pode ser comprovado por meio das pesquisas de Bittar (2000), Chaachoua (2004), Câmara (2005) e Almeida (2007) dentre outros.

É nesse sentido que propusemos e desenvolvemos nossa pesquisa: acreditamos que atividades de Construções Geométricas podem contribuir com a constituição de um meio (BROUSSEAU, 1986) favorável à produção de validações e, que o uso de um *software* adequado pode ajudar, tanto na compreensão dos conhecimentos geométricos em cena quanto no processo de validação. Seguindo essa tendência não pretendemos impor uma ordem de utilização como proposto por Assude e sim apresentar as duas ferramentas deixando a escolha ao aluno, pois, segundo Vergnaud (2004) ambos os instrumentos favorecem um determinado conjunto de propriedades geométricas.

Nessa pesquisa apresentamos atividades de construções geométricas sobre pontos notáveis de um triângulo. Esse conteúdo apresenta diversos conceitos geométricos interligados apresentados gradativamente formando uma rede de conhecimento na qual é possível investigar a construção de conceitos, a argumentação e conclusão de idéias. Aqui podemos trabalhar como sugeriu Pietropaolo (2005) procurando validações para afirmações por meio de argumentos, o que não pode ser diferenciado de prova. Atividades que levem alunos a expor justificativa ainda não é realidade em muitas escolas do país como diz Silva (2007), mas pesquisas estão sendo apresentadas com esse tema, como forma de mudar a realidade e discutir em sala de aula um processo que estimule o aluno a produzir provas.

Dessa forma, propomos uma sequência didática sobre pontos notáveis de um triângulo com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental em que as construções são fatores determinantes para a produção de argumentações, e sua evolução, tendo como classificação a Tipologia de Provas (BALACHEFF, 1988). Segundo Araújo (2007, p.60) "as tarefas de construção podem envolver desde noções geométricas simples, até aquelas que permitam introduzi-los à noção de prova [...]", no que concerne aos alunos.

Desenvolvemos esse trabalho em 5 capítulos que descrevemos a seguir:

No capítulo 1 apresentamos um relato histórico das Construções Geométricas a partir do Movimento da Matemática Moderna, buscando indícios do seu retorno ao currículo do

Ensino Fundamental. Tratamos das abordagens feitas pelos PCN e em alguns livros didáticos, finalizando com o tema da nossa pesquisa.

Os objetivos da pesquisa são definidos no capítulo 2, a partir da apresentação do conceito de argumentação. As argumentações produzidas pelos alunos serão analisadas por meio da Tipologia de Provas, (BALACHEFF, 1988), apresentando os vários níveis de prova. Para identificarmos esses níveis de prova, analisando as justificativas dos alunos, utilizamos a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986) e a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988) contemplando assim, respectivamente, nossos referenciais teóricos e metodológicos também apresentados nesse capítulo.

No capítulo 3 apresentamos dez coleções de livros didáticos referendadas pelo Guia do Programa Nacional do Livro Didático de 2008 que foram estudadas por apresentarem indícios de construções, ou seja, as construções aparecem nos índices dessas coleções, em atividades esporádicas, em comentários dos avaliadores ou em figuras expostas ao longo do livro. Além dessas dez coleções que foram observadas optamos por analisar, criteriosamente, 2 coleções de livros didáticos utilizadas por professores de escolas da rede pública e privada da cidade de Aquidauana, cidade em que realizamos a pesquisa com os alunos.

A elaboração da sequência didática composta de 10 sessões juntamente com a análise a *priori* é apresentada no capítulo 4.

No capítulo 5 apresentamos a realização e a análise da sequência didática buscando evidenciar as argumentações apresentadas pelos alunos relatando indícios de uma evolução de argumentações descrita por Balacheff (1988).

Por fim, apresentamos nossas principais conclusões obtidas a partir dos dados coletados nessa pesquisa bem como algumas perspectivas para futuros trabalhos. Além disso, fazemos uma análise crítica de nossa pesquisa.

CAPÍTULO 1

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS E A CONSTRUÇÃO DE UMA PROBLEMÁTICA DE PESQUISA.

O ensino de Construções Geométricas de 1931 a 1971 era oficialmente parte do currículo escolar. A partir de 1961, com a publicação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação, inicia-se o desprestígio desta disciplina, pois ela deixa de ser obrigatória e com a Lei n. 5692/71, passa a integrar o conteúdo de Educação Artística, evidenciando seu abandono.

Neste primeiro capítulo apresentamos as Construções Geométricas a partir do Movimento da Matemática Moderna até os dias atuais, procurando relatar dados significativos para o retorno desta disciplina ao currículo escolar integrando-a a Geometria. Consideramos este retorno um aliado da aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental.

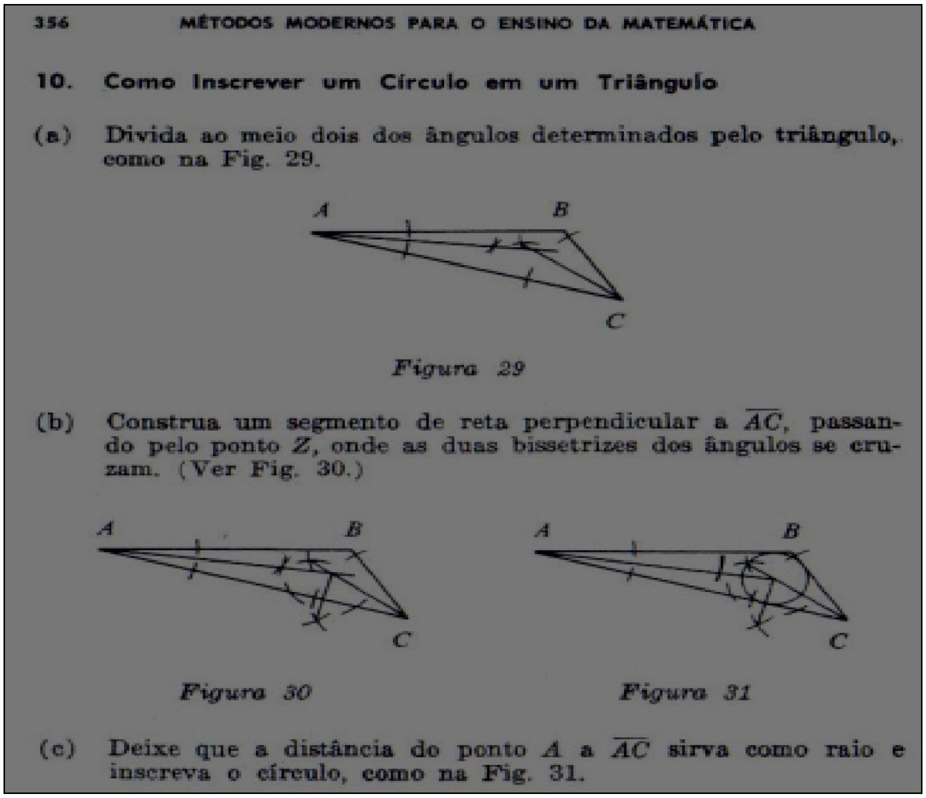
1.1 As Construções Geométricas a partir do Movimento da Matemática Moderna.

Segundo Valente (2003), aprendemos com a História da Educação, e é nesta história que buscamos algumas transformações que puderam ser sentidas em meio aos vários movimentos e reformas educacionais que acompanharam todo o século XX. Essas mudanças podem ser traduzidas por algumas atitudes e preocupações que passaram a fazer parte do cenário da educação brasileira tais como: o que ensinar e como ensinar, a preocupação com a relação entre professor e aluno, a introdução de novos recursos didáticos e como o professor iria utilizá-los. A mudança mais marcante, por ainda persistir até os dias atuais, refere-se à própria constituição da disciplina Matemática, pela fusão da Trigonometria, da Álgebra, da Aritmética e da Geometria.

Segundo Valente (1999) de 1730 a 1930 a Matemática passou de formação técnica, militar, para se tornar um elemento de formação geral das elites instruídas. Após esse período, muitas mudanças puderam ser sentidas, dentre elas uma alteração radical no ensino da Matemática, provocada pela nomeação de Euclides Roxo para o cargo de diretor do externato Pedro II. Tais mudanças podem ser encontradas em um documento que foi assinado por mais de dois terços dos professores, do Colégio Pedro II, propondo ao governo “modificar a distribuição das matérias do curso secundário, do seguinte modo: o estudo da aritmética, álgebra, geometria, trigonometria se fará sob a denominação única de Matemática, do 1º ao 4º ano do curso” (VALENTE, 2003, p. 75). Esta idéia persistiu mesmo depois da Reforma Francisco Campos e Capanema, permanecendo até a aprovação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 4024, de dezembro de 1961.

Nesta época, no início da década de 1960, já podiam ser sentidos os rumores de um novo movimento, o Movimento da Matemática Moderna, em que o ensino de Matemática e, consequentemente, de Geometria iriam passar por transformações.

O que tínhamos até início de 1960 era uma Geometria com aspecto quase de receituários com imensos exercícios de memorização em que o que se via eram conteúdos mais teóricos que práticos. A parte de Construções Geométricas observada nas escolas politécnicas com o intuito de formar engenheiros não permaneceu nos livros didáticos. O ensino das construções como as que observamos no livro Charles D’Augustine (1970), escolhido por representar a passagem da década de 1960 para a década de 1970, proporcionava uma enorme lista de conteúdos que eram apresentados como receitas de como fazer, seguindo passos previamente estipulados, em que muitas construções aparecem em forma de problema, como o que podemos observar na fig. 1.



356 MÉTODOS MODERNOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA

10. Como Inscrever um Círculo em um Triângulo

(a) Divida ao meio dois dos ângulos determinados pelo triângulo, como na Fig. 29.

Figura 29

(b) Construa um segmento de reta perpendicular a $\overline{AC}$, passando pelo ponto Z, onde as duas bissetrizes dos ângulos se cruzam. (Ver Fig. 30.)

Figura 30 *Figura 31*

(c) Deixe que a distância do ponto A a $\overline{AC}$ sirva como raio e inscreva o círculo, como na Fig. 31.

FIGURA 1 **-** D'AUGUSTINE, Charles. 1970, p. 356. Como inscrever um círculo em um triângulo.

Esse livro apresenta alguns procedimentos de construção e explora, em alguns casos por meio de exercícios propostos no final do livro, esses procedimentos, solicitando ao aluno que os refaça. Essa era a realidade de alguns livros didáticos da época em que podemos observar uma Geometria desvinculada do conteúdo matemático que, também por sua vez, não se articulava com nenhuma outra disciplina. Tratava-se de um conteúdo com rigor matemático, ao qual tinha acesso uma pequena camada da população, e havia "uma preocupação dos matemáticos com a preparação dos jovens para a Matemática que iriam encontrar na universidade". (PITOMBEIRA, 1991, p.24).

Este cenário impulsionou a entrada do movimento da Matemática Moderna no Brasil em que "a tônica era mudar a ênfase, no ensino da Matemática, do aspecto manipulativo de expressões de cálculo, vazias de significado, - os malfadados "carroções" – para o aspecto conceitual dessa ciência." (BICUDO, 1993, p. 31-32).

1.2. O Movimento da Matemática Moderna

É importante tentarmos entender como este movimento chegou ao Brasil e como alterou o que já estava sendo ensinado. A Matemática antes do Movimento da Matemática Moderna (MMM) apresentava:

> [...] um currículo tradicional que não dá muita atenção à compreensão... são solicitados ao aluno inúmeros exercícios... variedade de processos que ele repete de cor a fim de aprender a manejá-los. A aprendizagem consiste quase sempre em simples memorização... sem conexão. (KLINE, 1976, pp. 20-21).

Kline (1976), ao fazer esta crítica, se preocupou em mostrar à comunidade matemática uma realidade que predominava em quase todos os países. Esse currículo, quase tecnicista, não era realidade apenas no Brasil: vários países estavam buscando soluções que tornassem o ensino de Matemática suficientemente atrativo para jovens promissores e que também desfrutasse de uma linguagem acessível às camadas populares. O que prevalecia então, nestes países, era uma tendência de tornar a Matemática mais inteligível para trabalhadores e população em geral, e mais dinâmica para técnicos e cientistas.

Dentre estes países mencionamos somente alguns que sempre estiveram, de alguma forma, ligados ao Brasil desde o tempo do Brasil - Colônia: a Inglaterra, a França e os Estados Unidos. Na Inglaterra, como cita Dantas (1999), a Geometria já assumia um papel importante, mas os educadores queriam lhe dar um contexto diferente, dar-lhe significado: os exercícios passaram a estimular a aprendizagem por meio da descoberta, formulação e demonstração. Já a França tinha todo o ensino de Matemática fundamentado nos mais avançados conhecimentos de Psicologia e Pedagogia da época. Eram realizados grandes encontros entre professores franceses e até mesmo alguns estrangeiros, em que se discutiam as dificuldades dos alunos, seus verdadeiros conhecimentos, seus problemas e necessidades que permitiam apontar medidas práticas e eficientes no processo de ensino. Neste país, a Geometria sempre teve uma preocupação diferente, baseada em demonstrações. A Matemática estava a caminho de mudanças e era notória a atenção dada à Didática da Matemática[3]. Já nos Estados Unidos a Matemática precisava passar por mudanças, mas estas foram influenciadas pela era da alta tecnologia e pela corrida espacial, portanto se fazia necessário a formação rápida de técnicos que pudessem suprir a deficiência do mercado tecnológico.

---

[3] É uma das tendências da grande área de Educação Matemática, cujo objeto de estudo é a elaboração de conceitos e teorias que sejam compatíveis com a especificidade educacional do saber escolar matemático, procurando manter fortes vínculos com a formação de conceitos matemáticos, tanto em nível experimental da prática pedagógica, como no território teórico da pesquisa acadêmica. (PAIS, 2002, pág. 11)

> A Matemática Moderna nasceu como um movimento educacional inscrito numa política de modernização econômica e foi posta na linha de frente do ensino por se considerar que, juntamente com a área de Ciências, ela constituía uma via de acesso privilegiada para o pensamento científico e tecnológico. (BRASIL, 1997, p. 19)

No Brasil o MMM foi um marco e mudou os rumos da Educação Matemática conforme cita Carvalho[4] (1988 apud SOARES, DASSIE e ROCHA, 2004, p. 12):

> É inegável que ele marcou indelevelmente o ensino da matemática elementar. [...] O movimento da Matemática moderna foi o maior experimento já feito em educação matemática. [...] Sua compreensão é essencial para entender porque se ensina matemática como hoje em dia.

Este movimento tinha como objetivo buscar aproximar a Matemática desenvolvida na escola básica com a Matemática produzida pelos pesquisadores da área. Também ajudou a Educação Matemática a se tornar mais forte e ocupar um espaço mais significativo no cenário educacional, principalmente quando falamos de ensino e aprendizagem de Matemática. Era preciso encontrar novos rumos, apresentar os conteúdos de forma a conquistar os alunos, tirando-lhes o conceito de que a Matemática era uma disciplina cansativa, cheia de regras a serem decoradas e exercícios a serem feitos repetidamente. Dentro desse contexto, uma das diretrizes da "Matemática Moderna" era de estabelecer uma linguagem comum entre professores e alunos e aproximar a Matemática acadêmica da realidade. A nova metodologia foi adotada pela maioria das escolas, na esperança de solucionar velhos problemas desta disciplina, provocando discussões e reformas no currículo da Educação Básica, e o seu ensino sofreu alterações significativas tomando grandes dimensões. Para Miguel & Brito (1996, p.48) isso acontece devido à

> [...] adoção por parte dos diferentes grupos que se formaram visando à operacionalização do ideário desse movimento, de uma concepção estruturalista da matemática e de uma concepção quase sempre tecnicista do modo de organização do ensino.

Entretanto os professores não estavam preparados para isso e as diretrizes do Movimento não foram todas contempladas. "Os indícios preliminares da apropriação do movimento é que o moderno, da disciplina Matemática, foi incorporado, pelos professores e alunos, mais como um conjunto de novos dispositivos e nomenclaturas de uma nova linguagem". (BERTONI, 2000, p. 4067). Na Geometria continuou-se ensinando a Geometria

---

[4] CARVALHO, João Bosco Pitombeira de. As ideias fundamentais da matemática moderna. *Boletim GEPEM*, ano XIII, n. 23, p. 7-24, 2º sem. 1988.

Euclidiana tradicional, empregando-se a linguagem dos conjuntos o que dificultava a aprendizagem por parte dos alunos e havia a preocupação com o quantitativo e não com o qualitativo como nos diria Piaget (1984, pp. 16-17)

> Uma coisa, porém é inventar na ação e assim aplicar praticamente certas operações; outra é tomar consciência das mesmas para delas extrair um conhecimento reflexivo e, sobretudo teórico, de tal forma que nem os alunos nem os professores cheguem a suspeitar de que o conteúdo do ensino ministrado se pudesse apoiar em qualquer tipo de estruturas naturais.

Piaget comentando sobre o Movimento da Matemática Moderna nos leva a acreditar que professores e alunos sentiram dificuldade em acompanhar as diretrizes do movimento. A Geometria, então, foi uma das grandes prejudicadas seja pela falta de formação docente, o acesso a informações ou ainda, a falta de apropriação do conhecimento pelo aluno o que resultou, segundo Pavanello (1989, p. 25), no "gradual abandono do ensino da geometria [...] que embora reflita uma tendência geral, é mais evidente nas escolas públicas [...]".

Hoje o governo Federal, por meio do Ministério da Educação e de algumas instituições públicas de ensino superior, representando por pesquisadores dessas instituições, incentivados pela Educação Matemática, Educação ou Matemática, tentam mudar esta realidade, trilhando o caminho inverso. São muitas as pesquisas em aprendizagem, ensino e formação de professores desenvolvidos dentro da Educação Matemática que estão sendo apresentadas à comunidade de educadores da disciplina de Matemática sob as mais variadas mídias de acesso. Esses resultados podem fazer diferença em sala de aula assim como diversos convênios estabelecidos pelas parcerias entre as universidades e escolas públicas.

Nesta trilha juntamente com a Geometria, colocamos as Construções Geométricas que em pequenas doses vêm voltando ao cenário dos livros didáticos. Mas como os autores de livros didáticos interpretaram e traduziram as Construções Geométricas durante o MMM?

Para respondermos essa pergunta apresentamos alguns livros didáticos escolhidos pela sua divulgação nacional, segundo alguns autores. Estes livros não serão analisados por este não ser nosso objetivo de trabalho.

1.3. Uma análise das Construções Geométricas durante o Movimento da Matemática Moderna

> Valente (2004) salienta que há momentos, impulsionados pelos mais diversos determinantes, em que o historiador encontra produções que

> intentam dar origem a um novo modo de organização do ensino. O estudo desses novos manuais poderá revelar importantes elementos constituintes da trajetória de uma dada disciplina escolar. (apud SILVA, 2005, p. 74)

E foi por meio de um desses manuais, o livro didático, que o MMM conseguiu atingir um grande grupo de educadores. Este foi o veículo utilizado para levar ao professor a nova organização do conteúdo.

> No Brasil, o movimento Matemática Moderna, veiculado principalmente pelos livros didáticos, teve grande influência, durante longo período, só vindo a refluir a partir da constatação de inadequação de alguns de seus princípios básicos e das distorções e dos exageros ocorridos. (BRASIL, 1997, p. 20)

Segundo Neves (2005), Valente (1999) e Silva (2005), Álvaro Andrini, Scipione di Pierro Neto e Osvaldo Sangiorgio são alguns dos autores sucessos de venda durante todo o período em que a Matemática Moderna predominou no país.

Um dos primeiros autores de livros didáticos a incorporar as novas propostas defendidas pelo MMM, tendo suas coleções "como uma das mais vendidas no Brasil durante a década de 60" (SILVA, 2005, p. 76), foi Osvaldo Sangiorgi. É possível identificar já no prefácio do livro Matemática – Curso Moderno – 1969, volume 3 suas idéias inovadoras:

> [...] Finalmente, vem o "bom-bocado" do livro: o estudo da Geometria. Agora, não será mais preciso que você "decore" enfadonhos teoremas e mais teoremas, contra o que, erradamente, alguns colegas mais adiantados costumavam "preveni-lo".

Ao iniciar o tópico de Geometria fica clara a divisão dos conteúdos algébricos, aritméticos e geométricos:

> [...] até aqui você estudou e trabalhou com conjuntos de números. Estabeleceu relações, operações e propriedades, dentro da Matemática conhecida pelo nome de Aritmética. A seguir estuda as sentenças matemáticas, ressaltando-lhes as estruturas algébricas, na parte conhecida pelo nome de Álgebra.
>
> Agora ao invés de conjuntos de números, você estudará conjuntos de pontos. Estará ainda dentro da Matemática, na parte chamada de Geometria. (SANGIORGI, 1969, p. 115)

Sangiorgi manteve em seus livros tópicos relacionados a Geometria, mas não podemos identificar dentro desses tópicos ou em qualquer outra parte dos seus textos construções com ou sem o uso de instrumentos euclidianos.

Segundo Neves (2005, p. 64), “a coleção de matemática mais popular e com maior número de vendagem foi o livro Praticando Matemática de Álvaro Andrini”, publicada pela Editora Nacional, outro sucesso de venda na história dos livros didáticos. Este livro apresenta uma linguagem simples com desenhos ilustrativos, referentes ao conteúdo, como podemos comprovar no livro da 7ª série, atual 8º ano, edição de 1976. Este aspecto o diferencia dos outros livros didáticos da época que ainda não incluíam desenhos ilustrativos. Ele traz no capítulo inicial o conjunto dos números reais e até o capítulo 6 podemos afirmar que seu conteúdo é totalmente algébrico, sempre apresentando muitos exercícios ao final de cada capítulo. Podemos ainda observar o uso de recursos visuais coloridos, como algumas figuras que ilustram o texto apresentado. Nem sempre estas figuras se relacionam com o conteúdo, e muitas vezes não passam de meras ilustrações. O capítulo 7, com o título *Introdução à Geometria*, inicia o estudo de Geometria, que se estende até o capítulo 12 ficando claro que Álgebra e Geometria não se articulavam. Apresenta, primeiramente, as definições, depois um ou dois exemplos e logo em seguida as atividades. Essa metodologia permeia todos os livros da sua coleção.

Outro livro, *Métodos Modernos para o ensino da Matemática*, de D’Augustine, (1970), uma obra traduzida, afirma em seu prefácio, se tratar de um livro que é quase um manual explicativo do MMM. Ainda, em seu prefácio é possível encontrar uma citação que diz o seguinte:

> Uma quarta característica é ser a Geometria apresentada numa base topológica e geométrica. O estudo das figuras geométricas é feito por um sistema de classificação, segundo suas propriedades. Dá-se especial atenção às relações e propriedades pelas quais podemos distinguir um conjunto de pontos no espaço de outro e à elaboração de uma sequência didática e lógica para o ensino dos conceitos geométricos. (D’AUGUSTINE, 1970, p. 6).

Segundo este autor a inclusão de mais Geometria no currículo ajudaria a dar à Matemática uma base maior e mais flexível da que era possível dar aos programas tradicionais, que eram orientados quase que exclusivamente para a Aritmética. As atividades apresentadas eram tais que, geralmente, complementavam e ampliavam o programa de Aritmética. No apêndice do livro encontramos vários exercícios envolvendo Construções Geométricas e também a seguinte citação: “como professor você encontrará ocasiões em que precisará saber como fazer e demonstrar várias construções geométricas”. (D’AUGUSTINE, 1970, p. 84).

Dos livros observados este foi o único que apresentava algo de construções. A maioria dos que foram editados a partir do MMM, não privilegiou o ensino de Geometria e mesmo quando a Geometria fazia parte do conteúdo do livro acontecia nos últimos capítulos, o que dificultava ainda mais a sua aplicação. Comprovando este fato citamos o livro *Matemática para a Escola Moderna* de Scipioni di Pierro Neto (1969) que diz em sua apresentação:

> Escrevemos nossa Matemática PARA A ESCOLA MODERNA. Um capítulo introdutório, especialmente dedicado à Teoria dos Conjuntos, possibilitará ao aluno o entendimento da linguagem em todos os outros capítulos. Por outro lado, tivemos sempre uma preocupação especial: uma grande quantidade de exercícios, para que a aquisição e fixação de técnicas não ficassem prejudicadas pelas tendências atuais.

No livro, é possível observar no capítulo VIII, denominado *Estudo intuitivo das principais figuras Geométricas,* uma apresentação inicial de algumas considerações sobre sólidos geométricos e, a partir dessas considerações, apresenta a noção de ponto, reta, plano, define algumas figuras geométricas, mas não apresenta nenhuma atividade em que pudessem ser institucionalizados os conhecimentos adquiridos. Não faz nenhuma referência ao uso de Construções Geométricas o que pode ser justificado pelo quase desaparecimento da Geometria durante o MMM e também pela Lei 5692/71 da qual extraímos o artigo 4º:

> Art. 4º - os currículos do ensino de 1º e 2º graus terão um núcleo comum obrigatório em âmbito nacional, e uma parte diversificada para atender, conforme as necessidades e possibilidades concretas, às peculiaridades locais, aos planos dos estabelecimentos e às diferenças individuais dos alunos. (BREJON, 1973, p. 231)

As Construções Geométricas se mantiveram oficialmente de 1931 a 1971 nos currículos escolares e eram contempladas, até o início do MMM, na grande maioria dos livros didáticos. A partir de 1971, como já citado no artigo 4º, as escolas poderiam, dentro da parte diversificada, construir seu currículo optando, se quisessem, por contemplar a disciplina de Construções Geométricas em Educação Artística. Muitas dessas escolas optaram por não incluir no currículo de educação Artística o conteúdo de Construções Geométricas o que acabou por abolir o seu ensino.

Em consequência, temos, na década de 80, algumas coleções de Construções Geométricas lançadas por várias editoras, já que algumas escolas particulares e da rede pública continuavam a ministrar aulas de Desenho Geométrico. Vários livros de Educação Artística passaram a trazer nos seus capítulos iniciais tópicos de construções como: retas paralelas e perpendiculares, circunferências e também alguns manuais de como usar instrumentos como régua, compasso e esquadro. Nestes livros as construções eram realizadas como regras a serem seguidas, sem nenhuma justificativa teórica sobre a construção.

Observamos, por meio da análise de livros didáticos, que uma distorção da filosofia do Movimento acabou por predominar em grande parte das coleções de livros didáticos, expressando um uso exagerado da linguagem da teoria dos conjuntos com ênfase no formalismo e na terminologia e descaso com a Geometria nos livros de Matemática. Quanto às Construções Geométricas essas não aparecem no índice de nenhum dos livros analisados, mas ao folhearmos estas edições conseguimos, em alguns casos, notar o aparecimento de traçados geométricos, porém não podemos, a partir destas atividades, comprovar a inclusão deste saber matemático.

1.4. A construção da pesquisa

Após o Movimento da Matemática Moderna as mudanças não foram poucas, mas persistia o alto índice de reprovação e a pouca atenção dada à Geometria; talvez uma herança de alguns defeitos, segundo Kline (p. 30, 1976), do currículo tradicional seja: “o confiar na memorização de processos e provas, o tratamento díspare de Álgebra e Geometria, pequenos defeitos de Lógica, a retenção de alguns tópicos antiquados e ausência de qualquer motivação ou atração [...]”.

Segundo dados do SAEB[5], SARESP[6] e SAEMS[7] o índice de reprovação na disciplina de Matemática continuava alto e intimamente ligado ao baixo desempenho em Geometria. As aulas de Matemática sempre foram associadas aos conteúdos de Álgebra e Aritmética o que acabou por contribuir com a pouca atenção dada aos conteúdos de Geometria. Segundo Almouloud (2004) fatores como as orientações do sistema educativo, que deixa a cargo de cada escola escolher os conteúdos que julga importante, a formação dos professores e os livros didáticos, que privilegiam as resoluções algébricas diante das geométricas, contribuem com essa situação de abandono.

O Movimento da Matemática Moderna pode ter trazido equívocos, distorções de alguns de seus princípios durante sua implantação, mas talvez esses “erros” tenham tirado o ensino de Matemática do comodismo dos métodos utilizados para transmitir o conhecimento

[5] Sistema de Avaliação da Educação Básica
[6] Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo
[7] Sistema de Avaliação da Educação no Estado de Mato Grosso do Sul

matemático. Iniciou-se, assim, a busca por novos métodos, partindo da realidade do educando e do mundo a sua volta. Nessa busca se consolida a Educação Matemática que

> Toma como ponto de partida o cuidado com o aluno, considerando sua realidade histórica e cultural e possibilidades de vir-a-ser; cuidado com a Matemática, considerando sua história e modos de manifestar-se no cotidiano e na esfera científica; cuidado com contexto escolar, lugar em que a educação escolar se realiza; cuidado com o contexto social, em que as relações entre as pessoas, entre grupos, entre instituições são estabelecidas e em que a pessoa educada também de um ponto de vista matemático é solicitada a situar-se, agindo como cidadão que participa das decisões e que trabalha participando das forças produtoras. (BICUDO, 1999, p. 7)

Surgem então o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) em 1995 e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) em 1997. O primeiro oferece aos professores de escolas públicas do Ensino Fundamental, um guia elaborado por pesquisadores de cada área conjuntamente com o Ministério da Educação. São inscritas várias coleções para a avaliação que é feita por esses especialistas da área.

> Ao final de cada processo, é elaborado o Guia de Livros Didáticos em que são apresentados os princípios, os critérios, as resenhas das obras aprovadas e as fichas de avaliação que nortearam a avaliação dos livros. O Guia é enviado às escolas como instrumento de apoio aos professores no momento da escolha dos livros didáticos. [8]

Já os PCN foram elaborados a partir de uma proposta educacional que buscou sintonizar-se com os avanços das modernas teorias da aprendizagem por meio de discussões e “críticas” pautadas por diversos segmentos da sociedade, trazendo propostas que visam contribuir de forma significativa com o ensino da Matemática.

Verificamos nos livros didáticos, por meio de observações e análise, as mudanças ocorridas nos centrando no conteúdo de Geometria que, a partir da divulgação deste documento, passou a ser observada de uma maneira diferente, pois os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática reconhecem que:

> [...] a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática, e muitas vezes, confunde-se seu ensino com os das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. (BRASIL, 1998, p. 122).

[8] Excerto retirado de http://portal.mec.gov.br. Acesso em 28 de janeiro de 2009.

Essa importância, outrora esquecida, motivou-nos a pesquisar nos conteúdos de Geometria, construções geométricas utilizadas para a abordagem e aprendizagem do conteúdo geométrico, buscando fatores que contribuíssem para tornar significativo o ensino de Geometria.

Segundo Abrantes (1999, p. 155)

> [...] Na geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em "receitas" para resolver problemas-tipo.

Essas investigações levam os alunos a discussões e argumentações na resolução da atividade proposta e "mesmo que a tarefa seja resolvida como uma simples exploração, sem tornar-se investigação, muitos conteúdos matemáticos e, nesse caso, geométricos podem ser mobilizados ou mesmo desenvolvidos no trabalho". (GRANDO, NACARATO e GONÇALVES, 2008, p.44).

Trabalhando durante alguns anos no Laboratório de Informática, onde foram desenvolvidos alguns projetos envolvendo alunos e professores, acabei por participar de um projeto, em particular, desenvolvido em parceria com a professora de Geometria[9]. A proposta deste projeto era ensinar Geometria a partir da exploração das figuras geométricas como quadrados, triângulos e outros polígonos e, a partir dessa exploração, fazer com que os alunos se apropriassem dos conceitos geométricos estudados em sala de aula usando para isso uma ferramenta diferente, um *software* específico. As argumentações apresentadas pelos alunos ao resolver as atividades poderiam, segundo nossas hipóteses, aparecer facilmente. Mas o desempenho por parte dos alunos não foi o esperado e podemos hoje elencar alguns fatores que contribuíram para esse resultado:

- O uso do computador como uma ferramenta para tornar a aula mais divertida e menos cansativa, contrariando o que nos diz Bittar (2000) ao considerar que o computador deverá estar integrado ao ensino e não inserido como uma ferramenta que servirá para ilustrar atividades;

[9] Na escola em que foi desenvolvida a pesquisa existem aulas de Geometria e Matemática ministrada em horários separados e por professores distintos.

- O planejamento das aulas não contemplou este recurso, o que, segundo Zullato (2003) ocorre devido à utilização do computador como um mero caderno eletrônico, sem qualquer preocupação com a mudança de ambiente da aula;
- A escolha de atividades não favoreceu a aprendizagem no ambiente informatizado, pois, segundo Gravina (1996), para que haja avanço no conhecimento matemático, é importante que o professor projete as atividades a serem desenvolvidas conciliando o que julga importante a ser aprendido e a liberdade de ação do aluno.
- A falta de interação dos alunos, ou seja, ausência de discussões, o individualismo, resultado levantado na pesquisa realizada por Frota (2007), levada pela atração e interação maior com a máquina.

Esses fatores associados a nossa experiência profissional como professora de Matemática dos Ensinos Fundamental e Médio, contribuíram para a definição e desenvolvimento da nossa questão de pesquisa: a partir de atividades de Construções Geométricas, que podem ou não serem desenvolvidas em ambiente informatizado, é possível promover a argumentação nas justificativas de resolução dessas atividades e acompanhar a evolução dessas argumentações?

1.5. **A Construção de uma problemática de pesquisa**

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental sugerem que, no trabalho com Espaço e Forma, o professor de Matemática “explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além da construção de outras relações.” (BRASIL, 1998, p. 51). Ainda em relação às Construções Geométricas, destaca a atenção que merece ser dada aos “procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes” (BRASIL, 1998, p. 68 – 69) no 3º e 4º ciclos.

Esses documentos constatam que se deve incentivar a aprendizagem de conceitos geométricos aliado ao estímulo das Construções Geométricas, e que o professor responsável por esta aprendizagem deve ter uma formação pautada nesta importância.

É o que nos diz Purificação (p. 5, 2002): "um novo olhar sobre as construções geométricas possibilita aos professores refletir e reconstruir conceitos geométricos e repensar a prática pedagógica". Em pesquisa realizada com professores da 3ª série do Ensino Fundamental (atual 4º ano) a autora pôde explorar os conceitos geométricos por meio de construções realizadas com o auxílio do *software* Cabri-Géomètre experimentando um caminho novo para a aprendizagem de Geometria nos anos iniciais e contribuindo significativamente para a formação dos professores.

Liblik & Pinheiro (1996), Zuin (1997), Dias (1998), Zuin (2000), Peres & Zuin, (2001) apontam a importância do ensino das Construções Geométricas, auxiliando a construção do conhecimento em Geometria além de mostrar as dificuldades encontradas pelos alunos, nos cursos superiores, nos quais a Geometria e as Construções Geométricas são pré-requisitos imprescindíveis.

Quanto aos alunos, os PCN deixam claro que, no domínio da Geometria, das grandezas e da medida, a competência matemática que todos devem desenvolver inclui um aspecto que precisa ser considerado ao longo de todos os ciclos: a aptidão para realizar construções geométricas e para reconhecer e analisar as propriedades de figuras geométricas, nomeadamente recorrendo a materiais manipuláveis e a *software* de Geometria.

Atendendo a estas e a outras recomendações os autores de livros didáticos, cada vez mais, tentam se aproximar das mesmas, realizando modificações em suas obras. Mas as alterações feitas nem sempre são claras. Segundo Calsa (2006) os livros do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental, entre 1998 e 2003, não apresentavam o conteúdo de Geometria diferente do que já era apresentado, ou seja, a Geometria vinha no final do livro ou com pouca exploração de conceitos distribuídos ao longo do livro. Poucos foram os autores de livros didáticos de Matemática que incluíram as Construções Geométricas em suas coleções e mesmo assim apresentam como atividades complementares, ou mesmo com capítulos inteiros dedicados a conteúdos específicos dentro do Desenho Geométrico como podemos observar nos livros doa autores Imenes & Lellis (1998), Imenes & Lellis, (2002).

José Carlos Putnoki, autor de coleções de livros didáticos de Desenho Geométrico para o Ensino Fundamental e Médio, considera o ensino das Construções Geométricas importante, desde que seja dado relacionando-o a Geometria. Este autor pondera que:

> [...] não há Geometria sem Régua e Compasso. Quando muito, há apenas meia Geometria, sem os instrumentos euclidianos. A própria designação Desenho Geométrico me pareça inadequada. No lugar, prefiro Construções Geométricas. Os problemas de construções são parte integrante de um bom curso de Geometria. O aprendizado das construções amplia as fronteiras do aluno e facilita muito a compreensão das propriedades geométricas, pois permite uma espécie de "concretização". Vejo a régua e o compasso como instrumentos que permitem "experimentar". Isso, por si só, dá uma outra dimensão aos conceitos e propriedades geométricas. (apud ZUIN, 2004, p.9-10)

Mas pesquisas recentes, como a de Barreto (2005), denotam que as dificuldades ainda persistem: desde 2002 lecionando a disciplina de Desenho Geométrico[10] em turmas de 7ª e 8ª séries do Ensino Fundamental, essa pesquisadora tem se deparado com um problema simples, mas que incomoda a dificuldade e erros por parte dos alunos na construção da mediatriz de um segmento. E esta dificuldade se faz mais presente em alunos, segundo a pesquisa, que não tiveram aulas de Desenho Geométrico. Barreto verificou a importância da construção do desenho como diferenciador na aquisição de conhecimento.

Segundo Flores (2007, p. 17) "a ligação entre a aprendizagem da Geometria e o saber ver as representações das figuras geométricas tem aguçado a busca de variados procedimentos que possam ser colocados em prática na sala de aula [...]". Pais (1996, p. 66) diz que: "quatro elementos fundamentais intervêm fortemente no processo de ensino e aprendizagem de Geometria euclidiana plana e espacial: objeto, conceito, desenho e imagem mental".

Para Wagner (1998) a partir dos gregos surgiu uma espécie de álgebra geométrica em que a palavra *construir* era o sinônimo do termo *resolver*, ou seja, as construções serviam para validar conhecimentos de base relativos a propriedades das figuras geométricas. Sendo assim as Construções Geométricas representam "um meio pelo qual se apresentam novos problemas, bem como, um recurso para resolução de problemas matemáticos" (SANTANA, 2002, p. 7-8).

Segundo Brasil (1998, p. 70) o aluno, na busca por respostas, "reconhece a necessidade de construir argumentos plausíveis", porém, acreditamos que isso depende necessariamente do tipo de atividade que lhe é proposta. As pesquisas aqui apresentadas mostram que as Construções Geométricas podem fornecer atividades que favorecem a construção desses argumentos e suas validações. Ressaltamos, ainda, que temos como objetivo central acompanhar a evolução dessas validações, que podem acontecer, segundo

[10] Nesta pesquisa estamos tratando Desenho Geométrico como Construções Geométricas.

Grando (2006), em grupo, bastando para isso concentrarmos, nos diversos tipos de exposição, escritas ou orais, das atividades desenvolvidas pelos alunos.

Devíamos então escolher um tema específico em Geometria no qual pudéssemos utilizar as Construções Geométricas no processo de evolução das validações. E propusemos além da régua e compasso para resolução das atividades o uso da tecnologia.

Relativamente à informática, concordamos com Bittar (2000, pp. 92-93) quando afirma que não podemos:

> correr o risco de usar a informática como um "apêndice" do curso habitual; ou seja, o professor dá a aula da maneira tradicional (lápis, quadro-negro, papel) e depois ilustra algumas atividades no computador [...] Dessa forma o uso do computador perde seu sentido não somente para o professor, mas também para o aluno que verá a informática como algo "extra curricular".

Contrário a este contexto a informática pode assumir um papel importante, no processo de aprendizagem, como citam os Parâmetros Curriculares Nacionais,

> [...] (pela influência dos recursos de informática)... insere-se mais um desafio para a escola, ou seja, o de incorporar ao seu trabalho, tradicionalmente apoiado na oralidade e na escrita, novas formas de comunicar e conhecer." "(os computadores podem ser usados...) como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem; como auxiliar no processo de construção do conhecimento; como meio de desenvolver a autonomia pelo uso de *software*s que possibilitem pensar, refletir e criar soluções [...] (BRASIL, 1998, pp. 43-44).

Temos hoje uma realidade que apresenta um momento singular para a utilização de tecnologia no ensino. Os ambientes digitais permitem que cada pessoa descubra seus próprios caminhos para o melhor aprendizado, sempre mediados pelo professor. Outra consideração relevante ao problema da interrelação entre um recurso informatizado e processos cognitivos diz respeito à memória, que influencia no desenvolvimento do pensamento algébrico, como uma forma de gerenciamento de informação. Conforme Lévy, assim como a escrita nos permite ampliar a memória a curto prazo, a informática permite ter um auxiliar para a memória biológica, funcionando principalmente como "um módulo externo e suplementar da capacidade de imaginar". (LÉVY, p. 140). Pesquisas recentes em Educação Matemática e informática têm mostrado a relevância da informática na Educação para a aprendizagem de conceitos matemáticos, com a utilização de *software*s em áreas como a Geometria como destaca Castro Filho (2001). Pesquisadores como Póvoas (1997), utilizando o *software* Cabri-Géomètre, investigam como alunos no curso de Licenciatura o utilizariam para ensinar

Geometria, e Bittar (2000, p. 93) nos diz que: "analisando o *software* Cabri-Géomètre, podemos ver que a elaboração de atividades envolvendo *software*s oferece ganhos qualitativos relativamente a aprendizagem da geometria em comparação ao contexto lápis e papel".

Após a análise destes fatores nos dedicamos a encontrar um conteúdo específico de Geometria em que pudéssemos promover as validações de conjecturas expostas pelos alunos na apresentação dos conceitos geométricos nas atividades de Construções Geométricas com o uso de instrumentos como régua e compasso e também a utilização de um *software* específico. Acabamos por escolher os pontos notáveis do triângulo: ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro. Essa escolha foi pautada pelas pesquisas já apresentadas que tinham como ponto em comum a utilização das construções para a aprendizagem de Geometria. Esse conteúdo, pontos notáveis, leva o aluno a utilizar um conjunto de procedimentos de construção em que pode se apropriar dos conceitos geométricos que os envolvem em uma sequência de construção e propriedades geométricas que conduzirão a apropriação dos conhecimentos pelos alunos destes conceitos por meio das argumentações, justificativas apresentadas nessas construções.

Para Pietropaolo (2005, p. 90) a construção de uma argumentação "para explicar e justificar um resultado geométrico percebido ou induzido em um ambiente informatizado ou em qualquer outro contexto" representa um desafio para o aluno e também para o professor. Em pesquisa com professores Jahn, Healy e Coelho (2008) constataram que mais da metade não trabalhava com argumentações ou qualquer tipo de provas.

A partir do exposto nossa problemática de pesquisa ficou assim definida: A evolução das possíveis argumentações utilizadas pelos alunos ao justificarem procedimentos de Construções Geométricas.

Buscamos nesse trabalho tratar do tema Construções Geométricas dando enfoque às questões relativas à argumentação elaborada pelos alunos na construção do conhecimento geométrico acompanhando sua evolução na aquisição desse conhecimento. Porque utilizar Construções Geométricas?

> Entendemos que existe uma particularidade no pensamento geométrico que possibilita uma maior flexibilidade nos momentos de realização de uma investigação – exploração e formulação de questões; levantamento de conjecturas; testes e reformulação/refinamento das conjecturas e justificação e avaliação. [...]; em se tratando de tarefas de geometria, acrescenta-se a isso

> as possibilidades de experimentação empírica e o uso de diferentes tipos de representação, além da forte presença da intuição. (GRANDO, et al., 2006, p.7)

As argumentações usadas no levantamento de conjecturas citadas por Grando (2006) não fazem parte da sala de aula, mas ainda na pesquisa realizada por Jahn, Healy e Coelho (2008, p.18) podemos encontrar no diálogo de uma professora que fez parte desta pesquisa, uma das razões para esse trabalho e também na minha experiência pessoal quando me sentia frustrada em não conseguir fazer com que meus alunos se apropriassem do conteúdo.

> Acredito sinceramente que elaborar uma sequência que visa o aprendizado de maneira livre e independente, em que o aluno pensa, participa, levanta hipóteses, argumenta e descobre é trabalhoso, mas é muito REALIZADOR, tanto para o professor como para o aluno. (Professora Fátima).

Mas como observar e analisar essas argumentações? Como categorizá-las em níveis de evolução para diagnosticarmos consequentemente uma apropriação de propriedades concernentes ao objeto de estudo? As respostas a essas questões serão apresentadas no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2

ARGUMENTAÇÃO E SITUAÇÕES DIDÁTICAS

Uma das tentativas de melhorar a formação dos alunos está na preocupação com o processo de ensino e aprendizagem das disciplinas que compõem o sistema escolar e na sua contribuição no processo de formação do indivíduo como cidadão participativo na sociedade. Dentre essas disciplinas destacamos a Matemática e os inúmeros esforços na tentativa de torná-la mais “popular” entre os alunos, pois segundo os PCN, ela se faz presente em muitos campos da atividade humana.

A Matemática constitui um campo de saber composto por outros tantos campos, que estudam os diferentes objetos matemáticos, dentre os quais nos detemos na Geometria. Neste capítulo apresentamos a Geometria como um campo capaz de produzir atividades, envolvendo Construções Geométricas, onde seja possível trabalhar com as argumentações que contribuem, ainda segundo os PCN, na formação e aquisição de conhecimentos por parte dos alunos.

Antes de passarmos à discussão sobre a argumentação apresentamos os objetivos da pesquisa.

2.1 Objetivos

2.1.1 Geral

Investigar as argumentações de alunos do 8º ano do Ensino Fundamental em Construções Geométricas envolvendo pontos notáveis de um triângulo.

2.1.2 Específicos

- Analisar como as Construções Geométricas aparecem nos livros didáticos atuais;
- Investigar os tipos de provas que aparecem nas argumentações realizadas pelos alunos em atividades envolvendo pontos notáveis do triângulo;

- Investigar a evolução das argumentações realizadas por alguns alunos do grupo estudado em atividades envolvendo pontos notáveis do triângulo;

As Construções Geométricas, como já dissemos, constituem um campo oportuno e fértil para o estudo de argumentações utilizadas pelos alunos nas conjecturas levantadas. Escolhemos então os livros didáticos atuais para analisar com detalhes, pois, muitas mudanças foram instituídas após os PCN e a implementação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Os livros didáticos foram escolhidos por fazerem parte do meio pesquisado, ou seja, a sala de aula. Essa análise deve contribuir com a elaboração da sequência didática com atividades que leve à discussão de Pontos Notáveis do triângulo, conteúdo do 8º ano do Ensino Fundamental. A escolha desse conteúdo se deu por esse envolver vários conceitos geométricos que possibilitam investigar a evolução das provas descritas por Balacheff (1988) e a apropriação desses conceitos pelos alunos. Na sequência de atividades queremos investigar os tipos de provas que serão utilizadas por todos os alunos envolvidos na pesquisa e, a partir daí, escolher alguns deles para o estudo da evolução das argumentações apresentadas. A justificativa dos alunos escolhidos será feita no momento da escolha, ou seja, no capítulo 5.

2.2 Argumentação.

Segundo Boavida (2005) o interesse da Educação Matemática pela argumentação matemática é recente se compararmos às outras problemáticas de pesquisa. Esse interesse também pode ser observado nos Parâmetros Curriculares Nacionais que tratam a argumentação como um fator positivo, na resolução de problemas, para a aquisição do conhecimento por parte do aluno. Segundo os PCN a argumentação é sugerida para ser desenvolvida no Ensino Fundamental como mostra este excerto:

> É desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (BRASIL, 1998, p. 71).

Mas apesar dessa recomendação o alcance em sala de aula continua quase inexistente. Pesquisas como as de Ponte, Matos e Abrantes (1998), Ramalho (2002) e Boavida (2005) mostram que esta realidade está muito longe da sala de aula já que a ausência de atividades que levem a essa prática resultam na ausência de respostas dos alunos. Um outro fator é apresentado por Chevallard, Bosch e Gascón (2001): os alunos ainda não se comprometem com a coerência, avaliação ou análise crítica do que ouvem, não apresentando, portanto, justificativas em atividades onde lhes é cobrado esse procedimento.

Autores como D'Ambrósio (1993), Chevallard (2001) e Pietropaolo (2005) nos mostram que é importante à formação consistente de conceitos matemáticos pelos alunos, sejam esses do Ensino Fundamental ou Médio, assim como a justificação e validação desses conceitos na resolução de atividades matemáticas. A missão do professor é fundamental, mas não isolada: é necessária uma participação mais efetiva dos alunos. Para Oliveira (2006, p. 2) "a comunicação eficiente das idéias matemáticas é uma habilidade básica a ser desenvolvida pelo aluno" sendo que o professor tem um papel importante na busca por atividades que auxiliem nessa comunicação.

Escolhemos então a Geometria como o campo da Matemática capaz de nos fornecer essas condições favoráveis, pois entendemos que um problema envolvendo conceitos geométricos pode levar o aluno a discutir, argumentar e fundamentar sua resolução. Se apresentarmos um problema onde seja necessária a construção de uma mediatriz há dois procedimentos básicos para a sua resolução, realizar a construção pedida e, em seguida, apresentar uma argumentação que justifica essa construção, ou simplesmente realizar a construção sem posterior justificativa. O caminho escolhido para nossa pesquisa é o da validação da construção realizada.

Para Boavida (2005, p. 1), a argumentação dever ser precedida de:

> [...] condições favoráveis ao envolvimento dos alunos em experiências de aprendizagem cujo foco é a explicação e a fundamentação de raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações e a formulação, avaliação e prova de conjecturas [...].

Para Duval (1988, p. 57)

> [...] os problemas de Geometria apresentam uma originalidade em relação a outras tarefas matemáticas que podem ser propostas aos alunos. De um lado, suas resoluções exigem uma forma de raciocínio que implica a referência axiomática local, a qual se desenvolve no registro da língua natural.

Arbach (2002) nos mostra em sua pesquisa que a Geometria oferece condições favoráveis de apropriação, atividades, de competências essenciais ao aprendizado onde podem ser utilizados diferentes tipos de argumentação e validação dessas atividades.

Para Ponte et al. (2005, p. 8) o trabalho com atividades que levam a argumentação, dirigido aos alunos dos 5º e 7º anos, mostra os seguintes resultados:

> Estas tarefas são apropriadas para todos os alunos e não apenas para os melhores;
> · Os alunos podem realmente envolver-se em actividade matemática significativa e ter a noção de que fazem algo de relevante;
> · É possível que os alunos desenvolvam uma autonomia significativa;
> · Há grande vantagem em estimular a interacção entre os alunos, trabalhando em grupos ou aos pares nestas tarefas, uma vez que emerge muita "energia" ao falarem e discutirem uns com os outros.

Tencionamos propor atividades que promovam argumentações envolvendo Construções Geométricas em uma abordagem que privilegie estas atitudes por parte dos alunos do Ensino Fundamental. Apresentamos nessa pesquisa problemas que envolvem as Construções Geométricas, um saber matemático respaldado pelos PCN e que hoje faz parte de algumas coleções de Ensino Fundamental e Médio contidas no Guia do Programa Nacional do Livro Didático 2008.

Os problemas que envolvem as Construções Geométricas nos oferecem várias estratégias de resolução, podendo aparecer um encadeamento de ideias que podem atingir vários níveis de evolução, justificando essa resolução. Ao propor atividades de construção de triângulos para professores do Ensino Fundamental, Oliveira (2006) buscou incentivar e desenvolver nos docentes a capacidade de valorização dos registros escritos dos alunos e a análise destes registros como uma estratégia para a aquisição de conceitos de Geometria. Para Zulatto (2002, p. 97) "[...] após realizar as construções é possível investigá-las. As atividades dessa natureza, por serem abertas, possibilitam que os alunos explorem propriedades, façam descobertas, levantem conjecturas [...]". Araújo (2007) em sua pesquisa aborda as Construções Geométricas como ponto de partida para o estudo e a aprendizagem da prova, salientando a importância teórica que tem uma construção e sua validação: "[...] toda construção geométrica tem que ter algum argumento que a justifique". (ALMEIDA, 2007, p.72).

Uma característica básica e comum a essas pesquisas e que deixaremos claro neste trabalho é a definição de desenho. Esse é um ponto que precisa, segundo Almeida (2007), estar claro na pesquisa. Será necessário então definirmos o que chamamos de construção. Para Chaachoua (1997, p. 9) isso representa "[...] uma discussão que está no centro dos estudos de muitos trabalhos em Didática da Matemática [...]" e que envolve o conceito de desenho e figura. Segundo Parzysz (1989) a figura é um objeto geométrico e o desenho uma representação gráfica da figura. Laborde e Capponi (1994, pp. 168-169) apresentam uma distinção entre desenho e figura afirmando que:

> A figura é [...], o objeto abstrato que serve de substrato para o raciocínio, para o pensamento, enquanto tal pode ser identificada ao objeto da teoria. O desenho, por sua vez, é a materialização sobre uma folha de papel, uma tela do computador, etc. O desenho é um modelo da figura. A figura permite a determinação de propriedades, estabelecendo instrumentos de generalização, o desenho se refere ao objeto concreto que figura na folha de papel.

Em nossa pesquisa, utilizamos o termo construir associado ao conceito de figura, tendo em vista que, construir uma figura significa argumentar explorando as propriedades e estabelecendo generalizações que levem a apropriação do conceito do objeto matemático em questão. Tal definição a diferencia do termo desenhar o que, segundo Bellemain (2001), é a representação de um modelo, um objeto de raciocínio para o aluno traduzido pela simples representação plana.

Utilizaremos, nas construções da figura geométrica escolhida, duas mídias: a régua e o compasso e o *software* Cabri-Géomètre, que será discutido ainda nesse capítulo.

2.3 Como investigar as argumentações.

Uma posição da corrente francesa em Didática da Matemática segundo Quaranta e Tarasow (2004) é que os alunos devem, em determinados períodos, trabalharem utilizando seus conhecimentos como ferramenta na solução de problemas de modo autônomo na apropriação de conceitos. Para essa apropriação é necessário organizar situações que promovam o processo de validação das suas respostas.

Para Margolinas (1993, p. 78, tradução nossa)

> A situação de validação é uma organização específica do meio de modo que as mensagens trocadas com o meio sejam afirmações, teoremas, demonstrações, emitidas e recebidas como tais. A situação de validação visa à produção explícita de provas pelos alunos. No caso da corrida ao 20, esta situação é realizada na cena final. O que caracteriza a situação de validação é o desafio explícito da verdade das afirmações.

Dentro desse conceito apresentamos a argumentação como um fator que segundo os PCN (BRASIL, 1998), pode auxiliar na aquisição do conhecimento por parte do aluno. Nesse processo de validação os alunos podem elaborar explicações que, segundo Balacheff (apud MARGOLINAS, 1993) podem ser uma prova ou demonstração.

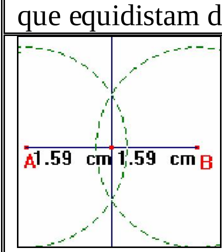
Para Balacheff (1992) a explicação é um discurso que oferece uma ou várias razões para tornar compreensível uma afirmação e pode ser analisada em duas categorias: provas pragmáticas e provas intelectuais. “As provas pragmáticas são validações apoiadas sobre conhecimentos práticos e as provas intelectuais são formulações e relações das propriedades, com intuito de generalização”. (SILVA, 2007, p.13).

> O possível acesso ou não a experiência constitui uma característica da situação e vai desempenhar um papel fundamental na aplicação do processo de validação. A execução de uma decisão, ou o conteúdo de uma afirmação, permite chamarmos validações pragmáticas ou provas pragmáticas as produzidas pelo aluno com o objetivo de estabelecer a validade de uma proposição. Quando o acesso a execução não é possível então as validações são intelectuais e as provas produzidas são provas intelectuais. (BALACHEFF, 1996, p. 110, Grifo do autor). [11]

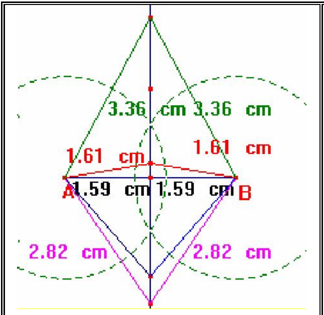
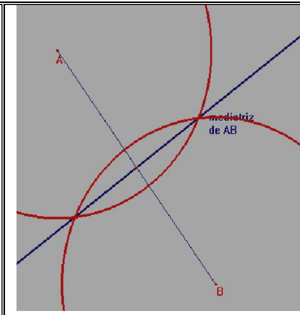
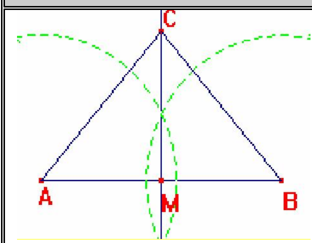
As provas intelectuais, ou conceituais, envolvem a linguagem e, para Balacheff, passa por quatro níveis de desenvolvimento: empirismo ingênuo, experiência crucial, experiência genérica e exemplo mental.

Apresentamos os quatro níveis de prova, por meio de um exemplo, com a justificativa do procedimento de construção da mediatriz.

QUADRO 1 – Tipologia de provas (BALACHEFF, 1988).

A mediatriz de um segmento AB é reta perpendicular à AB que passa pelo ponto médio desse segmento. Os pontos que pertencem a mediatriz é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos extremos do segmento.	
	Usar a régua e medir a distância de um ponto que está sobre a mediatriz até os pontos A e B e ver que é a mesma. Esse ponto pode ser até mesmo o ponto médio. Esse procedimento pode ser repetido uma ou duas vezes. Essa argumentação pode ser classificada no empirismo ingênuo.
Empirismo ingênuo: Os alunos determinam experimentalmente, se convencem apenas com alguns exemplos e apresentam-nos como uma validação.	

[11] Tradução nossa.

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>
</td>
<td>Utiliza o procedimento de construção inicial e um outro com o segmento em uma outra posição para convencer-se de que o procedimento ainda é válido, usando sempre a régua para medir algumas distâncias. Ao certificar-se de que as distâncias são iguais, argumenta que encontrou a mediatriz.. Esse argumento pode ser classificado de experiência crucial</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Experiência crucial: os alunos fazem experiências que, para essa atividade poderiam usar segmentos de vários tamanhos e em várias posições, buscando a validação do problema para algum dos casos. Uma vez confirmado esse caso, conclui-se para um caráter geral.</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td colspan="2">A partir do procedimento de construção, a seguinte justificativa é fornecida: Seja C um ponto qualquer da mediatriz. AM e BM são congruentes, pois M é ponto médio de AB; CM é comum aos triângulos AMC e BMC; CMA e CMB é ângulo reto. Logo, os triângulos AMC e BMC são congruentes (caso LAL). Assim, CB é congruente à CA.
Esse tipo de argumentação (ou semelhante a essa) pode ser classificado de exemplo genérico, devido ao uso da figura.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Exemplo genérico: No exemplo genérico continuam sendo utilizados exemplos particulares, mas já se desprendem das particularidades, ou seja, podem começar a pensar dedutivamente explicando as características do exemplo, começam a aparecer as argumentações “cruas”.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Seja C um ponto qualquer da mediatriz. AM e BM são congruentes, pois M é ponto médio de AB; CM é comum aos triângulos AMC e BMC; CMA e CMB é ângulo reto. Logo, os triângulos AMC e BMC são congruentes (caso LAL). Assim, CB é congruente à CA.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">A última fase é a da experiência mental, quando o aluno consegue estruturar o seu discurso e encadear o seu raciocínio, nesse caso sem o apoio da construção.</td>
</tr>
</table>

O conteúdo sobre pontos notáveis nos proporcionará um número expressivo de conceitos a serem apresentados corroborando com Henriques (1999) que ao apresentar sua pesquisa com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental pôde observar que nas atividades envolvendo os pontos notáveis muitos conceitos como tipo de triângulos, construção de retas perpendiculares, ponto médio, circunferências e seus raios estavam envolvidos nas construções. Ao construir o aluno deverá apresentar justificativa que valide a sua resposta podendo ocorrer, de acordo com o objeto matemático apresentado, uma evolução, o que segundo Capponi[12] (1993, apud LABORDE e CAPPONI, 1994, p.57) pôde ser observado em

[12] CAPPONI, B. Modifications de menus dans Cabri-géomètre: des symétries comme outils de construction, *PetitX*, n.33, pp.37-68, 1993.

sua pesquisa, realizada na França, com o uso regular do Cabri-Géomètre, realizada com alunos do 8º e 9º anos.

Para nossa investigação propomos uma sequência didática abordando o conteúdo de pontos notáveis de triângulos. Segundo Abrantes e Serrazina (1999, p. 23) “a aprendizagem requer o envolvimento das crianças em atividades significativas. As explicações do professor, num momento adequado e de uma forma apropriada, são certamente elementos fundamentais”. Para a elaboração dessas atividades nos inspiramos na Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986).

Segundo Freitas (2008, p. 80) uma situação didática é:

> Um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição [...].

Para Brousseau (1986) este saber pode ser constituído a partir da resolução de um problema. Nesta pesquisa não estaremos propondo problemas no sentido da Teoria das Situações Didáticas, onde o aluno é levado a construir seu conhecimento e o problema é apresentado a ele como forma, caminho nessa construção. Porém vamos propor situações que são estritamente novas para o aluno; o conhecimento novo não é o conhecimento matemático, mas um conhecimento paramatemático (CHEVALLARD, 1991): não se trata objeto de ensino explícito, nem tampouco usualmente avaliado é um saber auxiliar, “ferramentas de estudo”, o que Chevallard chama de “noções de demonstração” chamaremos nessa pesquisa de argumentação.

O aluno precisará buscar no seu rol de conhecimentos um que vai lhe permitir provar o que precisa o que para ele se caracteriza em uma situação de aprendizagem com características semelhantes à de uma situação adidática.

Na definição de Brousseau (1986, p. 8):

> Quando o aluno se torna capaz de pôr em funcionamento e utilizar por si mesmo o saber que está construindo, em situação não prevista em qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que pode ser chamado de situação adidática.

As situações adidáticas representam determinados momentos do processo de aprendizagem, nos quais o aluno trabalha de forma independente, não sofrendo nenhum tipo de controle direto por parte do professor. Vai adaptando o seu conhecimento à necessidade de resolver um determinado problema. Mas neste processo o professor deve apresentar condições para que o aluno seja capaz de explicitar seus procedimentos, seu raciocínio. Como diz Margolinas (1993) o termo adidático aparece quase ao mesmo tempo em que o termo devolução e, para Brousseau (1987, p. 39):

> Não é suficiente 'comunicar' um problema a um aluno de modo que este problema torne-se o seu problema e que se sinta o único responsável para resolvê-lo. Não é suficiente que o aluno aceite esta responsabilidade de modo que o problema que resolve seja "universal" livre de pressupostos subjetivos. Chamamos "devolução" a atividade pela qual o professor procura atingir estes dois resultados.

Ao assumir a responsabilidade do problema o aluno poderá apresentar ao professor sua dúvida e esse, por sua vez, deverá lhe devolver uma boa pergunta o que para Brousseau (1986) conduz o aluno à apropriação do conhecimento. Nesse sentido o papel do professor será o de simular uma micro-sociedade científica oferecendo aos alunos meios de realização das atividades e mediando as respostas encontradas.

O meio é essencial na elaboração dessa situação; corresponde ao "meio matemático dos alunos". Ele

> [...] abrange todos os objetos com os quais os alunos têm familiaridade matemática e que podem manipulá-los com toda segurança e cujas propriedades sejam inquestionáveis, bem como os diferentes dispositivos de ajuda para o estudo ("aula de matemática", "livro didático", "recursos didáticos", etc.) para contextualizar a matemática ensinada. (CAVALCANTI e FERREIRA, 2007, p. 2).

A Teoria das Situações Didáticas se preocupa em como provocar a aprendizagem decorrente do aluno, professor e o saber matemático associados a um meio. Dessa forma construímos a sequência didática procurando apresentar situações em que as Construções Geométricas favorecessem o aparecimento da argumentação que "está fortemente vinculada à capacidade de justificar uma afirmação e, para tanto, é importante produzir alguma explicação, bem como justificá-la [...]" (BRASIL, 1998, p. 70), usando para essa elaboração a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988) e a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986).

2.4 O livro didático, o *software* Cabri-Géomètre, a régua e o compasso e as argumentações.

Optamos por buscar no livro didático uma evolução na apresentação de argumentações de atividades de construção geométrica visto que, segundo Núñez (2003, p. 2) “o uso do livro didático pelo (a) professor (a) como material didático, ao lado do currículo, dos programas e outros materiais, instituem-se historicamente como um dos instrumentos para o ensino e aprendizagem”. Iniciamos essa fase da análise por um período que marcou o ensino de Matemática no Brasil - O Movimento da Matemática Moderna - e segundo Bertoni (2005) contribuiu positivamente para o processo de investigação da aprendizagem e a consolidação da Educação Matemática.

Os livros didáticos desse período podem nos mostrar o ensino a partir de uma mudança curricular em que as Construções Geométricas e a Geometria não tinham um papel definido dentro da Matemática. Podemos nos certificar se as construções aparecem e se junto a elas as argumentações. Ao avançar nossa análise contemplamos os livros didáticos que estão no Guia do PNLD/2008. Usamos dados coletados nessa análise destacando as Construções Geométricas que, segundo Araújo (2007), fornecem elementos que são o ponto de partida para uma argumentação promovendo uma aquisição de conhecimentos geométricos.

Para verificar a aquisição de conceitos geométricos por parte dos alunos escolhemos usar duas tecnologias: régua e compasso e um *software* de Geometria Dinâmica – o Cabri-Géomètre. Segundo Almeida (2007, p. 72) não importa a mídia utilizada “os algoritmos ou procedimentos empregados nas construções de figuras geométricas traduzem ou empregam proposições geométricas”. Vergnaud e Gomes (2004) sugerem o uso das duas tecnologias uma vez que cada uma favorece um determinado conjunto de propriedades geométricas.

Alguns autores como Braviano (1998), Souza (2001), Kodama (2006), Araújo (2007) corroboram com a hipótese de que o Cabri-Géomètre ajuda os alunos a relacionar a representação com a teoria explicitando dessa forma as propriedades matemáticas que serão utilizadas. Para Bittar (2000, p. 11) o *software* oferece “um meio de validação de conjecturas dos alunos, um instrumento de controle das atividades realizadas e uma oportunidade de visualização dinâmica de propriedades vistas no papel”. Segundo a autora essa é uma validação empírica. Para Laborde e Capponi (1994) o meio oferece uma possibilidade de confrontação longa e repetida com o problema e os alunos então poderão testar suas respostas e confirmar ou corrigir suas argumentações.

Quanto à utilização da régua e compasso, Gomes (1999) investigou que o uso de régua e compasso influencia na forma como os alunos desenvolvem estratégias de construção de figuras geométricas. Esses são instrumentos de desenho instituídos na Geometria grega e que permanecem até hoje no ensino dessa disciplina. Utilizamos esses instrumentos como forma de contemplar o ensino de Construções Geométricas.

Entretanto, acreditamos que o uso do *software* poderá favorecer a visualização das propriedades geométricas envolvidas nas construções e, consequentemente, as validações que os alunos serão chamados a realizar. De fato, a utilização de tecnologias diferenciadas pode contribuir para a aquisição do conhecimento e segundo Bittar, Chaachoua e Nicaud. (2005, p. 78):

> [...] é importante desenvolver materiais e estratégias de ensino que dêem ao aluno maior controle sobre suas atividades, o que é fundamental para que ele se torne co-responsável por sua aprendizagem. Nesse campo são bastante conhecidos alguns *software*s de Geometria que permitem ao aluno controlar a atividade realizada por meio de diversos tipos de retroações, dentro de uma perspectiva construtivista de aprendizagem.

Sabemos que a utilização dessas tecnologias, em conjunto, pode levar os alunos a apresentar concepções[13] diferentes nesses ambientes, como podemos observar nas pesquisas desenvolvidas por Bittar et al. (2005), Almeida (2007), Souza (2001) Santana (2005). Mas analisar estas concepções não é o objetivo desse trabalho. Conhecemos e concordamos com os resultados apresentados nas pesquisas anteriormente citadas, sabemos que os alunos podem desenvolver diferentes estratégias na resolução de atividades, possibilitando determinadas formas de respostas em cada ambiente utilizado. Entretanto, esse não é o foco de nossa pesquisa.

Ao investigarmos o tipo de prova apresentado pelos alunos nas argumentações, procuramos identificar elementos que comprovem a aquisição dos conceitos geométricos por parte dos alunos, independente do tipo de ambiente utilizado. Procuramos ainda, valorizar a argumentação produzida na resolução das atividades, sejam elas, feita com o auxílio do Cabri-Géomètre ou da régua e compasso, e como essa argumentação pode dar sentido aos conceitos utilizados.

[13] Para Artigue (1991, apud BITTAR, CHAACHOUA e NICAUD, 2005, p. 79) a concepção "é um objeto local, estreitamente associado ao saber e aos diferentes problemas em cuja relação ela intervém; [...]".

2.5. O referencial metodológico

Escolhemos a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988) por acreditar que essa metodologia contribui na elaboração, realização, observação e análise da sequência didática que nos propomos a desenvolver. Ela carrega uma visão de aprendizagem compatível com a descrita anteriormente e, não serve apenas para diagnosticar, retirar dados e atribuir julgamentos.

A Engenharia Didática apresenta 4 fases: análise preliminar, análise a *priori*, experimentação e análise a *posteriori*. Na análise preliminar diagnosticamos e identificamos algumas dificuldades e obstáculos em relação ao conteúdo pesquisado. Essa análise foi feita com vistas a fornecer elementos para a análise *a priori*.

Artigue (1988) descreve que:

> A análise a *priori* deve ser concebida como uma análise do controle do sentido, pois a teoria das situações didáticas que serve de referência à metodologia da engenharia didática teve, desde sua origem, a ambição de se constituir uma teoria de controle das relações entre sentido e situações. (apud MACHADO, 2008, pp. 242-243).

Consideramos a análise *a priori* o coração da Engenharia Didática. Com a ajuda da análise preliminar, na composição da sequência didática a análise *a priori* fará do aluno o ator principal, pois as atividades são pensadas e pesquisadas para que ele tenha contato com o conteúdo pré-estabelecido para aprender.

É nessa fase que o pesquisador precisa ser capaz de prever os efeitos da situação que elaborou antes de levá-la, no nosso caso, à sala de aula. "Devem ser analisadas as decisões que podem ser tomadas pelo aluno a cada momento, as estratégias que poderá adotar para chegar ao resultado final [...]" (SOUZA, 2001, p.55) além de apresentar a estratégia correta que corresponde à solução do problema proposto. Mesmo estando longe do contato entre pesquisador e aluno, essa fase é o ponto inicial para uma análise de dados consistente.

O contato entre pesquisador e aluno se dá durante a experimentação. É nessa fase que aplicamos as sessões da sequência didática. Para o pesquisador representa, segundo Machado (2008), um registro das observações que podem ser: uma descrição das atitudes dos alunos durante a realização das sessões, transcrição de registros audiovisuais.

Na experimentação realizada em nossa pesquisa nos atentamos para a fase de formulação quando o aluno já utiliza, na solução do problema proposto alguns modelos de esquemas teóricos relativos ao conteúdo apresentado. Estamos buscando aqui indícios de argumentações e evoluções na linguagem teórica utilizada nas possíveis respostas. Nessa análise a fase de validação exerce um papel importante.

Segundo Margolinas (1993, p. 39)

> a necessidade da fase de validação no funcionamento adidático apresenta, entre outras coisas, o paradoxo fundamental do ensino: o professor não pode dizer ao aluno o que ele quer que faça e, entretanto o aluno deve agir de uma maneira determinada e relevante do ponto de vista do saber que o professor quer ensinar.[14]

Ainda segundo Margolinas (1993) se a situação de aprendizagem for bem organizada pelo professor/pesquisador e permitir a validação, todas as conclusões proverão da interação dos alunos com o meio. Brousseau considera importante essas interações, pois:

> [...] as mensagens trocadas com o meio são afirmações, teoremas, demonstrações, emitidos e recebidos como tais. A diferença entre uma informação e uma afirmação de validade é suficientemente clara e importante em matemática para que seja inútil insistir.[...] podem ser mesmo de diferentes tipos, como que se a validade sintática ou a validade semântica da declaração contida na afirmação, como que intervêm como ensaio, demonstração ou como axiomas ou definições. Ele também invocará a validade pragmática, a apreciação sobre a eficácia da declaração. (BROUSSEAU, 1986, p. 72).

A seguir temos a análise a *posteriori,* quando analisamos as respostas dos alunos. É também o momento de observar se o que temos é suficiente ou será preciso investir em outro meio de aquisição de dados e, então investigar como os alunos validam suas conjecturas.

A Engenharia ainda tem uma particularidade que a distingue de outras metodologias de pesquisa, a sua validação interna que consiste da confrontação entre a análise a *priori* e a análise a *posteriori*, quando as sessões que compõem uma sequência são aplicadas aos sujeitos participantes da pesquisa “e é da confrontação das análises que se validam ou refutam as hipóteses levantadas no início da engenharia”. (MACHADO, 2008, pág. 246).

Antes da elaboração da sequência didática, passamos à análise da presença das Construções Geométricas nos livros didáticos atuais, o que é feito no próximo capítulo.

---

[14] Tradução nossa.

CAPÍTULO 3

A APRESENTAÇÃO DAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS EM ALGUNS LIVROS DIDÁTICOS ATUAIS

Neste capítulo apresentamos a análise de 10 coleções de livros didáticos com diferentes abordagens situando as Construções Geométricas nos dias atuais tendo como referência o guia do PNLD/2008. Essa análise discute as construções às quais os alunos das escolas das redes, pública e privada estão tendo acesso e nos dá suporte para a elaboração de nossa sequência didática. Além de apresentarmos a análise de duas coleções de livros didáticos, essas utilizadas por duas escolas do município de Aquidauana/MS, local onde foi desenvolvida a pesquisa.

3.1 As Construções Geométricas nos livros didáticos após os PCN.

"O livro Didático em muitos casos passou a ser o principal e às vezes o único instrumento de apoio ao trabalho docente" (DANTE, 1996, p. 91). Isso ocorre, muitas vezes, não por escolha do professor, mas sim como consequência da falta de recursos disponíveis para o trabalho. Algumas mudanças propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN – (BRASIL, 1997) e algumas propostas curriculares estaduais e municipais apresentam o livro didático como uma das fontes de consulta disponível apresentada ao professor no exercício do seu trabalho. Os documentos oficiais começaram a apresentar o livro didático como um dos pilares de sustentação de um programa curricular com uma nova orientação pedagógica que acenava com novidades no desenvolvimento do conteúdo escolar, pois "recorremos ao livro como recurso didático básico, tão básico que é assegurado a todos por um programa do Estado". (BRASIL, 2008, p. 12). Esse mesmo texto insiste que:

> [...] apesar de toda a sua importância, o livro didático não deve ser o único suporte do trabalho pedagógico do professor. É sempre desejável buscar complementá-lo, seja para ampliar suas informações e as atividades nele propostas ou contornar suas deficiências, seja para adequá-lo ao grupo de alunos que o utilizam. (BRASIL, 2008, p. 12).

O livro didático passou a ser elaborado e selecionado contemplando as propostas contidas no Guia do PNLD, organizado por especialistas de cada área de conhecimento.

Em 1998, quando os PCN para o Ensino Fundamental foram lançados, as mudanças pretendidas foram apresentadas a toda a comunidade educacional do país, inclusive aos autores de livros didáticos e suas respectivas editoras. A professora do Instituto de Matemática e Estatística da USP, Iole de Freitas Druck, concorda que houve alguns avanços:

> O PNLD provocou uma mudança positiva na qualidade dos livros didáticos. Propiciou a incorporação de uma inovação mais coerente com as propostas dos parâmetros, e isso começou a ter impacto no mercado e na produção dos livros. [15]

Na Matemática, essas mudanças puderam ser sentidas muito lentamente. A grande preocupação com a aprendizagem contextualizada de conteúdos em que são estabelecidas correlações entre as diversas áreas do ensino e também, voltada ao cotidiano do aluno, aos seus conhecimentos prévios apregoado pelos PCN é hoje uma constante, mas não quer dizer que todos os autores de livros didáticos adotam essa prática em seus respectivos livros. As tentativas estavam e estão acontecendo assim como as mudanças; mas, temos ainda muitos obstáculos a transpor. Dentre eles podemos mencionar o difícil acesso a informações, em especial em alguns lugares do Brasil, um país de dimensões continentais. Além disso, a formação profissional de alguns professores leva à insegurança em utilizar livros tão diferentes daqueles em que aprenderam. Segundo Basso (1994) expropriado dos domínios metodológicos e de conteúdo, o professor busca apoio nos livros didáticos, na maioria das vezes, influenciado pelo selo oficial que garante a qualidade do livro. A partir desta escolha o professor pode se deparar com novas tecnologias de ensino, digitais ou não, usadas para explorar os conteúdos proporcionando a interseção entre o velho e o novo. Este fato pode representar um desafio que, para o professor, não é tão simples. Os documentos oficiais reviram conteúdos e metodologias para ensinar, o que pode atuar como uma dificuldade para muitos professores. O debate necessário à implementação desses documentos em sala de aula nem sempre é fácil e acessível a todos os professores. Para a “[...], sua tradução em práticas escolares concretas, não existem fórmulas prontas. Esse processo depende, ao contrário, de um movimento contínuo de reflexão, investigação e atuação, necessariamente permeado de diálogo constante” (BRASIL, 2002, p.60). E essa metodologia não é comum a todos os professores, seja pela deficiência na sua formação docente, segundo Ricardo (2007), ou a falta de uma política de formação continuada (RICARDO e ZYLBERSZTAJN, 2002).

---

[15] MARQUES, Ricardo. A Decisão que vale por um ano: A escolha do livro didático. Revista Educação. 2007. <http://www.abrelivros.org.br/abrelivros/texto.asp?id=2442>. Acesso em 12 de junho de 2008.

Essas novas metodologias atingem também o ensino da Matemática. Os PCN de Matemática para o Ensino Fundamental apresentam conteúdos em blocos de conhecimento (Espaço e Forma, Grandezas e Medidas, Números e Operações e Tratamento de Informações) e algumas ideias de metodologia de trabalho para os conteúdos, sendo que uma delas, por exemplo, propõe a articulação dos conteúdos de Geometria, Álgebra e Aritmética apresentando-os em espiral[16] o que já pode ser observado, segundo o guia do PNLD, em algumas coleções de livros didáticos.

Enxergamos o livro didático como um forte aliado do professor em sala de aula, mas não o único, como é o caso para muitos docentes.

> O livro didático, na maioria das vezes, é a principal fonte de consulta do professor. Ele sugere sequências, atividades, desenvolve o conteúdo, transforma, enfim, o saber erudito em saber escolar, numa mistura de idéias, valores e filosofias cujas finalidades nem sempre são compatíveis [...]. É necessário, pois, que o professor, além de tornar explícitas suas concepções de educação, de ensino e de aprendizagem, avalie sempre suas metas, seus objetivos, seus métodos e o próprio conteúdo que está ensinando. (RUGGIERO, 2003, p.35).

O livro é essencial ao andamento do conteúdo, entretanto o professor precisa fazer a sua intervenção, participar da construção do conhecimento do aluno não como um expectador, mas como um agente de transformação. “Reforçar a posição de sujeito do professor em todas as práticas que constituem sua tarefa docente, em cujo dia-a-dia ele re-escreve o livro didático, reafirmando-se, neste gesto, sujeito de sua prática pedagógica e um quase co-autor do livro”. (LAJOLO, 1998, p. 12). Para Nuñez (1999, p.2) “[...] embora o desenvolvimento das novas tecnologias, da mídia, [...] em várias regiões, o livro didático continua sendo o mais fiel aliado do professor e um recurso imprescindível para os alunos”.

Como podemos observar o livro didático exerce forte influência na atividade didática e pedagógica do professor e na aquisição do conhecimento pelo aluno. Diante desse fato, analisamos alguns livros didáticos, observando particularmente a apresentação e exploração do conteúdo de Construções Geométricas e assim como, as argumentações utilizadas.

Usamos como referência neste levantamento as resenhas apresentadas no Guia do PNLD/2008 por apresentarem as coleções que podem ser adquiridas pelas escolas públicas

[16] Conteúdo em espiral, segundo os PCN (1998), significa estabelecer relações entre os diferentes significados dos conteúdos estudados e os diversos conhecimentos, retomando e ampliando os conceitos em vários níveis e não apresentar os blocos de forma segmentada.

brasileiras. Dentre as 16 coleções referendadas pelo guia, escolhemos 10 por serem aquelas que contêm mais explicitamente nosso objeto de estudo.

Usaremos as resenhas do Guia do PNLD/2008 por ser o mais atual, pois, segundo Pais (2006) há uma diferença considerável entre as coleções lançadas antes e depois de divulgada a primeira avaliação.

3.2. Análise das 10 coleções de livros didáticos.

As resenhas contidas no Guia do PNLD/2008 oferecem informações pedagógicas, recursos que podem ajudar na superação de obstáculos inerentes ao processo de aprendizagem da Matemática, e revelam o que está sendo entendido como ideal para conduzir a prática escolar. Neste levantamento verificamos o que está sendo proposto para o ensino de Geometria e se as Construções Geométricas fazem parte da aquisição deste saber.

Identificamos então algumas coleções que em suas resenhas fazem menção às Construções Geométricas, apresentando elementos que definem as estratégias propostas para dinamizar o processo de ensino e de aprendizagem do conteúdo de Geometria.

Para as dez coleções assim selecionadas, avaliadas pelo Guia do PNLD/2008 elaboramos uma classificação observando itens como: aparecimento de termos que lembrem construções, uso de instrumentos de desenho, a relação Geometria e Construções Geométricas e as atividades exploradas. Essa classificação se apresenta no quadro 1.

QUADRO 2 - Itens observados com maior frequência nas coleções relacionando Construções Geométricas e Geometria.

A	O termo Construções Geométricas está no índice da coleção sendo contemplado em 1, 2, 3 ou mesmo nos 4 volumes.
B	O termo Construções Geométricas não está no índice, mas aparece nos comentários dos pareceristas.
C	A construção é feita com o uso da régua e do compasso.
D	Enfatiza o conteúdo de Geometria trazendo atividades que levam à demonstração geométrica utilizando construções com o uso da régua e do compasso.
E	Propõe atividades ao aluno que incentivam o uso de instrumentos de desenho (régua e compasso) para justificar um conceito.
F	Contempla, no índice de qualquer volume da coleção, termos que lembrem Construções Geométricas: construções, uso da régua e compasso, instrumentos de desenho.

Muitas vezes a resenha de uma coleção apontava a inserção em seus conteúdos, sejam eles do 6º ao 9º ano, de instrumentos de desenho ao apresentar a definição de ângulos, retas perpendiculares, retas paralelas, bissetriz, mediatriz, circunferência, mas ao folhearmos essa mesma coleção não foi possível diagnosticar a proposta apresentada pelos PCN do 3º e 4º ciclos que citam a atenção que deve ser dada ao "ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes". (BRASIL, 1998, p. 68 – 69). Ou seja, são utilizados esquadros para traçar retas paralelas, transferidor para desenhar ângulos e não somente régua e compasso, instrumentos utilizados em construções.

Podemos notar que foi dada atenção ao uso desses instrumentos, "entretanto, algumas atividades de traçado de figuras geométricas são sequências de passos a serem seguidos, sem justificativa [...]" (BRASIL, 2008, p. 73). A relação entre procedimentos e propriedades geométricas presentes nessas construções não foi estabelecida. O uso de instrumentos se faz presente em alguns índices das coleções, principalmente em livros do 6º e do 8º ano do Ensino Fundamental.

A partir da análise das resenhas, recorremos as dez coleções de livro didático passando a buscar indícios dos comentários feitos pelos pareceristas tais como:

> [...] as propriedades das figuras geométricas são tratadas, inicialmente de forma intuitiva e com recurso à visualização, à construção com instrumentos e à medição. [...] Em geometria, valoriza-se bastante o traçado de figuras com o material de desenho; A geometria recebe bastante atenção em toda a obra [...] as atividades de desenho com instrumentos e de construção de modelos geométricos são frequentes e apropriadas. (BRASIL, 2007, p.65 e 77).

Das 10 coleções analisadas, 2 aliam os itens A, C, D, E e F o que resulta em uma conexão entre as Construções Geométricas e a Geometria "[...] a geometria é iniciada de modo experimental. A visualização é valorizada e a apresentação das construções geométricas é feita de forma bem integrada". (BRASIL, 2008, p. 117). Também podemos observar que é dada maior ênfase ao conteúdo de Geometria com atividades que levam à demonstração geométrica utilizando construções com o uso de régua e compasso, principalmente quando começam a discutir as propriedades das figuras planas quando aparecem muitas atividades envolvendo construções e sugerindo, "[...] ainda, que o docente fique atento às numerosas atividades de construções geométricas que solicitam o emprego de materiais concretos e de instrumentos de desenho". (BRASIL, 2008, p. 143). Não podemos afirmar que estas atividades contribuirão para a aquisição do conteúdo de Geometria visto que estas coleções deixam muitas vezes a escolha, de utilizar ou não esses instrumentos para o professor. Por outro lado as coleções oferecem ao professor mais de um caminho a ser seguido o que representa avanço nestas coleções.

Em três coleções analisadas, o tópico Construções Geométricas não aparece no índice do livro, mas aparece nos comentários dos pareceristas do Guia PNLD/2008. Ao recorrermos ao livro encontramos algumas atividades que envolvem construções e também discutem conceitos. Algumas atividades propostas de Geometria exigem o uso de instrumentos euclidianos

> Atividades de desenho apoiadas em instrumentos ou de construção de modelos concretos de objetos geométricos – planificações, maquetes, recortes, dobraduras, etc. – estão muito presentes na maioria das coleções. Por meio delas, espera-se que o aluno seja levado a observar os objetos geométricos no mundo físico e, de forma progressiva e adequada, possa evoluir de noções mais intuitivas para compreender os modelos matemáticos – as figuras geométricas – com suas propriedades e classificações. (BRASIL, 2008, p. 46).

Essas atividades são usadas na fixação do conteúdo, evidenciando o trabalho em grupo e em alguns casos requerendo o uso de materiais didáticos como: papel quadriculado, régua, compasso, esquadro, calculadora, etc. Pudemos encontrar algumas atividades propostas por essas coleções que inserem o uso de instrumentos de desenho, mas são poucas as coleções que introduzem Construções Geométricas como aporte à apropriação de conceitos geométricos em suas atividades. As atividades cumprem o papel de apresentação progressiva de conceitos geométricos mas, defendemos a idéia de integrar as construções geométricas na compreensão desses conceitos.

Com base nos dados coletados na análise dos livros didáticos elaboramos dois gráficos:

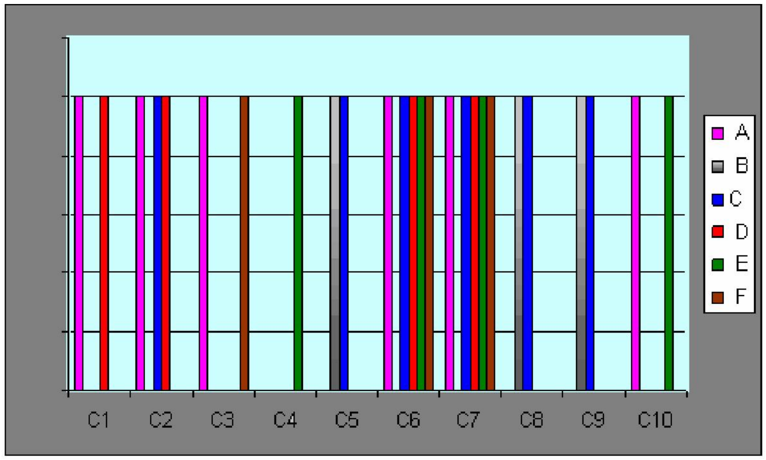


GRÁFICO 1 - Levantamento das coleções de livros didáticos

No Gráfico 1 podemos observar a frequência com que os critérios de avaliação aparecem. Ao observá-lo vemos que as coleções 6 e 7 apresentam o maior número de critérios analisados. São coleções que apresentam Construções Geométricas integradas ao conteúdo de Geometria em todos os livros da coleção, o que reflete também nas atividades propostas ao aluno. Oferecem ao professor a utilização dos instrumentos de desenho régua e compasso não só como complemento na resolução, mas como um recurso na aprendizagem de conceitos geométricos.

Os critérios A (aparecimento do termo construções geométricas no índice) e C (construção realizada com régua e compasso) se fizeram presentes em mais da metade das coleções o que pode indicar um início de volta das construções geométricas aos livros didáticos.

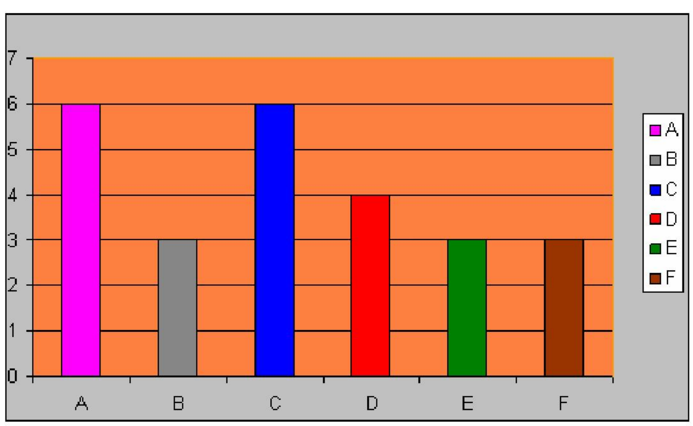


GRÁFICO 2 - Frequência dos critérios de análise nos livros didáticos

Mas, observando no Graf. 2 podemos notar que poucas coleções apresentam o critério E, atividades que incentivem o uso de régua e compasso para justificar um conceito. Ou seja, mesmo apresentando construções, essas ainda não são trabalhadas nas atividades, ou seja, somente têm a função, muitas vezes, de ilustrar o conteúdo apresentado.

Apresentaremos a seguir as duas coleções analisadas detalhadamente utilizando critérios direcionados para a argumentação e Construções Geométricas.

3.3 Duas coleções utilizadas por algumas escolas da rede de ensino na cidade de Aquidauana/MS

Analisamos duas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental. A 1ª coleção foi escolhida por ser a utilizada pela maioria das escolas da rede pública do município de Aquidauana/MS. A segunda coleção escolhida é a utilizada na escola, da rede particular de ensino, em que esta pesquisa foi realizada. Cabe salientar que ela não consta no Guia PNLD/2008, ou seja, foi reprovada na avaliação. Assim, as 2 coleções que analisaremos agora são:

- Matemática, pensar e descobrir: novo/ Giovanni & Giovanni Jr. – São Paulo: FTD, 2000.
- Novo Praticando Matemática. Álvaro Andrini e Maria José Couto de V. Zampirolo – São Paulo – Editora do Brasil, 2007.

Para realizar a investigação sobre o conteúdo, sentimos a necessidade de estabelecer alguns critérios de análise, que são os seguintes:

QUADRO 3: Critérios de análise de livros didáticos

Critério A	Verificar se a Geometria apresentada está articulada aos outros conteúdos de Matemática (Álgebra e Aritmética).
Critério B	Investigar se as Construções Geométricas aparecem na abordagem da Geometria Plana no Ensino Fundamental.
Critério C	Verificar se, ao aparecer o critério B, é estabelecido uma relação entre essas construções e as propriedades geométricas apresentadas nos conceitos envolvidos nesta abordagem;
Critério D	Verificar se os exercícios apresentados possibilitam o uso de Construções Geométricas utilizando o critério C.

Ao observarmos e comprovarmos a existência do critério **A** na coleção poderemos observar uma das metodologias apresentada pelo PCN. Esse fato não nos garante a integração das construções geométricas à Geometria, mas pode facilitar a sua inclusão de forma significativa e não apenas como receituários.

Já o critério **B** tem como objetivo verificar como as Construções Geométricas aparecem nestas coleções. Se esta integração é recorrente aparecendo na introdução de conteúdos geométricos oferecendo ao professor a oportunidade de ministrar aulas em que tal utilização possa ser considerada um recurso na aquisição de conhecimento.

O critério **C** é um complemento do critério **B,** e busca verificar se, ao utilizar os instrumentos de desenho é estabelecida uma relação entre os conceitos envolvidos na construção e as justificativas geométricas, representando um acréscimo no desenvolvimento do aprendizado.

Finalmente, o critério **D** investiga as atividades envolvendo Construções Geométricas, propostas pelas coleções, se estas representam uma contribuição no processo de argumentação.

3.3.1 Coleção 1: Matemática, Pensar e Descobrir: Novo/ Giovanni & Giovanni Jr. – São Paulo: FTD, 2000.

A obra é apresentada em quatro volumes, destinada aos alunos do 6° ao 9° ano do Ensino Fundamental.

Esta coleção é utilizada na escola, da rede privada da cidade de Aquidauana/MS na qual nossa pesquisa foi realizada. Cabe lembrar que nesta escola existem aulas de Matemática e Geometria em horários diferentes ministradas por professores distintos. A escolha do livro didático, que nesta escola é trocado a cada quatro anos, é feita em conjunto com os professores das disciplinas de Matemática e Geometria.

Neste Livro os capítulos relacionados à Geometria são divididos em: *Tópicos de Geometria*, nome dado aos capítulos de Geometria. Os autores desta coleção afirmam, no manual do professor, desenvolver os conteúdos geométricos em paralelo a outros temas. Porém, ao analisarmos o livro verificamos que a denominação “paralela” utilizada pelos autores significa um uso em conjunto, articulado a outros campos matemáticos. Contudo a articulação proposta não fica clara na apresentação dos conteúdos, no livro didático.

Sendo assim, parece que o critério A não é contemplado totalmente, pois os Tópicos de Geometria não apresentam, em nenhum momento, articulação com outros conteúdos matemáticos. Mas podemos observar que alguns conteúdos de Geometria aparecem em capítulo não específico desse tema o que sugere um embrião de articulação entre os campos.

Quando surgem alguns indícios de construção, como bissetriz, podemos observar que algumas atividades estipuladas e executadas pelo autor mostram o uso da régua e do compasso, mas não aparecem nas atividades propostas ao aluno. Tampouco é justificado seu uso pelos autores que não o relacionam ao conteúdo de Geometria, sem explorar propriedades, lugares geométricos ou justificar sua construção.

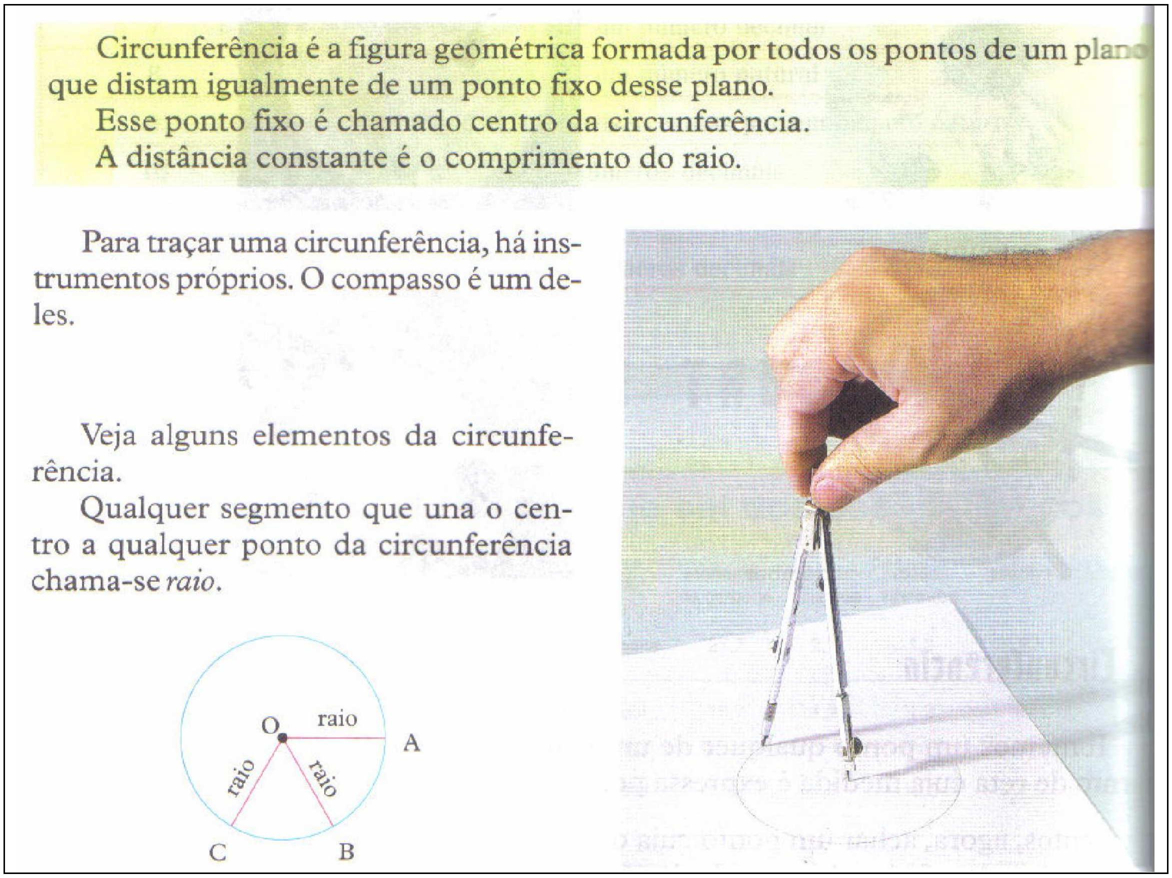
Podemos então afirmar que os critérios B e C não se fizeram presentes o que acarreta consequentemente, o não comparecimento do critério D.

A seguir apresentamos cada um dos livros que compõem a coleção.

3.3.1.1 6º ano do Ensino Fundamental

O conteúdo de Geometria está em uma sequência lógica de aprendizagem em que o conteúdo anterior serve de requisito para o conteúdo posterior. Entretanto, o conteúdo geométrico não acompanha o conteúdo algébrico e nem mesmo o aritmético, ou seja, os vários campos do conhecimento matemático não estão articulados.

As atividades iniciais são apresentadas em forma de questionários do tipo: *O planeta Terra sugere qual figura espacial?* (GIOVANNI, volume 1, p.38). Essas questões servem para inserir o uso de alguns instrumentos euclidianos tais como a régua, o compasso e o esquadro, para executar traçados de retas e de algumas figuras planas; uma inserção sem a preocupação com a construção. O livro não faz referência a Construções Geométricas e não se preocupa em explorar as propriedades geométricas decorrentes do conceito apresentado, prendendo-se a definições sem justificativas, o que pode ser percebido quando utiliza o compasso para desenhar uma circunferência.


Circunferência é a figura geométrica formada por todos os pontos de um plano que distam igualmente de um ponto fixo desse plano.

Esse ponto fixo é chamado centro da circunferência.

A distância constante é o comprimento do raio.

Para traçar uma circunferência, há instrumentos próprios. O compasso é um deles.

Veja alguns elementos da circunferência.

Qualquer segmento que una o centro a qualquer ponto da circunferência chama-se *raio*.

FIGURA 2 - Desenhando uma circunferência
Fonte: Giovanni & Giovanni Jr., Matemática pensar e descobrir: novo/ São Paulo: FTD, 2000, volume 1, p.262

Quando inicia o conteúdo de ângulos utiliza dobradura e transferidor na explicação do conteúdo, mas isso não acontece nos exercícios o que pode ser notado também ao propor o uso do compasso. Os triângulos são mencionados nesse volume, assim como outras figuras planas, mas não ligados às Construções Geométricas. Os triângulos vêm todos prontos e não oferecem, nem ao professor nem ao aluno, a possibilidade de construção.

3.3.1.2. 7º ano do Ensino Fundamental

Neste volume são apresentadas diversas definições geométricas como de ângulos, triângulos, quadriláteros e circunferência, na tentativa de explorar alguns desses conceitos. Na primeira parte apresentada nos *Tópicos de Geometria*, é possível observar uma atividade de apresentação do conceito de retas perpendiculares com a seguinte atividade:

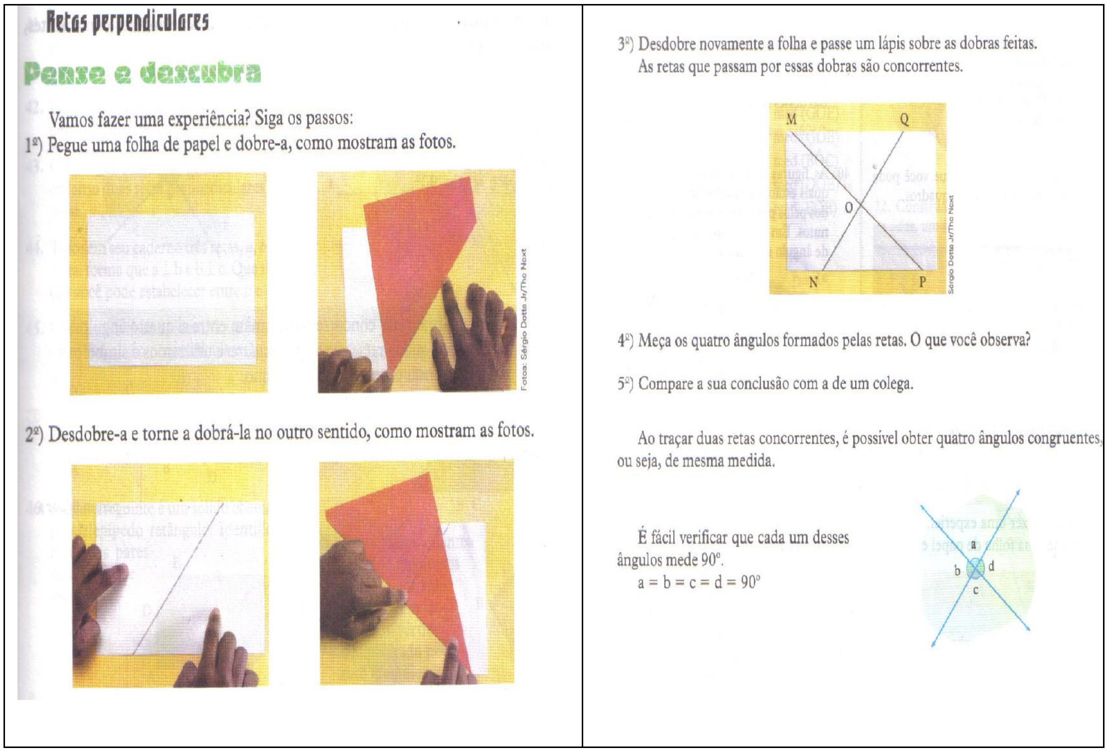
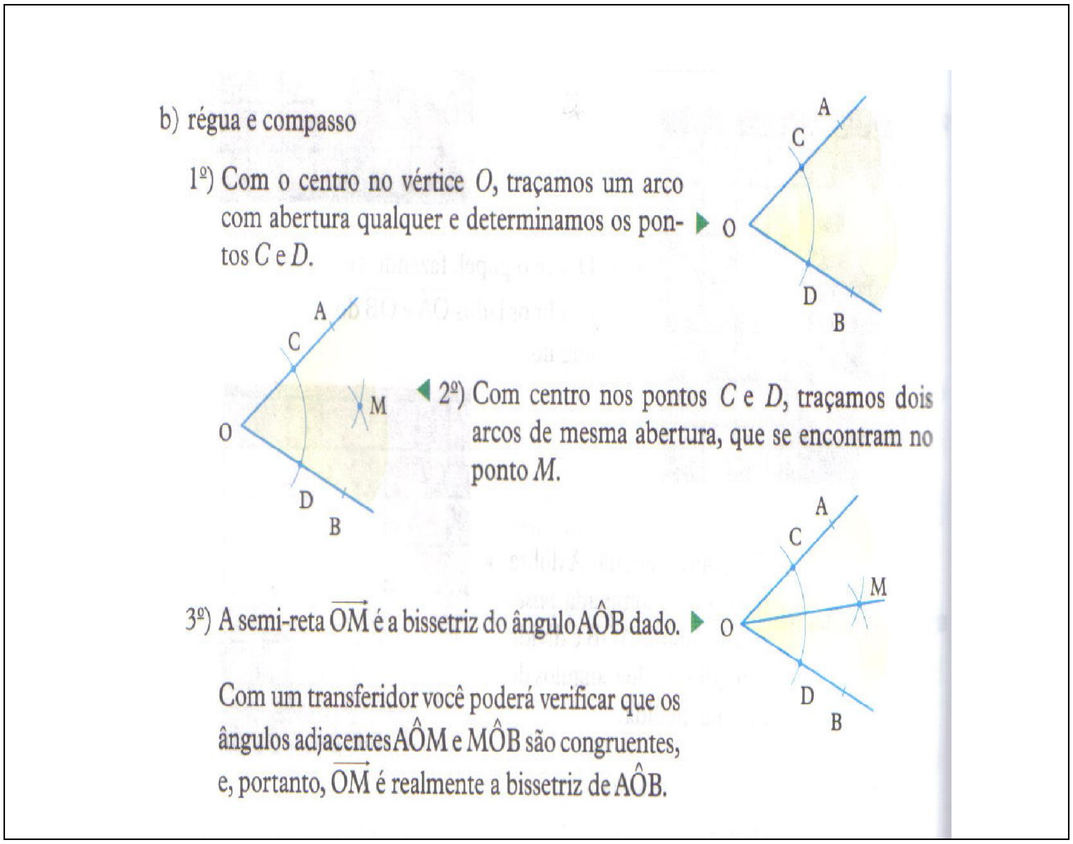


FIGURA 3 - Retas perpendiculares
Fonte: Giovanni & Giovanni Jr., Matemática pensar e descobrir: novo/ São Paulo: FTD, 2000, volume 2, p.41-42.

Como podemos observar, ao discutir com os alunos o conceito de retas perpendiculares, o autor utilizou dobraduras um dos recursos apresentados no Guia do PNLD, mas induz o aluno a pensar em retas concorrentes como sendo sempre perpendiculares, além de não discutir o porquê de essas retas serem perpendiculares.

O que mais se aproxima da utilização de uma construção é a bissetriz. Essa é definida como sendo “a semi-reta de origem no vértice que determina, com seus lados, dois ângulos adjacentes congruentes” (GIOVANNI, volume 2, p. 143), e é apresentada depois de uma exploração com dobraduras, acompanhada por algumas formas de traçado[17]. Para a utilização desses instrumentos euclidianos são elencados vários passos:

[17] Definiremos nessa pesquisa o termo traçado como um sinônimo do uso de instrumentos euclidianos em uma construção sem justificativas, utilizando o transferidor, a régua e o compasso.


b) régua e compasso

1º) Com o centro no vértice *O*, traçamos um arco com abertura qualquer e determinamos os pontos *C* e *D*.

2º) Com centro nos pontos *C* e *D*, traçamos dois arcos de mesma abertura, que se encontram no ponto *M*.

3º) A semi-reta $\overrightarrow{OM}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{O}B$ dado.

Com um transferidor você poderá verificar que os ângulos adjacentes $A\hat{O}M$ e $M\hat{O}B$ são congruentes, e, portanto, $\overrightarrow{OM}$ é realmente a bissetriz de $A\hat{O}B$.

FIGURA 4 - A utilização da régua e do compasso

Fonte: Giovanni & Giovanni Jr., Matemática pensar e descobrir: novo/ São Paulo: FTD, 2000, volume 2, p. 144

Os alunos poderiam usar os conhecimentos adquiridos durante a construção da figura para explorar o conceito de bissetriz. Essa discussão daria um status de significado legítimo à construção realizada o que não pode ser observado nessa exposição. Logo após definição e construção sem exploração dos conceitos envolvidos são apresentadas 14 atividades para praticar os conhecimentos adquiridos e mais 6 atividades de revisão do conteúdo, que mais uma vez não exploram construções, sendo todos realizados algebricamente. Isso segue uma tendência apresentada por Costa (1998, pp.89-90) onde “[...] o desenho geométrico já havia sido transformado numa coleção de receitas memorizadas, em que muito mal se aproveitava o mérito da prática no manejo dos instrumentos do desenho [...]”.

Neste volume alguns instrumentos de desenho tais como o transferidor, o esquadro e o compasso são utilizados com maior frequência.

3.3.1.3. 8º ano do Ensino Fundamental

Neste volume o autor chama de construção, a realização de desenhos feitos com o esquadro, transferidor ou dobraduras. A exemplo, a construção de retas perpendiculares, feita no volume 2, do 7º ano. Isso nos remete ao fato de que este autor usa o termo construir uma figura diferentemente da definição que exploramos nesse trabalho, nos levando a afirmar que as construções não aparecem. Neste volume é mencionado o encontro das medianas (baricentro), das bissetrizes (incentro) e das alturas (ortocentro) de um triângulo, mas não cita o encontro de suas mediatrizes (circuncentro) e nem diz que esses são os pontos notáveis de um triângulo. "Nos desenhos que aparecem nos livros didáticos há uma série de grafismos que, embora possuindo um significado preciso, tem seu emprego baseado mais numa certa tradição do que numa aprendizagem formal". (PAIS, 1996, p. 69).

O livro não propõe construções desses lugares geométricos, todos são apresentados por meio de desenhos explorando somente a visualização. A figura plana triângulo é apresentada por meio de suas propriedades, sem nenhuma construção referente a ela. Como já foi exposto, mesmo apresentando uma sequência de conteúdos que poderá levar a apresentação de pontos notáveis de um triângulo como sendo o incentro, baricentro e ortocentro, esta apresentação não acontece.

3.3.1.4. 9º ano do Ensino Fundamental

Neste volume não há menção às Construções Geométricas. Os triângulos voltam a aparecer lembrando a apresentação em espiral. Apresenta uma lista com inúmeros exercícios sobre semelhança de triângulos, mas em nenhum momento foi inserido Construções Geométricas.

Podemos então afirmar que os critérios B e C não se fizeram presentes o que acarreta consequentemente, o não comparecimento do critério D.

3.3.2. 2ª Coleção: Novo Praticando Matemática. Álvaro Andrini e Maria José Couto de V. Zampirolo – São Paulo – Editora do Brasil, 2007.

Esta é a coleção utilizada pelas escolas da rede pública estadual na cidade de Aquidauana, que adotam metodologias diferenciadas para o ensino e aprendizagem da Geometria. Em algumas dessas escolas o professor da disciplina de Matemática divide a sua aula em dois momentos já estabelecidos para serem cumpridos ao longo do período escolar, as aulas de Matemática e as de Geometria. Há escolas em que os professores seguem prontamente a ordem a qual são apresentados o conteúdo e há aquelas em que os professores ainda tentam deixar os conteúdos de Geometria para o final do período letivo e muitas vezes acabam por não serem explorados.

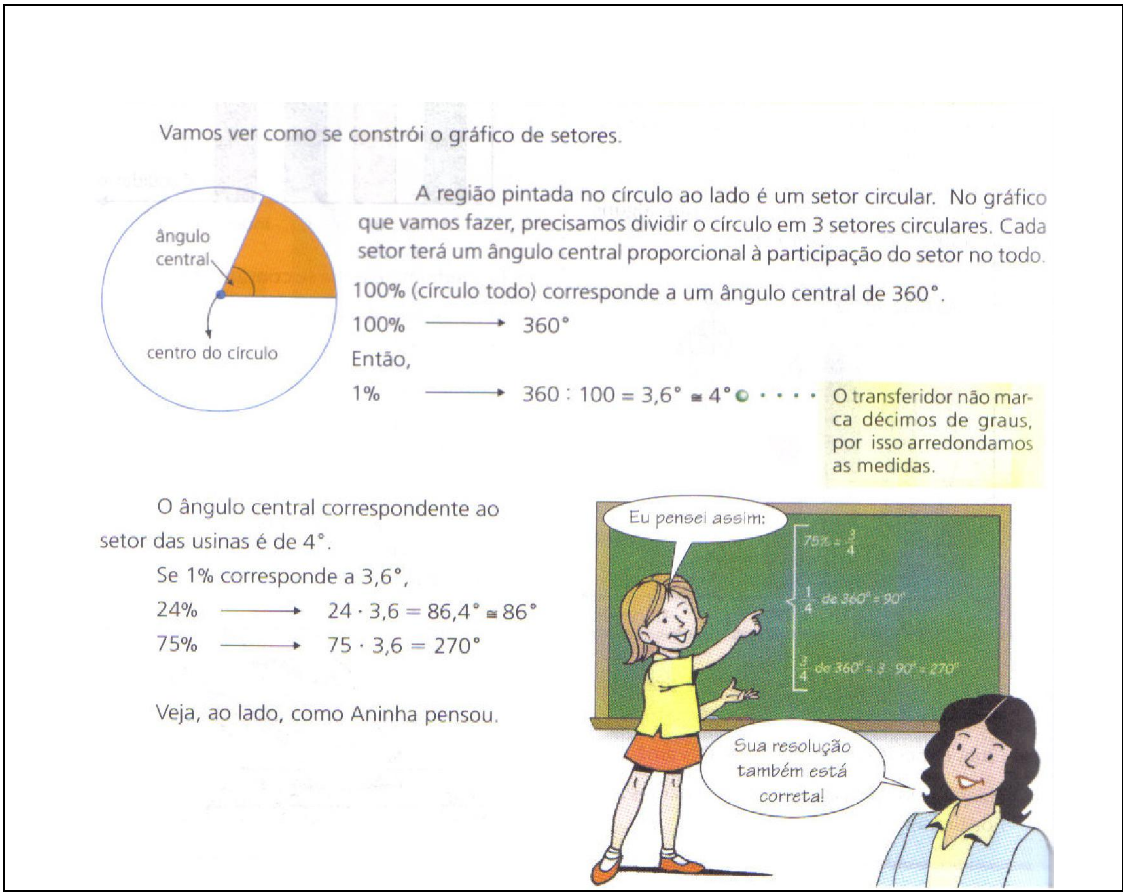
A coleção apresenta a Geometria em blocos que são intercalados e estanques ao longo do livro o que dificulta a sua integração entre os diversos campos. Pudemos comprovar, por meio de conversas informais com alguns professores da rede pública, que a cada três aulas de Matemática uma é destinada à apresentação do conteúdo de Geometria, mas ressaltamos que isto não é a prática de todas as escolas públicas de Aquidauana. A realidade ainda está, em algumas dessas escolas públicas, longe de ser a que os PCN sugerem quando propõem articulação entre tais conteúdos. Contudo, já existe um diferencial em relação há alguns anos, que reduzia o ensino de Matemática à Álgebra e à Aritmética.

3.3.2.1 6º ano do Ensino Fundamental

Este livro é composto por 14 unidades e nas 7 primeiras não encontramos sinais de Construções Geométricas. A partir da unidade 8, quando o conteúdo relacionado à Geometria começa a aparecer, temos, na unidade relacionada a ângulos, exercícios que ensinam o uso correto do esquadro, do transferidor e do compasso. Mas não apresentam indícios de construções utilizando os instrumentos. Nesse livro da coleção os critérios B, C e D não se fizeram presentes.

3.3.2.2 7º ano do Ensino Fundamental

Este volume está dividido em onze unidades. Até a unidade 4 (quatro) os conteúdos recebem tratamento algébrico ou aritmético e não foi possível identificar conceitos geométricos e, consequentemente, construções geométricas. Ao final da unidade 4 os autores fazem menção a uma construção em que utiliza o transferidor; trata-se da construção de um gráfico de setores em que aparentemente são usados alguns conceitos geométricos como: ângulo, ângulo central, setores circulares, vértice e raio.


Vamos ver como se constrói o gráfico de setores.

A região pintada no círculo ao lado é um setor circular. No gráfico que vamos fazer, precisamos dividir o círculo em 3 setores circulares. Cada setor terá um ângulo central proporcional à participação do setor no todo.

100% (círculo todo) corresponde a um ângulo central de 360°.

100% ⟶ 360°

Então,

1% ⟶ 360 : 100 = 3,6° ≅ 4°

O transferidor não marca décimos de graus, por isso arredondamos as medidas.

O ângulo central correspondente ao setor das usinas é de 4°.

Se 1% corresponde a 3,6°,

24% ⟶ 24 · 3,6 = 86,4° ≅ 86°

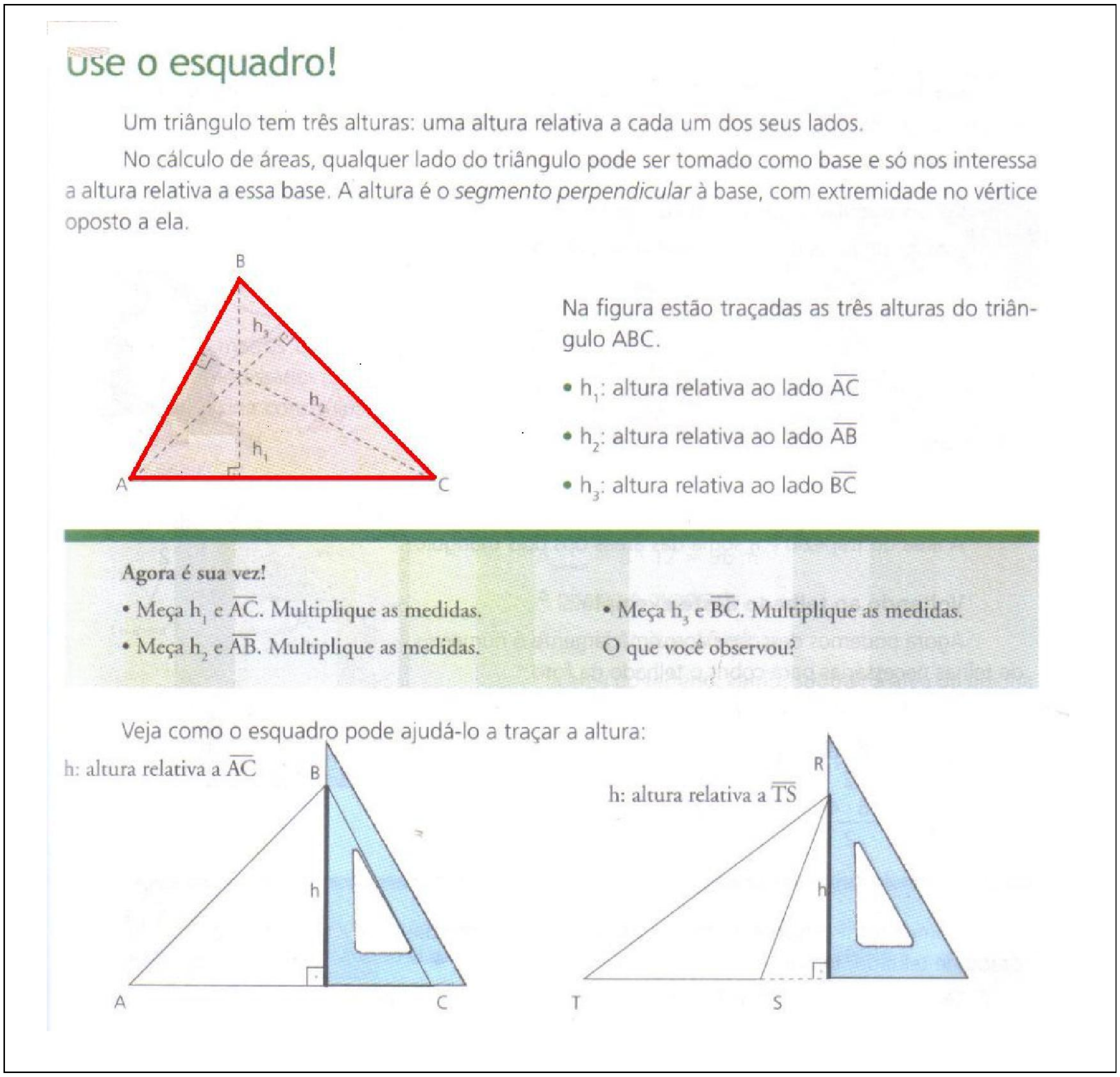
75% ⟶ 75 · 3,6 = 270°

Veja, ao lado, como Aninha pensou.

FIGURA 5 - O uso do transferidor
Fonte: Andrini e Vasconcelos. Novo Praticando Matemática. São Paulo: Editora do Brasil FTD, 2000, volume 2, p. 66.

Na sequência da explanação do conteúdo de gráficos os autores apresentam aos alunos uma sequência de passos para a utilização do compasso e transferidor, ferramentas de instrumentação do aluno. Não estamos avaliando a utilização feita nessa apresentação e sim em como são as atividades em que são apresentados os instrumentos de desenho.

Ao entrar na unidade 6 (seis), em que o conteúdo matemático destina-se ao trabalho com áreas e volumes, começamos a observar a Geometria mais presente: áreas, volumes, medidas de comprimento, ângulos. Neste livro da coleção, não aparecem as Construções Geométricas e quando citadas não se referem ao que denominamos construções. O uso de instrumentos de desenho se restringe ao esquadro e ao transferidor como no exemplo a seguir:



Use o esquadro!

Um triângulo tem três alturas: uma altura relativa a cada um dos seus lados.

No cálculo de áreas, qualquer lado do triângulo pode ser tomado como base e só nos interessa a altura relativa a essa base. A altura é o *segmento perpendicular* à base, com extremidade no vértice oposto a ela.

Na figura estão traçadas as três alturas do triângulo ABC.

- h_1: altura relativa ao lado $\overline{AC}$
- h_2: altura relativa ao lado $\overline{AB}$
- h_3: altura relativa ao lado $\overline{BC}$

Agora é sua vez!

- Meça h_1 e $\overline{AC}$. Multiplique as medidas.
- Meça h_2 e $\overline{AB}$. Multiplique as medidas.
- Meça h_3 e $\overline{BC}$. Multiplique as medidas.

O que você observou?

Veja como o esquadro pode ajudá-lo a traçar a altura:

h: altura relativa a $\overline{AC}$

h: altura relativa a $\overline{TS}$

FIGURA 6 - O uso do esquadro para desenhar as alturas de um triângulo
Fonte: Andrini e Vasconcelos. Novo Praticando Matemática. São Paulo: Editora do Brasil FTD, 2000, volume 2, p.145

3.3.2.3. 8º ano do Ensino Fundamental

A Geometria em raros momentos pode ser observada na primeira metade do livro, mas é na unidade 5 - Produtos Notáveis e Fatoração que podemos encontrar o conteúdo geométrico aliado ao conteúdo algébrico e aritmético como podemos observar na Fig. 7.

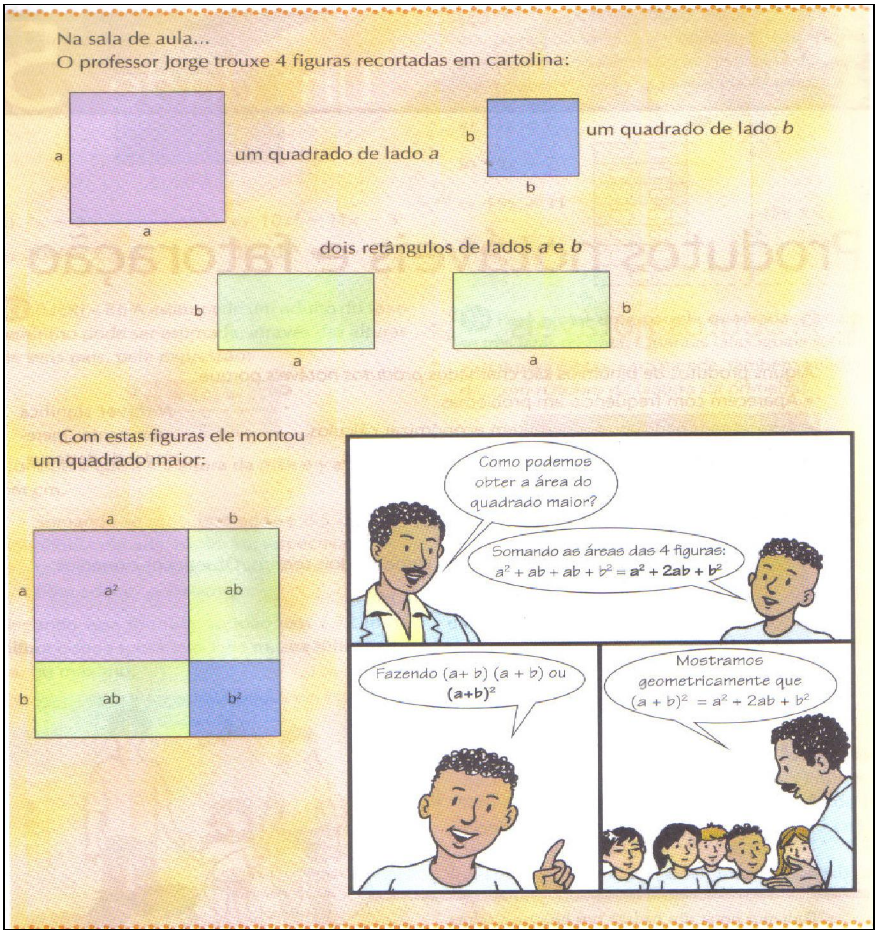


FIGURA 7 - Quadrado da soma de dois termos
Fonte: Andrini e Vasconcelos. Novo Praticando Matemática. São Paulo: Editora do Brasil FTD, 2000, volume 3, p.100.

Essas explanações podem ser observadas em toda a unidade 5 desse volume da coleção. Também é possível observar alguns exercícios onde a integração entre Álgebra e Aritmética é clara, o que contempla, parcialmente, o critério A da análise.

Porém, em nenhuma unidade deste volume da coleção é possível encontrar conteúdos, atividades ou mesmo curiosidades que levem às Construções Geométricas, quer aliadas à Geometria ou simplesmente como um recurso didático. Os critérios B, C e D não foram constatados.

3.3.2.4. 9º ano do Ensino Fundamental

Este livro da coleção contém 9 unidades, sendo que as de Geometria estão dispostas nas últimas unidades do livro. Ao tratar de equações do 2º grau utiliza na apresentação do trinômio quadrado perfeito uma pequena demonstração geométrica, como se observa na figura:

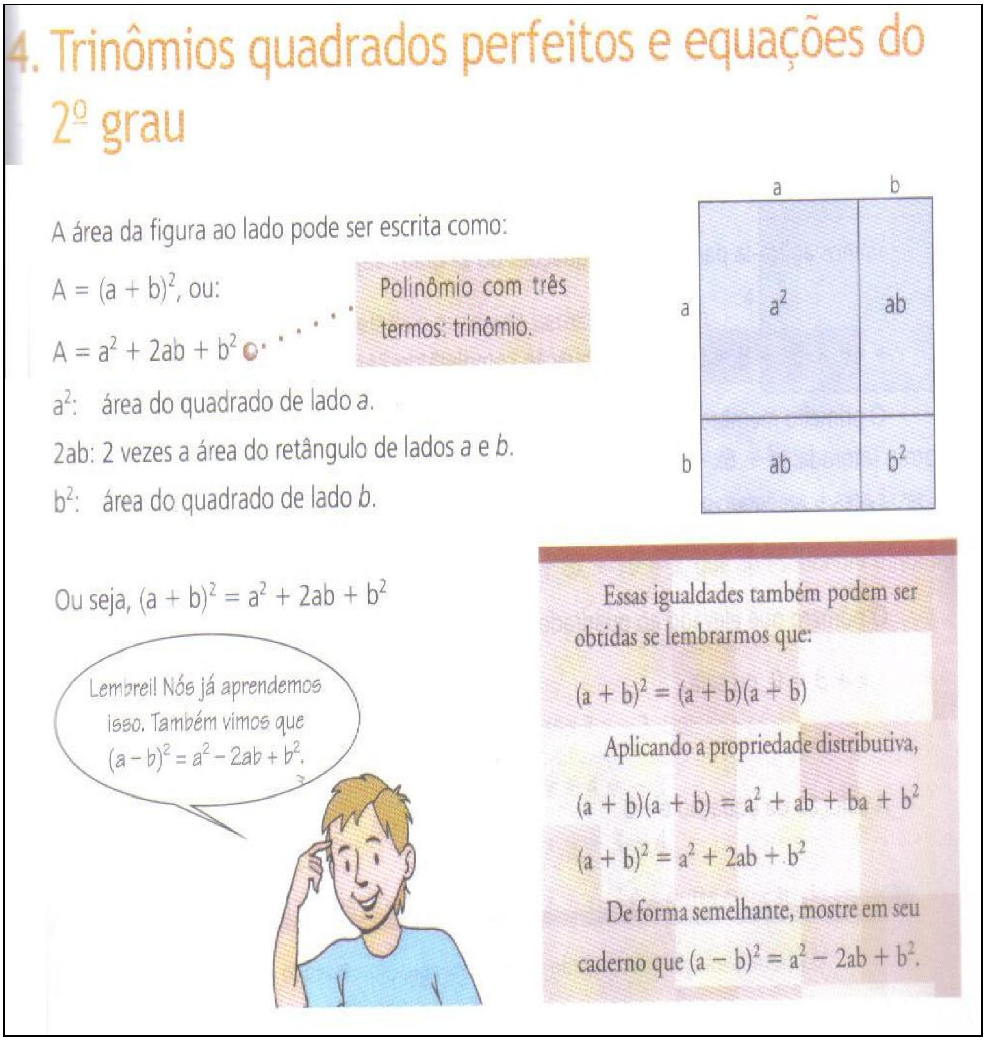
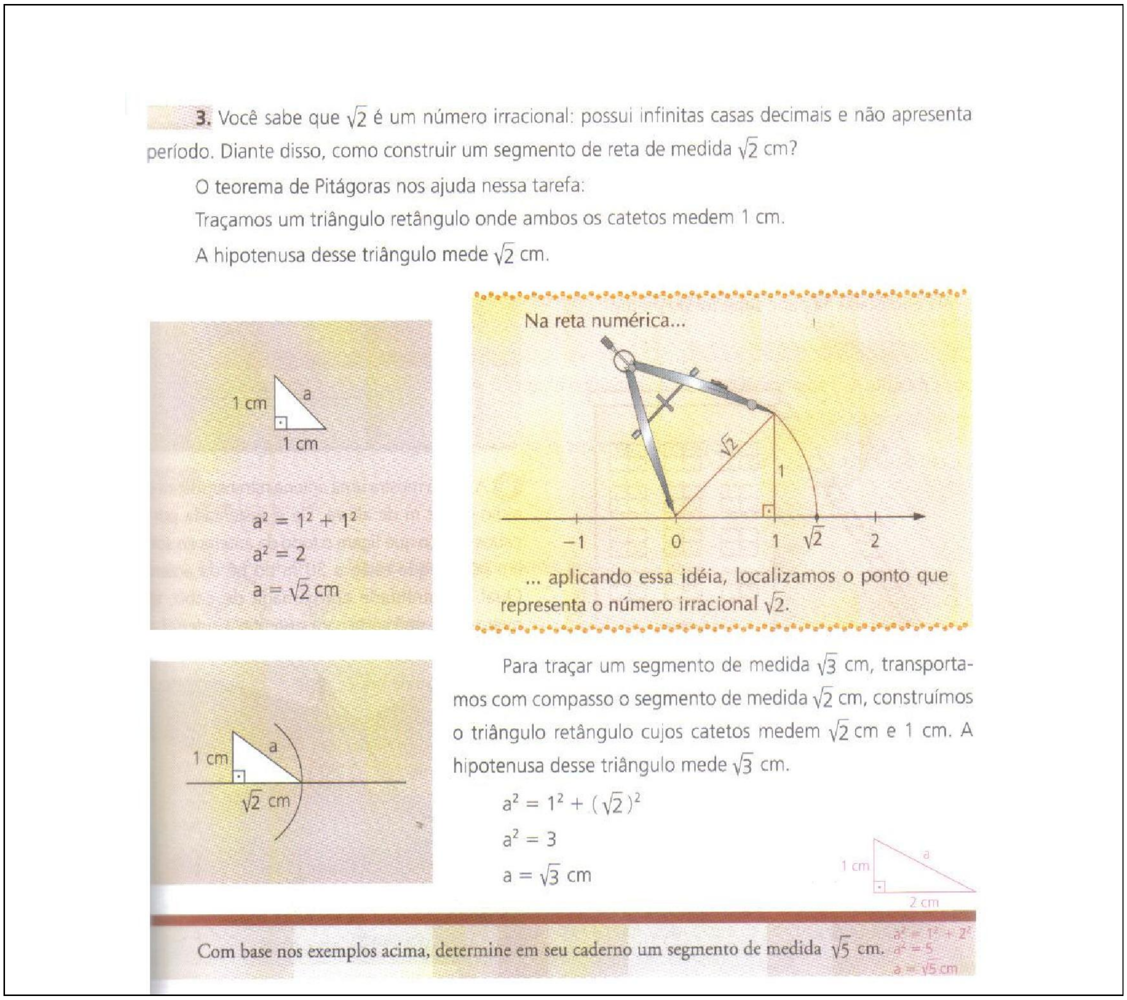


FIGURA 8 - Demonstração geométrica do trinômio quadrado perfeito
Fonte: Andrini e Vasconcelos. Novo Praticando Matemática. São Paulo: Editora do Brasil FTD, 2000, volume 2, p.145.

Essas pequenas exposições permeiam toda a unidade, o que contempla o critério A. Na segunda metade do livro é possível encontrar conteúdos geométricos em todas as unidades: congruência e semelhança de figuras, relações métricas, trigonometria no triângulo retângulo, entre outros. Os critérios B e C são esporadicamente apresentados. O autor, ainda nessas unidades, remete ao uso do esquadro e transferidor para falar sobre ângulos e triângulos, mas encontramos na unidade referente às relações métricas no triângulo retângulo, particularmente sobre o Teorema de Pitágoras, um exemplo em que é possível observar procedimentos de construção com o uso da régua e do compasso.



3. Você sabe que $\sqrt{2}$ é um número irracional: possui infinitas casas decimais e não apresenta período. Diante disso, como construir um segmento de reta de medida $\sqrt{2}$ cm?

O teorema de Pitágoras nos ajuda nessa tarefa:

Traçamos um triângulo retângulo onde ambos os catetos medem 1 cm.

A hipotenusa desse triângulo mede $\sqrt{2}$ cm.

$a^2 = 1^2 + 1^2$

$a^2 = 2$

$a = \sqrt{2}$ cm

Na reta numérica...

... aplicando essa idéia, localizamos o ponto que representa o número irracional $\sqrt{2}$.

Para traçar um segmento de medida $\sqrt{3}$ cm, transportamos com compasso o segmento de medida $\sqrt{2}$ cm, construímos o triângulo retângulo cujos catetos medem $\sqrt{2}$ cm e 1 cm. A hipotenusa desse triângulo mede $\sqrt{3}$ cm.

$a^2 = 1^2 + (\sqrt{2})^2$

$a^2 = 3$

$a = \sqrt{3}$ cm

Com base nos exemplos acima, determine em seu caderno um segmento de medida $\sqrt{5}$ cm.

FIGURA 9 – Demonstração utilizando um compasso.

Fonte: Andrini e Vasconcelos. Novo Praticando Matemática. São Paulo: Editora do Brasil FTD, 2000, volume 2, p.145.

Esta é uma proposta do uso de Construções Geométricas que aparece nesse livro, não se diferenciando das atividades da primeira coleção analisada. O critério D não foi observado.

3.3.3. SÍNTESE

As duas coleções apresentam a Geometria, muitas vezes, desarticulada[18] dos vários campos da Matemática. Segundo o Guia do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD/2008), a coleção *Novo Praticando Matemática* caracteriza-se por concentrar os campos matemáticos por série, dando ênfase a Números e Operações, no volume do 6º ano. Além disso, a distribuição dos campos, em cada volume, dificulta a integração entre eles.

[18] Contrariando os Parâmetros Curriculares Nacionais que visa “estabelecer inter-relações entre os conteúdos utilizando o conhecimento matemático (aritmético, geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico)” (BRASIL, 1997, pág. 48).

(BRASIL, 2008, p. 80). Já na coleção *Matemática Pensar e Descobrir* a Geometria é apresentada em tópicos que remetem ao seu ensino naquele determinado capítulo sem conexões com outros conteúdos apresentados.

No quadro a seguir é possível ter melhor compreensão quanto às coleções e o aparecimento dos critérios de avaliação referente às Construções Geométricas.

TABELA 1 – Um resumo da frequência dos critérios de avaliação

CRITÉRIO		**A**	**B**	**C**	**D**
COLEÇÕES	Novo Praticando Matemática	Poucas articulações	Raras abordagens	Raras abordagens	inexistente
	Matemática Pensar e Descobrir	Raras articulações	inexistente	inexistente	inexistente

A coleção *Novo Praticando Matemática* privilegia, majoritariamente, o conteúdo algébrico fazendo pouca alusão à articulação desse saber com outros campos da Matemática. Essa articulação acontece ao introduzir conteúdos como áreas e volumes onde as construções de figuras remetem as construções geométricas e, também, produtos notáveis em que a Geometria, por meio do conceito de área, é utilizada para ilustrar a regra, o que tem sido uma tendência nas coleções de livros didáticos.

O critério A não foi contemplado no seu real significado ficando restrito ao campo da Álgebra, já os critérios B e C puderam ser observados permeando os quatro livros da coleção, mas em nenhum deles pudemos constatar uma regularidade ou ainda, conexão, integração das Construções Geométricas ao ensino de Geometria. Temos as Construções Geométricas com pouco destaque nesta coleção.

Observamos nas duas coleções que algumas atividades são privilegiadas com o uso de instrumentos como régua e compasso e outros instrumento de desenho, mas estas não se integram favorecendo a aprendizagem de Geometria o que para nós não contribui para a apropriação do saber matemático o que torna as construções um recurso didático para tornar as aulas mais descontraídas, sendo assim sentimos a ausência do critério D.

Quando surgem alguns indícios de Construções Geométricas, como bissetriz, observamos que algumas atividades propostas e executadas pelos autores mostram o uso da régua e do compasso, já que as duas coleções inserem o uso de alguns instrumentos euclidianos tais como a régua, o compasso e o esquadro, para executar traçados de retas e de algumas figuras planas. Entretanto essa inserção não foi observada nas atividades propostas ao aluno no livro em questão, nem tampouco seu uso é justificado pelos autores que não o relacionam ao conteúdo de Geometria, explorando propriedades, lugares geométricos ou justificando sua construção.

Quando se inicia o conteúdo de ângulos no livro do 6º ano do Ensino Fundamental, Giovanni (2000), utiliza dobraduras e transferidor na explicação do conteúdo, mas isso não acontece nos exercícios o que pode ser notado também ao propor o uso do compasso. Os triângulos são mencionados nesta série assim como outras figuras planas, mas não usando as Construções Geométricas. Os triângulos vêm todos prontos e utilizando uma única configuração geométrica[19] não oferecendo, nem ao professor nem ao aluno, a possibilidade da construção.

Contudo, apesar das coleções apresentarem uma separação dos conteúdos, os autores afirmam nos manuais do professor que desenvolvem os conteúdos geométricos em paralelo a outros temas.

As duas coleções não apresentam as Construções Geométricas de modo a contribuir, efetivamente, com a argumentação do conhecimento geométrico, uma vez que não há reflexão sobre as construções geométricas. É exatamente isso que propomos em nossa sequência didática: atividades de Geometria que pedem ao aluno para realizar construções geométricas e, em seguida, validar o procedimento realizado. Na validação desse procedimento o aluno deverá fazer uso de seus conhecimentos geométricos desenvolvendo a argumentação.

[19] Desenhos que aparecem frequentemente no ensino de Geometria, chamados assim por Gerard Audibert (1990). (In PAIS, 2006, pág.111).

CAPÍTULO 4

A CONSTRUÇÃO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.

Nesse capítulo apresentamos a elaboração de uma sequência didática envolvendo pontos notáveis de um triângulo. A Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988) nos forneceu subsídios para a elaboração da sequência didática, por meio de estudo preliminar das construções geométricas nos livros didáticos a partir do Movimento da Matemática Moderna, e organização desta sequência. Essa também foi à metodologia utilizada para analisar os dados coletados após a aplicação, juntamente com a Tipologia de Provas (BALACHEFF, 1988) que permite estudar e classificar as validações dos alunos em quatro tipos distintos.

Depois de realizada a primeira fase da engenharia – a análise preliminar – começamos a segunda fase a qual será iniciada com o estudo das variáveis didáticas.

4.1 As Variáveis Didáticas em foco

> Nesta segunda fase, o investigador toma a decisão de agir sobre diversas variáveis do sistema não fixadas pelos sujeitos: variáveis de comando são variáveis relevantes do problema estudado. Parece-nos útil, para facilitar a análise de uma engenharia, distinguir dois tipos de variáveis de comando: As variáveis macro-didáticas ou globais que se referem à organização global da engenharia; E as variáveis micro-didáticas ou locais que se referem organização local da engenharia, ou seja, a organização de uma sessão ou uma fase, [...] variáveis de ordem geral ou as variáveis dependentes do conteúdo didático incluindo o ensino visado. [...] essa distinção é clássica pois, distingue as variáveis ditas do problema das variáveis ditas de situação ligadas à organização e à GESTÃO do MEIO (BROUSSEAU, apud ARTIGUE, 1988, pp. 291-292. Tradução nossa)

Explicitaremos as variáveis didáticas em jogo, nesta pesquisa, que envolvem os conceitos geométricos explorados a partir das situações envolvendo Construções Geométricas. Discutiremos neste tópico, a partir da fundamentação teórica, a importância dessas variáveis no desenvolver da atividade, que podem influenciar pela sua escolha, as estratégias desenvolvidas para a resolução.

4.1.1 Variável de situação 1: O *software* Cabri-Géomètre.

Esta primeira variável refere-se ao ambiente em que será aplicada a sequência. Os *software*s de Geometria Dinâmica, segundo Baldin,

> [...] possuem qualidades como de visualização e de tela interativa para explorar propriedades geométricas, podem ser utilizados, com eficiência, como auxiliar na construção do raciocínio dedutivo e de capacidade especulativa, podem ser auxiliares na modelagem de problemas com simulações, etc. (BALDIN, 2002, p. 32).

Para Isotani e Brandão (2006, p.121)

> [...] um programa de GD possibilita, a partir de uma única construção, efetuar um número arbitrário de testes, o que seria praticamente impossível com régua e em função desta possibilidade de alterar objetos preservando-se a construção, podemos dizer que a GD é uma geometria do tipo 1-construção, N-testes, enquanto a tradicional de régua e compasso é do tipo 1-construção, 1-teste o que seria praticamente impossível com régua e compasso.

Não nos remeteremos na discussão das vantagens e desvantagens da Geometria Dinâmica no processo de aprendizagem, pois esse não representa um dos objetivos da pesquisa. O nosso interesse se volta para as argumentações produzidas pelos alunos após o uso de *softwares* de Geometria Dinâmica, em particular do Cabri-Géomètre.

A escolha desse *software* se justifica por esse apresentar a visualização da construção dos conceitos geométricos apresentados, o que pode tornar mais fácil o diagnóstico, por parte do aluno, do erro cometido e a possibilidade de revê-los e corrigi-los. Consideramos essa uma variável, pois poderá mudar a estratégia utilizada pelo aluno corroborando com Bellemain (2005) “com o *software* Cabri-Géomètre outras formas de pensar são exploradas”. Araújo (2007, p.15), por meio dos resultados obtidos em sua pesquisa, aponta “que o Cabri-Géomètre é bastante sugestivo aos aprendizes no sentido de que tende a facilitar verificações empíricas de propriedades geométricas nas figuras [...]”.

No entanto isto não garante que as atividades desenvolvidas neste ambiente podem se tornar mais fáceis ou mais produtivas. Levamos em conta a dificuldade que alguns alunos podem ter no manuseio do mouse e também no uso dos comandos corretamente, para que não seja comprometido o resultado de cada atividade da sequência.

4.1.2 Variável de situação 2: A régua e o compasso

O uso da régua e compasso não exclui o uso do *software* “ficando a critério do professor utilizar o material que for mais acessível aos seus alunos, sendo que o uso de ambos os instrumentos não são excludentes, e sim complementares.” (BORGES NETO, 2003, p. 16).

Ainda, segundo Borges Neto (2003, p. 16) “no trabalho com régua e compasso, poderão surgir pequenos erros nas construções, tendo em vista que o material oferecido pelo mercado não oferece uma precisão tão exata e nossa coordenação motora pode também ser falha [...]”. Inferimos que esta variável pode mudar a estratégia de resolução da atividade pelo aluno, podendo, além das dificuldades já descritas, influenciar também no tempo de resolução da atividade. A manipulação dos instrumentos não será contabilizada na resolução, ou seja, não avaliaremos nessa pesquisa a “espontaneidade da representação de idéias que auxiliam na organização de estratégias” (BELLEMAIN, 2005, p.5) provenientes do traçado a mão livre ou com o uso de instrumentos de desenho. Não julgaremos, portanto, as condições de uso dos instrumentos como certa ou errada. Por esse motivo estaremos, quando necessário, oferecendo ajuda ao aluno na manipulação desses instrumentos.

Segundo Santana (2005) a régua e o compasso podem mediar a formação de noções geométricas novas devido as suas potencialidades. Estas potencialidades serão exploradas nas atividades apresentadas onde o aluno poderá escolher entre as tecnologias disponíveis.

4.1.3. Variável 3: Presença do desenho

Na revista Les Génies de la Science, na matéria “Léonard da Vinci Artiste et scientifique”, encontra-se que “A Geometria requer, por natureza, ser ‘visualizada’ (...)” (apud FLORES, 2007, p. 18). Em um problema de Geometria o enunciado pode trazer ou não o desenho, ou ainda solicitar o traçado, a construção da figura, o que segundo Perrota (2001, apud TELES, 2007, p. 129) “pode influenciar os procedimentos adotados pelos alunos dificultando a resolução da atividade”.

Cada uma dessas opções relativas ao desenho, pode apresentar diferentes estratégias por parte do aluno, desde a apresentação do desenho corretamente, como a incapacidade de selecionar, segundo Teles (2007), um conjunto de características pertinentes (necessárias e suficientes) para a sua reprodução. A construção do desenho passa a fazer parte da resolução da atividade e pensamos ser a presença do desenho uma variável decisiva na produção de conhecimento e ainda, uma determinante para a não realização da atividade.

Em uma pesquisa desenvolvida com professores e alunos do Ensino Fundamental em relação ao conteúdo de Geometria, Almouloud et. al (2004, p.), pretendia que as figuras "fornecessem um suporte intuitivo importante na resolução de um problema de geometria, de modo que ampliassem a possibilidade de percepção dos elementos do problema proposto, e ainda permitissem explorar esses elementos, antecipando e conjeturando. Corrobora com a idéia de Duval (1995) "a resolução de problemas de geometria e a utilização do tipo de raciocínio que essa resolução exige dependem da distinção das formas de apreensão da figura".

4.1.4 Variável 4: Posição do desenho

Segundo Gravina (1996, p. 12) "os livros escolares iniciam com definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares. [...] Isto leva os alunos a não reconhecerem desenhos destes mesmos objetos quando em outra situação". Esses casos particulares são assim chamados de figuras prototípicas.

Este elemento segundo Coelho (2007) pode levar o aluno a incapacidade de perceber um desenho de diferentes maneiras o que pode provocar confusão entre a representação externa (apresentação da figura) e o ente geométrico. Baltar (1996) destaca a importância das variáveis ligadas à forma e à posição da figura na construção do conceito de área.

Segundo Santos (2005) durante a investigação da relação da abordagem da área do paralelogramo e os procedimentos utilizados na resolução da atividade, foi possível observar que os alunos desenham sempre o paralelogramo com o lado maior, o qual é chamado de base, na posição horizontal com a altura sempre dentro do desenho.

Os livros didáticos apresentam os triângulos, na maioria das suas ilustrações, como sendo isósceles ou equiláteros, o que, segundo Pais (2006), faz com que essas figuras tenham um conjunto básico de representações. Em nossa sequência usamos triângulos escalenos assim como trabalhamos também com segmentos inclinados contrariando o uso comum dos segmentos verticais e horizontais. Com isso procuramos diminuir alguns obstáculos na aprendizagem de Geometria quando se utiliza as figuras prototípicas.

4.1.5 Variável 5: O enunciado do exercício

Diante das argumentações que devem ser expostas pelos alunos o enunciado do exercício pode interferir não só na resolução, mas também na estratégia argumentativa, ou seja, muitos exercícios trazem junto a seu enunciado um tipo específico de desenho, o que pode segundo Barros (2005) induzir alunos a pensarem de um jeito ou de outro. "O contexto desempenha um papel fundamental na escolha do tipo de interpretação" (LABORDE e CAPONNI, 1994, p.53). Um exemplo seria uma atividade que exija no seu enunciado a construção de um triângulo isósceles; nesse problema o aluno não terá escolha e necessariamente considerará um caso particular o que pode fazer com que sua argumentação recaia em um tipo particular de prova.

4.2 A Sequência Didática

A leitura dos textos oficiais dos programas de Matemática e o encadeamento apresentado por muitos autores de coleções de livros didáticos nos fizeram adotar a seguinte ordem para a elaboração da sequência didática: Segmentos perpendiculares e ponto médio; Lugar Geométrico; mediana; mediatriz; bissetriz; circuncentro; baricentro; incentro; ortocentro.

Optamos por essa sequência, pois, segundo Henriques (1999), os conteúdos prévios são necessários e funcionam como uma revisão de conceitos para estimular a discussão e a argumentação durante as resoluções das atividades. Se fôssemos diretamente ao conteúdo de pontos notáveis do triângulo poderíamos não ter elementos suficientes para uma análise que visava a evolução das argumentações nas atividades que envolviam as construções geométricas. As primeiras sessões apresentadas e analisadas devem servir de apoio e fornecerem elementos de verificação dessa evolução. Não podemos correr o risco de avaliar conceitos aos quais os alunos não tivessem tido acesso anteriormente, o que poderia prejudicar a própria pesquisa.

Na tabela a seguir é feito um resumo de cada sessão. As três primeiras sessões são apresentadas de forma conjunta, pois essas são uma revisão de conceitos básicos necessários à sequência.

QUADRO 4 – Uma síntese dos objetivos da sequência

1ª sessão 2ª sessão 3ª sessão	Atividades visando a familiarização com o *software* e a manipulação da régua e compasso. Os instrumentos serão de livre escolha dos alunos o objetivo dessas sessões é fornecer dados para melhor encaminhamento das sessões posteriores tais como: quais as melhores estratégias para promover as argumentações e como acompanhar os alunos escolhidos em meio a uma sala de 27 alunos. As atividades se assemelham as atividades de sala.
4ª sessão: Construção da mediatriz de um segmento dado**.**	Consideramos ser essa uma sessão importante. Deve-se iniciar um diálogo mais aberto entre a professora/pesquisadora e o aluno, pelo vínculo estabelecido nas sessões anteriores. A partir dessa sessão os alunos podem usar o *software* ou a régua e o compasso e as argumentações poderão se tornar mais frequentes.
5ª sessão: Construção das Bissetrizes	Está prevista uma aula expositiva sobre congruência de triângulos ministrada pela professora da turma, em sala, antes de ser aplicada essa sessão. Um dos objetivos dessa sessão é explorar esse conteúdo, por ser determinante no processo de validação do conceito de bissetriz, podendo colocar o aluno em um dos dois níveis de prova descritos por Balacheff (1988).
6ª sessão: Construir a mediatriz e a bissetriz com o Cabri-Géomètre	Com o objetivo de aplicar um conhecimento adquirido, esta sessão será executada sem intervenção da professora/pesquisadora e com total liberdade dos alunos para expor em grupo os procedimentos utilizados. Nesta sessão não serão apresentadas a análise ***a priori*** por ser essa uma atividade de descontração.
7ª sessão: Construção das alturas	Apresentamos nessa sessão o conceito de altura explorando os diversos tipos de triângulos.
8ª sessão: Ortocentro e Baricentro	Optamos por aplicar uma sessão que unisse o conceito de dois pontos notáveis, o baricentro e o circuncentro. A escolha se deu por que nesta sessão a intenção é observar as argumentações utilizadas com o uso do *software*.
9ª sessão Incentro e Circuncentro	As atividades, nessa sessão, envolvem muitos dos conceitos geométricos já apresentados. Ao contrário das outras sessões, onde apresentamos atividades de construção com procedimentos a serem seguidos, aqui não mais utilizaremos esse recurso.
10ª sessão Os pontos notáveis do triângulo	Esta sessão institucionaliza todos os conhecimentos apresentados nas sessões anteriores e deve ser realizada individualmente. Nessa sessão optamos por acompanhar individualmente os alunos avaliando cada atividade proposta. O aluno poderá escolher o ambiente em que realizará as atividades.

A sequência didática foi elaborada, portanto, com 10 sessões, cada uma com, aproximadamente, 60 minutos e um número de atividades que variam de 3 a 6, realizadas em algumas vezes nos dois ambientes, lápis e papel e com o auxílio do *software* Cabri- Géomètre e outras somente em um deles. Acreditamos que diferentes contextos levam a uma melhor assimilação de conteúdo concordando assim com Henriques (2001) e Bittar (2005) que nos dizem que a tecnologia digital deve estar aliada à não digital.

Para Bittar et al (2005, p. 78) “é importante desenvolver materiais e estratégias de ensino que dêem ao aluno maior controle sobre suas atividades, o que é fundamental para que ele se torne co-responsável por sua aprendizagem”.

Nas três sessões iniciais optamos por apresentar conceitos já vistos pelos alunos em séries anteriores, pois assim temos condições de melhor organizar as próximas sessões e familiarizar os alunos com o *software*, a ideia de construções e também relembrar conceitos fundamentais para o que vai ser trabalhado. Escolhemos então os conceitos de ponto médio, reta perpendicular, lugar geométrico e mediana.

Na sessão 2 apresentamos o conceito de Lugar Geométrico, que é um conceito novo para os alunos. Utilizamos o conceito discutido por Rezende e Queiroz (2000, p. 189):

> Uma figura recebe o nome de lugar geométrico dos pontos que possuem uma propriedade P quando:
> a) Todos os seus pontos satisfazem a propriedade P;
> b) Somente os pontos dessa figura satisfazem a propriedade P, isto é, se um ponto A possui a propriedade P, então pertence à figura.

Optamos por apresentá-lo, pois, segundo Almeida (2007), o processo de construção da figura se torna mais significativo, ou seja, a figura deixa de ser um conjunto de passos ou etapas de um traçado específico e passa a ser um conjunto de propriedades que a individualiza.

A partir dessas sessões, as outras tratam, respectivamente, da construção de bissetriz, mediatriz, altura e os pontos notáveis do triângulo, conteúdo não conhecido dos alunos e que quando possível serão tratados como lugares geométricos. Cada uma dessas sessões é desenvolvida em quatro fases:

1ª fase: construção da figura que representa o objeto matemático, tema da sessão.

Pede-se, por exemplo, a construção da mediatriz apresentando-se a sequência de passos necessários à mesma.

2ª fase: exploração dos conceitos envolvidos na construção e justificativa da construção.

Neste momento o aluno desenvolve e apresenta soluções individuais ou em grupo que poderão, segundo Corredor e Calderón (2001), se converter em argumentos iniciais, que podem ou não serem classificados em um dos quatro níveis de prova proposto por Balacheff. É a fase de discussões no grupo de trabalho, acertos e argumentações que convençam o grupo a aceitar a resposta. Segundo Margolinas (1993) representa uma situação de ação.

3ª fase: exploração das propriedades do objeto matemático.

Segundo os PCN (1988, p. 125)

> Quando os alunos têm de representar um objeto geométrico por meio de um desenho, buscam uma relação entre a representação do objeto e suas propriedades e organizam o conjunto do desenho de uma maneira compatível com a imagem mental global que têm do objeto.

Na busca dessa relação poderão fornecer dados para a apropriação das propriedades inerentes a figura construída o que Laborde e Capponi (1994) explicam como sendo a interação.

Ressaltamos que a construção apresentada na realização da atividade nos levará a restringir os níveis de prova descritos por Balacheff. As figuras utilizadas nessas atividades farão com que o aluno chegue, no máximo, ao exemplo genérico mesmo quando no uso de termos que lembrem uma demonstração e que façam lembrar a experiência mental o aluno ainda estará utilizando uma figura o que descarta, segundo Balacheff, a possibilidade do aluno chegar ao último nível de prova. Esse fato se tornará mais forte quando o aluno utilizar o Cabri-Géomètre, pois para validar seu objeto geométrico utilizará a função arrastar do *software* como mencionado por Mariotti (2001) e necessariamente se utilizará da figura construída.

4ª fase: apresentação de um problema para avaliar a apropriação por parte dos alunos do conceito estudado.

Essa metodologia se torna importante na medida em que a partir dela poderemos nos certificar que os conceitos apresentados foram ou não apropriados. Segundo Margolinas (1993, p. 117)

> Tornou-se evidente a importância da repetição do problema nos trabalhos de engenharia, que até então, não havia sido considerada no plano teórico. Ela demonstra claramente não se tratar, de forma alguma, de uma consequência de uma opção behaviorista, na qual a repetição da confrontação a estímulos possibilitaria um aprendizado por reforço, e sim de uma consequência de uma opção construtivista: a repetição da confrontação com o mesmo

> problema possibilita ao aluno a elaboração de um sentido para o problema (processo de devolução), "torna-o cada vez mais consciente do que o impulsiona a agir”.

Nessa fase estudamos tanto a apropriação dos conceitos quanto as argumentações uma vez que não vemos sentido em olhar os dois separadamente.

4.3. A Sequência Didática: análise a *priori*

As três sessões iniciais constam no anexo dessa pesquisa. Não exploraremos aqui suas atividades, visto que foram utilizadas para a familiarização com o *software* e também para uso da régua e compasso, pois,

> [...] com o uso da régua e do compasso cada vez que é dito, nos procedimentos “traçar uma reta”, ao aluno cabe fazer uso da régua e do lápis, já ao se dizer “construir uma circunferência” isso consiste no uso do compasso. Pode parecer uma trivialidade, no entanto, pelo menos quatro mudanças instrumentais são realizadas ao se usar a régua e o compasso. (SANTANA, p. 15, 2005).

Essas mudanças instrumentais refletidas no uso da régua para traçar um segmento, compasso para traçar circunferências e novamente o uso da régua, podem oferecer dificuldades na construção, resultando em imprecisões do desenho.

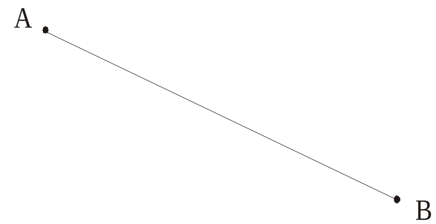
4.3.1. 4ª Sessão: Construção da Mediatriz de um segmento dado

A quarta sessão tem por objetivo a construção da mediatriz de um segmento. Nesta sessão apresentamos o conceito de mediatriz utilizando as Construções Geométricas oportunizando o aparecimento de conceitos geométricos.

Com as sessões de familiarização são discutidos conceitos de segmentos perpendiculares e ponto médio, com isso, nessa quarta sessão discutiremos a definição de mediatriz onde aparecem algumas propriedades e conceitos geométricos, como: pontos equidistantes e lugar geométrico. A atividade 1 envolve procedimentos de construção que podem servir à argumentação. Segundo Almeida (2007, p. 48)

> Se o entendimento do indivíduo sobre um determinado objeto geométrico vai estar associado à percepção deste, pode-se dizer que suas ações vão, também, seguir a mesma orientação. Logo, na ação de uma construção geométrica encontra-se subjacente a influência que o desenho com os dados do problema é fornecido ou organizado a partir do enunciado.

Atividade 1: Com o uso da régua e compasso encontre o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Desenhe usando régua e compasso o segmento perpendicular a $\overline{AB}$ passando pelo seu ponto médio.



A atividade 1 não fornece informações de como encontrar o ponto médio o que foi construído nas três sessões iniciais. Inferimos que essas informações serão utilizadas no decorrer da atividade o que facilitará a apresentação da construção. Os alunos recebem auxílio na utilização da régua e o do compasso, entretanto, essa atitude da professora pesquisadora não influenciará nas argumentações que justificam a atividade mesmo quando esse conceito for reapresentado em uma atividade diferente.

Atividade 2: A mediatriz de um segmento $\overline{AB}$ é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos pontos A e B. O que você construiu é a mediatriz do segmento $\overline{AB}$? Como você justifica sua resposta?

____

____

A atividade 2 (dois), é a primeira questão em que a definição se fará necessária. Para esta atividade o objetivo principal é exercitar no aluno a escrita utilizando à justificativa dos conceitos geométricos apresentados. Neste momento será trabalhado o conceito de Lugar Geométrico. Não esperamos uma definição pronta e acabada, mas um início de organização de ideias, uma apresentação mesmo que informal de conhecimentos, para que seja possível o início da formalização e apropriação do conceito de mediatriz.

Análise das estratégias de solução:

Estratégia 1: os alunos podem observar a figura construída e utilizarem a régua para comprovar satisfazendo-se com essa verificação e estabelecendo-a como prova. A argumentação nessa estratégia pode ser classificada como empirismo ingênuo.

Estratégia 2:

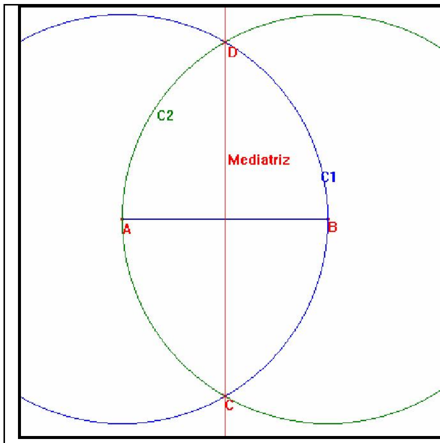
	Os pontos de intersecção C e D estão ambos à mesma distância dos pontos A e B pois pertencem as circunferências C1 e C2, ambas de mesmo raio.

FIGURA 10 - Construção da mediatriz

Dentre os procedimentos corretos está o que foi observado por Barreto (2005). Ao apresentar este procedimento acreditamos que o aluno se encontre na experiência crucial, ele continua utilizando um exemplo comum, mas já articula respostas com significado geométrico envolvendo conceitos já observados de outra figura geométrica, a circunferência.

Ao utilizarmos no enunciado da atividade o termo Lugar Geométrico temos como objetivo fazer com que o aluno perceba que a propriedade da mediatriz está além da definição explorada por muitos livros didáticos como sendo uma reta que corta um segmento no seu ponto médio perpendicularmente.

Estratégia 3:

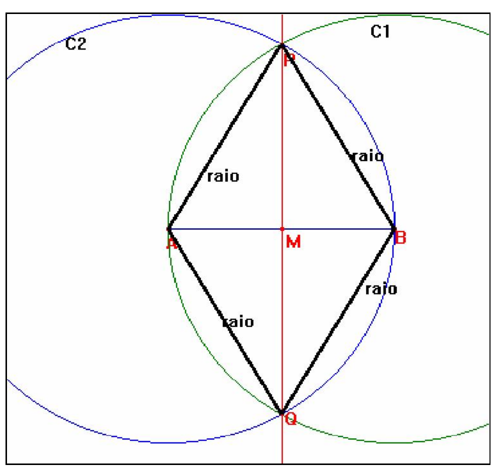


FIGURA 11 – A construção da mediatriz 2

Ainda nessa atividade é possível, corroborando com a idéia de Araújo (2007, p.30), que os alunos cheguem ao exemplo genérico utilizando a seguinte estratégia:

Dado o segmento AB, traçamos duas circunferências C1 e C2 de mesmo raio r que se encontram nos pontos P e Q. Por construção temos que AQBP é um losango, logo suas diagonais se interceptam nos seus pontos médios e são perpendiculares. Portanto a reta $\overline{PQ}$ é perpendicular à $\overline{AB}$ e passa pelo seu ponto médio, portanto $\overline{PQ}$ é a mediatriz de $\overline{AB}$.

Ao apresentar esse procedimento o aluno demonstra que a reta construída é a mediatriz não mais se prendendo a um caso particular, mas generalizando a situação. É possível que não utilize todos os procedimentos de prova apresentados na figura, mas estaremos considerando como exemplo genérico a apresentação de argumentos parecidos ao descrito anteriormente.

Na atividade 3, pedimos que o aluno explicite a propriedade de mediatriz. Esta atividade tem por objetivo fazer com que o aluno explore a construção realizada e se aproprie do conceito de mediatriz explicitando-o.

Atividade 3: A mediatriz também pode ser definida como um conjunto de pontos que apresentam alguma propriedade relacionada com a distância. Que propriedade é essa? Justifique sua afirmação.

____

____

Estratégias de resolução da atividade 3:

Estratégia 1: Borges Neto (2005) ao desenvolver atividades utilizando o Cabri-Géomètre com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental pôde observar que muitos, ao desenharem a mediatriz utilizando a barra de ferramentas do *software* e serem questionados quanto ao seu conceito, marcaram um ponto na mediatriz do segmento desenhado e tentaram medir a distância entre os extremos do segmento e esse ponto.

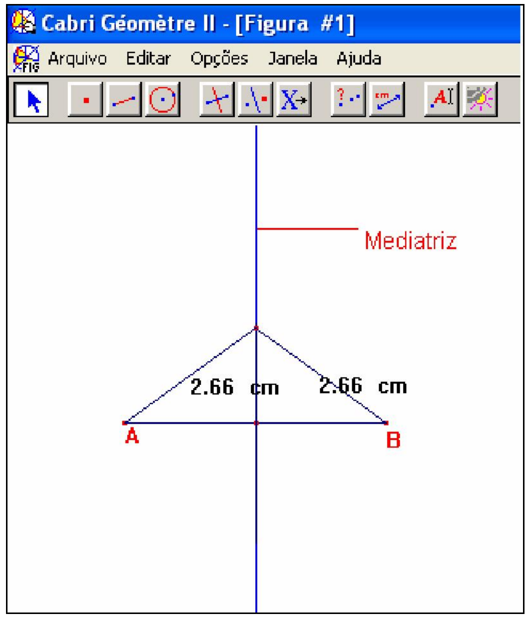


FIGURA 12 - Procedimento de construção da mediatriz

Acreditamos ser esse um dos procedimentos utilizados para responder a atividade utilizando o *software* e essa argumentação com a utilização das medidas ainda se situa no empirismo ingênuo, pois se utiliza de medidas para comprovar a afirmação.

Estratégia 2: utilizar o resultado da atividade anterior e fazer menção na sua resposta à mediatriz e à propriedade de equidistância dos extremos do segmento. Segundo Almeida (2007), essa conjectura é de natureza simples, pois esse é o lugar geométrico mais facilmente percebido.

O problema a seguir deve ser proposto no final da execução da primeira sessão para que os alunos o desenvolvam em casa. A discussão deve ter início nesta atividade, como forma de verificar a apropriação do conceito de mediatriz. Os alunos devem levar o problema para casa e trazer uma proposta de solução na próxima sessão.

Atividade 4 (Problema): Numa certa fazenda, a área destinada ao pasto do gado tem forma triangular, de lados iguais a 5 km, 6 km e 7 km. O proprietário pretende construir um curral num ponto equidistante dos vértices desse triângulo. A que distância aproximada de cada vértice ficará o curral? (Adaptação do exercício retirado do artigo Construção da mediatriz de um segmento: uma exemplo de aprendizagem significativa Marina Menna Barreto, UFRGS, pág. 5)

Segundo Barreto (2005) é difícil estabelecer uma relação entre o problema proposto e a utilização de mediatriz para alunos que não tenham contato com Construções Geométricas.

Em sua pesquisa pôde diagnosticar que quando construções geométricas fazem parte da atividade do aluno essa relação é estabelecida por grande parte do grupo dos alunos pesquisados; a dificuldade não está na construção e sim, segundo Barreto, na identificação do ponto de encontro das mediatrizes como resposta ao problema. Essa ocorrência se deve ao fato de que "este triângulo em particular, devido à sua assimetria, não nos permite obter esta informação apenas visualmente". (BARRETO, 2005, p.5).

Estratégias de resolução da atividade 4:

Estratégia 1: marcar os pontos A, B e C obtendo os lados AB, BC e AC, com suas respectivas medidas. Encontrar as mediatrizes de cada lado do triângulo e o ponto de encontro.

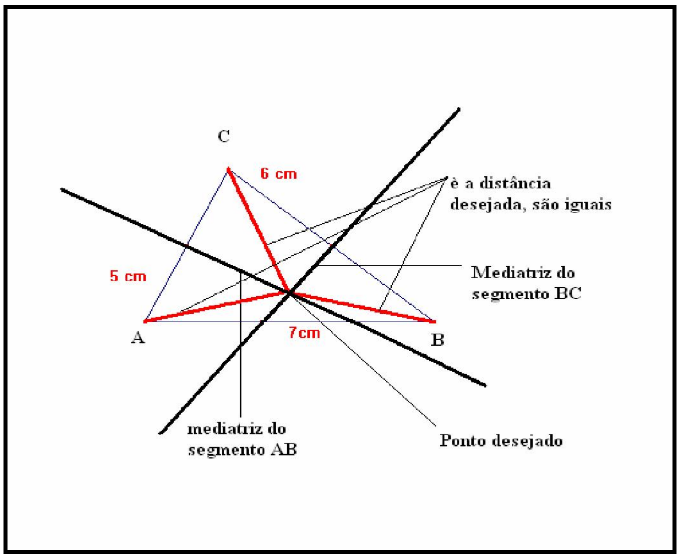


FIGURA 13 - Resolução correta do problema 4 da sessão 4.

Se ao encontrar a distância desejada essa for justificada utilizando o conceito de mediatriz como Lugar Geométrico, essa argumentação estará no exemplo genérico. Com relação aos erros ainda pode ser comprovado o que nos apresenta Barreto (2005) a dificuldade de associar o ponto de encontro à resposta da atividade.

Ainda poderemos ter a não resolução da atividade o que segundo Almeida (2007) pode acontecer quando trabalhamos com atividades diferentes às que estamos acostumados: a não resolução dessa atividade pode ser consequência das situações prototípicas ou casos particulares que alguns alunos desenvolvem em sala de aula.

4.3.2. 5ª Sessão: Construção das bissetrizes

Nesta sessão utilizamos muitos conceitos geométricos já apresentados. A sessão é iniciada com um exercício de construção com a manipulação dos instrumentos régua e compasso. Salientamos que anterior ao início desta sessão foi discutido com os alunos sobre congruência de triângulos com a intenção de relembrar este conteúdo.

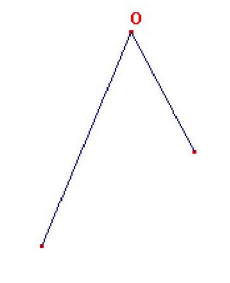
Nesta sessão o *software* está à disposição dos alunos que podem justificar sua construção utilizando também este recurso. Segundo Laborde e Capponi (1994) os alunos podem confrontar construções, ou seja, usar o *software* para tirar uma "prova". Para os autores o Cabri-Géomètre oferece uma validação pragmática. Para Araújo (2007) os alunos podem utilizar o Cabri-Géomètre de forma mais ingênua, experimental, empírica, mas o importante é que pode conduzir o aluno rumo a um desenvolvimento lógico-matemático mais estruturado.

No entanto, sabemos que a validação de uma construção utilizando o *software* Cabri-Géomètre está intimamente ligada à função arrastar: arrasta-se a figura para obter uma validação "visual". Essa validação conforme Araújo (2007) pode ser suficiente para alguns alunos. Para Mariotti (2001, apud ARAÚJO, 2007, p. 61)

> A presença do modo arrastar introduz um critério específico de validação para a solução de problemas de construção: uma solução é válida se, e somente se, a figura é estável sob o teste do arrastar. Porque o sistema dinâmico de figuras no Cabri-Géomètre expressa um sistema de relações, consistente no sistema amplo de uma teoria geométrica, solucionar problemas de construção no Cabri-Géomètre significa não apenas aceitar todas as facilidades do *software*, mas também um sistema lógico para suportar estas facilidades.

A atividade 1 é uma atividade de construção e apresentação do conceito de bissetriz sem exigir formalização, ou seja, não esperamos para essa atividade que o aluno apresente o conceito de bissetriz. Usamos um ângulo formado com segmentos de tamanhos diferentes para que o aluno não associe bissetriz sempre a um ângulo formado "aparentemente" por segmentos iguais, as chamadas figuras prototípicas.

Atividade 1: Para o ângulo abaixo construa a bissetriz, obedecendo aos passos dados:



1. Com centro no vértice do ângulo e raio qualquer, convenientemente grande, descreve-se um arco de circunferência C1, o qual intersecta os lados nos pontos A e B.
2. Com centro em A e com uma abertura qualquer , descreva um arco de circunferência C2.
3. Repita o processo agora com centro em B, usando a mesma abertura, e trace o arco C3.
4. Marque a interseção dos arcos C2 e C3 e chame de P.
5. Trace a semi reta de origem O passando por P.

Espera-se que ao realizar essa atividade de construção geométrica, esta auxilie o aluno, como nos apresenta Almeida (2007), a observar os procedimentos envolvidos e não apenas seguir os passos dados. Essa observação é o objetivo dessa atividade, este comportamento por parte do aluno poderá se refletir na atividade 2, em que os procedimentos utilizados anteriormente podem auxiliar na justificativa da construção.

Atividade 2: A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico que equidista dos lados desse ângulo. O que foi construído é realmente uma bissetriz?

____

____

Estratégias de resolução da atividade 2:

Estratégia 1: Um procedimento seria o observado na Fig. 14:

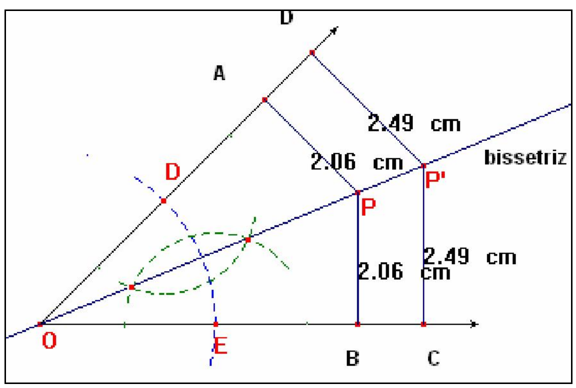


FIGURA 14 - Construção da Bissetriz.

O aluno pode realizar a construção da bissetriz no Cabri-Géomètre, medir os comprimentos de PA e PB com a ferramenta “comprimento” do *software* e afirmar que essas distâncias são iguais. Essa estratégia pode ser classificada no empirismo ingênuo.

Estratégia 2: A partir da construção temos que o lado OP é comum aos triângulos AOP e BOP e que os ângulos OÂP e OBP são retos. Então pelo caso especial de congruência LA os triângulos AOP e BOP são congruentes. Portanto AP = BP. Logo o ponto P é equidistante dos lados do ângulo AOB.

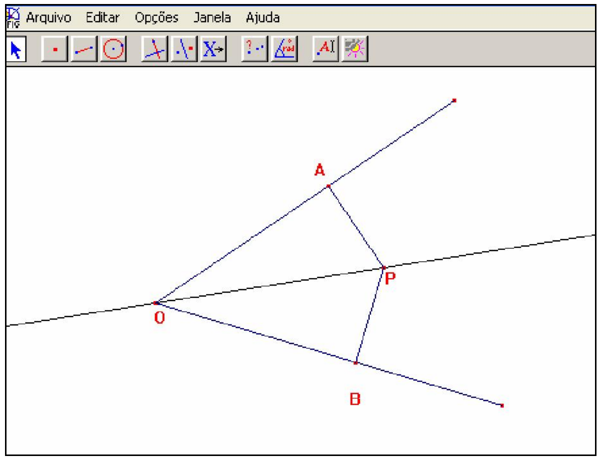
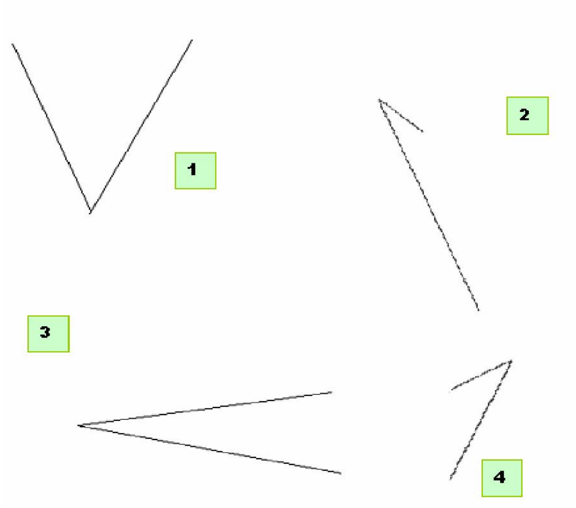


FIGURA 15 - Bissetriz como Lugar Geométrico

Essa justificativa estaria no terceiro nível de prova descrito por Balacheff (1988), o exemplo genérico, pois apesar da argumentação correta ainda se apóia em uma construção para sua justificativa.

A visualização do desenho que segundo Flores (2007), é um fator importante na resolução de atividades de Geometria será uma variável didática importante na próxima atividade. A atividade 3 apresenta uma variedade de desenhos de ângulos. A visualização desses desenhos se mostrará importante na resolução da atividade, não pela sua ausência, mas por sua posição e forma. O objetivo é levar o aluno a concluir que todo ângulo, apesar de apresentar formas “estranhas” tem bissetriz. Do modo como os desenhos foram apresentados, é preciso que o aluno prolongue, por exemplo, os lados ou um dos lados do ângulo para poder realizar a construção da bissetriz caso contrário essa construção pode parecer inviável para ele, como no item 2.

Atividade 3: Em qual(is) desenho(s) de ângulo podemos encontrar a bissetriz?



Souza (2001) verificou que a dificuldade na construção da bissetriz de um ângulo também está ligada a má formação do conceito de ângulo. Em sua pesquisa ela constatou que muitos alunos têm dificuldade em encontrar o ângulo de uma figura, “pois a representação que eles trazem de ângulo está sempre associado aos vértices e as semi-retas de mesma origem, atrelada ainda à posição da figura [...]” (SOUZA, 2001, p. 135), ou seja, o aluno pode pensar que os lados do ângulo são exatamente aqueles que estão representados no desenho. Ao utilizarmos, na representação da figura, ângulos com medidas de lados diferentes inferimos que essa dificuldade aumenta o que resultaria apenas como resposta a atividade os ângulos 1 e 3.

Atividade 4: Desenhe duas retas concorrentes, a reta *c* e a reta *d* e construa o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de *c* e *d*.

Este problema não apresenta a figura inicial para a realização da construção da bissetriz, ou seja, a variável presença da figura (nesse caso ausência) pode dificultar um pouco a resolução do exercício. Neste exercício estaremos mais atentos a essas dificuldades visto que representam uma das variáveis didáticas previstas anteriormente.

Para essa atividade o procedimento correto será traçar as retas concorrentes e encontrar as bissetrizes dos ângulos formados. Ao propor a atividade utilizando o termo Lugar Geométrico temos por objetivo a utilização do conceito de bissetriz como uma figura que apresenta um conjunto de pontos com uma característica: estão equidistantes das semirretas que formam o ângulo.

Estratégias da resolução da atividade 4.

Estratégia 1: Construir retas concorrentes, perpendiculares ou não, e traçar uma única bissetriz.

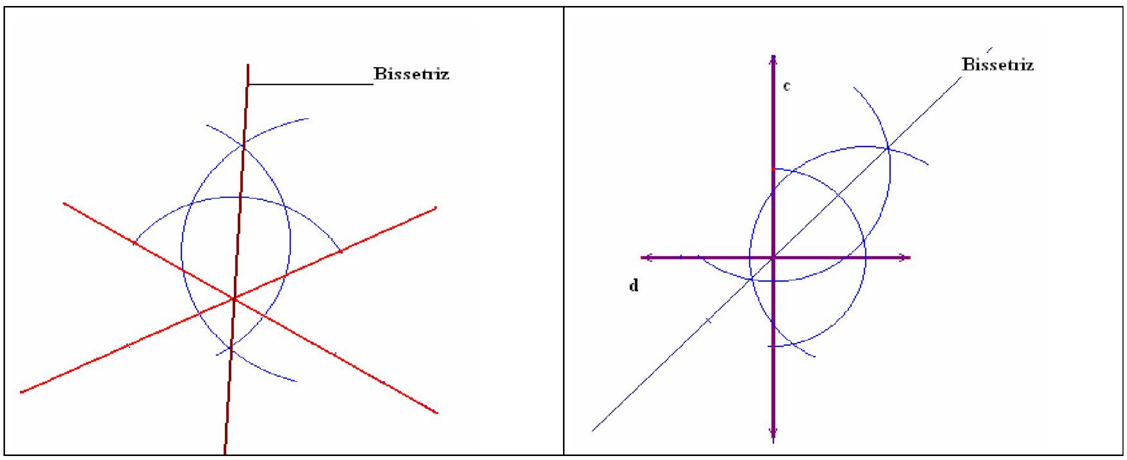


FIGURA 16 - Construção da bissetriz de retas concorrentes

O aluno pode construir a bissetriz, mas, segundo Flores (2007), apresenta dificuldade de comprovar a resposta pela difícil visualização, o que para ela é um dos problemas em Geometria. Quando a resposta apresentada for a correta podemos ainda ter uma construção somente em parte do desenho, ou seja, encontrar a bissetriz do ângulo e esquecer do ângulo oposto pelo vértice, não prolongando o segmento construído corroborando com idéia de Barreto (2005) que em sua pesquisa pôde comprovar que os alunos omitem parte da construção realizada.

Estratégia 2: construir retas concorrentes, perpendiculares ou não, traçando as duas bissetrizes.

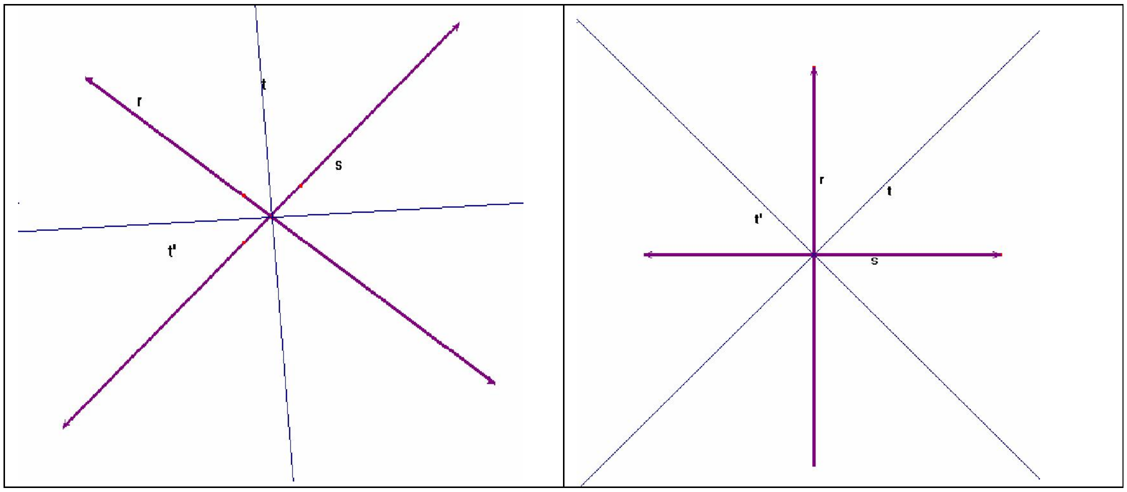


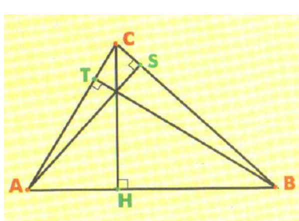
FIGURA 17 - Construção das bissetrizes de todos os ângulos.

Estratégia 3: o lugar geométrico dos pontos equidistantes de duas retas r e s, concorrentes, é o par de retas t e t' formadas pelas semi-retas que são bissetrizes dos ângulos formados por elas, como apresentado na atividade 2.

4.3.3. 7ª Sessão: as alturas

Esta sessão inclui um conceito geométrico de difícil interpretação, segundo Gravina (1998, p.5), pois "a altura do triângulo guarda a particularidade do desenho prototípico, sendo identificada como o segmento que tem extremidades no lado "base" e vértice oposto a esta base, estando o segmento sempre no interior do triângulo".

Atividade 1: dado o triângulo ABC, chamaremos de altura do triângulo relativamente ao lado BC o segmento $\overline{AS}$, perpendicular a $\overline{BC}$ e que passa pelo ponto A, como mostra a figura abaixo.



O

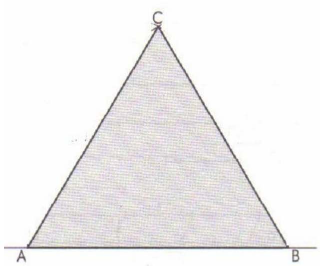
Observando o desenho podemos afirmar que existe mais que uma altura? Por quê?

A atividade 1 apresenta uma configuração do triângulo em que as alturas se intersectam no seu interior. Esta escolha é justificada pelo conforto que proporcionará aos alunos pesquisados sentindo-se seguros no início da atividade, pois segundo Kenski (2007, p. 8):

> O ser humano busca naturalmente um estado de equilíbrio que lhe dê a sensação de bem estar. Vygotsky chama este estado de "zona de conforto". Uma vez retirado desta zona de conforto, ou de equilibração, conforme Piaget, o indivíduo dispara um processo de nova busca do estado de equilíbrio ou de bem estar habitual. Dizem os teóricos que é neste processo sucessivo de desequilíbrio e busca de novo estado de conforto, que se dá o aprendizado [...].

Essa atividade não apresentará nenhuma dificuldade a ser realizada visto ser um exercício de visualização. Eles deverão compreender que um triângulo tem 3 alturas visto ser esse um conceito relativo ao seus lados. Esperamos que essa atividade forneça aos alunos subsídios para a resolução da atividade 2.

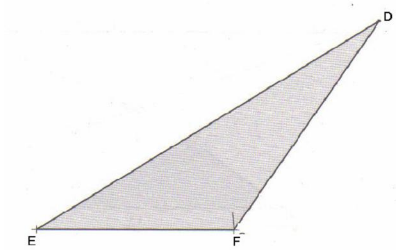
Atividade 2: Construa as alturas dos triângulos abaixo, seguindo os passos apresentados.



1) Construa uma reta perpendicular à reta $\overline{AB}$ passando pelo ponto C;

2) Faça o mesmo procedimento para os lados $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$

3) Agora repita os procedimentos 1 e 2 no triângulo DEF



Baseando-se nas suas construções, responda as questões abaixo:

a) O triângulo ABC é um triângulo equilátero. Poderemos afirmar que as alturas construídas também são mediatrizes?

b) E ainda, será que elas são também medianas desse triângulo?

c) Explique ou justifique suas respostas.

d) Observe o triângulo DEF ele é um triângulo escaleno. O que você construiu foram as alturas do triângulo? Justifique sua resposta.

Esta atividade propõe figuras diferentes, o triângulo equilátero e o triângulo escaleno, esse último não tão usual para os alunos participantes da pesquisa. As dificuldades de construção talvez não apareçam, pois os procedimentos de construção foram apresentados. Entretanto, a construção da altura envolve alguns conhecimentos já apresentados como segmentos perpendiculares e os diferentes tipos de triângulos. Os tipos de triângulo ainda podem ser um possível fator de instabilidade na resolução pois, segundo Gravina (1999, p. 2),

> Os livros escolares iniciam com definições, nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares, os ditos desenhos prototípicos. Por exemplo, quadrados com lados paralelos às bordas da folha de papel, retângulos sempre com dois lados diferentes, alturas em triângulos sempre acutângulos, etc... Isto leva os alunos a não reconhecerem desenhos destes mesmos objetos quando em outra situação. E mais, para os alunos, a posição relativa do desenho ou seu traçado particular, passam a fazer parte das características do objeto, quer no aspecto conceitual ou quer no aspecto figural, estabelecendo desequilíbrios na formação dos conceitos [...]

Como na sessão 1, o procedimento de construção de retas perpendiculares foi apresentado, julgamos que a atividade de construção será realizada sem dificuldades. Apresentamos a seguir as estratégias de resolução da atividade:

Estratégia 1: Ao construírem o triângulo equilátero e suas alturas poderão responder a letra *a*, utilizando os instrumentos de desenho para indicar as medidas, ou seja, em cada segmento construído marcar o ponto de encontro das alturas com os lados do triângulo e depois medir, com o uso da régua ou com a ferramenta “comprimento” do *software*, a distância desse ponto ao extremo do segmento que lhe é perpendicular. Chegará então a $M_2C = M_2B$; $M_1A = M_1B$ e $M_3A = M_3C$; afirmando assim que as alturas também são mediatrizes por ser uma reta que passa pelo ponto médio e também perpendicular.

Essa estratégia utilizando os instrumentos régua e compasso ou ferramenta “comprimento”, constatada por Almeida (2007), classifica sua argumentação como empirismo ingênuo.

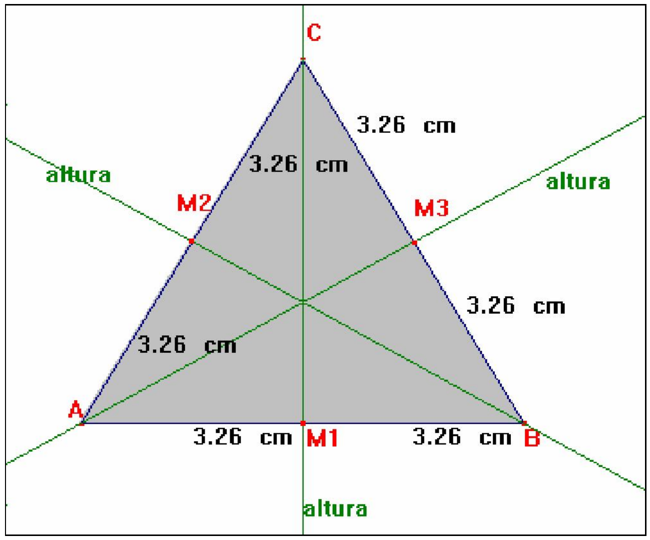


FIGURA 18 - As alturas do triângulo equilátero

Estratégia 2: utilizar as ferramentas “mediatriz” e “reta perpendicular” do Cabri-Géomètre e argumentar, com o auxílio da ilustração 20, que essas retas coincidem. Classificamos sua argumentação no empirismo ingênuo, pois utilizou uma opção disponível no *software* que o auxilia.

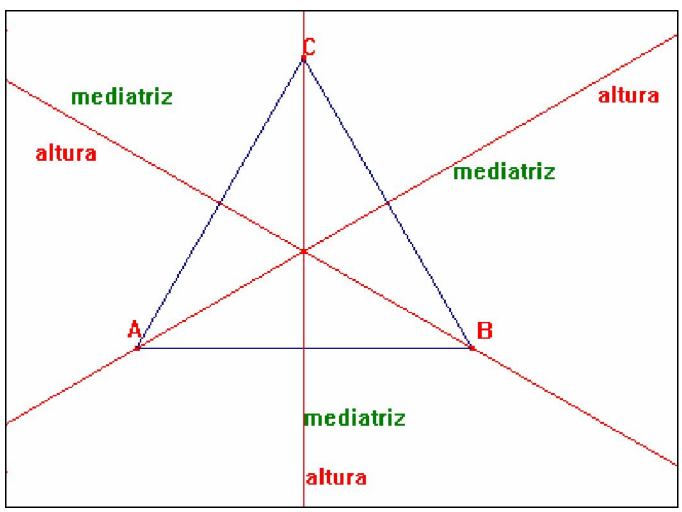


FIGURA 19 - Construção das alturas e mediatrizes utilizando o Cabri-Géomètre.

Estratégia 3: argumentar a partir da ilustração 21 que a mediatriz e altura sempre coincidirão no triângulo equilátero. Classificamos essa argumentação como experiência crucial, pois foi utilizado utilizou-se o modo arrastar para satisfazer uma dúvida, observando se a propriedade poderia ser validada para outros tamanhos de triângulo.

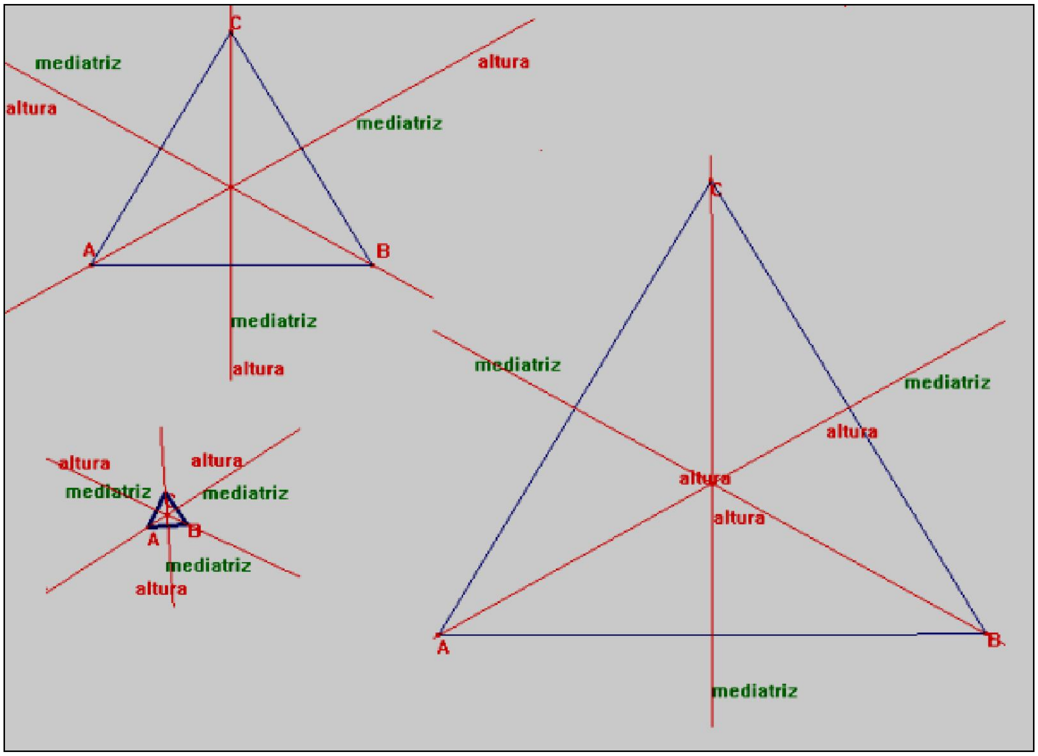


FIGURA 20 – Mediana e altura

Descartamos aqui a experiência mental, pois o aluno ainda relaciona sua construção a um caso particular de triângulo. A experiência mental não envolve casos particulares e sim a busca por generalizações.

Quanto a resposta à letra b: *E ainda, será que elas são também medianas desse triângulo?* Está poderá resultar da observação e compreensão dos procedimentos de construção utilizados, pois segundo Almeida (2007, p. 103) "[...] alguns alunos valorizam certos elementos e parâmetros em detrimento de outros. Numa mediatriz a ênfase recai no ponto médio do segmento que esta passa, e não em sua propriedade em relação aos pontos que define o segmento". Com essa ênfase aliado a apropriação do conceito de mediana como sendo as retas que passam pelos pontos médios dos lados de um triângulo, o aluno responderá afirmativamente a questão.

A ilustração 22 apresenta o procedimento correto utilizado para encontrar as alturas no triângulo DEF apresentado na atividade 2, letra d: *Observe o triângulo DEF; ele é um triângulo escaleno. O que você construiu foram as alturas do triângulo? Justifique sua resposta*, o que evidenciará a forma como o conceito de altura foi apropriado pelo aluno.

Optamos pelo triângulo com três lados diferentes, pois esse nos oferece a opção do ponto de encontro das alturas estar fora do triângulo. Esse fato pode ser um fator de instabilidade na apropriação do conceito de altura por isso é importante investigar esse tipo de desenho.

Estratégia 1 para a atividade 2 letra d::

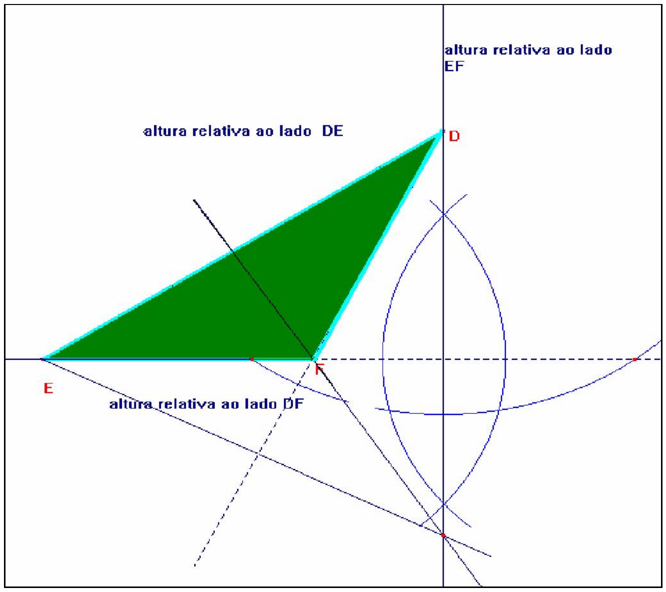


FIGURA 21 - Construção das alturas do triângulo DEF**.**

Mesmo utilizando o procedimento correto de construção o aluno pode responder negativamente a pergunta o que, segundo Gravina (1996), pode ser consequência do desenho do triângulo evidenciando-o como uma variável didática. Em sua pesquisa a autora comprovou que 51% dos alunos afirmaram não existir altura para esse tipo de triângulo.

Estratégia 2 para o item d: utilizar o procedimento de construção apresentado na ilustração 22 e responder afirmativamente a pergunta, utilizando na sua argumentação o fato de construir as alturas usando a definição de uma reta perpendicular ao lado do triângulo. A argumentação com base na definição de altura ainda com o auxílio da construção será o exemplo genérico, no qual o aluno utiliza-se de um conceito já estruturado de uma classe de figuras, triângulos.

4.3.5. 8ª Sessão: os pontos notáveis do triângulo

Têm início aqui as sessões que discutem diretamente o conceito de pontos notáveis do triângulo e as argumentações geométricas que estão envolvidas nesses conceitos.

A atividade apresentada a seguir tem como principal objetivo trabalhar os conceitos já estudados e apresentar a sistematização do conceito de ortocentro. O aluno pode usar a caixa de ferramentas "construir" do Cabri-Géomètre, visto que esta atividade não avalia as construções mas sistematiza conhecimentos matemáticos adquiridos ao longo das atividades como construção da altura e seu conceito e verifica a disposição do ponto de encontro das alturas de um triângulo, que pode estar no interior ou exterior do triângulo.

Atividade 1: Sabendo que o ortocentro de um triângulo qualquer é o encontro das suas alturas, construa um triângulo qualquer e encontre suas alturas.
Esta é uma atividade livre; você poderá usar o que quiser de recursos do cabri. Ao encontrar as alturas marque o seu ponto de interseção, chame este ponto de ponto *O*. Movimente este ponto e responda as perguntas abaixo:

a) Ao movimentar o ponto *O* o que aconteceu com o seu desenho? Por quê?
b) O seu ponto pode estar fora ou dentro do triângulo? Por quê?
c) Quando o ponto *O* está fora do triângulo que tipo de triângulo eu tenho?

Nessa atividade os alunos devem, obrigatoriamente, utilizar o *software*, pois o ambiente de Geometria Dinâmica possibilita o movimento, uma das ações exigidas na atividade.

Estratégias de resolução da atividade 1:

Estratégia 1: Construir as alturas do triângulo e tentar movimentar o ponto O. O aluno, não conseguindo movimentar o ponto O, poderá movimentar os vértices do triângulo. Poderá então argumentar que o ponto O não se movimenta, remetendo-se ao *software* e sua construção. Com isso colocamos sua argumentação no empirismo ingênuo.

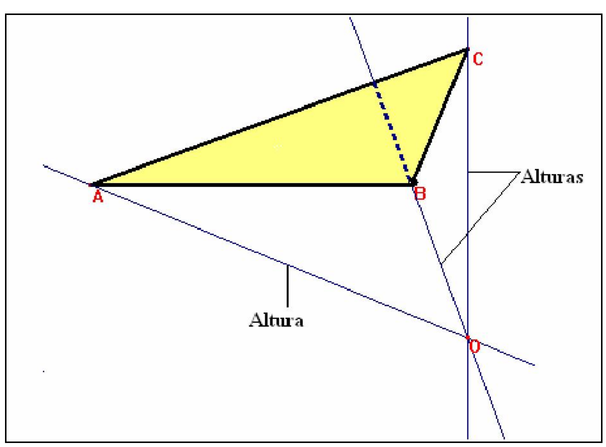


FIGURA 22 – O ortocentro

Estratégia 2: construir a figura e argumentar que o ponto O não pode ser movimentado porque foi construído em função das alturas. Com o uso da construção para essa argumentação temos então o exemplo genérico.

Observamos que não será possível nessa atividade chegar à experiência mental, pois o aluno sempre se apoiará na sua construção para responder a pergunta.

Quanto a alternativa *b) O seu ponto pode estar fora ou dentro do triângulo? Por quê?*A posição relativa de um desenho, segundo Gravina, pode fazer com que o aluno forme conceitos errados e atribua a esse conceito uma característica de um objeto particular, o desenho sempre na mesma posição. Isso poderá levar o aluno a afirmar que, mesmo ao olhar a figura, o ponto O encontrado poderá estar errado e que deve estar dentro do triângulo. Uma resposta errada.

Ao argumentar sobre essa alternativa esperamos que o aluno chegue à seguinte conclusão: *O ortocentro pode ficar fora (exterior) ou dentro (interior) do triângulo. Esse fato depende do tipo de triângulo construído, se for isósceles ou equilátero fica no interior, se for escaleno fica no exterior.* Utilizará para isso o ambiente da Geometria Dinâmica e o movimento, ou seja, poderá deslocar quaisquer dos vértices do triângulo e ter inúmeros triângulos como na sequência representada na figura a seguir:

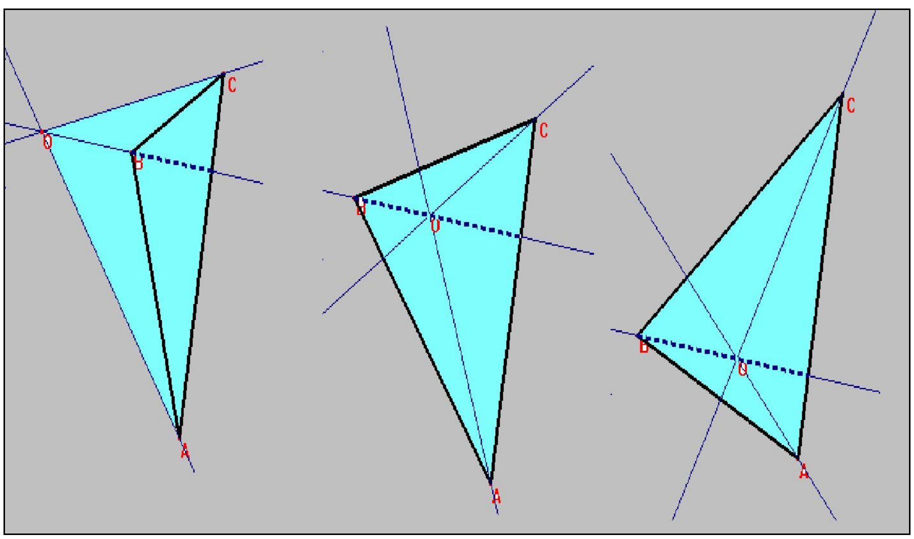


FIGURA 23 – Sequência de desenhos de triângulos.

Para Araújo (2007, p. 190-191) “a validação de uma construção poderá surgir da observação de diversos casos particulares decorrentes do recurso arrastar”. Esse procedimento poderá levar à experiência crucial descrita por Balacheff (1988). Sua argumentação partirá de casos singulares, no qual aparece uma validação para um caso sem considerá-lo particular, o que pode ser comprovado pelo "arrastar" da figura transformando-a em triângulos com características diferentes. A variável, desenho prototípico nesta atividade é importante e pode levar os alunos ao procedimento errado.

Na alternativa *c* esperamos que o conceito de altura já tenha se consolidado e o aluno tenha se apropriado dele. Com isso a resposta poderá ser: *um triângulo escaleno ou um triângulo obtusângulo.*

Na atividade 2, apresentada em seguida, nos deparamos com o conceito de Baricentro e exploramos, também, o conceito de Lugar Geométrico.

Atividade 2: O baricentro de um triângulo é o encontro de suas medianas[20]. Crie uma circunferência e sobre ela marque os pontos A, B e C. Construa o triângulo ABC. Encontre o ponto médio M do lado BC e o ponto médio N do lado AC e, em seguida, construa os segmentos AM e BN.

a) O que significam os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{BN}$ relativamente ao triângulo ABC?

b) Esses segmentos se interceptaram em um ponto, chame este ponto de G. Este ponto é o baricentro?

c) Se você mantiver fixos os vértices B e C e variando o vértice A (sempre sobre a circunferência) qual é o lugar geométrico do baricentro G? Exercício adaptado do artigo: CARNEIRO, João Paulo. Pesquisas de lugares geométricos com o auxílio da Geometria Dinâmica, revista do Professor de Matemática, SBM, pág. 5.

Construção do desenho com a utilização do *software* Cabri-Géomètre, seguindo os passos dados na atividade, como pode ser visto na ilustração 25.

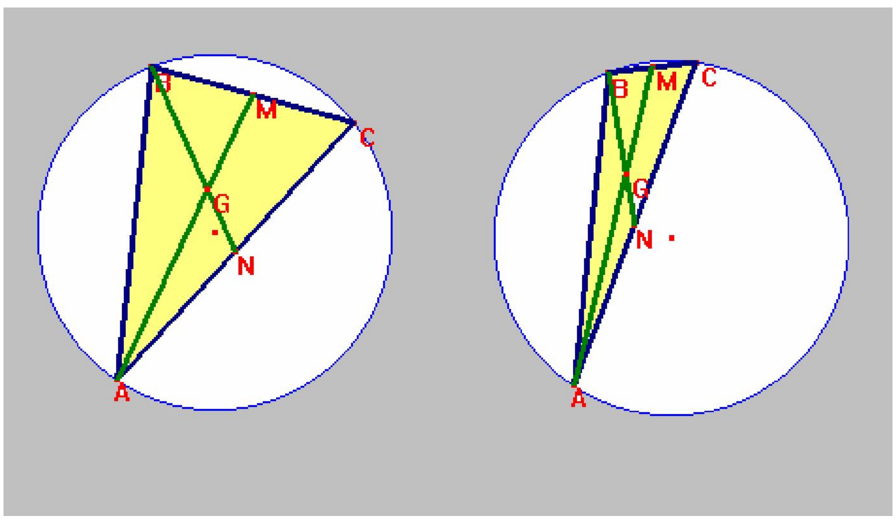


FIGURA 24 - Lugar Geométrico do Baricentro G

[20] O conceito de mediana foi discutido na sessão 3 da sequência didática.

Está em jogo nessa atividade o conceito de mediana, apresentado aos alunos no início da aplicação da sequência. Ao responder a alternativa ***a*** da atividade 2 esperamos indícios da construção do conhecimento o que segundo Brousseau se dá a partir da inserção de novas informações e da adaptação que o aluno faz diante dessas: é a reformulação e readaptação. A resposta correta mediana é a esperada, mas sabemos que este conceito diante do contexto apresentado pode ser confundido com o de mediatriz.

> A interpretação depende, evidentemente, da teoria com a qual o leitor decide ler o desenho bem como dos conhecimentos desse leitor. O contexto desempenha um papel fundamental na escolha do tipo de interpretação. (LABORDE e CAPONNI, 1994, p. 53).

Assim o aluno pode interpretar a construção como sendo a mediatriz se este for o conceito for mais estruturado e consolidado no seu rol de conhecimentos.

Quanto à definição de Baricentro esse foi apresentado no início da atividade por não julgarmos que influenciaria na sua resolução.

A alternativa *b: Esses segmentos se interceptaram em um ponto, chame este ponto de G. Este ponto é o baricentro*? foi incluída justamente para fortalecer a aquisição do conceito por meio de uma justificativa, da argumentação.

Estratégia 1 para o item b: Para essa alternativa é possível que os alunos, novamente como ocorrido na alternativa a, voltem a confundir o conceito de mediana e mediatriz, respondendo negativamente a pergunta. Inferimos que os alunos não construirão a terceira mediana depois de discutirmos no início das sessões que esta também passará pelo ponto de encontro.

Estratégia 2: O aluno argumentar afirmativamente quanto ao baricentro, ou seja, afirmar que este é o baricentro pois representa o ponto de encontro das medianas do triângulo ABC.

A alternativa *c: Se você mantiver fixos os vértices B e C e variando o vértice A (sempre sobre a circunferência*) qual é o lugar geométrico do baricentro G? é a alternativa que oferece maior dificuldade. Aqui exploramos o conceito de baricentro como lugar geométrico. Apesar das atividades já realizadas sobre lugares geométricos é possível que alguns alunos tenham dificuldade para responder.

Estratégias de resolução da atividade 2, letra c:

Estratégia 1: A argumentação: o ponto G é o baricentro do triângulo construído com os vértices pertencendo a circunferência. Quando movimentarmos quaisquer uns dos vértices do triângulo, o ponto G descreverá uma circunferência, pois é o que foi observado na construção a partir do deslocamento do vértice A. Ao construirmos um triângulo sem a circunferência circunscrita não teremos um Lugar Geométrico para o baricentro.

Essa resposta partirá do procedimento: observação do desenho e utilização de ferramentas do *software*. "As relações entre desenho e objeto geométrico podem ser caracterizadas, *grosso modo,* pelo fato de que as propriedades do objeto geométrico se traduzem graficamente por relações espaciais".(LABORDE e CAPONNI, 1994, p. 52).

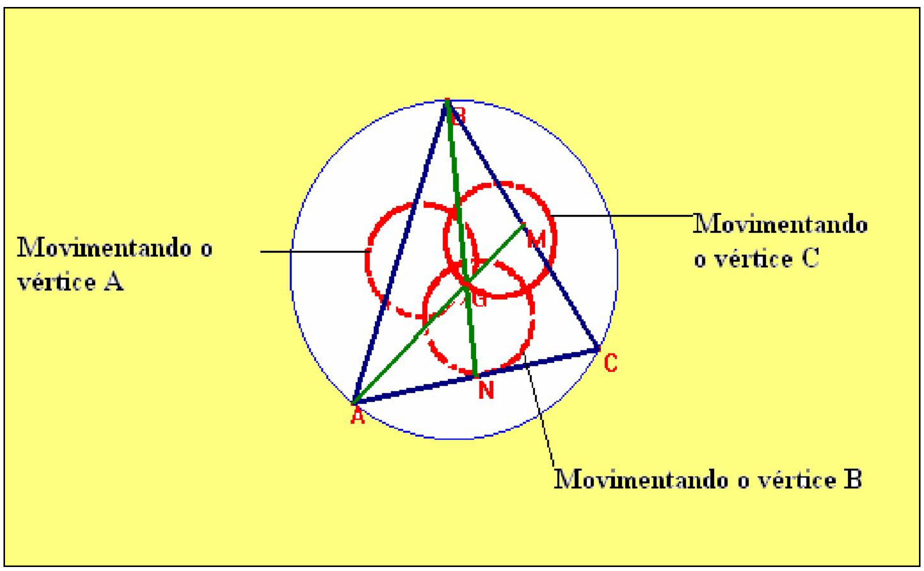


FIGURA 25 - O Lugar Geométrico do Baricentro

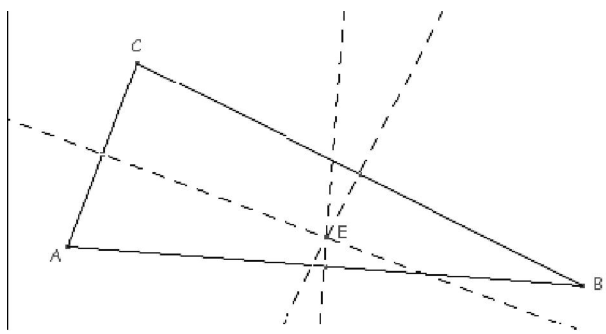
A argumentação está no exemplo genérico, pois o aluno utiliza o conceito de mediana aliado ao de Lugar Geométrico destacando esse como um caso particular para resolução dessa atividade, mas ambos ainda estão subordinados a sua construção.

Estratégia 2: A utilização da ferramenta rastro do *software* seguido da argumentação: eu usei a ferramenta rastro e encontrei uma circunferência, então o lugar geométrico do ponto G é uma circunferência, o coloca no empirismo ingênuo.

4.3.6 9ª Sessão: incentro e circuncentro

As atividades desta sessão se encontram divididas em duas partes: primeiramente vamos discutir o conceito de Incentro e logo depois o de Circuncentro, o que prevemos aumentará o tempo da sessão. Disponibilizamos duas horas para essa sessão diferenciando-a assim de todas as outras.

Atividade 1. "Dado o triângulo abaixo, foram construídas suas três mediatrizes, relativas aos lados AB, BC e AC. É possível afirmar que a distância do ponto E, encontro destas mediatrizes, a cada um dos vértices é a mesma?" (exercício retirado do artigo Construção da mediatriz de um segmento: uma exemplo de aprendizagem significativa Marina Menna Barreto, UFRGS, pág. 5)



A atividade 1 é um exercício onde a visualização será o primeiro passo para uma primeira resposta à atividade. Segundo Flores (2007, p. 17)

> a ligação entre a aprendizagem da geometria e o saber ver as representações das figuras geométricas tem aguçado a busca de variados procedimentos que possam ser colocados em prática na sala de aula, a fim de se aprimorar a desenvoltura do olhar as imagens no ensino de geometria.

Teremos então a partir dessa primeira resposta a busca por estratégias de resolução para a atividade que poderá encaminhar o aluno para um dos três níveis de prova de Balacheff.

Ao utilizar a régua ou o *software* para justificar a sua resposta o aluno se encontra no empirismo ingênuo, pois dará ênfase às medidas encontradas. Se esse procedimento ainda não for suficiente para convencê-lo poderá construir um outro triângulo (régua e compasso) com medidas diferentes ou utilizar-se da função arrastar do *software*, movimentando o triângulo e argumentando afirmativamente. Para a experiência mental esperamos que o aluno ao argumentar utilize ainda o conceito de lugar Geométrico para justificar sua resposta.

> Tomamos por base que toda figura geométrica incorpora um conjunto de propriedade que a individualiza. Cada conjunto de propriedades, por sua vez, é um conjunto, em que todos os elementos desse conjunto gozam da mesma propriedade que chamamos 'lugar geométrico'. (ALMEIDA, 2007, p. 67)
>
> Construir um lugar geométrico consiste, portanto, em definir posições de elementos geométricos a partir de certa propriedade. (ibid, p. 84)

Segundo a autora, ao utilizarmos lugares geométricos estaremos utilizando propriedades inerentes à figura. Isso possibilita ao aluno se desprender do caso particular, generalizar uma propriedade, chegando à experiência mental.

Essa atividade carrega conceitos, aos quais esperamos que o aluno prove, tais como: E ser ponto de interseção das mediatrizes e estar a igual distância dos vértices. Na pesquisa desenvolvida por Barreto (2005) um número expressivo de alunos que tiveram contato com Construções Geométricas e suas justificativas responderam a atividade desenvolvendo as seguintes estratégias:

Estratégia 1: utilizar a régua para concluir que este ponto está a igual distância dos vértices. Esse procedimento aliado a sua justificativa situa o aluno no empirismo ingênuo.

Estratégia 2: segundo Barreto (2005, p.5) "se o conceito de mediatriz for de fato entendido, esta conclusão se torna facilmente deduzida", ou seja o conceito já traz implícito que o ponto de encontro das mediatrizes está a igual distância dos vértices do triângulo, fato já apresentado na sessão 4. O aluno então estaria no exemplo genérico fazendo uso de uma propriedade já conhecida, que vale para qualquer triângulo apresentado.

Estratégia 3: ao visualizar o desenho o aluno pode não se convencer de que o ponto de encontro das mediatrizes está a igual distância dos vértices do triângulo e sentir necessidade de provar, apresentando o seguinte procedimento:

Hipótese: E é o ponto de encontro das mediatrizes
Tese: E equidista dos vértices do triângulo ABC.

Seja M_{BC}, M_{AC} e M_{AB} pontos em $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ e $\overline{CA}$,respectivamente.
Como $M_{BC}E$ é mediatriz de $\overline{BC}$ e $M_{AC}E$ e mediatriz de $\overline{AC}$ logo,
EA=EC (pois está na mediatriz de $\overline{AC}$) e
EC = EB (pois E está na mediatriz de $\overline{BC}$). Daí EA = EB.
Portanto E está na mediatriz de AB.

Esperamos que seja essa a estratégia desenvolvida pelos alunos o que classifica sua argumentação no exemplo genérico.

Atividade 2: Agora desenhe um triângulo AME e as mediatrizes dos seus lados. Chame o encontro das mediatrizes de O. Esta atividade pode ser feita no Cabri usando os recursos que quiser.

a) com centro em O e raio AO, trace uma circunferência.

b) os pontos M e E pertencem a essa circunferência? Por quê?

Segundo Bellemain (2008) as estratégias de resolução podem variar de acordo com a mídia escolhida, no nosso caso as variáveis didáticas: régua e compasso e o *software* Cabri-Géomètre "[...] isto porque o recurso utiliza certas ferramentas ou métodos que facilitam mais a aplicação de certa estratégia". (BELLEMAIN et. al., 2008, p. 3). Partindo desse pressuposto, ou seja, de que as ferramentas disponíveis, geralmente, induzem ou influenciam nas estratégias, a opção pelo Cabri-Géomètre ou régua e compasso poderá apresentar argumentos diferentes na resolução da atividade. Outra variável é a presença da figura o que poderia dificultar um pouco a resolução. Apresentamos a seguir as possíveis estratégias.

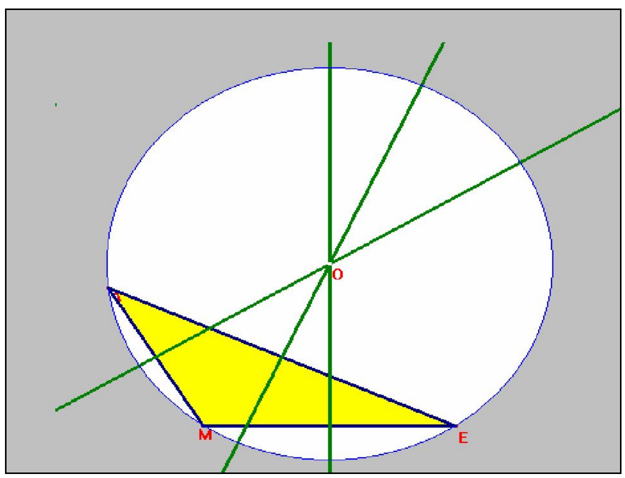


FIGURA 26 - O triângulo circunscrito, utilizando ferramentas do *software* Cabri-Géomètre.

Estratégia 1: Construir o triângulo AME, representado na ilustração 24, traçar as mediatrizes encontrando o ponto O logo em seguida encontrar a circunferência de centro o e raio AO. Com a construção a justificativa ao item *b* seria visual, ou seja, a partir da construção da figura responderia afirmativamente a pergunta.

Para alguns alunos pesquisados por Almeida (2007) a apresentação de um triângulo equilátero é a mais usual, consequentemente, associam a esse triângulo medidas iguais, quaisquer que sejam elas.

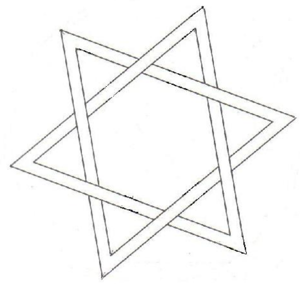
Estratégia 2: Segundo Ponte e Candeias (2005) a atividade tem uma fase experimental: ao construir a circunferência verifica-se, visualmente, que os pontos A, M e E pertencem a ela. Mas essa informação visual ainda não é suficiente para responder a questão: *Por quê?* Esta fase está relacionada a medição de distâncias, o que poderá ser feito com a ferramenta "comprimento" do *software* para verificar sua conjectura. Se esse procedimento for suficiente sua argumentação estará no empirismo ingênuo.

Estratégia 3: o aluno poderá utilizar a atividade 1 e a demonstração utilizada na estratégia 3 dessa atividade, para argumentar que sim, a circunferência passará pelos pontos A, M e E pois a distância do ponto de encontro das mediatrizes, o ponto O, aos vértices do triângulo são iguais. Portanto as distâncias OA, OB e OC representam o raio da circunferência.

Na atividade 3: *Sabendo que o encontro das mediatrizes é chamado de circuncentro e ainda, também é o centro da circunferência que circunscreve o triângulo o que você construiu é o circuncentro?* Ao contrário do que possa parecer não temos a intenção de repetir atividades para reforçar um conceito geométrico e, sim o que para Margolinas (1993) é evidente, a utilização dessas atividades podem dar sentido a respostas dos alunos. A simplicidade da noção de conceitos envolvidos na atividade 3 poderá levar o aluno à resposta afirmativa.

A atividade 4 obedece à metodologia aplicada às sessões a partir da 4ª. Um problema apresentado ao final da sessão para avaliar a apropriação do conceito apresentado, por parte dos alunos.

Atividade 4: Problema: trace a circunferência que contém as “pontas” da estrela.



Algumas estratégias podem ser elencadas juntamente com os procedimentos utilizados:

Estratégia 1: Construir as mediatrizes de um dos dois triângulos e, em seguida, marcar o seu ponto de encontro. Um procedimento correto de resolução da atividade. Utilizar esse ponto de encontro para construir a circunferência que contenha os vértices do triângulo escolhido, como o que pode ser observado na ilustração 28.

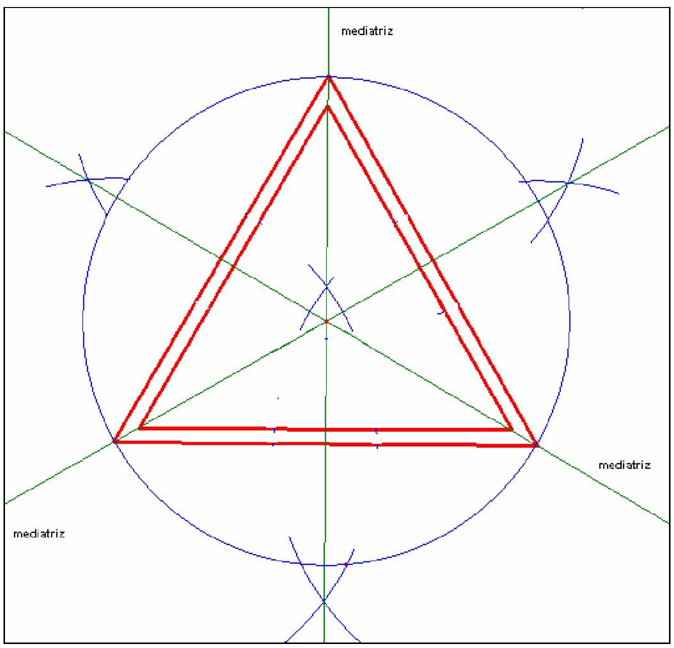
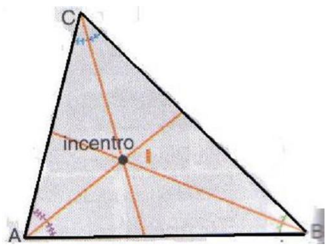


FIGURA 27 – Construção do circuncentro

Estratégia 2: não utilizará uma construção podendo responder a atividade utilizando uma justificativa escrita: *Como sabemos que a mediatriz de um segmento é o Lugar Geométrico dos pontos que equidistam das extremidades desse segmento, encontramos as* *mediatrizes dos lados do triângulo. O ponto de encontro das mediatrizes equidista dos vértices, pois o triângulo é equilátero então a distância do ponto de encontro ao vértice é raio da circunferência que vai passar por todos os raios;.*

2ª parte da 9ª sessão (segunda hora): Incentro

Atividade 1: Agora observe a desenho abaixo:



O desenho representa um triângulo e suas:
a) mediatrizes
b) bissetrizes
c) medianas
d) alturas

Por quê?

Usar um desenho para iniciar uma discussão entre os alunos para a resolução da atividade é um fator dominante nestas últimas sessões. Corroboramos com a ideia de Laborde e Caponni (1994, p. 52) “a Geometria ensinada trata de objetos teóricos, mas envolve também representações gráficas cujo papel no aprendizado da Geometria não precisa mais ser enfatizado”.

À primeira vista o desenho apresentado no início desta sessão oferece todos os fatores visuais para levar o aluno a responder quase que imediatamente a questão. A definição de bissetriz é o conhecimento necessário à resolução dessa atividade.

Nessa atividade temos como objetivo a construção da definição de incentro pelo aluno. Ao apresentarmos o desenho esperamos que sua resposta seja bissetriz nos remetendo a Margolinas (1993) quanto à repetição de uma atividade dentro da engenharia.

Atividade 2. No desenho apresentado na atividade 1 você pode observar que há uma interseção de três retas. Dê a este ponto de encontro o nome de I. É possível inscrever uma circunferência dentro do triângulo? Por quê?

A atividade 2 verificará a apropriação da definição de bissetriz, explorado na atividade 1, sendo introduzida uma nova informação. Ao resolver essa atividade temos como objetivo fazer com que o aluno apresente a justificativa da construção. Apresentamos a seguir as estratégias de resolução e seus procedimentos:

Estratégia 1: o aluno poderá utilizar-se do compasso e a partir do desenho oferecido na atividade 1, por meio de tentativas para desenhar a circunferência pedida, responde afirmativamente a indagação. Classificamos essa argumentação como empirismo ingênuo.

Estratégia 2: utilizando o Cabri-Géomètre ou mesmo a régua e compasso o aluno reproduzirá o desenho da atividade 1. Construir as bissetrizes de um triângulo, encontrar o ponto de encontro das mesmas. Encontrar a distância do ponto de encontro até os lados do triângulo, este será o raio da circunferência pedida. Após esse procedimento utiliza-se da função arrastar do *software* mudando a figura do triângulo, como pode ser observado na ilustração 29. Sua resposta a partir desse procedimento será que pode-se inscrever uma circunferência em vários tipos de triângulos. Classificamos como experiência crucial.

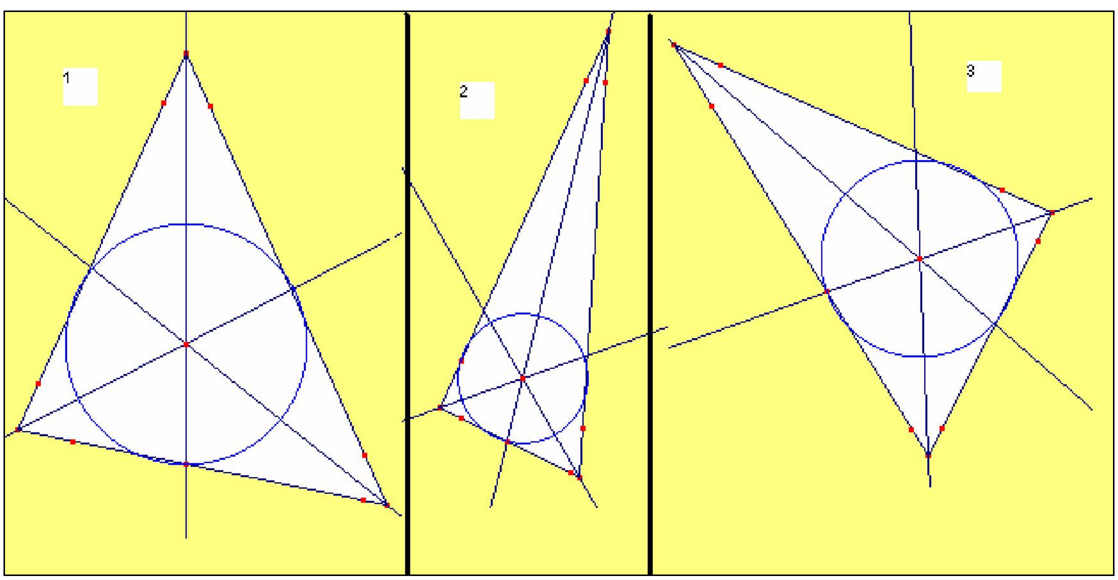


FIGURA 28 - Triângulos com medidas diferentes para encontrar a circunferência inscrita

Estratégia 3: A construção apresentada na ilustração 30 acompanhada de uma retroação do ambiente Cabri-Géomètre pode levar a argumentação ao exemplo genérico. A manipulação, por meio do "arrastar", de inúmeras figuras de triângulos representando uma classe poder levar o aluno a argumentar que sempre será possível inscrever uma circunferência dentro de um triângulo para isso basta encontrar o seu incentro e a reta perpendicular a um de seus lados, pois o raio de uma circunferência é perpendicular a reta tangente à circunferência, passando pelo ponto I. Os instrumentos régua e compasso também poderão ser utilizados.

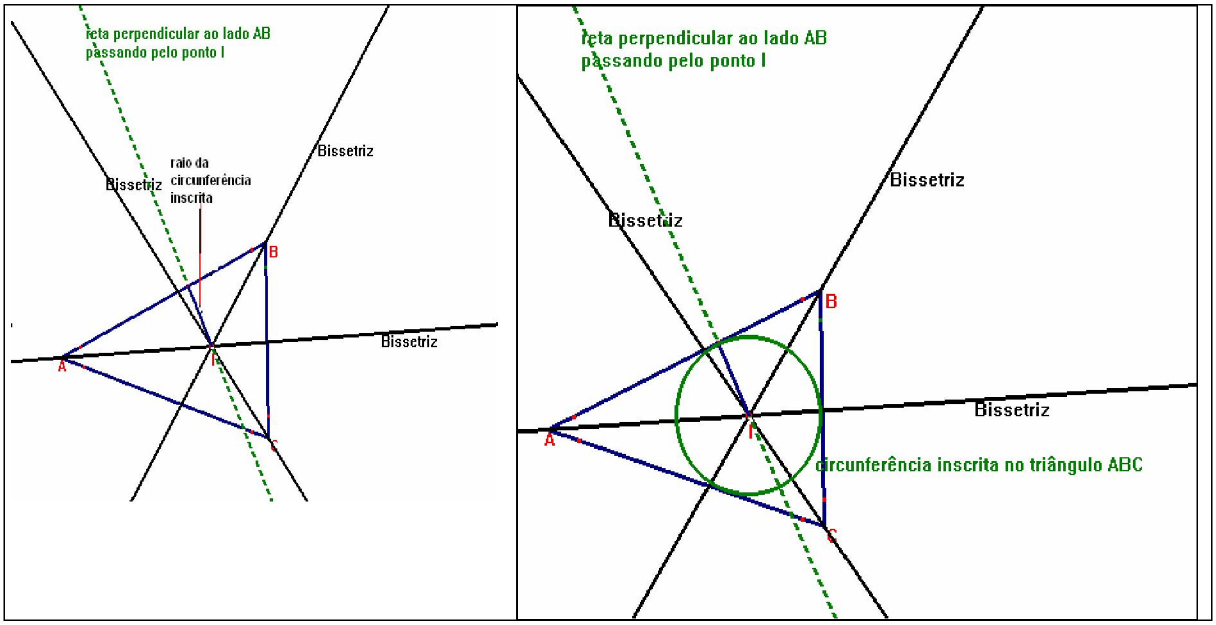


FIGURA 29 – Circunferência inscrita

Estratégia 4: Reconhecer que será necessário encontrar o incentro do triângulo que é o centro da circunferência pedida. A partir dele, encontrar a reta perpendicular a um de seus lados que passa pelo incentro. Usar a informação de que todo raio de uma circunferência é perpendicular a reta tangente a ela. Classificamos esse texto como sendo a experiência mental, pois o aluno não tem o auxílio do desenho para construir sua argumentação.

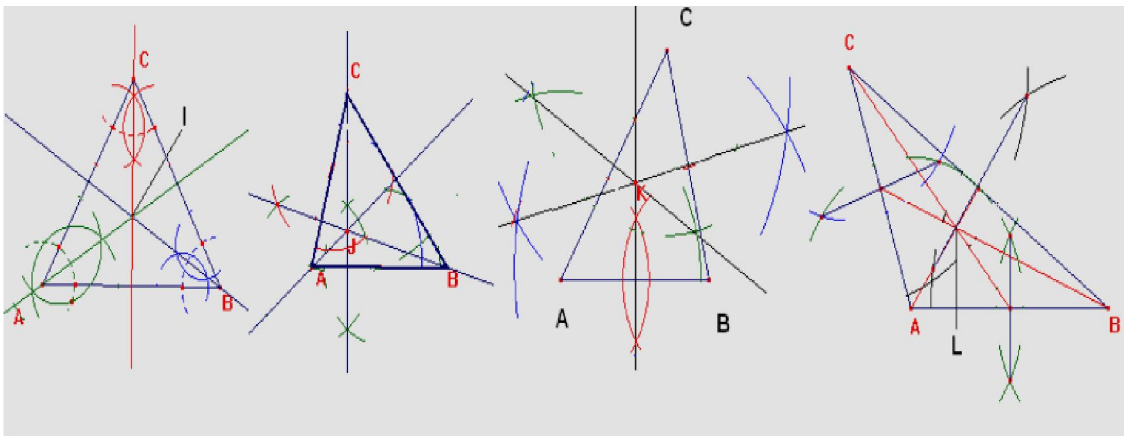
4.3.7. 10 ª sessão: Revendo os pontos notáveis do triângulo – uma apropriação dos conceitos.

Esta sessão vai ser aplicada algum tempo depois de aplicada a 9ª sessão. O objetivo dessa sessão é torná-la uma verificação da apropriação dos conceitos geométricos por parte dos alunos, usando o tempo decorrido entre a aplicação das sessões como um fator favorável a esta pesquisa.

Nesta sessão teremos um número maior de atividades bem com uma duração também maior. Acompanharemos quatro alunos de cada vez num total de oito; as atividades devem ser resolvidas individualmente. Essas foram escolhidas por meio de pesquisas em artigos de Geometria e trabalhos desenvolvidos com Geometria Dinâmica.

A primeira atividade é de visualização. Apresentamos os desenhos como forma de revisar o conteúdo nos preocupando com a compreensão das ideias matemáticas envolvidas.

Atividade 1. Considerando os pontos notáveis do triângulo, identifique os pontos I, J, K e L na **respectiva ordem.**



O objetivo dessa atividade é fazer com que os alunos relembrem os conhecimentos discutidos nas sessões já realizadas. Para isso, apresentamos aos alunos as construções dos pontos notáveis anteriormente realizadas pelos mesmos, buscando assim os conhecimentos prévios apropriados para a execução da atividade.

Segundo Rodrigues e Rodrigues (apud, BELLEMAIN, 2005, p.15), “um método que se adota é o de examinar a relação entre os dados fornecidos com um desenho de análise que representa a possível solução do problema e em seguida formula-se uma estratégia para encontrar a figura que se quer.” Nesse sentido uma das possíveis respostas estará ligada a uma “imitação” de construção desenvolvida segundo Bellemain (2005) com o *software* ou mesmo com os instrumentos régua e compasso.

A presença da figura e sua observação podem ser suficientes para a elaboração das respostas. Segundo Laborde e Capponi (1994) o aluno pode ou não ler as informações do desenho e interpretá-las geometricamente; em caso afirmativo o aluno dará a resposta correta e, a incorreta caso não saiba interpretar as informações contidas no desenho. Descartamos uma outra condição apresentada por Laborde e Capponi (1994) quando a atividade não fizer parte do seu rol de conhecimento, visto que essa está relacionada a um conceito previamente estabelecido em outras sessões.

Na atividade 2 elencamos algumas definições e afirmações que devem ser justificadas. O objetivo é verificar a evolução das argumentações dos conceitos envolvidos no conteúdo de pontos notáveis.

Atividade 2: Responda verdadeiro ou falso para as questões abaixo, justificando quando verdadeiras e também quando forem falsas: **(questões adaptadas e acessadas no site http://www.coladaweb.com/questoes/matematica/luggeom.htm).**

a) Num triângulo isósceles, o circuncentro coincide com o baricentro. ( )
b) Se o ortocentro é vértice do triângulo então o triângulo é retângulo. ( )
c) Se o circuncentro é externo ao triângulo, então o triângulo é obtusângulo. ( )
d) Se o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro estão alinhados, o triângulo é isósceles. ( )
e) As bissetrizes de um triângulo se cortam sobre um ponto que é equidistante dos lados. Este ponto é chamado incentro, e utilizado como centro da circunferência quando se quer inscrever esta circunferência no triângulo. (.....)
f) Lugar geométrico é uma sucessão de pontos ou de linhas que gozam de uma propriedade comum.( )

Para esta atividade disponibilizaremos o Cabri-Géomètre, pois é necessária a interatividade do *software*, sua principal característica, permitindo a criação de objetos matemáticos na tela do computador e a manipulação direta sobre eles.

No item ***a*** os alunos podem argumentar situando-se no exemplo genérico onde a função arrastar do Cabri-Géomètre fornecerá ao aluno a manipulação de vários tamanhos de triângulo dando-lhe uma classe de figuras da mesma natureza onde circuncentro e baricentro nunca se encontram. “O uso do deslocamento implica por si só na utilização de conhecimentos; a vantagem é que essas retroações partem de um dispositivo externo ao sujeito e independente do professor: desta forma, elas são suscetíveis de fazer o sujeito evoluir.” (LABORDE e CAPPONI, 1994, p. 56).

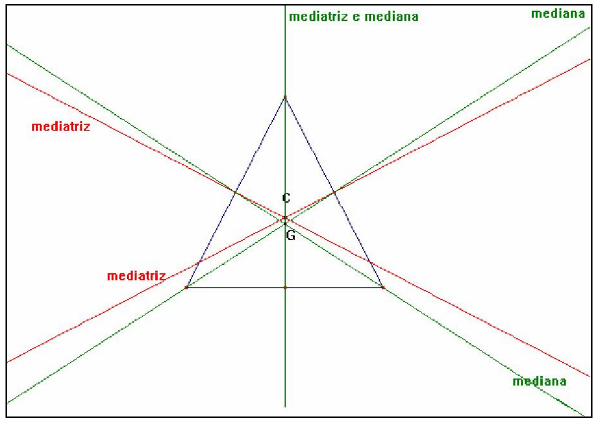


FIGURA 30 – Circuncentro e Baricentro

A questão *b: Se o ortocentro é vértice do triângulo então o triângulo é retângulo* envolve diretamente o conceito de altura de triângulo.

Podemos ter as seguintes estratégias de resolução:

Estratégia 1: O aluno responde que é correto e justifica da seguinte maneira: é verdade, pois a altura é a reta perpendicular ao lado do triângulo. A condição de perpendicularidade da altura classifica sua argumentação no empirismo ingênuo, satisfazendo-o com essa única informação.

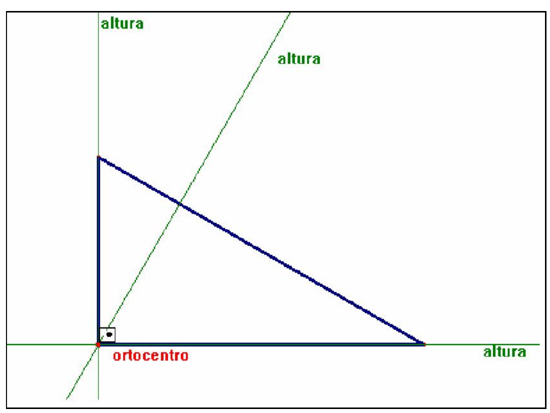


FIGURA 31 - O ortocentro no triângulo retângulo

Estratégia 2: Caso o aluno argumente que é correta a afirmação pois testou para todos os triângulos conhecidos e somente no triângulo retângulo coincidiu classificaremos sua argumentação como sendo o crucial.

A manipulação dos exemplos utilizando a função "arrastar" do *software* será suficiente para satisfazê-lo, chegando a veracidade da afirmação.

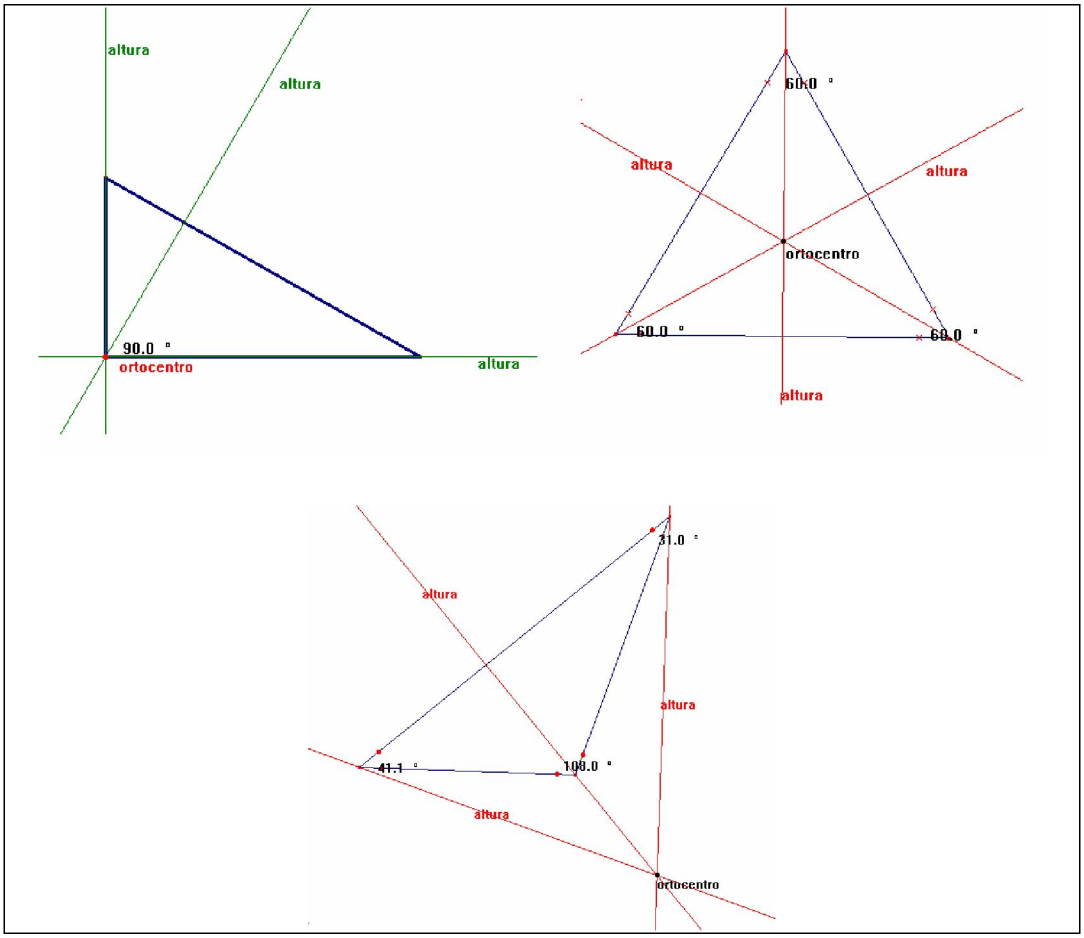


FIGURA 32 - Triângulos

Estratégia 3: Se o aluno utilizar uma demonstração sem referência à figura, então sua argumentação pode ser classificada de experiência mental.

Hipótese: O ortocentro é um dos vértices do triângulo ABC.
Tese: O triângulo ABC é retângulo.

Se o vértice do triângulo está no ortocentro as alturas do triângulo ABC se encontram em O ≡ A (um dos vértices) Seja Ha altura relativa ao lado a, Hb altura relativa ao lado b e Hc altura relativa ao lado c, temos que Hb é a reta suporte do lado b e Hc é a reta suporte do lado c, como as alturas são retas perpendiculares ao seu lado relativo então b é perpendicular a b e se encontram em A. Logo o triângulo é retângulo.

Na questão *c: Se o circuncentro é externo ao triângulo, então o triângulo é obtusângulo*, a resposta afirmativa pode vir da construção realizada no exercício anterior Estratégias de resolução da alternativa c:

Estratégia 1: construir um triângulo obtusângulo e encontrar o circuncentro utilizando o *software* ou a régua e compasso. Responderá afirmativamente classificando sua resposta como empirismo ingênuo.

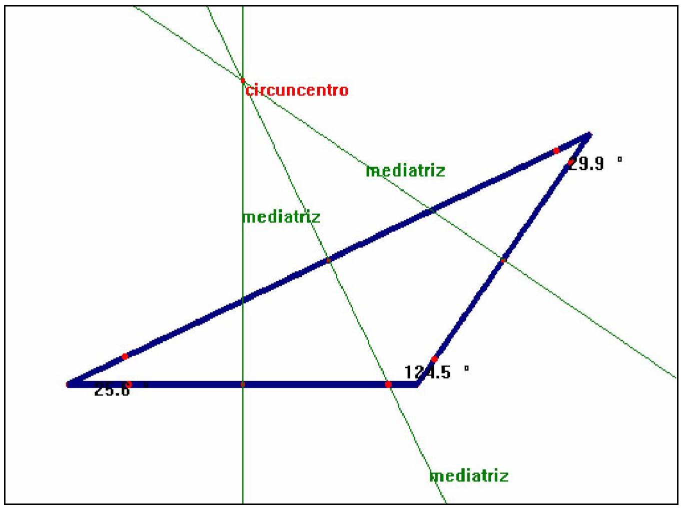


FIGURA 33 - Circuncentro

Estratégia 2: Constrói o triângulo obtusângulo mas ainda não se convence, utiliza a ferramenta arrastar *software* para encontrar triângulos diversos sendo que sua resposta será afirmativa pois é válida. Classificamos em experiência crucial.

No item *d) Se o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro estão alinhados, o triângulo é isósceles* o procedimento utilizado como na Fig. 34 pode ser uma das estratégias utilizadas;

Estratégia 1: Construir o triângulo isósceles e utilizar os comandos "bissetriz", "mediatriz", "ponto médio" e "reta perpendicular". Observando sua construção responderá afirmativamente a questão, pois encontrou o circuncentro, baricentro, ortocentro e incentro alinhados o que classifica como empirismo ingênuo.

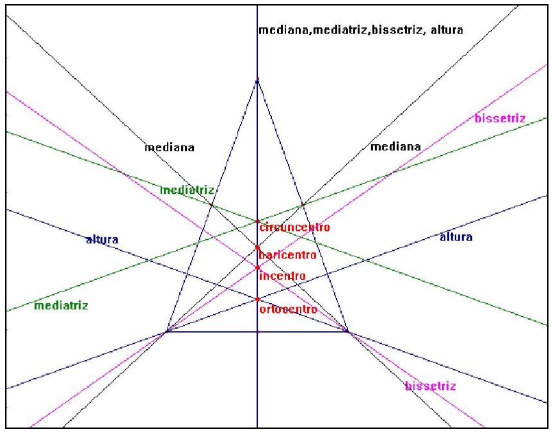
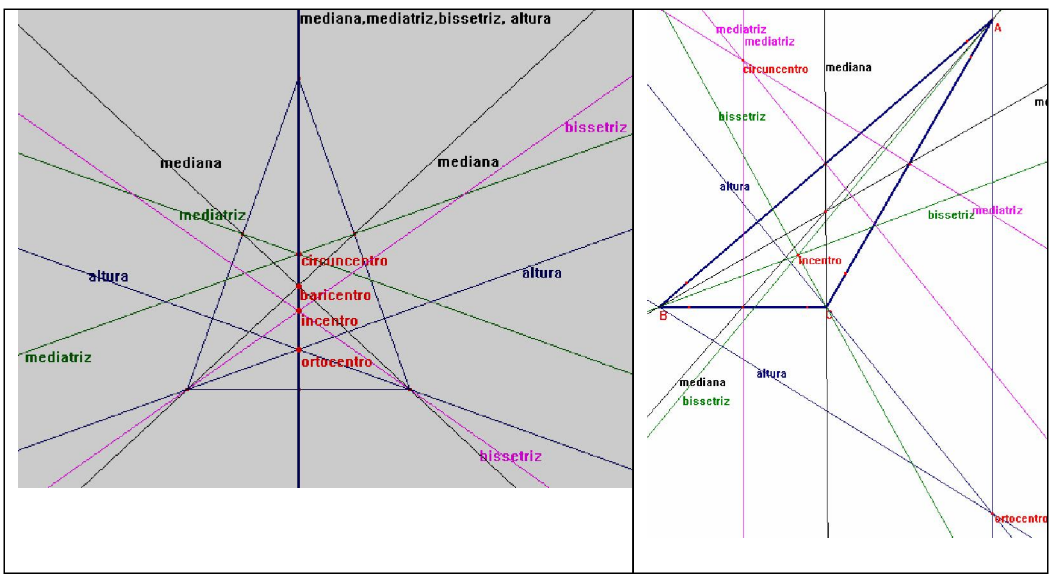


FIGURA 34 – Pontos notáveis no triângulo isósceles

Estratégia 2: Construir o triângulo e utilizar da função arrastar do *software*, como pode ser observado na Fig. 35, o aluno pode afirmar a proposição colocando sua argumentação na experiência crucial e chegando a conclusão que os pontos só estão alinhados se o triângulo for isósceles.



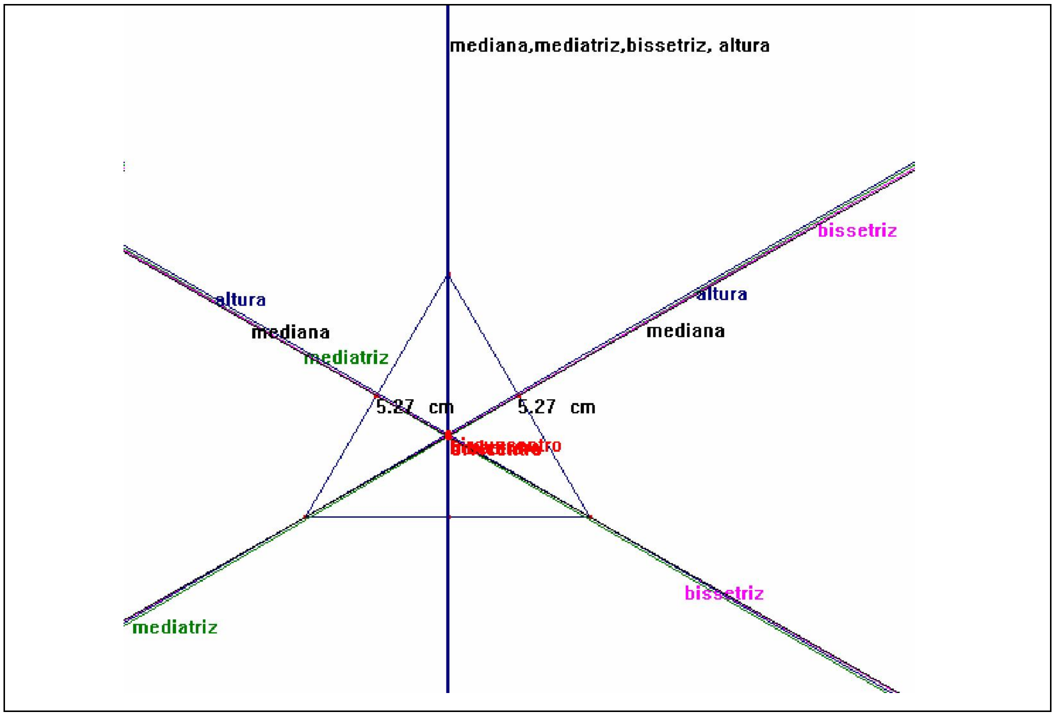


FIGURA 35 – Os pontos notáveis nos tipos de triângulo

Estratégia 3: O aluno poderá optar pela utilização da régua e compasso. Essa utilização poderá levá-lo a discordar da afirmação pelos erros de imprecisão que, segundo Santana (2005), pode ser acumulado durante a realização da atividade, levando o aluno a negar a afirmação mesmo quando o triângulo for isósceles.

A alternativa e: *as bissetrizes de um triângulo se cortam sobre um ponto que é equidistante dos lados. Este ponto é chamado incentro, e utilizado como centro da circunferência quando se quer inscrever esta circunferência no triângulo.*

Estratégia 1: desenhar um triângulo, como na ilustração 39, encontrar as bissetrizes dos ângulos do triângulo e seu ponto de encontro, em seguida medir usando a régua ou uma das ferramentas do *software* chegará a afirmação da atividade com o empirismo ingênuo.

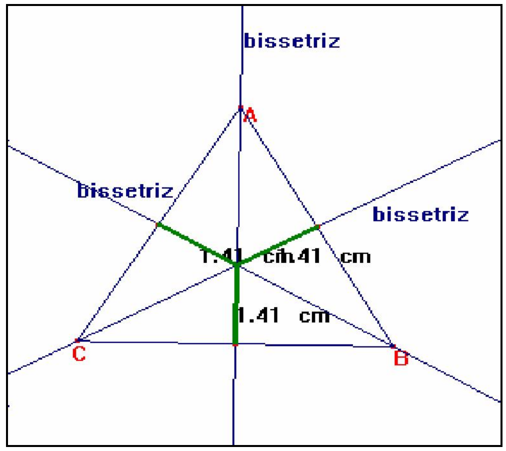


FIGURA 36 – O ponto de encontro das bissetrizes

Estratégia 2: desenhar um triângulo com medidas maiores, como pode ser observado na ilustração 40, e chegar a afirmação da atividade, argumentado que essa vale para qualquer triângulo, podemos classificar sua argumentação como experiência crucial.

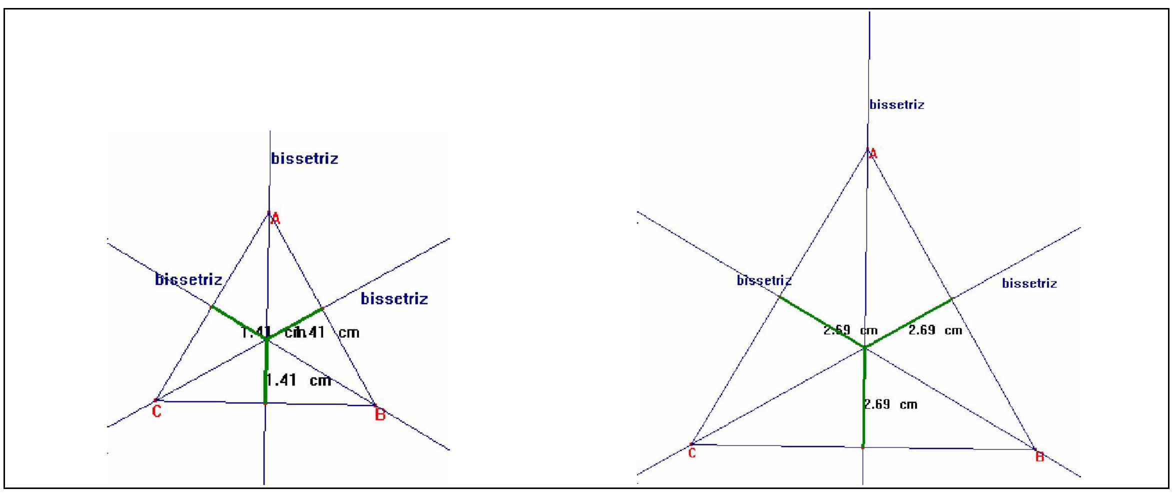


FIGURA 37 - O ponto de encontro das bissetrizes: 2º passo.

Estratégia 3: O aluno ainda se utiliza de um exemplo, neste caso uma construção geométrica, para generalizar suas descobertas inferindo serem validas para qualquer tipo de triângulo. Ou seja, a afirmação é de que o encontro das bissetrizes é o centro da circunferência inscrita no triângulo, o que pode ser observado na ilustração 41. Nesse caso a argumentação está no exemplo genérico.

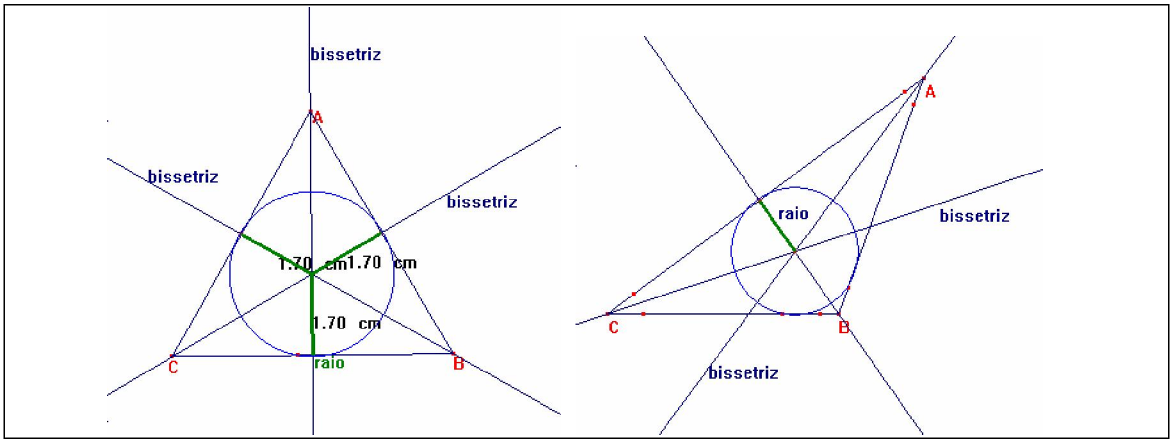


FIGURA 38 - O ponto de encontro das bissetrizes: 3º passo.

Estratégia 4: Quando o aluno se desprender das construções geométricas e observar que para inscrever uma circunferência em um triângulo basta encontrar o seu incentro e traçar por ele uma perpendicular a qualquer de seus lados, afirmando que a distância do incentro ao ponto de encontro da reta perpendicular com o lado é o raio da circunferência circunscrita ele estará na experiência mental.

A alternativa f) *Lugar geométrico é uma sucessão de pontos ou de linhas que gozam de uma propriedade comum,* relaciona-se a uma definição de Lugar Geométrico. Escolhemos essa atividade, pois "construir o lugar geométrico de pontos que satisfazem uma determinada condição é uma tarefa que implica algum conhecimento das propriedades das figuras geométricas [...]" (ABRANTES e SERRAZINA, 1999, pág. 83) e para Almeida (2007, p.31) "toda construção geométrica se constitui em um processo de obtenção de lugares geométricos".

A terceira atividade está relacionada a uma variável que em algumas sessões foi determinante: a presença da figura. Nesta atividade enfocaremos um dos pontos notáveis sendo preciso que o aluno tenha se apropriado de todos os conceitos, sabendo diferenciá-los.

Atividade 3: Dados os pontos A, B e C, determine a circunferência que os contenha

A resolução dessa atividade demandará a apropriação do conceito de pontos notáveis. A linguagem utilizada poderá ser formal, com o rigor de uma demonstração matemática ou informal, com palavras que não sigam o rigor de demonstrações matemáticas, mas que aqui serão colocadas no último nível de prova de Balacheff (1988), experiência mental. Esperamos que nessa atividade o conceito de mediatriz seja usado na resolução da atividade.

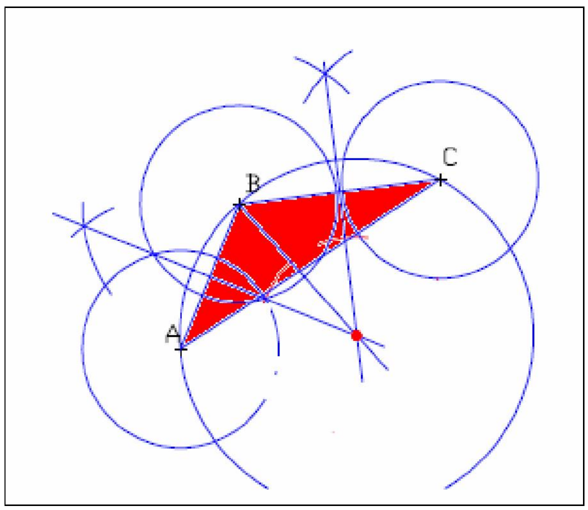


FIGURA 39 - A circunferência circunscrita no triângulo

Estratégia 1: Na realização de sua pesquisa Almeida (2007) constatou que muitos alunos uniam os pontos A, B e C formando o triângulo. O próximo passo é encontrar o circuncentro, sendo necessário para isso construir as mediatrizes do triângulo.

Estratégia 2: Sem preocupar-se com as construções geométricas o aluno usará a linguagem escrita para argumentar: unido os pontos A, B e C temos um triângulo, encontramos seu circuncentro, que é o ponto de encontro das mediatrizes, e esta a igual distância dos vértices do triângulo. A distância desse ponto aos vértices do triângulo é o raio da circunferência circunscrita.

4.4 Algumas considerações sobre Níveis de Prova

Ao apresentarmos nessa pesquisa a Tipologia de Provas (BALACHEFF, 1988) como fundamentação teórica, propusemos classificar as argumentações nos quatro níveis de provas estabelecidos por Balacheff, mas temos que considerar alguns aspectos que podem fazer com que essa pretensão não seja plenamente alcançada. São eles:

- O tempo que dispomos para aplicar a sequência didática, sabendo pelas pesquisas apresentadas que a produção de argumentações requer um acompanhamento longo e gradual do professor em sala de aula;
- As atividades desenvolvidas com construções geométricas podem auxiliar no aparecimento de argumentações, mas também podem inibir o aluno fazendo com que se contente unicamente com sua construção e em sua concepção a argumentação não seja necessária;
- A classificação dos níveis de prova ficará comprometida principalmente em relação ao último nível, experiência mental. Ao final da análise *a priori* podemos inferir ou mesmo afirmar que o aluno só chegará a esse nível de prova se não utilizar as construções geométricas, se desprendendo completamente dos apoios dados por essas construções, figuras ou desenhos sejam eles realizados no ambiente régua e compasso ou Cabri-Géomètre.

No próximo capítulo apresentaremos a experimentação realizada e a análise *a posteriori*.

CAPÍTULO 5.
A APLICAÇÃO DAS SESSÕES E A ANÁLISE DE RESULTADOS.

Neste capítulo apresentamos a realização da sequência didática e a análise a posteriori dos dados coletados. Utilizamos nessa análise a Tipologia de Provas (BALACHEFF, 1988) e também a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1986) buscando por meio da análise das argumentações, pontuar fases adidáticas (MARGOLINAS, 1993) e identificar os tipos de provas presentes nas argumentações dos alunos.

Foram aplicadas 10 sessões, totalizando 35 atividades, para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola da rede privada da região central da cidade de Aquidauana/MS. Esta escola foi escolhida por ser a única a disponibilizar o Laboratório de Informática e o *software* para o desenvolvimento da pesquisa.

Aplicamos as sessões no período vespertino em duas turmas do 8º ano com, uma média de, 27 alunos por sala. Dividimos a sequência em dois momentos: o primeiro momento com um total de 3 sessões com no máximo 3 atividades e o segundo, iniciado na quarta sessão contendo mais que três atividades.

5.1 Procedimentos de aplicação de cada sessão

Durante as sessões que duravam 1 hora apresentamos o conteúdo relativo a cada sessão, discutimos brevemente alguns conceitos e apresentamos as atividades. Dentre os 54 alunos[21] que realizaram as sessões, escolhemos 9 (nove) alunos para observar e acompanhar mais atentamente, colhendo dados por meio das sessões, dos arquivos do Cabri-Géomètre, das transcrições conseguidas por meio de gravações de falas dos alunos e algumas anotações feitas pela pesquisadora e, eventualmente, por dados fornecidos pela professora.

Esses alunos foram escolhidos obedecendo ao seguinte critério:

- 3 alunos com notas maiores ou igual a 0,0 e menores que 6,0, considerados pela professora com baixo rendimento nas aulas de Geometria e Matemática;

[21] A coordenação da escola onde se desenvolveu a pesquisa nos impôs a condição de trabalharmos com todos os alunos do 8º ano do Ensino Fundamental.

- 3 alunos com notas maiores ou igual a 6,0 e menores que 8,5. Considerados pela professora como bons alunos, apresentando dificuldades que variam de conteúdo para conteúdo;

- 3 alunos com notas maiores ou iguais a 8,5 e menores ou iguais a 10,0, considerados ótimos alunos, não apresentando dificuldades relacionadas ao conteúdo matemático ou qualquer outra disciplina.

Esta escolha foi pautada por Coelho (2000) que estabeleceu o mesmo critério dentro de um grupo de alunos voluntários, conseguindo, por meio desta escolha, um grupo heterogêneo. Não temos a intenção de efetuar comparações entre os alunos e sim verificar a evolução das argumentações ao realizar atividades envolvendo conceitos de Geometria por meio das Construções Geométricas.

QUADRO 5 – Código e descrição dos alunos

ALUNOS ESCOLHIDOS	
A1 **A2** **A3**	Alunos que fazem parte do grupo que apresenta dificuldade em Matemática e Geometria
A4 **A5** **A6**	Alunos que apresentam dificuldades em alguns conteúdos de Matemática e Geometria.
A7 **A8** **A9**	Alunos considerados excelentes pela professora de Geometria e também de outras disciplinas.

As sessões foram aplicadas no período de setembro/dezembro de 2007 e a última sessão em fevereiro de 2008. Muitas sessões foram realizadas com um intervalo de tempo maior que uma semana, o que era previsto inicialmente, e a 10ª sessão com um prazo maior.

Tentamos aliar o uso do software Cabri-Géomètre ao uso da régua e compasso, o que acabou sendo favorecido pela sala que nos foi disponibilizada, a sala de informática, munida de quadro branco, carteiras e 13 computadores, um ambiente propício para a realização desta pesquisa.

Na exposição de conteúdo, que não levava mais de 10 minutos, discutíamos o que iria ser trabalhado e os ambientes disponíveis: em seguida era iniciada a resolução de atividades. A princípio as atividades foram resolvidas em dupla e até mesmo em trio, mantido ao longo da pesquisa. Mas, vale ressaltar que tivemos também sessões aplicadas individualmente.

Esses momentos foram privilegiados ao abordarmos assuntos considerados mais complexos e principalmente os que recorriam a um número considerável de informações já apresentadas, tendo como objetivo verificar a apropriação do conteúdo por parte do aluno, como na 8ª sessão onde apresentamos o conceito de ortocentro e baricentro e também na 10ª sessão.

5.2. A Análise

Analisaremos as atividades na sequência em que foram aplicadas e levando em consideração os resultados obtidos por 8 alunos, ou seja, analisando em grupo ou individualmente a partir do procedimento adotado em cada sessão. A escolha de oito dos nove alunos deu-se por um dos alunos ter mudado de escola durante a realização da pesquisa.

5.2.1 As sessões 1, 2 e 3

A sequência inicial (sessões 1 a 3) de atividades privilegiou o uso dos instrumentos de desenho régua e compasso assim como, teve também o objetivo de familiarizar o aluno com o *software* a ser utilizado. As atividades representaram uma revisão do conteúdo essencial ao desenvolvimento das sessões subsequentes. Nessas sessões iniciais foi possível identificar de acordo com Brousseau (1997), os intercâmbios comunicativos, primordiais nos momentos de conflitos da execução das atividades planejadas.

Apresentamos no quadro a seguir algumas considerações resultantes dessas atividades.

QUADRO 6 - Quadro síntese das sessões iniciais

	Sessão1	**Sessão 2**	**Sessão 3**
A1 e A2	Dificuldade no uso dos instrumentos não apresentando justificativas	Utilizaram o *software* com desenvoltura. O conceito de LG foi discutido amplamente.	Constroem a mediana utilizando o *software* com muita dificuldade não respondem as questões.
A3 e A4	Dificuldade no uso dos instrumentos de desenho. Justificam usando sempre a régua e o compasso.	Dificuldade com o uso do *software*. Atividades incompletas, mas participaram da discussão do conceito de LG.	Utilizam régua e compasso apresentando o conceito de mediana utilizando os passos da construção.
A5 e A6	Não conseguiam entender o porquê das justificativas. Justificam usando régua e compasso	Passaram a se preocupar sempre com as justificativas das atividades. Discutiam muito antes de apresentar uma idéia.	Utilizam régua e compasso e apresentam um esboço na construção de tentativas de justificativas, mas utilizam a régua para justificar.

A7, A8 e A9	As primeiras atividades foram feitas quase obrigadas.	Participam da atividade com o *software*, discutem e justificam essas atividades entre o trio.	Resolvem a atividade utilizando régua e compasso e não justificam as atividades

Dentre estas três sessões iniciais destacamos a sessão 2, quando discutimos o conceito de lugar geométrico, um conceito novo apresentado aos alunos.

O conceito de lugar geométrico está presente em objetos estudados no início de um curso de Geometria e em alguns objetos matemáticos estudados nesta pesquisa, como a mediatriz de um segmento: lugar geométrico dos pontos equidistantes dos extremos desse segmento; bissetriz de um ângulo: lugar geométrico dos pontos equidistantes dos lados desse ângulo.

Nosso objetivo não é tratar lugares geométricos com rigor, entendemos que este não é o objetivo da pesquisa e sim tratar lugares geométricos "sob um ponto de vista dinâmico, como a trajetória de um ponto em movimento que satisfaz a uma determinada propriedade". (BITTAR e MARQUES, 2005, p. 8).

Atividade 1. Determine os pontos que estejam, ao mesmo tempo, a 2,0 cm de A e a 3,0 cm de B.

a) Que figura você encontrou?
b) Por que precisamos fazer desse jeito?

A atividade 1 teve por objetivo a discussão da definição de circunferência e a partir dessa definição apresentar o conceito de lugar geométrico. Registramos o diálogo entre alguns alunos da sala e o professor/pesquisador.

P: Como desenhamos uma circunferência?
A1: É só escolher um tamanho e pronto, tem que usar o compasso para fazer a bola.
Outro aluno[22]: É raio, tem que ter o tamanho do raio.
P: - então é só ter o raio e desenhar?
Outro aluno: É. - Acho que sim.

[22] Sempre que for utilizado o termo outro aluno estaremos nos referindo a um aluno não participante da pesquisa.

P: então é só ter o raio e desenhar?

Outro aluno: Não, tem que ter o centro também junto com o raio aí sim a gente desenha.

P: A circunferência é o centro e um raio?

Outro aluno: Não ela tem um monte de raio, ela é a união de todos os pontos que vão do centro até o final do raio.

P: Então podemos dizer que as circunferências são todas assim.

Outro aluno: Sim só vai mudar o raio.

P: então nós vamos a partir de agora chamar a circunferência de Lugar Geométrico de todos os pontos que estão a uma mesma distância do centro, e essa distância vamos chamar de que?

A1: De raio, é o raio.

Depois desta discussão estes alunos resolveram a atividade 1 do seguinte modo: Desenharam a circunferência com raio 2 cm e outra com raio 3 cm, marcaram o ponto C no encontro das duas circunferências, mas não observaram o outro ponto de encontro. Uniram os pontos A, B e C, mas não identificaram um triângulo ao unir esses pontos, como pode ser observado na Fig. 40.

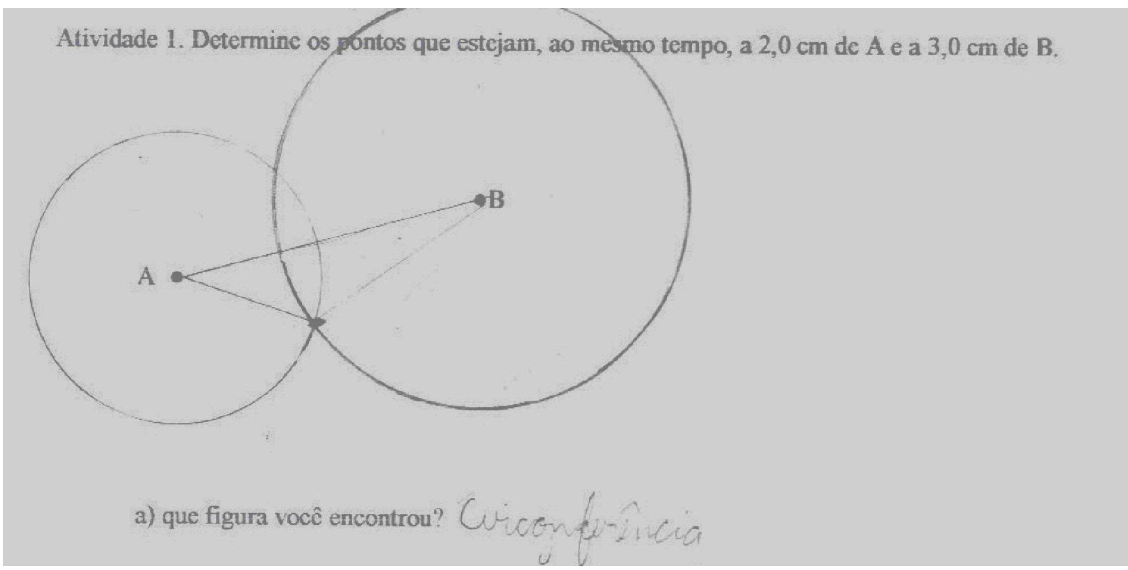


FIGURA 40 - Protocolo doa alunos A1 e outro aluno da atividade 1, sessão 2.

Apesar de toda a discussão e a pequena explanação por nós realizada poucos alunos realizaram a atividade. E mesmo os alunos que resolveram não souberam justificar. O conceito de Lugar Geométrico foi entendido, pois as discussões ocorridas em sala e as participações dos alunos comprovam este fato, mas não podemos afirmar que este conhecimento foi institucionalizado, pois os alunos não conseguiram utilizar o conhecimento adquirido na atividade.

A atividade a seguir requereu a utilização do Cabri-Géomètre. Na atividade foi oferecido ajuda aos alunos de como usar a barra de ferramentas do *software* e as opções simetria central e rastro. Nesta atividade os conhecimentos em jogo não serão influenciados por esta ajuda já que nosso interesse é a justificativa desta construção.

Atividade 2: Construa uma circunferência e uma reta que não se cortam. Marque um ponto P sobre a circunferência. Construa o ponto X simétrico de P em relação à reta. Observe o movimento do ponto X quando movimentarmos o ponto P. Utilize a opção Rastro para visualizar a trajetória de um ponto a partir da movimentação de outro.

Nessa atividade destacamos o procedimento realizado pelos alunos A7, A8 e A9. Obedeceram todos os passos dados na atividade.

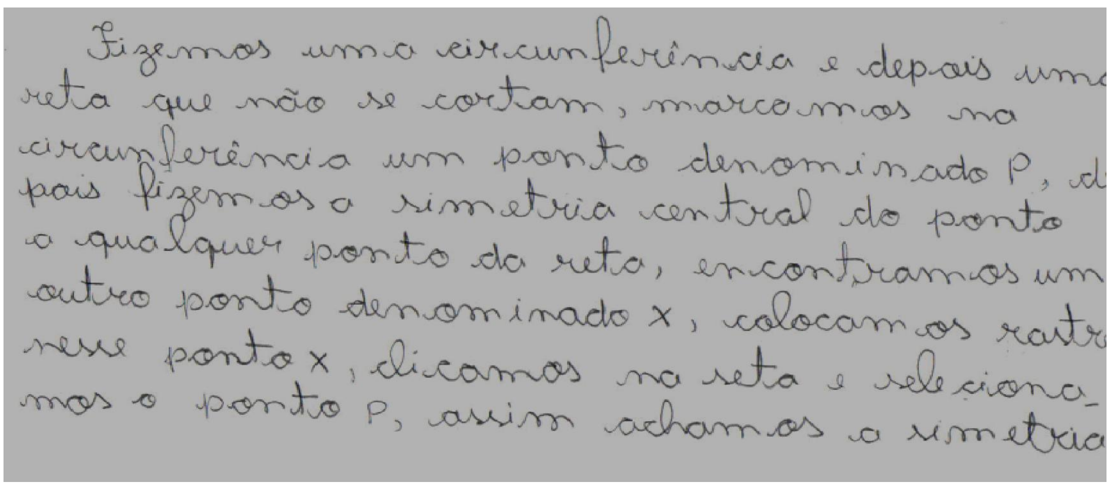

Fizemos uma circunferência e depois um
reta que não se cortam, marcamos na
circunferência um ponto denominado P, d
pois fizemos a simetria central do ponto
o qualquer ponto da reta, encontramos um
outro ponto denominado X, colocamos rastr
nesse ponto X, clicamos na reta e seleciona_
mos o ponto P, assim achamos o simetria

FIGURA 41 - Protocolo da Atividade 2, sessão2 dos alunos A7, A8 e A9

Mas o ponto, que chamaram de A, que deveria ser marcado na circunferência foi marcado no seu interior. Essa resolução implica na definição de circunferência, constatando a não apropriação por parte destes alunos de Lugar Geométrico (circunferência).

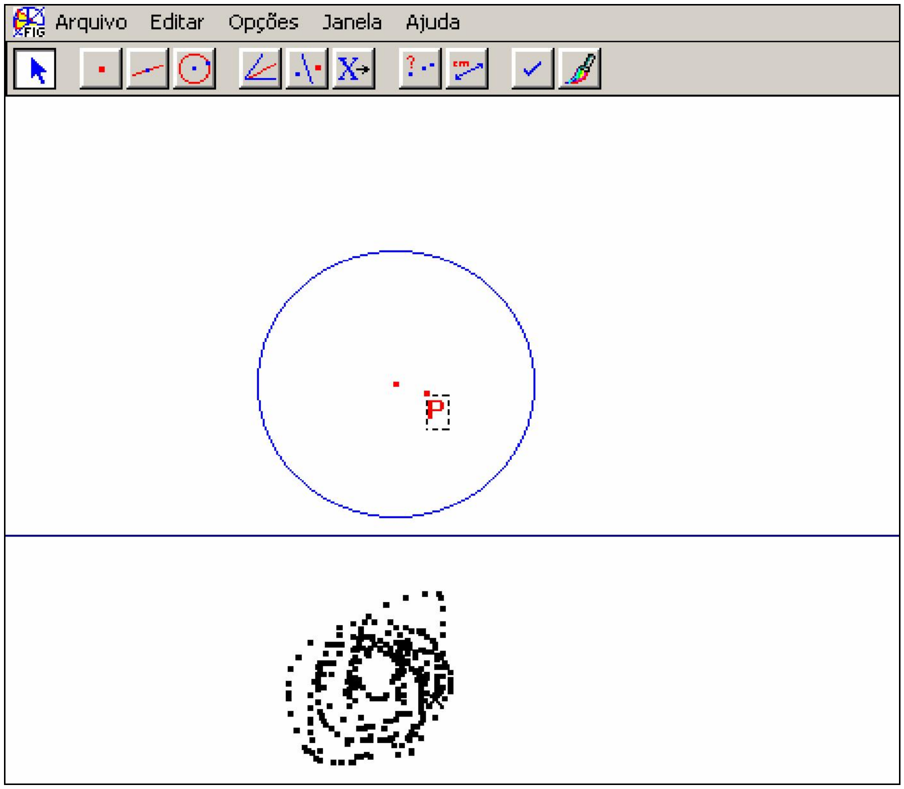


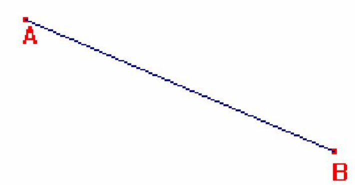
FIGURA 42 - Protocolo dos alunos A7, A8 e A9, continuação da resolução da atividade 2

Na sessão 2 ministramos uma aula expositiva aos alunos, procedimento que se repetiu em algumas sessões. A exposição de conteúdo não levava mais de 15 minutos, em seguida era iniciada a resolução de atividades. Nesta atividade as dúvidas foram muitas mas tentamos conduzir para a resolução de atividade sem a nossa ajuda. Poderiam questionar o seu colega de dupla e até mesmo quem estivesse ao seu redor trocar informações. Muitos alunos optaram por não se envolver nas discussões o que foi o caso dos alunos A7, A8 e A9, e foram os únicos dentre o grupo pesquisado a não colocar o ponto na circunferência.

A sessão 3 foi executada unicamente com o auxílio do Cabri-Géomètre. Na sessão 2 pudemos verificar a dificuldade com a barra de ferramentas do *software* e também com a manipulação do mouse, usamos também esta sessão para contornar esta dificuldade e apresentar o conceito de mediana, que sozinho não ofereceria dificuldades, mas poderia se tornar um empecilho nas próximas sessões.

5.2.2 A Sessão 4: Construção da mediatriz

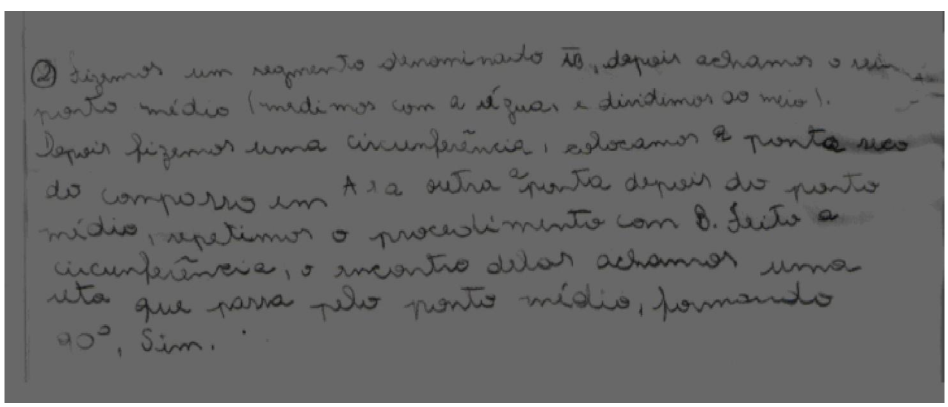
A quarta sessão teve por objetivo a construção da mediatriz de um segmento, A atividade 1 é uma aplicação e exploração de procedimentos de construção, já utilizados em sessões anteriores aos quais não tínhamos intenção de avaliar. Esta atividade não apresentou dificuldade por parte dos alunos para ser executada. Inferimos que este fato se deve à apresentação prévia e assimilação dos elementos de construção do ponto médio e da reta perpendicular. Nesta fase foi permitido ao aluno o auxílio, entendido como uma orientação no uso da régua e compasso.

Atividade 1. Com o uso da régua e compasso encontre o ponto médio do segmento AB. Desenhe usando régua e compasso o segmento perpendicular passando pelo ponto médio.	

Por ser uma atividade de fácil resolução ao qual utiliza procedimentos discutidos anteriormente não apresentamos aqui sua resolução.

Apresentamos no quadro 6 as respostas de cada grupo na atividade.

QUADRO 7 – Procedimentos utilizados pelos alunos na atividade 2, sessão 4.

Atividade 2: A mediatriz de um segmento é a reta perpendicular que passa ao mesmo tempo pelo seu ponto médio. O que você construiu é a mediatriz do segmento AB? Como você justifica sua resposta?	
A1 e A2	A justificativa, desses alunos, do procedimento de construção baseou-se no emprego da régua, medindo o segmento, situando a argumentação no empirismo ingênuo.
A3 e A4	
A5 e A6	
A7 e A8	Empirismo ingênuo com a seguinte justificativa  (2) fizemos um segmento denominado $\overline{AB}$, depois achamos o seu ponto médio (medimos com a régua e dividimos ao meio). Depois fizemos uma circunferência, colocamos a ponta seca do compasso em A e a outra ponta depois do ponto médio, repetimos o procedimento com B. Feito a circunferência, o encontro delas achamos uma reta que passa pelo ponto médio, formando 90°, Sim.

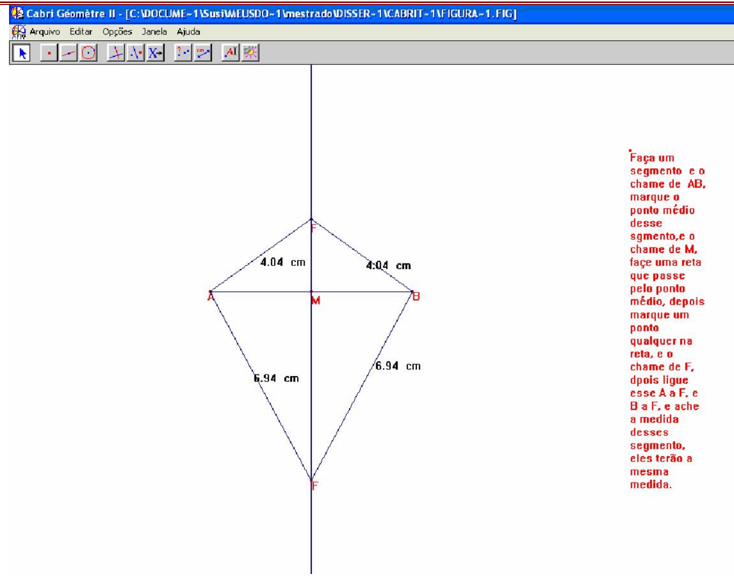
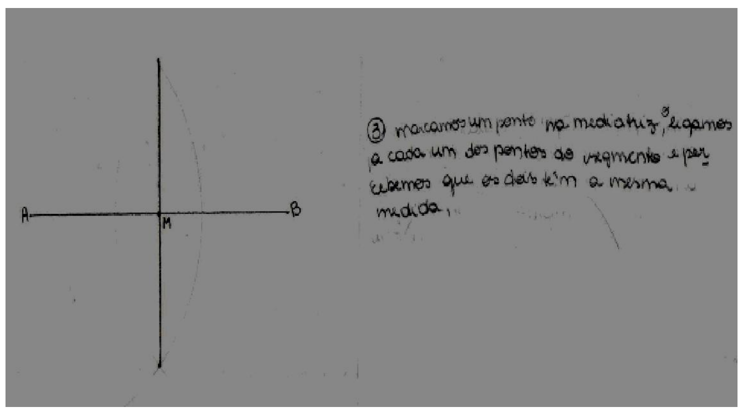
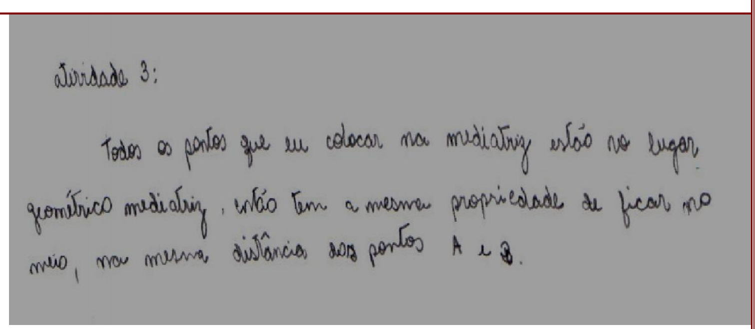
Nesta atividade obtivemos um padrão nas respostas, quase todas mencionando o uso da régua e compasso na construção da mediatriz, utilizando os mesmos procedimentos de construção de ponto médio e reta perpendicular. Barreto (2005) nos diz que ao construir a mediatriz com alunos do 8º ano do Ensino Fundamental pôde observar também que, os alunos, quando utilizam procedimentos de construção conseguem se apropriar dos conceitos geométricos e propriedades da mediatriz e realizar atividades, posteriores, nas quais esse conceito era exigido.

Destacaremos aqui a terceira atividade da sessão. Lembramos que as atividades eram desenvolvidas no laboratório da informática e os alunos tinham sempre a mão o *software*. Eles utilizaram a régua e compasso e, ao mesmo tempo, o *software* indo ao encontro do que nos diz Bittar (2000) sobre o uso integrado do computador à prática pedagógica do professor de modo a oferecer novas possibilidades de progressão e não simplesmente ilustrar conceitos aprendidos.

A união destes dois ambientes o tornou um 'meio' constituído por dificuldades que poderiam aparecer com o uso de qualquer um dos instrumentos tais como a manipulação e a argumentação desenvolvida a partir do seu uso e ao mesmo tempo oferecia a oportunidade de resolução do problema.

QUADRO 8 – Procedimentos de resolução da atividade 3, sessão 4

Atividade 3: A mediatriz também pode ser descrita como um conjunto de pontos que apresentam alguma propriedade interessante relacionada com a distância. Que propriedade é essa? Justifique sua afirmação.	
A1 e A2 Empirismo ingênuo, a régua foi utilizada para efetuar a descoberta.	3)- Achamos o ponto médio de um segmento. Fazendo esta descobrimos uma mediatriz e descobrimos que todos os segmentos tem igua mesma medida.

<table>
<tr>
<td>A3 e A4 – experiência crucial
A3: Professora, a mediatriz é igual a circunferência?
P: Como assim?
A3: Ela tem distância igual.
P: que distância?
A4: Não sei explicar.
A3: Eu sei, acho... como a senhora falou que a circunferência era na outra aula?
P: A circunferência era um Lugar geométrico.
A3:É, a mediatriz também pode ser um LG?
P: pode? Por quê?
A3: Por ter uma propriedade, a reta mediatriz está no meio do segmento e se marcar um ponto nela vai ter a mesma distância do extremo do segmento.
P: você tem certeza?
A3: tenho professora eu fiz no Cabri também.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>A5 e A6: empirismo ingênuo utilizaram a régua para medir a distância.</td>
<td>
</td>
</tr>
<tr>
<td>A7 e A8 – exemplo genérico com uma tentativa de formalização no conceito de mediatriz. Podemos inferir com essa resposta que há uma linha tênue entre exemplo genérico e experiência mental.</td>
<td>
</td>
</tr>
</table>

No diálogo realizado entre os alunos A3 e A4 e a pesquisadora durante a resolução da atividade 4 diagnosticamos, segundo Brousseau, uma situação de aprendizagem. Existia um conhecimento de base (Lugar Geométrico) que apesar de não formalizado foi suficiente para desestabilizar um conceito formado por meio da retroação oferecida pelo meio (Cabri-Géomètre). Isso foi suficiente para que o aluno reformulasse a sua resposta.

Diálogo:
A3: A4, você olhou o desenho que eu fiz (at. 1), o que você vê de igual?
A4: Desenhamos de novo a circunferência, repetimos o que fizemos no início das aulas aqui.
A3: Não A4. Você é... me empresta a régua, se eu marcar um pontinho na mediatriz e ligar o pontinho com A e com B, pronto é igual.
A4: E daí?
A3: Vai dar sempre igual, viu sempre igual.
A4: Mas por quê?
A3: Porque está no meio, a mediatriz sempre vai estar no meio, nós construímos assim.
A4: Então porque mediana não é mediatriz?

Neste diálogo ficou claro que a apropriação, por parte desses dois alunos, do conceito de mediana apesar de não estruturado foi apresentada como um fator de desequilíbrio para a resolução da atividade, uma dúvida que surgiu no grupo. Uma apropriação de conhecimento, pois segundo Brousseau o aluno terá adquirido o conhecimento quando for capaz de utilizá-lo em outras situações sem indicações.

Me aproximei um pouco mais.
A3*: Eu não sei. Professora, por quê?*
P: O que é mediana?

Esse procedimento de base se mostrou rapidamente insuficiente; o aluno se viu obrigado a realizar acomodações, modificações de seu sistema de conhecimento. Houve incerteza do aluno quanto às decisões a tomar. O aluno esperava que respondêssemos sua pergunta, tirando sua dúvida. Em vez disso, lhe respondemos com uma pergunta obrigando-o a refletir sobre o conceito de mediana.

Segundo Margolinas (1993, p. 38) *"não é o silêncio do professor que caracteriza as fases adidáticas, mas o que ele diz*". Neste momento houve a devolução, pois os alunos ao serem indagados continuaram no trabalho de resolução da atividade

Nesta fase o aluno pode pensar numa resposta inicial (procedimento de base que é relativo aos saberes e conhecimentos anteriores), porém essa não é a resposta desejada. O professor não pode dizer ao aluno o que ele quer que ele faça, e, no entanto, o aluno deve agir de maneira a ter êxito na tarefa.

A3: Já sei, já sei é o ângulo perpendicular; a mediana não tem o ângulo.
A4: Não é ângulo perpendicular; é ângulo de 90º.

A3: É verdade ela vai ficando torta (se referindo a mediana, recorreu a sessão 3 feita no Cabri) e vai chegando mais perto de um dos pontos A ou B, depende.

Na situação adidática o conhecimento visado é, *a priori*, indispensável para passar da estratégia de base à estratégia de resolução. O meio utilizado para validação foi o Cabri.

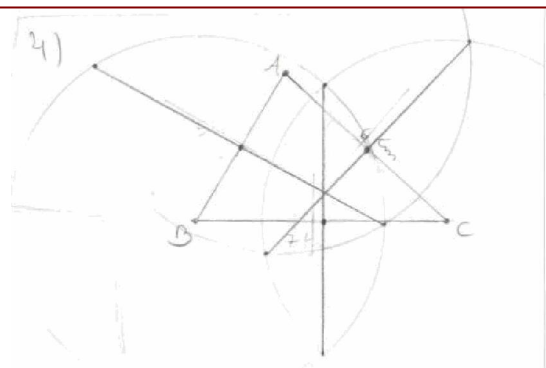
A4: É isso professora?
P: É, mas porque não escreveram?
A3: É muito difícil escrever.

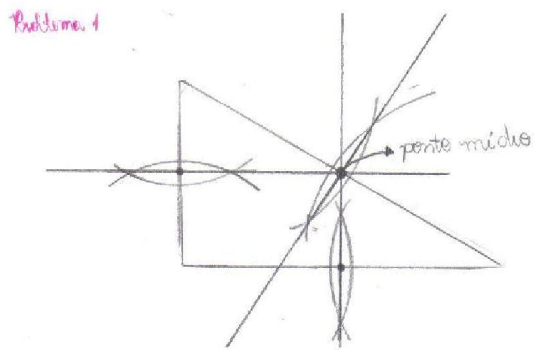
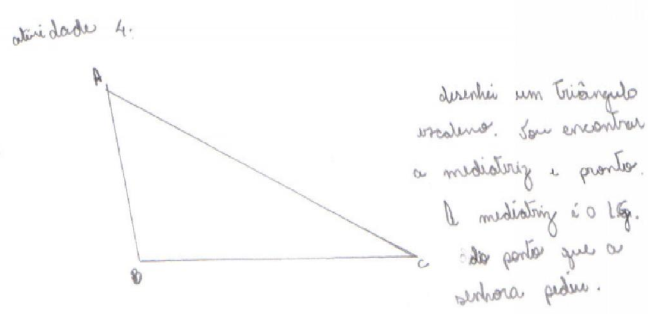
Ao respondermos afirmativamente a pergunta esta fase deixou de ser adidática, pois segundo Margolinas (1993) o professor, nessa situação, priva-se da sua responsabilidade que é ensinar o saber e faz com que seja descrita somente a atividade do aluno, o que não aconteceu quando respondemos a questão e tiramos do aluno essa possibilidade.

Ao final de cada sessão foi apresentada uma atividade e os alunos recebiam algumas instruções para resolução, dentre elas ficou claro que poderiam levar a atividade para resolver em casa. Cada dupla, que assim quisesse, recebia uma cópia da atividade para levar para casa.

QUADRO 9 - Procedimento de resolução da atividade 4, sessão 4

<table>
<tr><td colspan="2">Atividade 4. Numa certa fazenda, a área destinada ao pasto de gado tem forma triangular, de lados iguais a 5 km, 6 km e 7 km. O proprietário pretende construir um curral num ponto equidistante dos vértices desse triângulo. A que distância aproximada de cada vértice ficará o curral?</td></tr>
<tr><td>A1 e A2</td><td>Não resolveram a atividade</td></tr>
<tr><td>A3 e A4

A apresentação da construção sem uma justificativa não nos</td><td>
</td></tr>
</table>

oferece dados para situar em um dos níveis de prova. A5 e A6	
A7 e A8: Exemplo genérico, pois apesar de apresentar uma argumentação que nos remete a experiência mental ainda se apóia em uma construção.	

A construção dos alunos A3 e A4, foi realizada com o uso dos instrumentos, régua e compasso como podemos observar no quadro 8. Durante esta construção foi registrado o diálogo abaixo, em que ficou clara a apropriação, por parte destes alunos, do conceito de mediatriz e das suas propriedades.

Diálogo:

A3: colocamos os pontos A, B e C e colocamos as medidas. Como tem que estar numa mesma distância igual para todo mundo (A, B e C) usamos a mediatriz.

A4: Eu queria usar a mediana, mas ela entorta e não ia dar certo.

A3: Se é triangulo tem três lados têm três mediatrizes. A gente construiu todas.

Esta atividade também foi executada com o auxílio do *software* Cabri-Géomètre. Estes alunos utilizaram-no para argumentar o que tinham feito enquanto nos explicavam a resolução da atividade.

A4: Eu fiz um desenho maior aqui no Cabri e deu a mesma coisa, vai sempre se encontrar, mas o desenho da M2 não ficou o encontro dentro, mas encontrou.

P: porque este ponto ficou para fora?

A3: porque o triângulo é diferente, é menor.

P: é só por isso?

Houve uma devolução, os alunos se apropriaram do problema, se envolveram a ponto de pedirem para levá-lo casa, pois não dispúnhamos de tempo para resolvê-lo em sala. Tivemos a oportunidade de explorar um conceito geométrico implícito na atividade. Em nenhum momento foi apresentado aos alunos o conceito de triângulos isósceles, equilátero ou escaleno. De fato, com o uso do *software* acabou por apresentar por meio das movimentações da figura construída os diversos tipos de triângulos e suas mediatrizes, como observamos no diálogo que se segue:

Usaram o cabri novamente para desenhar um triângulo maior.
A3: Não, é porque ele tem jeito diferente, ele é escaleno, mas acho que em algum caso ele vai ficar para fora, pode ser o do escaleno.
P: Porque esse é o ponto que vocês querem?
A4: Nós medimos com a régua... Mas está na mediatriz e da mediatriz até a ponta do triângulo é igual.

A resposta à pergunta por nós realizada, foi apresentada com segurança o que não tinha sido observado nas sessões anteriores. As discussões em sala que sucederam a explanação dos alunos A3 e A4 foi muito rica no sentido de apresentar fatos que acabaram por comprovar alguns dados, tais como: a apropriação por parte de alguns alunos da sala do conceito de mediatriz e de conceitos geométricos que não estavam em jogo na atividade, como mediana e tipos de triângulos.

Conseguimos nesta sessão os três tipos de prova apresentados por Balacheff (1988), empirismo ingênuo, experiência crucial e exemplo genérico. Salientamos que em todas as atividades o Cabri-Géomètre foi utilizado para oferecer dados que ajudassem nas argumentações apresentadas pelos alunos.

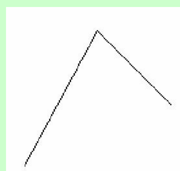
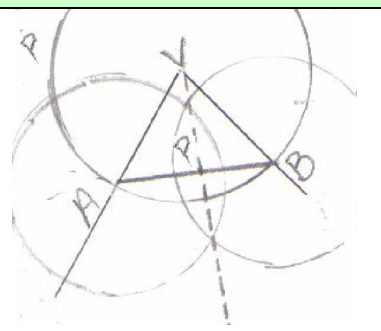
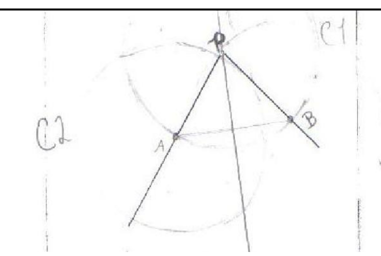
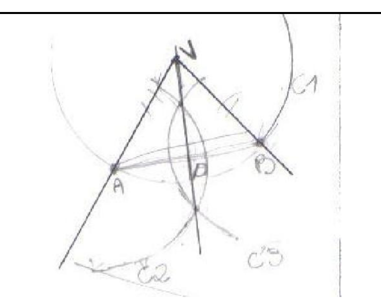
5.2.3 Análise da Sessão 5: Construção da bissetriz.

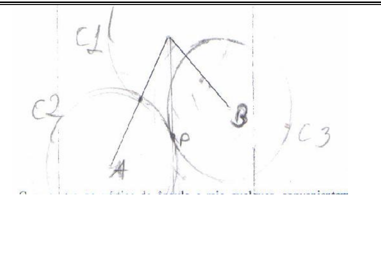
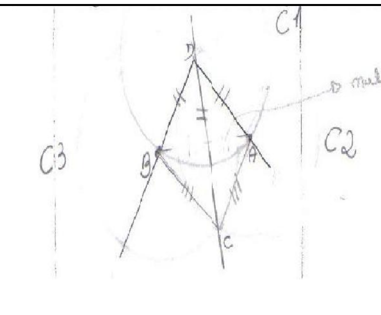
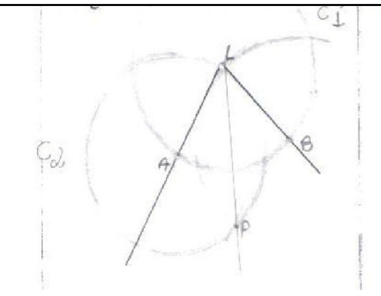
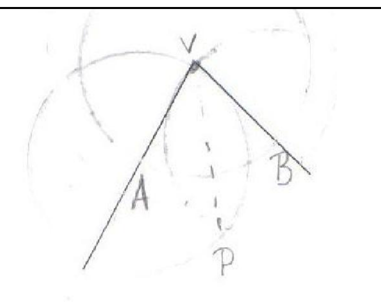
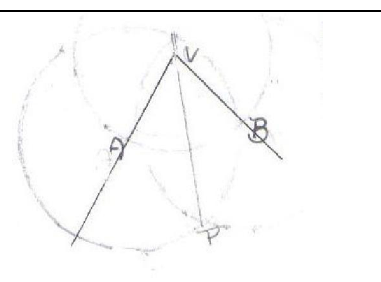
Esta sessão foi desenvolvida individualmente. Nessa parte da sequência os oito alunos, sujeitos da pesquisa, já não tinham dificuldades no uso dos instrumentos de desenho ou com o *software*, pudemos então nos ater aos resultados sem interferências que pudessem influenciar na apropriação de conhecimentos e na argumentação.

A sequência de atividades que compõe esta sessão apresenta o conceito de bissetriz seguindo a metodologia apresentada na sessão anterior. Esta sessão foi aplicada após uma aula, sobre congruência de triângulos, ministrada pela professora do 8º ano da sala pesquisada. Este conteúdo aparece como subsequente ao conteúdo de bissetriz de um triângulo, no livro adotado.

Para essa sessão apresentaremos as atividades 1 e 2 analisadas conjuntamente o que pode ser observado no quadro 10.

QUADRO 10 - Análise das atividades 1 e 2 dos sujeitos da pesquisa.

Alunos	**Atividade 1**: Para o ângulo abaixo construa a bissetriz, obedecendo aos passos dados: 	**Atividade 2**: A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico dos pontos que equidistam dos lados desse ângulo. O que foi construído é realmente uma bissetriz?
A1 Sua argumentação não o situa em nenhum nível de prova		*Desenhei a circunferência C1 e os raios VA e VB são iguais e o VP é o mesmo para os dois.* Observamos que o aluno coloca o ponto P no lugar errado não associando este ponto ao encontro das circunferências.
A2 : empirismo ingênuo		*Sim, pois se medirmos você irá ver que irá ficar a mesma medida dos dois lados do triângulo.*
A3		*Sim, pois desenhei a circunferência C1 e os raios VA=VB pois é o raio e PA = PB pois é o raio da circunferência C2 e C3.*

A4		*Sim, pois desenhando a circunferência C1 consegui descobrir que A e B são iguais. Fiz as circunferências C2 e C3 e onde elas se encontraram formam o ponto P. E como este triângulo é isósceles as circunferências C2 e C3 são iguais.*
A5		*Sim. Os lados BD e DA são iguais, pois são raios, os lados BC e AC também são raios das circunferências C3 e C2. O lado DC é igual para os dois triângulos. Assim os lados são iguais (todos os triângulos) então os ângulos todos são iguais e o segmento DC é o lugar geométrico dos pontos que estão no meio do ângulo.*
A6 **Empirismo ingênuo**		*Sim, pois ao desenhar a circunferência C1 sobre o ponto L, encontramos que AL = BL. Se os dois lados são congruentes é um Δ isósceles, então AP = BP. De uma forma mais fácil, ao medir, encontramos a mesma medida.*
A7 **Empirismo ingênuo**		*Sim desenhei uma circunferência C1, com isso VA ficou igual a VB formando, eles raios iguais, assim formando um triângulo e se cortarmos ele ao meio ficarão do mesmo tamanho.*
A8		*Desenhei a circunferência C1 e os raios VA e VB são iguais e o VP e mesmo para os dois.*

Ao analisarmos os procedimentos do quadro 10 pudemos concluir que os alunos não apresentam uma evolução no nível de prova, ou seja, passar de uma a outra, mas é possível verificar que A3 na sua tentativa de argumentação apresenta um embrião do exemplo genérico, assim como A6 que desenvolve um discurso que poderia levá-lo também ao exemplo genérico mas, acaba por escolher o empirismo ingênuo. O aluno A4 não apresenta uma formalização na sua escrita, mas diagnosticamos avanço nas suas argumentações orais. Dialogamos muito para que todos transformassem a linguagem oral em escrita registrando suas justificativas, mas dificilmente esse aluno conseguia escrever o que falava. A seguir transcrevemos o diálogo:

A4: professora, LG tem sempre uma propriedade, no caso a bissetriz fica no meio dos ângulos igual a mediatriz no meio do segmento.
P: Sim, mas e daí?
A4: é como se do ponto A a P e de P a B fosse igual..., não é igual.
P: A4, mas a sua construção está certa?
A4: Não, professora, eu não consigo usar a régua direito, o compasso cai toda hora.
P: então explica A4.
A4: Se a gente usa a circunferência tem raio, não é? ... É ... então... do vértice até A e do vértice até B é raio? É..., é igual então? Pronto eu tenho triângulo isósceles e do vértice até P é altura, pronto acabou.
P:Por quê?
A4: eu tenho triângulos iguais, então a altura é bissetriz, a altura é LG?
P: É?
A4: Não, acho... não sei.

Os pontos A e B no desenho não estão exatamente posicionados nas marcas que foram feitas, ele menciona que são iguais, mas não comenta que são raios da circunferência construída. Ao construir as circunferências C2 e C3 não usa os pontos A e B e sim o local onde estão as letras A e B. Sua construção ficou errada, mas o aluno A4 comenta, quando perguntado, sobre o seu desenho, que sabia que o desenho estava errado mas a idéia do exercício não. Então o colocamos como na análise a priori no exemplo genérico.

Eu entendi o que tinha que ser feito, mas não consigo escrever eu sei que o triângulo é isósceles e, pelo caso dos lados, os triângulos são iguais, mas como eu explico?

Fica claro que o aluno se apropriou do conceito estudado em sala e conseguiu pensar na atividade; tomou o problema para si, formulou, procurou por respostas, podemos dizer que este aluno viveu uma fase adidática. Seu problema foi a escrita formal matemática.

A aula de congruência de triângulos realizada num intervalo de tempo próximo à aplicação da sessão (4 dias antes) de fato, foi um fator importante nas respostas. Por outro lado todos os alunos, sujeitos da pesquisa fizeram referência a este conteúdo ao justificarem suas respostas, mas ao usarem as construções puderam aplicar os conceitos estudados e segundo A7: - *Ah! Agora eu sei o porquê, que quando eu tenho LAL é congruente, se eu* *dobrar a folha na bissetriz posso colocar um em cima do outro e vão ser iguais. LAL é para dois triângulos.*

Segundo Pais (1996, p. 69)

> [...] os alunos com idade entre 11 e 15 anos frequentemente têm grandes dificuldades na leitura de propriedades geométricas, pois na leitura do desenho o aluno pode fixar a sua atenção num determinado aspecto gráfico particular o que lhe impede de visualizar a figura como um todo.

A atividade seguinte desta sessão apresentava vários desenhos de ângulos onde pedíamos para o aluno encontrar a bissetriz para cada um desses desenhos. Ao analisarmos as respostas dadas para a figura a seguir dentre os oito alunos pesquisados somente os alunos A4 e A7 afirmaram que em todos os casos era possível encontrar a bissetriz; os outros 6 apresentaram respostas iguais, o desenho 2 e o desenho 4. Tivemos no desenho 4 uma resposta recorrente para quase todos os alunos: não foi possível construir a bissetriz por falta de espaço, logo não existe a bissetriz deste ângulo. As respostas negativas quanto a existência da bissetriz deu-se exclusivamente pela dificuldade da construção da bissetriz no desenho apresentado, ou seja, a variável presença do desenho foi uma determinante para a não realização da tarefa.

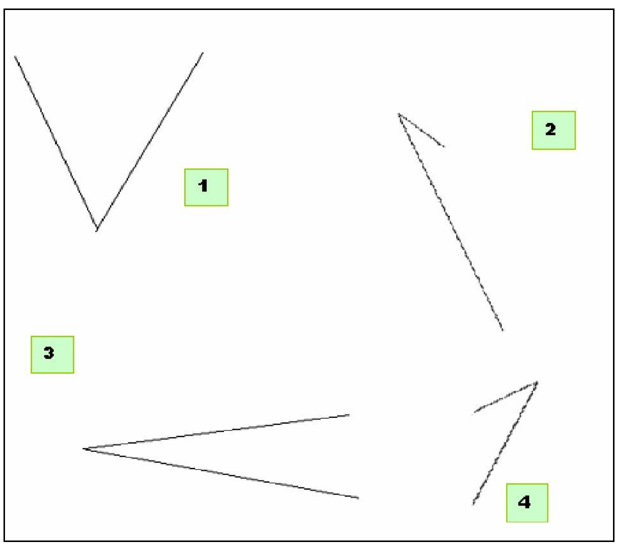


FIGURA 43 - Atividade 3 da sessão 5.

A atividade 4, *desenhe duas retas concorrentes, a reta c e a reta d e construa o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de c e de d,* foi a que apresentou o maior índice, dentre as atividades, de não realização. Sua não resolução é associada à falta do desenho o que é confirmado pela afirmação do aluno A1: *Professora, a senhora esqueceu do desenho na última atividade.*

A sala o acompanhou na afirmação com uma ou duas exceções; todos disseram que não teria como resolver sem o desenho. Muitos ficaram em dúvida quanto ao que eram retas concorrentes o que foi discutido amplamente antes da resolução da atividade. Não vamos nos ater a essa discussão visto não ser esse o conhecimento que estava em jogo na atividade e sim, o conceito de bissetriz.

No quadro a seguir é possível observar o protocolo de A4 que resolveu a atividade depois de alguns minutos. Este aluno não participou da discussão da sala, mas também comentou sobre a presença do desenho, aqui uma variável didática importante. Foi possível gravar o diálogo que realizou com o seu colega que não corresponde a um sujeito da pesquisa.

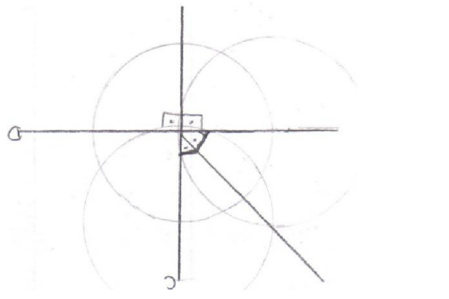
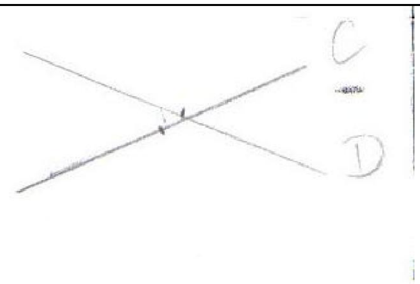
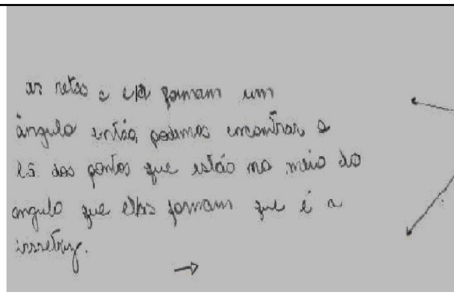
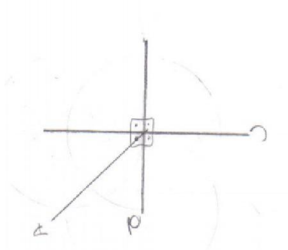
QUADRO 11 – Protocolo do diálogo de A4 da atividade 4, sessão 5.

A4*: Eu vou desenhar retas perpendiculares que são concorrentes.*
Outro aluno*: Por quê?*
A4*: Elas são concorrentes e a construção da bissetriz vai ficar mais fácil.*
Outro aluno*: Como você sabe que é bissetriz?*
A4*: Você lembra da definição de bissetriz; está no meu caderno eu anotei.* (presumo que tenha feito anotações o que era permitido durante as sessões).
Outro aluno: *Mas e daí?*
A4*: Como é um LG então qualquer ponto que eu tomar na bissetriz vai estar a igual distância das retas que desenhei. Pronto por isso.*
Outro aluno*: Não entendi como você sabe que é bissetriz.*
A4: *Me dá seu caderno, olha aqui nós construímos a bissetriz lembra da congruência de triângulos, porquê você acha que estudamos construções primeiro? Para aprender de onde vêm as definições, para ficar mais fácil. Você tem que prestar atenção.*

Esse diálogo não teve nenhum acompanhamento direto, ou seja, somente tivemos acesso a ele após efetuarmos a transcrição. Podemos inferir que houve uma apropriação da definição de bissetriz por meio das construções geométricas, ajudando-o a entender esse objeto matemático aplicando-o em uma atividade que não fazia referência ao seu uso. O que pode ser acompanhado no quadro a seguir.

QUADRO 12 – Protocolos da atividade 4, sessão 5.

Atividade 4: Desenhe duas retas concorrentes, a reta *c* e a reta *d* e construa o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de *c* e *d*.

A1		Sem argumentação
A2	Não realizou a atividade	
A3	Não realizou a atividade	
A4		
A5		Exemplo genérico
A6	Não realizou a atividade	
A7	Não realizou a atividade	
A8		Não apresentou argumentação

Observamos nos protocolos realizados que as construções respondem parcialmente a questão. Pudemos notar que a bissetriz foi desenhada somente em um quadrante do desenho que em sua maioria representavam retas perpendiculares. Inferimos que a falta de argumentações para essa atividade seja uma consequência do enunciado do exercício, que não sugere uma justificativa para o procedimento.

O problema 4 da sessão 5 foi discutido ao iniciarmos a 6ª sessão. Conversamos sobre o conteúdo apresentado, a bissetriz, e os alunos foram conceitualizando, apresentando propriedades e discutindo prováveis erros ocorridos na resolução das atividades da sessão. Pedimos para que falassem devagar, pois estávamos gravando as falas de cada um que se dispusesse a falar. Colocamos o enunciado da atividade no quadro e iniciamos o diálogo.

P: E aí, como podemos resolver?
A4: temos que usar bissetriz, tenho certeza.
P: por quê?
A4: Este foi o assunto da sessão.
P: Então não podemos usar informações que já adquirimos nas outras sessões, para resolver esta atividade?
A4: Não sei. (levemente em dúvida).
A8: Eu acho que dá para usar mediatriz, porque queremos uma reta que esteja no meio da reta d e c.
A5: Não dá não, porque se você usar a mediatriz vai ter que usar reta perpendicular e quando eu fiz o desenho as minhas retas c e d já são perpendiculares.
Outro aluno*: Mas e daí, você desenhou errado eu não desenhei perpendicular, elas se cruzam formando um x.*
P: A posição das retas tem importância?
Outro aluno*: Tem sim professora, se for perpendicular é de um jeito se forma um x é de outro.*
P: Por quê?
Outro aluno*: Não, não tem. Só a distância pode ser que fique diferente.*
P: Então podemos colocar qualquer desenho?
Pode, pode sim. (vários alunos ao mesmo tempo).
Desenhei retas concorrentes.
P: mas e agora o que vamos fazer?
Outro aluno*: a bissetriz divide o ângulo no meio então podemos usar ela.*
A7*: Professora não é melhor usar a mediatriz, pois qualquer ponto nela está na mesma distância dos segmentos.*
Outro aluno*: e como é que você vai desenhar a mediatriz?*
A7*: Isso é fácil.*
Ela se dirigiu ao quadro e tentou desenhar.
A7*: Acho que não dá, mediatriz é para uma reta e aqui são duas. Eu teria que fazer uma para cada e no final não ia dar certo eu ia ter duas respostas uma para esta reta (reta c) e outra para esta reta (reta d).*
P: Não pode ter duas respostas?
Pode, pode sim.
A7*: Não professora eu estou usando a mediatriz e é por isso que não vai dar certo. Não é mediatriz, a mediatriz iria dar pontos que estão a uma mesma distância de uma reta, mas e a outra? Não dá mesmo.*

Para Margolinas (1993, p. 40) “o aluno deve ter a ocasião de reconhecer a verdade ou a falsidade de seu resultado e não deve enganar-se e permanecer no erro”. O aluno reconheceu que estava errado ao se dirigir ao quadro e iniciar a sua construção. Se este aluno tivesse certeza do que fazer então segundo Margolinas não existiria aprendizagem.

A8: *Tem que usar bissetriz.*
P: *Como?E por quê?*
A5: *A bissetriz divide o ângulo no meio.*
A8: *E daí. Eu sei que usa a bissetriz, mas como?*
A5: *Você não sabe construir?*
A8: *Já sei. Se eu pegar só a metade do desenho?*
P: *O que, você vai ter se pegar só a metade?*
A8: *Eu vou ter o ângulo. Pronto eu consegui.*
Ele explicou o que estava pensando.
Eu sei que a bissetriz divide o ângulo no meio, então eu pego uma parte do desenho (apagou a outra parte do desenho), construo a bissetriz, desenho a bissetriz e pronto encontrei a reta.
P: *A reta que você procura é a bissetriz?*
A8: *É toda ela é só você colocar a outra metade do desenho e continuar a bissetriz.*

Nesse diálogo é possível registrar que os alunos pesquisados tiveram uma evolução não nas suas argumentações como é nosso objetivo, mas nas tentativas de justificar uma atividade o que para nós já representa um ganho.

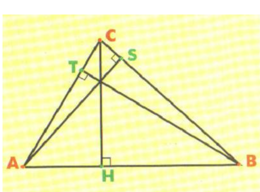
5.2.4 7ª sessão: as alturas

Esta sessão foi desenvolvida em dupla. Esse procedimento foi necessário já que alguns computadores estavam na revisão o que nos foi avisado com uma semana de antecedência, fato que nos permitiu organizar a sessão para o trabalho em dupla.

Apresentaremos no quadro 10 a atividade 1 das duplas e os procedimentos e argumentações apresentados por cada dupla.

QUADRO 13 – Procedimentos de resolução da atividade 1, sessão 7.

Atividade 1: dado o triângulo ABC, chamamos de altura do triângulo relativamente ao lado BC o segmento AS, perpendicular a BC e que passa pelo ponto A, como mostra a figura abaixo.



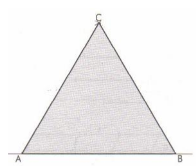
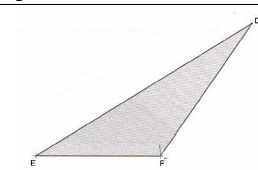
Observando o desenho podemos afirmar que existe mais que uma altura? Por quê?

A1 e A2	*Sim, porque o triângulo tem mais de um lado.*
A3 e A4	*Sim pois, há mais de um lado e os segmentos que saem de algum lado formam*

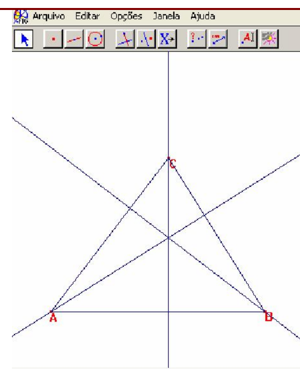
	uma reta perpendicular.
A5 e A6	*Como a altura é relativa a cada lado do triângulo então vamos ter três alturas, mas podemos encontrar só duas para determinar o ponto de encontro.*
A7 e A8	*Sim, pois existe mais de um lado e todas as retas partidas dos vértices são perpendiculares e formam 90º.*

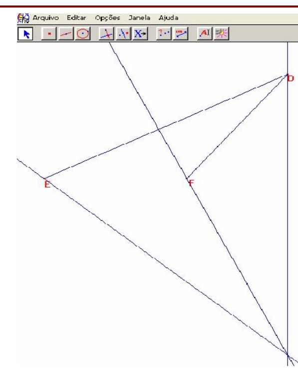
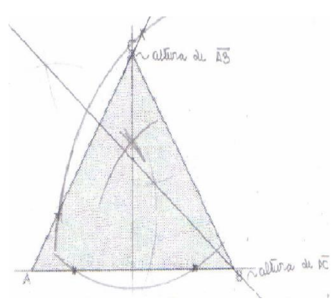
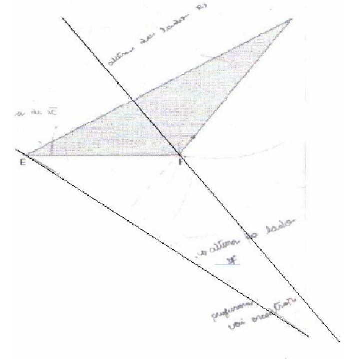
Apresentamos a resolução dessa atividade para compreendermos alguns procedimentos utilizados na resolução da atividade 2.

QUADRO 14 – Protocolos da atividade 2, sessão 7.

<table>
<tr><td colspan="3">Atividade 2: Construa as alturas dos triângulos abaixo, seguindo os passos apresentados.</td></tr>
<tr><td>
</td><td>a) Construa uma reta perpendicular à reta AB passando pelo ponto C;
2) Faça o mesmo procedimento para os lados BC e CA
3) Agora repita os procedimentos 1 e 2 no triângulo DEF</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A1 e A2

A3 e A4

A7 e A8</td><td colspan="2">


</td></tr>
<tr><td>A5 e A6</td><td colspan="2">
</td></tr>
<tr><td colspan="3">Baseando-se nas suas construções, responda as questões abaixo:
2.1) Observe o triângulo ABC. Ele é um triângulo equilátero.
a) Poderemos afirmar que as alturas construídas também são mediatrizes?
b) E ainda, será que elas são também medianas desse triângulo?
c) Explique ou justifique suas respostas.</td></tr>
</table>

2.2) Observe o triângulo DEF ele é um triângulo escaleno. a) O que você construiu foram as alturas do triângulo? Justifique sua resposta..	
A1 e A2	1-a) Sim, pois ela forma 90° com o lado oposto. b) Não, porque o lado não é cortado ao meio, mas tem 90° c) Não, pois não passa pelo ponto médio 2- a) Sim, porque elas passam pelo prolongamento do segmento
A3 e A4	1-a) Sim, pois a reta partida do segmento ao vértice oposto é uma reta perpendicular. b) Sim, pois todos os segmentos que encontram os lados formam um ângulo de 90°, formando uma reta perpendicular. c) Sim, pois todos os segmentos dividem o ângulo ao meio 2-a) Não, pois os pontos não se encontram dentro do desenho mas sim fora formando 90°

A5 e A6	1. a) Sim, eu construí as retas perpendiculares passando pelo vértice b) não porque não passam pelo ponto médio de cada lado do triângulo c) não porque além de não passar pelo ponto médio elas não são perpendiculares. 2. Sim foram os procedimentos foram os mesmos só o ponto de encontro ficou fora mas não tem problema.
A7 e A8	Sim, apesar do cruzamento de retas ter sido fora do triângulo, elas são perpendiculares e formam 90°. 1 a) Sim, pois a reta partida do segmento ao vértice oposto, é uma reta perpendicular. b) Sim, pois além da reta partido do segmento ao vértice oposto ser perpendicular e formar 90°, ela indica o ponto médio do segmento. c) Sim, pois a reta partida determinou o ponto médio do segmento.

Pudemos comprovar na resposta dos alunos A3 e A4, o que nos mostrou a pesquisa realizada por Gravina (1996), a afirmação de não ser a altura do triângulo porque o encontro dessas ficou fora do desenho. Não podemos pelas respostas apresentadas situar o aluno em um dos níveis de prova descritos por Balacheff (1988). Um fato que nos chamou a atenção na resolução dessa atividade é que os alunos que sempre recorriam à ferramenta "arrastar" do *software* nessa atividade não o fizeram. Inferimos que essa atitude seja consequência de uma "segurança" adquirida pelos alunos desprezando ferramentas que antes eram utilizadas com frequência ou como diz Almeida (2007) todos os alunos deram ênfase ao ponto médio.

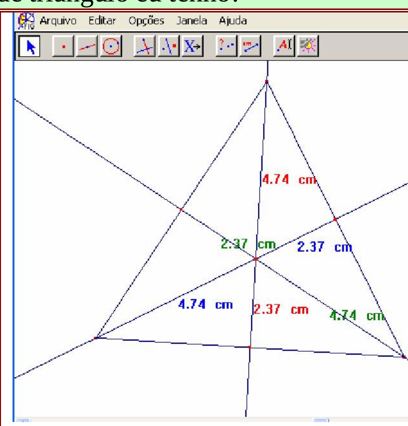
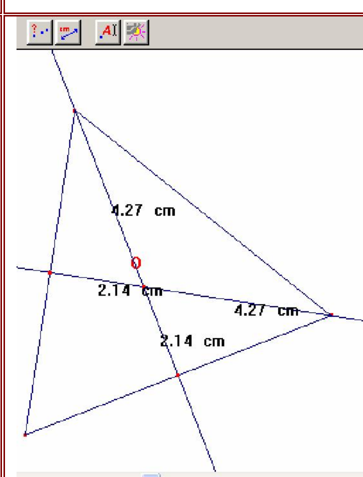
5.2.5 Sessão 8: Pontos notáveis do triângulo.

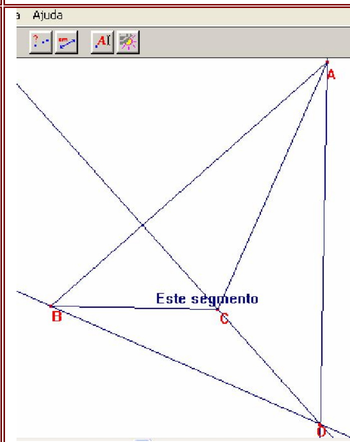
Essa sessão é importante, pois discutimos os pontos notáveis do triângulo. Como essa sessão era composta por atividades que exigiam o uso do *software*, justificado pela sua interatividade e o movimento, essencial a resolução da atividade levou alguns alunos a se sentiram pouco a vontade com essa “obrigatoriedade” como podemos constatar no diálogo:

> *A3: Professora tem que utilizar somente o software não é?*
> *P: Sim.*
> *A6: Porque não podemos utilizar régua e compasso? Eu gosto mais. Não sei usar direito o Cabri, minhas figuras não ficam boas.*
> *P: Como assim boas?*
> *A6: Eu não sei usar direito e também não gosto.*
> *A3: Eu gosto, mais ou menos... Se você ler o exercício vai ver que tem que movimentar o ponto e como vai fazer isso com o papel? Precisamos do Cabri.*

QUADRO 15 - Procedimentos de resolução da atividade 1, sessão 8.

<table>
<tr><td colspan="2">Atividade 1: Sabendo que o ortocentro de um triângulo qualquer é o encontro das suas alturas, construa um triângulo qualquer e encontre suas alturas.
Esta é uma atividade livre; você poderá usar o que quiser de recursos do cabri. Ao encontrar as alturas marque o seu ponto de interseção, chame este ponto de ponto O. Movimente este ponto e responda as perguntas abaixo:
d) Ao movimentar o ponto O o que aconteceu com o seu desenho? Por quê?
e) O seu ponto pode estar fora ou dentro do triângulo? Por quê?
c) Quando o ponto O está fora do triângulo que tipo de triângulo eu tenho?</td></tr>
<tr><td>A1 e A2:

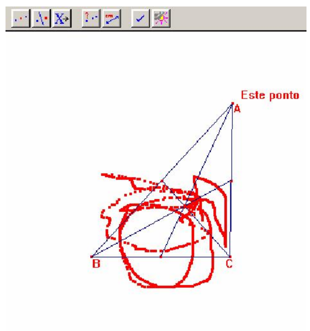
Não temos um diálogo para essa dupla, mas responderam as questões B e C.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A3: Ao movimentarmos o triângulo, acontece que cada lado menor é a metade do lado maior.
A4: e a letra b, como vamos responder? não sei a letra a.
A3: quando o triângulo é equilátero o ponto O fica dentro no isósceles fica fora.
Me aproximei.
Pesquisadora: A3 um triângulo equilátero é isósceles?
A3 e A4 ao mesmo tempo: Não,
Pesquisadora: Porquê?
A4: A professora fez dois desenhos diferentes na aula e mais um para o escaleno. Então não são.
Pesquisadora: o que é um triângulo isósceles?
A4: tem dois lados iguais e dois ângulos iguais.
Pesquisadora: E o equilátero?
A4: Três lados e três ângulos iguais. Ele pode ser isósceles também que legal eu descobri. Então para os dois o ponto O está dentro e só no outro triângulo com lados diferentes pode estar fora.</td><td>
</td></tr>
</table>

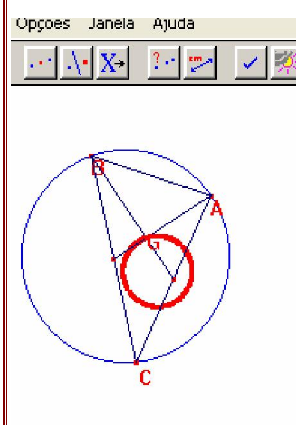
<table>
<tr><td>Os alunos não movimentaram o ponto O e sim o triângulo. Utilizaram o software nas suas argumentações e os situamos na experiência crucial</td><td></td></tr>
<tr><td>A6: Professora depois de desenhar o triângulo não dá para mexer no ponto O. Posso mexer nos vértices do triângulo e fazer esse ponto ficar fora ou dentro dependendo do triângulo. Eu gosto muito de mexer no Cabri consigo explicar mais rápido
Pesquisadora: porque o ponto O não se mexe?
A5: Eu acho que tem a ver com a altura, mas não consigo pensar. Após um tempo A5 me chamou.
A5: Professora eu tenho três alturas certo? E o ponto O é o ponto de encontro, certo? Posso dizer que O é o lugar geométrico do ponto de encontro das alturas. Essa é a propriedade dele.
Pesquisadora: Você lembra do lugar geométrico mediatriz?
A5: Sim.
P: quantos pontos pertencem a mediatriz?
A5: muitos; entendi O não é lugar geométrico. Não posso mexer nele porque a altura é perpendicular e passa pelo vértice do triângulo. Se eu pudesse mexer não teria mais essa, essa...
Pesquisadora: condição?
A5: Isso, então é por isso.
Exemplo genérico; discutiu-se nesse diálogo definições que passaram a fazer parte de uma classe de figuras não relacionadas, particularmente, a uma única.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A8: Não lembro de ter visto ortocentro no livro, professora.
A7: porque temos que ver ortocentro, não tem no livro como vamos fazer? Como vou estudar?
P: Calma A7; uma pergunta de cada vez. Estamos utilizando o livro nas aulas?
A7: Eu sei, mas é estranho.
A8: Vou desenhar um triângulo isósceles.
A8: desenhei, mas não dá para mexer o ponto O.
P: Por quê?
A8: Se eu mexer o ponto O vai ter mais alturas no triângulo e não pode vimos que são só três.
P Não entendi.
A8: O ponto O é o encontro das alturas, não é? Então não posso mexer senão teria outro ponto O e não tem.</td><td>Esses alunos utilizaram construção no Cabri-Géomètre, mas não salvaram seus arquivos nessa sessão. Estes alunos situam-se na experiência crucial: continuam com um exemplo.</td></tr>
</table>

Na próxima atividade estava em jogo a aquisição do conceito de baricentro como lugar geométrico. Para isso foi essencial que o conceito de mediana estivesse claro para o aluno.

QUADRO 16 - Procedimentos de resolução da atividade 2, sessão 8.

Atividade 2: O baricentro de um triângulo é o encontro de suas medianas. Crie uma circunferência e sobre ela marque os pontos A, B e C. Construa o triângulo ABC. Encontre o ponto médio M do lado BC e o ponto médio N do lado AC e, em seguida, os segmentos AM e BN. d) O que significam os segmentos AM e BN do triângulo ABC? e) Esses segmentos se interceptaram em um ponto, chame este ponto de G. Este ponto é o

<table>
<tr><td colspan="2">baricentro?
Se você mantiver fixos os vértices B e C e variando o vértice A (sempre sobre a circunferência) qual é o lugar geométrico do baricentro G? Exercício adaptado do artigo: Pesquisas de lugares geométricos com o auxílio da Geometria Dinâmica, Carneiro, revista do Professor de Matemática, SBM, pág. 5.</td></tr>
<tr><td>A1 e A2:

</td><td>a) mediana
b) O ponto G ao girar será uma circunferência, porque o triângulo que tem o ponto G está na circunferência. Quando desenhamos um triângulo qualquer o ponto G não será uma circunferência como no desenho.

Classificamos essa argumentação como empirismo ingênuo.</td></tr>
<tr><td>A3 e A4
Utilizaram a opção rastro disponível no software Cabri-Géomètre, mas se concentraram unicamente no ponto G não em sua trajetória.</td><td>a) Mediana
b) Ele fica só no centro.
Inferimos que esses alunos não se apropriaram do conceito de circunferência como Lugar Geométrico e como não apresentaram uma argumentação não podemos nos referir a Tipologia de Provas.</td></tr>
<tr><td>A5 e A6: Colocamos esses alunos no exemplo genérico, explicitaram a validade da atividade pela realização da transformação do objeto característico de uma classe.</td><td>a)São as medianas, partem do ponto médio do segmento AC até B e também do segmento BC até A.
b)Sim, consegui encontrar mesmo não traçando a outra mediana, não preciso. É uma circunferência a trajetória se justifica por eu estar girando o ponto B sobre a circunferência. É muito interessante.

</td></tr>
</table>

A7 e A8 Sem classificação	Atividade 2 a. A mediana. $\overline{BN}$ mediana do lado $\overline{AC}$. $\overline{AM}$ mediana do lado $\overline{BC}$. b. Sim c. O ponto G sempre será o centro da circunferência. Obs: o desenho não deu certo.

Para essa atividade todos os alunos utilizaram o Cabri-Géomètre sem nenhuma dificuldade. Os alunos A7 e A8 não conseguiram realizar a atividade *c encontrar o lugar geométrico do ponto G.* Ao nos explicarem o porquê, afirmaram que a construção tinha muitos itens para serem feitos e deveriam ter deixado alguma coisa sem fazer porque o triângulo não se mexeu. A resposta dos alunos A1 e A2 nos surpreenderam pela segurança lembrando que são alunos que em sala de aula tem um baixo rendimento e não participam da aula. A resposta não está classificada no último nível de prova, mas Brousseau (1986) nos diz que as respostas não precisam ser formais, as ideias sim, precisam estar corretas, a escrita nem sempre retrata efetivamente o pensamento, não podemos desconsiderá-la por esse motivo.

Quanto aos conceitos, em jogo nessa sessão, de mediana e Lugar Geométrico podemos afirmar que o primeiro foi efetivamente apropriado e usado em uma atividade sem nenhuma indicação. O conceito de Lugar Geométrico ainda está condicionado à ênfase em uma única informação, nesse caso o ponto G ser o ponto de encontro e supostamente estar no centro de uma circunferência, essa informação visual ainda é mais forte que o conceito de Lugar Geométrico. Não tivemos nessa atividade a experiência mental.

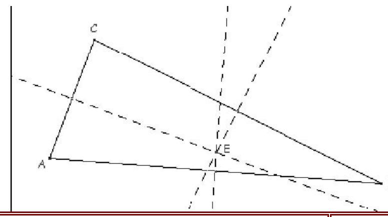
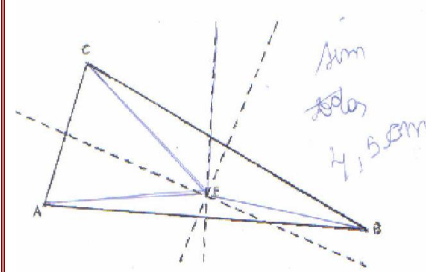
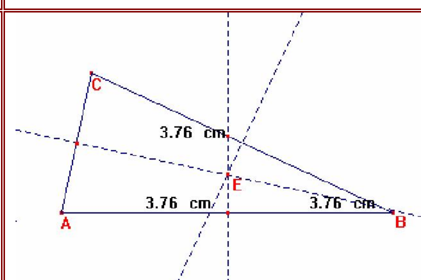
5.2.6 Sessão 9: Incentro e Circuncentro

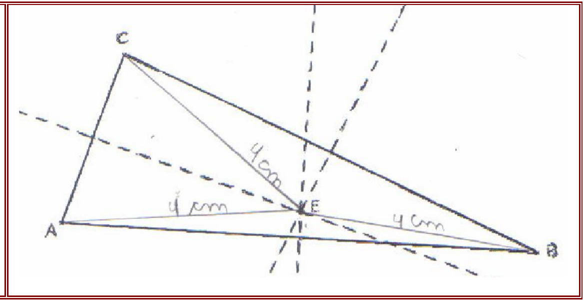
Essa sessão foi realizada individualmente. Estavam em jogo os conceitos de incentro e circuncentro. Muitos alunos continuaram na sala após a finalização da sessão para discutirmos as atividades e pudemos nessa oportunidade colher alguns depoimentos que colocaremos na conclusão desse trabalho.

A primeira atividade se relaciona a mediatriz e o seu ponto de encontro. Os procedimentos são apresentados no quadro 17.

QUADRO 17 - Procedimentos de resolução da atividade 1, 9ª sessão.

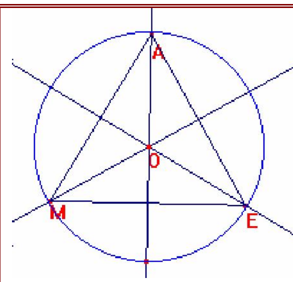
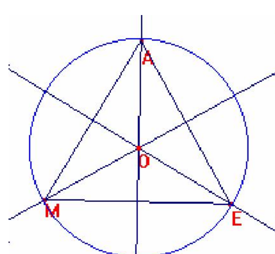
Atividade 1. "Dado o triângulo abaixo, foram construídas suas três mediatrizes, relativas aos lados

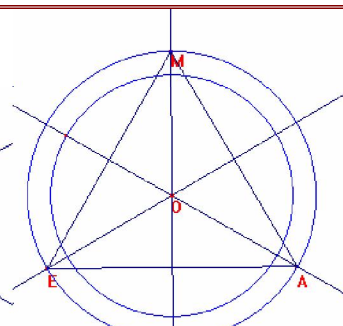
<table>
<tr><td colspan="2">AB, BC e AC. É possível afirmar que a distância do ponto E, encontro destas mediatrizes, a cada um dos vértices é a mesma?" (exercício retirado do artigo Construção da mediatriz de um segmento: uma exemplo de aprendizagem significativa Marina Menna Barreto, UFRGS, pág. 5).

</td></tr>
<tr><td>A1: utilizou a régua para medir. Esse procedimento classifica sua justificativa como empirismo ingênuo.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A2</td><td>Não estava presente na sessão</td></tr>
<tr><td>A3: utilizou a ferramenta “comprimento” do Cabri-Géomètre, baseando sua argumentação nas medidas encontradas, o que a classifica no empirismo ingênuo.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A4 Respondeu afirmativamente a atividade, mas não justificou.</td><td></td></tr>
<tr><td>A5: Sua argumentação pode ser classificada no exemplo genérico, utilizou-se do desenho, mas justificou usando a propriedade de mediatriz.</td><td>O ponto E está no ponto de encontro das mediatrizes que está a igual distância dos vértices, então é verdade a pergunta.</td></tr>
<tr><td>A6: não resolveu a atividade.</td><td></td></tr>
<tr><td>A7: respondeu afirmativamente mas não justificou.</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>A8: empirismo ingênuo, pois se utilizou uma régua para verificar a afirmação, concordando após o procedimento.</td><td>
</td></tr>
</table>

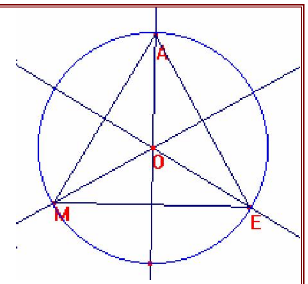
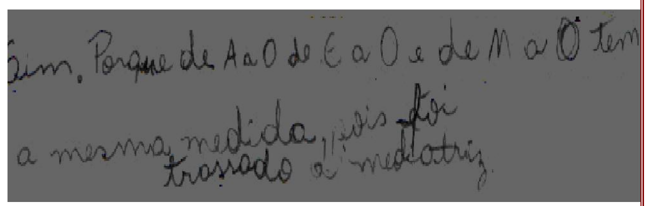
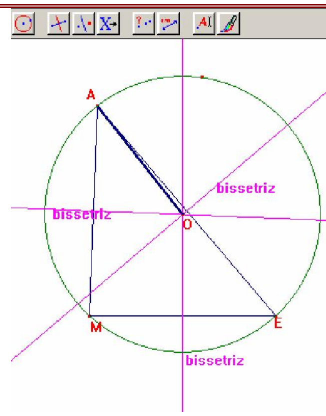
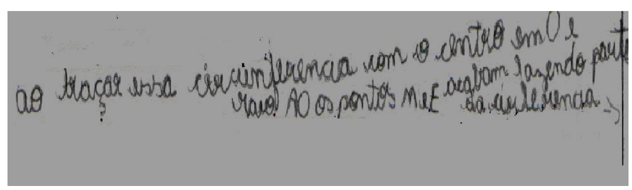
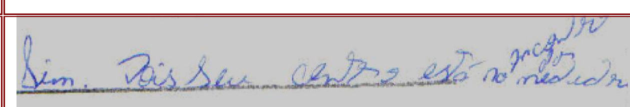
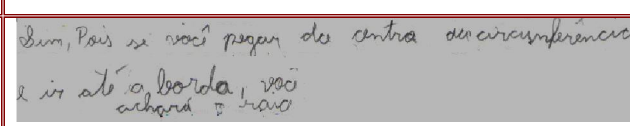
Essa atividade foi totalmente desenvolvida com o uso do *software*.

QUADRO 18 - Procedimentos de resolução da atividade 2, 9ª sessão

<table>
<tr><td colspan="2">Atividade 2: Agora desenhe um triângulo AME e as mediatrizes dos seus lados. Chame o encontro das mediatrizes de O. Esta atividade pode ser feita no Cabri usando os recursos que quiser.
a) com centro em O e raio AO, trace uma circunferência.
b) os pontos M e E pertencem a essa circunferência? Por quê?</td></tr>
<tr><td>A1 desenhou o triângulo equilátero, mas não respondeu na sua folha de atividades.</td><td>
</td></tr>
<tr><td>A2: Professora, no primeiro triângulo eu acho que está errado.
Pesquisadora: por quê?
A2: Quando eu mexi a circunferência não tocou os pontos.
Pesquisadora: por isso construiu outro triângulo?
A2: É, para testar. Agora eu marquei o segmento A0 porque ele é o raio então se eu aumento o tamanho do triângulo AO aumenta e aí dá certo?
Pesquisadora: Porque AO?
A2: porque ele é o raio da circunferência que passa por A, M e E. Agora eu entendi.</td><td>



Exemplo genérico utilizando-se da ferramenta “arrastar” constatou que não bastava encontrar a circunferência que passava pelos vértices do triângulo, precisava ainda encontrar o raio.</td></tr>
</table>

A3: classificamos essa argumentação como exemplo genérico. Justificou usando uma propriedade característica de um objeto geométrico a mediatriz.	 
A4: Experiência Crucial	 
A5: não compareceu.	
A6 não utilizou nenhum dos dois ambientes. O colocamos na experiência crucial	
A7 e A8: sem classificação.	

Na atividade 3 as respostas foram, unânimes, sim é o circuncentro, destacamos duas respostas nessa atividade a do aluno A7*: olhando o desenho, você irá ver que está exatamente assim no circuncentro*, o que nos lembra Flores (2007) o desenho é parte importante na resposta; e a resposta do aluno A8: *Sim, pois eu fiz a construção e isso tudo deu certo*, se remetendo à construção da atividade anterior sem nenhuma comprovação geométrica como pode ser observado na resposta do exercício.

Na atividade 4 as respostas dos alunos A1, A4, A6, A7 e A8 ficaram no exemplo genérico, o procedimento de resolução foi a escolha de um triângulo dando-lhe o nome, a construção das mediatrizes dos lados desse triângulo seguido da seguinte argumentação : “Para desenhar a figura eu tirei a mediatriz dos lados do triângulo e depois de encontrar o ponto de encontro desenhei a circunferência” (A1); “Porque O é o ponto de encontro das mediatrizes chamado circuncentro também é o centro da circunferência que circunscreve o triângulo”. (A4).

5.2.7 10ª sessão: Revendo os pontos notáveis do triângulo – uma apropriação dos conceitos.

Essa última sessão foi realizada em fevereiro de 2008, três meses depois de aplicada a 9ª sessão, no período vespertino com duração de 01h30min. Participaram dessa sessão somente os alunos envolvidos na pesquisa, ou seja, 08 alunos, divididos em dois grupos de quatro alunos, por sessão, que realizaram as atividades individualmente.

Inicialmente conversamos sobre as atividades que iriam realizar, dirimimos algumas dúvidas, sobre temas como conceitos de mediatriz, bissetriz, mediana, lugar geométrico e reforçamos que não estavam sendo avaliados e que poderiam conversar no grupo.

Na atividade 1 alguns conceitos sobre os pontos notáveis já apareceram, utilizamos para isso construções prontas de mediatriz, mediana, bissetriz e altura. Por influência do tempo decorrido entre essa e a última sessão optamos por essa atividade. Tivemos as seguintes argumentações: “construí todos os pontos notáveis no Cabri e o desenho foi igual ao da ordem baricentro, ortocentro, circuncentro, incentro” (A1, A3, A7, A8). Essa argumentação os coloca no empirismo ingênuo. Os alunos A2 e A6 utilizaram régua e compasso e chegaram a semelhante argumentação. A5 e A4 responderam na ordem correta, mas não apresentaram nenhum argumento, nem construção seja ela feita com régua e compasso ou com *software* Cabri-Géomètre.

Na atividade 2 apresentaremos as respostas em cada um dos seis itens questionados, que apresentamos em seis quadros correspondentes:

QUADRO 19 - Procedimentos de resolução da atividade 2, letra a da 10ª sessão.

Num triângulo isósceles, o circuncentro coincide com o baricentro.		
A1	*Falso*	Sem justificativa
A2	*Falso.*	
A3	*Falso.*	
A4	*Verdadeiro, pois as medianas e as mediatrizes se coincidem em um triângulo isósceles.*	Construíram um triângulo isósceles, utilizando o *software* Cabri-Géomètre. Classificamos essa argumentação no empirismo ingênuo.
A5	*Falso, isso acontece somente em triângulos equiláteros.*	Não justificou sua resposta.
A6	*Só coincidiria se fosse um triângulo equilátero.*	Construiu o triângulo eqüilátero utilizou a função arrastar do software. Sua argumentação é classificada no empirismo ingênuo.
A7	*Falso, construí vários triângulos.*	Construíram vários tipos de triângulos: eqüiláteros, isósceles, escaleno. Classificamos sua argumentação na experiência crucial.
A8	*Falso.*	

Nessa atividade tivemos o empirismo ingênuo e o experimento crucial. Não pudemos classificar algumas argumentações por não serem apresentadas, esses alunos fizeram construções utilizando o software e como disseram*: professora, não vejo necessidade de justificar, eu construí e não deu certo.*

QUADRO 20 - Procedimentos de resolução da atividade 2, letra b da 10ª sessão.

Se o ortocentro é vértice do triângulo então o triângulo é retângulo	
A1	Verdadeiro
A2	Verdadeiro
A3	Verdadeiro, pois a altura coincide com dois lados.
A4	Verdadeiro, pois o encontro das alturas do triângulo retângulo é o vértice onde está o ângulo reto.
A5	Verdadeiro, pois os lados serão alturas, pois o ortocentro é o encontro das alturas

	isso quer dizer que dois lados serão perpendiculares.
A6	Não respondeu.
A7	Não respondeu.
A8	Verdadeiro, pois os lados serão alturas.

Não classificamos nenhuma das respostas dadas a essa atividade, mas pudemos observar que alguns alunos tentaram justificar suas respostas, houve uma mudança de atitude, mesmo quando não colocamos no enunciado a necessidade de justificar a resposta. Assim como na atividade anterior todos utilizaram o Cabri-Géomètre.

QUADRO 21 - Procedimentos de resolução da atividade 2, letra c da 10ª sessão

Se o circuncentro é externo, o triângulo é obtusângulo.	
A1	Verdadeiro
A2	Verdadeiro
A3	Verdadeiro
A4	Verdadeiro, construí vários triângulos obtusângulos e encontrei o circuncentro.
A5	Verdadeiro, pois o ortocentro fica fora.
A6	Não respondeu
A7	Verdadeiro
A8	Verdadeiro

Com exceção do aluno A4, ao qual classificamos sua argumentação como experiência crucial, não classifica as resposta dos alunos em nenhum dos tipos de prova.

QUADRO 22 - Procedimentos de resolução da atividade 2, letra d da 10ª sessão

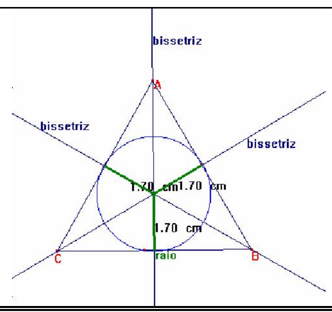
Se o baricentro, o incentro, o circuncentro e o ortocentro estão alinhados, o triângulo é isósceles.	
A1	Não respondeu.
A2	Verdadeiro, construí vários triângulos com o Cabri-Géomètre.
A3	Falso por causa do item a.
A4	Verdadeiro.
A5	Verdadeiro pois altura, bissetriz, mediatriz, mediana coincidirão.

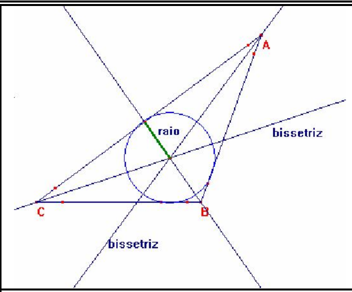
A6	Verdadeiro.
A7	Não respondeu.
A8	Falso é equilátero.

Todos os alunos, que responderam à atividade, utilizaram o Cabri-Géomètre para justificar suas respostas ficando entre o empirismo ingênuo ao criar no ambiente Cabri-Géomètre um único triângulo para justificar sua resposta ou na experiência crucial ao utilizar um outro triângulo, diferente do presente na atividade, para comparar com a informação já existente.

No item *e) As bissetrizes de um triângulo se cortam sobre um ponto que é equidistante dos lados. Este ponto é chamado incentro, e utilizado como centro da circunferência quando se quer inscrever esta circunferência no triângulo*; está representada no quadro abaixo:

QUADRO 23 – Protocolos de resolução da atividade 2, letra g.

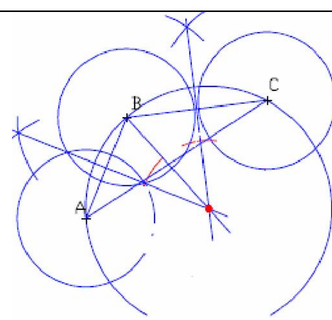
ALUNO	ESTRATÉGIA	ARGUMENTAÇÃO
A1	Construção no Cabri-Géomètre.	*Construí as bissetrizes, encontrei o incentro depois desenhei a circunferência.*
A2	Não se utilizou de construção	*Ao encontrar o incentro também vamos encontrar o raio da circunferência inscrita que é uma perpendicular a um lado do triângulo. Não tenho certeza.*
A3		*É verdadeira*
A4		*Por construção. Traçar as bissetrizes dos vértices do triângulo na interseção marcar o ponto O, que será o centro da circunferência inscrita do triângulo.*

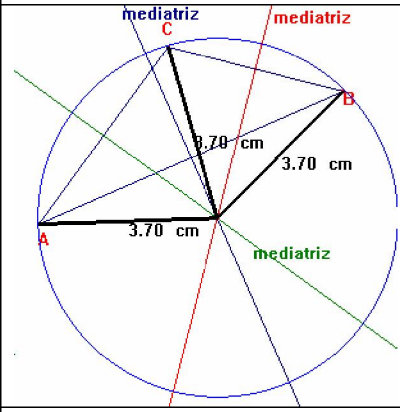
A5		*É só construir o triângulo e encontrar o raio da circunferência, que é a distância do incentro a um dos lados do triângulo.*
A6	Construção no Cabri	É verdadeira
A7		*Quando encontrar o ponto de encontro trace a perpendicular aí você encontrará o raio da circunferência desejada.*
A8		*O ponto de encontro das bissetrizes é o incentro O. a partir dele vou traçar uma perpendicular a um dos lados do triângulo que será o raio da minha circunferência inscrita dentro do triângulo por que se eu não fizer isso não consigo desenhar a circunferência.*

Os alunos ficaram entre o empirismo ingênuo e o exemplo genérico. Apesar do aluno A8 apresentar argumentos que comprovem seu conhecimento não pudemos colocá-lo na experiência mental, pois seu texto não pode ser considerado uma demonstração matemática.

A terceira atividade: Dados os pontos A, B e C, determine a circunferência que os contenha apresentou as estratégias de resolução apresentadas no quadro 24.

QUADRO 24 – Resolução da atividade 3, sessão 10.

Aluno	Estratégia	Argumentação
A1		*Uniu os pontos e construiu as mediatrizes. Sem indicação do circuncentro.*
A2: a argumentação desse aluno pode ser classificada no exemplo genérico.		*É só encontrar as mediatrizes dos lados do triângulo ABC. Sabemos que o ponto de encontro está a igual distância dos pontos A, B e C, então será o raio da circunferência.*
A3: sem classificação.		*È só achar o circuncentro,*

		que é o ponto de encontro das bissetrizes.
A4: Empirismo ingênuo		*Por construção no Cabri.*
A5		*O centro da circunferência está no circuncentro.*
A6	Construiu o triângulo com régua e compasso.	*O está na mediatriz, logo é equidistante de A e B. Essa distância será o raio.*
A7	Não utilizou nenhum dos dois meios.	*Unindo os pontos vamos ter o triângulo aí encontramos o ponto de encontro das mediatrizes que define o centro da circunferência circunscrita no triângulo.*
A8: Exemplo genérico.	Não utilizou nenhum dos dois meios.	*A mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico dos pontos equidistantes de A e de B, logo o encontro das mediatrizes é o ponto equidistante de A, B e C, logo AO = BO = CO = r. Se eu construir as mediatrizes do triângulo ABC o exercício fica pronto.*

As respostas estão entre o empirismo ingênuo e exemplo genérico. Podemos notar que o aluno A8 está se aproximando da experiência mental ao utilizar a propriedade do circuncentro. Os alunos, mesmo sem nenhuma indicação, procuraram justificar suas respostas, o que consideramos como uma evolução não nos níveis de prova, mas de atitude ao resolver as atividades.

5.3 Detalhes da análise

Escolhemos dentre os oito alunos pesquisados três alunos para discutirmos uma possível evolução nos níveis de prova. São eles os alunos A3, A5 e A8, lembramos que A3, faz parte do grupo de alunos considerados fracos em matemática, A5 faz parte do grupo de alunos intermediários, ou seja, considerados bons alunos e A8 faz parte do grupo de alunos considerados excelentes. A escolha foi feita, após observados e analisados os resultados das sessões e inferirmos que esses alunos tiveram uma evolução nos níveis de prova.

Na sessão 4, construção das mediatrizes, as argumentações apresentadas pelos três alunos pode ser acompanhada no Gráfico 3.

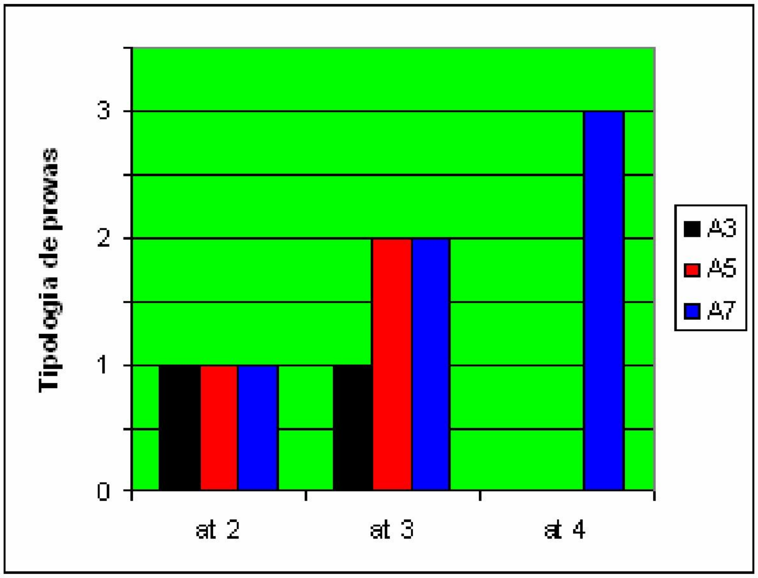
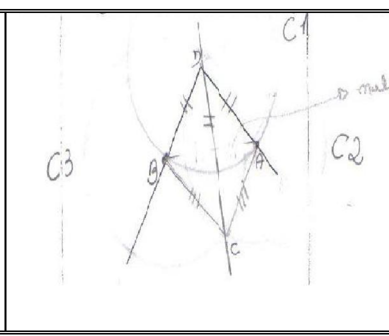


Gráfico 3 – evolução dos níveis de prova

A sessão 4, temos os alunos A1 que não saiu do empirismo ingênuo, A2 com uma pequena evolução saindo do empirismo ingênuo e chegando a experiência crucial. Para A7 a evolução foi mais significativa, pois passou do empirismo ingênuo ao exemplo genérico.

Na sessão 5 não tivemos uma evolução tão clara quanto na sessão 4. Mas, todos os alunos justificaram suas construções muitas vezes sem podermos classificar, mas o fato é que tivemos muitas tentativas que podemos considerar como embriões de níveis de prova como podemos observar na protocolo do aluno A5.

A5		*Sim. Os lados BD e DA são iguais, pois são raios, os lados BC e AC também são raios das circunferências C3 e C2. O lado DC é igual para os dois triângulos. Assim os lados são iguais (todos os triângulos) então os ângulos todos são iguais e o segmento DC é o lugar geométrico dos pontos que estão no meio do ângulo.*

Essa sessão, em particular, não teve uma evolução quando mencionamos os níveis de prova, mas notamos uma evolução nos textos apresentados na justificativa, pudemos observar que há uma preocupação em justificar as respostas, mas uma dificuldade em apresentá-la em uma escrita mais formal. Esse fato ocorreu por dificuldade na linguagem escrita ou na compreensão do conceito apresentado? Uma pergunta que tentaremos responder nas nossas considerações.

Nas sessões de 7 a 10, destacamos esses alunos por tentarem sempre justificar suas respostas. A5 foi um dos únicos a manter uma evolução sem oscilar entre o primeiro e último nível. Esse aluno ficou sempre “perto” do exemplo genérico. Consideramos o resultado coletivo, significativo se analisar as respostas, mesmo quando não contemplando os níveis de prova, que apresentam uma considerável mudança de atitude ligada a um início de argumentação.

5.4 Resultados encontrados

Da análise feita, pode-se inferir que as construções geométricas foram utilizadas com frequência pelos sujeitos da pesquisa, este fato nos impediu de chegar de certo modo ao último nível de prova descrito por Balacheff (1988). Mesmo utilizando dois ambientes, não podemos dizer que um ou outro foi privilegiado, as sessões diversificadas exigiam em certos momentos a utilização do *software*, mas isso não era garantia do seu uso. Inferimos que essa atitude se deva ao fato de que mesmo com o Laboratório de Informática à disposição dos alunos, poucos professores utilizam em atividades envolvendo conteúdos matemáticos.

Durante a realização das sessões foi possível observar que a “novidade” das aulas contagiou alguns alunos mesmo quando esses faziam parte do grupo dos alunos com mais dificuldade. Podemos notar que muitos não se limitaram a cumprir o tempo estabelecido e mesmo quando recolhidas as atividades referentes à sessão aplicada, muitos ainda permaneciam na sala para eventuais discussões, interrogações e conclusões. Um dos alunos fez um comentário que resume em muito essas reuniões: *Fica difícil imaginar que todo mundo fique aqui mesmo depois de terminada aula para tirar dúvidas, quando nem temos avaliação disso.*

Pudemos sentir ao longo das sessões que as argumentações foram gradativamente fazendo parte das respostas. Alguns alunos pesquisados conseguiram desenvolver uma escrita mais formal, mas ainda longe de uma demonstração matemática. A evolução nas argumentações não aconteceu em todos os níveis de prova nem com todos os alunos, mas foi possível diagnosticar uma evolução de atitude diante da resolução de atividades, um maior comprometimento em relação às justificativas, o que condiz com o que nos afirmou Chevallard (1991): para podermos ter justificativas é necessário que o professor assuma um papel de investigador e inquiridor e que segundo Brousseau (1986) as situações sejam vividas e assumidas pelo aluno.

Balacheff (1988) ao distinguir os quatro níveis de prova não espera que os alunos o atinjam, apresentem uma prova matemática, mas indícios de prova que levem a uma demonstração considerada pelos matemáticos como demonstração matemática. Inferimos que os alunos chegaram a esse nível de prova.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nestas considerações finais apresentamos uma síntese das nossas reflexões sobre as respostas às perguntas expostas nos capítulos anteriores. Expomos o nosso ponto de vista a respeito das argumentações e como estas podem evoluir diante de atividades propostas pelo professor, abordando conteúdos do currículo da Educação Básica aliados às Construções Geométricas.

Encontramos durante os processos de construção da pesquisa fatos que levam a acreditar que a argumentação em atividades geométricas, como as que foram aqui tratadas, ou não, estão ainda muito longe da sala de aula. Este fato pôde ser apontado por algumas pesquisas como a realizada por Jahn e Healy (2008) que abordaram a formação de professores e constataram que esses não utilizavam atividades que levassem à argumentação, justificando essa postura por não terem acesso, na formação, a esse tipo de atividade. Pietropaolo (2005) mostrou que os currículos nacionais ainda se apresentam tímidos quanto à argumentação; e ainda Chevallard (1991) diz que falta despertar o interesse dos alunos em discutir atividades justificando-as.

Pudemos observar que o livro didático, um grande aliado do professor, também não privilegia a argumentação mesmo quando abordados conteúdos que, segundo Duval (2005), apresentam atividades que poderiam promover debates e discussões na sua resolução. Não privilegiam atividades que motivem o aluno a discutir, justificar e argumentar suas resoluções. Na análise de alguns livros didáticos atuais podemos inferir que as tentativas existem, mas ainda são tímidas diante de outros tipos de atividades do tipo “faça e pronto”.

Essas constatações nos aproximaram da nossa questão de pesquisa: é possível identificar evolução nas argumentações de alunos de 8º ano do Ensino Fundamental em atividades de pontos notáveis do triângulo, utilizando Construções Geométricas? Para responder a essa questão buscamos como fundamentação teórica os níveis de prova (BALACHEFF, 1988) que apresenta a argumentação como um fator essencial à prova, à demonstração matemática, para isso acabou por apresentar a prova em níveis diferentes correspondente a cada tipo de argumentação.

Para Pietropaolo (2005, p. 212)

> A prova deve fazer parte da formação da Educação Básica, desde que o significado a ela atribuído seja ampliado e que se caracterize por um processo de busca, de questionamento, de conjecturas, de contra-exemplos, de refutação, de aplicação e de comunicação e não no sentido formalista que a caracterizou nos currículos praticados em outros períodos.

Esse sentido formalista pode ser observado em alguns livros no Movimento da Matemática Moderna assim como foi possível confirmar que a Geometria não era discutida em muitos desses livros. E, ainda quando isso era feito não tínhamos uma discussão do conteúdo e mesmo quando provas e demonstrações eram realizadas não contemplava a ideologia de um movimento que tinha como objetivo o rigor na apresentação do conteúdo. Quando a análise se voltou para os livros atuais nos deparamos com uma discussão aparente de atividades, ou seja, poucas tentativas que eram representadas por atividades às vezes sem nenhuma ligação com o conteúdo exposto ou o processo contrário, apresentar o conteúdo utilizando uma demonstração matemática, mas que não era discutida nas atividades subsequentes.

A elaboração de uma sequência didática surgiu a partir da necessidade de se ter atividades que pudessem levar o aluno a apresentar argumentos em sua resolução. A sequência foi dividida em 2 momentos, o primeiro contendo 3 sessões e o 2º com 7 sessões. Apresentamos aos alunos também no primeiro momento os ambientes que estariam auxiliando-os na resolução e argumentação da atividade, a régua e compasso e o *software* Cabri-Géomètre. De acordo com Borges Neto (2005) e Laborde e Capponi (1994) os ambientes régua e compasso e Cabri-Géomètre podem se transformar em recurso auxiliar no processo de prova, justificativas das atividades.

No momento 1 utilizamos atividades para a familiarização do *software* e também para que os alunos relembrassem alguns conceitos. As atividades desse grupo tinham um maior enfoque nas construções do que nas justificativas. Mas, ainda assim em cada atividade escolhida para montar a sequência didática tentamos encontrar as que exigissem em seu enunciado à justificativa na resolução. Diante desse fato muitos foram os questionamentos por parte dos alunos: porque deveriam justificar? como justificar?

Nesse momento pudemos observar e diagnosticar algumas regularidades tais como: sempre o desenho do triângulo como sendo equilátero, ou a base maior sempre voltada para baixo, os desenhos e traçados para a construção de um ente geométrico, como mediana, exerciam quase um papel de prova, pois o aluno se satisfaz com os procedimentos utilizados na construção e os reporta na justificativa de suas atividades. Diante disso um aspecto fundamental para as argumentações e evoluções no nível de prova, o texto, não foi contemplado.

No 2º momento as atividades envolviam conceitos geométricos mais estruturados onde a justificativa era o foco principal. Nesse momento a utilização dos ambientes régua e compasso e *software* eram estabelecidos na atividade ou ficava a livre escolha dos alunos.

As três primeiras sessões nas quais enfatizamos alguns conceitos geométricos básicos para a realização de atividades de construção geométrica apresentadas em sessões futuras foi muito útil no sentido de podermos, a partir delas, organizar o contexto das próximas sessões, em relação ao tipo de atividade e também na explicação de algumas ferramentas do *software*. Essas ferramentas utilizadas ao longo do trabalho foram praticamente as mesmas, ponto, reta, segmentos, triângulos. Mas pudemos constatar que a partir da quarta sessão os comandos de construção acabaram por substituir os comandos de criação[23], principalmente quando descobriram que esses comandos economizavam tempo na resolução.

Outra característica do grupo investigado é a dificuldade em justificar suas respostas, inferimos que essa dificuldade seja decorrente de dois fatores: as atividades até então desenvolvidas com esses alunos que já tinham uma noção de construções geométricas não privilegiavam as argumentações e, não exigiam uma justificativa para a estratégia escolhida ao longo da resolução, bastava a resolução correta. E o outro fator a considerar é a falta de subsídio didático, ou seja, o livro didático adotado ou qualquer outro material de apoio utilizado em sala não privilegiam essa prática. O resultado foi que mesmo quando ficava explícita, na atividade, a necessidade de justificar muitos alunos não o faziam, ou quando isso acontecia às justificativas não passavam inicialmente de um empirismo ingênuo.

Nas atividades exploradas a partir da quarta sessão a evolução nas argumentações dos alunos não seguiu uma ordem crescente, ou seja, passar do empirismo ingênuo à experiência mental. Houve uma oscilação de resultados e nenhum dos alunos obteve uma evolução linear,

[23] Os comandos de construção tendem a tomar mais automáticas as construções e só pode ser construído um novo objeto a partir de um outro já existente. Exemplo: Você pode construir uma reta perpendicular a uma reta dada, com a ferramenta “perpendicular”, ou querer determinar o ponto médio de um segmento de reta, com a ferramenta “ponto médio”. Já os comandos de criação – ponto, reta, circunferência, et. – exigem algum movimento do mouse, tipo clicar, mover, arrastar e soltar. Portanto,e a posição do cursor em certos eventos (pressionar o botão do “mouse”, soltar o botão do “mouse”) que determinará as características destes objetos. (ARAÚJO,2007, p. 192)

ora um se destacava argumentando de forma a quase chegar à experiência mental, ora esse mesmo aluno não conseguia sair do empirismo ingênuo, mas todos os alunos conseguiram apresentar justificativas em níveis diferentes de prova.

Podemos identificar a partir do exposto alguns dados balizadores para os resultados alcançados:

- Não existe uma clareza entre desenho e figura por parte dos sujeitos da pesquisa como já apresentado por Almeida (2007) em sua pesquisa. Isso dificultou a utilização de justificativas escritas, pois a utilização dos instrumentos de desenho validavam sua construção e , esses sujeitos não sentiram necessidade de nenhum outro argumento.
- Muitos procedimentos foram repetitivos, ou seja, as atividades apresentadas exigiam muitas vezes procedimentos utilizados anteriormente em outras atividades. Isso fez com que muitos sujeitos se restringissem à respostas objetivas como: é o mesmo procedimento utilizado no exercício “tal”; é só construir a mediatriz e está pronto, etc.
- A visualização induziu muitas escolhas de tal forma que os sujeitos muitas vezes apresentaram seus traçados de forma a direcionar suas respostas para a solução que considerava explícita na figura.
- Não se utilizarem completamente das ferramentas do software Cabri-Géomètre e sua interatividade, desconsiderando respostas que poderiam ser obtidas por meio dessa interatividade.

Com as atividades e justificativas utilizadas chegamos a uma conclusão, para o aluno atingir o último nível de prova descrito por Balacheff (1988) em atividades que remetem a utilização de construções geométricas precisamos como pesquisador nos preocupar com o enunciado dessa atividade, pois sempre que o aluno se prender à sua construção para argumentar não poderemos colocá-lo na experiência mental. Pudemos encontrar na pesquisa muitas construções efetuadas no Cabri-Géomètre que eram utilizadas na validação de suas respostas, ou seja, a dificuldade em argumentar utilizando a linguagem natural era substituída pela construção.

Quando apresentamos aos alunos os dois ambientes que auxiliariam nas justificativas inferimos que o *software* conquistaria a preferência dos alunos fato que não aconteceu, mesmo em número menor alguns alunos optaram por utilizar a régua e compasso. A partir dessa escolha observamos que tipos de provas esses alunos desenvolveram onde pudemos comprovar que as justificativas muitas vezes não passavam do empirismo ingênuo. Sabemos que o Cabri-Géomètre oferece suportes teóricos para o ensino de Geometria mas também pode, segundo Araújo, ser encarado como um elemento mediador de ideias de prova. Ao oferecermos aos alunos a possibilidade de utilização do *software* tínhamos a intenção de que o pensamento teórico envolvido pudesse ser incorporado às atividades, na sua validação, o que não aconteceu.

Ficou constatada, nessa pesquisa, a preferência pelas provas situadas no empirismo ingênuo, pois é onde os alunos se sentem mais seguros. Mas ainda assim o trabalho com provas matemáticas pode evidenciar alguns fatores que consideramos importantes e que podem ser discutidos futuramente:

- Atividades que envolvem justificativas são importantes para o desenvolvimento não só do raciocínio lógico, mas também da construção da independência do aluno em relação ao professor ao observar que suas ideias também podem estar corretas;
- O trabalho que exige do aluno algum tipo de argumentação sejam elas situadas no primeiro ou último nível de prova não são de todo refutadas pelos alunos o que pode ser constatado quando os alunos pesquisados continuavam na sala terminando suas atividades mesmo quando terminado o tempo;
- A utilização de um *software* não é imprescindível na resolução de atividades diferenciadas como acreditam muitos professores;
- O *software* Cabri-Géométre oferece inúmeros recursos para a apresentação de provas mas restringe o uso de provas situadas na experiência mental.

Perspectivas

A pesquisa aqui realizada nos leva a apontar para um caminho no qual a argumentação seja trabalhada ao longo da aprendizagem matemática. Vimos que é possível levar o aluno a perceber a importância de validar uma conjectura, mas esse processo é longo e está estreitamente relacionado com os conhecimentos em cena.

Essa atitude dos alunos nos levou à seguinte dúvida: será que os alunos tinham dificuldade em argumentar, ou seja, utilizar a linguagem escrita ou a dificuldade está em na compreensão dos conceitos geométricos envolvidos na construção? Essa é uma dúvida que nesta pesquisa ficou sem resposta. Ao observarmos o protocolo de um aluno na sessão 5 pudemos perceber que existe uma tentativa de prova, argumentação, um quase exemplo genérico mas que acaba por ser substituído por um empirismo ingênuo.

É necessário um trabalho mais longo do que o que foi aqui realizado. Os alunos tinham dificuldade com o conteúdo apesar de esse ser, teoricamente, conhecido, o que implica em dificuldade na hora de realizar validação usando esse conteúdo.

Tempo para desenvolvimento da linguagem; para que o aluno experimente os diversos níveis de prova e adquira segurança nas suas argumentações é um fator que precisa ser considerado em pesquisas futuras. Discutir procedimentos com os alunos e chamá-los a participar da aula, apresentar respostas, discutir dúvidas são caminhos para tornar as argumentações prática comum em sala de aula.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRANTES, Paulo, SERRAZINA, Lurdes, OLIVEIRA, Isolina. **A Matemática na Educação Básica.** Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica, Lisboa, 1999.

ALMEIDA, Iolanda Andrade Campos. **Identificando rupturas entre significados e significantes nas construções geométricas: um estudo em traçados de lugares geométricos bidimensionais, envolvendo pontos, retas e circunferências.** Tese de Doutorado. Universidade Federal de Pernambuco – Centro de Educação, Recife, 2007.

ALMEIDA, Iolanda Andrade Campos; RODRIGUES, Maria Helena Wyllie Lacerda; BELLAMAIN, Franck Gilbert René. **Construções geométricas com papel e lápis ou utilizando *software* gráfico: que mudanças ocorrem quando se opta por uma dessas mídias?.** In: IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática, 2008, Rio de Janeiro. Anais do Congresso - HTEM. Rio de Janeiro: LIMC-UFRJ, 2008.

ALMOULOUD, Saddo. Ag, et al. **Geometria no Ensino Fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos.** Revista Brasileira de Educação, 2004, n. 27, São Paulo, pp. 94-108.

ALVES, Dayse Socorro. **Simetria Axial: Uma Sequência Didática para alunos da 6ª série com o uso de *software* de geometria dinâmica**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco. CE. Educação, 2005**.**

ALVES, George de Souza, SOARES , Adriana Benevides, LIMA, Cabral. **Informática e Educação Matemática: um estudo de caso com triângulos através da Geometria Dinâmica.** Anais do XXI Congresso da Sociedade Brasileira de Computação.São Leopoldo, 2006, pp. 2797-2805.

ANDRINI, Álvaro, ZAMPIROLO, Maria José Couto de V. **Novo Praticando Matemática**. Editora do Brasil. São Paulo, 2007.

ARAÚJO, Ivanildo Basílio**. Uma abordagem para a prova com construções geométricas e Cabri-Géomètre.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2007.

ARBACH, Nelson. **O ensino de Geometria Plana: o saber do aluno e o saber escolar**. Dissertação de mestrado em Educação Matemática, PUC, São Paulo, 2002.

ARTIGUE, Michèle. Ingénierie didactique. **Recherches en didactique dês mathématiques**, Grenoble, France: vol.9, no 3, 1988.

ASSUDE, T. & GELIS J.M. **La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-Géomètre-Géomètre à l'école primaire**. [mensagem de trabalho]. Mensagem recebida por: assude@gauss.math.jussieu.fr. em: 15 junho. 2002.

BALACHEFF, Nicola. **Processus de preuves et situations de validation**. Educational Studies in mathematics, vol. 18, n.2, pp 147-176, 1987.

BALACHEFF, Nicola. Une étude des processus de preuves em mathématiques chez des eleves de collége. Université Grenoble, 1988.

BALDIN,Y.Y. **Atividades com Cabri-Géomètre II**. São Carlos: Editora da UFSCar. 2002.

BARRETO, Marina Menna. **Construção da mediatriz de um segmento: uma exemplo de aprendizagem significativa.** Universidade Federal do Rio Grande do Sul Instituto de Matemática. Programa de pós-graduação em ensino de Matemática. Tópicos de Educação Matemática, 2005.

BASSO, I. S., **As condições subjetivas e objetivas do trabalho docente: um estudo a partir do ensino de história.** Tese de doutorado. Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas. 1994.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. **Ensino de Matemática e Educação Matemática: Algumas Considerações Sobre seus Significados.** Revista Bolema, ano 12, nº. 13, Pág. 1 a 11, 1999.

BITTAR, Marilena, CHAACHOUA, Hamid., NICAUD, Jean-François**. Determinação automática de concepções dos alunos em Álgebra.** Série-Estudo. Periódico do Mestrado em Educação da UCDB. Campo Grande, MS, nº 19, p. 77-90, 2005**.**

BITTAR, Marilena. **O uso de *softwares* educacionais no contexto da aprendizagem virtual**. In : Educação e Arte no Mundo Digital, pp. 73 à 96. Editora UFMS, Campo Grande, MS, 2000b.

BOAVIDA, Ana Maria Roque. **A argumentação em matemática: Investigando o trabalho de professoras em contexto de colaboração**. Tese de doutoramento não publicada. Lisboa: Universidade de Lisboa, Portugal, 2005.

BORGES NETO, Hermínio, ROCHA, Elizabeth Matos, LIMA, Luíza Maria Moraes. **O ensino de formas geométricas nas séries fundamentais**. Anais do XXII Encontros Universitários de Iniciação à Pesquisa da Universidade Federal do Ceará-UFC, vol. único, novembro 2003, Fortaleza.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2008: Matemática /** Ministério da Educação. Brasília: MEC, 2007.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática - 3° e 4° ciclos**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF, 1997, v.1.

BRAVIANO, Gilson. **O Uso do Cabri-Géomètre nas Aulas de Desenho Geométrico - Resultado de uma Análise Estatística**. In: Anais do Graphica , 1998, . Feira de Santana, pp.359-366.

BRAVIANO, Gilson. **O uso do CABRI-Géomètre nas aulas de Desenho Geométrico: Resultado de uma Análise Estatística.** In: II Congresso Internacional de Engenharia Gráfica nas Artes e no Desenho e 13º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico. Feira de Santana-Ba, 1998, p. 359-366.

BREJON, Moysés(org). **Estrutura e Funcionamento do 1º e 2º Graus**. Pioneira. São Paulo, 2ª edição,1973.

BROUSSEAU, Guy. **Fondements et méthodes de la Didactique dês Mathématiques**. In Brun, J. et al. Didactique dês Mathématics, Paris: Delachaux et Niestlé S.A, 1996.

BROUSSEAU, Guy.. **Fondements et méthodes de la didáctique des mathématiques.** Recherches en Didactique des Mathématiques, vol.7, nº 2, pp. 33-115. La Pensée Sauvage, 1986.

CANDEIAS, Nuno PONTE, João Pedro**.** Esc. EB 2,3 Vasco Santana / FC da Univ. de Lisboa, 2005, XVI Sien.

CARLOVICH, Marisa. **A geometria dedutiva em livros didáticos das escolas públicas do Estado de São Paulo para 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC, São Paulo, 2005.

CASTRO FILHO, José Alves et all.: **Avaliação de software educativo para o ensino de matemática,** WIE'2002, Florianópolis.

CAVALCANTI, Lialda , FERREIRA, Verônica Gitirana Gomes. **Experimentação da situação didática "composição de quadrados congruentes em representações retangulares" e os conceitos de múltiplo e divisor**. Universidade Federal de Pernambuco, 2007.

CHAACHOUA, Abdelhamid. **Fonctions du dessin dans l'enseignement de la géométrie dans l1espace. Etude d'un cas : las vies des problèmes de construction et rapports des enseignants à ces problèmes.** Tese de doutorado. Universidade Joseph Fourier, Grenoble, França, 1997.

CHEVALLARD, Yves. **La Transposition Didactique**. Cap. 4. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1991, p. 49-56.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GASCÓN, Joseph. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem.** Porto Alegre: Artmed, 2001.

COELHO, Flávia Renata Lopes. **A Diversidade de estratégias na resolução de problemas no ciclo II.** Disponível em http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Relato_de_Experiencia/Trabalhos/RE89709616749T.doc. Acessado em 17 de outubro de 2008.

CORREDOR, Olga Lucía León e CALDERON, Dora Inês. **Validación y argumentación de lo matemático en el aula.** Revista Latino Americana de Investigacion en Matematica Educativa. Ano/vol. 4, nº 001, 2001. México, p. 5-21.

COSTA, Jorge Luís e GRANDO, Regina Célia. **Provas e Argumentações em Geometria através de diferentes mídias: um relato de experiência.**

COSTA, Mário Duarte da. **O desenho básico na área tecnológica**. In: Congresso Nacional de Desenho, 2, Florianópolis, 1981. **Anais...** Florianópolis: UFSC, 1982. p.89-93.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **A transdisciplinaridade como acesso a uma história holística** in: Rumo a nova transdisciplinaridade: sistemas abertos de conhecimento. São Paulo, Summus, 1993.

D'AUGUSTINE, Charles. **Métodos Modernos para o ensino de Matemática.** Livro Técnico S.A. Rio de Janeiro, 1970.

DANTAS, Martha Maria de Souza. (entrevista) **Educação Matemática em revista**, ano 9, nº 12, 2002. pp. 4-10.

DIAS, Mônica Souto da Silva. **A Importância do Desenho na construção dos conceitos geométricos**. 1998a. 189f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Santa Úrsula, Rio de Janeiro. Disponível em: http://www.sinepe-sc.org.br/5a8mtm.htm>. Acesso em: 28 mai. 2007.

DUVAL, Raymond. **Approche cognitive des problemes de geometrie em termes de congruence.** Annales de Didactique et de sciences cognitives. IREM de Strasbourg, vol. 1, p. 57-74. 1988

FLORES, Cláudia. **Olhar, saber, representar sobre a representação em perspectiva**. São Paulo. Musa editora, 2007.

FREITAS, José Luiz Magalhães. **Teoria das Situações Didáticas** In:Educação Matemática uma (nova) introdução, EDUC, 3ª ed., São Paulo, 2008, p.77-111.

FROTA, Maria Clara Rezende, JUNQUEIRA, João Fábio **;. Argumentações de alunos em geometria: atividades investigativas com recursos computacionais**. In: IX ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2007, Belo Horizonte. ANAIS DO IX ENEM - Diálogos entre a Pesquisa e a Prática Educativa, 2007. pp. 1-18.

GIOVANNI, José Ruy, GIOVANNI JR, José Ruy. **Matemática, pensar e descobrir: novo**/. FTD. São Paulo, 2000.

GOMES, Alex. Sandro, VERGNAUD, Gerard. (2004). **On the learning of geometric concepts using dynamic geometry *software*.** RENOTE: Novas Tecnologias na Educação, *2*(1). [http://www.cinted.ufrgs.br/renote/], acessado em 26/01/2009.

GRANDO, Regina Célia, NACARATO, Adair Mendes, GONÇALVES, Luci Mara Gotardo. **Compartilhando saberes em Geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos**. Cad. Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 39-56, jan./abr. 2008. Disponível em http://www.cedes.unicamp.br, acessado em 19/01/2009.

GRAVINA, Maria Alice. **Geometria Dinâmica uma abordagem para o aprendizado de Geometria** In: Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p. 1-13, Belo Horizonte, 1996.

GREMAUD, Amaury Patrick. **Educação Básica: Indicadores de Qualidade – O IDEB** In: Seminário Internacional: Construindo Caminhos para o Sucesso Escolar, 2007, Brasília.

HENRIQUES A. **Ensino e Aprendizagem da Geometria Métrica: uma sequência didática com auxílio do *software* Cabri-Géomètre II**: Dissertação de Mestrado – Unesp/Rio Claro, Brasil 1999.

POZO, J. I. **Teorias Cognitivas da Aprendizagem**. 3ª ed. Porto Alegre: Artes Médicas. 1998.

IMENES, Luiz Márcio & LELLIS, Marcelo. **Matemática**. São Paulo: Scipione, 1998. 4v.

ISOTANI, Seiji e BRANDÃO, Leônidas de Oliveira. Como Usar a Geometria Dinâmica? O Papel do Professor e do Aluno Frente às Novas Tecnologias. Anais do XXVI Congresso da SBC, Campo Grande, 2006, p. 120-128.

JUNQUEIRA, João Fábio; FROTA, Maria Clara Rezende. **Argumentações de alunos em geometria: atividades investigativas com recursos computacionais**. In: IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte. p. 1-18.

KENSKI, Vani Moreira. Educação e Tecnologias: **O novo Ritmo da Informação**. Editora Papirus. Campinas, São Paulo, 2007.

KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo. IBRASA, 1976

KODAMA, Yumi. **O Estudo da Perspectiva Cavalera: Uma experiência no Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. PUC. São Paulo, 2006.

LABORDE, Colette, CAPPONI, Bernard. **Aprender a ver e manipular no objeto além do traçado no Cabri-Géomètre.** Em Aberto, nº 62, 1994.

LAJOLO, M. **Livro didático: um (quase) manual de usuário.** Em Aberto, n.69, 1998. Disponível em:< http://www.inep.gov.br:81/folio.pgi/aberto69> Acesso em 10 de outubro de 2007.

LÉVY, Pierry. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora 4, 1993.

LIBLIK, Maria Petraitis, PINHEIRO, Marta. **Sobre a contribuição do ensino do desenho geométrico nas artes e na matemática: a importância da integração curricular.** In: Anais da 48ª Reunião Anual da Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (CD Rom). PUC-SP, 1996.

MARGOLINAS, Claire. **De L'importance du Vrai et du Faix dans la classe de Mathématiques.** La Penseé Sauvage Editions, 1993.

MARIOTTI, M. A. **Introduction to Proof: the mediation of a dynamic software environment.** Educational Studies Mathematics, Dordrecht, v. 44, n. 1/2, p. 25-53, 2000.

MARQUES, Ricardo **A Decisão que vale por um ano: A Escolha do livro didático** Revista Educação. 2007.

MARQUES, Ricardo. **A Decisão que vale por um ano: A escolha do livro didático**. Revista Educação. 2007. <http://www.abrelivros.org.br/abrelivros/texto.asp?id=2442>. Acesso em 12 de junho de 2008.

MARTIN, George. **Geometric Constructions**, Springer-Verlag, New York, 1998.

MELLO, Elizabeth Gervazoni Silva de**. Demonstração Uma sequência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino de Geometria.** Mestrado em Educação Matemática. Puc São Paulo.

MIGUEL, Antonio, MIORIM, Maria Ângela. **O Ensino de Matemática no 1º Grau**. São Paulo. Atual. 1986.

MIGUEL, Antonio. BRITO, Arlete. A história da matemática na formação do professor de matemática. In: **Caderno CEDES: História e Educação Matemática**. São Paulo: Papirus, 1996. p.47 - 61.

NEVES, Edna Rosele da Cunha. **Uma trajetória pela história da atividade editorial brasileira: Livro Didático de Matemática, autores e editoras**. Dissertação (Mestrado). Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. PUC, São Paulo, 2005.

NÚÑEZ, Beltrán Isauro**,** et. al. **A seleção dos livros didáticos: um saber necessário ao professor. O caso do ensino de ciências**. Revista Iberoamericana de Educación, 2003.

OLIVEIRA, Marta Khol de. **Vygotsky, aprendizado e desenvolvimento um processo sócio-histórico,** Editora Scipione, São Paulo, 1993.

CALSA, G. C e OLIVEIRA, R. M. **Livros didáticos e o ensino de geometria no ensino básico**. In: Encontro Regional de Iniciação Científica. 2006. Mandaguari. **Anais...** Mandaguari: FAFIMAM, 2006. p. 1-9.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática: uma análise da influência francesa**. 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2002. P. 65-76; 99-108.

PAIS, Luiz Carlos. **Ensinar e Aprender Matemáticas**. Belo Horizonte: Editora Autêntica, 2006.

PAIS, Luiz Carlos. **Intuição, experiência e teoria geométrica**. Zetetiké, Campinas SP, v. 4, n. 6, pág. 65-74, 1996.

PARZYSZ, Bernard. **Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée,** Tese de doutorado, Universidade de Paris, 1989.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino da geometria**: uma visão histórica. V 1989. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação. Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

PERES, Gilmer, ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Avaliando o ensino das construções geométricas para a construção do conhecimento de geometria. Reunião anual da SBPC, 53, 2001, Salvador**. Anais "Nação e diversidade, patrimônio do futuro"**. (CD-ROM), Salvador, Universidade Federal da Bahia, 2001.

PIAGET, Jean, e GRECO, Pierre. **Aprendizagem e Conhecimento**. Livraria Freitas Bastos. Rio de Janeiro, 1974.

PIAGET, Jean. **Para onde vai a educação?** 8ª ed. Rio de Janeiro: José Olympio Editora, 1984.

PIETROPAOLO, Ruy Cezar. **(Re) Significar a demonstração nos currículos da educação básica e da formação de professores de matemática**. Tese de Doutorado. PUC/SP, 2005.

PINTO, Neuza Bertoni. **Práticas escolares do Movimento da Matemática Moderna,** pp. 4058-4068**.**

PINTO, Neuza Bertoni. **Tendências e desafios no cenário investigativo da Educação Matemática**. In: 27ª Reunião Anual da ANPED, 2004, Caxambú, MG. Anais da 27ª ANPED. Caxambú, MG. : Ed. 27 ANPED, 2004. V. 1, pp. 1-12.

PITOMBEIRA, João. **O que é Educação Matemática**. Temas e Debates, ano IV, n. 3, pp. 17-26, 1991.

PONTE, João Pedro da, MATOS, J. M & ABRANTES, Paulo. Investigação em educação matemática - Implicações curriculares. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. 1998.

PONTE, João Pedro et al**. Investigações Matemáticas na Sala de Aula: Um Projecto Colaborativo.** Publicado originalmente em inglês com o título Mathematical investigations in the classroom: A collaborative project, como capítulo do livro de V. Zack, J. Mousley, & C. Breen (Eds.). (1997). *Developing practice: Teachers' inquiry and educational change* (pp. 135-142), Geelong, Australia: Centre for Studies in Mathematics, Science and Environmental Education.

PÓVOAS, R. V. C. **Um Micromundo de aprendizagem geométrica: quadriláteros e o Cabri-Géomètre.** In: Anais do II Encontro Brasileiro de estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Rio Claro: Universidade Estadual Paulista, 1997.

PURIFICAÇÃO, Ivonélia da. **formação continuada de professores das séries iniciais do ensino fundamental: um caminho em construção.** PUC. 2002.

QUARANTA, Maria Emília e TARASOW, Paola. **Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas.** Revista Latino Americana de Investigacion en Matematica Educativa. Ano/vol. 7, nº 003, 2004. México, p. 219-223

RAMALHO, Glória. PISA 2000: **Conceitos fundamentais em jogo na avaliação de literacia matemática e competências dos alunos portugueses**. Lisboa: Ministério da Educação, Gabinete de Avaliação Educacional (GAVE), 2002.

REZENDE, E. Q. Frota. e QUEIROZ, Maria Lúcia de. **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas**. Editora UNICAMP, 2000.

RICARDO, Elio Carlos, ZYLBERSZTAJN, Arden. **Os Parâmetros Curriculares Nacionais na formação inicial dos professores das Ciências da Natureza e Matemática do Ensino Médio.** Investigações em Ensino de Ciências, volume 12, p. 339-355, 2007.

SANGIACOMO, Ligia. **O processo da mudança de estatuto: de desenho para figura geométrica.** São Paulo, 1996. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) São Paulo : PUC.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática – curso moderno para cursos ginasiais**. Companhia Editora Nacional, 1964. 1º a 3º volumes.

SANTANA, José Rogério, BORGES NETO, H**. Novas e Velhas Tecnologias: Questões cognitivas no ensino de geometria mediado por recursos computacionais**. In: XVI EPENN - Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste, Aracaju, 2003.

SANTANA, José Rogério. **Novas e velhas tecnologias no ensino de Matemática: uma discussão sobre os aspectos cognitivos no ensino de Geometria mediado por recursos computacionais.** Fortaleza, 2002

SANTOS, Marcelo Câmara dos. **Efeitos da utilização do Cabri-Géomètre no Desenvolvimento do pensamento Geométrico**. Anais SBIE – Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, São José dos Campos, 1997, p. 779-785.

SERRAZINA, Maria de Lurdes, PONTE, João Pedro da, OLIVEIRA, Isolina. Grandes temas matemáticos. In: **_____. A Matemática na Educação Básica**. Lisboa: Ministério da Educação Básica, 1999. p. 41- 91. (Reflexão participada sobre os currículos do ensino básico).

SILVA, Maria Célia Leme da. **Teorema de Tales: Uma engenharia didática utilizando o Cabri-Géomètre-Géomètre.** São Paulo, 1997. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) Pontifícia Universidade Católica- PUCSP.

SILVA, Maria Célia Leme. **A Geometria escolar ontem e hoje: algumas reflexões sobre livros didáticos de Matemática.** Revista Iberoamericana de Educación Matemática, nº 3, 2005, p. 73-85.

SMOLE, Kátia Stocco, DINIZ, Maria Ignez, CÂNDIDO, Patrícia (Orgs.). **Figuras e Formas.** Porto Alegre: Artmed, 2003. 200p. (Matemática de 0 a 6 anos).

SOARES, F. S. **Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Avanço ou Retrocesso?** Dissertação (Mestrado em Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do rio de Janeiro, 2001.

TARDIFF, Maurice, LESSARD, Claude, LAHAYE, Louise. **Os professores face ao saber : Esboço de uma problemática do saber docente.** Teoria & Educação, 4, 1991, p. 215-233.

TELES, Rosinalda Aurora de Melo. **Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas**. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Pernambuco,UFPE. Recife, 2007.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma História da Matemática Escolar no Brasil (1730-1930).** Annablueme/FAPESP, São Paulo, 1999.

VALENTE, Wagner. (org.) **Euclides Roxo e a Modernização do Ensino de Matemática no Brasil.** Editora SBEM. São Paulo. 2003

WAGNER, Eduardo. C**onstruções Geométricas,** 2ª Edição, Publicação SBM, 1998.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Construções geométricas, um saber escolar novamente para todos?** In: SEMANA DA PÓS-GRADUAÇÃO DA UFMG, 3, 2002, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte, Universidade Federal de Minas Gerais, 2002

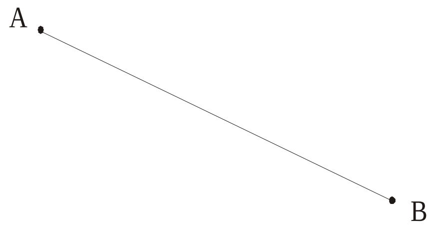
ZUIN, Elenice de Souza Lodron. **Da régua e do compasso**: **as construções geométricas como um saber escolar no Brasil.** 2001. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

ZULLATO, Rubia Barcellos Amaral. **Professores de Matemática que utilizam *software*s de Geometria Dinâmica: suas características e perspectivas** (dissertação de Mestrado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Campus de Rio Claro, São Paulo, 2003.

ANEXOS

4ª sessão: construção da mediatriz

Atividade 1: Com o uso da régua e compasso encontre o ponto médio do segmento AB. Desenhe usando régua e compasso o segmento perpendicular a AB passando pelo seu ponto médio.



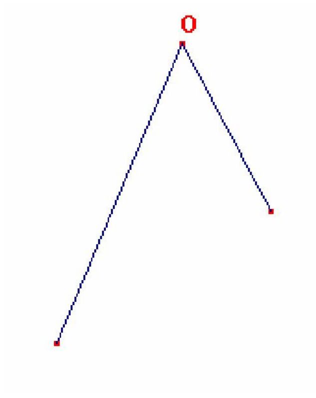
Atividade 2: A mediatriz de um segmento AB é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam dos pontos A e B. O que você construiu é a mediatriz do segmento AB? Como você justifica sua resposta?

Atividade 3: A mediatriz também pode ser definida como um conjunto de pontos que apresentam alguma propriedade relacionada com a distância. Que propriedade é essa? Justifique sua afirmação.

Atividade 4 (Problema): Numa certa fazenda, a área destinada ao pasto do gado tem forma triangular, de lados iguais a 5 km, 6 km e 7 km. O proprietário pretende construir um curral num ponto equidistante dos vértices desse triângulo. A que distância aproximada de cada vértice ficará o curral? (Adaptação do exercício retirado do artigo Construção da mediatriz de um segmento: uma exemplo de aprendizagem significativa Marina Menna Barreto, UFRGS, pág. 5)

5ª Sessão: Construção das bissetrizes

Atividade 1: Para o ângulo abaixo construa a bissetriz, obedecendo aos passos dados:



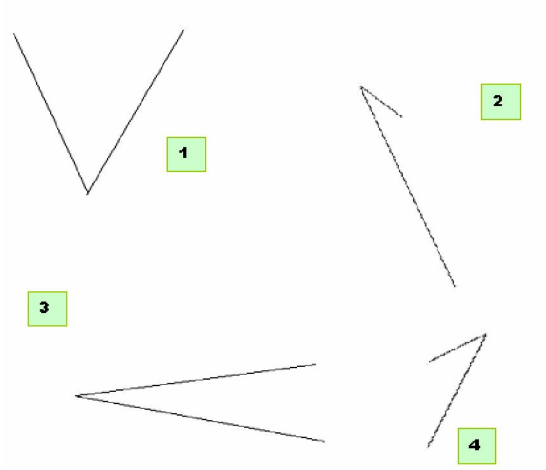
1. Com centro no vértice do ângulo e raio qualquer, convenientemente grande, descreve-se um arco de circunferência C1, o qual intersecta os lados nos pontos A e B.
2. Com centro em A e com uma abertura qualquer , descreva um arco de circunferência C2.
3. Repita o processo agora com centro em B, usando a mesma abertura, e trace o arco C3.
4. Marque a interseção dos arcos C2 e C3 e chame de P.
5. Trace a semi reta de origem O passando por P.

Atividade 2: A bissetriz de um ângulo é o lugar geométrico que equidista dos lados desse ângulo. O que foi construído é realmente uma bissetriz?

____

____

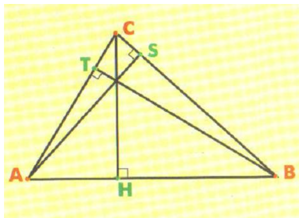
Atividade 3: Em qual(is) desenho(s) de ângulo podemos encontrar a bissetriz?



Atividade 4: Desenhe duas retas concorrentes, a reta *c* e a reta *d* e construa o lugar geométrico dos pontos que estão a uma mesma distância de *c* e *d*.

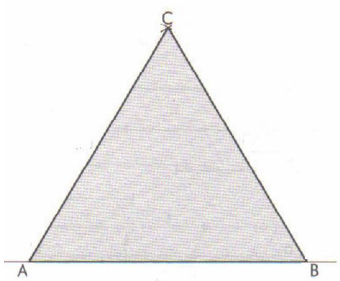
7ª Sessão: as alturas

Atividade 1: dado o triângulo ABC, chamaremos de altura do triângulo relativamente ao lado BC o segmento AS, perpendicular a BC e que passa pelo ponto A, como mostra a figura abaixo.

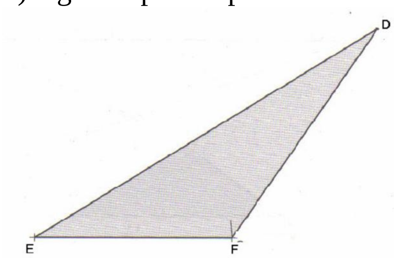


Observando o desenho podemos afirmar que existe mais que uma altura? Por quê?

Atividade 2: Construa as alturas dos triângulos abaixo, seguindo os passos apresentados.



1) Construa uma reta perpendicular à reta AB passando pelo ponto C;
2) Faça o mesmo procedimento para os lados BC e CA
3) Agora repita os procedimentos 1 e 2 no triângulo DEF



Baseando-se nas suas construções, responda as questões abaixo:
2.1O triângulo ABC é um triângulo equilátero.
a) Poderemos afirmar que as alturas construídas também são mediatrizes?
b) E ainda, será que elas são também medianas desse triângulo?
c) Explique ou justifique suas respostas.
2.2) Observe o triângulo DEF ele é um triângulo escaleno.
a) O que você construiu foram as alturas do triângulo? Justifique sua resposta.

8ª Sessão: os pontos notáveis do triângulo

Atividade 1: Sabendo que o ortocentro de um triângulo qualquer é o encontro das suas alturas, construa um triângulo qualquer e encontre suas alturas.

Esta é uma atividade livre; você poderá usar o que quiser de recursos do cabri. Ao encontrar as alturas marque o seu ponto de interseção, chame este ponto de ponto *O*. Movimente este ponto e responda as perguntas abaixo:

f) Ao movimentar o ponto *O* o que aconteceu com o seu desenho? Por quê?

g) O seu ponto pode estar fora ou dentro do triângulo? Por quê?

h) Quando o ponto *O* está fora do triângulo que tipo de triângulo eu tenho?

Atividade 2: O baricentro de um triângulo é o encontro de suas medianas. Crie uma circunferência e sobre ela marque os pontos A, B e C. Construa o triângulo ABC. Encontre o ponto médio M do lado BC e o ponto médio N do lado AC e, em seguida, construa os segmentos AM e BN.

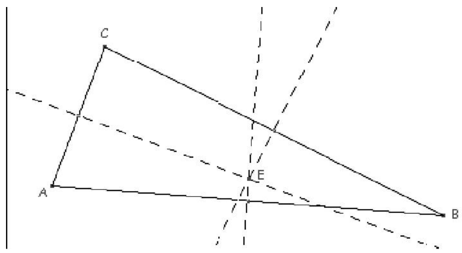
f) O que significam os segmentos AM e BN relativamente ao triângulo ABC?

g) Esses segmentos se interceptaram em um ponto, chame este ponto de G. Este ponto é o baricentro?

h) Se você mantiver fixos os vértices B e C e variando o vértice A (sempre sobre a circunferência) qual é o lugar geométrico do baricentro G? Exercício adaptado do artigo: Pesquisas de lugares geométricos com o auxílio da Geometria Dinâmica, Carneiro, revista do Professor de Matemática, SBM, pág. 5.

9ª Sessão: incentro e circuncentro

Atividade 1. "Dado o triângulo abaixo, foram construídas suas três mediatrizes, relativas aos lados AB, BC e AC. É possível afirmar que a distância do ponto E, encontro destas mediatrizes, a cada um dos vértices é a mesma?" (exercício retirado do artigo Construção da mediatriz de um segmento: uma exemplo de aprendizagem significativa Marina Menna Barreto, UFRGS, pág. 5)

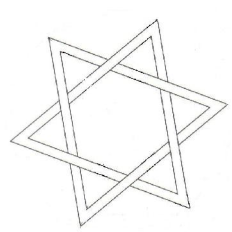


Atividade 2: Agora desenhe um triângulo AME e as mediatrizes dos seus lados. Chame o encontro das mediatrizes de O. Esta atividade pode ser feita no Cabri usando os recursos que quiser.

a) com centro em O e raio AO, trace uma circunferência.

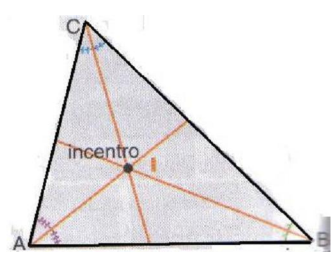
b) os pontos M e E pertencem a essa circunferência? Por quê?

Atividade 3: Problema: trace a circunferência que contém as "pontas" da estrela.



2ª parte

Atividade 1: Agora observe a desenho abaixo:



O desenho representa um triângulo e suas:

a) mediatrizes

b) bissetrizes

c) medianas

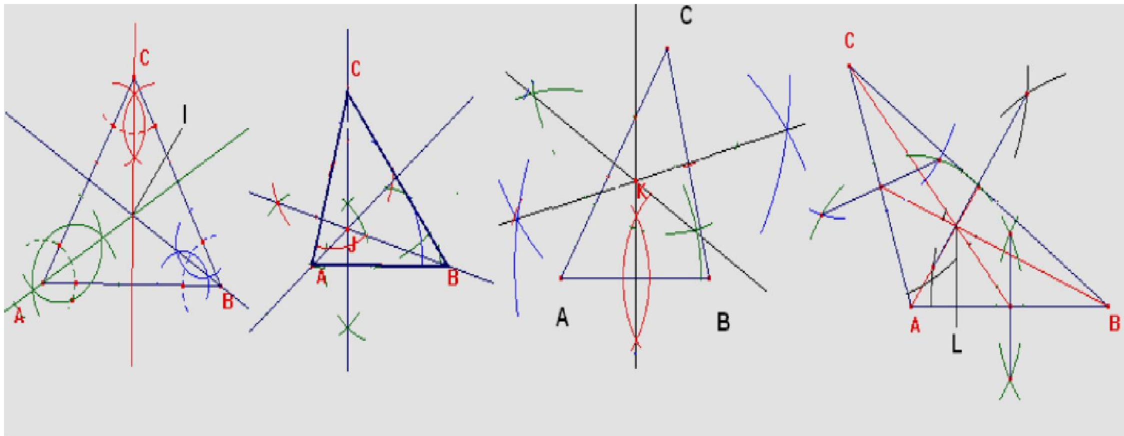
d) alturas

Por quê?

Atividade 2. No desenho apresentado na atividade 1 você pode observar que há uma interseção de três retas. Dê a este ponto de encontro o nome de I. É possível inscrever uma circunferência dentro do triângulo? Por quê?

10 ª sessão: Revendo os pontos notáveis do triângulo – uma apropriação dos conceitos.

Atividade 1. Considerando os pontos notáveis do triângulo, identifique os pontos I, J, K e L na respectiva ordem.



Atividade 2: Responda verdadeiro ou falso para as questões abaixo, justificando quando verdadeiras e também quando forem falsas: (questões adaptadas e acessadas no site http://www.coladaweb.com/questoes/matematica/luggeom.htm).

a) Num triângulo isósceles, o circuncentro coincide com o baricentro.

b) Se o ortocentro é vértice do triângulo então o triângulo é retângulo.

c) Se o circuncentro é externo, o triângulo é obtusângulo.

d) Se o baricentro

e) As bissetrizes de um triângulo se cortam sobre um ponto que é equidistante dos lados. Este ponto é chamado incentro, e utilizado como centro da circunferência quando se quer inscrever esta circunferência no triângulo.

f) Lugar geométrico é uma sucessão de pontos ou de linhas que gozam de uma propriedade comum.

Atividade 3: Dados os pontos A, B e C, determine a circunferência que os contenha.