APARECIDA SANTANA CHIARI

A UTILIZAÇÃO DO ESCALONAMENTO NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Campo Grande – MS

2011

APARECIDA SANTANA CHIARI

A UTILIZAÇÃO DO ESCALONAMENTO NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES POR ALUNOS DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada para a obtenção de grau de Mestre em Educação Matemática à Comissão Julgadora da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul sob a orientação do Professor Doutor José Luiz Magalhães de Freitas.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Campo Grande – MS

2011

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas, UFMS

Profª. Drª. Marilena Bittar, UFMS

Profª. Drª. Sílvia Dias Alcântara Machado, PUC/SP

Campo Grande, 18 de Fevereiro de 2011

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha família, em especial aos meus pais e minhas irmãs, e ao meu noivo, pela compreensão e apoio durante essa jornada.

AGRADECIMENTOS

Não foi sozinha que consegui chegar ao final desta etapa. Várias pessoas estiveram presentes, seja de corpo ou em pensamento, nesta longa caminhada. Por isso, neste momento único, não poderia deixar de agradecer aos principais envolvidos neste processo.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus, por me dar força e garra para enfrentar este desafio.

Ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, PPGEduMat, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul pela oportunidade de realização de trabalhos em minha área de pesquisa.

Ao professor José Luiz Magalhães de Freitas, pelo apoio, parceria, compreensão, orientação e principalmente pelo exemplo de educador e apreciador da matemática.

À professora Marilena Bittar, pelas inúmeras contribuições, conselhos e pelo exemplo de eficiência, compreensão e dedicação ao trabalho.

À professora Sílvia Dias Alcântara Machado, pelas sugestões preciosas no momento de qualificação deste trabalho.

A todos os professores do PPGEduMat, pelas reflexões provocadas e pela oportunidade de fazer parte da família UFMS.

Aos meus pais, pelo incentivo e compreensão de minha ausência.

Às minhas irmãs, pelos pensamentos positivos e pela presença mesmo que distante.

Ao meu futuro esposo, pelo apoio incondicional e paciência em todos os momentos e por representar, junto com minha família, o alicerce da minha vida.

À colega de mestrado e grande amiga Kátia Guerchi pelo companheirismo e apoio nesses dois anos.

Aos demais colegas do mestrado, em especial à Thaty, Camila e Karla, pela companhia.

Às disciplinas Pesquisa em Educação Matemática, Seminário de Pesquisa I e Seminário de Pesquisa II do PPGEduMat, pela oportunidade de evolução e amadurecimento.

À CAPES pela provisão da bolsa de mestrado.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo principal investigar a utilização do escalonamento por alunos do ensino médio na resolução de sistemas lineares. Para atingir o objetivo geral de pesquisa, procuramos investigar a elaboração das operações elementares para a obtenção de sistemas lineares equivalentes e analisar dificuldades e superações encontradas pelos alunos no uso das transformações elementares para resolver sistemas lineares. O referencial teórico para análise desta pesquisa foi a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy Brousseau, e nos inspiramos na Engenharia Didática para, metodologicamente, materializá-la.

Os sujeitos de pesquisa foram alunos voluntários do primeiro ano do ensino médio de uma escola estadual de Campo Grande/MS, que participaram de sessões realizadas após o horário normal de aulas. Os dados utilizados foram coletados a partir da observação das situações de estudo e da análise da produção, escrita e em áudio, dos alunos que atuaram sobre uma sequência didática realizada em sala de aula.

Para dar suporte teórico à nossa pesquisa, foi realizado um estudo sobre diversos aspectos referentes ao tema sistemas lineares, tais como elementos do desenvolvimento histórico do tema, descrição da estrutura matemática dos sistemas lineares e do escalonamento, recomendações dos documentos oficiais, análise de livros didáticos e algumas dificuldades e erros cometidos por alunos no processo de aprendizagem de sistemas lineares.

Observamos que houve a devolução do problema “como resolver um sistema linear?”. Os alunos perceberam que as operações elementares transformam sistemas lineares em outros equivalentes, mas não conseguiram elaborar justificativas para isso. Em relação ao escalonamento, eles desenvolveram a habilidade de utilizar as operações elementares para eliminar incógnitas, mas, em geral, não realizavam a validação dos valores encontrados no sistema proposto inicialmente. Percebemos que, para os alunos, é necessário e suficiente encontrar uma resposta numérica para as incógnitas.

Palavras-chave: Escalonamento, Sistemas Lineares, Ensino Médio.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho narra uma pesquisa que procurou investigar o uso do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do ensino médio. Seis alunos constituíram os sujeitos de pesquisa, todos do primeiro ano do ensino médio.

Apresentamos aqui, de maneira sucinta, a estrutura do texto.

No primeiro capítulo, descrevemos uma pequena trajetória da pesquisadora, procurando destacar aspectos relacionados à Matemática e à Educação Matemática bem como os fatos que culminaram com o ingresso no Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Em seguida, ainda no primeiro capítulo, inserimos a pesquisa em uma problemática na qual apresentamos nossa questão de investigação.

O segundo capítulo é composto pelas escolhas teórico-metodológicas. É nele que trazemos uma parte da Teoria das Situações Didáticas, nosso referencial teórico, e descrevemos de forma sucinta a metodologia de investigação na qual nos inspiramos, a Engenharia Didática.

O terceiro capítulo traz elementos das análises preliminares, primeira etapa da Engenharia Didática. Nele, inserimos alguns elementos do desenvolvimento histórico do objeto de estudo, alguns métodos de resolução de sistemas lineares desenvolvidos por matemáticos antigos, como Bramahgupta, Cramer, Maclaurin, Gauss, Cardano, Bezout, entre outros.

Apresentamos também a descrição da estrutura matemática dos sistemas lineares e do método de resolução que constitui o foco desta pesquisa, o escalonamento. Em seguida, trazemos os resultados de estudos acerca dos documentos oficiais nos quais procuramos por recomendações em relação ao ensino de maneira geral, ao ensino de matemática e, mais especificamente, ao ensino de sistemas lineares. Procuramos também por recomendações em relação aos métodos de resolução que poderiam ou deveriam ser utilizados.

Ainda no terceiro capítulo, apresentamos uma análise de livros didáticos em que focamos os capítulos que abordavam sistemas lineares. Por fim, apresentamos algumas dificuldades e erros cometidos por alunos no processo de aprendizagem de sistemas lineares, a partir de dados extraídos de outras pesquisas já realizadas sobre essa temática.

É no quarto capítulo deste texto que apresentamos nossa sequência didática, acompanhada de sua análise *a priori* e *a posteriori* local, onde elencamos as variáveis didáticas e mostramos como “jogamos” com as mesmas em cada atividade.

Por fim, apresentamos, nas considerações finais, a análise *a posteriori* global e a validação de nossa sequência didática. Procuramos refletir e analisar se nossos objetivos específicos foram atingidos, bem como nosso objetivo geral e nossa questão norteadora. Além disso, apontamos algumas direções as quais novas pesquisas neste tema podem seguir.

1. PROBLEMATIZANDO A PESQUISA

1.1. TRAJETÓRIA

A pesquisa descrita neste texto emergiu de reflexões feitas ao final de nossa graduação em Bacharelado em Matemática, no ano de 2007, que se intensificaram durante 2008, ano no qual cursamos a Licenciatura em Matemática e demos início à docência.

As paixões por ensinar e pela Matemática sempre estiveram presentes em minha vida. Aos 11 anos, cursando a sexta série em uma escola pública do ensino fundamental, atual sétimo ano, fui medalhista de bronze da OPM – Olimpíada Paulista de Matemática. Este fato fez com que duas escolas particulares me oferecessem bolsa integral de estudos, com material didático incluso.

Aos 13 anos de idade comecei a dar aulas particulares para os alunos da minha classe. Aos 15 anos, cursando o segundo ano do curso colegial, me tornei monitora de Matemática das séries anteriores à minha em troca das apostilas da escola para minha irmã, que também estudava com bolsa integral, mas sem material didático incluso. Neste mesmo ano, a coordenadora da escola em que estudava começou a indicar meu nome a mães de alunos com dificuldades em matemática e comecei a dar aulas particulares para estudantes da cidade. Ainda no segundo colegial, fui medalhista de prata da OPM.

Assim, e não poderia ser de outra forma, essa afinidade com a Matemática influenciou sobremaneira a escolha pelo curso de graduação à época do vestibular. Passei no vestibular para o curso de bacharelado em Matemática, o único que prestei em quatro universidades distintas.

Ao longo da faculdade, o interesse por essa ciência só aumentou. Num primeiro momento, quando ainda cursava o Bacharelado, minha intenção era ingressar em um Mestrado em Matemática Pura. Entretanto, o último ano de faculdade foi um pouco frustrante no sentido em que me aprofundava cada vez mais na Matemática em si, aprendendo teoremas, demonstrações e conjecturas, mas não havia preocupação em como esse saber que estava sendo apropriado poderia ser ensinado e utilizado por outras pessoas.

Tal frustração fez com eu desistisse do ingresso no mestrado em Matemática Pura e iniciasse a Licenciatura, procurando aprender métodos ou técnicas de como ensinar o conhecimento adquirido até então. A partir daí a afinidade com o Ensino de Matemática só cresceu, culminando com a tentativa de entrada no curso de Mestrado em Educação Matemática.

Para que ingressássemos neste Mestrado, era necessário termos uma intenção de pesquisa, e então as reflexões mencionadas anteriormente voltaram à tona e contribuíram para a elaboração da intenção, que possuía o título: "A Resolução de Problemas como Metodologia de Ensino-Aprendizagem de Álgebra[1] para Alunos do Ensino Médio".

Depois de nosso ingresso, vários recortes foram feitos até chegarmos ao nosso atual objeto de pesquisa. As disciplinas Pesquisa em Educação Matemática e Seminário de Pesquisa I foram fundamentais durante esse processo de construção e a disciplina Seminário de Pesquisa II contribuiu sobremaneira para o amadurecimento e definição do objeto de estudo.

1.2. PRIMEIRAS CONSIDERAÇÕES

O ensino de matemática nas escolas, não raro, segundo Pantoja (2008), tem provocado nos estudantes aversão quanto ao estudo dos saberes inerentes à ciência matemática. Isso pode, claramente, influenciar o desempenho dos alunos. Provas como o SAEB, ENEM, PISA etc. podem comprovar essa afirmação. Segundo o site do INEP, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais, o penúltimo PISA, Programa Internacional de Avaliação de Alunos, constatou que o Brasil encontrava-se em 54º lugar em conhecimento matemático num ranking de 57 países. Em 2010 a situação melhorou um pouco, passando para 53º num ranking de 65 países. Ainda que tenha melhorado, precisamos melhorar muito mais.

Este é um dos fatores que nos motivou a investigar a questão do ensino e da aprendizagem da Matemática. Entretanto, assim como qualquer pesquisa de mestrado, nosso trabalho não poderia abranger todos os conteúdos referentes a essa ciência e também não poderia investigar a totalidade de um nível de ensino. Com base nisso, fizemos alguns recortes e inicialmente optamos por um dos três eixos estruturadores em matemática propostos pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio, a Álgebra.

Vale destacar, já que mencionamos o ensino médio, que esta etapa da educação básica foi escolhida como recorte para esta pesquisa pelo fato de haver um número

[1] Adotaremos, neste trabalho, a Álgebra como sendo um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas, no sentido descrito em Usiskin (1995).

muito menor de livros didáticos para o ensino médio que se preocupam ou proponham atividades que envolvam diferentes contextos e abordagens do que livros destinados ao Ensino Fundamental. E também pelo fato de que, segundo Lima (2001), o livro didático é, na maioria dos casos, a única fonte de referência com que conta o professor para organizar suas aulas, e, até mesmo, para firmar seus conhecimentos e dosar a apresentação que fará em classe.

Buscamos justificativas para as dificuldades encontradas pelos alunos, no tema matemático escolhido, percebidas durante nossas experiências pessoais como Professora de Matemática. Falando em primeiro lugar do tema amplo, a álgebra, Kieran *apud* Jamal (2004) sugere que três fatores são potenciais contribuintes para as dificuldades que o estudante tem em aprender álgebra: aprendizagem, ensino e conteúdo.

Booth (1995) aponta algumas ideias que podem constituir origens para tais dificuldades. Para a autora, o foco da atividade aritmética é diferente do foco da atividade algébrica. Diante disso, uma grande dificuldade sentida pelos alunos é aceitar uma expressão algébrica do tipo n+3, por exemplo, como resposta, já que na aritmética a resposta de uma operação sempre se reduz a um número. Outro fator de dificuldade, ainda segundo Booth (1995), seria o dilema nome-processo. A expressão n+3 pode tanto significar a instrução para a operação quanto a resposta.

Além da escolha pela álgebra, foi necessário especificar ainda mais nosso conteúdo matemático. Optamos pelo tema sistemas de equações lineares pelo fato de este conteúdo, entre outras razões, ter aplicações em outras áreas, inclusive na área computacional, que está em evidência no momento. Além disse, sistemas lineares podem ser solucionados com a utilização de conhecimentos elementares da matemática. Assim, iniciamos nossos estudos lançando um olhar mais criterioso para vários aspectos distintos deste conteúdo.

Nesse contexto, na busca por trabalhos cujo enfoque envolvesse a história do desenvolvimento deste conteúdo matemático, encontramos uma importante contribuição em Luccas (2004), que realizou uma pesquisa por meio de uma abordagem histórico filosófica na educação matemática apresentando o resultado de uma investigação histórica sobre os temas sistemas lineares, determinantes e matrizes e uma proposta pedagógica conforme tal abordagem sobre esses mesmos assuntos.

Segundo Luccas (2004, p 36),

> A criação e o desenvolvimento da escrita foi um marco na história da humanidade, pois permitiu às gerações posteriores, como a nossa, o acesso a informações de como povos antigos lidavam com os problemas que surgiam

> em seus cotidianos. Embora muitos destes registros tenham sofrido desgastes e erosões com o passar do tempo, houve registros que sobreviveram à deterioração causada pelo tempo, dentre os quais destacamos alguns tabletes de argila feitos pelos babilônios, que habitavam a região da Mesopotâmia, ou papiros deixados pelos egípcios, entre outros.

Assim, puderam ser analisados dois registros de 300 e 200 anos antes de Cristo nos quais já apareciam problemas matemáticos em que algumas sentenças são revertidas por meio de linguagem simbólica matemática em equações. Esse assunto, hoje, é conhecido como Sistema de Equações Lineares que, como Luccas (2004) apontou, acompanhou o desenvolvimento humano, instigando curiosos a criarem métodos para resolvê-lo.

Deste trecho do trabalho citado, identificamos mais uma justificativa da pertinência e importância do assunto matemático escolhido para a pesquisa e, de uma forma mais geral, para o homem, que desde muito antigamente já se sentia instigado a buscar métodos de resolução de sistemas lineares.

Voltando nossas atenções agora para as dificuldades dos alunos referentes ao tema matemático específico do trabalho, Herrero *apud* Pantoja (2008, p. 19) apontou algumas dificuldades que os alunos apresentam quando estudam sistemas lineares:

> - Dificuldades em usar operações aritméticas elementares para resolver problemas verbais envolvendo Equações e Sistemas de Equações;
> - Dificuldade em converter a linguagem escrita para uma linguagem matemática;
> - Os alunos não costumam verificar as respostas encontradas durante o processo de resolução dos Sistemas e, por isso, não têm clareza do que elas representam.

Para a autora, essas dificuldades apresentam diversas origens, dentre as quais destaca a complexidade matemática segundo a qual são tratados os elementos básicos que são usados para resolver os sistemas lineares, a forma abstrata como o conceito de sistemas lineares é trabalhado aliada a não interpretação do significado das soluções encontradas pelos alunos, bem como a ruptura entre o pensamento aritmético e algébrico empregado no ensino de sistemas, além de outras mais.

Existes diversos métodos de resolução de sistemas lineares (BATTAGLIOLI, 2008), dentre os quais podemos citar o da adição, eliminação de Gauss, conhecido por método do escalonamento, substituição, regra de Cramer, que utiliza determinantes, entre outros. Nesse contexto, Pantoja (2008, p.18) afirma que

> o estudo de sistemas no ensino básico e mais precisamente no ensino médio se restringe ao emprego de técnicas oriundas do estudo prévio de matrizes sem conexão com as técnicas estudadas no ensino fundamental, quebrando a seqüência desejável de construção do conhecimento matemático.

Pelo fato do estudo de sistemas lineares se restringir ao emprego de técnicas oriundas do estudo prévio de matrizes, como afirmou a autora, interpretamos que o ensino médio esteja priorizando essencialmente a Regra de Cramer como método de resolução de sistemas lineares. Todavia, no desenvolvimento histórico deste conteúdo, sistemas lineares eram resolvidos sem ao menos mencionar-se os conceitos relacionados a determinantes. Segundo Iezzi *apud* Battaglioli (2008), provavelmente os chineses foram os primeiros a resolver um sistema linear de forma sistemática, por volta do século III a.C., mas foi somente em 1683 que a ideia de determinante veio à luz.

Dentre as técnicas de resolução, nossa pesquisa terá como foco a utilização da técnica do escalonamento. Vemos esse método como procedimento eficaz, que resolve qualquer caso de sistema linear, o que não acontece com a regra de Cramer, que pode ser aplicada somente para os casos em que a matriz associada ao sistema linear é quadrada e seu determinante diferente de zero.

Sobre isso, Lima (2001, p.27) afirma que

> os determinantes ocorreram historicamente como um instrumento para resolver sistemas de equações lineares [...]. Entretanto, há séculos já se sabe que, como processo de cálculo, os determinantes são extremamente ineficazes [...]. Para dar uma idéia da situação, imaginemos um computador [...] capaz de efetuar um milhão de multiplicações ou divisões por segundo [...]. Se tivéssemos um sistema [linear] 20x20, a Regra de Cramer requereria 2 milhões, 745 mil e 140 anos para obter a solução! O método de escalonamento usaria apenas 6 milésimos de segundo para resolver o sistema.

Além das justificas apresentadas, julgamos importante ressaltar que segundo nossa concepção, o conhecimento não é algo pronto que possa ser repassado, mas sim dinâmico, que está em construção, e que, além disso, essa construção deve ser realizada principalmente pelo aluno, num processo no qual o professor tem o papel importante, mas não principal, de mediar essa construção e propor situações que favoreçam que isso aconteça.

A partir das justificativas de nossa investigação e de nossa concepção de ensino e de aprendizagem, nos questionamos sobre **quais situações podem contribuir para que os alunos construam o processo do escalonamento visando a resolução de sistemas lineares**. Ou seja, como esse processo pode ser construído, pelos alunos, por meio da exploração de situações que envolvam esse conteúdo matemático?

2. OBJETIVOS DE PESQUISA E REFERENCIAL TEÓRICO-METODOLÓGICO

2.1. OBJETIVOS DE PESQUISA

2.1.1. Objetivo Geral

Com a finalidade de encontrar resposta para nossa questão norteadora, e ainda com base nas justificativas apresentadas, definimos o seguinte objetivo geral de pesquisa: **investigar o uso do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do ensino médio**.

2.1.2. Objetivos Específicos

Para responder ao objetivo geral, elencamos dois objetivos específicos.

Em primeiro lugar, pretendemos **investigar a elaboração das operações elementares para a obtenção de sistemas lineares equivalentes por alunos do ensino médio**, pois queremos descobrir se os alunos compreendem que as transformações elementares transformam os sistemas em outros equivalentes, não alterando, dessa forma, sua solução. De posse dessa compreensão, conjecturamos que os alunos sejam capazes de utilizar as transformações elementares visando o escalonamento dos sistemas lineares.

Em segundo lugar, pretendemos **analisar dificuldades e superações encontradas pelos alunos no uso das transformações elementares para resolver sistemas lineares**. Acreditamos que, sabendo utilizar adequadamente as transformações elementares, os alunos sejam capazes de elaborar o processo de escalonamento a fim de obter sistemas lineares equivalentes aos propostos, entretanto na forma escalonada, cujo processo de resolução é mais simples. À medida que esse processo vai sendo construído, os alunos devem passar por fases de erros e superações e, a partir da análise dos mesmos, poderemos entender se e como acontece o processo de aprendizagem referente a esse conteúdo.

2.2. ESCOLHAS TEÓRICO-METODOLÓGICAS

2.2.1. Referencial Teórico

Para responder aos objetivos específicos e, por conseguinte, o objetivo geral, nos apoiamos nas ideias e conceitos da Teoria das Situações Didáticas, proposta por Guy

Brousseau. Segundo Freitas (2008), essa teoria trata de formas de apresentação do conteúdo matemático a alunos, possibilitando melhor compreender o fenômeno da aprendizagem da Matemática.

A Teoria das Situações Didáticas, TSD, se insere no quadro teórico da Didática da Matemática, que “estuda as atividades didáticas, ou seja, as atividades que têm como objeto o ensino, evidentemente naquilo que elas têm de específico para a matemática” (BROUSSEAU, 1996, p. 35).

A TSD, diferentemente de outras teorias pedagógicas que abordam aspectos mais gerais, contempla a especificidade do saber matemático (FREITAS, 2008, p.77) e, por essa razão, acreditamos que a escolha da mesma para a interpretação dos dados deste trabalho seja pertinente.

Brousseau (2008) afirma que uma situação didática é entendida como o entorno do aluno, que inclui tudo o que especificamente colabora no componente matemático de sua formação.

Para nossa pesquisa, utilizamos os conceitos de situação didática, devolução, situações adidáticas de ação, formulação e validação, divididas em momentos distintos, mas não separados, e o conceito de institucionalização. Esses conceitos serão brevemente apresentados e descritos a seguir.

Antes de apresentarmos os conceitos, falaremos de maneira rápida sobre o papel do professor e do aluno nesse quadro teórico. Para isso, será necessário, também, descrever o papel do investigador matemático.

Para comunicar aquilo que pensa ter descoberto, o matemático precisa

> suprimir todas as reflexões inúteis, o traço dos erros cometidos e dos percursos erráticos. É necessário esconder as razões que conduziram em determinada direção e as condições pessoais que presidiram ao êxito, problematizar habilmente mesmo as observações um pouco banais, mas evitar as trivialidades. É necessário ainda procurar a teoria mais geral na qual os resultados permanecem válidos. (BROUSSEAU, 1996, p.37).

Ou seja, o matemático, em seu trabalho, despersonaliza, descontextualiza e destemporaliza o saber.

O trabalho do professor é o inverso deste,

> [...] uma vez que ele tem de produzir uma recontextualização dos conhecimentos. Estes transformar-se-ão no conhecimento de um aluno, ou seja, numa resposta bastante natural a condições relativamente particulares, condições indispensáveis para que eles tenham algum sentido para ele (BROUSSEAU, 1996, p.38).

Assim, entendemos que cabe ao professor a tarefa de inserir novamente o saber em jogo em um conjunto de particularidades, se possível próximo à realidade do aluno, para que elas se tornem mais significativas e que contemplem o contexto sociocultural no qual ele está inserido, sem, no entanto, revelar aos alunos as intenções didáticas contidas nas situações propostas. Em suma, o professor deve dar aos alunos meios para construir o conhecimento que existe por trás do contexto.

É nesse meio criado pelo professor que o aluno age. Nesse sentido, o trabalho do aluno deve ser semelhante, tomando as devidas proporções, ao trabalho do investigador matemático. Além de conseguir resolver problemas, cabe ao aluno extrair da situação proposta pelo professor, o conhecimento matemático envolvido, pois o professor não deixa claro de qual se trata. Assim, os alunos têm de “redescontextualizar e redespersonalizar o seu saber, e têm de fazê-lo de forma a identificarem a sua produção com o saber em curso na comunidade científica e cultural da sua época” (BROUSSEAU, 1996, p.38-39).

De maneira resumida, podemos representar o trabalho do matemático, do professor e do aluno pelo esquema a seguir.

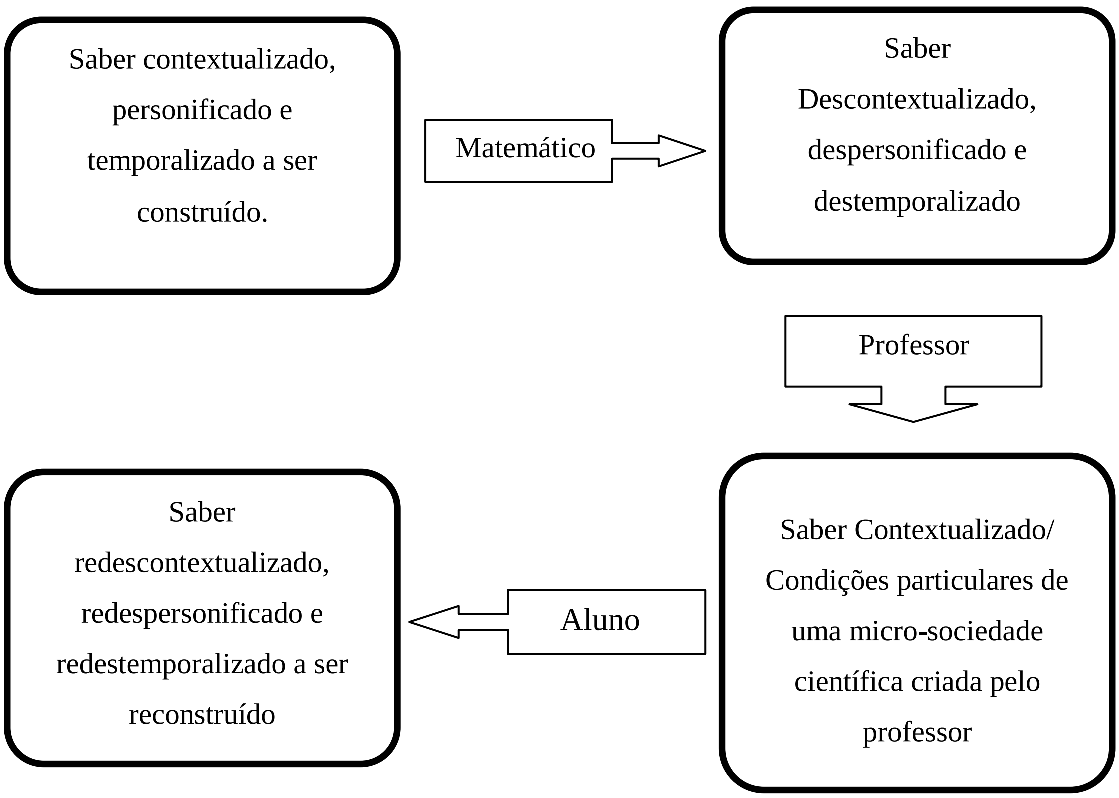


Figura 1: Esquema dos papéis de investigador, professor e aluno

Assim, podemos afirmar que a TSD leva em consideração tanto o trabalho do professor quanto do aluno, e destacamos que propor um bom problema é tão importante quanto conseguir resolvê-lo. Dessa forma, o professor assume papel fundamental no processo de aprendizagem do aluno.

Destacados os papéis do aluno e do professor, podemos nos perguntar: “O que é, então, ensinar e aprender, segundo a TSD?”.

A Teoria das Situações Didáticas parte da premissa de que o aluno

> aprende adaptando-se a um meio que é um fator de contradições, de dificuldades, de desequilíbrios, um pouco como acontece à sociedade humana. Este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de respostas novas, que são a prova da aprendizagem (BROUSSEAU, 1996, p.49).

Segundo Brousseau (1996, p. 40), o ensino “é concebido como um projeto social: o de levar um aluno a apropriar-se de um saber constituído ou em vias de constituição”.

Assim, fica evidente que o meio, que o professor propõe e no qual o aluno age, assume papel importante na modelagem das relações que se dão durante o processo de aprendizagem matemática.

Passamos a partir de agora para a descrição dos conceitos da TSD que utilizamos neste trabalho.

Entendemos por devolução o ato de os alunos aceitarem “entrar no jogo”, ou seja, tomarem o problema proposto pelo professor como se fosse um desafio pessoal.

> A devolução tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo, como se o problema fosse seu e não somente porque o professor quer. Se o aluno toma para si a convicção de sua necessidade de resolução do problema [...] então inicia-se o processo de aprendizagem (FREITAS, 2008, p.83).

Tendo ocorrido a devolução, os alunos podem passar por algumas etapas que constituem as situações adidáticas. Vale ressaltar que essas etapas não estão separadas de forma clara. O que se observa são momentos em que uma ou outra etapa se evidencia e o que está sistematizado neste texto não acontece seguindo a mesma ordem de apresentação nem de separação.

As situações adidáticas são aquelas em que a intenção de ensinar não é revelada ao aluno. Segundo Freitas (2008), o professor prepara, organiza a situação e tem o controle sobre o andamento dela, não do saber, para que os alunos possam vivenciá-la como se fossem pesquisadores que buscam a solução sem a ajuda do mestre.

Uma situação adidática é dividida em três fases distintas, porém interligadas: ação, formulação e validação.

Identificamos uma situação de ação

> quando o aluno, que se encontra ativamente empenhado na busca de solução de um problema, realiza determinadas ações mais imediatas, que resultam na produção de um conhecimento de natureza mais operacional. Muitas vezes, essas ações podem estar fundamentadas em modelos teóricos que o aluno pode tentar ou não explicar. [...] Numa situação de ação, há sempre o predomínio quase que exclusivo do aspecto experimental do conhecimento (FREITAS, 2008, p. 96).

Já em uma situação de formulação,

> o aluno utiliza, na resolução do problema estudado, alguns modelos ou esquemas teóricos explícitos, além de mostrar um evidente trabalho com informações teóricas de uma forma bem mais elaborada, podendo ainda utilizar uma linguagem mais apropriada para viabilizar esse uso da teoria. [...] O aluno faz determinadas afirmações relativas à sua interação com o problema, mas sem a intenção de julgamento sobre validade, embora contenham implicitamente intenções de validação (FREITAS, 2008, p.96-97).

As situações de validação

> são aquelas em que o aluno já utiliza mecanismos de prova e em que o que sabe é usado com essa finalidade. Essas situações estão relacionadas ao plano da racionalidade e diretamente voltadas para o problema da verdade. Elas podem ainda servir para contestar ou mesmo rejeitar proposições. [...] Nessas situações, é preciso elaborar algum tipo de prova daquilo que se já afirmou, de outra forma, pela ação (FREITAS, 2008, p.98).

Brousseau (1996, p.31) afirma que durante certo tempo, acreditava-se que apenas as situações de ação, formulação e validação constituíam todos os tipos de situações possíveis. Entretanto, percebeu-se a necessidade de institucionalização das situações por parte do professor.

> [...] Tínhamos situações de aprendizagem – no sentido dos psicólogos – e se poderia pensar que havíamos reduzido o ensino a sucessões de aprendizagem. Mas, no decorrer das experiências desenvolvidas na escola Jules Michelet, vimos que os professores, depois de certo tempo, precisavam ordenar um espaço. [...] Demoramos a perceber que os professores realmente eram obrigados a "fazer alguma coisa": tinham de dar conta da produção dos alunos, descrever os fatos observados e tudo que estivesse vinculado ao conhecimento em questão; **conferir um *status* aos eventos da classe visto como resultados dos alunos e do processo de ensino** [grifo nosso]; determinar um objeto de ensino e identificá-lo; aproximar as produções dos conhecimentos de outras criações [...] e indicar quais poderiam ser reutilizadas. (BROUSSEAU, 2008, p. 31)

Assim, segundo Freitas (2008, p. 101), as situações de institucionalização visam "estabelecer o caráter de objetividade e de universalidade do conhecimento". Na institucionalização, o professor dá a determinados conhecimentos o *status* cultural indispensável de saber (BROUSSEAU, 2008).

Brousseau (2008) diferencia os termos “conhecimento” e “saber”, utilizados na definição de institucionalização. Para ele, os conhecimentos são meios transmissíveis e de cunho social, já o saber é o produto cultural de uma instituição. Assim, como já afirmamos, mas agora segundo nossa interpretação, o professor tem a “missão”, durante a institucionalização, de “promover” certos conhecimentos produzidos pelos alunos a saberes, reconhecidos culturalmente. Enquanto, nas fases adidáticas, a intenção didática não é revelada aos alunos, no momento da institucionalização ela está totalmente exposta. Aqui os protagonistas do processo são ambos, aluno e professor, diferentes das outras fases (adidáticas) em que o aluno era o “ator” principal, sendo que agora a responsabilidade é do professor.

2.2.2. Referencial Metodológico

Para provocar a devolução e o aparecimento de situações adidáticas, propomos aos alunos algumas situações-problema envolvendo sistemas lineares a fim de que eles interagissem e para as quais formulassem respostas.

Com a finalidade de estruturar um modelo para a apresentação dessas situações, tomamos como inspiração elementos da Engenharia Didática, metodologia de pesquisa que consiste em um processo empírico, no sentido que deve extrair os dados da realidade e os comparar às hipóteses levantadas no início do trabalho (MACHADO, 2008).

Nesse sentido, uma de nossas hipóteses é a de que os alunos são capazes de construir o processo do escalonamento à medida que interagem com situações elaboradas nos preceitos da teoria escolhida e propostas com esse objetivo.

Segundo Machado (2008), essa metodologia se constituiu com a finalidade de analisar as situações didáticas e, portanto, se insere no quadro teórico da Didática da Matemática.

Ainda sobre o surgimento dessa metodologia, Artigue (1996, p. 193) afirma que

> a noção de engenharia didática emergiu em didática da matemática no início da década de 1980, com o objetivo de etiquetar uma forma de trabalho didático: aquela que era comparável ao trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, se apóia nos conhecimentos científicos do seu domínio, aceita submeter-se a um controle de tipo científico, mas, ao mesmo tempo, se encontra obrigado a trabalhar sobre objetos muitos mais complexos do que os objetos depurados da ciência, e portanto a estudar de uma forma prática, com todos os meios ao seu alcance, problemas de que a ciência não quer ou ainda não é capaz de se encarregar.

Assim, entendemos que a comparação com o trabalho do engenheiro venha do fato de que o professor, antes de ir para a sala de aula, passa por um processo de preparação e estudo, seja durante sua formação inicial, com as teorias e métodos que compõem o currículo de seu curso de formação, seja no planejamento de sua aula, mas quando coloca esses conhecimentos e planejamento em prática, se depara com problemas e objetos mais complexos e particulares do que aqueles que são frutos de seus conhecimentos científicos.

São distinguidas quatro fases da Engenharia Didática, a saber: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. Entretanto, antes de descrever cada fase da engenharia, faremos uma breve caracterização dessa metodologia de investigação.

De acordo com Artigue (1996, pp. 196-197) :

> A engenharia didática, vista como metodologia de investigação, caracteriza-se antes de mais [nada,] por um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino. [...] Caracteriza-se ainda, relativamente a outros tipos de investigação baseados nas experimentações na sala de aula, pelo registro no qual se situa e pelos modos de validação que lhe estão associados. Com efeito, as investigações que recorrem a experimentações na sala de aula situam-se, a maioria das vezes, numa abordagem comparativa com validação externa dos desempenhos de grupos experimentais e de grupos testemunho. Este paradigma não é o da engenharia didática, que se situa no lado oposto, no registro dos estudos de casos, e cuja validação é essencialmente interna, fundada no confronto entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori*.

Artigue (1996, p. 197) ainda afirma que, dentre outros objetivos, a engenharia didática pode ser utilizada em investigações que visam o estudo dos processos de aprendizagem de um dado conceito. Por essa razão, podemos dizer que essa metodologia de investigação pode ser utilizada para a condução de nossa pesquisa, já que nosso objeto de estudo é a utilização do escalonamento na resolução de sistemas lineares.

A partir de agora, passaremos para uma breve descrição das fases que compõem a engenharia didática: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e, por fim, análise *a posteriori* e validação.

Nas análises preliminares, efetua-se um estudo que é, na maior parte dos casos, composto de

> [...] análise epistemológica dos conteúdos visados pelo ensino;
> [...] análise do ensino habitual e dos efeitos;
> [...] análise das concepções dos alunos, das dificuldades e obstáculos que marcam a sua evolução;

> [...] análise do campo de constrangimentos no qual virá a situar-se a realização didática efetiva;
> E, naturalmente, tendo em conta os objetivos específicos da investigação. (ARTIGUE, 1996, p. 198)

Artigue (1996) destaca que esses estudos são retomados e aprofundados durante todo o trabalho, por isso são, na realidade, prévios em um primeiro nível de elaboração. Além disso, a autora afirma que, nos diversos trabalhos, nem todos os componentes de análise mencionados intervêm de forma explícita. Em nosso trabalho, demos especial atenção à gênese histórica do conteúdo matemático que compõe nosso objeto de pesquisa, à descrição matemática do mesmo, à análise de livros didáticos com enfoque no capítulo que trata de sistemas lineares, às dificuldades e erros que os alunos cometem no processo de aprendizagem de sistemas lineares e, por fim, às recomendações que os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio e outros documentos oficiais dão para o ensino deste conteúdo matemático. A sistematização desses estudos encontra-se, principalmente, no terceiro capítulo deste texto.

Na segunda fase, concepção de análise *a priori*, “o investigador toma a decisão de agir sobre um determinado número de variáveis do sistema não fixadas pelos constrangimentos: variáveis de comando, que ele supõe serem variáveis pertinentes para o problema estudado” (ARTIGUE, 1996, p.202).

A autora também afirma que

> O objetivo da análise *a priori* é [...] determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, funda-se em hipóteses; será a validação dessas hipóteses que estará, em princípio, indiretamente em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* (ARTIGUE, 1996, p.205).

Artigue (1996, p.205) ainda destaca que esta análise é “centrada nas características de uma situação adidática que se pretendeu constituir e que se vai procurar devolver aos alunos”.

Assim, espera-se que um pesquisador que utilize esta metodologia de investigação, na análise *a priori*, descreva as escolhas efetuadas e as características da situação adidática que delas decorrem e preveja os campos de comportamentos possíveis, procurando mostrar de que forma a análise efetuada permite controlá-los no sentido de que resultem na aplicação do conhecimento em jogo (ARTIGUE, 1996, p. 205).

A experimentação é a fase em que colocamos em prática as situações-problema construídas na análise *a priori*. É a fase em que o pesquisador vai a campo.

Machado (2008, pp. 244-245) afirma que

> A experimentação supõe:
> - a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação;
> - o estabelecimento do contrato didático;
> - aplicação dos instrumentos de pesquisa;
> - registro das observações feitas durante a experimentação.

A quarta e última fase, análise *a posteriori* e validação, caracteriza-se pelo tratamento dos dados colhidos na experimentação e da produção dos alunos dentro ou fora da sala de aula, com os quais se faz uma validação, ou não, das hipóteses levantadas no início do trabalho. Tal validação é feita pela confrontação, a partir desses dados, das análises *a priori* e *a posteriori*.

Nesse contexto, acreditamos termos mostrado a pertinência da escolha pelo referencial teórico-metodológico aqui apresentado, já que nosso tema de investigação está vinculado à aprendizagem matemática e, como mostramos, a teoria e a metodologia escolhidas atendem às necessidades que surgem a partir de investigações desse tipo.

3. ELEMENTOS DAS ANÁLISES PRELIMINARES

Como já afirmamos, nas análises preliminares, primeira etapa da metodologia de investigação que adotamos como inspiração na condução deste trabalho, o pesquisador realiza estudos preliminares quando procura circundar o objeto de estudo, olhando para diversos aspectos.

Assim, neste primeiro momento, apresentamos o resultado de um estudo que procurou descrever a gênese histórica tanto do tema sistemas lineares quanto dos processos de resolução dos mesmos. Nesse processo, não pudemos deixar de lado a história do desenvolvimento dos determinantes e das matrizes, já que são conteúdos que nasceram a partir do estudo de sistemas lineares. Entretanto, nossa abordagem em relação a esses dois últimos não foi muito aprofundada, para que o foco do trabalho não fosse perdido.

Em seguida, descrevemos matematicamente nosso objeto de estudo. Definimos conceitos relacionados a sistemas lineares e ao processo do escalonamento. Na terceira etapa deste capítulo, aparecem os resultados de nossos estudos em relação aos documentos oficiais. Procuramos por recomendações em relação ao ensino de maneira geral, e, mais especificamente, em relação ao ensino de matemática e de sistemas lineares. Procuramos também por recomendações em relação aos métodos de resolução que seriam indicados.

Na quarta etapa, o leitor terá contato com a análise de livro didático que realizamos. Destacamos que tal análise teve como foco o capítulo que trata de sistemas lineares. A intenção inicial era analisar de três a quatro livros aprovados pelo PNLEM 2009, incluindo o livro adotado na escola onde a experimentação desta investigação foi realizada. Entretanto, ao tomarmos contato com o estudo de Battaglioli (2008), percebemos que essa pesquisadora já havia analisado dois dos três livros que havíamos escolhido de antemão, também tendo como foco o capítulo de sistemas lineares.

Assim, dividimos a quarta etapa deste capítulo em duas partes. Na primeira apresentamos as principais considerações de Battaglioli (2008) que serviram de contribuição para nosso trabalho e, na segunda, apresentamos a análise do livro didático adotado na escola onde a pré-experimentação desta pesquisa foi realizada, segundo critérios que a pesquisadora mencionada levantou.

Por fim, na quinta etapa, apresentamos o resultado dos estudos de alguns trabalhos que trataram, em determinado momento, das dificuldades, erros e obstáculos epistemológicos em relação à álgebra e, mais especificamente e principalmente, em relação aos sistemas lineares.

Vale destacar, como já observado, que as análises preliminares são preliminares em um primeiro nível de elaboração, mas se tornam mais profundas durante o desenvolvimento da investigação e continuam sendo realizadas durante todo o andamento da pesquisa. Assim, o que apresentamos aqui, não é resultado de um primeiro nível de elaboração, mas sim de um estudo feito ao longo de todo o nosso trabalho.

3.1. GÊNESE HISTÓRICA

Neste tópico buscamos compreender como se deu o desenvolvimento do conceito de sistemas lineares ao longo da história. Para tal estudo, nos apoiamos, essencialmente, nos trabalhos de Luccas (2004) e Neves (2009).

Luccas (2004) levantou algumas discussões sobre a abordagem histórico-filosófica buscando investigar qual o significado de tal perspectiva no ensino e mostrou um exemplar de um conteúdo matemático desenvolvido conforme tal abordagem, a saber, sistemas de equações lineares.

Em primeiro lugar, o estudo expõe o trabalho que alguns pesquisadores vêm desenvolvendo em defesa da inserção da História no ensino, como alguns filósofos analisam o setor educacional e quais sugestões apresentam, e, como e por quê alguns estudiosos defendem a utilização da abordagem histórico-filosófica na educação.

Num segundo momento, apresenta o resultado de uma investigação histórica realizada com os assuntos de sistemas lineares, determinantes e matrizes. É para esta parte do trabalho que dedicamos maior atenção.

Em seguida, Luccas (2004) apresenta o trabalho desenvolvido por um pesquisador para analisar como preparar um conteúdo para ser trabalhado em sala de aula, ou seja, como transpô-lo didaticamente. Por fim, expõe uma alternativa de trabalho que, segundo a autora, oferece melhores condições de ensino e aprendizagem tanto para os educandos quanto para os orientadores.

Em contrapartida, Neves (2009) realizou um trabalho que procurou responder à questão “como as Matrizes tornaram-se conteúdo escolar e quando isso aconteceu?”. Inicialmente, Neves (2009) faz uma fundamentação teórica onde esclarece o conceito de Transposição Didática. Em segundo lugar, faz uma pesquisa histórica sobre as Matrizes demarcando dois períodos. O primeiro traz o que outras teorias deixaram como herança para que os matemáticos do século XIX estudassem o que posteriormente veio a se chamar Teoria das Matrizes. O segundo traz a trajetória da produção do saber Matrizes de 1850 a 1930. No terceiro momento da pesquisa, Neves (2009) tece algumas considerações que levaram a acreditar que o Movimento da Matemática Moderna foi um fio condutor que gerou vários processos de transposição didática, como o que ocorreu com as Matrizes, a Teoria dos Conjuntos, a Lógica, a Geometria Plana etc.

Em seguida, a autora apresenta uma análise que mostra quais foram os personagens responsáveis pelo processo de transposição das matrizes no período da Matemática Moderna.

Por fim, o texto ainda traz uma análise de livros didáticos com a finalidade de encontrar nestes livros elementos da transposição didática ocorrida com o saber Matrizes.

Para o nosso trabalho, demos maior atenção ao histórico realizado acerca dos conteúdos matrizes, determinantes e sistemas lineares.

Após a breve descrição dos principais trabalhos que compuseram a parte histórica desta pesquisa, passaremos para o estudo do surgimento, desenvolvimento histórico e relação de interdependência que existe entre os três conteúdos mencionados anteriormente (LUCCAS, 2004, p.13), dando atenção especial para os sistemas lineares.

Percebemos que a ordem normalmente abordada em livros didáticos é apresentar os conteúdos de Álgebra Linear do ensino médio da seguinte maneira: matrizes – determinantes – sistemas lineares. Entretanto, a ordem cronológica de surgimento desses conceitos foi exatamente a inversa, como observa Luccas (2004, p. 13), afirmando que sistemas lineares, determinantes e matrizes são conteúdos

> [...] fortemente interligados que se desenvolveram historicamente nesta ordem, embora sejam trabalhados atualmente de maneira invertida (primeiramente se estuda Matrizes, em seguida Determinantes e por último Sistemas Lineares, segundo a estrutura lógica concebida pela concepção formalista).

Já que se trata de conteúdos fortemente interligados, não poderíamos apresentar alguns elementos históricos do desenvolvimento de sistemas lineares sem mencionar fatos concernentes ao desenvolvimento dos conteúdos matrizes e determinantes. Cabe ressaltar que só é possível realizar tal apresentação pelo fato de existirem documentos e registros preservados ao longo do tempo.

Em relação aos registros históricos e ao papel que o surgimento da escrita teve para que hoje pudéssemos investigar como os povos antigos construíam e praticavam matemática, Luccas (2004, p.35) comenta que

> A criação e o desenvolvimento da escrita foi um marco na história da humanidade, pois permitiu às gerações posteriores, como a nossa, o acesso a informações de como povos antigos lidavam com os problemas que surgiam em seus cotidianos, embora muitos destes registros tenham sofrido desgastes e erosões com o passar do tempo. Houve registros que sobreviveram à deterioração causada pelo tempo, dentre os quais destacamos alguns tabletes de argila feitos pelos babilônios, que habitavam a região da Mesopotâmia, ou papiros deixados pelos egípcios, entre outros.

O'Connor & Robertson (1996, p.1) citam um registro encontrado em uma tabuleta babilônica, datada por volta de 300 a.C., que apresenta um problema com duas equações e duas incógnitas, que está preservado. Seu enunciado aparece a seguir:

> Há dois campos cuja área total é de 1800 jardas quadradas. Um produz grãos na razão de dois terços de saca por jarda quadrada enquanto o outro produz grãos na razão de meia saca por jarda quadrada. Se o total produzido é mil e cem sacas, qual é o tamanho de cada campo? [tradução nossa]

Este problema aparece sem resolução. Entretanto, outro problema, datado de aproximadamente 200 a.C. e produzido pelo povo chinês, vem acompanhado de sua resolução que, de acordo com Luccas (2004), lembra a resolução sistematizada, no século XVIII, por Karl F. Gauss, resolução essa que será abordada neste trabalho mais adiante. Este problema aparece no capítulo VIII do livro de matemática de maior influência na China, escrito durante a dinastia Han, Chui-Chang Suan-Shu ou Nove Capítulos sobre a arte matemática:

> Três feixes de uma colheita de boa qualidade, dois feixes de uma de qualidade regular e um feixe de uma de má qualidade são vendidos por 39 dou. Dois feixes de boa, três de regular e um de má qualidade são vendidos por 34 dou. Um feixe de boa, dois de regular e três de má são vendidos por 26 dou. Qual o preço de cada feixe para cada uma das qualidades? (EVES, 1997, p. 268).

Luccas (2004, p. 42) afirma que "um fato interessante da resolução de tal problema corresponde à disposição dos dados em forma de colunas e linhas, sobre uma 'tábua de contar'".

De acordo com O´Connor e Robertson (1996, p.1)

> As instruções de resolução [...] compreendem as seguintes operações: "primeiramente multiplique a coluna do meio por três e subtraia o resultado da coluna da direita quantas vezes for possível; a mesma coluna da direita deve ser subtraída quantas vezes for possível de três vezes a primeira coluna". Isto é:

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

> Em seguida, a coluna da esquerda é multiplicada por cinco e, então, o resultado subtraído quantas vezes for possível. Isto é:

0	0	3
0	5	2
36	1	1
99	24	39

> Com esse resultado, o preço do feixe de colheita de má qualidade (m) pode ser encontrado por meio da igualdade:
>
> $$36m=99$$
> $$m=2,75$$

Assim, substituindo os valores restantes, fica simples encontrar a solução. Vale ressaltar que

> Ambos [os exemplos] expressam o modelo de um tipo de assunto matemático, no qual algumas sentenças são revertidas por meio da linguagem simbólica matemática em equações, aparecendo simultaneamente num mesmo problema, após a interpretação e transcrição matemática de seus enunciados. Tal assunto reconhecido, atualmente, como Sistema de Equações Lineares sempre acompanhou o desenvolvimento humano, instigando curiosos a criarem métodos para resolvê-los, como o que os chineses obtiveram. (LUCCAS, 2004, p. 37)

Dessa maneira, esses dois problemas apresentados são exemplos documentados de que o homem resolvia problemas envolvendo sistemas lineares há mais de dois mil anos.

Já que o foco de nosso trabalho é o escalonamento, passaremos a descrever alguns métodos de resolução desenvolvidos por matemáticos ao longo da história.

3.2. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

Neste tópico descrevemos três métodos de resolução de sistemas de equações lineares: Método da Comparação, da Eliminação e a Regra de Cramer.

Tal descrição tem o objetivo de mostrar como os matemáticos de diferentes épocas e localidades trabalhavam com problemas cuja resolução envolvesse sistemas lineares.

3.2.1. Método da Comparação

Os matemáticos indianos realizaram, segundo Luccas (2004), importantes trabalhos relacionados principalmente à produção algébrica. Dentre eles, destaca-se o trabalho de Brahmagupta (598-668). O método de resolução de sistemas lineares desenvolvido por esse matemático foi chamado, pela autora e também neste trabalho, de Método da Comparação.

Ainda de acordo com Luccas (2004), tal método consistia basicamente na eliminação sucessiva das várias incógnitas. Trouxemos, neste texto, um exemplo resolvido por esse método de acordo com o estudo realizado do trabalho de Luccas (2004). O exemplo escolhido é um problema aplicado durante a experimentação da pesquisa que nós desenvolvemos. Enunciaremos a atividade e a resolveremos segundo o método de Brahmagupta.

> Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, bem como a pontuação geral das mesmas, são apresentadas na tabela a seguir:

Escolas	Medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Pontuação final
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53

> Quantos pontos valem cada medalha de ouro, prata e bronze?[2]

Uma resolução possível para este problema é encontrar a solução do sistema linear $\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 \\ 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$, onde x, y e z representam a quantidade de pontos que valem as medalhas de ouro, prata e bronze, respectivamente.

Baseados na explicação de Lints *apud* Luccas (2004), este sistema seria resolvido da seguinte maneira, se aplicado o método de Bramahgupta:

[2] Problema adaptado do livro *Matemática*, volume único, de Luiz Roberto Dante, 1ª edição, Editora Ática.

Isola-se uma das incógnitas nas três equações do sistema:

$$\begin{cases} x = \dfrac{46 - 2y - 2z}{4} = \dfrac{23 - y - z}{2} \\ x = \dfrac{57 - 3y - z}{5} \\ x = \dfrac{53 - 3y - 3z}{4} \end{cases}$$

Compara-se a primeira com a segunda equação e a primeira com a terceira:

$$\begin{cases} \dfrac{23 - y - z}{2} = \dfrac{57 - 3y - z}{5} \Rightarrow y - 3z = -1 \\ \dfrac{23 - y - z}{2} = \dfrac{53 - 3y - 3z}{4} \Rightarrow 2y + 2z = 14 \end{cases}$$

O processo é repetido: isola-se outra incógnita, nas duas equações restantes, e comparam-se os valores encontrados para a mesma, em função da terceira incógnita:

$$\begin{cases} y = 3z - 1 \\ y = \dfrac{14 - 2z}{2} = 7 - z \end{cases} \Rightarrow 3z - 1 = 7 - z \Rightarrow 4z = 8$$

Dessa forma, fica simples concluir que $z = 2$, $y = 5$ e $x = 8$, ou seja, a medalha de ouro vale oito pontos, a de prata vale cinco pontos e a de bronze vale dois pontos.

É importante ressaltar que não há uma ordem a ser seguida para encontrar o valor de cada incógnita, isto é, pode-se iniciar a resolução do sistema eliminando qualquer valor desconhecido (LUCCAS, 2004, p.47).

Este método poderia ser interpretado como uma generalização do método da substituição, trabalhado no ensino fundamental durante a discussão de situações que podem ser resolvidas por meio de sistemas lineares 2x2.

3.2.2. Método da Eliminação

A essência do método da Eliminação, sistematizado por Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855), consiste em facilitar a busca pela solução de um sistema, transformando-o em outro mais simples, equivalente[3] ao sistema dado, ou seja, que apresente a mesma solução (LUCCAS, 2004).

Neste processo, o objetivo é chegar a um sistema equivalente que esteja na forma escalonada, cuja resolução é bastante simples. Para melhor visualização do leitor,

[3]Dois sistemas são equivalentes quando possuem o mesmo conjunto solução.

trouxemos um sistema já na forma escalonada, a partir do qual fica simples encontrar os valores x=2, y=1 e z=1:

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ \quad 2y + 3z = 5 \\ \qquad 4z = 4 \end{cases}$$

Assim, o problema de resolver sistemas lineares estaria resumido ao processo de transformar um sistema linear qualquer em um equivalente escalonado.

A obtenção da forma escalonada de um sistema linear é feita mediante três operações elementares, a saber: T_1 - troca de linhas, T_2 - multiplicação de linha por escalar e T_3 - combinação linear entre as linhas do sistema.

Quando qualquer uma das operações acima é realizada, o sistema linear em questão é transformado em outro equivalente. Dessa forma, o desafio consiste em utilizar as transformações elementares de maneira a facilitar, cada vez mais, a resolução do sistema linear, até que se obtenha a forma escalonada.

Com a finalidade de melhor visualizar o escalonamento de um sistema linear qualquer, trouxemos novamente o exemplo apresentado no tópico anterior, referente ao valor que medalhas de ouro, prata e bronze possuíam em determinado campeonato escolar.

Neste caso, para solucionar o problema, basta resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 \\ 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases}$$

A resolução então apresentada foi baseada no método da comparação, sistematizado por Bramahgupta. Resolveremos novamente o sistema, agora pelo método da eliminação, para que a diferença entre os métodos fique explícita. Destacamos que optamos por um entre os vários caminhos possíveis para tal[4].

$$\begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix} \begin{cases} 4x + 2y + 2z = 46 \\ 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \end{cases} \underset{T_1}{\sim} \begin{cases} 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \\ 4x + 2y + 2z = 46 \end{cases} \underset{T_2}{\sim} \begin{cases} 5x + 3y + z = 57 \\ 4x + 3y + 3z = 53 \\ -4x - 2y - 2z = -46 \end{cases}$$

---

[4] Nesta resolução, (1) representa a primeira equação do sistema, (2) representa a segunda e (3) a terceira. (2)+(3) significa somar a segunda com a terceira equação, e assim por diante. O símbolo "~" colocado entre dois sistemas lineares significa que os mesmos são equivalentes.

$$\underset{T_3:(2)+(3)}{\sim}\begin{cases}5x+3y+z=57\\4x+3y+3z=53\\y+z=7\end{cases}\underset{T_3:4.(1)-5.(2)}{\sim}\begin{cases}5x+3y+z=57\\y-3z=-1\\y+z=7\end{cases}\underset{T_3:(3)-(2)}{\sim}\begin{cases}5x+3y+z=57\\y-3z=-1\\4z=8\end{cases}$$

Partindo-se do sistema linear dado e utilizando as três operações elementares, foi possível transformar o sistema em um equivalente, porém na forma escalonada. A partir do sistema escalonado, $\begin{cases}5x+3y+z=57\\y-3z=-1\\4z=8\end{cases}$, é fácil concluir que $z=2$, $y=5$ e $x=8$.

Luccas (2004, p. 50) observa que esse processo

> é similar ao processo produzido pelos chineses, registrado no Chui-Chang Suan-Shu, havendo pouca diferença entre ambos. Um primeiro ponto que podemos ressaltar é que os chineses trabalhavam com a disposição dos elementos na forma vertical e não horizontal, como Gauss. Outro ponto, é que os dados transcritos matematicamente do problema não vêm acompanhados de suas incógnitas, mantendo, desse modo, a forma parecida com a de uma tabela.

Assim, observamos que há mais semelhanças do que diferenças significativas entre o processo de resolução de sistemas lineares utilizado pelos chineses e o sistematizado por Gauss.

3.2.3. Regra de Cramer e a Nova Generalização

No final do século XII, segundo Luccas (2004), dois matemáticos de localidades distintas criaram, quase no mesmo período, uma generalização que elimina os valores desconhecidos de um Sistema de Equações Lineares.

As descobertas aconteceram

> [...] no Oriente pelo japonês Takakazu Seki Kowa (1642 – 1708) e no Ocidente pelo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Ambos alcançaram a mesma generalização, porém por "caminhos" e com objetivos distintos. Enquanto Seki Kowa buscava simplificar Sistemas de Equações para solucionar um problema geométrico, Leibniz tentava mostrar a versatilidade do uso da notação numérica no lugar de uma notação algébrica, sendo que para tal ele utilizou, como exemplo, um Sistema de Equações Lineares (LUCCAS, 2004, p.38).

Outros matemáticos utilizaram essa mesma generalização, que, mais tarde, foi chamada de **determinante**, porém com uma função diferente. Segundo Luccas (2004), ela foi utilizada como parte de uma operação para encontrar valores desconhecidos de um sistema de equações, e não mais para eliminá-los. Dentre esses matemáticos, a autora cita o escocês Colin Maclaurin (1698 – 1746), o suíço Gabriel Cramer (1704 – 1752) e também o italiano Girolamo Cardano (1501 – 1576).

> [...] o último matemático apresentado viveu em um período anterior a todos os citados até o momento. Ele desenvolveu uma regra denominada “mãe das regras”, para calcular os valores desconhecidos de um Sistema de Equações Lineares composto por duas equações e dois desconhecidos, que se aproximava muito do método sistematizado por Mclaurin e por Cramer, e compreendendo também a generalização desenvolvida por Kowa e Leibniz. (LUCCAS, 2004, p.38)

Luccas (2004) afirma que o processo desenvolvido pelos três matemáticos é idêntico e faz algumas suposições acerca dos motivos que teriam levado a adoção do método de Cramer, apesar de, aparentemente, Maclaurin o ter desenvolvido 21 anos antes. Segundo a autora, Cramer “utilizou uma notação mais apropriada, além de explicitar de maneira mais clara e coerente todo o processo de resolução do esquema por ele proposto” (LUCCAS, 2004, p. 86). Além disso, Boyer (1974) ressalta a existência de razões políticas para tal acontecimento, afirmando que

> [...] se dá pouca importância aos homens de um império em decadência, inclusive às produções destes, como foi o caso de Maclaurin, que publicou seu *Treatise of Álgebra* justamente num período em que a Matemática inglesa estava em declínio. (BOYER, 1974, pp.317-318).

A autora ainda afirma que

> outro matemático que também parece ter descoberto essa mesma regra foi o francês Etienne Bézout (1730 – 1783), que, segundo Grattan–Guiness (1994, p.769), expôs, em suas publicações de 1764 e de 1779, o mesmo processo de resolução de sistemas lineares que Cramer. (LUCCAS, 2004, p. 85)

Além de tal exposição, Kline *apud* Luccas (2004) comenta que Bézout contribuiu com a sistematização da teoria dos determinantes demonstrando a condição necessária para que um sistema seja resolvido.

A seguir, descrevemos um exemplo com a resolução baseada no método de Cramer. O método de Maclaurin apenas utiliza notações distintas e o de Cardano visualização mais difícil.

Nesta descrição já utilizaremos os termos **determinante** e **matriz**, embora, na época, eles ainda não fossem empregados.

Seja um sistema linear:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Sendo x e y as incógnitas deste sistema e utilizando a regra de Cramer, o valor da incógnita x poderia ser dado por

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc}$$

Ou seja, o numerador é o resultado do determinante de uma matriz onde os coeficientes de x são substituídos pelos termos independentes e o denominador é o determinante de uma matriz formada pelos coeficientes que acompanham as incógnitas x e y.

Analogamente, a incógnita y poderia ser obtida da seguinte forma:

$$y = \frac{af - ce}{ad - bc}$$

Em relação ao uso da generalização que posteriormente foi reconhecida como determinante e de maneira resumida, a autora faz uma importante consideração.

> Tal generalização [...] quase foi sistematizada de modo prático por Cardano em 1545; chegou a ser sistematizada por Seki Kowa em 1683 e por Leibniz em 1693; e também foi sistematizada por Mclaurin, provavelmente em 1729, porém publicada em 1748, e por Cramer em 1750.
> Lembremo-nos de que o objetivo desses cinco matemáticos não era o mesmo ao longo do percurso de descoberta da generalização, pois Seki Kowa e Leibniz buscavam eliminar as incógnitas de um sistema de equações, enquanto que Cardano, Mclaurin e Cramer tinham em mente a solução do sistema, entretanto todos conseguiram encontrar a mesma generalização, que atualmente reconhecemos como Determinante. (LUCCAS, 2004, p.89)

Esse terceiro método de resolução de sistemas lineares, portanto, depende da ideia de determinante, que por sua vez surgiu e, durante certo tempo, existiu para solucionar problemas que envolviam sistemas lineares (LUCCAS, 2004).

> Os Determinantes estiveram estritamente relacionados aos Sistemas de Equações até, aproximadamente, meados do século XVIII, quando os franceses Alexandre-Théophile Vandermonde (1735 – 1796) e Pierre Simon Laplace (1749 -1827), respectivamente, declararam a independência de tal assunto matemático, atribuindo-lhe uma exposição lógica e estabelecendo conexão ao conhecimento num todo. (LUCCAS, 2004, pp. 39-40)

Até o momento, mostramos que o estudo com problemas que envolvem sistemas lineares existe desde, pelo menos, 300 a.C e que, bastante tempo depois, a ideia de determinante veio à luz. Podemos, então, nos perguntar: quando surgiu o estudo de matrizes, conteúdo que, como afirmamos, está estritamente relacionado com sistemas lineares e determinantes?

Luccas (2004, p. 40) nos responde afirmando que

> Durante todo o estudo [de sistemas lineares], mas principalmente no trabalho com os Determinantes, a disposição dos termos em forma de tabelas foi chamando a atenção de outros pesquisadores como J. J. Sylvester, A. L. Cauchy, H. J. S. Smith, C. Jordan, Weierstrass, Hamilton e Grassmann, entre outros e, principalmente de Arthur Cayley (1821 – 1895), considerado o fundador do conhecimento matemático denominado – Matrizes.

Já que o desenvolvimento histórico desses três conteúdos ocorreu seguindo a ordem: sistemas lineares, determinantes e matrizes, por que razão normalmente o estudo desses três conteúdos é realizado de maneira invertida na Educação Básica?

Neves (2009) realizou um estudo que procurou compreender como ocorreu o processo de fazer Matrizes um saber escolar e também temporalizar quando isso aconteceu – década de 1960, período da introdução da Matemática Moderna no ensino básico.

> Em meados da década de 60, período em que o Movimento da Matemática Moderna (MMM) chega à educação básica brasileira, o sistema de ensino passou por uma grande revolução. Pensavam os responsáveis pelo Movimento que era preciso reformar o ensino da matemática, estipular uma nova grade curricular, algo que contemplasse a formalização, a lógica, a axiomatização, o rigor. Visando esse objetivo, o MMM acrescentou à matemática escolar novos conteúdos, como as Matrizes, por exemplo. (NEVES, 2009, p. 12)

Luccas (2004. p. 40) afirma que a disposição de ensino Matrizes – Determinantes e sistemas lineares é baseada nessa concepção formalista. Assim, parece que o rigor trazido para o Brasil com o MMM contribuiu para a atual disposição e ordem de abordagem dos conteúdos de Álgebra Linear tratados na Educação Básica. Caberia, entretanto, um estudo mais detalhado e uma análise de livros didáticos anteriores à década de 1960 para podermos afirmar com segurança.

3.3. ESTRUTURA MATEMÁTICA

Como parte dos estudos realizados em nossas análises preliminares, buscamos, em livros de álgebra linear destinados ao ensino superior, caracterizar nosso objeto de estudo matematicamente.

Como o foco de nossa pesquisa é o escalonamento e a construção da sequência didática foi feita sem mencionar matrizes e determinantes, julgamos que não seria necessário nem relevante colocar uma caracterização matemática desses dois conteúdos, apesar de estarem relacionados com o tema sistemas lineares.

Alguns métodos de resolução de sistemas, inclusive o método da Eliminação de Gauss, conhecido como escalonamento, foram apresentados no tópico de gênese histórica deste conteúdo. Assim, neste trecho, faremos apenas a caracterização dos demais conceitos envolvidos: equação linear, solução de uma equação linear, definição de sistema linear, definição de solução de um sistema linear e classificação de sistemas lineares quanto às soluções obtidas. Faremos, também, a resolução de um sistema linear genérico de m equações e n incógnitas utilizando o escalonamento e a caracterização das três operações elementares utilizadas neste processo, já que se trata do foco de nosso trabalho e os exemplos apresentados no tópico de gênese histórica em relação a esse método de resolução foram particulares.

Anton (2001) e Callioli et al. (1978) constituíram contribuições fundamentais para essa caracterização.

Segundo Anton (2001, p. 28) "os sistemas de equações algébricas lineares e suas soluções constituem um dos principais tópicos estudados em cursos conhecidos como 'de Álgebra Linear'". De acordo com o autor,

> definimos uma ***equação linear*** nas n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ como uma equação que pode ser expressa na forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, onde $a_1, a_2, ..., a_n$ e b são constantes reais. As variáveis de uma equação linear são, muitas vezes, chamadas ***incógnitas***.
> [...] Uma ***solução*** de uma equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ é uma sequência de n números $s_1, s_2, ..., s_n$ tais que a equação é satisfeita quando substituímos $x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n$. O conjunto de todas as soluções de uma equação é chamado seu ***conjunto-solução*** ou, às vezes, a ***solução geral*** da equação. (ANTON, 2001, p. 28)

Sistemas lineares aparecem definidos como "um conjunto finito de equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$" (ANTON, 2001, p. 28). Em relação à solução de um sistema linear, o autor coloca que "uma sequência de números $s_1, s_2, ..., s_n$ é chamada ***solução*** do sistema se $x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n$ é uma solução de cada equação do sistema" (ANTON, 2001, p.28).

Um sistema de equações lineares que não possui solução é chamado impossível, um sistema de equações que possui solução é chamado de possível. Um sistema possível que possui infinitas soluções é chamado de possível indeterminado e se, por outro lado, ele possuir apenas uma solução, é chamado de possível determinado.

Anton (2001, p.29) afirma que "todo sistema de equações lineares tem ou nenhuma solução, ou exatamente uma, ou então uma infinidade de soluções".

Passaremos, agora, para a resolução de um sistema linear de m equações e n incógnitas utilizando o método do escalonamento, ou eliminação de Gauss.

Para tal, utilizaremos as três operações elementares enunciadas sob forma de proposições, baseadas em Callioli et al. (1978):

Proposição 1: Trocar a ordem em que as equações de um sistema linear aparecem o transforma em um sistema linear equivalente.

É evidente que se S_1 e S_2 são sistemas lineares constituídos das mesmas equações, apenas com a ordem invertida, os valores que configuram uma solução do primeiro sistema obrigatoriamente deverão constituir, também, solução do segundo, pela própria definição de solução: os valores que constituem a solução de um sistema linear devem satisfazer a todas as equações deste sistema ■

Proposição 2: Multiplicar uma das equações de um sistema linear por um número real $\lambda \neq 0$ transforma o sistema linear dado em outro equivalente, ou seja, o que constitui solução do primeiro também o é para o segundo e vice-versa.

Demonstração: Sejam S_1 e S_2 dois sistemas lineares iguais, a menos de uma equação que aparece multiplicada por $\lambda \neq 0$:

$$S_1 = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad S_2 = \begin{cases} \lambda a_{11}x_1 + \lambda a_{12}x_2 + \ldots + \lambda a_{1n}x_n = \lambda b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Pela proposição 1, podemos supor que a primeira equação de S_2 seja a multiplicada por λ.

Assim, se $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ é uma solução de S_1, então:

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1 \quad (1)$$

Multiplicando essa igualdade por λ temos:

$$\lambda a_{11}c_1 + \lambda a_{12}c_2 + \ldots + \lambda a_{1n}c_n = \lambda b_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda a_{11})c_1 + (\lambda a_{12})c_2 + \ldots + (\lambda a_{1n})c_n = \lambda b_1 \quad (2)$$

Portanto, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ é também solução de S_2, já que as demais equações são as mesmas.

Por outro lado, se $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ é solução de S_2, então a igualdade (2) é verdadeira. Dividindo (2) por λ, e isso é possível pois λ é não-nulo, obtemos a igualdade (1) ■

Proposição 3: Se somarmos a uma das equações do sistema uma outra equação desse sistema multiplicada por um número real $\lambda \neq 0$, o sistema assim obtido e o sistema inicial são ambos incompatíveis[5] ou admitem ambos as mesmas soluções.

[5] Sistemas incompatíveis são sistemas impossíveis, ou seja, que não possuem solução.

Demonstração: Seja $S_1 = \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ e S_2 obtido segundo as condições da proposição, ou seja, $S_2 = \begin{cases} (a_{21} + \lambda a_{11})x_1 + (a_{22} + \lambda a_{12})x_2 + \ldots + (a_{2n} + \lambda a_{1n})x_n = b_2 + \lambda b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$.

Pela proposição 1, podemos supor que a primeira equação seja a que sofre alteração.

Assim, se $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ é uma solução de S_1, então:

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1$$

Multiplicando essa igualdade por λ temos:

$$\lambda a_{11}c_1 + \lambda a_{12}c_2 + \ldots + \lambda a_{1n}c_n = \lambda b_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda a_{11})c_1 + (\lambda a_{12})c_2 + \ldots + (\lambda a_{1n})c_n = \lambda b_1 \quad (1)$$

Somando (2) com a segunda equação de S_1e colocando alguns termos em evidência, obtemos a igualdade:

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + \lambda a_{11}c_1 + \lambda a_{12}c_2 + \ldots + \lambda a_{1n}c_n = b_2 + \lambda b_1 \Leftrightarrow (2)$$

$$\Leftrightarrow (a_{21} + \lambda a_{11})x_1 + (a_{22} + \lambda a_{12})x_2 + \ldots + (a_{2n} + \lambda a_{1n})x_n = b_2 + \lambda b_1 \quad (3)$$

Portanto, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ é também solução de S_2.

Se, por outro lado, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ é solução de S_2, a igualdade (3) é verdadeira.

Aplicando a propriedade distributiva, voltamos à igualdade (2) e, como $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2$, temos

$$b_2 + \lambda a_{11}c_1 + \lambda a_{12}c_2 + \ldots + \lambda a_{1n}c_n = b_2 + \lambda b_1 \Leftrightarrow \lambda a_{11}c_1 + \lambda a_{12}c_2 + \ldots + \lambda a_{1n}c_n = \lambda b_1$$

Dividindo a igualdade anterior por λ temos:

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots + a_{1n}c_n = b_1$$

Portanto, $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ é solução de S_1

Se S_1 é um sistema impossível, então não existe $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ que satisfaça simultaneamente todas as suas equações. Assim, S_2 também será impossível, pois se, por absurdo, S_2 for possível, então existe pelo menos uma n-upla $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ que satisfaz todas as equações de S_2, em particular a primeira. Dessa forma, pelo que foi demonstrado anteriormente, essa mesma n-upla seria solução também de S_1, o que seria um absurdo, já que trata-se de um sistema impossível.

Assim, S_1 e S_2 são ambos incompatíveis ou equivalentes ■

As operações elementares que acabamos de enunciar transformam sistemas lineares em outros equivalentes. Assim, é interessante usá-las de maneira a obter sistemas cuja resolução seja mais simples.

Sistemas na forma escalonada podem ser resolvidos de maneira bastante simples. A seguir apresentamos um sistema de m equações e n incógnitas na forma escalonada e uma forma de resolvê-lo. A apresentação que faremos foi baseada em Callioli et al (1978).

Consideremos um sistema linear de m equações com n incógnitas que tem o seguinte aspecto:

$$\begin{cases} a_{1r_1}x_{r_1} + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2r_2}x_{r_2} + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{kr_k}x_{r_k} + \quad \ldots + a_{kn}x_n = b_k \\ \qquad\qquad\qquad 0x_n = b_{k+1} \end{cases}, \quad \text{onde} \quad a_{1r_1} \neq 0, a_{2r_2} \neq 0, \ldots,$$

$a_{kr_k} \neq 0$ e cada $r_i \geq 1$.

Se tivermos $1 \leq r_1 < r_2 < \ldots < r_k \leq n$, diremos que S é um sistema linear escalonado. É claro que se $b_k = 0$, a última equação de S pode ser eliminada do sistema. Logo, num sistema escalonado, o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação, a partir da segunda, é maior do que na precedente.

Exemplo:

$$\begin{cases} 2x - y - z - 3t = 0 \\ \qquad\quad z - t = 1 \\ \qquad\qquad 2t = 2 \end{cases}$$

A solução de um sistema linear deste tipo é bastante simples. Basta encontrar o valor da última incógnita e, a partir dele, encontrar o valor das outras.

A proposição abaixo garante que sempre é possível transformar um sistema linear em outro equivalente que esteja na forma escalonada.

Proposição 4: Todo sistema linear S é equivalente a um sistema escalonado.

Demonstração: Sem perder a generalidade, podemos supor:

$$S:\begin{cases} x_1 + & a_{12}x_2 + & ... & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + & .... & a_{2n}x_n & = b_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + & .... & + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Para cada $a_{i1} \neq 0$ (i = 2, 3, ..., m) multipliquemos por $(-a_{i1})$ a primeira equação e somemos o resultado à i-ésima equação. Com algumas permutações convenientes de equações (se for o caso) obteremos um sistema $S_1 \sim S$ do seguinte tipo:

$$S_1 :\begin{cases} x_1 + & a_{1r_1}x_{r_1} + & ... & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ & c_{2r_1}x_{r_1} + & .... & c_{2n}x_n & = b'_2 \\ & & \vdots & & \\ & c_{mr_1}x_{r_1} + & .... & + c_{mn}x_n & = b'_m \end{cases}$$

onde $c_{2r_1} \neq 0$ e $r_1 \geq 2$.

Dividindo a segunda equação de S_1 por c_{2r_1} obtemos um sistema S_2, ainda equivalente a S_1, com o qual começamos a repetir o raciocínio feito até aqui, porém a partir da segunda equação. Evidentemente, depois de aplicar um certo número finito de vezes esse raciocínio, chegaremos a um sistema escalonado equivalente a S ■

A partir da forma equivalente escalonada de um sistema linear, é possível decidir se o mesmo é impossível, possível e determinado ou possível e indeterminado. Para tal intento, Callioli et al (1978) traz um resumo simples de como essa discussão pode ser feita.

Suponhamos que um sistema tenha sido escalonado e, retiradas as equações do tipo 0=0, restam p equações com n incógnitas. Necessariamente, um dos três casos abaixo deve ocorrer:

I) Se a última das equações restantes é

$$0x_1 + ... + 0x_n = b_p,\ (b_p \neq 0)$$

então o sistema é impossível;

Caso contrário, sobram duas alternativas

II) Se p=n, então o sistema é possível e determinado;

III) Se p<n, então o sistema é possível e indeterminado.

3.4. O QUE OS DOCUMENTOS OFICIAIS RECOMENDAM?

Ainda realizando os estudos preliminares segundo nossa metodologia de investigação, procuramos nos documentos oficiais por recomendações acerca do ensino de Matemática, do ensino de Álgebra e, mais especificamente, do ensino de sistemas lineares. Procuramos, também, por recomendações em relação às técnicas de resolução de sistemas que poderiam ser utilizadas e/ou seriam recomendadas.

Para esse estudo, constituíram fundamentais contribuições: Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio (PCNEM), as Orientações Educacionais Complementares dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio (PCN+ - EM) e as Orientações Curriculares para o ensino médio, que chamaremos neste texto, quando necessário, apenas de Orientações Curriculares.

Em relação aos objetivos desses três documentos, podemos destacar que os PCNEM trazem

> uma explicitação das habilidades básicas, das competências específicas, que se espera sejam desenvolvidas pelos alunos em Biologia, Física, Química e Matemática nesse nível escolar, em decorrência do aprendizado dessas disciplinas e das tecnologias a elas relacionadas. Lado a lado com documentos correspondentes, produzidos pelas outras duas áreas, esse texto traz elementos para a implementação das diretrizes para o Ensino Médio (BRASIL a, 1998, p.4)

Já as Orientações dos PCN+ - EM buscam chegar mais perto da construção de um currículo que possa servir de apoio na tarefa de desenvolver competências. E, por fim, as Orientações Curriculares

> foram elaboradas a partir de ampla discussão com as equipes técnicas dos Sistemas Estaduais de Educação, professores e alunos da rede pública e representantes da comunidade acadêmica. O objetivo deste material é contribuir para o diálogo entre professor e escola sobre a prática docente. (BRASIL, 2006, p.5)

Assim, de maneira geral, os documentos oficiais buscam aproximar e unificar, sem, entretanto, apresentar moldes ou receitas, os conteúdos, metodologias e formas de trabalho nos diferentes contextos existentes no Brasil, tendo como referência a Lei de Diretrizes e Bases de 1996.

Nos três textos encontramos orientações para os novos objetivos do ensino médio brasileiro, última e complementar etapa da Educação Básica. Os textos afirmam que o ensino médio não deve ter apenas intenção propedêutica, nem apenas intenção profissionalizante. Trouxemos um trecho de um dos documentos que confirmam essa afirmação.

> Especialmente em sua versão pré-universitária, o ensino médio tem se caracterizado por uma ênfase na estrita divisão disciplinar do aprendizado. Seus objetivos educacionais se expressavam e, usualmente, ainda se expressam em termos de listas de tópicos que a escola média deveria tratar, a partir da premissa de que o domínio de cada disciplina era requisito necessário e suficiente para o prosseguimento dos estudos. Dessa forma, parecia aceitável que só em etapa superior tais conhecimentos disciplinares adquirissem, de fato, amplitude cultural ou sentido prático. Por isso, essa natureza estritamente propedêutica não era contestada ou questionada, mas hoje é inaceitável.
> Em contrapartida, em sua versão profissionalizante, o ensino médio era ou é caracterizado por uma ênfase no treinamento para fazeres práticos, associados por vezes a algumas disciplinas gerais, mas sobretudo voltados a atividades produtivas ou de serviços. Treinava-se para uma especialidade laboral, razão pela qual se promovia certo aprofundamento ou especialização de caráter técnico, em detrimento da formação mais geral, ou seja, promoviam-se competências específicas dissociadas de formação cultural mais ampla. É importante que continuem existindo e se disseminem escolas que promovam especialização profissional em nível médio, mas que essa especialização não comprometa a formação geral para a vida pessoal e cultural em qualquer tipo de atividade. (BRASIL b, 1998, p.8)

Assim, nessa nova etapa

> em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa , tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos (BRASIL a, 1998, p.6).

Entendemos, portanto, que o atual ensino médio não tem como objetivo formar somente futuros graduandos ou mão de obra especializada, mas sim formar para a vida, contribuindo para que os alunos se tornem cidadãos críticos e que sejam capazes de resolver os problemas inerentes do convívio em sociedade.

Em relação à Matemática, Brasil a (1998) afirma que esta disciplina no ensino médio

> tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas (BRASIL a, 1998, p.40).

Aprender Matemática no ensino médio, portanto, “deve ser mais do que memorizar resultados dessa ciência [...] e a aquisição do conhecimento matemático deve estar vinculada ao domínio de um saber fazer Matemática e de um saber pensar matemático” (BRASIL a, 1998, p.41).

É nessa perspectiva que pretendemos inserir o conteúdo de sistemas lineares no segundo ano do ensino médio, enfatizando e explorando, também, as situações que serão possíveis de serem resolvidas de posse do conhecimento visado, ou seja, o conteúdo não é o único foco do ensino.

Os textos também abordam várias vezes a ideia de desenvolvimento de competências e habilidades, em detrimento da separação estanque em disciplinas e comungam da ideia de que

> para que essa etapa da escolaridade possa complementar a formação iniciada na escola básica e permitir o desenvolvimento das capacidades que são os objetivos do ensino de Matemática, é preciso rever e redimensionar alguns dos temas tradicionalmente ensinados. (BRASIL a, 1998, p.43)

Assim, para cada disciplina, os Parâmetros Curriculares Nacionais sugerem alguns temas ou eixos estruturadores a partir dos quais seria possível trabalhar tanto o conteúdo, quanto o desenvolvimento de competências e habilidades, com a intenção de contemplar os objetivos do ensino médio para cada uma das três grandes áreas: Ciências da Natureza e Matemática, Ciências Humanas e Linguagens e Códigos.

Para a Matemática, inserida na área de Ciências da Natureza e Matemática, foram elencados três grandes eixos estruturadores que, por sua vez, estariam divididos em unidades temáticas menores. São eles: Álgebra: números e funções; Geometria e medidas; e Análise de dados.

> Cada tema estruturador é um campo de interesse com organização própria em termos de linguagens, conceitos, procedimentos e, especialmente, objetos de estudo. Apesar da unidade característica de cada tema estruturador, para organizar o planejamento do ensino cada um deles foi dividido em unidades temáticas que, por sua vez, são parcelas autônomas de conhecimentos específicos que podem ser organizadas dentro do projeto pedagógico de cada professor ou escola, em função das características de seus alunos e dos tempos e espaços para sua realização (BRASIL b, 1998, p.120).

Sistemas lineares estariam inseridos no primeiro eixo estruturador, sobre o qual os PCNEM tecem algumas considerações:

> Estes conteúdos [de álgebra] estão diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real (BRASIL a, 1998, p.44).

Alguns critérios são estabelecidos para que as unidades temáticas e demais conteúdos específicos que compõem o currículo sejam escolhidos no lugar de outros.

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência (BRASIL a, 1998, p.43).

Ainda em relação aos critérios de escolha, Brasil (2006, p.69) afirma que

> Para a escolha de conteúdos, é importante que se levem em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica. Ao final do ensino médio, espera-se que os alunos saibam usar a Matemática para

> resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico.

Nesse sentido, acreditamos que o conteúdo de sistemas lineares contemple a recomendação de permitir a contextualização e a interdisciplinaridade, pois possui aplicações em diversas áreas como computação, química, engenharia elétrica, etc.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio ainda destacam que

> o currículo a ser elaborado deve corresponder a uma boa seleção, deve contemplar aspectos dos conteúdos e práticas que precisam ser enfatizados. Outros aspectos merecem menor ênfase e devem mesmo ser **abandonados** [grifo nosso] por parte dos organizadores de currículos e professores. Essa organização terá de cuidar dos conteúdos mínimos da Base Nacional Comum, assim como fazer algumas indicações sobre possíveis temas que podem compor a parte do currículo flexível, a ser organizado em cada unidade escolar, podendo ser de aprofundamento ou direcionar-se para as necessidades e interesses da escola e da comunidade em que ela está inserida. (BRASIL a, 1998, p.43)

Em relação aos conteúdos que supostamente deveriam ser abandonados, encontramos uma contundente citação nas Orientações Curriculares:

> A resolução de sistemas 2 X 3 ou 3 X 3 [...] deve ser feita via operações elementares (o processo de escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). Quanto à resolução de sistemas de equação 3 X 3, **a regra de Cramer deve ser abandonada** [grifo nosso], pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única. Dessa forma, **fica também dispensado o estudo de determinantes** [grifo nosso] (BRASIL, 2006, p.77-78).

Também sobre o ensino de sistemas lineares, especificamente, as Orientações do PCN+EM recomendam:

> Com relação à álgebra, há ainda o estudo de equações polinomiais e de sistemas lineares. Esses dois conteúdos devem receber um tratamento que enfatize sua importância cultural, isto é, estender os conhecimentos que os alunos possuem sobre a resolução de equações de primeiro e segundo graus e sobre a resolução de sistemas de duas equações e duas incógnitas para sistemas lineares 3 por 3, aplicando esse estudo à resolução de problemas simples de outras áreas do conhecimento. Uma abordagem mais qualitativa e profunda deve ser feita dentro da parte flexível do currículo, como opção específica de cada escola (BRASIL b, 1998, p.122).

Vale destacar que não apenas a seleção de conteúdos deve constituir o foco da preocupação em torno da problemática do ensino e da aprendizagem matemática. Outros fatores também estão, e não em menor peso, relacionados. Assim, as orientações dos PCN+EM enfatizam a necessidade de uma abordagem via resolução de problemas, o trabalho em grupo, destacam a importância da comunicação em Matemática e do desenvolvimento de projetos, entre outros.

Dentre toda a explanação feita em relação às recomendações dos documentos oficiais, algo que nos chamou atenção e que acreditamos merecer uma discussão mais abrangente, é a questão da inserção ou não do estudo da Regra de Cramer como método de resolução de sistemas lineares, bem como o tratamento de determinantes no momento de discussão dos conceitos de Álgebra Linear do ensino médio.

Expliquemos mais detalhadamente nossas conclusões em relação à questão apresentada. Ao se trabalhar os conceitos da Álgebra Linear no ensino médio, como já afirmamos em outras ocasiões, normalmente trabalha-se na ordem: matrizes – determinantes – sistemas lineares.

Parece que todo o tratamento de determinantes é aplicado na resolução de sistemas lineares, pois os livros didáticos, em geral, não trazem outras possíveis aplicações desse conteúdo matemático. E, a não ser que o aluno prossiga os estudos em um curso superior da área de exatas, dificilmente ele irá se deparar com uma situação que envolva o conceito apenas de determinantes. Assim, o estudo de determinantes teria como finalidade principal o posterior estudo da Regra de Cramer, que, como também já observamos, é a regra com maior enfoque no tratamento de sistemas lineares no ensino médio.

Dessa forma, cabe a seguinte pergunta, já que o foco do nosso trabalho é o escalonamento: "Quando e em que magnitude a regra de Cramer é mais indicada/viável que o escalonamento?". Analisemos caso a caso.

Para aplicarmos a Regra de Cramer, a matriz formada pelos coeficientes das equações deve ser quadrada, ou seja, todos os sistemas lineares de m equações e n incógnitas, em que $m \neq n$, não podem ser resolvidos por Cramer.

Para os casos em que a matriz é quadrada, se o sistema linear é 2x2, a regra de Cramer é inadequada, já que envolve um número muito maior de operações do que outras técnicas, como o escalonamento, a adição ou a substituição, sendo as duas últimas bastante simples e trabalhadas ainda no ensino fundamental.

Quando temos o caso 3x3, podemos aplicar a regra de Cramer apenas se o determinante da matriz formada pelos coeficientes das equações for diferente de zero, e ainda assim faríamos um número maior de operações do que se optássemos pelo escalonamento.

A partir do caso 4x4, o cálculo de determinante dessa ordem torna-se excessivamente custoso. Para um caso extremo, destacamos que se tivéssemos que resolver um sistema linear 20x20 utilizando como ferramenta de auxílio um computador que realiza um milhão de multiplicações ou divisões por segundo, pela Regra de Cramer esse computador demoraria mais de 2 milhões de anos para fornecer a resposta. Já pelo escalonamento, seriam necessários apenas 6 milésimos de segundo. (LIMA, 2001, p.27)

Assim, há indícios bastante fortes de que, na grande maioria ou, poderíamos arriscar, na totalidade dos casos, a resolução pelo método do escalonamento é mais viável do que uma abordagem via Regra de Cramer.

Além de ser um método de resolução computacionalmente mais custoso, há outro fator que coloca a Regra de Cramer em desvantagem perante o escalonamento. Como já mencionamos, a Regra de Cramer só se aplica se o determinante da matriz associada ao sistema for não-nulo, ou seja, no caso em que o sistema possui uma única solução. Existem oito posições possíveis relativas de três planos no espaço e em apenas uma delas a intersecção é um único ponto. O método do escalonamento, por outro lado, não depende das posições relativas entre os planos que são representados pelas equações do sistema linear e, assim, "não depende de nenhuma hipótese sobre o determinante". (LIMA, 1993, p. 17)

O autor também afirma que

> Infelizmente, vários livros adotados em nossas escolas cometem o grave erro de aplicar a Regra de Cramer em casos nos quais det[a,b,c]=0[6]. Dizem esses livros que se det[d,b,c]=det[a,d,c]=det[a,b,d]=det[a,b,c]=0 então, como a Regra de Cramer (mal aplicada) fornece x=0/0, y=0/0 e z=0/0, o sistema é indeterminado. Isto é falso. Se os vetores a, b, c forem múltiplos um do outro mas o vetor d não for múltiplo deles, os 4 determinantes acima são nulos mas o sistema é impossível. Para os autores desses livros, o sistema $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ 2x+4y+6z=2 \\ 3x+6y+9z=9 \end{cases}$ é indeterminado, isto é, possui infinitas soluções. Seria o caso de pedir a tais autores que dessem exemplos de uma sequer dessas soluções. (LIMA, 1993, p. 17)

Assim, interpretamos que, além de mais custosa, a Regra de Cramer pode induzir ao erro.

Há que se destacar, ainda, que o uso de determinantes não é mais requerido no Exame Nacional do Ensino Médio de forma explícita. Durante consulta à Matriz de Referência para o ENEM 2009, constatamos que o Anexo desta publicação traz

---

[6] O autor utiliza a notação det[u,v,w] para indicar o determinante da matriz cujas colunas são os vetores u=(α,β,γ), v=(α',β',γ') e w=(α",β",γ")

claramente os objetos de conhecimento associados às Matrizes de Referência. Em relação à matriz "Matemática e suas Tecnologias", dentre os conhecimentos algébricos/geométricos esperados configuram: plano cartesiano, retas, circunferências, paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações. Os termos "matrizes" e "determinantes" não aparecem no documento. Assim, como o estudo de Determinantes não seria mais necessário a um aluno que pretende realizar o Exame Nacional do Ensino Médio, não seria mais necessário, também, o estudo da Regra de Cramer; sendo o escalonamento suficiente para resolver questões que envolvam sistemas de equações.

Ficam lançadas, então, algumas questões: "Se a abordagem via escalonamento, ao que tudo indica, parece mais viável, por que o ensino de sistemas lineares, durante tanto tempo, priorizou e, segundo nossos estudos, ainda prioriza o ensino de sistemas lineares pela Regra de Cramer? Seria outra herança do Movimento da Matemática Moderna que, como vimos, foi um dos responsáveis pela inserção do conteúdo de Matrizes como saber escolar?".

Nos casos em que a quantidade de aulas de Matemática é mínima, não seria mais significativo trabalhar apenas situações-problema que envolvam sistemas lineares e resolvê-las por técnicas em que o estudo de determinantes não seja necessário, já que o mesmo toma um tempo considerável?

Diante dos fatos apresentados, seria necessária a permanência da Regra de Cramer e o estudo de determinantes no currículo de Matemática do ensino médio?

Essas questões ficam em aberto, pois caberia um estudo mais profundo sobre a problemática apresentada para que fosse possível respondê-las.

3.5. ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS

O livro didático é, como já afirmamos, em muitos casos, uma das principais, senão a principal fonte de consulta para o professor de matemática quando este vai planejar suas aulas. Sendo assim, a forma de abordagem dos conteúdos que o livro traz muito influencia a forma de abordagem dos conteúdos em sala de aula e, por conseguinte, muito influencia o conjunto de ferramentais das quais o aluno irá dispor para trabalhar com as situações propostas e, a longo prazo, a intensidade com que aprende os conceitos envolvidos.

Dessa forma, julgamos fundamental dedicar especial atenção para a forma como os livros didáticos abordam o conteúdo de sistemas lineares e, mais especificamente, o escalonamento, objeto de estudo deste trabalho.

Dividimos o tópico de análise de livros didáticos em duas partes. Na primeira, trouxemos observações levantadas a partir do estudo de uma dissertação cujo objetivo principal era analisar qualitativamente a abordagem de sistemas lineares apresentada por três livros didáticos do ensino médio aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM) e, na segunda, analisamos o livro didático adotado na escola em que a pré-experimentação desta pesquisa foi realizada. Embora o livro adotado na escola em que a experimentação foi realizada seja outro, isso foi considerado irrelevante uma vez que os alunos que participaram da experimentação ainda não haviam tido contato com esse conteúdo, pois eram alunos do primeiro ano do ensino médio.

3.5.1. Estudo de Battaglioli (2008)

Battaglioli (2008) realizou uma pesquisa que investigou sob quais registros de representação semiótica estão sendo abordados os sistemas lineares em três livros didáticos e quais conversões de registros são propostas. O trabalho também traz algumas orientações didáticas sugeridas pelos documentos oficiais para o ensino de sistemas lineares e uma comparação entre escalonamento de um sistema no registro algébrico e no registro gráfico.

Segundo Battaglioli (2008, p. 4)

> para atender aos objetivos do ensino de Matemática no Ensino Médio, um livro didático deveria abranger uma grande variedade de conteúdos nos diversos campos da Matemática e quando possível, abordar esses conteúdos de maneira diversificada, com diferentes linguagens: símbolos matemáticos, gráficos, tabelas, etc. Espera-se também que ele aborde aspectos da História da Matemática de maneira contextualizada e que ele contribua para que o aluno compreenda realmente os conceitos matemáticos através da construção dos conhecimentos, sem precisar decorá-los. Consideramos importante que ele apresente situações-problema que levem o aluno a refletir, a generalizar, a conjecturar, a argumentar e a criar e discutir hipóteses.

Assim, baseada nas recomendações dos documentos oficiais, a autora elencou quatro critérios a partir dos quais fundamentou suas análises:

> A retomada dos sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas antes da abordagem dos sistemas com três equações e três incógnitas nos livros didáticos;
> A abordagem histórica dos sistemas lineares nos livros didáticos;
> As atividades que empregam o uso do computador nos livros didáticos;
> O tratamento do registro algébrico nos livros didáticos. (BATTAGLIOLI, 2008, p.10)

Os livros analisados neste trabalho encontram-se no quadro a seguir.

Designação	Título / Série / Autor / Editora / Ano

L-1	- Matemática, Contexto e Aplicações - vol. 2 - E.M. - Luiz Roberto Dante - Ática - 2007
L-2	- Matemática - Ensino Médio - vol. 2 - Kátia C.S. Smole, Maria Ignez Diniz - Saraiva - 2003
L-3	- Matemática Completa - vol. único - José R. Giovanni, José R. Bonjorno e José R. Giovanni Jr. - FTD - 2002

Quadro 1: Livros Didáticos analisados em Battaglioli (2008)
Fonte: Battaglioli (2008)

No início de sua análise, a autora afirma que

> os três livros didáticos apresentam propostas de trabalho distintas: enquanto os livros L_1 e L_3 apresentam o conteúdo de sistemas lineares num único capítulo intitulado Sistemas Lineares (organização linear dos conteúdos), o L_2 aborda esse conteúdo em espiral: no capítulo intitulado sistemas lineares, encontramos uma revisão da resolução gráfica e algébrica dos sistemas com duas equações e duas incógnitas, a apresentação e a resolução (método da adição) dos sistemas com três equações e três incógnitas, bem como sua representação geométrica. Posteriormente, os sistemas são abordados no estudo das matrizes (método do escalonamento) e no estudo dos determinantes (Regra de Cramer). (BATTAGLIOLI, 2008, p.34)

Documentos oficiais defendem a abordagem de conteúdos em espiral, posição que também defendemos:

> [...] De modo geral, parece não se levar em conta que, para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos. (BRASIL, 1998, p. 22-23)

Em relação ao primeiro dos quatro critérios elencados, Battaglioli (2008, p.41) afirma que “apenas dois dos livros analisados apresentam uma retomada de conteúdo [...] antes de apresentar os sistemas com três incógnitas”.

Em se tratando da abordagem histórica dos sistemas lineares nos livros, a autora observa que

> o autor do L_1 inicia o capítulo 8, Sistemas Lineares, com um texto informativo que explica a origem da palavra sistema [...]. O texto segue explicando que basta que haja mais do que uma variável num problema para que ele seja representado por um sistema de equações. O referido texto traz também algumas informações históricas como o fato de o inglês Arthur Cayley (1821 – 1895) ter sido o primeiro matemático a representar em forma de matrizes os dados extraídos de um sistema de equações e que os sistemas já apareceram no livro chinês Nove Capítulos Sobre a Arte Matemática, de Chuí-Chang Suan-Shu, de 250 a.C. (BATTAGLIOLI, 2008, p.43)

Julgamos que um texto deste tipo caracteriza-se como ferramenta que pode contribuir para a apropriação do significado dos conceitos tratados no momento, pois menciona que basta que haja mais de uma variável num problema para que ele seja representado por um sistema de equações, ou seja, em vez de apenas dar informações sobre os matemáticos famosos envolvidos no desenvolvimento do conteúdo matemático estudado, por exemplo, o texto tece considerações, mesmo sendo singelas, que ajudam o aluno a se familiarizar com o novo conceito, diferente do que o acontece na segunda obra analisada.

Já o L_2 “apresenta [...] algumas curiosidades da vida do matemático Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)” (BATTAGLIOLI, 2008, p.43), entre outras informações sobre ele. Entretanto, nenhuma contribui para a construção dos novos conceitos, segundo a autora. O terceiro livro também apresenta apenas texto informativo sobre a vida de Gauss, sem relacioná-lo com a resolução de sistemas lineares.

Segundo a autora, apesar da primeira obra trazer, de forma tímida, referências históricas com um exemplo que não é apenas informativo, essas referências

> sobre os sistemas lineares presentes nos três livros analisados deveriam ser mais completas, mais abrangentes e mais enriquecedoras, assim, poderiam contribuir efetivamente para facilitar a construção do conhecimento do aluno e valorizar o aprendizado deste tema (BATTAGLIOLI, 2008, p.43).

Em relação ao terceiro critério elencado pela autora para fundamentar suas análises, vale ressaltar que os documentos oficiais defendem o uso do computador em sala de aula, afirmando que

> um outro elemento tecnológico de importância inegável é o computador. Num livro didático podem ser propostas atividades que empreguem o computador como meio auxiliar na aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos, bem como atividades que auxiliem a formação do aluno para o mundo do trabalho (BRASIL, 2005, p.78)

Assim, em relação a esse terceiro critério e aos livros didáticos analisados em sua pesquisa, Battaglioli (2008) afirma: “[...] pudemos observar que nenhum dos livros analisados apresenta alguma atividade com o uso de computador envolvendo os sistemas lineares” (BATTAGLIOLI, 2008, p.44), ainda que L_1 traga no final do capítulo uma atividade, que a autora julgou interessante, de introdução à programação linear no ensino médio. Em suma, os livros didáticos ainda não estão atendendo a recomendação de propor atividades que explorem o computador em sala de aula.

Quanto ao tratamento algébrico dado a sistemas lineares, a autora traz a contundente citação, extraída das Orientações Curriculares para o Ensino Médio e que já apresentamos anteriormente, na qual a escolha definitiva pelo escalonamento em lugar da Regra de Cramer é defendida:

> [...] A resolução de sistemas 2x3 e 3x3 [...] deve ser feita via operações elementares (o processo do escalonamento), com discussão das diferentes situações (sistemas com uma única solução, com infinitas soluções e sem solução). **Quanto à resolução de sistemas de equações 3x3, a regra de Cramer deve ser abandonada** [grifo nosso], pois é um procedimento custoso (no geral, apresentado sem demonstração, e, portanto de pouco significado para o aluno), que só permite resolver os sistemas quadrados com solução única (BRASIL, 2006, p.77-78).

Assim, a autora apresenta três quadros a partir dos quais se pode notar que nem todos os livros seguem a observação mencionada. O terceiro livro, por exemplo, aborda **apenas a Regra de Cramer**, o que contradiz o recomendado pelos documentos oficiais. Os dois primeiros livros "abordam também a resolução de sistemas cujo número de equações é diferente do número de incógnitas" (BATTAGLIOLI, 2008, p. 48). O primeiro livro apresenta um exemplo de sistema linear de ordem 4x4.

A autora ainda ressalta que os livros didáticos, na maioria das vezes, não dizem

> qual é o algoritmo mais eficiente ou o mais rápido [...] levando o aluno a uma possível resolução mecânica, sem refletir sobre os benefícios de um ou de outro método, visto que, os exercícios, geralmente, indicam qual o processo que o aprendiz deve utilizar – Cramer ou escalonamento – sem que ele possa refletir e optar pelo método mais prático e que envolve o menor número de cálculos. (BATTAGLIOLI, 2008, p. 51)

3.5.2. Análise do livro adotado na escola

Nesta segunda parte de nossa abordagem dos livros didáticos, sobre como eles trabalham o tema sistemas lineares, analisamos o livro de Matemática adotado na escola onde a pré-experimentação desta pesquisa foi realizada.

Trata-se do livro *Matemática: ensino médio*, volume único, de Antonio Nicolau Youssef, Elizabeth Soares e Vicente Paz Fernandes, publicado pela Editora Scipione em 2005 e aprovado pelo PNLEM de 2009.

Nossa análise foi realizada segundo quatro critérios, já mencionados, baseados nos documentos oficiais e levantados por Battaglioli (2008):

> A retomada dos sistemas lineares com duas equações e duas incógnitas antes da abordagem dos sistemas com três equações e três incógnitas nos livros didáticos;
> A abordagem histórica dos sistemas lineares nos livros didáticos;
> As atividades que empregam o uso do computador nos livros didáticos;
> O tratamento do registro algébrico nos livros didáticos. (BATTAGLIOLI, 2008, p.10)

Antes, entretanto, faremos uma breve apresentação do livro, de maneira geral, e, mais especificamente, do capítulo que trata de sistemas lineares, matrizes e determinantes, focando principalmente o primeiro desses três conteúdos. Faremos, ainda, algumas observações acerca da resenha deste livro, extraídas do Catálogo do PNLEM de 2009.

Na apresentação, os autores afirmam que procuraram trazer para o aluno as principais ideias e conceitos da Matemática no ensino médio, relacionando-os com o mundo do trabalho e com aplicações da Matemática, para isso os autores se utilizam das sessões "De olho no mundo do trabalho", "De olho no contexto" e "De olho na Física, Química", etc.

Afirmam também que os conceitos são apresentados de forma objetiva e sem abusos de formalismo, mantendo, entretanto, o rigor necessário para que a aprendizagem se processe de forma coerente e para que o aluno possa aplicar os conceitos em diversos contextos de resolução de problemas em sua profissão futura.

Cada tópico, ou conjunto de tópicos, apresenta exercícios e problemas resolvidos, exercícios e problemas propostos e informações complementares que, segundo os autores, se relacionam com o conteúdo estudado.

O livro possui 15 capítulos, 2 anexos e 488 páginas, lembrando que trata-se de um volume único, com conteúdos para serem tratados durantes os três anos do ensino médio. O primeiro anexo apresenta uma revisão dos principais conteúdos trabalhados no ensino fundamental, enquanto o segundo traz as questões de Matemática do ENEM de 1998 a 2004. No final de cada capítulo há um resumo dos conceitos abordados, uma lista de exercícios complementares e testes e questões de vestibulares e concursos.

A seguir apresentamos o sumário do capítulo 9, destinado a sistemas lineares, Matrizes e Determinantes:

Figura 2: Sumário do Capítulo de Sistemas Lineares

Como se pode notar, o capítulo que trabalha a Álgebra Linear do ensino médio possui 30 páginas, das quais apenas nove são destinadas a sistemas lineares.

O início do capítulo apresenta um breve comentário histórico sobre resolução de sistemas lineares, matrizes e determinantes. Esse comentário, mostrado a seguir, traz a informação de que "os primeiros exemplos de sistemas lineares são encontrados nos registros de antigas civilizações por volta de 2000 a.C". (YOUSSEF, SOARES e FERNANDES, 2005, p. 186)

Os primeiros exemplos de sistemas lineares são encontrados nos registros de antigas civilizações por volta de 2000 a.C. Ao final do século XVIII foram desenvolvidos métodos de resolução de sistemas lineares baseados em tabelas numéricas formadas pelos coeficientes das equações que compunham esses sistemas. Essas tabelas numéricas deram origem ao que hoje denominamos matrizes e determinantes, que, além de serem aplicadas ao estudo dos sistemas lineares, possibilitaram o desenvolvimento de novos ramos da Matemática.

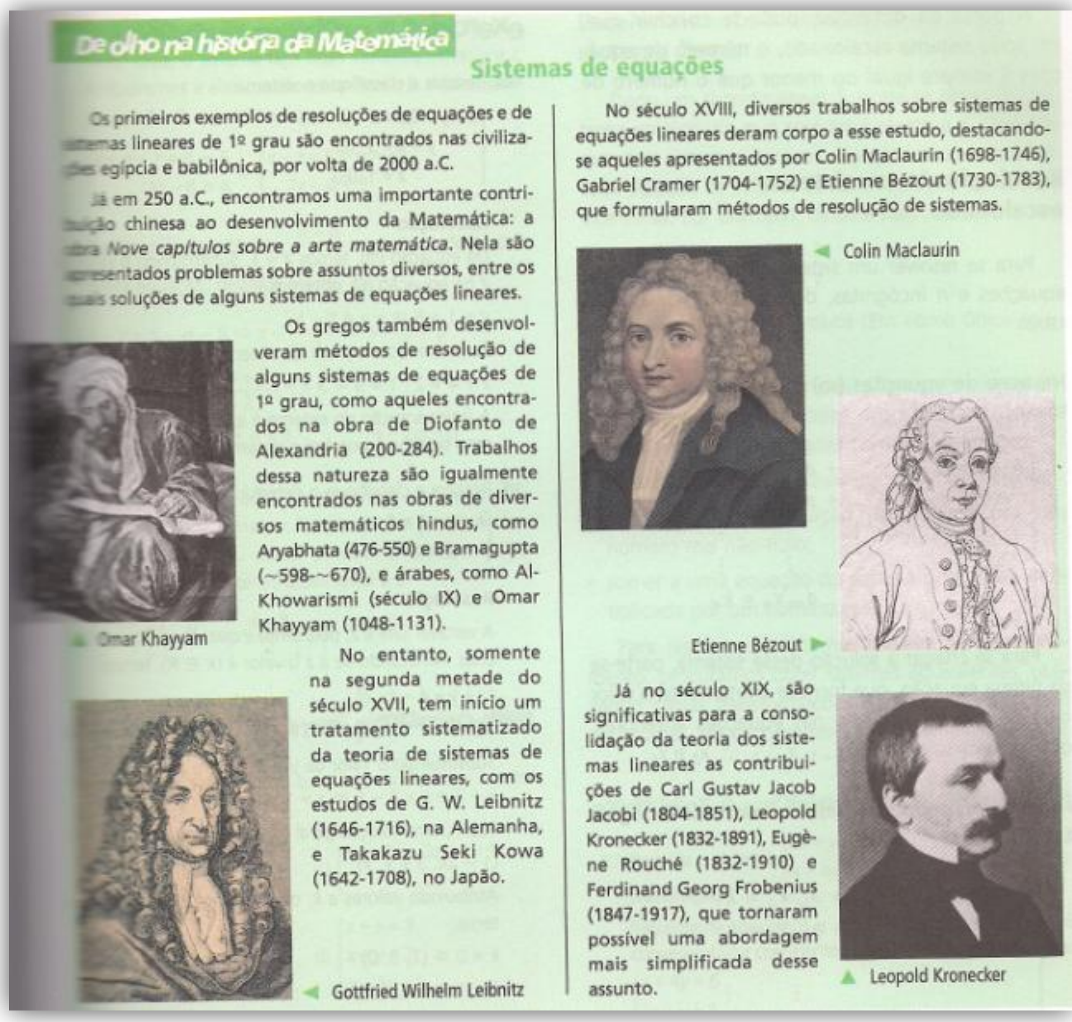
Neste capítulo vamos começar estudando os sistema lineares, depois as matrizes e os determinantes.

Figura 3: Comentário Histórico do Livro Didático analisado

Entretanto, no estudo do desenvolvimento histórico deste tema, encontramos em trabalhos como Luccas (2004) e Neves (2009), que citam registros encontrados em papiros e tabuletas babilônicas datados de 300 a.C e 200 a.C, nos quais o problema enunciado poderia ser resolvido por meio de sistemas lineares. Um desses registros traz ainda uma resolução semelhante ao processo do escalonamento, sistematizado por Gauss no século XVIII. Assim, como os autores do livro didático analisado não fazem referência aos textos que consultaram para fazerem tal afirmação, continuaremos admitindo, em nosso trabalho, que os registros mais antigos de problemas envolvendo sistemas lineares são aqueles datados de 300 a.C. e 200 a.C., como já descrevemos no item 3.1 deste texto.

Após o breve comentário histórico, que a nosso ver teve a finalidade apenas de informar alguns acontecimentos e pouco contribuiu para a atribuição de significados aos conceitos, o livro traz a definição de equação linear e solução de uma equação linear, exemplos, exercícios e problemas resolvidos envolvendo esse conceito, seguidos de exercícios propostos semelhantes aos resolvidos ou de aplicação direta da definição. O tratamento da definição de sistema linear é feito seguindo o mesmo processo: não há problema ou situação motivadora.

A seguir, a sessão “De olho na história da Matemática” traz um texto que informa os principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento de métodos de resolução de sistemas lineares. Não há qualquer explicação sobre como esses métodos funcionavam. Entendemos que, dessa maneira, novamente o recurso da história da Matemática quase não contribui para a atribuição de significados, neste caso, de métodos de resolução.



De olho na história da Matemática

Sistemas de equações

Os primeiros exemplos de resoluções de equações e de sistemas lineares de 1º grau são encontrados nas civilizações egípcia e babilônica, por volta de 2000 a.C.

Já em 250 a.C., encontramos uma importante contribuição chinesa ao desenvolvimento da Matemática: a obra *Nove capítulos sobre a arte matemática*. Nela são apresentados problemas sobre assuntos diversos, entre os quais soluções de alguns sistemas de equações lineares.

Os gregos também desenvolveram métodos de resolução de alguns sistemas de equações de 1º grau, como aqueles encontrados na obra de Diofanto de Alexandria (200-284). Trabalhos dessa natureza são igualmente encontrados nas obras de diversos matemáticos hindus, como Aryabhata (476-550) e Bramagupta (~598-~670), e árabes, como Al-Khowarismi (século IX) e Omar Khayyam (1048-1131).

Omar Khayyam

No entanto, somente na segunda metade do século XVII, tem início um tratamento sistematizado da teoria de sistemas de equações lineares, com os estudos de G. W. Leibnitz (1646-1716), na Alemanha, e Takakazu Seki Kowa (1642-1708), no Japão.

Gottfried Wilhelm Leibnitz

No século XVIII, diversos trabalhos sobre sistemas de equações lineares deram corpo a esse estudo, destacando-se aqueles apresentados por Colin Maclaurin (1698-1746), Gabriel Cramer (1704-1752) e Etienne Bézout (1730-1783), que formularam métodos de resolução de sistemas.

Colin Maclaurin

Etienne Bézout

Já no século XIX, são significativas para a consolidação da teoria dos sistemas lineares as contribuições de Carl Gustav Jacob Jacobi (1804-1851), Leopold Kronecker (1832-1891), Eugène Rouché (1832-1910) e Ferdinand Georg Frobenius (1847-1917), que tornaram possível uma abordagem mais simplificada desse assunto.

Leopold Kronecker

Figura 4: Sessão "De olho na história da Matemática"

A mesma sequência anteriormente mencionada é utilizada para definir e trabalhar o conceito de sistema escalonado e a discussão de um sistema linear. Mostra-se, então, o processo a partir do qual é possível transformar um sistema linear de m equações e n incógnitas, genérico, em um sistema equivalente que esteja na forma escalonada. Não há nenhum problema contextualizado durante todo o tratamento do tema.

A essa altura, apresenta-se um texto da sessão “De olho no mundo do trabalho”, que afirma que administradores utilizam sistemas lineares no dia-a-dia de sua profissão. Observamos que os autores perderam uma notável oportunidade de apresentar um exemplo contextualizado, pois, novamente, o texto é apenas explicativo/informativo.

Essa ausência, em nossa opinião, prejudica as possíveis conexões que o aluno poderia fazer não só com outras áreas do conhecimento, mas também com outras áreas da própria matemática. O catálogo do PNLEM 2009 corrobora com nossa interpretação quando afirma que

> A ausência de situações-problema motivando a teoria e o tratamento dos tópicos em blocos temáticos, sem articulação evidente entre si, não propicia ao aluno familiarizar-se com os procedimentos de descoberta, aplicação e validação da teoria, bem como perceber o entrelaçamento das diversas áreas de Matemática. (BRASIL, 2009, p.62)

Apesar das críticas acima, consideramos adequada a disposição do conteúdo do capítulo como um todo. Somente após trabalhar os conceitos de sistemas lineares e sistemas lineares escalonados é que explora-se as noções de matrizes e determinantes. A regra de Cramer aparece no final do capítulo, em apenas uma página.

Vale ressaltar que percebemos preocupação dos autores em relação à discussão e classificação de um sistema linear a partir de sua forma escalonada, o que corrobora com nosso terceiro objetivo específico de pesquisa.

Embora o escalonamento tenha sido trabalhado de antemão, acreditamos que um trabalho mais relevante poderia ter sido feito em relação a este tema, pois não aparecem problemas contextualizados ou qualquer ligação entre sistemas lineares e Geometria Analítica. Os processos de resolução foram apresentados de maneira pronta e os exercícios resolvidos facilitam muito o trabalho do aluno quando estes hipoteticamente partem para os exercícios propostos, devido à grande semelhança entre os mesmos.

Em relação ao primeiro dos quatro critérios elencados por Battaglioli (2008), o catálogo do PNLEM afirma que, nesta obra, “um tópico abordado em algum capítulo não é, geralmente, retomado” (BRASIL, 2009, p.65). Verificamos, a partir da análise do sumário completo da obra, que em relação ao tema sistemas lineares isso também acontece.

Em nossa opinião, o recurso à história da Matemática, como já afirmamos, não foi adequado. Não encontramos exercícios que sugerissem a utilização do computador na parte de tratamento de sistemas lineares, embora um texto que explica como os computadores processam as informações apareça durante o tratamento de determinantes. Não há evidências de que os conceitos prévios dos alunos foram retomados, pois não se retornou a situações que poderiam ser resolvidas por meio de sistemas lineares 2x2 nem se fez menção aos métodos de adição e substituição, teoricamente já conhecidos dos alunos.

Resumidamente, o catálogo do PNLEM 2009 analisa que a obra abrange os temas normalmente estudados no ensino médio, com nível de rigor adequado. A apresentação dos conceitos é clara com linguagem direta. Entretanto, diversas imprecisões conceituais foram registradas. (BRASIL, 2009)

Os diversos temas tratados não são articulados e conexões importantes não são exploradas, como a ligação entre sistemas lineares e geometria analítica. “Um exemplo de desarticulação na obra é o conceito de determinante, para o qual a única justificativa teórica é sua utilidade no método de Cramer” (BRASIL, 2009, p.65).

A contextualização dos conteúdos é parcialmente atendida. No tratamento de sistemas lineares observamos que é praticamente nula e “uma falha apontada é a ausência de situações-problema, próprias da Matemática ou de outras áreas, ou ainda, remetendo a conhecimentos prévios do aluno” (BRASIL, 2009, p.65) como já havíamos observado na análise do capítulo 9.

Segundo o catálogo do PNLEM de 2009:

> A metodologia de ensino-aprendizagem adotada contribui para a compreensão dos conceitos e procedimentos matemáticos e para o desenvolvimento de competências variadas. O aluno é estimulado a ler e interpretar o texto de apresentação dos conteúdos e, em seguida, a resolver os exercícios e problemas propostos. (BRASIL, 2009, p. 66)

Embora isso possa ocorrer em outros capítulos do livro, no tratamento de sistemas lineares não observamos o estímulo à leitura e interpretação de textos. Em contrapartida, concordamos quando o texto afirma que “na maioria das vezes, os conteúdos matemáticos são apresentados já sistematizados, por meio de definições, propriedades, problemas e exercícios resolvidos, seguidos de exercícios de aplicação da teoria apresentada” (BRASIL, 2009, p. 66).

Em suma, percebemos que não existe grande divergência entre nossa análise, focada no capítulo de sistemas lineares, e a encontrada no catálogo do PNLEM 2009, que abrange toda a obra.

3.6. DIFICULDADES DOS ALUNOS NA APRENDIZAGEM DE SISTEMAS LINEARES

Nos estudos referentes à primeira etapa de nossa metodologia de investigação, não poderia faltar uma abordagem em relação às dificuldades dos alunos e erros que cometem na aprendizagem de sistemas lineares.

Almouloud e Bianchini (1996) realizaram uma pesquisa que estudou “o problema do ensino/aprendizagem de Sistemas Lineares” (ALMOULOUD e BIANCHINI, 1996, p. 216). Além disso, os autores procuraram encontrar uma explicação para os erros dos alunos e descobrir suas origens (obstáculos epistemológicos, didáticos, etc).

Em relação aos efeitos do contrato, os autores afirmam que sentiram

> algum efeito do contrato didático: quando se coloca em uma questão “resolva” um sistema, é muito difícil para o aluno concluir que ele possa ser “impossível”, os alunos acreditam que devem encontrar uma resposta. (ALMOULOUD e BIANCHINI, 1996, p.217)

Nossa interpretação para esta afirmação é a de que o termo “resolva” está ligado a uma resposta numérica e, preferencialmente, única. Assim, o fato de a resposta ser “não tem resposta” constitui uma quebra de contrato, já que os alunos, geralmente, não estão acostumados a lidar com questões desse tipo.

Almouloud e Bianchini (1996) destacam a importância do erro que o aluno comete para o processo de aprendizagem, afirmando que

> a análise do erro dos alunos é importante no processo ensino/aprendizagem, pois, a partir dela o professor poderá se orientar sobre o prosseguimento do ensino. Poderá enfocar o problema num outro ponto de vista para tentar fazer com que os alunos entendam melhor o conceito envolvido e consigam superar seus erros (ALMOULOUD e BIANCHINI, 1996, p.217).

Assim, os principais erros destacados pelos autores foram: confusão entre parâmetro e incógnita e dar soluções inadequadas para um sistema indeterminado.

Os autores também identificam alguns obstáculos epistemológicos e didáticos deste saber.

> Atualmente, parece-nos que os alunos têm mais dificuldades em encontrar as soluções de um sistema indeterminado que num determinado, eles se atrapalham para dar a resposta, tiram uma incógnita em função da outra e dificilmente dão a solução com o menor número de incógnitas (ALMOULOUD e BIANCHINI, 1996, p.219)

Este fato poderia configurar um obstáculo tanto histórico quanto epistemológico, já que, até o século XVIII, segundo os pesquisadores, os sistemas indeterminados não eram ainda objeto de estudo instituído. Nessa época, as técnicas práticas de resolução por eliminação e substituição eram largamente utilizadas para resolver os sistemas lineares em que o número de equações e o de incógnitas é o mesmo.

Na aplicação do teste da pesquisa que estamos descrevendo, os pesquisadores constataram que “os alunos acham que para resolver um sistema linear com três equações e duas incógnitas é suficiente resolver duas equações” (ALMOULOUD e

BIANCHINI, 1996, p.221), erro atribuído ao obstáculo epistemológico e histórico mencionado.

Outro obstáculo epistemológico que os autores afirmam hoje ter sido superado está relacionado às soluções e coeficientes dos sistemas lineares:

> Diophante não considera as soluções racionais e positivas. Com os árabes, no século IX, Al-Khwarizmi assume que os coeficientes das equações devem ser sempre positivos. Ele nunca considera as raízes negativas das equações. (ALMOULOUD e BIANCHINI, 1996, p. 219)

Em relação ao erro "confundir parâmetro e incógnita", os autores concluem:

> [...] realmente existe para o aluno a confusão do que é parâmetro e do que é incógnita, parece que o que fica claro para ele é que se deve achar uma resposta para o problema e não é feita uma reflexão sobre quem deve ficar em função de quem. Alguns isolaram x, outros y e outros a [que era o parâmetro] (ALMOULOUD e BIANCHINI, 1996, p.222).

Em relação a essa confusão, os autores sugerem atividades que "necessitem de uma reflexão inicial sobre os métodos utilizados de detectar os índices dessa reflexão (por exemplo, fazendo-se redigir a tentativa utilizada)" (ALMOULOUD e BIANCHINI, 1996, p. 223).

4. CONCEPÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA, ANÁLISES *A PRIORI* E *A POSTERIORI*

4.1. PRÉ-EXPERIMENTAÇÃO

No período que antecedeu a qualificação deste trabalho, havíamos iniciado uma tentativa de experimentação em uma escola de Campo Grande. Na ocasião, estávamos trabalhando com um grupo de alunos dos quais oito haviam sido escolhidos para serem os sujeitos de pesquisa. Interrompemos a aplicação das atividades pelo fato de os alunos terem entrado de férias e tínhamos a intenção de retomá-las quando período letivo iniciasse novamente.

Com a definição da data da qualificação de mestrado, decidimos aguardar as considerações da banca para retomarmos a aplicação. Durante a arguição do trabalho, a banca fez algumas considerações bastante relevantes, que nos fizeram repensar alguns pontos de nossa investigação.

Havíamos cometido alguns deslizes, dentre os quais podemos citar:

- Uso de apenas um gravador de áudio, que não registrou o diálogo de todas as duplas. O gravador ficava com a pesquisadora, que circulava pela sala de aula. Quando se aproximava de uma dupla, o gravador captava o diálogo da mesma. Porém, ao se afastar para outro local da sala, a conversa deixava de ser registrada, bem como os momentos adidáticos que possam ter acontecido.

- Interferências da pesquisadora que fizeram com que momentos que estavam previstos para serem adidáticos se tornassem praticamente exemplos de efeito topázio[7].

- Não exigimos que os alunos fizessem as atividades à caneta. Isto prejudicou a qualidade das digitalizações e posterior leitura dos protocolos.

- No momento de aplicar as atividades do terceiro bloco da sequência didática, não soubemos prever corretamente a quantidade de sistemas lineares que os alunos seriam capazes de resolver por sessão. Quando entregamos uma atividade em que os alunos deveriam resolver quatro sistemas lineares, alguns o fizeram na mesma sessão, porém, outros demoraram outras duas sessões. Isto prejudicou o gerenciamento, pois alguns alunos não tinham o que fazer enquanto outros se sentiam enfadados em receber a mesma atividade até pela terceira vez.

---

[7] Ação realizada pelo professor que facilita a tarefa do aluno de variadas maneiras, como, por exemplo, fornecendo-lhe abundantes explicações. Essa prática pode propiciar uma revisão dos objetivos da aprendizagem ocasionando um rebaixamento dos mesmos. (SILVA, B.A., 2008)

Por estas razões, decidimos aplicar a sequência didática novamente, com outros alunos e em outra escola. Isto permitiu que revíssemos os erros cometidos.

4.2. ESCOLHA DOS SUJEITOS DE PESQUISA

O ensino de sistemas lineares no ensino médio normalmente é feito no segundo ano. Analisando o Catálogo do PNLEM de 2009, das oito obras aprovadas, cinco possuem três volumes e em todas o tema sistemas lineares aparece no volume 2, destinado à segunda série do ensino médio.

Por este motivo e pelo fato da experimentação ter sido realizada nos meses de outubro e novembro, final do ano letivo, pedimos à professora que nos ajudou a reunir os candidatos a sujeitos de pesquisa que convidasse apenas os alunos do primeiro ano do ensino médio, pois assim não correríamos o risco de trabalhar com alunos que haviam estudado o tema recentemente.

Uma conversa inicial foi realizada com os alunos, feita pela própria professora. Após essa conversa inicial, seis alunos compareceram à primeira sessão, momento no qual a pesquisadora apresentou a pesquisa que seria realizada com mais detalhes e todos os alunos aceitaram participar de forma voluntária.

O critério para escolha dos sujeitos da pesquisa foi a assiduidade aos encontros. Estabelecemos que seria sujeito de pesquisa o aluno que tivesse participado de pelo menos 80% dos encontros, ou seja, que tivesse no máximo duas faltas. Assim, do grupo de frequentou as sessões, seis alunos foram escolhidos como sujeitos de pesquisa.

Os alunos das Duplas 1 e 2 já eram parceiros desde o início da experimentação. A Dupla 3 formou-se apenas no sexto encontro, por dois motivos: os companheiros de ambos estavam faltando muito e a pesquisadora já havia percebido que estes alunos eram potenciais sujeitos de pesquisa, pois eram bastante assíduos.

4.3. ESCOLHAS METODOLÓGICAS

Alguns aspectos que poderiam configurar como variáveis didáticas foram caracterizados como escolhas metodológicas, pois não variaram ao longo da sequência didática por opção nossa. A seguir, apresentaremos cada aspecto, como eles poderiam aparecer na forma de variáveis didáticas e as razões pelas quais, neste trabalho, foram tomados como uma escolha metodológica.

4.3.1. Soluções e Coeficientes Inteiros

Os coeficientes dos sistemas lineares propostos poderiam ou não ser inteiros. Isto provavelmente influenciaria a adoção de determinadas estratégias pelos alunos. Booth (1995) cita um estudo realizado com cerca de duzentas crianças de uma escola da Escócia que faziam parte do topo da escala de capacidade de uma amostra. Na referida pesquisa, 82% dos alunos resolveram a equação 30/x=6 corretamente, mas apenas 48% tiveram sucesso com o exemplo estruturalmente semelhante 4/x=3. “No primeiro caso, os alunos foram capazes de resolver a equação por verificação, um procedimento que não poderia ser aplicado de maneira tão imediata no segundo exemplo”. (BOOTH, 1995, p.34)

Provavelmente, o fator que influenciou a diferença entre as porcentagens foi a natureza do valor de x. No primeiro caso, x era um número inteiro e no segundo era racional. A opção por variar a natureza das soluções e dos coeficientes dos sistemas lineares poderia “obrigar” os alunos e descartarem mais rapidamente a estratégia “Tentativa e Erro” a qual conjecturamos que seria a estratégia adotada inicialmente por eles. É muito mais difícil supor que o valor de x seja sete oitavos do que supor que seja 2, por exemplo.

Entretanto, esta escolha poderia trazer dificuldades extras para os alunos. Esteves (2009) cita em seu trabalho algumas pesquisas, como Cunha (2002), Padovan (2000), Silva (2006) e Zunino (1995), que afirmam que o conjunto dos números racionais “embora seja um conteúdo presente do dia-a-dia dos alunos, estes apresentam dificuldades em sua compreensão”. (ESTEVES, 2009, p. 46)

Como o foco de nosso trabalho não é o estudo dos números racionais, acreditamos que a escolha por trabalhar apenas com números inteiros não prejudique nossa pesquisa.

4.3.2. Tipo de Sistema Quanto à Ordem de Grandeza

Ao variar a ordem de grandeza de sistemas lineares, 2x2, 2x3, 3x3, etc., trabalhamos com níveis distintos de manipulação aritmética e algébrica. Quanto “maior” o sistema, maior a quantidade de operações para realizar até que se obtenha a forma escalonada e a atividade torna-se, portanto, mais complexa. Nossa sequência didática, como apresentaremos e explicaremos adiante, é dividida em três blocos. Apenas no primeiro bloco trouxemos atividades que podem ser resolvidas por meio de sistemas lineares com ordem de grandeza variando: ora 2x2, ora 3x3.

Assim, apenas para o primeiro bloco a ordem de grandeza irá configurar como uma variável didática. Nos dois blocos seguintes fizemos a opção por trabalhar com sistemas lineares de ordem 3x3. Entretanto, ressaltamos que o trabalho com sistemas lineares em que o número de equações é diferente do número de incógnitas, bem como com sistemas de ordem 4x4 ou superior, não possa ficar ausente numa abordagem completa deste tema. Tivemos que fazer algumas escolhas para que a sequência didática não se estendesse demasiadamente.

4.3.3. Tipo de Sistema quanto à Solução

Acreditamos ser mais complexo para o aluno aceitar o fato de, por exemplo, um sistema linear possuir infinitas soluções já que aparecem mais de uma condição para os valores desconhecidos considerados. Este fato pode também ser justificado por se caracterizar como obstáculo epistemológico e histórico, conforme foi apresentado na sessão anterior, uma vez que durante muito tempo os sistemas lineares indeterminados não eram sequer objeto de estudo instituído. (ALMOULOUD e BIANCHINI, 1996)

Novamente, embora a abordagem de sistemas lineares indeterminados e impossíveis não possa faltar, em nossa sequência didática, optamos por trabalhar, principalmente no bloco 3, com sistemas lineares possíveis e determinados. Lembramos que nosso objeto de estudo é o escalonamento, não os sistemas lineares. Ainda assim, observamos que ao final da sequência didática foi feita uma discussão com os alunos sobre as potencialidades que a forma escalonada de um sistema linear possui. A partir da forma escalonada é possível decidir se o sistema linear é impossível, possível determinado ou possível indeterminado. Porém, essa discussão não entra em nossa análise de dados, pois não foi feita em profundidade.

4.4. AS VARIÁVEIS DIDÁTICAS

Como já mencionado no item **Erro! Fonte de referência não encontrada.** deste texto, na segunda fase da Engenharia Didática “o investigador toma a decisão de agir sobre um determinado número de variáveis do sistema”. (ARTIGUE, 1996, p.202)

Dedicamos esta parte do texto para apresentar quais variáveis foram consideradas em nosso trabalho bem como a maneira que as mesmas podem influenciar na adoção de estratégias pelos alunos.

Nossa sequência é dividida em três blocos, de naturezas diferentes. O primeiro bloco contém atividades contextualizadas que podem ser resolvidas por meio de sistemas lineares. O objetivo principal deste primeiro bloco é promover a devolução do problema “como resolver um sistema linear”. O segundo bloco contém atividades que visam levar à elaboração das três operações elementares que podem ser utilizadas durante o escalonamento de um sistema linear. O terceiro bloco contém um conjunto de sistemas lineares cuja resolução poderá levar à construção do processo de escalonamento.

Pelo fato de os blocos terem naturezas distintas, elencaremos as variáveis didáticas adotadas separadamente, pois existem variáveis de certos blocos que não se aplicam a outros.

4.4.1. Variáveis Didáticas do Bloco 1

4.4.1.1. V_1: Figura representativa da situação matemática

Quando aparece uma figura que representa a situação matemática enunciada e, por conseguinte, o aluno possui visualização imediata da mesma, acreditamos que o risco de má interpretação do problema diminui.

Além disso, Góes e David (2010, p. 2) afirmam que

> o desenho é também utilizado na elaboração e na solução de problemas matemáticos [...] [e] na área da Educação Matemática já existem diversos estudos e pesquisas focados no papel mediador do desenho e na sua relevância para a sala de aula de matemática.

No primeiro bloco de nossa sequência didática, alguns problemas apresentam figura que representa a situação matemática e outros não. Isto pode, em nossa opinião, influenciar as estratégias adotadas pelos alunos, pois a visualização direta abre caminhos, por exemplo, para superposição e/ou decomposição de objetos dispostos, o que não seria feito de maneira tão direta caso o enunciado se apresentasse apenas na linguagem escrita e exigisse, portanto, um grau de abstração maior.

4.4.1.2. V_2: Ordem de grandeza do Sistema Linear

No primeiro bloco de atividades também varia a ordem de grandeza dos sistemas lineares que podem resolver o problema proposto. Se o sistema for de ordem 2x2, por exemplo, a estratégia de Tentativa e Erro pode ser utilizada com mais facilidade, bem como os métodos[8] de adição e substituição provavelmente estudados pelos alunos no ensino fundamental. Acreditamos que os alunos não possuam recursos algébricos suficientes para resolver sistemas lineares 3x3, pois os sujeitos de pesquisa são alunos

[8] Na realidade, os termos “adição” e “substituição” referem-se a técnicas de resolução, mas normalmente são chamados de “métodos” pelos autores de livros didáticos.

do primeiro ano do ensino médio e o conteúdo de sistemas lineares, em particular os de ordem 3x3, normalmente são explorados no segundo ano do ensino médio.

Confirmamos esta hipótese com o professor de matemática dos sujeitos da pesquisa em uma conversa informal. Entretanto, não podemos afirmar com absoluta certeza que nenhum dos alunos conheça as estratégias normalmente utilizadas para resolver sistemas lineares de ordem igual ou superior a 3x3, pois podem tê-las discutido com outros professores de matemática ou mesmo fora da escola.

Assim, ao propor problemas que podem ser resolvidos por sistemas 3x3, conjecturamos que os alunos apresentem dificuldades e que a estratégia de Tentativa e Erro se mostre cada vez menos eficaz. Deste modo, pode acontecer a devolução do problema "como resolver um sistema linear".

4.4.2. Variáveis Didáticas do Bloco 2

4.4.2.1. V_1: Figura representativa da situação matemática

Esta variável é a mesma apresentada no item 4.4.1.1.

4.4.3. Variáveis Didáticas do Bloco 3

4.4.3.1. V_1: Número mínimo de operações a serem realizadas para escalonar o sistema

Conjecturamos que quanto maior o número mínimo de operações a serem realizadas para escalonar o sistema, mais difícil será sua resolução bem como maior será o número de estratégias possíveis para escaloná-lo. Assim, com uma gama maior de estratégias possíveis, os alunos podem variar na adoção de uma em detrimento da outra.

4.5. BLOCO 1: DEVOLUÇÃO

Nossa sequência didática é composta de três grandes blocos, como já afirmamos. Optamos por apresentar as análises *a priori* e *a posteriori* local, de cada bloco, num mesmo capítulo visando uma melhor compreensão do encadeamento de nossas idéias por parte do leitor, bem como para evitar que fosse necessário recorrer a um capítulo anterior para retomar a leitura da análise *a priori* durante a leitura da análise *a posteriori*.

Estruturamos nossas análises da seguinte forma: dividimos as apresentações por blocos e dentro de cada bloco, por atividade. Para cada atividade, elencamos seu(s) objetivo(s), quais as possíveis estratégias de resolução, como "jogamos" com as variáveis didáticas, qual foi o planejamento para o momento da aplicação, os dados produzidos pelos alunos bem como nossa análise *a posteriori* local. Esta última contém o registro de alguns momentos adidáticos bem como as justificativas que nos levaram a classificá-los como adidáticos.

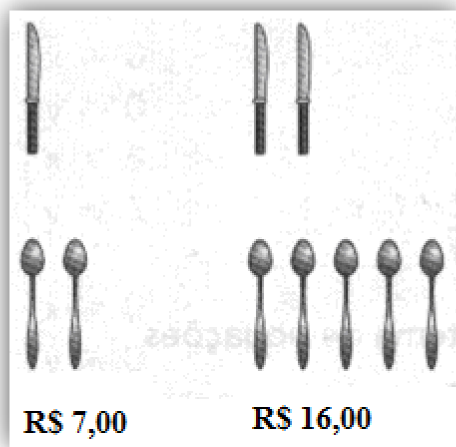
Ao final, faremos uma análise *a posteriori* que chamaremos de global por se tratar de uma avaliação da sequência didática de uma forma geral. A análise *a posteriori* global será apresentada nas considerações finais do trabalho, nas quais também traremos a validação da sequência.

4.5.1. Sessão 1

Esta sessão foi realizada no dia 20 de outubro de 2010, é composta de uma atividade, apresentada a seguir, a qual durou 36 minutos e contou com a presença de seis alunos, dos quais três são sujeitos de pesquisa: Alunos 3 e 4, da Dupla 2, que foram ~~são~~ parceiros desde o primeiro dia e Aluno 5, que de início formou dupla com outro aluno mas que posteriormente não foi escolhido como sujeito de pesquisa.

Ressaltamos que as sessões não contaram com a presença de observador.

Examinando o anúncio abaixo, descubra o preço de cada faca e colher. Descreva os passos que você utilizou para encontrar a resposta.



4.5.1.1. Análise *a priori*

Objetivo: Envolver os alunos e iniciar um processo de motivação, tentando caminhar para a devolução do problema "como resolver um sistema linear?". Este processo está previsto para acontecer até o final da terceira atividade.

Estratégias[9]: Elencamos quatro possíveis estratégias para esta atividade:

E_1: Tentativa e erro aleatória: Consiste em atribuir valores às incógnitas de maneira aleatória. Cada novo "chute" é feito sem levar em conta o resultado obtido a partir do anterior.

E_2: Tentativa e erro com estimativa: Também consiste em atribuir valores às incógnitas, porém levando em consideração o resultado obtido a partir do "chute" anterior. Por exemplo: Se o preço de cada colher for R$ 4,00, duas colheres custariam R$ 8,00. Mas o problema afirma que duas colheres mais uma faca custam R$ 7,00. O preço da colher estaria muito alto. Tenta-se, portanto, um valor menor e ajusta-se cada novo chute até que a solução seja encontrada.

E_3: Sistema Linear 2x2: Montar e resolver o sistema linear $\begin{cases} f+2c=7 \\ 2f+5c=16 \end{cases}$, onde "f" representa o preço de cada faca e "c" representa o preço de cada colher. Após a resolução, encontra-se f = R$ 3,00 e c = R$ 2,00. Para a resolução do sistema linear, os alunos poderiam utilizar como estratégias: tentativa e erro, escalonamento, método da adição ou método da substituição, sendo os dois últimos normalmente discutidos no ensino fundamental.

E_4: Imaginar uma superposição de duas cópias da primeira condição sobre a segunda condição, ou seja, se uma faca e duas colheres custam R$ 7,00, então duas facas e quatro colheres custam R$ 14,00. Assim, se duas facas e cinco colheres – uma colher a mais – custam R$ 16,00, uma colher só pode valer R$ 2,00. Completando o raciocínio, uma faca valeria R$ 3,00, o que poderia ser descoberto utilizando qualquer uma das duas condições apresentadas no problema.

Dentre as estratégias elencadas, acreditamos que a primeira estratégia seja a mais provável de se manifestar. Além da dificuldade de modelagem matemática, provavelmente os alunos não têm contato com o tema sistemas lineares há algum tempo, já que, normalmente, ele é abordado no oitavo ano do Ensino Fundamental e no segundo ano do ensino médio. Vale lembrar que nossos sujeitos de pesquisa estão no primeiro ano do ensino médio.

---

[9] As estratégias serão denotadas por E_1, E_2,..., E_n.

Caso a estratégia de resolução via sistemas lineares não apareça, a pesquisadora provocaria uma discussão dizendo que o problema poderia ser modelado por um sistema linear e indagaria aos alunos como poderiam resolvê-lo, se lembram de terem estudado esse assunto anteriormente e que estratégias utilizariam para encontrar os valores desconhecidos.

Se a estratégia de resolução via sistemas lineares aparecer, a pesquisadora aproveitaria o fato para, na hora do debate[10], solicitar que o(s) aluno(s) que tenha(m) usado esta estratégia a explique(m) para os demais.

Variáveis Didáticas:

V_1: Presença de figura representativa da situação matemática. Neste caso, a presença de figura representativa da situação matemática pode influenciar, a nosso ver, principalmente o aparecimento da quarta estratégia elencada anteriormente. A forma com que as facas e colheres estão dispostas no desenho favorece que se imagine duas “cópias” da primeira situação, o que favoreceria a ocorrência da estratégia E_4.

V_2: Por tratar-se da sessão inicial, optamos por trabalhar com um problema que pudesse ser resolvido por meio de um sistema 2x2. Esta escolha pode facilitar a ocorrência da estratégia E_1.

Planejamento: Para a realização de toda a sequência didática, planejou-se que os alunos sentassem em duplas, com a finalidade de favorecer o aparecimento e o registro de momentos adidáticos. Cada dupla, que seria composta sem a interferência da pesquisadora, teria seu desenvolvimento registrado por um único protocolo impresso e por um gravador. Os alunos seriam orientados a não utilizarem lápis e, caso errassem, deveriam apenas passar um traço abaixo do raciocínio equivocado e iniciarem um novo logo em seguida.

Ao final da atividade, seria realizada uma discussão pedindo para que cada dupla explicitasse sua resolução. Em caso de resoluções distintas, pediríamos que as duplas defendessem seu raciocínio e tentassem convencer os demais de que o mesmo estava correto. Com isso pretendíamos provocar momentos de formulação e validação.

Especificamente para a primeira sessão, após o debate seriam, então, definidos os conceitos de equação linear, sistema linear, coeficientes, incógnitas e solução de um sistema linear.

[10] Explicaremos como o debate deveria acontecer no tópico “planejamento”, discutido adiante.

Validação: A nosso ver, a validação aconteceria testando a resposta f=R$ 3,00 e c=R$ 2,00 nas condições dadas e percebendo que era a solução do problema.

4.5.1.2. Análise *a posteriori* local

As sessões aconteceram durante 14 dias sempre após o período normal de aulas, das 11h20min às 12h10min, aproximadamente. Por tratar-se de sessões curtas, com duração de cerca de 50 minutos, foi trabalhada, em média, uma atividade por encontro.

No início da primeira sessão, na qual compareceram seis alunos, a pesquisadora apresentou-se e explicou que os encontros seriam gravados em áudio, com um gravador para cada dupla. Os nomes seriam mantidos em sigilo e o áudio seria utilizado apenas para posterior estudo.

A lista de presença foi entregue assim como uma autorização para que os pais assinassem. A pesquisadora explicitou que tratava-se de uma pesquisa, que a participação deles seria voluntária e que ao final de todo o trabalho seria entregue uma declaração de participação para os alunos que tivessem assiduidade.

Foi explicado, também, que o trabalho duraria de duas a três semanas.

Após a apresentação inicial, a atividade foi entregue.

Dos seis alunos que compareceram, três são sujeitos de pesquisa.

Segundo a Teoria das Situações Didáticas, ao propormos situações aos alunos, algum conhecimento novo deve estar em jogo. No nosso caso, este conhecimento novo é o escalonamento. Embora esta atividade ainda não envolva conceitos referentes ao escalonamento propriamente dito, consideramos que o mesmo já se encontra em jogo, uma vez que é o que desejamos que apareça posteriormente.

Dos três alunos sujeitos de pesquisa que compareceram a esta sessão (alunos 3, 4 e 5), um resolveu o problema pela estratégia E_1 e dois resolveram pela estratégia E_2. A seguir trazemos elementos que embasam esta afirmação.

Durante a análise das gravações, extraímos o seguinte diálogo, entre o Aluno 5 e sua dupla, identificada a seguir como Parceiro do Aluno 5:

> Aluno 5: Já não sei!
> Parceiro do Aluno 5: Eu não sei fazer conta de divisão.
> Aluno 5: Eu penso que deve ser R$ 2,25...
> Parceiro do Aluno 5: Divide 16 por 7...
> Aluno 5: Olha só o número que deu!
> Parceiro do Aluno 5: É...deu praticamente R$ 2,25..
> Aluno 5: 1..2..3..4..5..6..7..
> Aluno 5:Coloquei 2.5...
> Parceiro do Aluno 5: Coloca 2 ponto 30...
> Aluno 5: Não dá!

Parceiro do Aluno 5: É tipo assim, dividi 16 pelas 7, mas aí nunca vai dar certo...aí dá R$ 2,30...
[...]
Aluno 5: Eu acho que a faca é a mais cara
Parceiro do Aluno 5: A colher é R$ 2,50 e a faca R$ 2,00?
Colher é R$ 2,00 e a faca é R$ 3,00...olha aqui A_1...colher 2 reais, faca 3..
2..4...5, 6, 7!
Presta atenção no que estou fazendo...
5 vezes 2 é quanto?
Aluno 5: 10!
Parceiro do Aluno 5: Então...aqui vai dá R$ 10,00..mais três..
Aluno 5: 16!

O excerto mostra a interação da dupla com o problema. O diálogo não mostra um reajuste de tentativa a partir do resultado obtido anteriormente, por essa razão classificamos a estratégia utilizada como sendo a E_1, tentativa e erro aleatória.

Já os alunos 3 e 4, que constituíam uma dupla, apresentaram uma argumentação mais elaborada em seu registro escrito.

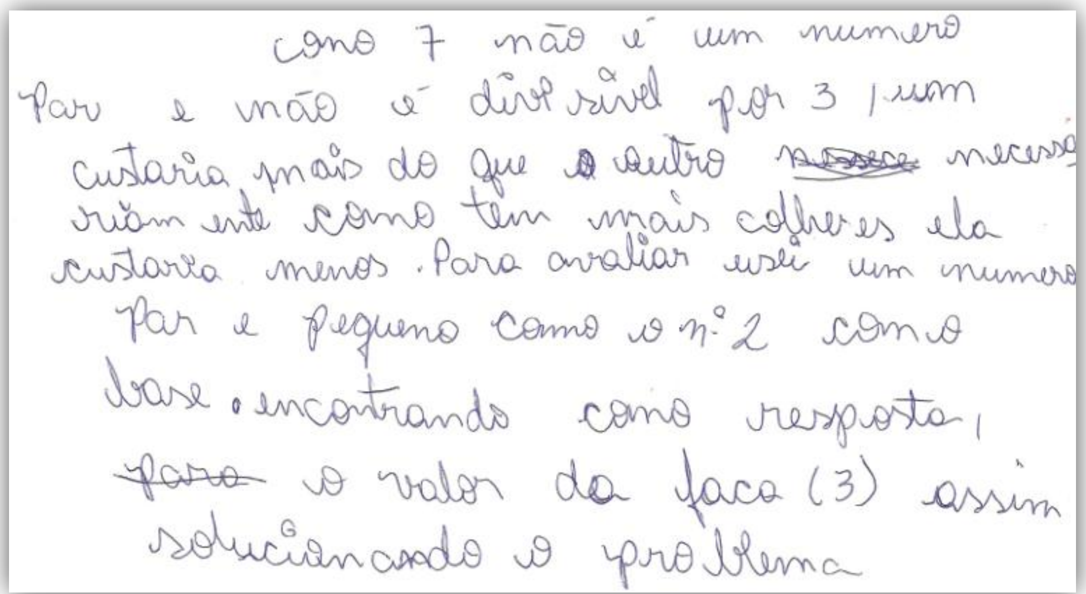


Figura 5: Protocolo da Dupla 2 referente à atividade da Sessão 1

Embora os alunos 2 e 3 registrem que “usaram” um número par e pequeno, o que seria uma escolha praticamente aleatória, a justificativa inicial mostra um raciocínio prévio, estimando que o valor da faca fosse menor por estar em maior quantidade. Mesmo que este raciocínio não seja pertinente matematicamente, o excerto revela que ocorreu uma análise por parte dos alunos e não apenas tentativas e erros aleatórios. Por este motivo, classificamos a estratégia utilizada como sendo a E_2.

É importante destacar que, de acordo com o que esperávamos como validação, os três alunos chegaram a validar, pois testaram os valores encontrados e perceberam que estes satisfaziam as condições do problema.

Durante o debate realizado, os alunos explicitaram novamente as estratégias utilizadas. A pesquisadora, como previsto na análise *a priori*, diante da identificação de que a estratégia de resolução via sistemas lineares não apareceu, explicou como poderia ser feita a modelagem do problema montando um sistema linear 2x2 e definindo os conceitos de “sistema linear”, “coeficiente” e “incógnita” na lousa.

Ao fazer a pergunta “O que teríamos que fazer para descobrir que o f vale 3 e o c vale 2, se não soubéssemos que eles possuem esses valores? Vocês conhecem alguma estratégia?”, o Aluno 3 afirma: “Eu lembro que tinha que somar...que era difícil...”. Isso mostra que pelo menos o Aluno 3 já teve contato com sistemas lineares 2x2 anteriormente. Os demais alunos não lembravam.

Em seguida, a pesquisadora pergunta “Se eu conseguisse uma estratégia para resolver isso, que valores eu teria que encontrar?”. Os alunos respondem “2 e 3”. A partir daí, a pesquisadora define o que é solução de um sistema linear.

Neste momento, acontece o diálogo abaixo e a pesquisadora encerra a primeira sessão:

> Aluno 3: E como a gente resolve um sistema?
> Pesquisadora: Bom, isso vai ser um processo que a gente vai construir...

Identificamos o diálogo acima como um momento de devolução que esperávamos que acontecesse durante as três primeiras atividades previstas.

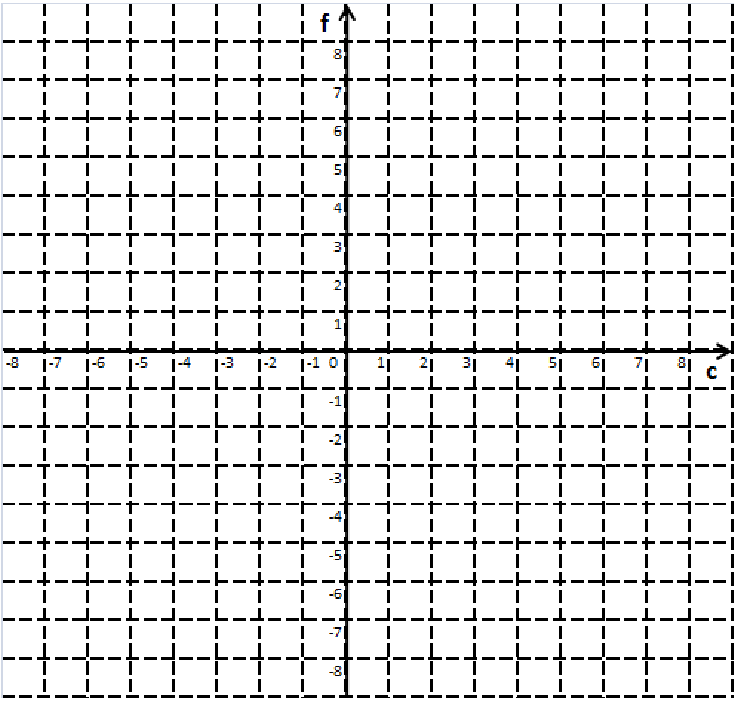
4.5.2. Sessões 2 e 3

Estas sessões foram realizadas nos dias 21 e 22 de outubro de 2010, tiveram a duração de 55 minutos no primeiro dia e 61 minutos no segundo, durante as quais foi aplicada uma única atividade, apresentada a seguir. Pelo fato de ser uma atividade longa, foram necessários dois encontros para realizá-la. No primeiro dia, compareceram nove alunos, dos quais seis são sujeitos de pesquisa. Na ocasião, os Alunos 5 e 6 formaram duplas com outros alunos. No segundo dia, compareceram seis alunos, dos quais cinco são sujeitos de pesquisa. Apenas o Aluno 2 faltou e seu parceiro, Aluno 1, terminou a atividade sozinho. Novamente os Alunos 5 e 6 formaram duplas com outros alunos.

Atividade: Vimos na atividade anterior que uma maneira de resolver o problema das facas e colheres seria montar um sistema linear e resolvê-lo. O sistema relativo ao problema é $\begin{cases} f + 2c = 7 \\ 2f + 5c = 16 \end{cases}$, onde f e c representam o preço de cada faca e cada colher, respectivamente.

Vimos também que a solução do problema são os valores f=R$ 3,00 e c=R$ 2,00.

Equações com duas variáveis podem ser representadas graficamente. Tal representação se faz, em geral, sobre um sistema constituído de duas retas graduadas e perpendiculares, como está ilustrado abaixo, também conhecido como plano cartesiano.



Para obter a representação gráfica da equação $f + 2c = 7$, construímos uma tabela atribuindo valores para uma das variáveis e calculando os valores correspondentes à outra variável. Assim obtemos vários pares ordenados. Cada um desses pares é uma solução da equação.

A respeito da tabela e do gráfico, cabem alguns comentários:

- Para cada par ordenado, obtido pelos dados da tabela, corresponde um ponto no gráfico.

- Há infinitos pares ordenados que satisfazem a equação.

- Portanto, o gráfico da equação tem infinitos pontos.

- Todos os pontos do gráfico ficam alinhados.

- O gráfico de uma equação do tipo ax+by=c em que a e b são diferentes de zero, é uma reta.

Você já deve ter percebido que para traçar uma reta bastam dois pontos. Então, para construir o gráfico da equação $f + 2c = 7$, basta uma tabela com duas linhas.

a. Considerando a equação $f + 2c = 7$, complete a tabela abaixo em que dois valores já foram dados. Note que a coluna da esquerda representa valores para a variável f e a coluna da direita representa valores para a variável c.

f	c
5	
	3

Marque no plano cartesiano desenhado anteriormente os pontos correspondentes aos pares ordenados da tabela que você preencheu e trace a reta que passa por esses dois pontos.

b. Vamos fazer o mesmo processo para a segunda equação do sistema, $2f + 5c = 16$. Considerando esta segunda equação, complete a tabela abaixo, em que dois valores já foram dados.

f	c
0,5	
	0

Marque no plano cartesiano desenhado anteriormente os pontos correspondentes aos pares ordenados da tabela que você preencheu e trace a reta que passa por esses dois pontos (as retas dos itens a e b devem ser desenhadas no mesmo plano cartesiano).

c. As duas retas que você desenhou se encontraram em algum ponto? Se sim, em qual?

d. Existe uma relação entre a resposta do problema das facas e colheres e o ponto de intersecção das duas retas no plano cartesiano. Você percebeu qual é? Explique.

e. Considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x + 2y = 8 \end{cases}$$

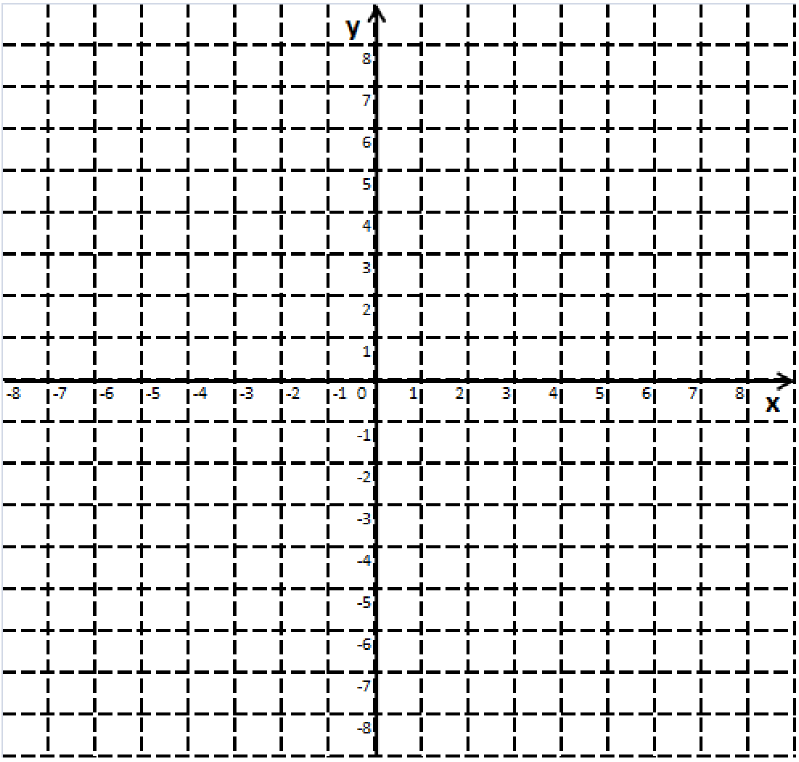
Mentalmente, tente encontrar uma solução deste sistema, ou seja, uma solução que satisfaça as duas equações que compõem o sistema.

f. Compare sua resposta com a resposta de seus colegas. O que você observou?

g. Preencha as tabelas a seguir, referentes às duas equações do sistema, e construa os gráficos de cada uma no plano cartesiano. Para isso, atribua um valor para uma das variáveis e encontre o valor da outra.

Equação: x+y=4	
x	y

Equação: 2x+2y=8	
x	y



h. As duas retas que você desenhou se encontraram em algum ponto? Se sim, em qual? Por que você acha que isso aconteceu?

i. Considere o sistema linear a seguir:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

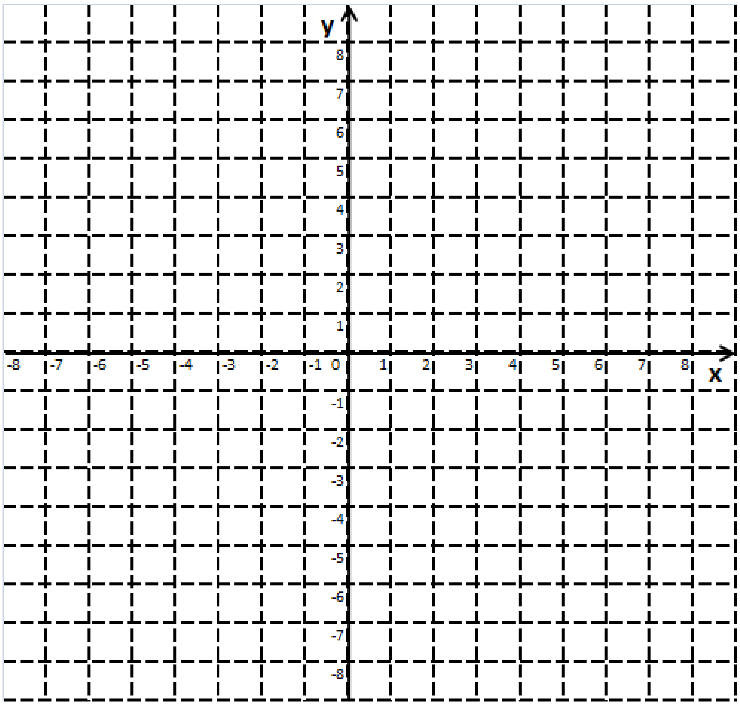
Mentalmente, tente encontrar uma solução deste sistema, ou seja, uma solução que satisfaça as duas equações que compõem o sistema.

j. Compare sua resposta com a resposta de seus colegas. O que você observou?

k. Preencha as tabelas a seguir, referentes às duas equações do sistema e construa os gráficos de cada uma no plano cartesiano. Para isso, atribua um valor para uma das variáveis e encontre o valor da outra.

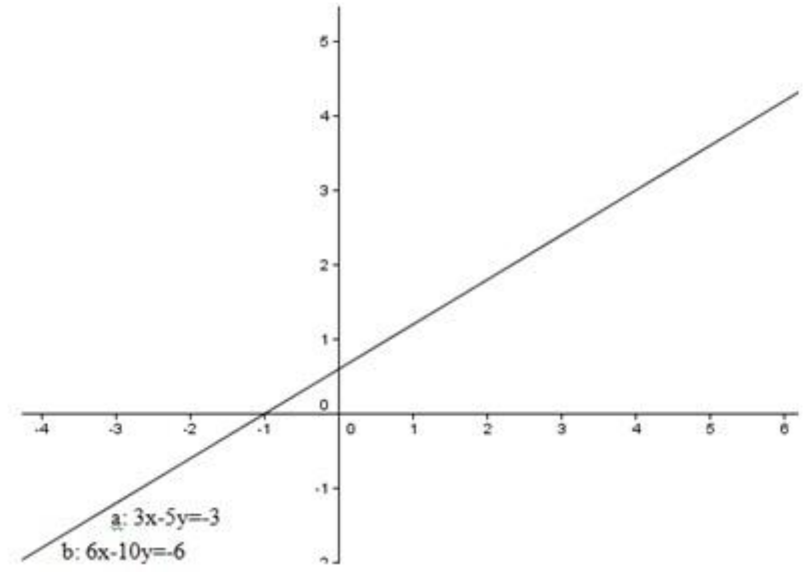
Equação: x+y=2	
x	y

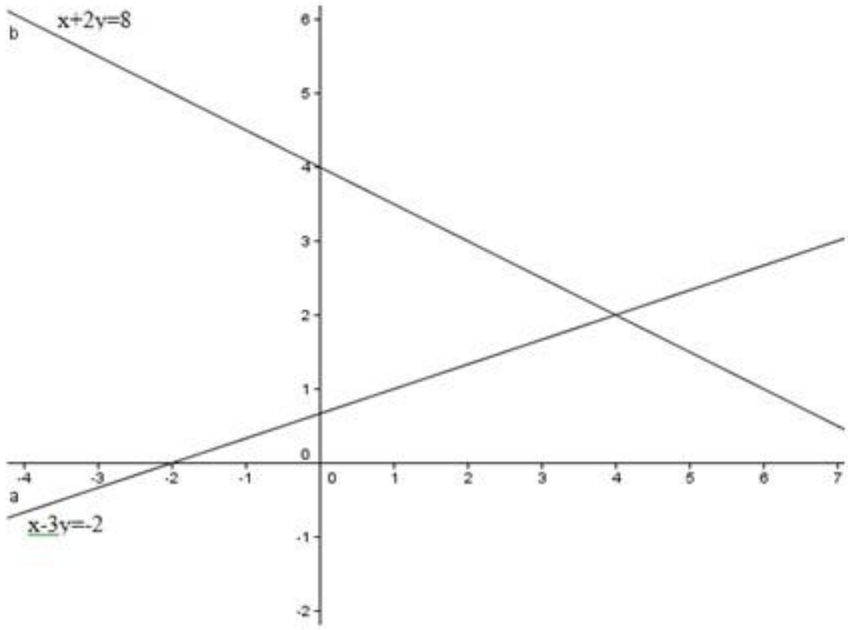
Equação: x+y=3	
x	y

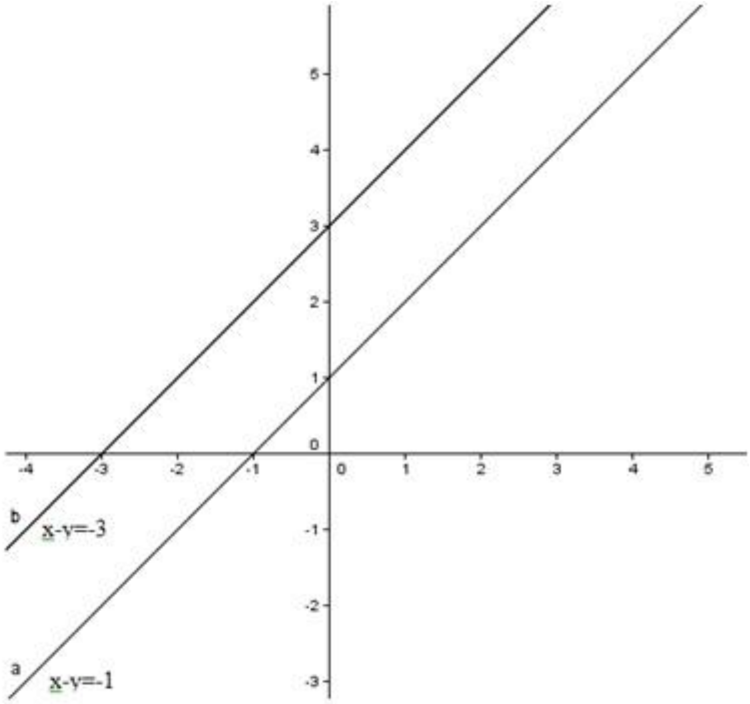


l. As duas retas que você desenhou se encontraram em algum ponto? Se sim, em qual? Por que você acha que isso aconteceu?

m. Os três gráficos a seguir representam, cada um, duas equações lineares que estão indicadas no desenho. Observe as representações gráficas dessas equações. Escreva o sistema linear que é formado pelas duas equações e tente encontrar sua solução observando o gráfico. Compare suas estratégias com as de seus colegas.


a: 3x-5y=-3
b: 6x-10y=-6


x+2y=8
b
a
x-3y=-2



n. Existe uma relação entre a posição relativa das retas que compõem o gráfico de um sistema linear e a quantidade de soluções que este sistema possui. Você percebeu qual é? Discuta com seus colegas e explique.

4.5.2.1. Análise *a priori*

Objetivo: O objetivo desta atividade é ~~a~~ favorecer a interpretação geométrica da solução de um sistema linear 2x2.

Como aponta Battaglioli (2008), há uma carência de atividades em livros didáticos que explorem a visualização geométrica de sistemas lineares. Por essa razão e também por sugestão da banca no momento da qualificação de mestrado, inserimos esta atividade, ainda que o objetivo principal da pesquisa seja a construção do processo do escalonamento. Dessa forma, acreditamos que o aluno teria mais subsídios para trabalhar com as situações que ainda seriam propostas.

Estratégias:

A resposta esperada para o item (a) é a construção da tabela com os pares ordenados (5,1) e (1,3). A seguir, espera-se que os pontos sejam marcados no plano cartesiano e que a reta seja traçada.

Uma possível dificuldade para esta resolução seria a troca de eixos no momento de identificação do ponto no plano cartesiano. O aluno poderia marcar o ponto (1,5) no lugar de (5,1), mostrando a inversão mencionada.

Caso isso aconteça, a pesquisadora poderia, no momento do debate, expor na lousa os gráficos diferentes que apareceram e questionar o motivo de tal distinção. Para isso, os alunos que fizeram cada desenho poderiam defender a resolução para os demais e tentar dizer por que a resolução do colega não está correta.

Pode ser também que os alunos não tenham tido nenhum contato ou não se recordem do que é um plano cartesiano e como se representa um ponto cujas coordenadas são conhecidas. Se nenhum aluno soubesse como esse processo é feito, a pesquisadora poderia mostrar na lousa, já que não se trata do conhecimento visado. Se algum aluno soubesse, a pesquisa poderia solicitar que ele explicasse aos demais.

Para o item (b), as respostas e dificuldades esperadas são análogas. A diferença estaria na presença de um número decimal e na possível dificuldade em realizar a multiplicação 2 x 0,5. Neste caso a pesquisadora poderá solicitar auxílio aos colegas que já tenham realizado a multiplicação.

Caso as representações tenham sido realizadas corretamente, espera-se que, no item (c) o aluno perceba o ponto de encontro com coordenadas (2,3). A explicação esperada no item (d) é a de que as coordenadas do ponto correspondem à solução encontrada anteriormente.

Esperamos que os alunos encontrem respostas diferentes para o item (e), como os pares (1,3), (0,4), (2,2), (-1, 5) ou qualquer par da forma (x, 4-x). Provavelmente terão dificuldades em aceitar a multiplicidade de respostas pelo obstáculo histórico e epistemológico identificado por Aumouloud e Bianchini (1996).

No item (f), espera-se que eles percebam as respostas distintas, mas talvez ainda não conjecturem que há infinitas respostas.

Talvez com o desenho do gráfico e com a superposição das retas eles percebam que elas possuem infinitos pontos de encontro e que, por isso, o sistema possui infinitas soluções, já que cada ponto de encontro corresponde a uma solução.

No item (i), pelo fato de, propositalmente, o sistema ser bastante simples, os alunos devem perceber que é impossível encontrar a solução do sistema, já que não existem dois números que, somados, resultem 2 e 3 simultaneamente. Entretanto, é possível que encontrem dificuldade para chegar a essa conclusão, pois, como já afirmamos, a partir da leitura de Almouloud e Bianchini (1996), os alunos podem fazer uma ligação entre o termo “resolva” e uma resposta numérica, preferencialmente, única. Assim, o fato de a resposta ser “não tem resposta” constitui uma quebra de contrato, já que os alunos, geralmente, não estão acostumados a lidar com questões desse tipo. Para amenizar este efeito, utilizamos o termo “tente encontrar uma solução para este sistema”.

Com a construção do gráfico, esperamos que fique mais clara a visualização de que não há respostas, já que as retas são paralelas e, por isso, não possuem ponto de encontro.

No item (m), esperamos que os alunos reinvistam as observações feitas nos outros itens, afirmando que no primeiro caso há infinitas soluções, já que as retas são coincidentes. No segundo caso há uma única solução, já que há apenas um ponto de encontro e, no terceiro caso, não há solução, pois as retas são paralelas.

A resposta esperada para o item (n) é a de que, no caso em que as retas são paralelas, o sistema não possui solução. Quando as retas são coincidentes, há infinitas soluções e, quando concorrentes, há uma solução única, correspondente ao ponto de encontro entre as ambas.

4.5.2.2. Análise *a posteriori* local

Na resolução dos itens (a) e (b), os alunos encontraram corretamente os valores das tabelas. A Dupla 1 cometeu um erro de cálculo que foi percebido quando confrontou sua resposta com a dos colegas.

Os alunos desenharam retas concorrentes no item (c), mas a imprecisão do desenho dificultou que identificassem corretamente o ponto de encontro, como vemos na figura a seguir.

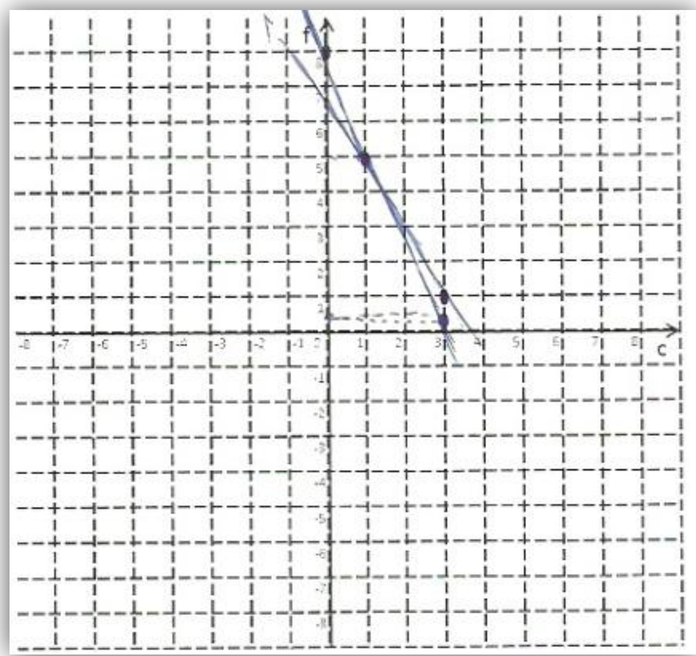


Figura 6: Gráfico encontrado pelo Aluno 6

O Aluno 6 conjecturou que o ponto de encontro seria 5 (ignorando o fato de haver duas coordenadas). Outros alunos conjecturaram outros pontos, mas nenhum respondeu que as retas se encontram no ponto (2,3).

Por não terem encontrado corretamente este ponto, eles não conseguiram perceber a relação esperada no item (d). A pesquisadora propôs que realizassem uma discussão coletiva e que um aluno fosse até a lousa desenhar as retas para que pudessem discutir e tentar encontrar a relação mencionada na atividade.

A Aluna 1 desenha as retas na lousa, explicando aos demais seu raciocínio para representar cada ponto no plano cartesiano. A pesquisadora questiona aos alunos porque razão os valores encontrados por eles foram diferentes. Os mesmos respondem que é porque as retas estão deformadas. Após algumas discussões, eles chegam à conclusão de que o ponto de encontro é aproximadamente o ponto de coordenadas (3,5).

Percebendo que os mesmos não conseguiam chegar à resposta correta, a pesquisadora pede para o Aluno 5 ler as informações a respeito da tabela e do gráfico presentes no enunciado da atividade. Em seguida, inicia-se um extenso diálogo, após a pesquisadora explicar aos alunos que cada reta representava o conjunto de soluções de uma equação.

> Pesquisadora: O que significa o ponto de encontro?
> Alunos: Onde as retas se cruzam.
> Pesquisadora: E o que isso tem a ver com a solução do sistema?
> (Os alunos não conseguem responder)

Pesquisadora: Vamos supor que eu tenha uma reta A e uma reta B (desenhando duas retas concorrentes em um plano cartesiano).
Pesquisadora: Esse ponto pertence a qual reta? (mostrando um ponto da reta A)
Alunos: A.
E esse?(mostrando um ponto da reta B)
Alunos: B.
E esse? (mostrando um ponto da reta B)
Alunos: B.
E esse? (mostrando um ponto da reta A)
Alunos: A
E esse? (mostrando o ponto de encontro das retas)
Alunos: A e B
Pesquisadora: Bom, o ponto de encontro. O que esse ponto de encontro tem a ver com a solução do sistema? Ele é solução da primeira ou da segunda equação?
Alunos: Das duas.
Pesquisadora: Por quê?
Alunos: Porque uma está passando sobre a outra.
Pesquisadora: A gente já não conhece a solução do sistema?
Alunos: Sim.
Pesquisadora: Qual é?
Alunos: 3 e 2.
Pesquisadora: Em que ponto as retas devem se encontrar?
Alunos: No 3 e no 2
Pesquisadora: Por quê?
Alunos: Porque é a solução do problema.
[...]
Alunos 4 e 5: O encontro das retas vai ser a resposta da questão!
Porque as duas respostas vão ser equivalentes.

Embora ao final da discussão os alunos tenham percebido que as retas devem se encontrar em um ponto que representa a solução das duas equações, não podemos deixar de destacar a grande interferência feita pela pesquisadora neste processo. O restante da atividade foi realizado na sessão seguinte.

No item e, duas respostas distintas apareceram, o par (2,2) e o par (1,3). Registramos um diálogo entre o Aluno 5 e sua dupla,no qual tentavam chegar em um acordo sobre os possíveis valores de x e de y.

Parceiro de A5: O x e o y valem 2.
Aluno 5: Eles podem ser 2 ou 4.
Parceiro de A5: Não, mas é 2. Não tem como não ser 2. É 2.
Aluno 5: Tem, tem como ser 3 mais 1.
Parceiro de A5: E aqui embaixo, meu amor, tem que ser x e y iguais. Duas vezes dois é igual a quatro. Mais duas vezes dois: quatro, e quatro mais quatro é oito!
Aluno 5: Aqui esse x pode ser 3 e aqui pode ser 1.
Aqui, duas vezes três: seis. Duas vezes um, dois. Seis mais dois: oito
Aluno 5: x é igual a y ou x é diferente de y. Eles podem ser diversos números. Pode ser qualquer número que dá quatro.
Parceiro de A5: Tá errado.
Aluno 5: Lógico que não.
Parceiro de A5: O x é que pode valer três e o y vale um.
Aluno 5: Não, você pode colocar qualquer um aí.
Um mais três é quatro. A ordem dos fatores...

> Parceiro de A5: Mas o x aqui, ó. É x. [...] O x que vale 3 e o y vale 1, na lógica, entendeu?
> Aluno 5: Não! O que isso tem a ver? Aqui é só pra você achar o valor. Você coloca qualquer número e soma pra dar quatro.
> Parceiro de A5: Ah, verdade! Deu certo a mesma coisa. Verdade!

Analisando o diálogo anterior, vemos como o Aluno 5 defende sua conjectura e apresenta provas para validá-la. Interpretamos que neste diálogo há momentos adidáticos de ação, formulação e validação. Ação quando os alunos operam os dados, formulação quando conjecturam que apenas uma resposta é a correta, ou então quando conjecturam que há diversas possibilidades e validação quando testam os valores e verificam que realmente há mais de uma resposta.

As outras duplas encontraram apenas uma resposta para o sistema, porém, ao compararem suas respostas com a dos colegas perceberam que havia mais de uma possibilidade. Há que se destacar, entretanto, que nenhuma dupla conjecturou que pudessem existir infinitas respostas.

No item (g), todas as duplas desenharam corretamente as retas e, no item (h), perceberam que há vários pontos de encontro. A seguir algumas respostas apresentadas.


Sim, o valor da reta é igual (infinitos pontos)

Figura 7: Resposta da Dupla 1 para o problema da Sessão 2


Sim, em toda a reta pois os valores são equi-valentes

Figura 8: Resposta da Dupla 2 para o problema da Sessão 2

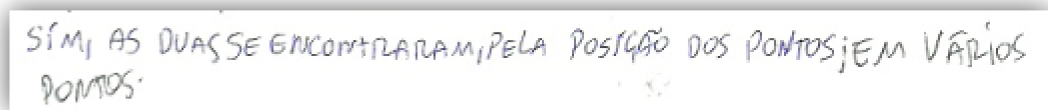

SÍM, AS DUAS SE ENCONTRARAM, PELA POSIÇÃO DOS PONTOS; EM VÁRIOS PONTOS.

Figura 9: Resposta do Aluno 6 para o problema da Sessão 2

Nas figuras anteriores, percebemos que, embora não tenham o conhecimento do vocabulário adequado, os alunos conseguem expressar a ideia de que as retas são coincidentes e, portanto, todos os pontos são pontos de encontro.

Algo semelhante acontece no item (i). Os alunos perceberam que o sistema não possuía resposta, mas além de não possuírem vocabulário adequado para expressar a situação, relutavam em aceitar que a resposta correta era “não tem resposta”.

> Aluno 3: Pra essa equação, não vai dar valor certo...apesar de ser as mesmas incógnitas cada uma tem resultado diferente.
> [...]
> Aluno 6: vai dar 1 e 2 a resposta, mas não satisfaz.
> [...] (Aluno 6 diz que não dá para achar resposta para este sistema. Aluno 5 concorda. Aluno 3 não concorda, diz que existe solução, mas quando a pesquisadora questiona se ele conseguiu achar qual é, ele diz que não).
> Pesquisadora: Vamos pensar assim: eu tenho dois números que estão somados dando 2. E eu tenho os mesmos dois números que somados estão dando 3. Quais são esses dois números?
> Alunos 3 e 5: São dois números que a gente não sabe qual é.
> (Eles ainda não conseguem achar a resposta)
> Aluno 5: Não vai satisfazer a segunda, só a primeira.
> (A pesquisadora questiona se haveriam dois números que satisfazem as duas ao mesmo tempo)
> Aluno 5: É isso que eu falo, por isso que eu acho que não dá.
> Pesquisadora: Por que você acha que não dá?
> Aluno 5: Porque os resultados são diferentes.
> Aluno 3: Esse sistema não pertence.
> Pesquisadora: Não pertence a quê?
> Aluno 3: Ah, não existe, sei lá.
> Aluno 5: É vazio.

A primeira frase do diálogo anterior mostra como o aluno não consegue aceitar que o sistema não possui resposta: ele afirma que “não satisfaz”, mas mesmo assim fornece uma resposta numérica para o problema. Este registro corrobora com as observações de Almouloud e Bianchini (1996, p. 217), quando estes afirmam que “é muito difícil para o aluno concluir que ele [o sistema] possa ser ‘impossível’, os alunos acreditam que devem encontrar uma resposta”.

Todos os alunos conseguem desenhar corretamente as retas paralelas do item (k), com exceção do Aluno 5, que percebeu seu erro durante o debate realizado, quando afirmou que havia “ligado a reta errada”.

No item (m), os alunos encontraram corretamente os sistemas lineares representados pelos pares de retas, mas se confundiram ao identificar a solução a partir dos gráficos. Todos os sujeitos de pesquisa afirmaram que no caso em que as retas são coincidentes, a solução do sistema linear seria o ponto de encontro de cada reta com os eixos do plano cartesiano. Segundo nossa interpretação, na aparente ausência da segunda reta para formar a posição de retas concorrentes, os alunos “substituem-na” pelos eixos coordenados, na tentativa de encontrar um ponto de encontro. Isto não aconteceu nos outros dois casos. No segundo gráfico, conseguiram encontrar os valores para x e y e, no terceiro, afirmaram que o sistema “não satisfazia” (sic). Apenas a Dupla 1 cometeu o mesmo erro registrado no primeiro gráfico.

Em relação ao item (n), os alunos da Dupla 2 conseguiram elaborar o seguinte esquema, colocado no quadro no momento do debate pelo Aluno 3.

Figura 10: Foto do quadro negro com resolução do Aluno 3

O Aluno 3 explicou aos demais que quando o sistema possui uma solução, as retas que o representam são concorrentes (ele não utilizou este termo, mas fez o desenho). Quando o sistema possui duas soluções, “mas que não satisfazem”, as retas são paralelas. Por fim, quando o sistema possui infinitas soluções, as retas são coincidentes.

Interpretamos que a afirmação “quando o sistema possui duas soluções” significa o caso em que são necessárias duas “soluções” distintas para satisfazer as duas equações do sistema, ou seja, quando não existem valores que satisfazem as equações ao mesmo tempo.

4.5.3. Sessão 4

A sessão 4 foi realizada no dia 27 de outubro de 2010, foi composta de uma atividade, durou 46 minutos e contou com a presença de apenas cinco alunos, todos sujeitos de pesquisa: Aluno 1, que realizou a atividade sozinho, Alunos 3 e 4, da Dupla 2, Aluno 5, que formou dupla com outro aluno, e Aluno 6, que realizou a atividade sozinho, pois o aluno com quem formava dupla não havia comparecido.

A seguir a atividade aplicada.

Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares. A quantidade de medalhas de cada escola, ao final da competição, é apresentada na tabela seguinte:

Escolas	Medalhas		
	Ouro	Prata	Bronze
A	4	2	2
B	5	3	1
C	4	3	3

Nesse torneio, a cada tipo de medalha foi atribuída uma quantidade de pontos e a escola vencedora seria aquela que obtivesse o maior número de pontos.

a. Se a medalha de ouro vale 3 pontos, a de prata vale 2 e a de bronze vale 1 ponto, quantos pontos a escola A obteve no final do torneio?

b. E a escola B?

c. E a escola C?

d. Se a medalha de ouro vale 5 pontos, a de prata vale 3 e a de bronze vale 1, quantos pontos a escola A obteve no final do torneio?

e. E a escola B?

f. E a escola C?

g. Agora, suponha que a quantidade de pontos que cada medalha vale não foi divulgada. Assim, como não conhecemos esses valores, podemos representar a quantidade de pontos que a medalha de ouro vale por x, a quantidade de pontos que a medalha de prata vale por y e a quantidade de pontos que a medalha de bronze vale por z. Monte uma expressão que represente a quantidade de pontos que a escola A obteve no torneio.

h. Faça o mesmo para a escola B

i. Faça o mesmo para a escola C.

j. Imagine que o quadro final de pontuação seja o seguinte:

Escolas	Medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Pontuação final
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53

Monte um sistema linear com a finalidade de descobrir quantos pontos valem as medalhas de ouro, prata e bronze.

Como você faria para resolver o sistema linear que você montou no item j?

Discuta a resposta do item (h) com seus colegas. Eles pensaram em estratégias diferentes da sua? Em caso afirmativo, quais?

4.5.3.1. Análise *a priori*

Objetivo: Definir sistemas lineares 3x3 e consolidar o processo de devolução do problema "como resolver um sistema linear".

Estratégias: Para os itens (a) a (f), basta que sejam efetuadas ~~realizadas~~ algumas operações aritméticas. A resposta correta de cada item é:

(a) 4.3+2.2+2.1=12+4+2=18

(b) 5.3+3.2+1.1=15+6+1=22

(c) 4.3+3.2+3.1=12+6+3=21

(d) 4.5+2.3+2.1=20+6+2=28

(e) 5.5+3.3+1.1=25+9+1=35

(f) 4.5+3.3+3.1=20+9+3=32

Para os itens (g), (h) e (i), é necessária a interpretação da tabela e a passagem para a linguagem algébrica, com o uso de variáveis. A resposta correta de cada item é:

(g) 4x+2y+2z

(h) 5x+3y+z

(i) 4x+3y+3z

No item (j), espera-se que as expressões dos três itens anteriores auxiliem a montagem do sistema linear $\begin{cases} 4x+2y+2z=46 \\ 5x+3y+z=57 \\ 4x+3y+3z=53 \end{cases}$. Acreditamos que os alunos encontrem ~~tenham~~ bastante dificuldade para responder os dois itens finais da atividade, que foram propostos exatamente com essa intenção, e que a única estratégia, se enunciada, seja Tentativa e Erro.

Variáveis Didáticas: V_1: Figura representativa da situação matemática: Nesta atividade não há a presença de uma figura que represente a situação matemática para que o aluno tenha que interpretar a tabela apresentada.

V_2: Ordem de grandeza do sistema linear: Neste caso, para dificultar o uso da estratégia de Tentativa e Erro, optamos por propor um problema que pudesse ser resolvido por meio de um sistema linear de ordem 3x3.

Planejamento: Os nove primeiros itens foram elaborados para auxiliar a interpretação da tabela apresentada. Espera-se que a estratégia Tentativa e Erro seja ineficaz na resolução do sistema linear e, diante disso, os alunos sintam a necessidade de conhecer um procedimento para resolver, de maneira rápida, situações deste tipo.

Caso os alunos sejam capazes de encontrar os valores com esta estratégia, a pesquisadora poderá apresentar um novo sistema com coeficientes e termos independentes maiores, para que, em determinado momento, os alunos não sejam capazes de encontrar os valores apenas por “chute”.

Validação: Embora o objetivo principal da atividade seja provocar a devolução de um problema, caracterizaremos como validação o caso de os alunos encontrarem a resposta e substituírem-na no sistema linear ou mesmo na tabela.

4.5.3.2. Análise *a posteriori* local

Os alunos foram capazes de responder corretamente os itens (a) a (i) sem apresentar grandes dificuldades. Também montaram corretamente o sistema linear. Entretanto, quando questionados sobre um possível método de resolução, eles afirmam não saber, como mostra o diálogo a seguir.

> Aluno 3: Me ajuda aqui professora. Explica como resolve ele (referindo-se ao sistema linear montado).
> Pesquisadora: Primeiro eu gostaria de saber se vocês conseguem resolver.
> Aluno 3: Consigo resolver, mas não com três variáveis. Vou colocar então que eu não sei.

A fala “consigo resolver, mas não com três variáveis” mostra que o aluno está diante de uma situação nova, com a qual não havia lidado anteriormente. Interpretamos, a partir do estudo da TSD, que o problema tenha provocado um desequilíbrio no aluno e que sua adaptação a essa nova situação possa produzir aprendizagem. Esta afirmação está baseada em Freitas (2008, p.78), quando o autor afirma que

> Brousseau desenvolveu um tratamento científico do trabalho didático tendo como base a problematização matemática e a hipótese de que se aprende por adaptação a um meio que produz contradições e desequilíbrios.

No momento do debate, os alunos afirmam que não conseguiram encontrar valores que satisfizessem as condições do problema. A pesquisadora tenta provocá-los.

> Pesquisadora: O que será que está faltando pra gente conseguir resolver isso aí?
> Aluno 3: Tá faltando a variável ser isolada. Uma variável.
> Pesquisadora: E será que a gente consegue pensar em alguma forma de fazer isso?
> Aluno 3: Se passar ela pro segundo membro....Tipo, passar o quatro....(pensando)...não, não dá certo.

As estratégias que conhecem mostram-se ineficazes. O diálogo a seguir registra um momento em que há a devolução do problema, como planejamos em nossa análise *a priori*.

> Pesquisadora: Bom, pessoal. A gente não está conseguindo resolver esse problema, certo?
> Aluno 3: Aham. Se você falar que não existe uma resposta pra ele....(o aluno mostra desconforto)
> Aluno 1: Ele vai ficar nervoso.
> Pesquisadora: O que será que está faltando?
> [...]
> Aluno 1: Conseguir entender como se isola uma variável, sendo que sobrará duas. Como isolar essas duas de forma que não afetará o 46.
> Pesquisadora: Então, são com coisas desse tipo que a gente vai trabalhar até o final, pra gente tentar conseguir resolver coisas desse tipo, com outras atividades.
> Aluno 3: Fala, agora fala.
> Pesquisadora: Falar o quê?
> Aluno 3: O que é pra fazer.
> Pesquisadora: A gente deveria resolver, mas vocês não conseguiram resolver. Então a gente vai ter que trabalhar pra passar por isso.
> [...]
> Aluno 1: Peraí, então quer dizer que essa daqui vai ficar parada até a gente conseguir entender essa pra fazer outra?

Entendemos que a angústia dos alunos em querer saber como se resolve o problema seja suficiente para afirmarmos que a devolução do problema "como resolver um sistema linear" aconteceu. Outros registros, como o seguinte, ajudam a comprovar esta afirmação.

> Pesquisadora: A gente poderia ficar aqui testando. Será que uma hora a gente vai achar a resposta?
> Aluno 3: Uma hora, daqui uns dois anos, a gente acha.
> Pesquisadora: Será que essa é a melhor estratégia?
> Aluno 1: Não, não é a melhor estratégia.
> Aluno 3: Então a senhora resolve esse daí. A senhora vai resolver esse aí?
> Pesquisadora: Não, eu não quero estragar o final do filme pra vocês. Eu quero que vocês consigam fazer. Mas vocês podem pensar na resposta desse. Tentar começar a pensar em estratégias. Amanhã a gente vai começar a trabalhar nas estratégias. Depois que a gente discutir, a gente pode voltar nesse sistema e ver se a estratégia que a gente construiu dá conta de resolver o problema, ok?
> Aluno 1: Já está na hora de ir? Eu queria saber o final do filme (risos).

4.6. BLOCO 2: OPERAÇÕES ELEMENTARES

O segundo bloco de nossa sequência didática contém três sessões, que chamaremos aqui, para seguir a sequência já iniciada, de Sessões 5, 6 e 7.

Cada sessão teve como objetivo principal trabalhar uma das três operações elementares que podem ser realizadas sobre um sistema linear para se obter a forma escalonada, a saber: troca de linhas, multiplicação de equação por escalar e soma de equações (ou combinação linear de equações). Cada uma dessas operações já foi detalhada no item **Erro! Fonte de referência não encontrada.** deste texto.

4.6.1. Sessão 5

A sessão 5 foi realizada no dia 28/10/2010, teve duas atividades, durou 34 minutos e contou com a presença de seis alunos, dos quais quatro são sujeitos de pesquisa: Alunos 1 e 2, da Dupla 1 e Alunos 3 e 4, da Dupla 2. Havia um gravador de áudio para cada dupla.

A seguir uma das duas atividades aplicadas.

a. Considere o sistema linear $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x - y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$. Os valores x=2, y=1, z=2 são solução deste sistema?

Considere, agora, o sistema linear $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 7 \\ x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$. O que ele tem de diferente do sistema anterior? Os valores x=2, y=1, z=2 são solução deste sistema?

b. Inverta a ordem em que as equações aparecem no sistema inicial e teste os valores dados, x=2, y=1, z=2, para outra posição diferente das já apresentadas. O que você observou?

c. Compare o sistema linear que você montou com o de seus colegas. As equações aparecem na mesma ordem? A conclusão de seus colegas foi diferente da sua? Em caso afirmativo, você concorda ou discorda dela? Por quê? Em caso negativo, por que você acha que as conclusões foram iguais?

d. Considere a afirmação “Inverter a ordem em que as equações aparecem em um sistema linear não altera sua solução”. Ela é verdadeira ou falsa? Por quê?

4.6.1.1. Análise *a priori*

Após a realização da quarta sessão, voltamos na análise *a priori* desta e fizemos uma alteração, por percebermos a angústia dos alunos na sessão anterior, ao esbarrarem em um problema cuja solução não foi encontrada, e para que eles não se desmotivassem pela demora em aprender como resolver um sistema linear. Assim, antes de realizar a atividade previamente planejada e anteriormente apresentada, um sistema já escalonado, a saber $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ \quad 3y+2z=9 \\ \qquad 4z=12 \end{cases}$, seria colocado no quadro e a pesquisadora indagaria se os alunos seriam capazes de resolvê-lo. Cabe ressaltar que, neste momento, ainda não seria definido o que é um sistema linear escalonado aos alunos.

Objetivos: Mostrar aos alunos que existem tipos de sistema cuja resolução é simples e trabalhar a primeira operação elementar que pode ser realizada sobre as equações de um sistema linear para transformá-lo num sistema linear equivalente: troca da ordem em que as equações aparecem.

Estratégias: Para resolver o sistema escalonado, prevemos duas estratégias:

E_1: Encontrar o valor de z=3 a partir da terceira equação do sistema. Em seguida substituir esse valor na segunda equação para encontrar y=1 e, por fim, substituir os valores de y e z na primeira equação para encontrar o valor x=4.

E_2: Tentativa e erro aleatória.

Por tratar-se de um sistema já escalonado, com coeficientes simples, acreditamos ser mais provável a ocorrência da primeira estratégia.

Para o item (a) da atividade aplicada, espera-se que os valores dados, x=2, y=1 e z=2, sejam substituídos nas equações que compõem o sistema linear para decidir se constituem ou não uma solução. A resposta correta é 'sim'. Espera-se, também, que a diferença na ordem em que as equações aparecem no sistema seja percebida.

Chamando a equação $2x+y+z=7$ de (1), a equação $x-y+z=3$ de (2) e $x-2y+2z=4$ de (3), duas posições já foram apresentadas na atividade. Chamaremos a posição inicial de (123) e a segunda posição apresentada de (213). Assim, para responder o item b, quatro posições ainda são possíveis: (132), (231), (312) e (321). Espera-se que eles percebam que os valores dados também são solução do sistema montado neste item.

Para o item (c), o esperado é que nem todos os sistemas apresentem as equações na mesma ordem, mas que a conclusão de que os valores são solução do sistema seja unânime.

No item (d), a resposta esperada é 'verdadeira'. A justificativa seria a validação da primeira operação elementar, que discutiremos adiante.

Variáveis: V_1: Figura representativa da situação matemática: Por tratar-se de uma operação de fácil visualização, acreditamos não ser necessário utilizar uma figura que represente a situação matemática para que os alunos visualizem que a inversão da ordem em que as equações aparecem em um sistema linear não altera sua solução.

Planejamento: Os itens (c) e (d) foram elaborados com a intenção de provocar a validação da primeira operação elementar. A pergunta referente à primeira operação é feita rapidamente por se tratar de uma operação de fácil visualização. As demais operações são trabalhadas com um número maior de atividades e perguntas.

Caso os alunos não concluam que a inversão de equações não altera a solução do sistema, a pesquisadora poderá requerer que eles testem para outras posições possíveis. É claro que os valores dados serão solução em todos os casos. Neste momento a interação entre os alunos será útil, caso alguns deles não tenham percebido a relação que está em jogo.

Acreditamos que a construção da atividade favorece o aparecimento de momentos adidáticos já que permite a retroação: o aluno pode testar os valores para várias posições sem que a pesquisadora lhe dê uma pronta. Caso tenha dúvida em relação à conjectura levantada, ele mesmo pode elaborar mais posições e fazer o teste, com a finalidade de defendê-la ou refutá-la.

Ao final da atividade e do debate, a pesquisadora deverá institucionalizar a primeira operação elementar que pode ser realizada sobre as equações de um sistema linear: trocar a ordem em que as equações aparecem em um sistema linear o transforma em um sistema linear equivalente.

Neste momento se fará necessário definir sistemas lineares equivalentes, que são aqueles que possuem o mesmo conjunto solução.

Validação: A validação nesta atividade acontece quando se percebe que, mesmo trocando a ordem em que as equações aparecem, os valores dados continuam sendo solução. Tal validação poderia ser feita testando os valores em todas as posições possíveis ou percebendo que, ao trocar a ordem, as equações permanecem as mesmas e, por isso, a solução não se altera.

4.6.1.2. Análise *a posteriori* local

A sessão iniciou-se com a pesquisadora colocando no quadro o sistema linear escalonado $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ \quad 3y + 2z = 9 \\ \qquad 4z = 12 \end{cases}$ e indagando aos alunos se eles seriam capazes de resolvê-lo.

Vale ressaltar que, nesta parte inicial, os alunos interagiram apenas oralmente. Não foi entregue nenhum papel para que realizassem os cálculos.

O diálogo a seguir mostra que os alunos resolveram o sistema proposto pela primeira estratégia elencada na análise *a priori*:

> Aluno 3 (respondendo se seria capaz de resolver o sistema proposto): Eu consigo..."z" é três.
> Pesquisadora: De onde você percebeu que o "z" pode ser 3?
> Aluno 3: Pela última, né, que é mais fácil.
> Aluno NP[11]: Primeiro você resolve a última [...] Aí você substitui na segunda.
> Pesquisadora: Como ficaria?
> Aluno NP: Três vezes "y" mais duas vezes três que é igual a nove.
> Aluno 4: Duas vezes três: seis. Passa o seis negativo, fica nove menos seis, fica três. Três "y" é igual a três. Aí passa o três dividindo, vai ficar "y" igual a três dividido por três, que é igual a um. Aí você substitui no y, vai ficar duas vezes um, vai ficar dois. Eu substituí o y e o z...vai ficar "x" mais duas vezes um menos três que é igual a três. Aí você faz a conta: duas vezes um, dois, menos três, um. Aí você passa negativo, aí "x" é igual a dois.
> Pesquisadora: Então vamos lá.
> Pesquisadora: x mais duas vezes um?(fazendo no quadro)
> Alunos: Dois.
> Pesquisadora: Dois menos três?
> Aluno 4: Um...menos um! Mais com menos dá menos. Aí passa positivo, vai ficar quatro.

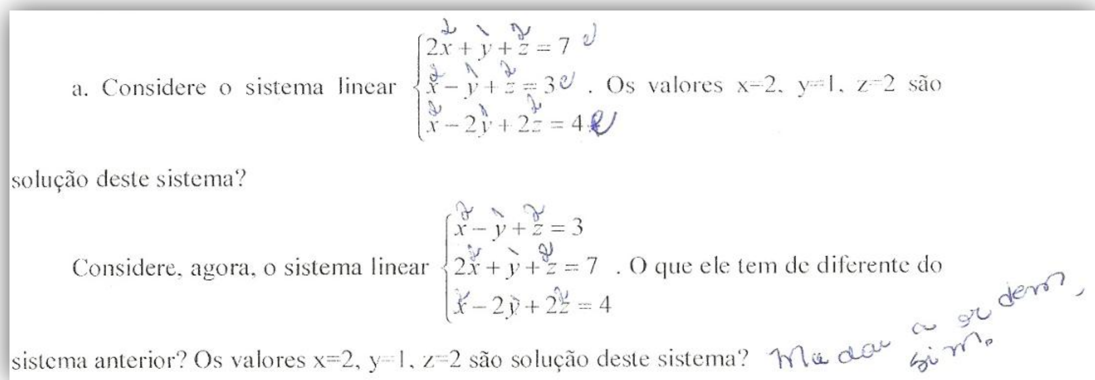
Neste trecho, o aluno comete um erro, talvez por estar fazendo os cálculos mentalmente. Entretanto, quando a pesquisadora coloca a expressão no quadro, ele corrige a resposta anterior e chega à conclusão de que o valor de x é quatro.

A pesquisadora faz uma comparação com o sistema da sessão anterior e o aluno 4 observa que o sistema resolvido na sessão 5 foi mais fácil porque já apresentava uma variável isolada. A partir dessa observação, podemos afirmar que o primeiro objetivo da sessão foi atingido, pois os alunos perceberam que existem tipos de sistemas que são de fácil resolução. A pesquisadora indaga se existe uma maneira de transformar um sistema qualquer em um sistema do tipo que foi apresentado na ocasião e os alunos não sabem responder ao certo. Ela então afirma que precisarão trabalhar mais para responder a essa questão e entrega a atividade.

Em relação ao item (a) da atividade, os quatro alunos sujeitos de pesquisa presentes na sessão verificaram que os valores dados eram solução dos dois sistemas e perceberam que a diferença entre ambos era a ordem em que as equações apareciam. Podemos verificar tal fato pelos extratos a seguir.

---

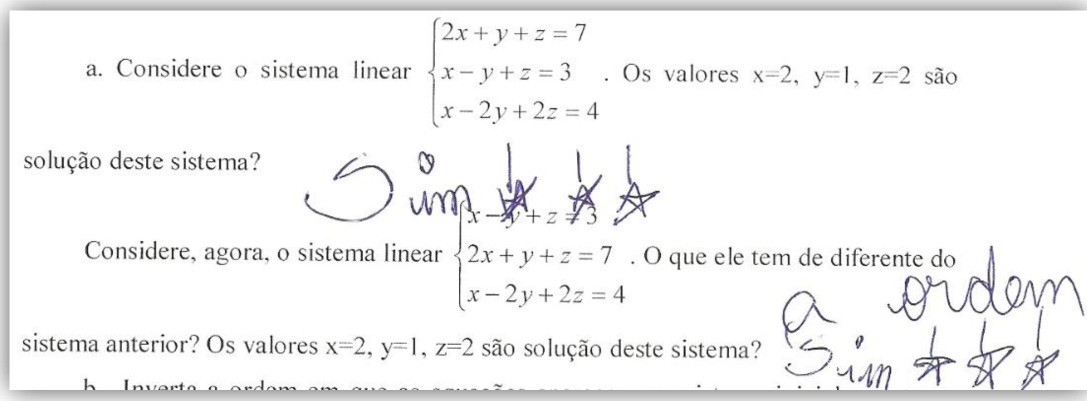
[11] O símbolo NP significa que o aluno é não-participante, ou seja, participou de algumas sessões, mas não é analisado como sujeito de pesquisa nem parceiro de um sujeito de pesquisa.



a. Considere o sistema linear $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x - y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$. Os valores x=2, y=1, z=2 são solução deste sistema?

Considere, agora, o sistema linear $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 7 \\ x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$. O que ele tem de diferente do sistema anterior? Os valores x=2, y=1, z=2 são solução deste sistema? Muda a ordem, sim.

Figura 11: Protocolo da Dupla 1, item a, sessão 5



a. Considere o sistema linear $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x - y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$. Os valores x=2, y=1, z=2 são solução deste sistema? Sim

Considere, agora, o sistema linear $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y + z = 7 \\ x - 2y + 2z = 4 \end{cases}$. O que ele tem de diferente do sistema anterior? a ordem Os valores x=2, y=1, z=2 são solução deste sistema? Sim

Figura 12: Protocolo da Dupla 2, item a, sessão 5

Na Figura 11, podemos ver que as alunas testaram os valores dados nos dois sistemas, pois acima das incógnitas "x", "y" e "z" aparecem os valores dados e, ao final de cada equação, há um símbolo de "certo". Por essa razão, interpretamos que eles passaram pelo momento de ação.

Os alunos perceberam com certa facilidade que, mesmo trocando a ordem em que as equações aparecem em um sistema linear, sua solução não se altera, mas ficaram um pouco confusos no momento da validação, como destacamos na Figura 13, em que o aluno afirma que "a ordem dos fatores não altera o produto", frase bastante utilizada nos anos iniciais do ensino fundamental quando se ensina que a multiplicação é uma operação comutativa.

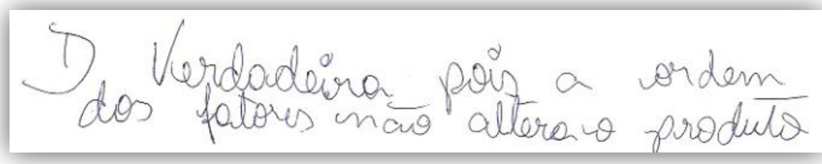

D) Verdadeira pois a ordem dos fatores não altera o produto

Figura 13: Protocolo da Dupla 2 – item d, sessão 5

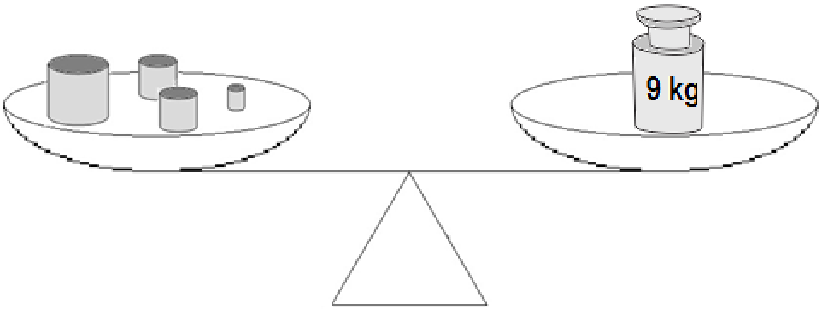
Embora o termo utilizado não seja o correto, acreditamos que os alunos tenham percebido que a inversão na ordem das equações não altera a solução. Portanto, consideramos que os alunos validaram a primeira operação elementar.

4.6.2. Sessão 6

A sessão 6 foi realizada no dia 03/11/2010, foi composta de duas atividades, durou 54 minutos e contou com a presença de nove alunos, dos quais cinco são os sujeitos de pesquisa: Alunos 1 e 2, da Dupla 1, Aluno 3, da Dupla 2 (que fez a atividade sozinho) e Alunos 5 e 6, da Dupla 3. Havia um gravador de áudio para cada dupla.

Apresentamos a seguir as atividades aplicadas, separadas por quadros.

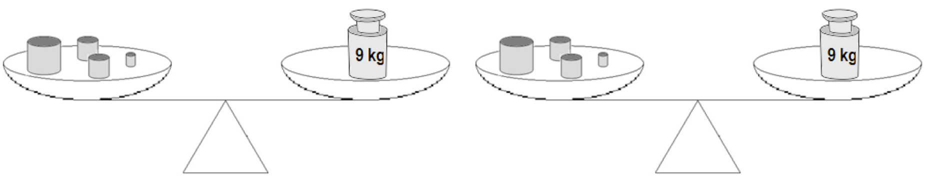
Atividade 1: Observe a balança abaixo:



Uma balança fica em equilíbrio quando o peso nos dois pratos é exatamente o mesmo. Na figura acima, cada tamanho de lata tem um peso diferente. Como a balança está em equilíbrio, sabemos que uma lata grande, duas médias e uma pequena pesam, juntas, 9 quilogramas.

a. Chamando o peso da lata maior de “x”, o peso de cada lata média de “y” e o peso da lata menor de “z”, monte um equação que represente essa situação.

b. Agora, imagine que temos duas dessas balanças:



Se juntarmos todas as latas no mesmo prato de uma das balanças e pesos no segundo prato dessa mesma balança, de modo que a outra fique completamente vazia, a balança que contém as latas e os pesos continuará em equilíbrio? Por quê?

c. Escreva uma equação que represente essa nova situação.

d. Compare os coeficientes da equação do item c com os coeficientes da equação do item a. Você notou alguma relação?

e. Se tivéssemos três dessas balanças e fizéssemos o mesmo processo anterior, a balança que contém todas as latas e todos os pesos continuaria em equilíbrio? Por quê?

f. Escreva uma equação que represente essa nova situação.

g. Compare os coeficientes da equação do item f com os coeficientes da equação do item a. Você notou alguma relação?

Atividade 2:

a. Considere o sistema linear $\begin{cases} 2x - 3y + z = 5 \\ -3x + 2y + z = -10 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$.

Uma solução para este sistema é tomar os valores x=3, y=0 e z=-1.

Multiplique a terceira equação por um número qualquer e a substitua pela que você encontrou. Os valores dados também são solução deste novo sistema, em que as duas primeiras equações são as mesmas e a terceira aparece multiplicada pelo número que você escolheu?

b. Compare sua solução com a de seus colegas. Eles multiplicaram a equação pelo mesmo número? A conclusão a que chegaram foi a mesma que a sua? Se sim, por que você acha que isso aconteceu? Se não, você concorda com a conclusão a que chegaram? Por quê?

c. Considere a afirmação "Multiplicar uma das equações de um sistema linear por um número qualquer não altera sua solução". Ela é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta.

4.6.2.1. Análise *a priori*

Objetivos: O objetivo desta sessão é trabalhar a segunda operação elementar que pode ser realizada sobre as equações de um sistema linear: multiplicação de equação por escalar. Na primeira atividade, a intenção é a de que os alunos construam a ideia de que o processo de se adicionar balanças iguais, se mantido indefinidamente, sempre resultará em uma balança em equilíbrio. Na segunda atividade, esse processo é abstraído e o esperado é que aconteça a validação da segunda operação elementar.

Estratégias: Na primeira atividade, a resposta esperada para o item (a) é a equação $x+2y+z=9$. Para o item (b) espera-se como resposta "sim", com a justificativa de que foram adicionados pesos iguais aos dois pratos da balança. A resposta correta do item (c) é a equação $2x+4y+2z=18$. No item d, uma resposta possível é dizer que os coeficientes apareceram duplicados. Outra resposta seria afirmar que os coeficientes são maiores, mostrando, neste caso, que a relação de proporcionalidade não foi percebida.

No item (d) a intenção é que se perceba que este processo pode ser generalizado, como se fosse realizado indefinidamente e que o equilíbrio sempre será mantido, desde que sejam adicionados pesos iguais a ambos os pratos da balança.

A equação esperada para o item f é $3x+6y+3z=27$. No item g, de maneira semelhante ao observado no item d, espera-se que o fato de que os coeficientes se apresentam multiplicados por três seja identificado e que isto se refere ao fato de termos considerado três balanças.

Na segunda atividade, espera-se que os dados sejam operados da maneira requerida e que concluam que os valores dados também são uma solução do sistema apresentado.

No item b, os alunos poderão iniciar o processo de formulação ao perceberem que, mesmo que os colegas tenham multiplicado a equação por números distintos, os valores dados permaneceram solução do sistema.

É provável que aconteça a validação da segunda operação elementar no item c. Aqui, o ideal seria que os alunos fizessem referência à atividade anterior, das balanças, e a utilizasse para validar a afirmação feita, pois ao multiplicarmos uma equação por um número, estaríamos fazendo um processo semelhante ao realizado na balança. Assim, a igualdade continua com os mesmos "pesos", ou seja, com os mesmos valores para as incógnitas e, portanto, com a mesma solução.

Variáveis: V_1: Figura representativa da situação matemática: Na primeira atividade há a presença de figura, enquanto que na segunda, não. A seguir apresentamos uma justificativa pela escolha do uso de balanças em equilíbrio para representar equações.

Quando começamos a elaborar a sequência didática, a ideia da atividade que procurava validar a primeira operação elementar surgiu relativamente rápido. Entretanto, tivemos dificuldade para elaborar atividades que abrangessem as outras duas operações, por não serem de tão fácil visualização.

Na busca de recursos que nos auxiliassem, optamos por trabalhar com a metáfora da balança para representar equações. Segundo Aspectos[12] (p.1), "a metáfora é uma característica básica da comunicação humana. Torna as pessoas capazes de lidar com experiências novas [...] procurando compreender uma ideia nova". Como exemplos de metáforas, o texto traz: uma função como uma máquina, uma equação como uma balança, números primos como cores primárias. Dentre as vantagens da utilidade deste recurso, vale destacar que, segundo o texto, ele torna possível que outros conceitos sejam sistematicamente relacionados com coisas já compreendidas, o que poderíamos relacionar com o uso das balanças para introdução do conteúdo de equações.

Não podemos deixar de mencionar, entretanto, as desvantagens desse uso. Dentre elas, estariam o desvio ou distorção da percepção e o fato de que algumas metáforas elementares não são aplicadas em conceitos mais avançados (tratar de coeficientes negativos e racionais, por exemplo, ficaria inviável se utilizarmos as balanças).

Ainda assim optamos por este recurso dada sua potencialidade para levar o aluno a ter a ideia de que a igualdade permanece desde que sejam realizadas as mesmas operações em ambos os membros da equação.

Planejamento: A primeira atividade desta sessão foi elaborada com o auxílio do recurso das balanças para mostrar a relação entre o equilíbrio e a igualdade. Também utilizamos este recurso com o objetivo de que os alunos percebessem que o equilíbrio só se mantém se forem adicionados pesos iguais a ambos os pratos da balança. Analogamente, a igualdade numa equação só se mantém se forem realizadas as mesmas operações em ambos os membros da mesma.

A segunda atividade dá continuidade ao trabalho com a segunda operação elementar, porém sem o auxílio do recurso das balanças. Nela, ao pedir que o aluno multiplique uma equação por um número qualquer, esse número não precisa ser, necessariamente, natural. Caso nenhum aluno escolha um número não natural, a pesquisadora deverá instigar que testem outros valores: negativos ou racionais.

---

[12] Texto de autoria de Juliana Cervelati e Cláudia Rodrigues de Andrade, disponível em < http://www.cempem.fae.unicamp.br/lapemmec/cursos/el654/2001/juliana_e_claudia/Didatica_Matematica.htm>, acesso em 25/10/2010.

Validação: A validação da segunda operação elementar pode acontecer durante a realização da segunda atividade desta sessão, sendo a primeira atividade uma espécie de "escada" para que o aluno chegue à conclusão esperada, em um segundo momento. Para isso, os alunos podem recorrer à primeira atividade e fazer uma analogia entre as balanças e as equações.

4.6.2.2. Análise *a posteriori* local

Percebendo o baixo índice de frequência nas sessões já realizadas, a pesquisadora decidiu, neste dia em que a sexta sessão foi realizada, em ir mais cedo à escola e conversar com os alunos que já haviam participado da experimentação da pesquisa. Nessa conversa informal, ela pediu que os alunos que tivessem reais intenções de participar da experimentação até o final comparecessem para que fossem formadas as duplas que permaneceriam fixas durante o trabalho ainda a ser realizado.

A pesquisadora também conversou com o professor de matemática das turmas e pediu apoio no incentivo à participação. Sentimos o efeito que ambas as conversas surtiram, que pode ser observado pelo gráfico de frequência da Figura 14.

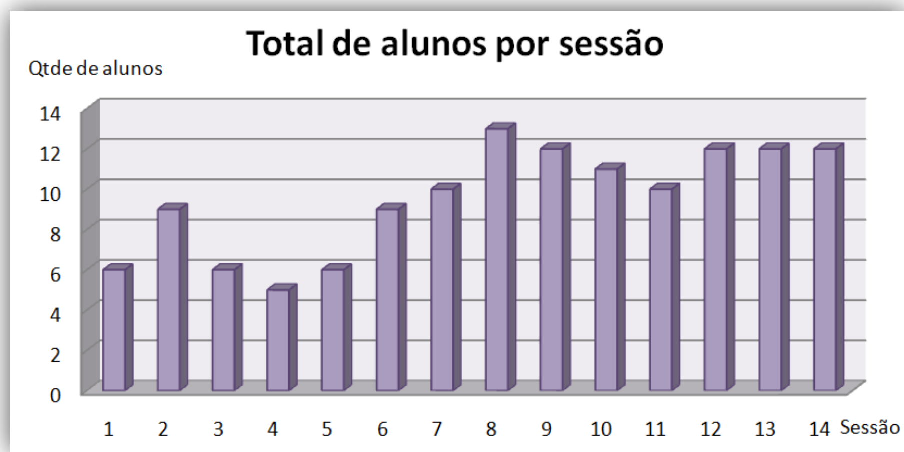


Figura 14: Gráfico da quantidade de alunos presentes por sessão

A partir da sexta sessão, percebemos um aumento gradativo do número de alunos participantes e, ao final da experimentação, uma estabilidade nessa quantia. Dessa forma, a sessão 6 teve início com a formação, agora fixada, da terceira dupla que é formada por sujeitos desta pesquisa: Aluno 5 e Aluno 6.

Em relação à atividade aplicada, os cinco sujeitos da pesquisa presentes nessa sessão responderam corretamente o item a. A Dupla 1 e o Aluno 3 o fizeram sem rasuras no papel. Uma interação entre os alunos da Dupla 3 foi registrada e julgamos relevante mencionar neste texto, pois mostra a diferença que fez a opção por dispor os alunos em duplas.

O Aluno 6, da Dupla 3, chegou atrasado na sessão, como aconteceu em alguns outros momentos, pois ele também participava de um ensaio de uma peça teatral que seria apresentada na escola na Feira de Ciências. Assim, quando este chegou à sala onde a experimentação estava sendo realizada, seu companheiro, o Aluno 5, já havia iniciado a resolução da atividade, e apresentava dificuldades, como podemos ver no extrato a seguir.

> Pesquisadora: Você tem que montar uma equação que represente essa situação.
> Aluno 5: Tipo, x+y+z=0? É?
> Pesquisadora: Então, coloca o que você acha e depois discutiremos com o pessoal, porque eu não posso ficar falando a resposta.
> Teve uma atividade que vocês tiveram que montar um sistema...aquela das medalhas...Vocês também tinham que montar equações. Agora você tem que tentar montar uma pra essa situação.
> Aluno 5: Ah tá.

Mesmo com a referência feita pela pesquisadora a uma atividade já realizada, o aluno não conseguia montar a expressão. O registro escrito a seguir mostra as várias tentativas feitas por ele.

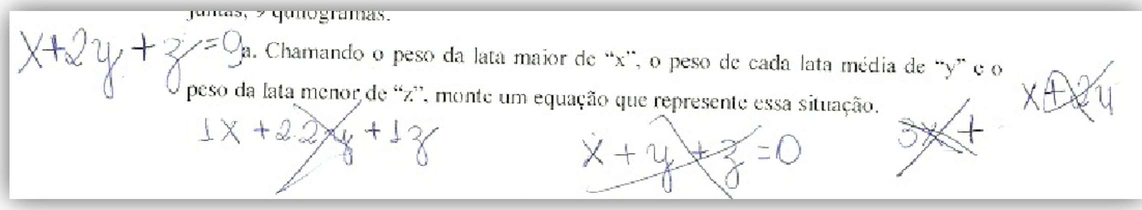


Figura 15: Protocolo da Dupla 2 - Atividade 1 - Item a - Sessão 6

Podemos notar a resposta correta no canto superior esquerdo da Figura 15, provavelmente redigida após o diálogo a seguir, que aconteceu após a chegada do segundo integrante da dupla, Aluno 6.

> Aluno 5: Esse aí eu não sei...tem que montar um sistema tipo aquele da medalha, lembra?
> Aluno 6: Aham.
> Aluno 5: Ó, tipo, eu acho que é assim: o cubo maior é o x, o cubo médio é o y...que são dois cubos, então 2 vezes o y, mais z, que é o único cubo menor.
> Aluno 6: E que é igual a quanto?
> Aluno 5: A zero, porque a gente não sabe o valor.
> Aluno 6: Não é isso aqui? A nove? Tudo isso aqui e isso aqui não é igual a isso aqui?
> Aluno 5: Ah, é verdade, Aluno 6, raciocinou!

O diálogo também revela que os alunos fizeram a relação enunciada em nossa análise *a priori* entre o equilíbrio na balança e a igualdade nas equações.

Os alunos apresentaram bastante dificuldade em interpretar os enunciados das atividades desta e da sessão seguinte, talvez por apresentarem frases longas. Por essa razão, a pesquisadora foi bastante solicitada para explicar o procedimento que estava sendo pedido em cada item.

Os cinco alunos responderam que a balança permanecerá em equilíbrio no item (b), com justificativas parecidas com a da Figura 16.


Vai continuar em equilibrio pois os lados e peses corresponde aõs mesmo então cada lado ficaró com 18 quilograma

Figura 16: Protocolo da Dupla 3 - Atividade 1 - Item b - Sessão 6

Todos colocaram a equação correta no item (c), mas as respostas do item (d) foram diferentes. Os Alunos 3, 5 e 6 observaram que os coeficientes estavam duplicados, mas os alunos 1 e 2 apenas observaram que eles eram maiores.

Como previsto em nossa análise *a priori*, interpretamos que a segunda resposta pode ter sido dada desta forma pelo fato de os alunos não terem se atentado na relação de proporcionalidade existente entre as duas equações em questão. O mesmo aconteceu para os itens “e”, “f” e “g”.

A atividade 1, por ser mais uma fase preparatória para a atividade 2, não promoveu momentos de ação, formulação e validação, até porque não tinha esse objetivo. Já na atividade 2, registramos alguns momentos adidáticos que apresenta~~re~~mos a seguir, ao longo da descrição das respostas para cada item.

No item (a), a Dupla 1 multiplicou a equação por 3, o Aluno 3 multiplicou por 4 e a Dupla 3 por 2. Todos substituíram os valores dados na nova equação e perceberam que estes eram solução.

As respostas para os itens (b) e (c) foram um pouco confusas. No momento do debate, conseguimos registrar a formulação dos alunos de que a afirmação do item (c) era verdadeira, mas eles não conseguiram chegar à fase de validação.

> Pesquisadora: Como ficou o sistema? Foi solução?
> (Em todos os casos foi solução)
> Pesquisadora: Ao comparar as respostas com a de seus colegas, as equações foram multiplicadas?
> Alunos: Não.

> (Ao ler o enunciado do item c, o Aluno 3 diz que acha que vai ser solução dependendo do número que escolher...)
> Pesquisadora: O que vocês acham?
> (Os alunos concordam)
> Pesquisadora: Vamos testar para outro número?
> (O número escolhido é o 9...eles testam e vêem que dá certo)
> Aluno 5: Eu acho que com qualquer número bate.
> Aluno 1: Então vale pra qualquer número inteiro.
> Pesquisadora: Vamos testar para um número decimal então?
> (Testam para o 3,5 e vêem que dá certo)
> (Os alunos começam a desconfiar que sempre dará certo. O aluno 5 já defende que sempre dará)
> Pesquisadora: Se concordarmos que sempre dará certo, temos que achar um motivo pra isso.
> Vocês conseguem fazer uma justificativa do porquê sempre dará certo?
> Aluno 5: Porque qualquer número vai bater. Explicação tem, mas a gente não sabe.

O extrato anterior foi registrado após os alunos terem revelado suas respostas para o item (a). O Aluno 3, quando realizou a atividade, afirmou que a frase do item (c) era falsa, como vemos em seu protocolo.

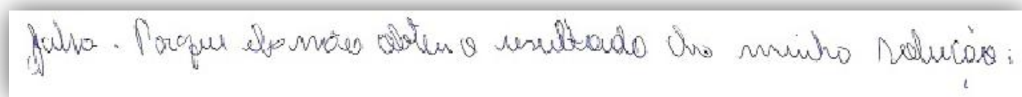

Falso. Porque depois não obtem o resultado da minha solução:

Figura 17: Protocolo do Aluno 3 - Atividade 2 - Item c - Sessão 6

Após os colegas manifestarem que haviam realizado a multiplicação por outros números, ele refuta sua resposta anterior e conjectura que dará certo dependendo dos valores escolhidos. Interpretamos que neste momento o aluno passou por um momento de formulação, ainda que sua conjectura estivesse incorreta.

Prosseguindo com a análise do extrato, vemos que outras conjecturas são levantadas, como em "Então vale pra qualquer número inteiro". A pesquisadora, então, propõe que testem para um número decimal. Ao constatarem que os valores novamente foram solução, os alunos desconfiam de que sempre dará certo, mas não conseguem elaborar uma justificativa nem fazem referência à atividade anterior, das balanças.

Embora este momento tenha sido didático, pois foi a pesquisadora quem gerenciou a situação, acreditamos que, no momento em que conjecturaram, os alunos passaram por momentos de formulação, considerado adidático. No momento em que operaram com os dados, passaram por momentos de ação, pois a própria atividade fornecia a possibilidade de retroação aos alunos de que os valores testados eram solução do sistema.

Ao final da sessão, a pesquisadora institucionalizou a segunda operação elementar e explicou a relação que esperava que os alunos vissem entre as balanças e as equações.

Parte da situação, que estava planejada para ser adidática tornou-se, portanto, didática e podemos dizer que não ocorreu tudo o que esperávamos na análise *a priori* nesta sessão, pois os alunos não passaram pelo momento de validação.

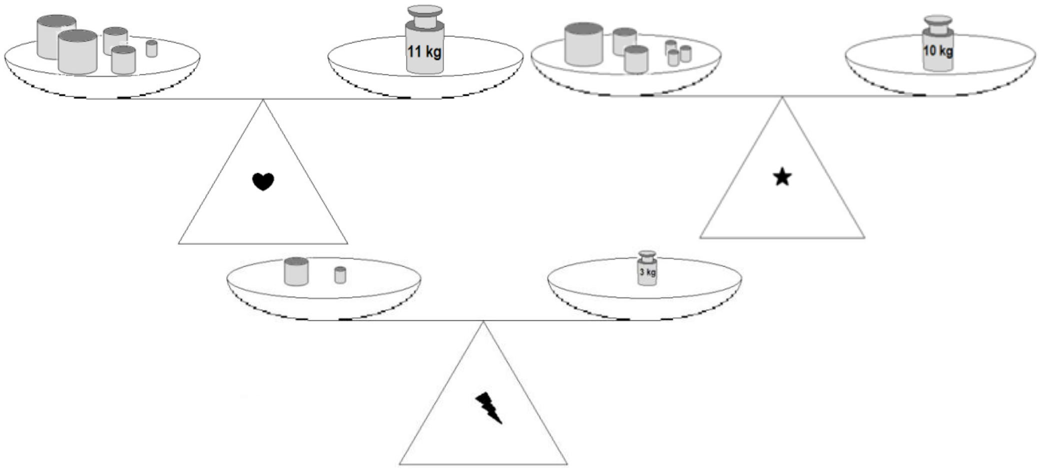
4.6.3. Sessão 7

A sessão 7 foi realizada no dia 04/11/2010, na qual foi aplicada uma atividade, que durou 55 minutos e contou com a presença de dez alunos, dos quais cinco são sujeitos de pesquisa: Alunos 1 e 2, da Dupla 1, Aluno 4, da Dupla 2 (que fez a atividade sozinho) e Alunos 5 e 6, da Dupla 3. Havia um gravador de áudio para cada dupla.

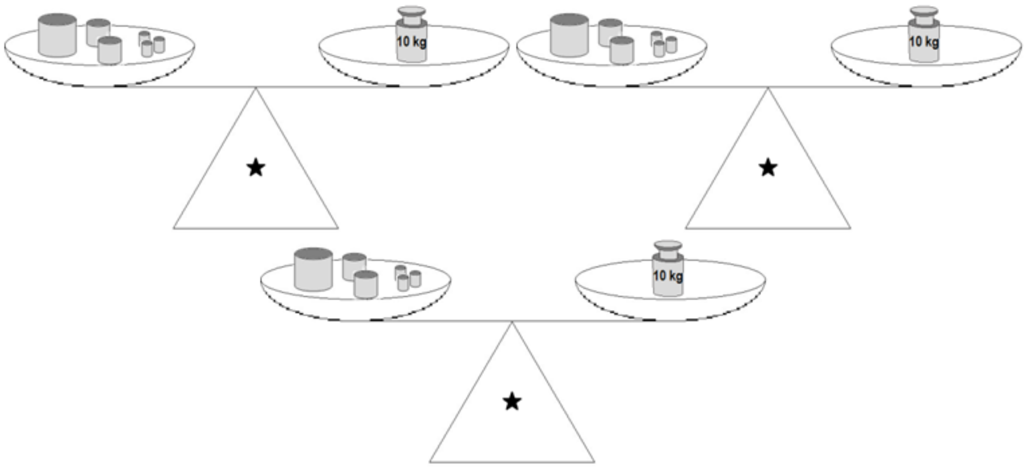
A seguir a atividade aplicada.

Observe o sistema $\begin{cases} 2x + 2y + z = 11 \\ x + 2y + 3z = 10 \\ \quad\quad y + z = 3 \end{cases}$.

Ele pode ser representado pela situação abaixo:



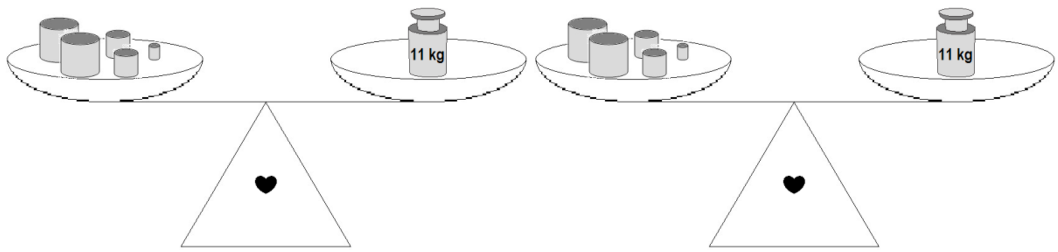
a. Imagine que tenhamos três balanças iguais à balança “estrela”, como mostra a figura a seguir:



Se juntarmos todas as latas no primeiro prato de uma das balanças e os pesos no segundo prato dessa mesma balança, de modo que as outras duas balanças fiquem completamente vazias, a balança que contém as latas e os pesos continuará em equilíbrio? Por quê? Escreva uma expressão que represente essa situação.

b. Compare os coeficientes da equação que você escreveu no item (a) com os coeficientes da segunda equação do sistema, que corresponde à segunda balança do desenho. O que você percebeu?

c. Imagine que tenhamos duas balanças iguais à balança “coração”:



Se juntarmos todas as latas no primeiro prato de uma das balanças e os pesos no segundo prato dessa mesma balança, de modo que a outra balança fique completamente vazia, a balança que contém as latas e os pesos continuará em equilíbrio? Escreva uma expressão que represente essa situação.

d. Até agora você tem duas novas balanças, uma que corresponde a três balanças iguais à balança “estrela” e outra que corresponde a duas balanças iguais à balança “coração”. Se realizarmos o mesmo processo anterior, ou seja, se juntarmos todas as incógnitas no primeiro prato de uma das balanças e os números no segundo prato dessa mesma balança, de modo que a outra balança fique completamente vazia, a balança que contém os pesos e as latas continuará em equilíbrio? Escreva uma expressão que represente essa situação.

e. Que operações você realizou sobre as equações $2x+2y+z=11$ e $x+2y+3z=10$ para encontrar a equação do item (d)?

f. A solução do sistema desta atividade, $\begin{cases} 2x+2y+z=11 \\ x+2y+3z=10 \\ y+z=3 \end{cases}$, é x=3, y=2, z=1, ou seja, esses valores constituem a solução das três equações do sistema. Verifique se esses valores também constituem uma solução da equação do item (d).

g. Considere o sistema $\begin{cases} 2x+2y+z=11 \\ x+2y+3z=10 \\ \text{.........................} \end{cases}$, onde a primeira e a segunda equações são as mesmas do sistema anterior e a equação que está faltando é a equação que você montou no item (d). Verifique se a solução do sistema inicial, x=3, y=2, z=1, é também solução deste sistema. Por que você acha que isso aconteceu?

4.6.3.1. Análise *a priori*

A análise *a priori* desta atividade é bastante parecida com a da atividade anterior. Por essa razão, omitiremos as justificativas semelhantes para não nos tornarmos repetitivos.

Objetivos: O objetivo dessa atividade é trabalhar a terceira operação elementar que pode ser realizada sobre as equações de um sistema linear com a finalidade de escrevê-lo na forma escalonada: combinação linear de equações.

Estratégias: Nos primeiros itens desta atividade, não há muitas estratégias para elencarmos, pois as questões são mais diretas e fechadas. A resposta correta para o item (a) é a equação $3x+6y+3z=30$.

Para o item (b), pensamos em duas respostas possíveis: dizer que os coeficientes triplicaram ou dizer apenas que aumentaram, não percebendo, portanto, a relação de proporcionalidade existente entre os coeficientes das equações. Entretanto, por ~~pelo~~ existir algo semelhante na sessão anterior, acreditamos que a primeira resposta seja a mais provável de aparecer.

A equação esperada para o item (c) é $4x+4y+2z=22$ e para o item (d) é $7x+10y+5z=52$, as operações realizadas sobre as equações foram multiplicação e adição. Em todos os casos as balanças permanecerão em equilíbrio.

Para o item (f) espera-se que os valores dados sejam testados e que se perceba que eles são a solução da equação do item (d). Já no item (g), espera-se que aconteça a validação da terceira operação elementar fazendo-se a relação entre o equilíbrio das balanças e as operações realizadas sobre as equações.

Variáveis: Nesta atividade, havia figura representativa da situação matemática. Portanto, das quatro atividades do Bloco 2, duas tiveram figura representativa da situação matemática e duas não. Acreditamos que a presença da figura, por tratar-se do recurso das balanças, pode influenciar diretamente as estratégias adotadas principalmente a validação da segunda e terceira operações elementares.

Planejamento: A elaboração desta atividade deu-se no mesmo sentido da sessão anterior, com algumas modificações. Ao final da atividade, não fizemos uma afirmação e não perguntamos aos alunos se esta seria verdadeira ou falsa, pois gostaríamos que a conjectura partisse deles. Devido ao provável contato com uma situação semelhante há pouco tempo, imaginamos que seria mais fácil essa manifestação acontecer.

A justificativa pelo uso das balanças torna-se mais forte nesta sessão, pois julgamos que a terceira operação elementar seja a de visualização menos direta. Ao longo dos itens, as balanças podem ser manipuladas de forma análoga a uma combinação linear entre duas equações de um sistema linear.

Validação: A validação da terceira operação elementar poderia acontecer no último item da atividade, fazendo uma relação com as balanças.

4.6.3.2. Análise *a posteriori* local

Na resolução do item (a) da atividade única que foi aplicada nesta sessão, todos os sujeitos de pesquisa chegaram à equação correta e fizeram justificativas baseadas no fato de adicionar pesos iguais a ambos os pratos da balança. Trazemos uma das respostas dadas a seguir. O termo "continuou" se refere à atividade das balanças da sessão anterior.

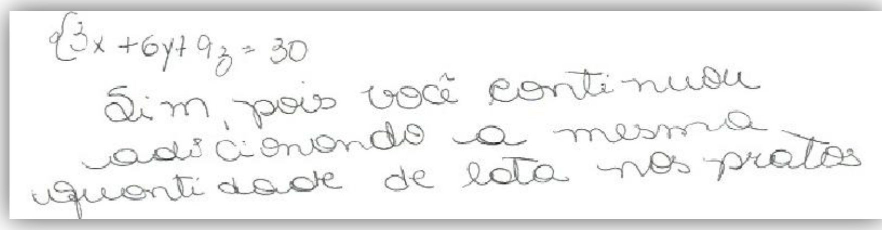


Figura 18: Protocolo da Dupla 1 - Atividade Única - Item a - Sessão 7

Como previsto na análise *a priori*, todos os alunos responderam, no item (b), que os coeficientes estavam triplicados. O mesmo aconteceu para os itens (c) e (d): encontraram corretamente as equações e responderam que os coeficientes estavam duplicados.

No item (e), apenas a Dupla 1 registrou as duas operações efetuadas: multiplicação e adição.

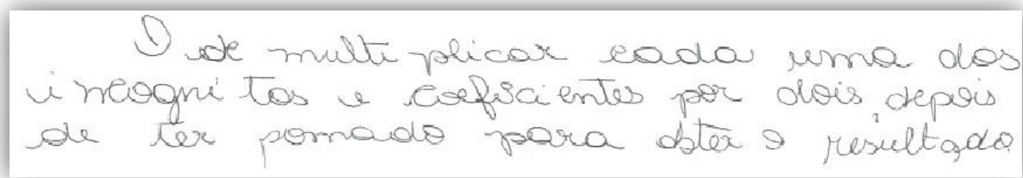

O de multi-plicar cada uma das
incogni tos e coeficientes por dois, depois
de ter somado para obter o resultado

Figura 19: Protocolo - Dupla 1 - Atividade única - Item d - Sessão 7

A Dupla 2 registrou apenas a operação de soma e o aluno 4 só escreveu a equação correta, sem responder o restante da questão. No momento do debate, os alunos da Dupla 1 explicaram a razão pela qual haviam primeiro multiplicado e depois somado e os demais concordaram, pois haviam esquecido que, antes da soma, havia tido uma multiplicação.

Os alunos resolveram sem dificuldades o item (f). No item (g), eles verificaram que os valores eram solução do sistema, mas tiveram dificuldades em elaborar justificativas. Dessa forma, não ocorreu a etapa de validação nesta atividade.

4.7. BLOCO 3: ESCALONAMENTO

O terceiro bloco de nossa sequência didática trata do escalonamento propriamente dito e é composto por sete sessões, realizadas nos dias 08 (Sessão 8), 09 (Sessão 9), 10 (Sessão 10), 11 (Sessão 11), 16 (Sessão 12), 17 (Sessão 13) e 18 (Sessão 14) de Novembro de 2010.

A forma de apresentação das atividades deste bloco será feita de maneira diferente da utilizada nos dois blocos anteriores, pois, com exceção da primeira e última sessões deste bloco, todas as outras são constituídas de itens de uma mesma atividade, cujo enunciado é “Considere os Sistemas Lineares a seguir. É possível, por meio de operações com linhas, transformá-los em sistemas equivalentes escalonados? Em caso afirmativo, faça a transformação, encontre a solução e explicite as operações que você utilizou”.

Iniciamos a Sessão 8 com um sistema já escalonado e perguntamos aos alunos como eles fariam para encontrar os valores das incógnitas. A seguir, durante o restante dessa sessão e ao longo das cinco sessões seguintes, propomos uma única atividade, cujo enunciado apresentamos no parágrafo anterior. Em cada sessão, trazíamos alguns sistemas e entregávamos aos alunos para que resolvessem. A dinâmica de debate continuou sendo a mesma.

Em nossa pré-experimentação, como já observado, trazíamos quatro sistemas para serem escalonados por encontro. Isso dificultou um pouco o gerenciamento, pois como alguns alunos são mais rápidos que outros, havia casos em que alguns terminavam a atividade rapidamente e outros não conseguiam concluí-la durante o tempo programado para a sessão. Assim, era necessário devolver as folhas na sessão seguinte para que finalizassem o que estava incompleto. Percebemos três pontos negativos nessa prática: alguns alunos se sentiam enfadados em receber a folha para terminar de resolver os mesmos sistemas; estes mesmos alunos perdiam a linha de raciocínio em que se encontravam na sessão anterior e os que já haviam finalizado a atividade ficavam sem nada para fazer.

Por isso, decidimos entregar apenas um sistema linear por folha, assim poderíamos garantir que os alunos avançariam de maneira mais uniforme e que seria resolvida apenas a quantidade de sistemas que todos fossem capazes de terminar na mesma sessão. É por este fato que essa terceira parte da sequência didática resultou em um número maior de sessões, pois houve casos em que foi discutido um único sistema no dia.

Nessa linha de raciocínio, apresentar a análise *a priori* de todo o conjunto de sistemas de uma só vez nos pareceu mais coerente, pois assim não precisaríamos repetir certas informações além do que poderíamos construir um texto mais encadeado.

Os sistemas lineares a serem escalonados foram propostos da Sessão 8 à Sessão 13. Na Sessão 14, a atividade proposta foi novamente o problema das medalhas, aplicado na Sessão 4, no qual os alunos conseguiram apenas montar o sistema linear, mas não foram capazes de resolvê-lo, nem por tentativa e erro.

Ao longo das análises *a priori* que virão a seguir traremos mais detalhes sobre cada sessão.

4.7.1. Sessão 8 – Parte 1

Na primeira parte da sessão 8 a seguinte atividade foi aplicada.

Considere o sistema S_1: $\begin{cases} 3a+2b+c=10 \\ \quad 3b+2c=12 \\ \qquad 5c=15 \end{cases}$. Como você faria para encontrar os valores de 'a', 'b' e 'c'? Explique os passos que você utilizou para chegar à resposta.

4.7.1.1. Análise *a priori*

Objetivo: O objetivo desta atividade inicial é fazer com que os alunos reinvistam a forma de resolver um sistema linear já escalonado e a percebam que sua resolução é simples. Vale lembrar que eles já tiveram contato com um sistema deste tipo, mas o resolveram apenas oralmente, e, na ocasião, não foi apresentada a definição de sistema escalonado.

Estratégias: Elencamos duas estratégias:

E_1: Tentativa e erro; e

E_2: Resolver a última equação, encontrando o valor c=3. Substituir o valor de c na segunda equação e encontrar b=2 e, por fim, substituir os valores de b e c na primeira equação e encontrar a=1.

Variáveis: A única variável considerada para este bloco, número mínimo de operações a serem realizadas para a obtenção da forma escalonada, assume valor zero, pois o sistema já se encontra escolado.

Planejamento: A probabilidade dessa atividade ser resolvida rapidamente e sem apresentar grandes dificuldades é grande. Após a resolução do sistema, a pesquisadora deverá fazer uma pequena institucionalização onde definirá "sistema escalonado".

Validação: A validação, neste caso, acontece quando substituímos os valores encontrados no sistema dado e verificamos que realmente eles são uma solução.

4.7.1.2. Análise *a posteriori* local

As três duplas realizaram a atividade pela estratégia E_2 em um tempo que consideramos pequeno. Interpretamos que o fato de já terem resolvido um sistema escalonado anteriormente fez com que não apresentassem dificuldades. A figura a seguir mostra que os alunos reinvestiram a forma simples de resolução já discutida em outro momento.

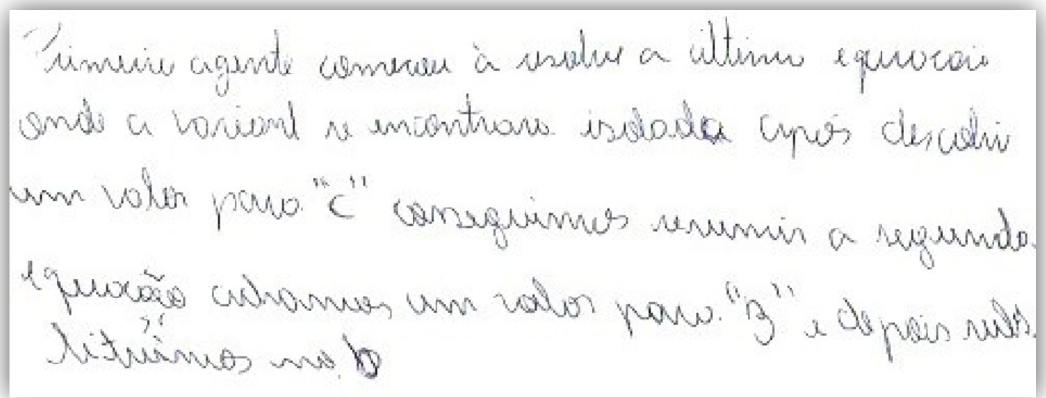

Primeiro a gente começou à resolver a última equação onde a variavel se encontrava isolada após descobrir um valor para "c" conseguimos resolver a segunda equação achamos um valor para "b" e depois substituímos no "a"

Figura 20: Resolução da Dupla 2

4.7.2. Sessão 8 – Parte 2 e Sessões 9 a 13

O quadro a seguir traz as informações principais de cada sessão.

Sessão	Data de realização	Duração em minutos	Quantidade de alunos presentes	Quantidade de Sujeitos da Pesquisa Presentes	Sistema Linear proposto
8 - Parte 2	08/11/2010	55	13	6	1 e 2
9	09/11/2010	54	12	6	3 e 4
10	10/11/2010	53	11	6	5 e 6
11	11/11/2010	61	10	6	7 e 8
12	16/11/2010	52	12	6	9
13	17/11/2010	63	12	6	10

Quadro 2: Dados sobre as Sessões 8 a 13

Os dez sistemas lineares propostos aos alunos ao longo das sessões relacionadas no quadro anterior são mostrados na Figura 21.

1) $\begin{cases} 3b+2c=12 \\ 2c=6 \\ a+2b+c=9 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 2x+y+2z=5 \\ 2y+5z=7 \\ -2y+3z=1 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} 2y-z=1 \\ x+y+z=7 \\ -2y+3z=1 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} 2x+2y+z=6 \\ 3y+7z=17 \\ -y-z=-3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2r+4s+t=19 \\ -2r+2s+t=1 \\ -6s+5t=-13 \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} 6b+c=2 \\ -4a-5b+6c=4 \\ 4a+2b-c=6 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} -2b+3c=7 \\ 3b-c=7 \end{cases}$

8) $\begin{cases} 3x+y-2z=4 \\ -3x+2y+6z=10 \\ 4y-z=6 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} a+2b+3c=12 \\ 2a+6b+3c=29 \\ 3a-b+2c=1 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ 3x+2y+3z=13 \\ 5x+3y-3z=13 \end{cases}$

Figura 21: Sistemas Lineares que compõem o Bloco 3

4.7.2.1. Análise *a priori*

Objetivos: Construir o processo do escalonamento como estratégia de resolução de sistemas lineares.

Estratégias:

Para facilitar a forma de identificar as equações sem a necessidade de repeti-las, utilizaremos a notação (1) para representar a primeira equação de cada sistema, como dado no enunciado da atividade, (2) para representar a segunda e (3) para representar a terceira. Utilizaremos a notação do tipo (123) para indicar a ordem em que as equações aparecem. Assim, o símbolo (213) indica que a equação que originalmente era a segunda foi colocada em primeiro lugar, a que estava em primeiro lugar assumiu a segunda posição e a terceira permaneceu em terceiro lugar.

Utilizaremos, quando necessário, os termos "equação completa" e "equação incompleta". Como todos os sistemas lineares propostos neste bloco possuem três equações, chamaremos de "equação completa" aquela que possuir três coeficientes das incógnitas não nulos. Chamaremos de "equação incompleta" aquela que possuir ao menos um dos coeficientes das incógnitas nulo.

Sistema 1: h

E_1: Para o sistema ficar escalonado, basta realizar uma troca de linhas para a posição (312). Os valores das incógnitas são a=2, b=2 e c=3. Apenas uma operação é necessária.

Sistema 2:

E_1: Somar as equações (2) e (3) encontrando a equação 8z=8. O sistema escalonado poderia ter duas formas: as equações (1) e (2) como primeira e segunda e 8z=8 como terceira, ou as equações (1) e (3) como primeira e segunda e 8z=8 como terceira. Os valores das incógnitas são x=1, y=1 e z=1.

Sistema 3:

E_1: Trocar as equações para a posição (213) ou (231). Somar as equações (1) e (3), encontrando a equação 2z=2, que chamaremos de (4). O sistema escalonado poderia aparecer na forma (214) ou (234). Os valores das incógnitas são x=5, y=1 e z=1.

Sistema 4:

E_1: Multiplicar a equação (3) por 3, encontrando a equação -3y-3z=-9, que chamaremos de (4). Somar (2) e (4), encontrando a equação 4z=8 (5). O sistema escalonado poderia aparecer na forma (125), (135) ou (145). Os valores das incógnitas são x=1, y=1 e z=2.

E_2: Somar a equação (2) e (3) encontrando a equação 2y+6z=14 (4). Somar (4) e (2) encontrando a equação y+5z=11 (5). Somar (5) e (3), encontrando a equação 4z=8. Os sistemas escalonados apareceriam de forma muito semelhante às apresentadas na estratégia anterior, porém teriam sido obtidos efetuando apenas a terceira operação elementar.

Sistema 5:

E_1: Somar (1) e (2) encontrando a equação 6r+2t=20 (4). Somar (3) e (4) encontrando a equação 7t=7 (5). Os sistemas escalonados poderiam ser ter como primeira equação as equações (1) ou (2), como segunda as equações (3) ou (4) e como terceira a equação (5). Os valores das incógnitas são r=3, s=3 e t=1.

Sistema 6:

E_1: Somar as equações (2) e (3), encontrando a equação -3b+5c=10 (4). Multiplicar (4) por 2, com resultado -6b+10c=20 (5), e somar com (1), obtendo a equação 11c=22 (6). Como primeira equação, poderia aparecer (2) ou (3), como segunda (1), (4) ou (5) e, como terceira, (6). Os valores das incógnitas são a=2, b=0 e c=2.

E_2: Fazer o mesmo processo inicial de E_1, entretanto, somar (1) e (4), obtendo a equação 3b+6c=12 (5) e somar (4) e (5), obtendo a equação 11c=22. Novamente os sistemas escalonados seriam os mesmos, mas obtidos por estratégias distintas.

Sistema 7:

E_1: Multiplicar (2) por 3 e (3) por 2 para obter duas equações cujos coeficientes da incógnita b sejam, respectivamente, -6 e 6. Somar as duas equações obtidas para obter a equação 7c=35. Os valores das incógnitas são a=2, b=4 e c=5.

E_2: Somar (2) e (3) e obter a equação b+2c=14 (4). Multiplicar (4) por 2, obtendo a equação 2b+4c=28 (5). Somar (5) e (2), para obter a equação 7c=35.

E_3: Somar (2) e (3) e obter a equação b+2c=14 (4). Somar (4) e (2) para obter a equação –b+5c=21 (5) e, por fim, somar (4) e (5) para obter a equação 7c=35.

Observação: Quando multiplicam-se duas equações por números distintos com a finalidade de se obter coeficientes correspondentes simétricos, existem infinitas possibilidades de multiplicações. Por exemplo, se tivermos as equações 4y+z=5 (1) e -5y+7z=2 (2), poderíamos multiplicar (1) por 5 e (2) por 4. Poderíamos, também, multiplicar (1) por 10 e (2) por 8 e assim sucessivamente. A escolha que colocamos nas estratégias são sempre as menores.

Sistema 8:

E_1: Somar (1) e (2) para obter a equação 3y+4z=14 (4). Multiplicar (4) por 4 e (3) por -3, somar as equações encontradas para obter a equação 19z=38.

Obs.: Essa estratégia pode apresentar pequenas variações de sinal, pois poderíamos multiplicar (4) por -4 e (3) por 3.

E_2: Somar (1) e (2) para obter a equação 3y+4z=14 (4). Multiplicar (4) por -1 e somar o resultado com a equação (3) para obter y-5z=-8 (5). Multiplicar (5) por -3, obtendo a equação -3y+15z=24 (6). Somar (6) e (4) para encontrar a equação 19z=38.

Sistema 9:

E_1: Multiplicar (1) por -2, obtendo a equação -2a-4b-6c=-24 (4), e por -3, obtendo a equação -3a-6b-9c=-36 (5). Somar (2) com (4) e (3) com (5) para obter, respectivamente, as equações 2b-3c=5 (6) e -7b-7c=-35 (7). Multiplicar (6) por 7 e (7) por 2, somar as equações resultantes e encontrar a equação -35c=-35. Os valores das incógnitas são a=1, b=4, c=1.

E_2: Realizar o mesmo processo inicial feito em E_1 até obter as equações (6) e (7). Realizar várias somas entre as equações até obter a equação -35c=-35.

Sistema 10:

E_1: Multiplicar (1) por -3 e (2) por 2, somar as equações resultantes para chegar na equação y+3z=5 (4). Multiplicar (1) por -5 e (3) por 2, somar as equações resultantes para chegar na equação y-11z=-9 (5). Multiplicar (5) por -1 e somar a equação resultantes com a equação (4), encontrando 14z=14 (6).

Obs. 1: Essa estratégia pode ter variação de sinais.

Obs. 2: Elencamos estratégias, em todos os sistemas, de forma a isolar sempre a terceira incógnita seguindo a ordem alfabética. Por exemplo, se as equações possuem incógnitas a, b e c, elencamos estratégias tentando isolar, inicialmente, a variável c. Caso a variável isolada seja alguma das restantes, novas estratégias podem surgir.

Variáveis: A variável considerada para o terceiro bloco de atividades da sequência didática é a quantidade mínima de operações a serem realizadas para se obter o sistema em sua forma escalonada. Quanto mais operações necessitam ser realizadas, mais caminhos possíveis distintos existem entre o sistema inicial e o escalonado.

As operações a serem realizadas já foram elencadas no momento de descrição das estratégias.

Pelo fato de acreditarmos que a terceira operação elementar seja a de visualização menos direta, pode ser que, nos casos em que ela seja necessária e que nenhum dos coeficientes a serem anulados seja igual a um[13], os alunos que tiverem dificuldades nesta operação poderão optar pela estratégia de realizar várias somas até isolar a variável desejada. Ou seja, eles poderão optar por caminhos mais longos.

Planejamento: A sequência de sistemas a serem propostos aos alunos foi elaborada pensando em propor, no início, sistemas para os quais basta uma ou duas operações para se obter a forma escalonada. Pensamos, também, em explorar primeiro as duas primeiras operações elementares, pois acreditamos que a terceira operação tem visualização menos direta e exige um nível de manipulação algébrica maior.

A partir do quarto sistema, aparecem tipos em que é necessário o uso da terceira operação elementar ou um número maior de somas de equações. Inicialmente, os coeficientes a serem anulados aparecem com sinais opostos. À medida que a sequência avança, eles aparecem com os mesmos sinais.

Nos exemplos em que a terceira operação elementar poderia ser utilizada, o trabalho é iniciado com um dos coeficientes a ser alunado sendo igual a um ou um sendo múltiplo do outro. Dessa forma, realizando apenas uma multiplicação já se obtém coeficientes opostos.

O número de equações incompletas por sistema foi sendo reduzido gradualmente.

Acreditamos que, seguindo a sequência elaborada ou uma semelhante, com níveis de dificuldade parecidos e elevados gradualmente, estratégias cada vez mais elaboradas vão sendo criadas e, por conseqüência, vai sendo construído o processo de escalonamento de sistemas lineares.

Validação: A própria atividade fornece retroação ao aluno, pois, imediatamente após utilizar alguma das três operações, o aluno tem condições de avaliar se esta escolha foi favorável ou não ao seu objetivo maior, que é escrever a forma escalonada do sistema linear.

O ideal seria, entretanto, que após obter a forma escalonada, o aluno substituísse os valores encontrados no sistema inicial. Dessa forma, ele poderia ter a certeza de que os procedimentos que utilizou não contêm erros.

4.7.2.2. Análise *a posteriori* local da sessão 8 – parte 2 à sessão 13

[13] No caso em que um dos coeficientes é igual a 1, apenas uma das equações deve ser multiplicada por escalar para conseguir coeficientes simétricos. Quando ambos os coeficientes são não-nulos diferentes de um, é preciso realizar duas multiplicações.

Optamos por dispor os dados, inicialmente, em forma de tabela. Após apresentá-la, procuraremos citar alguns momentos adidáticos registrados ao longo das sessões.

	Sistema 1	Sistema 2	Sistema 3	Sistema 4	Sistema 5	Sistema 6	Sistema 7	Sistema 8	Sistema 9	Sistema 10
Dupla 1	E1: Montou o sistema corretamente e encontrou os valores das incógnitas. Substituiu os valores encontrados no sistema inicial	Resolveu por tentativa erro e confundiu o fato de atribuir valores aleatórios à segunda operação elementar.	Iniciou com a mesma estratégia anterior: tentativa e erro. Após, resolveu pela estratégia E1. Resposta correta.	Tentou somar a segunda e terceira equações e depois a primeira e segunda (não ajudou). Depois, chutou valores para y e z e achou x pela primeira equação.	Fez várias tentativas de substituição de valores, sem obter sucesso. Depois resolveu corretamente pela E1. Não substituiu os valores no sistema inicial.	Resolveu pela estratégia E1	Depois de algumas tentativas, resolveu por E3	Somou a 1ª e a 2ª equações. Eliminou z e isolou y, mas cometeu erro de cálculo. Testou um valor aleatório para y e z e encontrou x a partir da 1ª equação, sem sucesso. Não finalizou a atividade.	Realizou operações com a 1ª e a 2ª equações até eliminar "a". Fez o mesmo para b e c, obtendo três equações de incógnitas **a** e **b**, **a** e **c**, e **b** e **c**. Após resolveu corretamente usando E1.	Após muitas tentativas, chegou a um sistema escalonado em que a 2ª eq. Tem “x” e “y” como incógnitas e a 3ª tem “x”.
Dupla 2	E1: Montou o sistema corretamente e encontrou os valores das incógnitas. Não substituiu os valores encontrados no sistema inicial	E1: Montou o sistema corretamente e encontrou os valores das incógnitas. Não substituiu os valores encontrados no sistema inicial	E1: Resolveu e indicou as operações utilizadas, resposta correta.	Fez uma tentativa e achou os valores incorretos. No verso da folha, resolveu corretamente pela estratégia E1. Não substituiu os valores no sistema inicial.	Multiplicou a segunda equação por 3 e somou com a terceira, não obteve sucesso. Depois resolveu corretamente por E1.	Resolveu diretamente por E1	Multiplicou a terceira equação por 3 e somou com a segunda, conseguindo isolar a variável b. A primeira equação do sistema escalonado tinha as três variáveis, a segunda tinha b e c e a terceira apenas b	Somou a 1ª e a 2ª eq. e multiplicou esse resultado por 4 e somou com a terceira, isolando y. A primeira equação do sistema escalonado tinha as três variáveis, a segunda tinha y e z e a terceira apenas y	Encontrou corretamente o sistema escalonado por E1, mas errou nos valores das incógnitas. Como não substituiu os valores no sistema inicial, só percebeu o erro no momento do debate.	Processo parecido com o da Dupla 1, mas com 3ª eq. com incógnita “z”. Realizaram outros cálculos para encontrar uma equação com incógnitas “y” e “z”
Dupla 3	E1: Montou o sistema corretamente e encontrou os valores das incógnitas. Substituiu os valores encontrados no sistema inicial	E1: Montou o sistema corretamente e encontrou os valores das incógnitas. Substituiu os valores encontrados no sistema inicial	E1: Resolveu e indicou as operações utilizadas, resposta correta.	Fez algumas tentativas de soma e não obteve sucesso. Resolveu corretamente pela estratégia E1. Não substituiu os valores no sistema inicial.	Somou a segunda e terceira equações e não obteve sucesso. Depois resolveu pela estratégia E1	Resolveu diretamente por E2	Fizeram diretamente pela estratégia E3. Passaram a limpo os cálculos no verso da folha. Substituíram os valores encontrados no sistema inicial.	Somou a 1ª e 2ª eq., multiplicou o resultado por 4 e somou com a 3ª, isolando y. A 1ª eq. do sistema escalonado tinha as três variáveis, a segunda tinha y e z e a terceira apenas y	Resolveu corretamente por E1. Não substituiu os valores encontrados no sistema inicial.	Enfrentou o mesmo problema da Dupla 1 e recebeu ajuda da pesquisadora para finalizar a atividade, pois não conseguia avançar.

Todas as duplas resolveram o primeiro sistema pela mesma e única estratégia elencada na análise *a priori*, pois o mesmo encontrava-se muito perto de sua forma escalonada, bastando uma troca na ordem em que as equações apareciam para obtê-la.

Registramos a validação, por escrito, das duplas 1 e 3, como vemos na Figura 22.

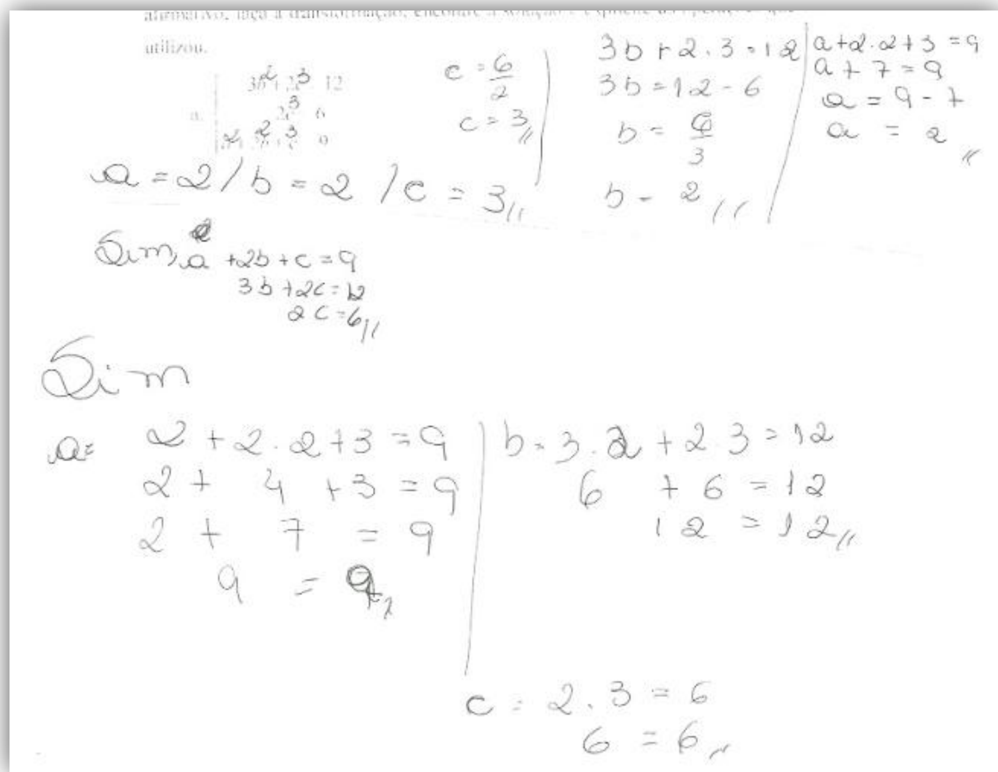


Figura 22: Protocolo da Dupla 1 - Atividade 2 - Item a - Sessão 8

Observando este protocolo, notamos que os Alunos 1 e 2 realizaram a troca esperada, encontram os valores das incógnitas e substituíram nas equações para ter a certeza de que os valores encontrados realmente satisfaziam as equações do sistema linear proposto. Os Alunos 3 e 4, da Dupla 2, fizeram o mesmo procedimento, mas não substituíram os valores encontrados no sistema. Talvez o tenham feito mentalmente, mas não podemos afirmar.

Observando as resoluções do Sistema 2, acreditamos que a Dupla 1 não soube utilizar corretamente a segunda operação elementar, como mostra a Figura 23.

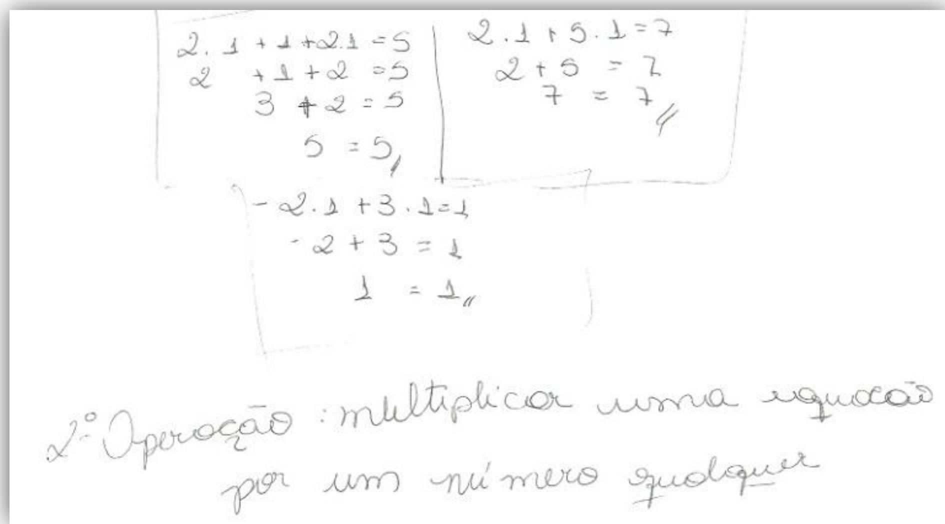


Figura 23: Protocolo da Dupla 1 - Atividade 2 - Item a - Sessão 8

Há duas possíveis razões para o erro cometido pela Dupla 1: os alunos registraram a operação utilizada após o debate ocorrido na sala de aula ou realmente não compreenderam a segunda operação elementar e fizeram confusão entre: multiplicar as equações por um valor qualquer e atribuir valores aleatórios para as incógnitas e multiplicar e substituir nas equações para descobrir se satisfazem ou não.

O equívoco pode vir do fato de que, quando substituímos as incógnitas por números, temos que realizar multiplicações para decidir se estes números satisfazem a equação, pois normalmente elas vêm acompanhadas de coeficientes diferentes de 1. Assim, o aluno pode ter confundido essas multiplicações com a multiplicação da segunda operação. Outra possível causa é o uso de procedimentos empíricos pelos alunos.

As Duplas 2 e 3 utilizaram a segunda operação corretamente, porém apenas a Dupla 3 substituiu os valores encontrados no sistema inicial para ter a certeza de que os valores encontrados realmente eram a solução do problema proposto, como mostra a Figura 24. Interpretamos este procedimento como uma validação, no sentido proposto pela Teoria das Situações Didáticas e como descrito em nossa análise *a priori*.

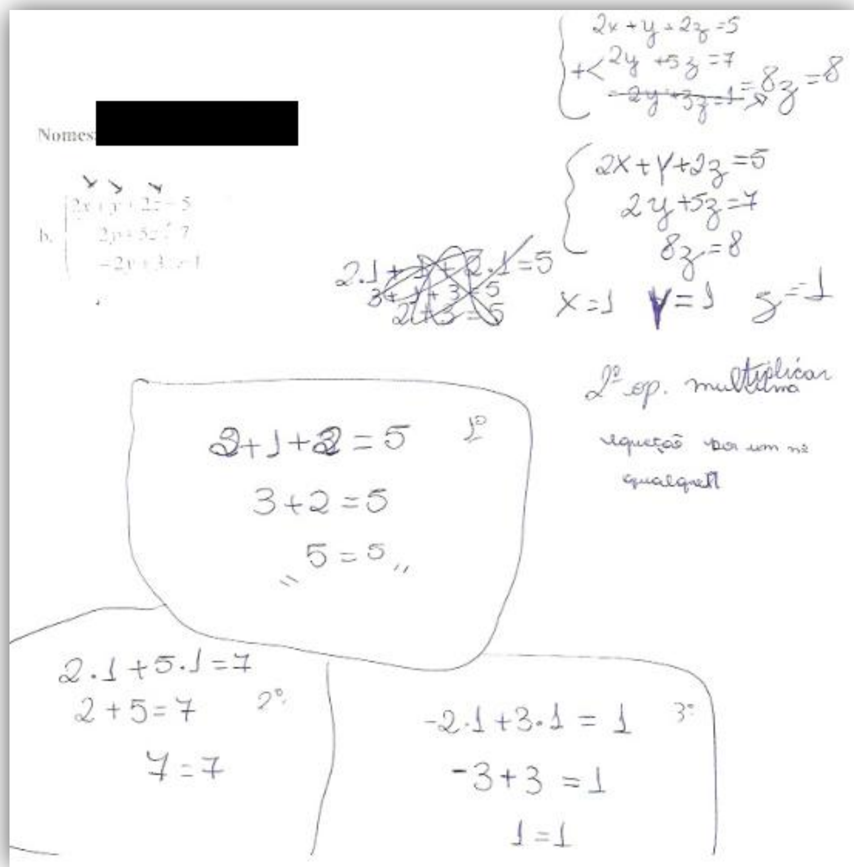


Figura 24: Protocolo da Dupla 3 ao resolver o Sistema 2

Nos Sistemas 3 e 4 a Dupla 1 ainda insiste na estratégia de tentativa e erro. Booth (1995, p. 34) afirma que “há indícios consideráveis de que as crianças da escola elementar utilizam métodos informais para resolver problemas [...] e o mesmo também se constatou na escola secundária”. A autora cita um estudo realizado com cerca de duzentas crianças de uma escola da escócia que faziam parte do topo da escala de capacidade de uma amostra: 82% dos alunos resolveram a equação 30/x=6 corretamente, mas apenas 48% tiveram sucesso com o exemplo estruturalmente semelhante 4/x=3. “No primeiro caso, os alunos foram capazes de resolver a equação por verificação, um procedimento que não poderia ser aplicado de maneira tão imediata no segundo exemplo”. (BOOTH, 1995, p. 34)

Acreditamos que este também possa ser o motivo que levou os alunos desta dupla insistirem nessa estratégia, pois, dentre a gama de sistemas lineares já propostos aos alunos até o momento, em praticamente todos a estratégia se mostrou eficaz. O único exemplo que os alunos da dupla não foram capazes de resolver chutando valores foi o problema das medalhas. Embora no momento eles tenham se questionado sobre uma técnica de resolução de sistemas lineares, suas estratégias iniciais de resolução mostram-se resistentes aos sistemas propostos, ainda que no enunciado seja requerida a forma escalonada.

As duas duplas restantes resolveram o sistema pela estratégia E_1 descrita em nossa análise *a priori*, mas nenhuma substituiu os valores encontrados no sistema inicial. Porém, há que se destacar que, no momento do debate das estratégias adotadas, a pesquisadora perguntou aos alunos quais eram os valores que haviam encontrado. Quando questionados sobre o que deveriam fazer para terem a certeza de que os valores eram realmente a solução procurada, eles responderam corretamente que deveriam substituir nas equações do sistema inicial. Isso mostra que, embora não tenham registrado por escrito, os alunos sabiam o procedimento a ser realizado para efetuar a validação. Ou seja, a situação permitia a retroação, mas os alunos não sentiram necessidade de realizar as validações.

A Dupla 2, logo de início, percebeu que a estratégia “ótima” para a resolução do Sistema 4 seria multiplicar a terceira equação por 3 e somar o resultado com a segunda. Embora tenha cometido um erro aritmético durante a realização das operações, após reiniciar a resolução, foram capazes de encontrar o sistema linear escalonado bem como os valores das incógnitas, como mostram a Figura 25 e a Figura 26.

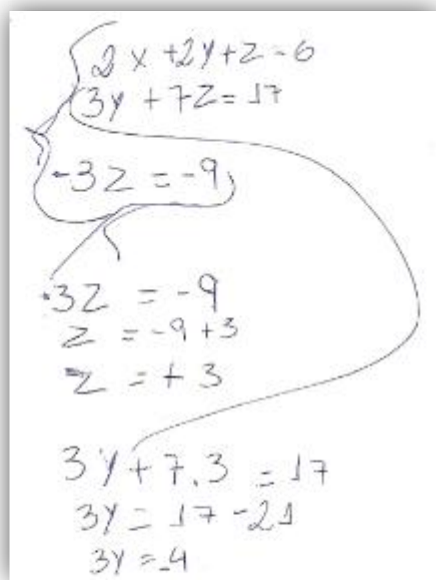


Figura 25: Protocolo da Dupla 2 com erro aritmético ao resolver o Sistema 4

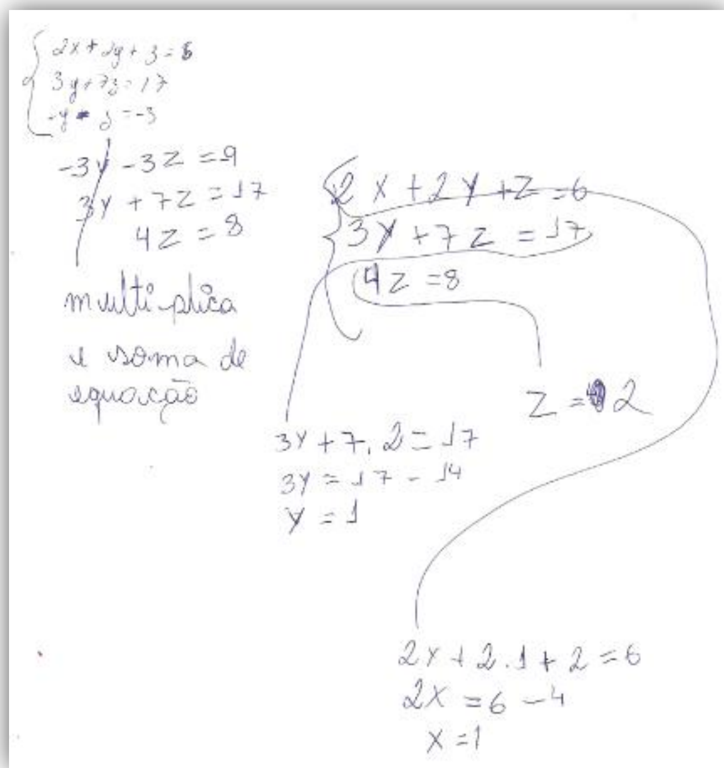


Figura 26: Nova resolução da Dupla 2 do Sistema 4

Após algumas tentativas sem sucesso na resolução, a Dupla 3 também resolve o problema pela estratégia E_1. Entretanto, devemos pontuar que, neste caso, houve uma interferência da pesquisadora, registrada no diálogo a seguir:

> (Aluno 5 diz à pesquisadora que não estão conseguindo resolver)
> Pesquisadora: Vocês estão tentando as três operações?
> Aluno 5: A gente só está tentando uma.
> Pesquisadora: Lembrem que existem três operações!
> Aluno 6: E se multiplicar por qualquer número?

Durante toda a experimentação, a pesquisadora utilizou uma prática com os alunos de sempre pedir para que alguém fosse até o quadro e explicasse aos demais que estratégia havia utilizado. Percebendo que a Dupla 1 insistia na estratégia de Tentativa e Erro, a pesquisadora pediu para que o Aluno 3 fosse até o quadro e explicasse sua resolução aos demais:

> Aluno 3: Primeiro a gente multiplica essa equação por 3...vai ficar -3y-3z=-9.
> Pesquisadora: Que operação você usou?
> Aluno 3: Multiplicação por um valor qualquer, que é 3.
> Pesquisadora:E porque você escolheu justo o três?
> Aluno 3: Porque aí quando somar com essa outra equação eu vou poder cancelar e isolar uma variável.
> Aí você soma com a segunda equação do sistema. Aí aqui cancela e aqui a variável fica isolada.
> Vai dar 4z=8. Aí a variável está isolada e você organiza daquele jeito.
> Esse daqui é o primeiro, esse em segundo e aí substitui essa aqui no último.

O diálogo acima mostra a interação do aluno com o problema e a habilidade já desenvolvida de se escolher um valor prevendo um resultado: o aluno percebe que a escolha adequada é pelo número três, percebe que ela facilitará sua resolução. Diálogos desse tipo mostram que houve momentos adidáticos. Este especificamente poderia ser classificado como um momento de formulação e validação, pois o aluno mostra um indício de modelo e utiliza uma linguagem mais apropriada para viabilizar o uso da teoria como em "quando eu somar com essa outra equação eu vou poder cancelar e isolar uma variável". Além disso, justifica a escolha utilizada mostrando que já havia a previsão do resultado. (FREITAS, 2008, pp. 96-97)

Durante a análise dos registros escritos referentes às resoluções do Sistema 5, percebemos que as formulações começaram a aparecer com mais frequência. Assim que lê a atividade, o Aluno 3 conjectura que bastava multiplicar a segunda equação e somar o resultado com a terceira para eliminar a incógnita "s". De fato, ao realizar o procedimento descrito, a equação resultante possui como incógnitas apenas r e t, porém, a estratégia adotada não favorece o escalonamento do sistema linear, já que a outra equação, com a qual o aluno pretendia realizar uma soma, contém as incógnitas s e t. A figura a seguir mostra que o aluno descartou a estratégia adotada inicialmente.

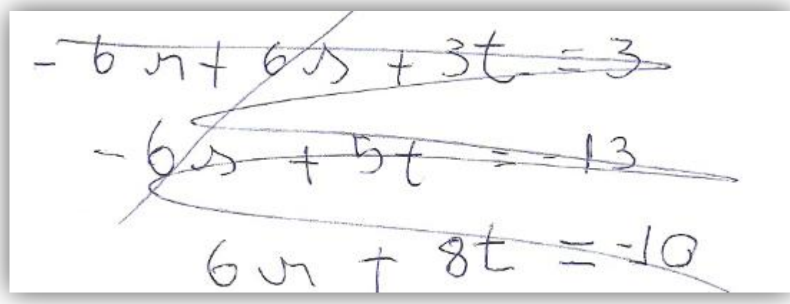


Figura 27: Protocolo da Dupla 2: Tentativa de resolução do Sistema 5

A Figura 28 mostra que o aluno obteve sucesso na nova tentativa e, pela forma com que dispôs as equações, interpretamos que ele fez uma previsão do resultado antes de efetuar a operação, o que configura, a nosso ver, novo registro de formulação. Acreditamos que esta passagem mostra como nossas situações tinham potencial para serem adidáticas. Sem a necessidade de consultar a pesquisadora, o aluno foi capaz de avaliar que sua estratégia não era a mais adequada e tentar um novo caminho.

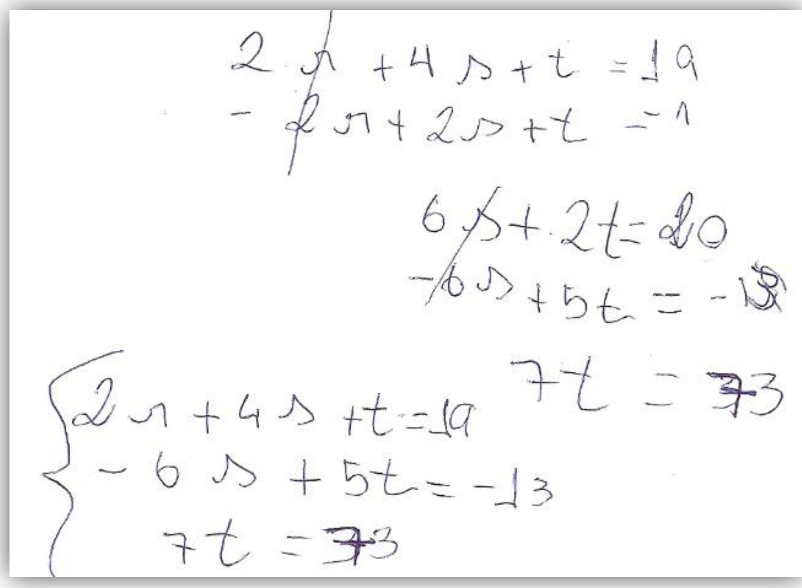


Figura 28: Protocolo da Dupla 2: Nova tentativa de resolução do Sistema 5

A Dupla 3 realiza o mesmo procedimento. Já a Dupla 1, que insistia na estratégia de Tentativa e Erro, desta vez não conseguiu encontrar os valores procurados e então solicita a sugestão, registrada nas gravações, de outro aluno que não é sujeito de pesquisa e realiza as duas somas de equações para obter a equação 7t=7. Isso mostra que os alunos perceberam que sua estratégia já não se mostrava mais tão eficaz, pois tiveram que pedir auxílio aos colegas para resolverem o problema proposto.

A sugestão solicitada durante a resolução do Sistema 5 parece ter feito com que a Dupla 1 percebesse as potencialidades do uso das operações elementares, pois, no protocolo da resolução do Sistema 6, os alunos não utilizam nenhuma vez a estratégia de Tentativa e Erro. A figura a seguir, mostra que, de início, eles reinvestiram o uso de duas somas de equações seguidas. De acordo com a Teoria das Situações Didáticas, o reinvestimento de um conhecimento em situações semelhantes sinaliza aprendizagem de um conhecimento novo, ainda que em um nível bastante inicial. A partir da figura ainda é possível identificar que os alunos perceberam que duas somas seguidas não constituíam a estratégia ótima. Assim, descartam a segunda soma realizada e fazem a multiplicação da equação obtida por dois. Com a adoção dessa nova estratégia, eles são capazes de isolar a variável c e encontrar a terceira equação do sistema escalonado.

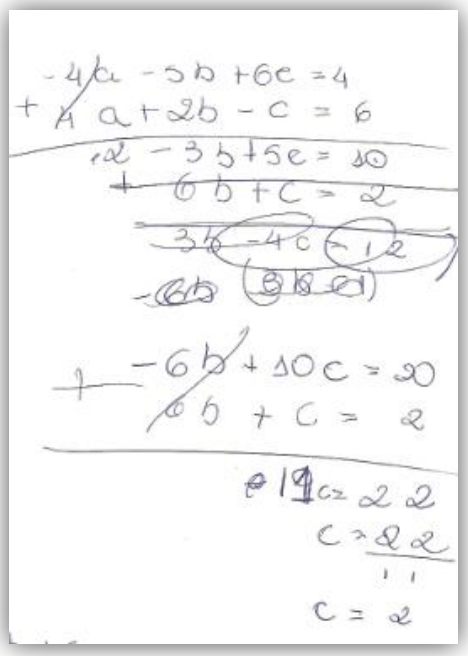


Figura 29: Resolução do Sistema 6 pela Dupla 1

O uso de várias somas de equações revelou-se como uma característica da Dupla 2. Durante a resolução do Sistema 7, os alunos utilizaram esta operação três vezes até encontrar a equação 7c=35. O termo "mesma" da fala do Aluno 6, ao afirmar "Acho que vai ter que somar, né...aí faz a **mesma** coisa" pode indicar que esta dupla tenha a falsa impressão de que a soma de equações pode ser útil e suficiente no escalonamento de qualquer sistema, pois durante um período considerável, a dupla não recorreu nenhuma vez ao uso da multiplicação por escalar antes de realizar uma soma de equações, o que mostraria uma familiaridade em executar uma ação prevendo um resultado, características da fase adidática de formulação.

A Dupla 1 inicia a resolução pela estratégia E_1, novamente motivada pela sugestão de um aluno que não é sujeito de pesquisa, mas um erro de cálculo prejudica a resolução e faz com que os alunos encontrem um valor incorreto para a incógnita c, como mostra a figura a seguir. As gravações em áudio revelaram que a Dupla só finalizou a atividade após o debate realizado.

A Dupla 2 utilizou uma estratégia que não foi elencada na análise *a priori*, pois a incógnita isolada na terceira equação foi "b". Durante o debate, essa escolha da Dupla 2 causou polêmica entre os alunos, como mostra o diálogo a seguir.

> Aluno 5: Mas ali não é assim, na primeira tira o "a" pra formar a segunda e na segunda tira o "b" pra formar a terceira, então o seu tá errado.
> Aluno 3: O meu tá certo.
> Aluno 5: Tinha que ser c ali, entendeu? Não tinha? (olhando para a pesquisadora)

Aluno 3: Não, os dois tão certos.
(Os alunos olham para a pesquisadora esperando uma resposta. A pesquisadora diz que o que se faz normalmente é deixar como incógnitas na primeira equação "a", "b", "c", na segunda "b" e "c", e na terceira "c". Mas se os alunos conseguissem isolar uma variável, tudo bem).

Percebemos o deslize que a pesquisadora cometeu durante a discussão acima. Ela poderia ter explorado mais a discussão e mostrado casos em que uma opção semelhante a do Aluno 3 poderia gerar um sistema de forma aparentemente escalonada, mas cuja resolução não poderia ser realizada de forma tão simples, como por exemplo em $\begin{cases} 2x+y+z=4 \\ 3y-z=2 \\ 4x=4 \end{cases}$. O fato de obtermos o valor x=1 a partir da terceira equação não permite encontrar nenhuma outra incógnita do sistema linear com uma substituição simples.

A discussão que acabamos de registrar pode ter influenciado a escolha da estratégia adotada pelos alunos durante a resolução do Sistema 8, pois as três duplas obtiveram o mesmo sistema linear, a saber $\begin{cases} 3x+y-2z=4 \\ 4y-z=6 \\ 19y=38 \end{cases}$. Percebendo que nenhuma das três duplas obteve a incógnita z isolada na terceira equação, a pesquisadora questionou o que poderiam fazer para obtê-la. É então que acontece o diálogo a seguir, que julgamos como um dos mais significativos de todo o nosso trabalho, pois não há participação da pesquisadora na escolha pelos números e operações e quatro dos seis sujeitos de pesquisa participam, sendo pelo menos um de cada dupla.

(A pesquisadora pergunta o que poderia ser feito com as duas equações de duas variáveis obtidas caso a variável a ser isolada tivesse que ser "z")
Aluno 1: Multiplica por 4 em cima e 3 embaixo.
Aluno 5: E o que adianta, cara? Fica na mesma.
Aluno 3: Se você multiplicar por 4 em cima e 3 embaixo vai dar 12.
Aluno 1: Só que você precisa de um positivo e um negativo e você decide.
Aluno 6: Vai ser 4 e -3 ou -4 e 3.
Pesquisadora: Vamos ver se dá certo?
Aluno 3: Dá certo!

No diálogo anterior, os alunos fazem uma formulação coletiva sobre uma estratégia para cancelar uma variável durante uma combinação linear entre duas equações. Como a segunda operação elementar diz que a multiplicação de uma equação por um valor **qualquer** não altera a solução de um sistema linear, é claro que o aluno ao conjecturar "multiplica por 4 em cima e 3 embaixo" já fazia uma previsão do resultado que seria obtido. Após a conjectura, o mesmo aluno faz o ajuste de sinal a fim de que a incógnita realmente seja cancelada durante a operação.

Durante a resolução do Sistema 9, os alunos da Dupla 1 obtiveram três equações com duas variáveis, mas as três com incógnitas distintas. Assim eles só conseguem finalizar a atividade após o debate realizado.

Já as Duplas 2 e 3 utilizam a estratégia denotada por E_1 em nossa análise *a priori* e conseguiram escrever o sistema escalonado. Entretanto, apenas a Dupla 3 encontrou corretamente os valores das incógnitas. A Dupla 2 só percebeu o erro no momento do debate, pois não haviam substituído os valores encontrados no sistema inicial. Neste caso, e em outros anteriores, a validação realizada pelo aluno poderia fazê-lo perceber o erro cometido. Embora as situações tivessem a característica de fornecer a retroação, bastando substituir os valores encontrados no sistema inicial, apenas nos primeiros sistemas lineares propostos os alunos utilizaram este recurso. Talvez a postura da investigadora e o enunciado da atividade influenciaram este fato.

As resoluções do Sistema 10 seguiram os mesmos padrões dos sistemas anteriores, porém, percebemos que os alunos levaram mais tempo para chegar às respostas e aos sistemas escalonados. A figura a seguir mostra o sistema linear encontrado pela Dupla 1, após várias tentativas:

$$\begin{array}{l} 5x + 3y - 3z = 13 \\ 8x + 5y = 26 \\ -7x = -14 \end{array}$$

Figura 30: Protocolo da Dupla 1 referente à resolução do Sistema 10

A Dupla 2 chegou a um sistema parecido, entretanto, a última equação obtida foi 7z=7. No momento de procurar pelos valores das incógnitas, perceberam que não iriam encontrar os valores restantes, pois a segunda equação tinha como incógnitas “x” e “y”. Os alunos então realizaram novas tentativas e obtiveram uma equação de incógnitas y e z. A figura a seguir mostra a tentativa de encontrar essa equação, mas contém um erro de cálculo a partir do qual os alunos obtêm o valor -52.

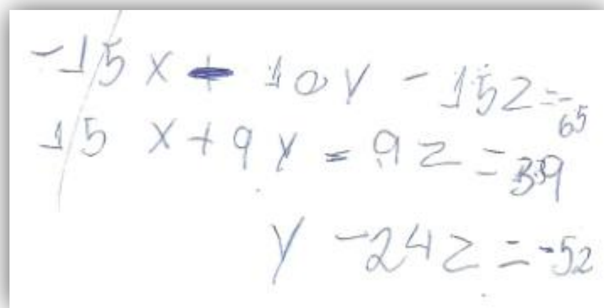


Figura 31: Protocolo da Dupla 2 referente à resolução do Sistema 10

Depois de certo tempo os alunos, ao compararem a solução com a dos colegas, descobrem o erro cometido e encontram os valores corretos das incógnitas. A Dupla 3 enfrentou o mesmo problema da Dupla 2, mas não conseguia encontrar uma segunda equação com incógnitas “y” e “z”. Após muitas tentativas, chegam à equação $-y-24z=-26$. Entretanto, devemos admitir que, neste problema, a pesquisadora fez algumas interferências.

4.7.3. Sessão 14

A sessão 14 foi realizada no dia 18 de Novembro de 2010, é composta de uma única atividade, durou 55 minutos e contou com a presença de 12 alunos, dos quais seis são sujeitos de pesquisa: Alunos 1 e 2, da Dupla 1, Alunos 3 e 4, da Dupla 2 e Alunos 5 e 6, da Dupla 3.

A seguir a atividade aplicada.

Três escolas participaram de um torneio esportivo em que provas de dez modalidades foram disputadas. Aos vencedores de cada prova foram atribuídas medalhas de ouro, de prata ou de bronze, respectivamente aos 1º, 2º e 3º lugares.

Nesse torneio, a cada tipo de medalha foi atribuída uma quantidade de pontos e a escola vencedora seria aquela que obtivesse o maior número de pontos.

O quadro final de pontuação do torneio foi o seguinte:

Escolas	Medalhas			
	Ouro	Prata	Bronze	Pontuação final
A	4	2	2	46
B	5	3	1	57
C	4	3	3	53

Na ocasião em que este problema foi discutido, chegou-se ao sistema linear $\begin{cases} 4x+2y+2z=46 \\ 5x+3y+z=57 \\ 4x+3y+3z=53 \end{cases}$, onde '**x**' representa a quantidade de pontos que a medalha de ouro vale, '**y**' representa a quantidade de pontos que a medalha de prata vale e '**z**' representa a quantidade de pontos que a medalha de bronze vale.

Encontre o valor, em pontos, de cada medalha.

4.7.3.1. Análise *a priori*

Objetivo: Retomar a atividade das medalhas e provocar o reinvestimento do uso das operações elementares no processo de escalonamento.

Estratégias: Para esta atividade, elencamos três possíveis estratégias.

E_1: Tentativa e erro: tentar resolver novamente o problema por tentativa e erro.

E_2: Escalonar o sistema multiplicando a primeira equação por (-1) e somar com a terceira, obtendo a equação y+z=7. Fazer uma combinação linear entre a segunda equação e a primeira. A segunda equação seria multiplicada por 4 ou -4 e as primeira -5 ou 5, obtendo a equação 2y-6z=-2. Multiplicando a equação y+z=7 por -2 e somando o resultado com a equação 2y-6z=-2, obtém-se a equação 8z=16. Assim, para escrever o sistema escalonado, basta tomar uma equação de três variáveis, uma de duas e a equação 8z=16. Esta estratégia pode ter pequenas variações em relação aos sinais.

E_3: Escalonar o sistema multiplicando a primeira equação por (-1) e somar com a terceira, obtendo a equação y+z=7. Fazer uma combinação linear entre a segunda equação e a terceira. A segunda equação seria multiplicada por 4 ou -4 e a terceira por -5 ou 5, obtendo a equação 3y+11z=37. Multiplicando a equação y+z=7 por -3 e somando o resultado com a equação 3y+11z=37, obtém-se a equação 8z=16. Assim, para escrever o sistema escalonado, basta tomar uma equação de três variáveis, uma de duas e a equação 8z=16. Esta estratégia pode ter pequenas variações em relação aos sinais.

Variáveis Didáticas: V_1: Número mínimo de operações a serem realizadas para escalonar o sistema: Nesta atividade, o sistema inicial possui três equações completas, ou seja, três equações com três incógnitas. Assim, no mínimo, o aluno terá que realizar três multiplicações por escalar e duas somas para obter duas equações com duas incógnitas. Após, uma nova multiplicação e uma nova soma são necessárias para obter a variável z isolada.

Planejamento: Após a realização da sessão 4, quando os alunos não conseguiram encontrar os valores das medalhas para este problema, voltamos em nossa análise *a priori* e planejamos aplicar novamente a atividade, ao final da experimentação, para verificar se os alunos reinvestiam o uso das operações elementares e como este uso seria feito. Isto poderia sinalizar aprendizagem de conceitos relacionados ao tema sistemas lineares.

Ao final da sessão, a pesquisadora deveria fazer a institucionalização do escalonamento como método de resolução de sistemas lineares e discutir com os alunos as potencialidades deste método, que permite classificar os sistemas lineares como possíveis determinados, possíveis e indeterminados ou impossíveis.

Validação: A validação da atividade consiste em testar os valores encontrados e verificar se eles satisfazem as condições do problema.

4.7.3.2. Análise *a posteriori* local

As três duplas encontraram os valores das medalhas corretamente, mas por três estratégias distintas.

A Dupla 1 multiplicou a terceira equação por -1 e somou o resultado com a segunda equação. Com isso, obteve x-2y=4. Em seguida, multiplicou a primeira equação por -3 e a segunda por 2, para eliminar a incógnita y e encontrar 2x+4z=24. Para finalizar a resolução, multiplicou a equação x-2y=4 por 2 e somou o resultado com a equação 2x+4z=24, obtendo como resultado 4x=32. A figura a seguir mostra os cálculos realizados pelos alunos.

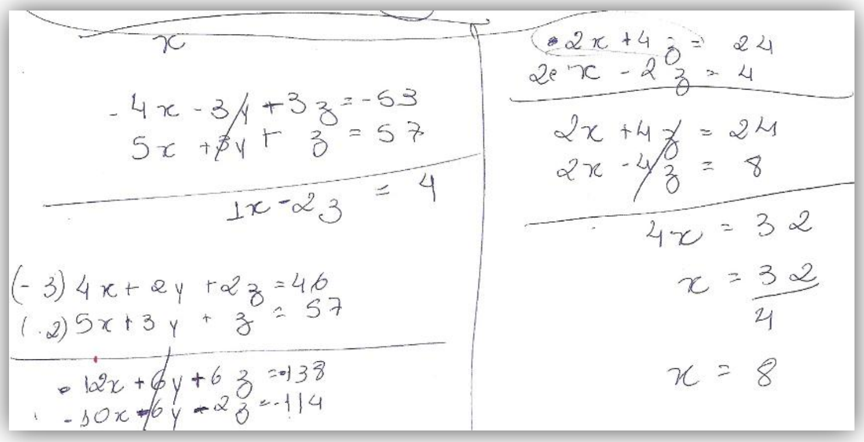


Figura 32: Resolução da Dupla 1 - Sessão 14

A Dupla 2 inicia a resolução encontrando a equação y+z=7, como descrito na estratégia E_2 de nossa análise *a priori*. Entretanto, apresentam dificuldades para encontrar outra equação cujas incógnitas sejam “y” e “z”.

Partem, então, para outra estratégia, como mostra a figura a seguir:

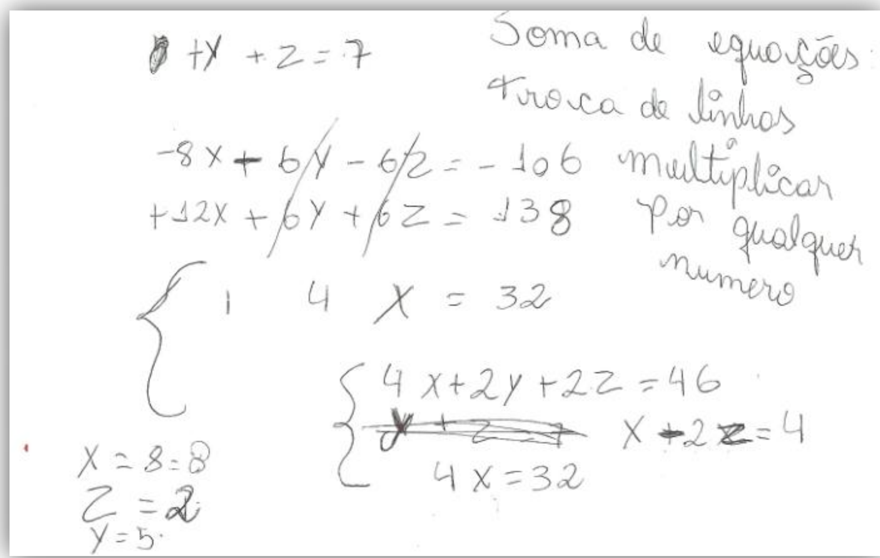


Figura 33: Resolução da Dupla 2 para o problema das medalhas

Percebemos na figura anterior, que a primeira tentativa dos alunos era considerar uma equação com incógnitas “y” e “z” e outra com incógnita “x”. Em seguida, os alunos descartam esta opção por perceberem que ela não permitirá encontrar os demais valores. O diálogo a seguir mostra como eles chegaram a essa conclusão:

> Aluno 3: Se eu multiplicar aqui por 2 e aqui por 3, vai dar 6 e 6. Tipo aqui...menos 2 ou menos 3, sei lá, aí corta aqui e vai sobrar só o x.
> [...]
> Aluno 3: Vamos ver se dá certo? Ah, não vai dá certo! Tem que achar uma que isola o z ou o y... Ah, vamos isolar o x? Vamos achar uma que dê x e outra incógnita...Tipo (pensando)....essa! Multiplica por -1, né?
> Vai dar...3y corta...vai ficar: x mais 2z igual a 4...
> Não é menos? Qual a gente multiplicou por -1? Esse, né?
> Aluno 6: Foi o de baixo.
> Aluno 5: O de baixo é melhor por -1...vai dar -2...que é igual a quatro.

No diálogo anterior, percebemos também a habilidade que o aluno desenvolveu em escolher qual equação seria multiplicada por um valor negativo com a finalidade de obter um coeficiente positivo para a primeira incógnita da equação resultante.

O diálogo revela alguns momentos adidáticos vivenciados pelos alunos: quando conjecturam por qual número deveriam multiplicar, interpretamos que os alunos estejam num momento de formulação. Outro fator que caracteriza esta etapa bem como o potencial adidático da situação proposta está registrado na fala “Vamos ver se dá certo?

Ah, não vai dar certo!”. Nesta passagem o aluno refuta a resposta obtida anteriormente, percebendo que ela não permitiu encontrar os valores das incógnitas. Há que se considerar, que o meio proposto favoreceu a retroação, ou seja, permitiu que o aluno avaliasse se a estratégia adotada foi adequada ou não.

Já a Dupla 3 encontrou os valores das incógnitas a partir da estratégia E_2 que consideramos a estratégia ótima, por ser a mais rápida. De início, os alunos encontraram a equação -y-z=-7, mas não conseguiam encontrar outra equação com essas duas incógnitas. Após algumas tentativas, sem sucesso, requisitaram a ajuda da pesquisadora. Embora a pesquisadora tenha influenciado a escolha das equações, como mostra o diálogo a seguir, verificamos que os alunos chegam à equação 8z=16 de maneira autônoma, passando por momentos adidáticos.

> Pesquisadora: Tenta pensar nessas duas, como você faria pra eliminar o x?
> Aluno 5: Não dá pra eliminar o x dessas duas.
> Pesquisadora: Mas antes vocês faziam!
> Aluno 6: Vai ter que multiplicar uma por um número negativo.
> Aluno 5: Mas professora, aqui é um 5 e aqui é um 4, o que vai adiantar?
> Pesquisadora: Vocês já fizeram atividades desse tipo.
> Aluno 6: Multiplica por dois números! Tipo assim...vamos ver...(pensando)...Um número que multiplica 5 e 4 ao mesmo tempo...
> Aluno 5: Não tem, cara. Não tem um número que vai dar o mesmo valor de 5 pra 4...
> Aluno 6: Tem!! 4 vezes 5: 20 e 5 vezes 4: 20...Aí vai ficar o inverso: 4 e 5...
> Aluno 5: Aqui 4 e aqui 5 então?
> Aluno 6: Não, um vai ter que ser -4...
> (Os alunos realizam as operações e chegam na equação 3y+11z=37)
> Aluno 6: E agora?
> (Aluno 5 tem a ideia de pegar a equação -y-z=-7 e multiplicar por 3. Ao somar com a equação 3y+11z=37 chegam na equação 8z=16)

A Dupla 3, em sessões anteriores, utilizava o máximo de somas de equações possíveis para chegar às respostas esperadas. Ao que tudo indica, isto ocorreu porque não havia compreendido efetivamente como utilizar, de maneira combinada, a segunda e a terceira operações elementares. O diálogo anterior revela o momento em que aparentemente eles ultrapassam essa dificiculdade, sendo capazes de conjecturar corretamente por quais números deveriam multiplicar a fim de obter os números 20 e -20 como coeficientes.

Os diálogos e as produções escritas mostram quanto as Duplas evoluíram em relação ao uso das operações elementares para a obtenção de sistemas escalonados. Entretanto, deixaremos os maiores detalhes e nossas conclusões gerais para a análise *a posteriori* global, ficando a análise *a posteriori* local apenas com os registros dos momentos adidáticos vivenciados pelos alunos, como anunciamos inicialmente.

Durante o debate, os alunos apresentaram seus sistemas escalonados e explicaram aos demais suas estratégias. Em nenhum momento os alunos sentiram a necessidade de testar os valores encontrados na tabela apresentada no enunciado da atividade. Isto mostra que para eles, é suficiente encontrar um sistema escalonado que forneça valores para as incógnitas iniciais.

No final da sessão, a pesquisadora ainda abordou as potencialidades do escalonamento, afirmando que a partir da forma escalonada é possível descobrir o número de soluções o sistema linear possui. É feita uma discussão rápida em que é sinalizado que o estudo do tema sistemas lineares não estava esgotado e não deveria parar por ali.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nossa inquietação acerca do ensino e da aprendizagem da matemática e nosso interesse pelo tema pesquisado foram apresentados logo no início deste texto. Acreditamos que a concepção que o pesquisador possui sobre aprendizagem muito influencia o modo como este interpreta as questões envolvidas neste processo.

Por esta razão, julgamos importante apresentar nossa concepção sobre este conceito. Compartilhamos a ideia construtivista que defende que o aluno aprende por adaptação a um meio. O indivíduo fica diante de uma situação nova que provoca certo desconforto e ele tem que se adaptar a esta situação. Esse desequilíbrio é provocado pelo professor por meio de situações que tenham como objetivo justamente provocar o desconforto mencionado. À medida que o aluno constrói novos esquemas para ultrapassar as dificuldades a ele colocadas, dizemos que o mesmo está aprendendo.

Se o professor tem que propor situações com esta característica, nos perguntamos sobre *quais situações podem contribuir para que os alunos construam o processo do escalonamento visando a resolução de sistemas lineares*. Nossa questão de pesquisa é justamente esta.

Na tentativa de responder a essa questão, nos propomos a investigar o uso do escalonamento na resolução de sistemas lineares por alunos do ensino médio. Realizamos essa investigação em duas principais etapas, que foram denominadas no texto de objetivos específicos.

Em primeiro lugar, investigamos a elaboração das operações elementares para a obtenção de sistemas lineares equivalentes e, em segundo lugar, analisamos dificuldades e superações encontradas pelos alunos no uso das transformações elementares para resolver sistemas lineares.

Para que essas duas etapas de pesquisa pudessem ser realizadas, elaboramos uma sequência didática tendo como inspiração a metodologia denominada Engenharia Didática. Os dados produzidos foram interpretados utilizando conceitos da Teoria das Situações Didáticas.

Nessas considerações, procuramos apresentar nossas reflexões gerais sobre os dados produzidos e a validação da sequência didática aplicada. Por isso, chamaremos essa análise de *a posteriori* global.

A sequência didática foi dividida em três blocos de naturezas distintas. O Bloco 1 tinha como objetivo principal propor a devolução de um problema: como resolver um sistema linear?

> A *devolução* é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e assume ele mesmo as conseqüências dessa transferência. (BROUSSEAU, 2008, p.91)

Interpretamos que acontece devolução quando o aluno sente necessidade de resolver o problema e, como afirmamos na análise *a posteriori* local da sessão 3, os diálogos registrados revelaram que houve a devolução. Os alunos sentiram a necessidade de conhecer uma técnica para resolver sistemas lineares, pois a estratégia tentativa e erro, eficaz na primeira sessão, mostrou-se insuficiente para solucionar o problema das medalhas.

O Bloco 2 tinha como objetivo principal trabalhar as operações elementares que podem ser realizadas sobre as equações de um sistema linear. Este bloco estava relacionado ao nosso primeiro objetivo específico: investigar a elaboração das operações elementares para a obtenção de sistemas lineares equivalentes por alunos do ensino médio.

A partir dos dados obtidos, verificamos que os alunos foram capazes de perceber que as operações realizadas não alteravam a solução dos sistemas lineares, mas não conseguiram chegar à etapa de validação, onde deveriam justificar o motivo disso acontecer. Alguns fatores podem ter influenciado este resultado. Acreditamos que alunos do primeiro ano do ensino médio não possuam os pré-requisitos necessários para realizar demonstrações formais como as efetuadas no item “Estrutura matemática” deste texto. Para auxiliar o processo de validação, utilizamos o recurso das balanças. Porém, percebemos que o número de atividades destinadas às operações elementares foi pequeno. Os alunos deveriam ter tido mais oportunidades para reinvestirem as conjecturas, validá-las, refutá-las e até mesmo conjecturarem outras afirmações.

O Bloco 3 continha atividades que tinham por objetivo principal promover a construção do escalonamento como método de resolução de sistemas lineares. Consideramos este o bloco-chave de nosso trabalho, pois tinha como foco principal não os sistemas lineares, mas sim uma técnica de resolução. Este bloco estava diretamente ligado ao segundo objetivo específico de nossa pesquisa: analisar dificuldades e superações encontradas pelos alunos no uso das transformações elementares para resolver sistemas lineares.

Para a reflexão final sobre este bloco, faremos uma analogia entre nossa sequência e o exemplo utilizado em Brousseau (2008, p. 22) para

> ilustrar o papel desempenhado pelas relações entre o funcionamento dos conhecimentos do aluno e as características das situações – relações essas manifestadas nos comportamentos dos alunos.

O exemplo em questão é a lição “Quem vai dizer 20?”. O objetivo desta atividade era “revisar a operação de divisão, dando-lhe um sentido diferente do aprendido em lições anteriores”. (BROUSSEAU, 2008, p. 22)

As regras do jogo são as seguintes:

> Entre dois jogadores, cada um deve chegar ao número 20 somando 1 ou 2 ao número dito pelo outro, alternadamente. O que começa diz 1 ou 2; o que continua soma 1 ou 2 a esse número. Por sua vez, o primeiro jogador acrescenta mais 1 ou 2, e assim sucessivamente. O que chegar primeiro ao número 20 ganha o jogo.
> A estratégia vencedora consiste em encontrar o quanto antes a sucessão 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20. Posteriormente, veremos que deve ser usada, desde o começo da partida, a progressão aritmética de termo geral, razão 3 (números que têm o mesmo resto quando divididos por 3). (BROUSSEAU, 2008, p. 23)

Brousseau (2008) afirma que, após jogarem várias partidas, as crianças percebem que responder aleatoriamente não é a melhor estratégia. Em nosso trabalho, podemos relacionar esta afirmação com o fato de os alunos terem percebido que a estratégia de tentativa e erro não foi eficaz para solucionar o problema das medalhas. Naquele momento, quando questionados sobre o que faltava para o problema ser solucionado, os alunos afirmaram que deveriam ser capazes de isolar uma variável. Analogamente, Brousseau (2008) descreve que logo alguns descobrem a vantagem de dizer 17 no jogo.

O autor caracteriza outras duas fases para o jogo, além da primeira, que era jogar em duplas: jogo de uma equipe contra outra, em que os alunos são divididos em duas equipes rivais e a cada rodada um aluno fica à frente da equipe e joga diante dos colegas; e descobrir teoremas, momento no qual o professor propõe que cada equipe apresente as estratégias descobertas que a levaram à vitória.

Brousseau (2008, p. 24) afirma que “a primeira fase do jogo corresponde a uma situação típica de ação”. Em nossa pesquisa, identificamos esta situação sempre que os alunos utilizavam as operações elementares, mas em um momento inicial, sem necessariamente preverem os resultados obtidos a partir das escolhas efetuadas e sem a habilidade de justificar o porquê dessa escolha e em quê ela ajudaria na resolução do problema. Segundo o autor, “a sucessão de situações de ação constitui o processo pelo qual o aluno vai aprender um método de resolução de um problema” (BROUSSEAU, 2008, p. 25).

Ainda no exemplo mencionado, Brousseau (2008) afirma que, quando jogam em equipe, para chegar à vitória, não basta que um aluno saiba como ganhar. Deve também saber comunicar aos colegas sua proposta de estratégia. Quando comunica sua estratégia, os colegas podem concordar ou não e, quando colocada em prática, ela pode funcionar ou não. O autor caracterizou esta situação como formulação.

Em nosso trabalho, fizemos vários registros de formulação. Muitas vezes, no momento do debate, os alunos eram desafiados a explicar aos colegas a estratégia utilizada para conseguir escrever o sistema na forma escalonada. Identificamos este momento, principalmente, quando os alunos foram capazes de escolher determinadas operações a serem realizadas já prevendo um resultado, como, por exemplo, multiplicar uma equação por um número para que, ao somar com outra equação, um coeficiente se tornasse nulo. Resgatamos um diálogo que exemplifica esta situação.

> Aluno 3: Primeiro a gente multiplica essa equação por 3...vai ficar $-3y-3z=-9$.
> Pesquisadora: Que operação você usou?
> Aluno 3: Multiplicação por um valor qualquer, que é 3.
> Pesquisadora:E porque você escolheu justo o três?
> Aluno 3: Porque aí quando somar com essa outra equação eu vou poder cancelar e isolar uma variável.
> Aí você soma com a segunda equação do sistema. Aí aqui cancela e aqui a variável fica isolada.
> Vai dar $4z=8$. Aí a variável está isolada e você organiza daquele jeito.

Para caracterizar a situação de validação, o autor afirma que, na terceira fase do jogo, os alunos devem propor um enunciado que seja útil para chegar ao número 20 ou tentar demonstrar que o enunciado do adversário é inválido. “Nesse novo tipo de situação, os alunos organizam enunciados em demonstrações, constroem teorias” (BROUSSEAU, 2008, p. 26). Foi nas situações de validação que encontramos os principais problemas no uso das transformações elementares para resolver sistemas lineares pela técnica do escalonamento.

Verificamos que os alunos desenvolveram habilidades em utilizar as operações elementares e obtinham sistemas aparentemente escalonados. Por vezes, alguns apresentavam sistemas em que as duas últimas equações não possuíam uma incógnita repetida. Assim, o fato de encontrar o valor de uma variável, a partir da terceira equação, não permitia encontrar os valores das demais, diretamente. Outras vezes, cometiam erros de cálculo, fazendo com que chegassem a valores incorretos para as incógnitas.

A simples substituição dos valores encontrados no sistema inicial, que poderia indicar que algum erro tinha sido cometido, não foi uma prática desenvolvida pelos alunos. Para nós, isso pode estar relacionado à concepção **do aluno** sobre validação. Aumouloud e Bianchini (1996) já alertaram para um problema provavelmente relacionado ao contrato didático vigente nas escolas na passagem da aritmética para a álgebra: os alunos sentem a necessidade de sempre fornecer uma resposta numérica a um problema proposto pelo professor. Para melhor entendimento dessa afirmação, trouxemos um exemplo: Baruk *apud* Pessoa (2004) propôs a 97 alunos o problema "em um barco existem 26 carneiros e 10 cabras. Qual é a idade do capitão?" Dos 97 alunos que resolveram a questão, 76 deram uma resposta numérica a partir dos valores dados no enunciado. Isto mostra a necessidade que os alunos sentem em encontrar uma resposta numérica para o problema.

Nossa pesquisa também registrou momentos em que os alunos davam mais importância a encontrar uma resposta do que verificar se a resposta dada é correta ou coerente, como no diálogo seguinte.

> Aluno 3: Pra essa equação, não vai dar valor certo...apesar de ser as mesmas incógnitas cada uma tem resultado diferente.
> [...]
> Aluno 6: vai dar 1 e 2 a resposta, mas não satisfaz (referindo a um sistema impossível).

O fato de deixar de lado a etapa de validação mostra que o aluno não só acha necessário encontrar uma resposta numérica para o problema proposto como também considera que esta prática seja **suficiente**. Parece que, para ele, basta que os valores numéricos sejam encontrados.

Outro fator que pode estar ligado a essa prática é a observação feita por Herrero *apud* Pantoja (2008, p.19) que diz que "os alunos não costumam verificar as respostas encontradas durante o processo de resolução dos sistemas". Em suma, percebemos que para os alunos, "validar" significa "encontrar uma resposta", se possível de valor pequeno, inteira e não-negativa. Em alguns momentos percebemos que os alunos desconfiavam que a resposta encontrada fosse a incorreta pelo fato de o número encontrado ser decimal, e não por não satisfazerem as equações do sistema linear proposto inicialmente.

Como o foco do trabalho é analisar a construção do **processo do escalonamento**, podemos dizer, após esta análise e a partir dos registros apresentados neste texto, que este processo foi construído. Entretanto, alertamos que o saber-fazer em Matemática, em nosso ponto de vista, não é suficiente para uma aprendizagem significativa, neste caso, de sistemas lineares, pois o escalonamento é uma técnica de resolução e o objeto de estudo “sistemas lineares” envolve muitos outros aspectos e pode ser explorado a partir de olhares de naturezas distintas.

Nossa sugestão é que o trabalho de compreensão dos procedimentos bem como de compreensão dos conceitos sejam realizados em conjunto. Nosso trabalho focou-se no primeiro destes dois aspectos. O trabalho com situações contextualizadas poderia ajudar o segundo.

Acreditamos que o melhor critério para julgar a evolução de um aluno seja comparar o desenvolvimento do mesmo em relação si próprio. Nesse sentido, analisando a produção dos alunos ao final da Sessão 4 e novamente ao final da Sessão 14, é clara a habilidade que desenvolveram em utilizar as operações prevendo resultados e de maneira a eliminar incógnitas. As estratégias se mostraram cada vez mais elaboradas, como podemos observar na sessão 14, quando, na necessidade de optar por uma equação para que esta seja multiplicada por um número negativo, os alunos desenvolveram a habilidade de fazer a melhor escolha, visando coeficientes positivos.

Pelo fato da validação ter sido um momento ao qual, geralmente, os alunos não chegaram, vemos que o trabalho em relação ao tema sistemas lineares não pode e não deve parar por aqui. O que nosso trabalho abordou foi uma pequena parte do que poderia ser explorado em relação a esse tema de estudo. Outras abordagens poderiam ser feitas, como o trabalho com situações contextualizadas, o trabalho com a interpretação geométrica de sistemas lineares 3x3, no qual haveria a possibilidade de conexão com a geometria analítica, a exploração de sistemas de ordens de grandeza distintas de 3x3, a exploração de sistemas cujo número de equações seja diferente do número de incógnitas e outras mais. Isto porque o estudo de um tema não se restringe apenas ao saber-fazer, como dissemos, mas também deve envolver o saber pensar matemático, e para que se pense matematicamente, é necessário, segundo nossa concepção, conhecer a fundo o tema envolvido e ser capaz de lidar com o mesmo em qualquer contexto em que este apareça.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S.A.; BIANCHINI, B.L. *O erro ligado ao Ensino/Aprendizagem de Sistemas Lineares*. In.: Anais do IV EPEM - pp. 216-233. São Paulo: SBEM, 1996.

ANTON, H. *Álgebra Linear com Aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In: BRUN, J. (org.) *Didáctica das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap 4. p. 193-217.

BATTAGLIOLI, C.S.M. *Sistemas Lineares na Segunda Série do Ensino Médio: Um olhar sobre os Livros Didáticos.* 2008. 114p. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - PUC, São Paulo.

BOOTH, Lesley R. Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. *As idéias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

BOYER, C. *História da Matemática.* São Paulo: Edgard Blucher, 1974.

BRASIL (País) a, Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio: Matemática*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL (País) b, Secretaria de Educação Básica. *Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL (País) *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Brasília: MEC, 2006.

BRASIL (País) Matriz de Referência para o ENEM 2009. Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Brasília. Brasília: MEC/INEP, 2009.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas. Conteúdos e métodos de ensino.* São Paulo: Ática, 2008.

_____________ Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, J. (org.) *Didáctica das Matemáticas.* Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap 1. p. 35-113.

CALLIOLI, C.A.; DOMINGUES, H.H.; COSTA, R.C.F. *Álgebra Linear e Aplicações*. São Paulo: Atual, 1978.

CUNHA, M. R. K. *A quebra da unidade e o número decimal: um estudo diagnóstico nas primeiras séries do Ensino Fundamental*. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC, 2002.

ESTEVES, A.K. *Números decimais na escola fundamental: interações entre os conhecimentos de um grupo de professores e a relação com sua prática pedagógica.* 2009. 153p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – UFMS, Campo Grande.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática.* Campinas: Editora da Unicamp, 2002.

FREITAS, J.L.M. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) *Educação Matemática: uma (nova) introdução*. São Paulo: EDUC, 2008. p. 77-112.

GÓES, M. B.; DAVID, M.M.M.S. O papel mediador do desenho nas aulas de Matemática e de Projeto na Arquitetura. In: *Anais do XIV EBRAPEM – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*, XIV EBRAPEM, UFMS, Campo Grande, 2010.

JAMAL, R.M. *Álgebra na Educação Básica: as Múltiplas Sinalizações do que se Espera que Devem Saber os Alunos*. 2004. 142 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – PUC – SP, São Paulo.

LIMA, E.L, ed. *Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro: VITAE/IMPA/SBM, 2001.

Lima, E. L. . Sobre o Ensino de Sistemas Lineares. Revista do Professor de Matemática, 1993, v. 23, p. 8 - 18

LINS, R.C; GIMENES, J. *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 1997.

LUCCAS, S. *Abordagem histórico-filosófica na educação matemática: Apresentação de uma proposta pedagógica.* 2004. 222p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - UEL, Londrina.

MACHADO, S.D.A. Engenharia Didática. In: MACHADO, S.D.A. (Org.) *Educação Matemática: uma (Nova) Introdução*. São Paulo: EDUC, 2008. p. 233-248.

NEVES, K.C.R. *Um exemplo de transposição didática: o caso das matrizes*. 2009. 164p. Dissertação de Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemátca – Universidade Estadual de Maringá, Maringá.

O'CONNOR, J.J.; ROBERTSON E.F. In: *Matrices and determinants*. Disponível em: History Topics Index. URL:< http://wwwhistory.mcs.standrews.ac.uk/history/HistTopics/Matrices_and_determinants.html>. Acesso em: 07/2010.

PADOVAN, D. M. F. *Números decimais: o erro como caminho*. Dissertação de Mestrado em Educação. São Paulo: USP, 2000.

PANTOJA, L.F.L. *A conversão de Registros de Representações Semióticas no Estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares*. 2008. 105p. Dissertação de Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas do Núcleo de Pesquisa e Desenvolvimento da Educação Matemática e Científica – Universidade Federal do Pará, Belém.

PESSOA, C. Contrato didático: sua influência na interação social e na resolução de problemas. In: *Anais do VIII ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática,* VIII ENEM, UFPE, Recife, 2004.

SILVA, V. L. *Números Decimais: No que os saberes de adultos diferem dos de crianças?* Dissertação de Mestrado em Educação, Recife: UFPE, 2006.

SILVA, B.A. Contrato Didático. In: MACHADO, S.D.A. (Org.). *Educação Matemática: uma (nova) introdução.* 3. ed. São Paulo: EDUC. p.49-75, 2008.

USISKIN, Zalman. O Que É Álgebra Da Escola Média? In: COXFORD, Arthur F. e SHULTE, Albert P. *As idéias da Álgebra*. São Paulo: Atual, 1995.

YOUSSEF, A.N.; SOARES, E.; FERNANDEZ, V.P. *Matemática: ensino médio*. Volume único. São Paulo: Scipione, 2005.

ZUNINO, D. L. *A matemática na escola: aqui e agora.* Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

www.inep.gov.br, acessado em 20/09/2009.