

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**

LUANA VIEIRA RAMALHO

**TRIGONOMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DO 9º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

CAMPO GRANDE - MS

2016

LUANA VIEIRA RAMALHO

**TRIGONOMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DO 9º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, sob orientação da Prof.^a Dr.^a. Marilena Bittar.

CAMPO GRANDE /MS

2016

LUANA VIEIRA RAMALHO

**TRIGONOMETRIA EM LIVROS DIDÁTICOS DO 9º ANO DO ENSINO
FUNDAMENTAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profª Drª Marilena Bittar (Orientadora)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul -
UFMS

Profª. Dra. Paula Moreira Baltar Bellemain
Universidade Federal de Pernambuco – UFPE

Prof. Dr. Thiago Pedro Pinto
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul –
UFMS

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul –
UFMS

Campo Grande, _____ de _____ de 2016

Aos meus pais, que não mediram esforços para me ajudar a concretizar esse sonho.

AGRADECIMENTOS

À Deus por ter me dado força, paciência, entendimento e determinação para que este trabalho pudesse ser concluído.

À minha mãe, Francileuda, meu pai Domingos e as minhas irmãs pela compreensão e apoio, são meu porto seguro.

À minha orientadora, professora Marilena Bittar, pela paciência e compreensão nos momentos de dificuldades. E também por acreditar em mim confiando-me a responsabilidade da parceria para a realização desse trabalho.

Ao Maycon Douglas pelas contribuições e também pela companhia, carinho e atenção.

Aos colegas da turma 2014, em particular a Cristiane, Natalia Cristina, Nathalia Teixeira e Mauro, pela amizade, horas de conversas, sugestões, apoio e incentivo.

À Danielly Kaspariy por ter ajudado muito com leituras, sugestões e, conseqüentemente, contribuições.

Aos demais membros do grupo de pesquisa DDMat, em particular ao Florisval (Val) pelas contribuições.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática que com suas discussões no decorrer do curso contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos membros da banca examinadora, Prof.^a Paula Baltar e Prof.^o Thiago Pinto, pela leitura e contribuições.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

RESUMO

O presente trabalho teve como objetivo caracterizar a proposta de ensino de trigonometria em livros do 9º ano do ensino fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2014. Para tanto, analisamos os procedimentos, os algoritmos e as maneiras como este estudo é proposto em quatro livros didáticos mais adotados pelas escolas públicas brasileiras. Para esta investigação, utilizamos como referencial teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999) e também o Modelo Praxeológico proposto por Gáscon (2003), o que nos permitiu identificar, analisar e caracterizar as praxeologias didáticas e matemáticas apresentadas em tais livros. De modo geral, as análises apontaram que embora o ensino de trigonometria seja conduzido de maneira diferente, valoriza-se o trabalho com as técnicas de resolução e a construção do bloco tecnológico-teórico que as justificam. Neste sentido, verificamos uma quantidade significativa de atividades que se reduzem a aplicação do bloco tecnológico teórico, demonstrando, assim, uma tendência para a abordagem clássica do ensino de trigonometria.

Palavras-chave: ensino fundamental. Livro Didático. Praxeologia. Trigonometria.

ABSTRACT

The present work aimed to describe the trigonometry teaching proposal in 9th grade textbooks approved by the National Textbook Program (PNLD) of 2014. For this purpose, the procedures, algorithms and the ways in which the study is proposed in the four most used textbooks in Brazilian public schools were analyzed. The Anthropologic Theory of Didactic (CHEVALLARD, 1999), as well as the Praxeological model proposed by Gascón (2003) were used as theoretical and methodological references, allowing us to identify, analyze and also characterize didactic and mathematical praxeologies in such books. Although the analysis show that trigonometry teaching in these books is carried out in different ways, they value the work with solving techniques and the construction of technological and theoretical block. Therefore, it was found a significant amount of activities limited to the application of theoretical technological block which demonstrated a trend to approach the classic trigonometry teaching.

Keywords: Elementary school. Textbooks. Praxeology. Trigonometry.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Estruturas das praxeologias matemáticas	30
Figura 2 - Calcular a altura de um prédio	31
Figura 3 - Cálculo da tangente do ângulo de 30°	32
Figura 4 - Calcular a medida de um lado do triângulo	33
Figura 5 - Modelo praxeológicos didáticos	36
Figura 6 - Tarefa pertencente ao grupo G_1	44
Figura 7 - Tarefa pertencente ao grupo G_2	44
Figura 8 - Exploração do tipo de tarefas e elaboração da técnica	47
Figura 9 - Indicar os catetos oposto e adjacente em relação a um ângulo em um triângulo retângulo	48
Figura 10 - Calcular o valor das razões trigonométricas	50
Figura 11 - Tarefa calcular a medida de um ângulo	51
Figura 12 - Uso da calculadora para calcular uma razão trigonométrica	53
Figura 13 - Exploração do tipo de tarefas.....	55
Figura 14 - Tarefa \in tipo G_1	55
Figura 15 - Exemplo de tipo de tarefa para cálculo do perímetro.	57
Figura 16 - Tarefa calcular a área da lateral do prisma $\in T_5$	57
Figura 17 - Primeiro encontro com a tarefa: como resolver problemas envolvendo triângulos retângulos	60
Figura 18 - Primeiro encontro com a trigonometria	61
Figura 19 - Elaboração do bloco tecnológico-teórico	62
Figura 20 - Eaboração do entorno tecnológico-teórico das razões trigonométricas.....	63
Figura 21 - Elaboração do bloco tecnológico teórico.....	63
Figura 22 - Institucionalização dos conceitos trigonométricos estudados	64
Figura 23 - Retomada ao terceiro momento didático	64
Figura 24 - Retomada ao bloco tecnológico teórico.....	65
Figura 25 - Tarefa calcular a tangente	69
Figura 26 - Tarefa calcular a tangente	69
Figura 27 -Tarefa calcular as razões trigonométricas indicadas.....	70

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 - PNLD 2014 - Coleções mais distribuídas por componente curricular Matemática - 2014	40
Quadro 3 - Técnicas mobilizadas para resolução de tarefas dos tipos $T_{k,8}$ e $T_{k,7}$	52
Quadro 4 - Técnicas mobilizadas nos tipos T_{Kj} , onde $j= 1,2,3,4,5,6$	54
Quadro 5 - Técnicas mobilizadas nos tipos de tarefas $T_{K,9}$ e $T_{K,10}$	58

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Quantitativo de tarefas pertencentes aos tipos	46
Tabela 2 - Quantitativo de tarefas pertencentes ao tipo: indicar os lados de um triângulo retângulo	48
Tabela 3 - Quantitativo de algumas técnicas mobilizadas no tipo de tarefas $t_{k,7}$ e $t_{k,8}$	53
Tabela 4 - Quantitativo de tarefas identificadas nos tipos de tarefas nos livros L_1 e L_2	66
Tabela 5 - Técnicas identificadas em relação aos tipos de tarefas nos livros L_1 e L_2	68
Tabela 6 - Quantitativo de tarefas contidos nos grupos G_1 e G_2 identificadas no livro L_1	72
Tabela 7 - Tipo de tarefas: calcular o valor de uma razão trigonométrica, no livro L_1	72
Tabela 8 - Quantitativo de tarefas contidos nos grupos G_1 e G_2 identificadas no livro L_2	74
Tabela 9 - Tipo de tarefa: calcular o valor de uma razão trigonométrica no livro L_2	74
Tabela 10 - Quantitativo de tarefas contidos nos grupos G_1 e G_2 identificadas nos livros L_3 e L_4	77
Tabela 11 - Síntese: quantitativo de tarefas identificadas nos livros.....	80

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 - Comparativo entre os livros <i>Praticando Matemática e Vontade de Saber - Matemática</i>	66
Gráfico 2 - Comparativo entre os tipos de tarefas no livro <i>Praticando Matemática</i>	73
Gráfico 3 - Comparativo entre os tipos de tarefas do livro <i>Vontade de Saber - Matemática</i> ...	75
Gráfico 4 - Comparativo entre os livros <i>Projeto Teláris e Bianchine - Matemática</i>	77
Gráfico 5 - Grupos de tarefas.	82

LISTA DE ABREVEATURAS

CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
FNDE	Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação
MEC	Ministério da Educação
OCN	Orientações Curriculares Nacionais
PCN	Parâmetros curriculares Nacionais
PNLD	Programa Nacional do Livro Didático
TAD	Teoria Antropológica do Didático
UFMS	Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFMT	Universidade Federal de Mato Grosso

SUMÁRIO

1 O CONTEXTO DA PESQUISA	17
1.1 A TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL	17
1.2 SOBRE O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO (PNLD) E O LIVRO DIDÁTICO	19
1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2 ESCOLHAS TEÓRICAS E METODOLÓGICAS	27
2.1 OBJETIVOS DA PESQUISA	27
2.2 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)	28
2.3 ELEMENTOS DO MODELO PRAXEOLÓGICO	31
2.4 MOMENTOS DE ESTUDO (OU MOMENTOS DIDÁTICOS)	34
2.5 MODELOS PRAXEOLÓGICOS DIDÁTICOS	36
2.6 PROCEDIMENTO DE ANÁLISES	38
2.7 LIVROS ANALISADOS	39
3 PRODUÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS	43
3.1 GRUPOS DE TAREFAS.....	43
3.2 TIPOS DE TAREFAS.....	45
3.3 TÉCNICAS	49
3.4 ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA E ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DOS LIVROS <i>PRATICANDO MATEMÁTICA E VONTADE DE SABER – MATEMÁTICA</i>	59
3.4.1CONSIDERAÇÕES ACERCA DAS ORGANIZAÇÕES DIDÁTICA E MATEMÁTICA DOS LIVROS <i>PRATICANDO MATEMÁTICA E VONTADE DE SABER</i> - MATEMÁTICA.....	71
3.5 ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA E ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DOS LIVROS “PROJETO TELÁRIS” E “BIANCHINI”	76
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	79
REFERÊNCIAS	84

INTRODUÇÃO

Durante minha trajetória no curso de Licenciatura em Matemática realizada na Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT), fui bolsista do Programa de Tutoria e também do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). A participação nesses programas e a leitura de trabalhos no campo da Educação Matemática foram de suma importância para a minha formação profissional e por despertar em mim o desejo de investigar questões relacionadas à essa área.

Entre as experiências que tais programas me proporcionaram, vale destacar o Programa de Tutoria, em 2009, no qual, meus colegas e eu ministramos o curso *Tópicos em Matemática: Funções Trigonométricas*, destinado aos ingressantes do Curso de Licenciatura em Matemática. Neste curso, foi possível perceber que muitos alunos ao estudar o conteúdo de funções trigonométricas, apresentavam dificuldades em entender as relações básicas de trigonometria. Em 2011, ao ingressar no PIBID pude vivenciar várias situações, nas quais, novamente, percebi que muitos estudantes, desta vez do Ensino Médio, apresentavam dificuldades relativas aos conceitos básicos de trigonometria. Essas experiências foram decisivas para a minha escolha de investigar o tema em questão.

A escolha do Mestrado em Educação Matemática do Programa de Pós Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat) da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul (UFMS) se deu por ser oferecido em Campo Grande - MS, cidade mais próxima da região onde residia e por ter sido recomendado por alguns professores da Graduação. Além disso, queria um curso que se aproximasse da minha área de formação, porém no âmbito da Educação. Neste período, a Professora Marilena Bittar, orientadora desta pesquisa, já desenvolvia e orientava pesquisas em que se analisava a proposta de ensino de determinados conteúdos matemáticos em livros didáticos. Atualmente, no ano de 2016, a mesma lidera dois projetos: um de extensão e outro de pesquisa, financiado pelo CNPq, sobre a análise de livros didáticos.

Após ingressar no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat), participar de alguns encontros com a Professora Marilena Bittar e de discussões no grupo de pesquisa em Didática da Matemática (DDMat) acerca de como eram realizadas as análises de livros didáticos e quais seus objetivos, comecei a me interessar pelo assunto e definir meu objeto de estudo. Em princípio, foi possível formular as seguintes questões de pesquisa: *como é trabalhada a trigonometria no ensino fundamental? Qual é a*

proposta de ensino desse tema? Será que a proposta de ensino está relacionada com certas dificuldades? Que proposta de ensino chega às escolas? E dessa maneira, em parceria com minha orientadora, decidi analisar a proposta de ensino de trigonometria apresentada nos livros didáticos, utilizando, para isso, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999), a qual oferece tanto instrumentos metodológicos pertinentes para a análise, quanto embasamento teórico para a investigação.

Assim como Lindegger (2000) e Fritzen (2011), entendemos¹ que o livro didático pode ser considerado um recurso de referência, utilizado para o planejamento das aulas pelos professores. E, por isso, acreditamos ser importante investigar detalhadamente como está sendo proposto o ensino de trigonometria, uma vez que essa investigação pode fornecer elementos que ajudem a caracterizar a proposta de ensino que está chegando às escolas, bem como contribuir para as que chegarão. Isso não significa que seja o que efetivamente acontece na prática em sala de aula, pois o professor, a partir do livro didático adotado, prepara sua aula fazendo modificações que julga conveniente. Entretanto, o livro didático fornece boas pistas sobre as escolhas do professor, como evidenciado em algumas pesquisas (LINDEGGER, 2000; SILVA, 2005; FRITZEN, 2011; FORTES, 2012). Assim, a partir dessas reflexões iniciais, definimos como objetivo dessa pesquisa *Caracterizar o ensino da trigonometria em livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental aprovados pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2014.*

Este trabalho está organizado em três capítulos, além das considerações finais. No primeiro capítulo, explicitamos algumas reflexões sobre o ensino de trigonometria no ensino fundamental com o apoio de documentos oficiais, assim como a avaliação de livros didáticos, realizada pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e a importância do livro didático nos dias atuais. Apresentamos, ainda, os resultados apontados em algumas pesquisas que, embora não seja o seu objetivo, trazem a análise do ensino de trigonometria proposto em livros didáticos e na proposta curricular, sendo essas reflexões fundamentais para podermos melhor compreender o nosso objeto de estudo.

No capítulo 2, posicionamos os nossos objetivos e o estudo que realizamos sobre o aporte teórico e metodológico que embasa o nosso trabalho. Discutimos, ainda, os procedimentos metodológicos adotados para o desenvolvimento da investigação, o processo de escolha e a apresentação dos livros didáticos analisados, além das idas e vindas do processo de análise. No capítulo 3, inicialmente, apresentamos os grupos e tipos de tarefas

¹Deste ponto do texto em diante, utilizaremos a primeira pessoa do plural com intuito de expressar a parceria com a professora orientadora dessa pesquisa na produção desse trabalho.

identificados nos livros analisados em conjunto com as técnicas mobilizadas em cada tipo. Trazemos, ainda, alguns dados coletados e, em seguida, as análises das praxeologias didática e matemática, referentes ao ensino proposto da trigonometria em cada livro. Por último, nas considerações finais, retomamos nossa questão de pesquisa e buscamos respondê-la tendo em vista os dados apresentados no capítulo 3.

1 O CONTEXTO DA PESQUISA

Neste capítulo, apresentamos algumas discussões a respeito do ensino e da aprendizagem de trigonometria na educação básica. Nosso interesse se limita ao ensino desse conteúdo no ensino fundamental. Para isso, recorreremos às orientações em documentos oficiais que subsidiam o seu ensino neste nível escolar. Trazemos, também, uma revisão bibliográfica com intuito de compreender melhor o nosso objeto de pesquisa e apresentar resultados apontados por outros pesquisadores.

1.1 A TRIGONOMETRIA NO ENSINO FUNDAMENTAL

Para melhor compreender e situar o nosso objeto de estudo – a trigonometria nos livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental – consideramos importante analisar como os documentos oficiais que guiam o ensino público brasileiro, propõem o estudo deste tema neste ano escolar. Assim, discutimos a seguir o que os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) e as Orientações Curriculares (BRASIL, 2006) recomendam sobre o ensino e a aprendizagem de trigonometria no ensino fundamental. Observamos, nestes documentos, mais clareza em relação às orientações e sugestões sobre o ensino de trigonometria nesse nível escolar, sendo considerado conteúdo de base para a trigonometria estudada no ensino médio. Além disso, tais orientações estão em consonância com os Parâmetros Curriculares para o ensino fundamental.

Nos documentos supracitados não é indicado o ano de escolaridade em que o estudo de trigonometria deve iniciar, mas são feitas recomendações para o ensino de conteúdos como: semelhança de triângulos, Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras, considerados pré-requisitos para o estudo de trigonometria. De certa maneira, isso indica que o seu ensino pode ocorrer ainda no ensino fundamental. Acerca disso, de acordo com Pontes e Moura (2013, p.3):

[...] encontramos a indicação da necessidade da presença no currículo de conteúdos relacionados ao bloco Espaço e Forma. Nesse bloco de conteúdos encaixam-se as verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras, no qual se pode inferir o conteúdo trigonométrico, entre outros que norteiam o assunto de Geometria como semelhança de figuras planas. Essa ocorrência nos faz considerar ser coerente, a inserção do estudo de Trigonometria nessa série do Ensino Fundamental, uma vez que aliados a tais conteúdos, como por exemplo, semelhança de triângulos, ângulos, estudo da circunferência, entre outros, possibilitará ao aluno compreender os conceitos trigonométricos a serem abordados.

As Orientações Curriculares para o ensino médio (OCNEM) (BRASIL, 2006) destacam a importância dos conhecimentos básicos de trigonometria para a continuidade de seu estudo no ensino médio. Assim, é enfatizado que o estudo inicial de trigonometria deve evidenciar as propriedades de semelhança de triângulos com o intuito de dar sentido e justificar as definições de seno, cosseno e tangente. Os valores dessas razões, relativos aos ângulos de medidas 30° , 45° e 60° , devem ser justificados a partir das definições e de propriedades básicas de triângulos.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) é destacado o potencial deste tema no que concerne ao desenvolvimento de habilidades e competências, quando o seu estudo está ligado às aplicações. De acordo com esse documento os conteúdos de trigonometria estão:

[...] diretamente relacionados ao desenvolvimento de habilidades que dizem respeito à resolução de problemas, à apropriação da linguagem simbólica, à validação de argumentos, à descrição de modelos e à capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real. (BRASIL, 2000 p. 44)

Segundo o documento supracitado, quando a trigonometria é apresentada aos alunos sem conexão com a realidade externa à escola ou ao contexto matemático, pode estar carregada de cálculos algébricos das identidades e equações trigonométricas em detrimento de aspectos importantes das funções trigonométricas. Neste quesito, os PCN (BRASIL, 2000) chamam a atenção para o uso excessivo do cálculo algébrico no ensino de trigonometria:

Um tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria, desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. Especialmente para o indivíduo que não prosseguirá seus estudos nas carreiras ditas exatas, o que deve ser assegurado são as aplicações da Trigonometria na resolução de problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis, e na construção de modelos que correspondem a fenômenos periódicos. (BRASIL, 2000, p.44)

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 2000), o ensino contextualizado do conteúdo de trigonometria é sugerido como critério central, com intuito de levar o aluno a estabelecer conexões entre conceitos e as diferentes formas do pensamento matemático. Destacamos, ainda, que o ensino de trigonometria deve ir além da mera descrição, favorecendo o desenvolvimento das capacidades de analisar, explicar, prever e intervir.

Atualmente (ano de 2015), as primeiras noções de trigonometria são apresentadas no 9º ano do ensino fundamental, quando são trabalhadas as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente. Diante disso, a análise que propomos deve permitir identificar e compreender como os primeiros conceitos e ideias de trigonometria são apresentados aos alunos nos livros didáticos. Mas, antes de iniciar a análise destes livros, é importante compreender o processo de avaliação pelo qual tais livros passam antes de serem comprados pelo Ministério da Educação (MEC) e entregues aos alunos das escolas públicas. Assim, no próximo tópico, explicamos como é realizado esse processo que envolve desde a análise dos livros didáticos até sua compra pelo MEC e sua chegada à escola pública.

1.2 SOBRE O PROGRAMA NACIONAL DO LIVRO DIDÁTICO (PNLD) E O LIVRO DIDÁTICO

O Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) foi instituído pelo decreto nº 91.542, de 19 de agosto de 1985 e substituiu o Programa do Livro Didático para o ensino fundamental – PLIDE. Um dos objetivos do PNLD é auxiliar o trabalho pedagógico dos professores e também distribuir livros didáticos para as escolas públicas brasileiras de ensino fundamental e médio.

A cada três anos, o Ministério da Educação (MEC) abre edital no qual estão descritos os requisitos para a inscrição dos livros pelas editoras e também para a avaliação dos livros submetidos – alguns critérios para avaliação são comuns a todas as disciplinas e outros critérios são específicos de cada uma. Os livros inscritos são avaliados por uma comissão de especialistas de diversas instituições e, caso atendam aos requisitos descritos no edital, são aprovados e então podem ser escolhidos pelos professores para o trabalho com os alunos.

Para auxiliar o professor no processo de escolha do livro didático é produzido o Guia do Livro Didático que contém as resenhas das coleções aprovadas, além da ficha usada pelos avaliadores. A resenha de cada coleção aprovada apresenta suas principais características tais como a metodologia adotada e a distribuição dos conteúdos na coleção. Além disso, menciona se existe ou não a necessidade de se buscar em outros materiais didáticos incrementos para o estudo de certo conteúdo. Não é objetivo do Guia apresentar uma análise detalhada de cada livro didático e sim orientar e auxiliar os professores na escolha desse recurso didático.

O trabalho que vem sendo realizado pelo PNLD dá-se em função da importância que o livro didático assume para o professor, como mostram pesquisadores como Tagliani (2011); o livro didático é o principal instrumento mediador do processo de ensino e aprendizagem.

Nesse contexto, faz sentido existir uma preocupação em relação à sua qualidade em vista de todo o processo que envolve a avaliação de livros didáticos no Brasil e do grande investimento do governo para a aquisição dos mesmos. Segundo Martins (2006, p. 118):

Esta importância (do livro didático) é atestada, entre outros fatores, pelo debate em torno da sua função na democratização de saberes socialmente legitimados e relacionados a diferentes campos de conhecimento, pela polêmica acerca do seu papel como estruturador da atividade docente, pelos interesses econômicos em torno da sua produção e comercialização, e pelos investimentos de governos em programas de avaliação.

Diante disso, tem o compromisso previsto em Lei - Diretriz e Base da Educação Brasileira (LDB) - com qualidade da educação pública o que inclui materiais didáticos e professores qualificados entre outros.

O material didático constitui-se no instrumento facilitador da construção do conhecimento e mediador da interlocução entre os sujeitos do processo educacional. Pode ser composto de material impresso, audiovisual, além daqueles desenvolvidos para ambientes virtuais de ensino e aprendizagem web. Devido a sua importância no processo de mediação, sua avaliação deve ser rigorosa. Em sua elaboração deve-se explorar a convergência e a integração entre os conteúdos, tendo como base a perspectiva de construção do conhecimento e o favorecimento da interação entre sujeitos envolvidos com o processo educativo. (BRASIL, 2012, p. 120)

O livro didático é considerado por Lajolo (1996) um instrumento importante no processo de ensino e aprendizagem formal. De acordo com o referido autor, embora não seja o único recurso de professores e alunos, o livro didático pode ser decisivo para a qualidade do aprendizado resultante das atividades escolares. Além disso, percebemos, em muitos casos, que os livros didáticos são considerados como a única possibilidade de leitura do aluno, tanto no ambiente escolar quanto no ambiente familiar (TAGLIANI, 2011), sendo mais um dos fatores que justificam o cuidado que o PNLD tem em distribuir às escolas livros didáticos que possibilitem um ensino de melhor qualidade e adequados às necessidades dos alunos. Acerca disso, Lajolo (1996, p. 4) afirma que:

Sua importância aumenta ainda mais em países como o Brasil, onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina.

A importância pedagógica do livro didático, tanto para o professor quanto para os alunos, não priva o professor de alterar a sequência dos conteúdos e das atividades propostas

pelo livro, e nem de sugerir atividades complementares, de acrescentar diversos aspectos da realidade local e de utilizar outros livros.

Em relação ao livro didático de Matemática, sua relevância não difere de outros. Alguns pesquisadores (NOGUEIRA, 2008; KASPARY, 2014; SOUZA, 2014; FREITAS, 2015; ALMEIDA, 2015) enfatizam o quão significativo é o seu papel no ensino e na aprendizagem de conteúdos matemáticos, podendo influenciar em estratégias de ensino da Matemática, como também na sua aprendizagem, o que torna relevante a prática de analisar os livros didáticos, uma vez que é importante conhecer de que forma os livros estão abordando determinados conteúdos.

Nesse sentido, em busca de compreender o nosso objeto de estudo e discutir resultados apontados por outros pesquisadores quanto ao ensino de trigonometria nos livros didáticos, apresentamos algumas pesquisas encontradas no banco de dissertações e teses da CAPES, e de algumas universidades brasileiras, bem como em periódicos. Entre as pesquisas identificadas, escolhemos aquelas cujo foco de discussão é o ensino ou a aprendizagem de trigonometria no triângulo retângulo, por esse conteúdo ser abordado no ensino fundamental.

1.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica proposta a seguir, tem por objetivo apresentar resultados apontados por outros pesquisadores, bem como refletir sobre o nosso objeto de pesquisa. Em busca de trabalhos sobre a temática, escolhemos iniciar essa revisão no banco de dissertações e teses da CAPES e depois verificar a existência de outras pesquisas em bancos de dissertações e teses de universidades, como também em periódicos relacionados a pesquisas em Educação Matemática.

A revisão bibliográfica foi realizada tanto no banco de dissertações e teses da CAPES e de Universidades, como a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC), Universidade Estadual de São Paulo (UNESP), Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS). Além disso, buscamos pesquisas publicadas nos seguintes periódicos de Educação Matemática: Boletim de Educação Matemática (BOLEMA – UNESP/RC), Zetetiké (UNICAMP), Educação Matemática em Revista (SBEM/RS), Perspectivas em Educação Matemática (PPGEduMat/UFMS), e a revista do Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação matemática (GEPeM/UFRJ).

Para a identificação das pesquisas utilizamos como critério de busca em títulos, nas palavras-chave ou nos resumos de trabalhos, as *targs*² “trigonometria no triângulo retângulo” e “trigonometria”. No banco de teses da Capes com a palavra trigonometria, localizamos 24 dissertações e escolhemos apenas aquelas que faziam referência a esse conteúdo no ensino fundamental. No banco de dissertações e teses das universidades citadas encontramos as seguintes pesquisas que discutiam sobre trigonometria no triângulo retângulo: Barbosa (2009), Borges (2012), Lindegger (2000) e Fritzen (2011). Acreditando existir ainda outras pesquisas sobre o assunto, utilizamos o buscador *Google* e escolhemos aquelas que mais se aproximaram do nosso interesse de pesquisa como: Oliveira (2010), Klein (2009), Silva (2005) e Oliveira (2013). Dentre os trabalhos identificados, trazemos uma breve discussão daquelas que, embora não seja o seu foco, desenvolvem uma análise do conteúdo de trigonometria.

Consideramos que os resultados apontados nessas pesquisas, além de ajudar na compreensão do nosso objeto de estudo, acrescentam questões que podem ser observadas durante a nossa análise, como: que tipos de exercícios estão sendo levados em consideração no ensino proposto de trigonometria? Tais exercícios são contextualizados? Há um grande número de exercícios repetidos que tendem a um ato mecânico e uma memorização de fórmulas e procedimentos? Como são resolvidos tais exercícios? É utilizada a calculadora? É levado em consideração o contexto histórico de trigonometria? Como é abordado e apresentado o conteúdo de trigonometria?

Iniciamos essa discussão com a pesquisa desenvolvida por Lindegger (2000), que analisou a Proposta Curricular do Governo do Estado de São Paulo do ano de 1997 e seis livros didáticos, tanto do ensino médio quanto do ensino fundamental, publicados entre 1991 e 1997. O autor acredita que o livro didático exerce influência significativa sobre o professor, no que se refere à linguagem, à profundidade e ao desenvolvimento do conteúdo e, considera importante observar as propostas de abordagem do conteúdo de trigonometria na escola, analisando, para isso, livros didáticos. Para tanto, foram definidos os seguintes critérios de análise: a presença de aspectos históricos, as formas de abordagem do conceito e por último os tipos de problemas propostos. Diante disso, o autor também fez uma comparação do que é proposto em livros didáticos e a proposta curricular do estado e concluiu que alguns dos livros didáticos analisados apresentam pouca quantidade de exercícios contextualizados, não

² Palavras que ajudam a organizar e agrupar informações que estão por elas relacionadas.

deixando espaço para a participação do aluno na construção do conceito e, assim, não tratam com a devida consideração as recomendações da proposta curricular.

Assim como Lindegger, Silva (2005) buscou entender quais são os elementos de ensino e de aprendizagem ligados aos conceitos de trigonometria no triângulo retângulo. Para isso, analisou as Propostas Curriculares para o Ensino de Matemática de São Paulo do 1º grau e 2º grau (1992 -1994), os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio, livros didáticos do 9º ano aprovados pelo PNLD (1995), e alguns livros didáticos do 1º ano do ensino médio, mais utilizados nas escolas publicados entre 1998 e 2001. O autor investigou, primeiramente, os conteúdos, as formas de abordagem, as sugestões para o ensino de trigonometria no triângulo retângulo prescritas nas orientações e as propostas curriculares. Depois, comparou os conteúdos e abordagens sugeridas com o que é proposto no livro didático. Alguns dos critérios utilizados para avaliar os livros didáticos foram: a retomada dos conteúdos que servem de apoio para o estudo de trigonometria (teorema de Tales, semelhança de triângulos e congruência) e a forma de apresentação do conteúdo.

A análise dos livros do 9º ano apontou que a maioria deles conduzem os conteúdos considerados pré-requisitos para o seu ensino, por meio de uma apresentação contextualizada ou expositiva do conteúdo. Nesse sentido, as atividades propostas utilizam a definição e a aplicação das relações trigonométricas como método de resolução. Silva (2005) observou também que o modo como o conteúdo é trabalhado colabora para a construção do conceito. Já nos livros do 1º ano do ensino médio, o pesquisador verificou que não são retomadas as noções básicas de trigonometria, como orientam os PCN. Em relação à apresentação do conteúdo, dá-se, em geral, de forma expositiva não privilegiando a contextualização. E, assim como nos livros do ensino fundamental, as atividades propostas são resolvidas mediante a aplicação da definição das relações trigonométricas e da tabela trigonométrica. O autor concluiu que os livros do 9º ano seguem as recomendações oficiais de ensino e parecem colaborar com os pressupostos para a introdução de trigonometria no triângulo retângulo. Entretanto, a abordagem do ensino de trigonometria nos livros didáticos de ensino médio pode dificultar a participação dos alunos na construção das relações trigonométricas no triângulo retângulo e não favorecer a construção de significados para o aluno.

Sob esta perspectiva, Fritzen (2011) analisou livros didáticos em busca de significações que acredita como atuais e veiculadas na sala de aula. Foram analisados dois livros mais adotados, um de nível médio e outro de nível fundamental, publicados no ano de 2002 e 2006 respectivamente. A autora não esclarece os critérios utilizados para a análise destes livros, mas concluiu que no livro do ensino médio a história da matemática serve

apenas para introduzir o conceito de trigonometria. Demonstrou, ainda, que não há uma preocupação com o desenvolvimento conceitual de trigonometria, desde suas noções básicas. Verificou, também, que essa discussão se inicia em seu nível mais alto de abstração e generalização para, posteriormente, serem aplicados valores numéricos às fórmulas. No livro do ensino fundamental, observou que a apresentação das razões trigonométricas se dá pela definição das palavras “trigono” e “metria”. Identificamos, também, uma sucinta menção à história da trigonometria. Em linhas gerais, a pesquisadora concluiu que nos dois livros são apresentadas rapidamente as fórmulas trigonométricas e, além disso, contém um número considerável de exercícios repetitivos que enfatizam a aplicação de fórmulas, pressupondo a necessidade dos alunos as memorizarem mecanicamente.

Nesse contexto, Borges (2012) também analisou três livros didáticos do ensino médio, tendo como base as diferenças e semelhanças encontradas nos três exemplares de livros didáticos, como também as propostas de ensino apresentadas nos PCN e nas matrizes curriculares do ensino médio. Nessa análise, a autora percebeu que os três livros têm uma boa exploração do conteúdo, mas somente um dos livros apresenta uma revisão de trigonometria e explora muitos problemas que envolvem o cálculo de distâncias. A listagem do conteúdo apresentada nos três livros é análoga, no entanto se diferencia na ordem cronológica de apresentação do conteúdo. Em geral, observou em dois desses livros pontos positivos como a introdução do tema por meio de situação-problema. Segundo Borges (2012, p.22):

É possível verificar, então, que nos livros A e B, sempre que possível, os conteúdos de Trigonometria são introduzidos através de situações-problema, enquanto no livro C, o conteúdo nunca é introduzido através dessa abordagem. Para os três livros, foram encontrados exercícios resolvidos, como também exercícios de revisão ou complementares, em quantidade considerada satisfatória para cada item. É possível perceber então que, nos três livros, os conteúdos apresentados foram bem explorados, porém com abordagem que em muitos casos não exigiam nenhuma reflexão do aluno.

As demais pesquisas citadas, analisaram propostas curriculares a respeito do ensino de trigonometria. Nesses trabalhos, foram discutidas questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem desse conteúdo, enfocando as dificuldades apresentadas pelos alunos em compreender os conceitos de trigonometria e também a sua abordagem tradicional (apresentação de definições e propriedades seguida de exercícios). Com base em alguns pressupostos foram elaboradas propostas de cunho didático com vistas a contribuir para/no ensino de trigonometria. Em geral, essas pesquisas indicaram metodologias de ensino diferenciadas que, ao serem aplicadas, tiveram impacto positivo no ensino de trigonometria.

Quanto aos artigos publicados, foram identificados sete, sendo que todos eles enfatizaram abordagens para o ensino de trigonometria, seja por meio de softwares ou de atividades contextualizadas. Nas pesquisas de Lopes (2013) e Gomes (2013), por exemplo, foi produzido um caderno com propostas de atividades de caráter investigativo. Lopes (2013) elaborou atividades que são resolvidas mediante o uso do software GeoGebra³ que tem como objetivo tanto familiarizar os alunos com o software, quanto investigar os conceitos e propriedades das razões trigonométricas no triângulo retângulo e no ciclo trigonométrico. Por sua vez, Gomes (2013) pretendeu levar ao conhecimento de professores de matemática possíveis articulações pedagógicas entre a trigonometria e sua história. Para tanto, criou uma sequência de ensino com enfoque geométrico e com atividades baseadas em conteúdos da geometria euclidiana, abordando, ainda, aspectos históricos, geométricos e algébricos e que utilizam a calculadora para serem resolvidas.

A pesquisa de Quartieri et. all. (2014) apresentou algumas atividades que são oriundas das práticas laborais de engenheiros civis. Nesse contexto, essas atividades envolvem o cálculo de áreas de triângulos quaisquer, para serem desenvolvidas na sala de aula. Para resolvê-las, torna-se necessário utilizar a lei dos senos e a dos cossenos e também a fórmula da área de um triângulo qualquer. Verificamos que tais atividades envolvem um contexto extraescolar e, segundo os autores, a realização dessas atividades contribui no desenvolvimento da percepção da aplicabilidade da matemática.

Na pesquisa de Dionizio et. All. (2014) foi proposta uma atividade de trigonometria elaborada de acordo com as recomendações pontuadas pelos PCN (BRASIL, 1997), com intuito de trabalhar a trigonometria na resolução de problemas. Nesse contexto, os autores apontam algumas reflexões sobre a natureza dos erros apresentados por alunos do ensino médio em algumas atividades propostas. Objetivou-se, assim, explicitar as possibilidades de inserção da História da Matemática no campo da Etnomatemática na perspectiva dos processos de ensino e aprendizagem de trigonometria. Nas análises da produção dos alunos foram levados em consideração tanto o enunciado da questão como também os procedimentos utilizados pelos alunos para obter a solução das questões propostas. Ao analisar os procedimentos utilizados pelos alunos para resolver tais atividades os autores concluíram que não devemos focar apenas no erro ou no acerto do aluno, visto que a forma em que é proposta/redigida a questão pode contribuir para o erro ou a ausência de determinados procedimentos de solução pelo aluno.

³ Software de Geometria dinâmica

A pesquisa desenvolvida por Klein e Costa (2013) apresenta um estudo realizado com alunos do ensino médio com objetivo de propor uma metodologia que pudesse oportunizar a aprendizagem significativa no campo conceitual de trigonometria. As autoras salientam que o diferencial da metodologia proposta e adotada por elas é a pesquisa do professor sobre as concepções prévias que os alunos têm sobre o conteúdo a ser trabalhado em sala de aula. A partir disso, o professor terá condições de planejar e mediar as atividades que favorecem o conceito a ser trabalhado.

Observamos que as pesquisas apresentadas não assumem como foco a análise do ensino proposto de trigonometria em livros didáticos ou na proposta curricular, sendo este o diferencial de nosso trabalho. Nosso intuito é analisar como esse conteúdo está sendo conduzido nos livros didáticos e buscamos detalhes desse ensino proposto. Para isso, analisaremos as atividades propostas, bem como os métodos de resolução escolhidos para resolvê-las. Investigaremos, ainda, a maneira escolhida para apresentar o conteúdo e as justificativas de trigonometria no triângulo retângulo, enquanto objeto matemático no ensino fundamental .

Dessa forma, percebemos em alguns dos trabalhos discutidos certa aproximação ao que pretendemos investigar, ao apresentarem uma análise de como a trigonometria aparece nos livros didáticos com base em critérios oriundos dos PCN nos revelando algumas características do ensino proposto nesses livros. E, desse modo, nos leva a refletir sobre o ensino de trigonometria de modo a perceber outros detalhes que ainda não foram ressaltados, como também a comparar alguns dos resultados apontados pelos pesquisadores com os que trataremos com nossa investigação, propiciando uma reflexão sobre o que está sendo proposto no ensino de trigonometria. Assim, nosso trabalho visa colaborar para o desenvolvimento de pesquisas futuras, referentes a análises de livros didáticos de matemática quanto a favorecer uma reflexão de como está sendo conduzido o ensino de trigonometria nos livros didáticos atuais.

Como já explicitamos, o nosso objetivo é caracterizar o ensino de trigonometria em livros didáticos. Para isso, analisaremos detalhadamente a proposta de ensino apresentada pelos autores nos livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental , aprovados pelo PNLD (2014) com o apoio da Teoria Antropológica do Didático. A escolha por esse nível escolar se dá unicamente por ser nessa fase que os estudos sobre o tema têm início. Desse modo, pretendemos, responder a seguinte questão: ***Como é proposto o ensino da Trigonometria em livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental?*** No próximo capítulo apresentamos nossas escolhas teóricas e metodológicas para responder essa questão de pesquisa.

2 ESCOLHAS TEÓRICAS E METODOLÓGICAS

Neste capítulo, retomamos, inicialmente, nossos objetivos de pesquisa com intuito de esclarecer o nosso propósito ao realizar essa pesquisa. Em seguida, expomos e justificamos nossas escolhas teóricas e metodológicas que permitirão atingir os objetivos definidos.

2.1 OBJETIVOS DA PESQUISA

Concordamos com Kaspary (2014) ao compreender o livro didático como recurso didático que pode influenciar diretamente o delinear de uma aula. Além disso, acreditamos que o livro didático possui papel importante no atual cenário da educação brasileira e, em algumas situações assume a responsabilidade de indicar os conteúdos considerados importantes a serem ensinados pelo professor e aprendidos pelos estudantes. Assim, tendo em vista a significância pedagógica desse recurso, consideramos fundamental saber como está sendo conduzido o ensino de trigonometria nos livros didáticos. Nesse contexto, definimos os nossos objetivos, como segue:

Objetivo Geral: Caracterizar o ensino de trigonometria em livros didáticos destinados ao 9º ano do ensino fundamental, aprovados pelo PNLD do ano de 2014.

Objetivos Específicos:

- Analisar conceitos, procedimentos e algoritmos usados no estudo de trigonometria em livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental.
- Analisar as escolhas didáticas realizadas por autores dos livros didáticos relativas ao ensino de trigonometria.

Ao buscar atingir nosso primeiro objetivo específico, queremos compreender quais são as escolhas dos autores relativas aos conteúdos matemáticos: o que decidem apresentar? Que propriedades, conceitos e definições são apresentados nos livros didáticos? Para responder nosso segundo objetivo, vamos analisar as escolhas de abordagens desses conteúdos: como está sendo conduzido esse ensino? E aliado a esses dois objetivos, queremos analisar que tipos de atividades estão sendo propostas? São atividades envoltas de um contexto matemático ou extraescolar? Acreditamos que ao atingir os nossos objetivos específicos, conseguiremos caracterizar o ensino atual da trigonometria proposto nos livros

didáticos do 9º ano do ensino fundamental. É importante lembrar que a análise que propomos realizar nos livros didáticos além de ocorrer de maneira diferente, tem objetivos distintos da que é realizada periodicamente pelo PNLD.

Como já mencionamos, a avaliação realizada pelo PNLD tem como objetivo distribuir coleções de livros didáticos com certo nível de qualidade. Os livros inscritos são submetidos a uma avaliação qualitativa realizada por especialistas e, após, são publicadas resenhas das coleções aprovadas. Essas resenhas têm o intuito de apresentar um panorama geral do livro e, assim, auxiliar os professores na escolha do livro didático mais adequado às necessidades da comunidade escolar a qual está inserido e ao seu projeto pedagógico.

Na avaliação qualitativa são observados critérios comuns a todas as áreas do conhecimento, como: a adequação didática e pedagógica, a qualidade editorial e gráfica e, a pertinência do manual do professor. Além disso, nesses livros não pode haver expressões que induzem ao preconceito de origem, raça, sexo, cor, idade ou quaisquer outras formas de discriminação e nem conter erros conceituais. Para atingirmos nossos objetivos é necessário analisar o que e como é proposto e, para isso, utilizaremos como aporte teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999), pois ela possui elementos que favorecem tal estudo, como discutiremos a seguir.

2.2 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO (TAD)

A Teoria Antropológica do Didático situa a atividade matemática no conjunto das atividades humanas e das práticas institucionais. Em nosso trabalho, se refere às atividades matemáticas apresentadas nos livros didáticos, em particular no estudo da trigonometria no triângulo retângulo. Nessa teoria a análise e a modelagem dessas atividades são realizadas por meio de um sistema designado por Chevallard como organização praxeológica ou praxeologia que permite compreender, descrever, analisar e modelar as atividades humanas. Antes de discutirmos a noção de organização praxeológica (ou praxeologia), se faz necessário apresentar alguns termos que são usados de modo recorrente e que são fundamentais para a compreensão da teoria: os objetos (O), as pessoas (X) e as instituições (I).

O termo instituição (I) nessa teoria pode se referir a um órgão governamental (uma secretaria de educação, um ministério), um livro, um curso ou uma sala de aula, por exemplo. Para Chevallard (1999) a instituição (I) é um dispositivo social que possui características que determinam formas de pensar e de fazer próprias para os sujeitos que pertencem a ela. Segundo o autor, quando uma pessoa passa a ocupar uma posição em uma instituição, ele se

torna sujeito ativo dessa instituição e contribui para a vida da instituição por ser subordinado a ela. Por sua vez, de acordo com Bosch e Chevallard (1999) um objeto (O) é algo que existe para ao menos uma pessoa (X). Em outras palavras, considerando o objeto um saber, ele só existirá para uma pessoa (X) ou para uma instituição (I) quando existe uma relação entre os mesmos, que o declara como existente.

Por exemplo, um determinado saber matemático é considerado um objeto se o consideramos como fruto de uma ação humana. Dessa maneira, a relação institucional (R_I) associada a um objeto (O) do saber pode ser compreendida por um conjunto de tarefas que devem ser executadas por técnicas que são determinadas pelos sujeitos que pertencem à instituição I. Por exemplo, se a instituição for os livros didáticos, os sujeitos os professores e, o objeto for o ensino de trigonometria, a R_I (O) pode ser definida pelo conjunto de tarefas associadas ao ensino de trigonometria, as quais são executáveis por meio de técnicas determinadas pelos sujeitos (professores) das relações institucionais.

Nesse contexto, a ideia de organização praxeológica permite analisar como um determinado saber se *comporta* em uma instituição. Assim, fazer matemática, estudá-la e também ensiná-la, enquanto ação humana pode ser descrita por meio da noção de praxeologia. Chevallard (1999) compreende a praxeologia como sendo a realização de uma tarefa (t) pertencente ao tipo de tarefa (T), e resolvida por meio de uma técnica (τ). Essa técnica é justificada e esclarecida por elementos tecnológicos (θ) que por sua vez são explicados por uma teoria (Θ). Isso parte do postulado básico da TAD que toda atividade humana pode ser descrita e realizada por uma praxeologia, simbolizada pela notação $[T, \tau, \theta, \Theta]$. Explicaremos detalhadamente esses elementos no tópico *Elementos do modelo praxeológico*.

Sendo assim, o estudo detalhado de um tema matemático, como a trigonometria, pode ser realizado por meio da análise praxeológica, que nos leva a sua descrição e investigação. E nesse caso, quando a praxeologia associada a um saber relativo às práticas de ensino, devemos levar em consideração duas realidades: a realidade matemática que poderá ser constituída e será denominada praxeologia matemática (ou organização matemática), e a maneira de como ela pode ser conduzida, apresentada, que se denomina praxeologia didática (ou organização didática). A noção de organização matemática está associada à necessidade de realizar tarefas matemáticas bem definidas. Assim, uma praxeologia matemática é formada em torno de tipos de tarefas realizados por meio de técnicas as quais são justificadas por uma tecnologia que, por sua vez, são justificadas por uma teoria.

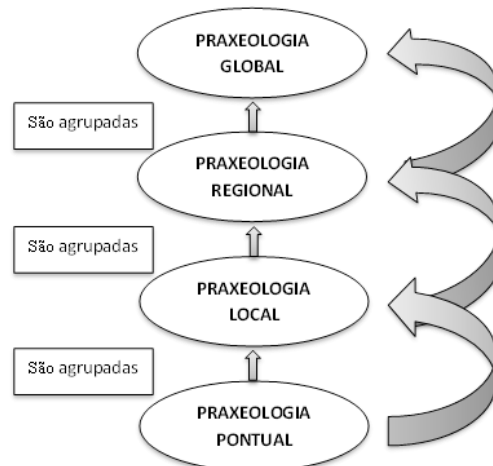
A praxeologia didática remete à necessidade de estudar questões associadas a como realizar o ensino ou o estudo de determinado conteúdo, a exemplo, a trigonometria. E essas

perguntas podem ser respondidas com o auxílio do conjunto formado por tipos de tarefas, técnicas e tecnologias mobilizados para o estudo de um determinado tema. Em uma organização didática a questão a ser respondida é “como descrever essa organização?”, o que Chevallard (1999) considera como momentos didáticos ou momentos de estudos, que são certos tipos de situações que descrevem a maneira escolhida para realizar o estudo planejado ou realizado. No tópico *Momentos didáticos*, comentaremos melhor sobre o assunto.

Dizemos ainda que uma praxeologia (matemática ou didática) pode ser classificada em quatro categorias: praxeologia pontual, local, regional e global. Segundo Chevallard (1999) em torno de um tipo de tarefa existe um trio formado por uma técnica, uma tecnologia e uma teoria o que constitui uma praxeologia pontual. O termo pontual faz referência a uma praxeologia relativa a um único tipo de tarefa. Quando as organizações pontuais se agregam em torno de outras praxeologias com técnicas justificadas por uma mesma tecnologia θ , formam-se as organizações locais. Do mesmo modo, as organizações locais podem se combinar em organizações regionais e nesse caso estão centradas em torno de uma teoria.

As organizações globais [Tijk/ τ ijk/ θ jk/ Θ k] podem ser obtidas em uma instituição pela agregação de diversas organizações regionais correspondendo a diversas teorias (Θ k). A figura 1, a seguir, ilustra a hierarquia entre tais organizações:

Figura 1 - ESTRUTURAS DAS PRAXELOGIAS MATEMÁTICAS



Fonte: Nossa autoria

Podemos pensar em uma organização pontual em torno da resolução de tipos de tarefas relacionadas à trigonometria, resolvidas por uma mesma técnica e justificadas pelo mesmo discurso tecnológico-teórico. E, já em uma praxeologia local, em torno de diferentes tipos de tarefas, respondidos pelo mesmo discurso tecnológico. Nesse sentido, podemos ampliar essa discussão até chegarmos a uma praxeologia regional em torno de uma teoria. A

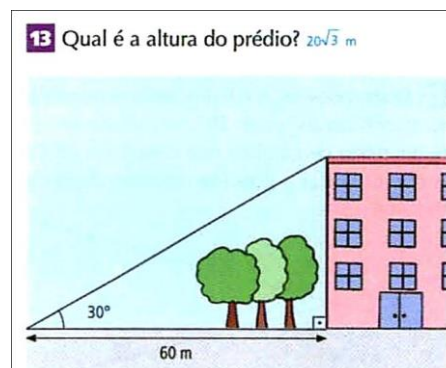
seguir, discutimos alguns elementos do modelo praxeológico que são importantes para nossa análise.

2.3 ELEMENTOS DO MODELO PRAXEOLÓGICO

O modelo praxeológico é constituído pela noção de tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias. Entende-se por tipo de tarefa um conjunto de tarefas (t) que compartilham de uma mesma ação definida. Chevallard (1999) apresenta também o termo, gênero de tarefa para se referir a um verbo de ação no infinitivo, como: comprar, subir, etc..., que por si só não explicita uma ação específica e definida, como ocorre na expressão “Subir uma escada”. Assim, podemos formar um conjunto de tipos de tarefas composto por aqueles se expressam pelo gênero de tarefas calcular, como por exemplo, o conjunto formado pelos tipos de tarefas: calcular o valor do seno, calcular o valor do cosseno, calcular o valor da tangente.

Quando uma tarefa t pertence a um tipo de tarefa T escreve-se $t \in T$. Por exemplo, o tipo de tarefa *calcular o valor do seno de um ângulo*, pode ser composto de várias tarefas que remetem a essa ação, como calcular seno 20° e/ou calcular seno 300° . Para responder uma tarefa de um tipo de tarefa (T) supõe-se ao menos uma maneira particular de resolver; essa maneira de fazer ou realizar a tarefa é designada por técnica (τ). Segundo Chevallard (1999), uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa T contém em princípio, uma técnica τ relativa à T . Em nossa pesquisa, queremos caracterizar os tipos de tarefas que estão presentes nos livros didáticos e as técnicas que são propostas para sua resolução. Vamos exemplificar com uma atividade extraída de um livro didático do 9º ano:

Figura 2 - CALCULAR A ALTURA DE UM PRÉDIO



Fonte: Praticando Matemática –Matemática - 9º ano, 2012, p. 215.

O enunciado⁴ fornece as medidas de um ângulo agudo (30°) e do cateto adjacente a esse ângulo (60 metros) e pede o cálculo da altura do edifício, que corresponde ao cateto oposto ao ângulo dado. Para identificar a praxeologia proposta no livro didático, vamos analisar a resolução a seguir fornecida no Manual do Professor.

Figura 3 - CÁLCULO DA TANGENTE DO ÂNGULO DE 30°

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{x}{60} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{60} \Rightarrow x = 20\sqrt{3}$$

Fonte: Praticando Matemática - 9º ano, p. 215.

Analisando a proposta de resolução presente no livro didático, verificamos que, para resolver tal atividade, foi substituído o valor da tangente do ângulo dado e a medida do cateto adjacente a esse ângulo na razão que define a tangente, o que gerou uma equação do 1º grau que foi resolvida e, assim encontrada a medida. Podemos dizer que a tarefa proposta foi calcular a medida do cateto oposto ao ângulo de 30° dada a medida do cateto adjacente. A técnica utilizada foi substituir o valor da tangente de 30° e a medida do cateto adjacente a esse ângulo na razão que define tangente e resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto oposto.

Nesse caso, foi possível descrever uma técnica que funciona como um algoritmo, permitindo, de fato, resolver a tarefa demandada, porém, nem sempre isso ocorre. Por exemplo, quando um problema é dado em língua materna é preciso transformar os dados em linguagem matemática, mas não há uma regra (algoritmo) que indique como fazer tal transformação. No que diz respeito ao quarteto praxeológico, quando a técnica não é algoritmizável não é possível descrevê-la, mesmo se há uma (ou várias) forma de resolver a tarefa proposta.

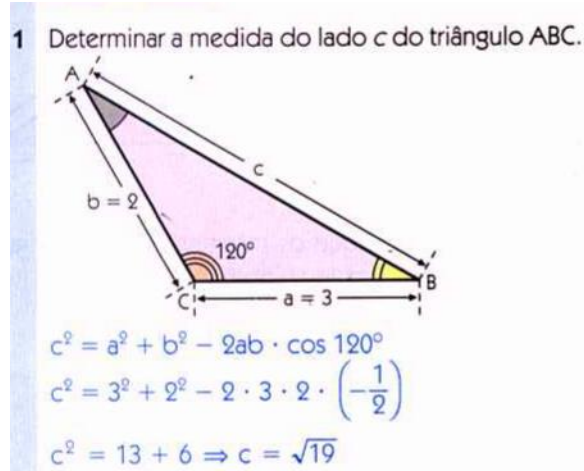
Cabe destacar o papel ostensivo do gráfico nessa tarefa, que, ao ser interpretado, nos fornece elementos que permitem compreender a tarefa. Entende-se por objetos ostensivos, aqueles manipuláveis na realização da atividade matemática. São aqueles percebidos com alguns de nossos sentidos, como uma figura. Em contrapartida, dizemos que objetos não ostensivos são aqueles que, presentes numa organização matemática, não são percebidos com os sentidos, como os conceitos matemáticos. Em nossa análise, o ostensivo ganha certa importância porque ele ajuda a distinguir tipos de tarefas, como veremos nos capítulos posteriores.

⁴Estamos considerando como enunciado todo o conjunto de dados de uma atividade

Ainda sobre as técnicas de resolução, Chevallard (1999) salienta que determinada técnica não seja suficiente para responder todas as tarefas $t \in T$ de certa instituição I , denotando que a técnica tem um alcance limitado. Assim, uma técnica pode funcionar para parte das tarefas pertencentes a um tipo de tarefa e fracassar para outra parte, com isso pode existir uma técnica superior e/ou complementar a outras técnicas que, ao ter uma abrangência maior que outra técnica, pode substituí-la e/ou complementá-la.

Por exemplo, o alcance da técnica que denominaremos de Teorema de Pitágoras (substituir a medida de um cateto e da hipotenusa (do outro cateto) na relação pitagórica para encontrar a medida do outro cateto (hipotenusa)) pode ser testado em uma tarefa do tipo: dadas as medidas de dois catetos, calcule a medida da hipotenusa. O Teorema de Pitágoras é válido somente para triângulos retângulos, sendo então necessário o uso de técnicas mais abrangentes ou complementares, em tarefas do mesmo tipo no caso em que o triângulo não seja retângulo. No exemplo a seguir, por exemplo, utiliza-se da lei dos cossenos para encontrar a medida dos lados a e b , do triângulo ABC .

Figura 4 - CALCULAR A MEDIDA DE UM LADO DO TRIÂNGULO



Fonte: Matemática: Aula por aula, 2005, p. 265.

Dependendo da instituição, algumas técnicas são mais adequadas do que outras e, ao longo do tempo, poderão ser substituídas por técnicas que, até então, não eram conhecidas. Por exemplo, as operações com números inteiros na escola básica não são justificadas matematicamente como ocorre no ensino superior, uma vez que elementos tecnológicos de justificativa estariam acima do desenvolvimento cognitivo dos alunos desse nível de escolaridade. Já no ensino superior, tal estudo das operações pode ser explicado por meio de discursos ligados à teoria dos números.

Outra questão a respeito da técnica é que podemos considerar, em alguns casos, um tipo de tarefa T como sendo uma técnica, haja vista que a técnica também pode ser considerada uma subtarefa, visto que também é expressa por um verbo de ação, por exemplo, na trigonometria no triângulo retângulo apresenta nos livros do 9º ano do ensino fundamental, um tipo de tarefa T_i é calcular o valor de uma razão trigonométrica, mais especificamente o cosseno de um ângulo, na tarefa ilustrada na figura 4, uma das técnicas utilizadas para resolvê-la é τ_j : calcular o valor do cosseno para posteriormente substituir esse valor na lei dos cossenos, juntamente com os demais dados.

Para que uma dada técnica (τ) seja reconhecida por uma instituição é necessário que exista um discurso interpretativo e justificativo que a explique, tornando-a inteligível e clara. Esse discurso é chamado de tecnologia e uma de suas funções é tornar a técnica compreensível, assegurando que ela permita realizar as tarefas do tipo T . Outra função da tecnologia é produzir novas técnicas, tendo em vista que ela pode trazer elementos tecnológicos que modificam uma dada técnica ou que amplie o seu alcance, superando assim, suas limitações e produzindo uma nova técnica. Para esclarecer e justificar a tecnologia bem como torná-la inteligível, tem-se a teoria (Θ) que é um discurso tecnológico que contém afirmações como proposições, teoremas e definições, dos resultados esperados. A teoria é, então, mais abrangente do que a tecnologia, localizando-se em um nível superior de justificação-explicação-produção.

No próximo tópico, discutimos os momentos de estudo. Acreditamos que a sua identificação e análise constitui-se como uma ferramenta teórica e metodológica pertinente para o estudo das escolhas dos autores de livros didáticos acerca da apresentação de certo conteúdo

2.4 MOMENTOS DE ESTUDO (OU MOMENTOS DIDÁTICOS)

Os momentos de estudos são utilizados para analisar uma organização didática. Chevallard (1999) distingue seis momentos didáticos que permitem compreender e descrever o caminho seguido para a realização desse estudo.

O primeiro momento didático refere-se ao **primeiro encontro com a organização matemática que será construída** e modificada durante o processo de estudo. Esse encontro pode acontecer de diferentes maneiras; em geral, o primeiro momento não tem a pretensão de explorar profundamente o objeto matemático em questão, o que será feito em outros momentos de estudo. O segundo momento consiste **na exploração do tipo de tarefa e do**

início da elaboração de técnicas para resolver esse tipo de tarefa. O estudo e a resolução de um tipo de tarefa acompanham a composição de ao menos um embrião de técnica. A partir disso, por meio de um problema particular poderá surgir nova técnica, que por sua vez poderá ser mais desenvolvida, organizada e complexa, com um grau maior de abrangência.

Em síntese, o segundo momento é de discussões sobre as técnicas que levaram à resolução do problema e por esse motivo é considerado por Chevallard como *coração da atividade matemática*. O terceiro momento é a **constituição do entorno tecnológico-teórico $[\theta, \Theta]$ relativo ao trabalho com a técnica**. Em geral esse momento está relacionado com os momentos anteriores. Desde o primeiro encontro com um tipo de tarefa existem elementos do entorno tecnológico-teórico sendo construídos. De acordo com Chevallard (1999), por vezes, as estratégias de estudo tradicionais fazem do terceiro momento a primeira etapa de estudo, o que pode caracterizar a abordagem didática como uma sequência de aplicação do bloco tecnológico-teórico.

O quarto momento é reservado para o **trabalho com a técnica**, no sentido de melhorá-la e torná-la eficaz, confiável e valorizar os conhecimentos que se tem dela, na tentativa de realizar uma tarefa. Esse é o momento de colocar em prova a técnica em um ou mais tipos de tarefas, adequados tanto quantitativamente quanto qualitativamente. Isto é, essas tarefas devem testar a técnica em diferentes momentos de estudo e em uma diversidade de tipos de tarefas, determinando a precisão e o alcance da técnica, implicando ou não no surgimento de uma nova técnica.

O quinto momento é dedicado à **institucionalização dos objetos matemáticos que farão parte da organização matemática**. Em algumas praxeologias, esse momento ocorre articulado com o momento da exploração do tipo de tarefas e a elaboração da técnica. É o caso quando a técnica é apresentada com os respectivos elementos que a justificam. Em geral, o quinto momento ocorre quando os conhecimentos são oficializados de acordo com a instituição em que se desenvolveu a atividade, em nosso caso, a instituição livro didático. Assim, esse momento tem por objetivo precisar “exatamente”, bem como distinguir os elementos necessários para o estudo do tema em questão naquela instituição: os que irão entrar de maneira definitiva para a organização matemática e os que não são mais necessários.

O sexto momento, é o momento da **avaliação da praxeologia**, que se articula com o momento da institucionalização. Caracteriza-se como um momento de reflexão de tudo que foi estudado; trata-se da avaliação da praxeologia. De acordo com Chevallard (1999), esses momentos não seguem uma ordem pré-determinada, pois podem acontecer repetidas vezes e também ocorrer de forma articulada, não tendo como precisar quando termina um e quando

inicia o outro; eles podem, inclusive, coincidir. Por exemplo, podemos observar o primeiro momento coincidindo com o terceiro quando o estudo de um determinado tema é iniciado por meio de uma abordagem axiomática.

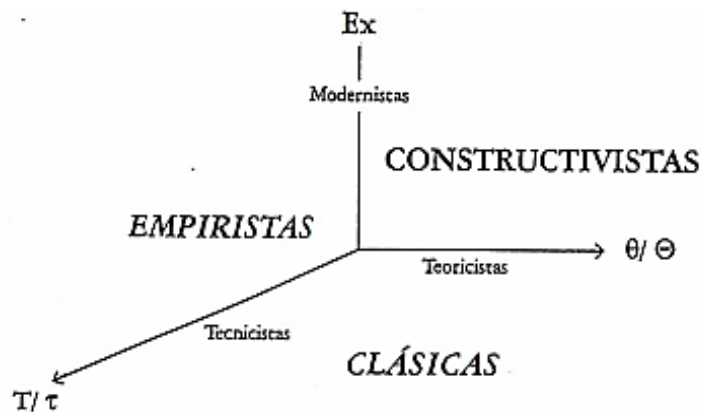
A compreensão de como ocorrem esses momentos e a sua identificação são fundamentais para a análise da organização didática proposta pelos autores dos livros didáticos. Nessa perspectiva, buscamos analisar cada um desses momentos de maneira a caracterizar as escolhas didáticas e a opção metodológica escolhida pelos seus autores.

2.5 MODELOS PRAXEOLÓGICOS DIDÁTICOS

Para o estudo da organização didática recorreremos também ao Modelo Praxeológico desenvolvido por Gáscon (2003) que, em relação aos momentos didáticos, constrói um modelo que esquematiza as possíveis formas de organizações didáticas. Acreditamos que esse modelo deve nos ajudar a caracterizar as organizações didáticas escolhidas pelos autores dos livros didáticos.

Gáscon (2003) considera três dimensões ou tendências didáticas possíveis no ensino da Matemática. Essas organizações didáticas são apresentadas em um espaço tridimensional, como segue.

Figura 5 - MODELO PRAXEOLÓGICOS DIDÁTICOS



Fonte: GASCON, 2003, p.21.

Cada um dos eixos do sistema tridimensional abriga um tipo de organização didática: teoricista, tecnicista e modernista. Segundo Gáscon (2003), tais organizações são consideradas unidimensionais, devido ao processo de estudo geralmente centrar-se em uma única dimensão. Desse modo, segundo o autor, em uma organização didática teoricista é priorizada a aprendizagem matemática voltada exclusivamente para a teoria, sendo evidenciado a sua sobreposição à prática de resolução de problemas. Além disso, nessa

organização se verifica a concepção de que aprender matemática significa aprender teorias. A tecnicista tem como característica principal a supervalorização do trabalho com a técnica. Nessa organização, o processo de ensino e de aprendizagem é visto como o ensino e a aprendizagem das técnicas algorítmicas.

Nesse sentido, compreende a resolução de problemas como o ato de *dominar* maneiras de resolução, o que significa que o aluno aprende por meio de treinamento repetido. Já uma organização didática modernista, composta pela experimentação, tem como característica a exploração de diversas técnicas e a contextualização do ensino. Desse modo, essa organização é contrária ao ensino mecânico e totalmente controlado pelo professor. De acordo com Gáscon (2003), a prática modernista significa aprender e ensinar matemática com diferentes problemas que levam a um descobrimento indutivo e autônomo.

Segundo o autor, a partir da combinação entre as organizações didáticas tecnicistas, teoricistas e modernistas é possível surgir novas organizações didáticas as quais derivam do modelo inicial, são elas: Clássica, Empirista e Construtivista. As organizações didáticas clássicas são originadas da articulação entre as organizações didáticas tecnicistas e as organizações didáticas teoricistas. Conforme Mattos (2011), uma das características dessas organizações didáticas está em conceber o ensino de matemática como um processo totalmente controlado pelo professor, e que quase sempre depende da exposição de conteúdos e exercícios retirados de livros didáticos, exercícios repetitivos e provas.

As organizações didáticas empiristas são formadas pela articulação entre as organizações didáticas tecnicistas e as organizações didáticas modernistas. A essas organizações didáticas estão associadas a ideia de resoluções de problemas sem uma justificativa formal e matemática por considerar que aprender matemática é um processo indutivo baseado em imitar o modelo proposto de atividade por meio de várias práticas. Com isso, tem como característica o foco em atividades práticas e técnicas.

Por sua vez, as organizações didáticas construtivistas, de acordo com Gáscon (2003), associam a dimensão exploratória da atividade matemática com o momento tecnológico teórico. Essas organizações didáticas têm como característica a contextualização da atividade matemática. Além disso, nessa organização a aprendizagem é um processo ativo que depende dos conhecimentos adquiridos anteriormente. Nesse aspecto, a partir das discussões sobre a TAD nesse capítulo, descrevemos como analisamos os livros didáticos.

2.6 PROCEDIMENTO DE ANÁLISES

Em nossa análise, utilizamos a Teoria Antropológica do Didático com o intuito de evidenciar as organizações matemáticas e didáticas propostas pelos autores dos livros didáticos. Nesse contexto, analisamos os tipos de tarefas e técnicas mobilizadas nas resoluções das tarefas, bem como o discurso matemático que justifica e explica o uso dessas técnicas no intuito de caracterizar a organização matemática. O estudo da praxeologia didática que incide sobre a investigação dos momentos didáticos nos permitirá entender e descrever como é organizado e apresentado o estudo do tema. Cabe destacar que, das quatro coleções analisadas, apresentamos a descrição e análise detalhada da organização didática e a organização matemática das duas coleções mais adotadas (Praticando Matemática e Vontade de Saber Matemática) e dos demais livros, apresentamos uma discussão simplificada, destacando a diferença entre as praxeologias analisadas.

As análises nos renderam diversas idas e vindas, momentos de angústias e aflições, pois os dados que emergiram das análises possibilitaram seguir diversos caminhos e, nem sempre a escolha era fácil. A princípio, resolvemos identificar os tipos de tarefas por meio das técnicas que resolviam as tarefas, mas percebemos que ficaríamos limitados e não olháramos a variedade de tarefas propostas nos livros, haja vista que, se olharmos superficialmente diremos que tais técnicas se resumem a aplicação das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, assim, não perceberíamos algumas particularidades que mencionaremos no decorrer da análise.

A partir disso, tivemos a ideia de fixar os dados e variar o que queríamos encontrar ou calcular, a partir do enunciado da atividade, e assim surgiram os seis tipos de tarefas que, em sua essência, têm como tarefa *calcular o valor ou a medida de um dos lados de um triângulo retângulo*. Tal escolha poderia ser efetivada de dois modos, um que ficaria mais resumido e outro mais detalhado, sendo este último modo o escolhido. Observamos também se as atividades se diferenciavam ao estarem acompanhadas de um ostensivo ou algum complemento em seu enunciado que remetia a um contexto extraescolar ou a um contexto matemático. Não sabemos dizer se isso tem influência direta no ensino, mas achamos importante agrupar tais tarefas em dois grupos, sendo um composto pelas tarefas que apresentavam um contexto extraescolar e outro pelas tarefas que remetiam a um contexto matemático.

Tal escolha foi feita para melhor retratar e compreender o que os livros didáticos apresentam. Observamos que algumas tarefas não pertenciam a nenhum dos tipos até então

elaborados e, com isso, surgiram os demais tipos de tarefas. Vale ressaltar, que este foi um processo bastante demorado até decidirmos por uma organização em tipos e grupos de tarefa que poderia nos ajudar a caracterizar o ensino de trigonometria. É importante mencionar, que seguimos a mesma lógica de análise para as quatro coleções. Primeiramente analisamos a unidade ou o capítulo destinado ao estudo do conteúdo de trigonometria no livro didático e depois o restante do livro em busca de tarefas, comentários, sugestões ou alguma proposição matemática que faça referência ao tema em estudo.

Para que a análise não fique repetitiva, na apresentação da praxeologia matemática de cada coleção não discutiremos em detalhe tarefas e técnicas que já tenham sido apresentadas e discutidas anteriormente. Apenas indicaremos que elas estão presentes no referido volume e, desse modo, a cada novo livro analisado, evidenciaremos elementos novos. É pertinente destacar, que a ordem de apresentação do texto não é a mesma da realizada na pesquisa, pois buscamos, neste texto, escrever de forma a que o leitor possa melhor compreender os dados analisados.

2.7 LIVROS ANALISADOS

A investigação acerca da proposta do ensino de trigonometria é realizada por meio da análise praxeológica dos livros didáticos aprovados pelo Programa Nacional do Livro didático de 2014 (PNLD/2014). No Guia do PNLD 2014, são apresentadas dez coleções aprovadas, as quais foram submetidas ao processo de escolha pelos professores. A seguir, apresentamos a lista das coleções aprovadas, na ordem do mais vendida para a menos vendida, de acordo com o que foi publicado pelo Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE).

Quadro 1 - PNLD 2014 - COLEÇÕES MAIS DISTRIBUÍDAS POR COMPONENTE CURRICULAR MATEMÁTICA -2014

Listagem de livros	Autor	Editora	Quantidade
Praticando Matemática	Maria Vasconcellos e Álvaro Andrini	Editora do Brasil	645.823
Vontade de Saber Matemática	Joamir Souza e Patrícia Moreno Pataro	FTD	597.720
Projeto Teláris	Luiz Roberto Dante	Ática	505.596
Matemática – Bianchini	Edwaldo Bianchini	Moderna	292.346
Projeto Araribá – Matemática	Fabio Martins de Leonardo	Moderna	250.78
Matemática: Teoria e Contexto	Marília Ramos Centurion e José Jakubovic	Saraiva	224.733
Matemática - Ideias e Desafios	Dulce Satiko Onaga e Iracema Mor	Saraiva	101.902
Projeto Velear - Matemática	Antonio José Lopes	Scipione	75.854
Descobrimos e Aplicamos a Matemática	Alceu dos Santos Mazzeiro e Paulo Antônio F. Machado	Dimensão	72.161
Matemática - Imenes & Lellis	Luiz Márcio Pereira Imenes e Marcelo Cestari Terra Lellis	Moderna	64.428

Fonte: Autores da pesquisa

Para a escolha dos livros a serem utilizados no triênio é importante que a equipe pedagógica e os professores procedam a leitura das resenhas contidas no Guia do Programa Nacional do Livro Didático, tendo em vista o projeto político pedagógico da escola, bem como a realidade sociocultural da comunidade escolar. Segundo o MEC⁵ “a escolha deve ser realizada a partir de uma reflexão coletiva entre os diretores, os coordenadores pedagógicos e os professores das redes de ensino, com base nas orientações constantes no Guia de Livros Didáticos”.

No entanto, alguns pesquisadores como Zamon e Terrazzan (2013) revelam que a falta de conhecimento sobre o Programa e consequentemente sobre o Guia por parte das equipes de gestores, coordenadores e professores, tem levado as escolas a sujeitarem-se a procedimentos de divulgação das obras realizados pelas editoras, o que pode influenciar na escolha do livro. Desse modo, não podemos afirmar que, atualmente, a escolha dos livros didáticos é realizada pelo professor ou equipes de gestores apenas em vista da necessidade escolar.

As coleções que subsidiarão nossa pesquisa são as quatro mais vendidas, o que é possível verificar na tabela apresentada anteriormente. Utilizaremos as resenhas fornecidas no Guia do PNLD/2014 para uma visão geral dessas coleções. Consideramos válido ressaltar que

⁵Disponível em:

<http://portal.mec.gov.br/pnld/index.php?option=com_content&view=article&id=13658> Acesso em: 17 jul. 2015

as resenhas apresentam a discussão da abordagem metodológica predominante na coleção e também que em todas as coleções, o conteúdo de trigonometria é apresentado no livro do 9º ano do ensino fundamental e apresentamos, a seguir, uma visão geral dos livros que analisamos.

▪ **Coleção Praticando Matemática**

Essa coleção foi a mais vendida, nela o estudo de trigonometria é apresentado na unidade 8, sessão 3, nas páginas 203 a 220. Em nossas análises, verificamos que algumas técnicas auxiliares utilizadas para resolver alguns exercícios de trigonometria são apresentadas no capítulo 7, sessão 1 - Teorema de Pitágoras, página 18. No Guia do livro didático (BRASIL, 2014) é mencionado que as atividades são propostas de forma equilibrada após a apresentação de cada tema, mas são poucas as propostas de investigação e de descoberta apresentadas. A metodologia segue o modelo de iniciar o estudo de um conteúdo com a explanação matemática, seguido de exemplos e posteriormente exercícios.

▪ **Vontade de saber – Matemática**

Essa foi a segunda coleção mais vendida, na qual o conteúdo de trigonometria é apresentado na unidade 7, páginas 159 a 175. Assim como no livro *Praticando Matemática*, verificamos que algumas técnicas auxiliares mobilizadas para responder tarefas de trigonometria são institucionalizadas em sessões anteriores, como *Relações métricas no triângulo retângulo* (– página 152) e *Teorema de Pitágoras* (-página 156), nessa mesma unidade. No Guia (BRASIL, 2014) verificamos que o estudo de determinados conteúdos se dá inicialmente com a explanação matemática do tema, seguido de exemplos e exercícios.

▪ **Projeto Teláris**

O conteúdo de trigonometria nesta coleção, que foi a terceira mais vendida, está apresentado no capítulo 7, páginas 203 a 217. Assim como nos outros livros, algumas tarefas sobre trigonometria para serem resolvidas mobilizam técnicas auxiliares institucionalizadas em capítulos anteriores, particularmente nos capítulos sobre *Relações métricas no triângulo retângulo* e *Teorema de Pitágoras* (capítulo 6, sessões 3 e 4, respectivamente). Em nossa análise também verificamos que algumas atividades que utilizam técnicas referentes à trigonometria, são propostas no capítulo 8, *Perímetro, áreas e volumes*, página 230, sendo este um diferencial entre os outros livros analisados, que trazem esse conteúdo antes do tópico de trigonometria. De acordo com o Guia (BRASIL, 2014), a metodologia adotada segue primeiramente a introdução dos conceitos por meio de um problema e depois pela

sistematização dos conteúdos, seguido de exercícios. Em relação às atividades, a coleção apresenta algumas sugestões de atividades com a utilização de softwares gratuitos.

- **Matemática - Bianchini**

Nesta coleção, a quarta mais vendida, o conteúdo de trigonometria é conduzido no capítulo 6, páginas 160 a 179. Assim como nos outros livros, em tarefas sobre trigonometria também são mobilizadas técnicas auxiliares institucionalizadas em capítulos anteriores, como o capítulo 5, Triângulos Retângulos. Segundo o Guia (BRASIL, 2014), os conteúdos são apresentados por meio de explanação teórica seguida de exemplos e exercícios que procuram sistematizar o conteúdo a ser estudado.

No próximo capítulo, seguem as discussões relativas às análises das praxeologias didática e matemática de cada um dos livros analisados.

3 PRODUÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Nesse capítulo, inicialmente apresentamos e discutimos como foram organizadas as atividades analisadas. Faz-se necessário esclarecer que, primeiramente, as agrupamos em dois grupos e depois subdividimos esses grupos em tipos de tarefas. Também apresentamos as técnicas trabalhadas em cada tipo de tarefa e trazemos de antemão alguns dados e discussões referentes a algumas técnicas. Em seguida, expomos as análises das organizações didática e matemática dos livros que deram origem tanto aos grupos de tarefas, quanto ao tipos de tarefas e às técnicas. Ao final, traçamos algumas compreensões a partir dos dados analisados. A opção por apresentar inicialmente os dados encontrados, deu-se por acreditarmos que essa escolha pode tornar a leitura da análise mais compreensível para o leitor.

3.1 GRUPOS DE TAREFAS

A análise das atividades propostas nos livros *Praticando Matemática* (L_1), *Vontade de Saber Matemática* (L_2), *Projeto Teláris* (L_3) e *Bianchini - Matemática* (L_4) nos permitiu agrupar as atividades em dois grupos de tarefas descritos como segue:

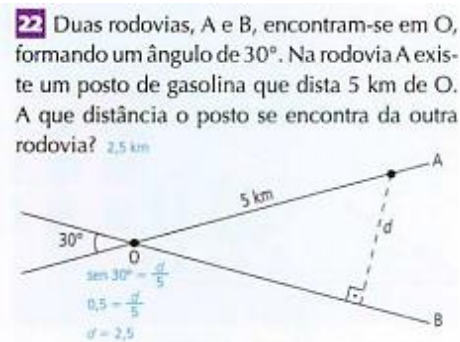
- *Resolver uma situação que envolve triângulos retângulos em um contexto extraescolar* (G_1),
- *Resolver uma situação que envolve triângulos retângulos em um contexto matemático* (G_2)

Cada atividade foi analisada a partir do seu enunciado e da figura que o compõe e de acordo com o ambiente a qual remete, que neste caso é o ambiente matemático ou extraescolar, no qual foram constituídos os dois grupos descritos. Assim, entendemos por contexto, o ambiente (matemático ou extraescolar) que a mensagem emitida pelo enunciado da atividade remete, em conjunto com o ostensivo que a acompanha, ajudando-a em sua compreensão. Desse modo, utilizamos o termo contexto unicamente para referenciar o ambiente extraescolar e matemático que tais atividades se referem.

Assim, não estamos utilizando o termo contexto para indicar que essas atividades são contextualizadas conforme entendido pelos PCN, até porque, além de esse não ser o foco dessa pesquisa, quando olhamos para as técnicas utilizadas para resolvê-las, verificamos que as mesmas técnicas são empregadas para responder as tarefas pertencentes aos dois grupos, não nos dando dados suficientes para as caracterizarem.

Nesse sentido, o grupo G_1 é composto por tarefas que, por meio de um pequeno texto ou de uma *figura-contexto*, fazem referência ao dia-a-dia, como por exemplo, as que demandam a ação como: calcular a altura de uma pipa em relação ao solo de um avião em relação ao solo ou de uma árvore. Para ilustrar as tarefas desse grupo, um exemplo é dado a seguir:

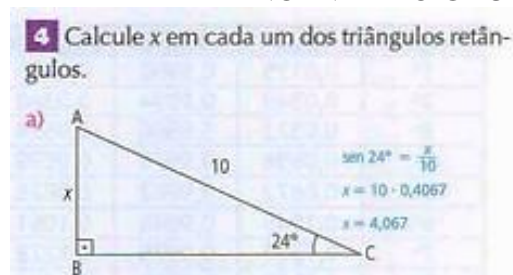
Figura 6 - TAREFA PERTENCENTE AO GRUPO G_1



Fonte: Coleção Praticando Matemática – 9º ano, 2012, p. 216

Para responder a atividade se observa a necessidade da interpretação do seu enunciado e da figura que a acompanha, para entendermos qual é a tarefa, que nesse caso é calcular o cateto oposto ao ângulo de 30° , dado a medida da hipotenusa e posteriormente resolvê-la. Por sua vez, o grupo de tarefas G_2 é composto por tarefas que remetem ao universo matemático, sendo resolvidas mediante a mobilização de conceitos, relações e representações matemáticas, como no seguinte exemplo.

Figura 7 - TAREFA PERTENCENTE AO GRUPO G_2



Fonte: Coleção Praticando Matemática – 9º ano, 2012, p. 210.

Observamos que essa atividade não exige uma interpretação como àquelas que pertencem ao grupo G_1 por serem mais objetivas em seu enunciado. Assim, para responder a tarefa “calcular o cateto adjacente ao ângulo de 24° , dada o valor da hipotenusa” como mostra a imagem, utiliza-se o seno. É importante esclarecer, que utilizamos a palavra *atividade* para indicar o modo como o autor descreve a tarefa no livro e a palavra *tarefa* para indicar que ao interpretar uma atividade a modelamos. Isto é, reescrevemos de outra maneira, mantendo a

ação a ser realizada com intuito de identificar o tipo de tarefa ao qual pertence a tarefa e, desse modo, uma atividade pode fazer menção a um ou vários tipos de tarefas.

3.2 TIPOS DE TAREFAS

A análise do ensino de trigonometria proposto pelos autores dos livros didáticos nos permitiu evidenciar o gênero de tarefa *calcular* e, associado a ele, verificamos as expressões: calcular o valor de uma razão trigonométrica, a medida de um lado de um triângulo ou de um ângulo, calcular o valor do perímetro e/ou área de uma superfície poligonal fechada. Foi a partir dessas e de outras expressões que identificamos dez tipos de tarefas, a princípio, sem se preocupar com contexto que as tarefas apresentavam.

Os tipos de tarefas estão contidos em um dos grupos de tarefas identificados e os nomeamos da mesma forma independente do grupo ao qual pertence, pois assim teríamos um indicativo de qual tipo de tarefa é mais explorado em um livro, independente do contexto que a qual se insere. E para organizar os tipos de tarefas mediante os grupos, atribuímos a cada tipo de tarefa um índice da forma $T_{K,J}$, sendo que K indica o grupo ao qual pertence o tipo de tarefa ($G_K \rightarrow T_K$). O sub-índice J , onde $J \in \{1, \dots, 12\}$ foi atribuído com a intenção de diferenciar os tipos de tarefas, tendo em vista a atribuição do índice K . Dessa forma, para identificar de que grupo de tarefas um determinado tipo de tarefa pertence, basta observar o índice K , onde $K=1$ ou $K=2$ que se refere ao grupo G_1 e G_2 . No quadro a seguir apresentamos todos os tipos de tarefas identificados em cada livro, bem como, a quantidade de tarefas identificada em cada tipo.

Tabela 1 - QUANTITATIVO DE TAREFAS PERTENCENTES AOS TIPOS

Tipos de tarefas	L₁	L₂	L₃	L₄
T _{k.1} : Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	12	6	2	7
T _{k.2} : Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo	11	9	15	7
T _{k.3} : Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	5	2	1	6
T _{k.4} : Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida do cateto oposto e a desse ângulo	1	1	7	6
T _{k.5} : Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto oposto a um ângulo e a desse ângulo	6	4	7	8
T _{k.6} : Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto adjacente e de um ângulo.	4	2	6	2
T _{k.7} : Calcular a medida de um ângulo, dadas as medidas de dois lados de um triângulo	3	9	3	8
T _{k.8} : Calcular o valor de uma razão trigonométrica	6	34	17	16
T _{k.9} : Calcular o perímetro	2	4	0	5
T _{k.10} : Calcular a área	1	4	13	2

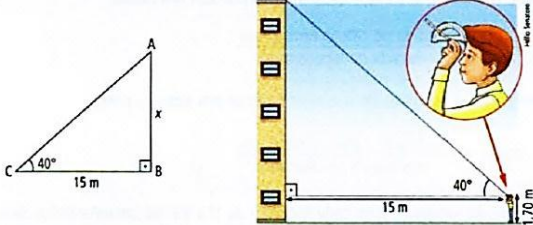
Fonte: Autores da pesquisa

Percebemos que alguns tipos são mais explorados do que outros e isso se diferencia nos livros. De certa forma, observamos que isso pode indicar uma estratégia dos autores para a compreensão do conteúdo de trigonometria, como também, em proporcionar uma variedade de tipos de tarefas para trabalhar com as técnicas elaboradas, daremos mais detalhes no próximo tópico.

Vale lembrar que as tarefas pertencentes a um tipo de tarefa contido no grupo G_1 mobilizam as mesmas técnicas matemáticas que as que compõem o grupo G_2 . A diferença é que, para resolver as tarefas pertencentes ao G_1 , existe um processo de modelização implícito, o qual é composto por etapas cujas quais podem ser mais ou menos valorizadas (interpretar o contexto, resolver a tarefa matemática, voltar ao contexto, para interpretar o resultado) o que pode ser observado na atividade a seguir:

Figura 8 - EXPLORAÇÃO DO TIPO DE TAREFAS E ELABORAÇÃO DA TÉCNICA

Agora podemos resolver o problema da altura do prédio da escola...



O triângulo ABC tem um ângulo de 40° .

$$\operatorname{tg} 40^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto a } 40^\circ}{\text{medida do cateto adjacente a } 40^\circ}$$

Verificamos na tabela que $\operatorname{tg} 40^\circ \cong 0,84$.

$$0,84 = \frac{x}{15}$$

$$x = 0,84 \cdot 15$$

$$x = 12,6 \text{ m}$$

Somando a essa medida 1,70 m, que é a distância do transferidor ao solo, obtemos a altura aproximada h do prédio:

$$h = 12,6 + 1,7 = 14,3 \text{ m}$$

Fonte: Coleção Praticando Matemática – 9º ano, 2012, p. 204.

A imagem mostra uma representação de um problema do cotidiano – calcular a altura do prédio da escola – por meio do triângulo retângulo, ao ser interpretado tem-se como tarefa é “calcular a medida do cateto oposto ao ângulo de 40° , dada a medida do cateto adjacente”. Assim, a tarefa pertence ao tipo de tarefas $T_{1.1}$: “Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo” e ela é resolvida por meio da mobilização de duas técnicas:

τ_8 : substituir o valor tangente de um ângulo e a medida do cateto adjacente (oposto) a esse ângulo na razão que define tangente e resolver equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto oposto (adjacente)

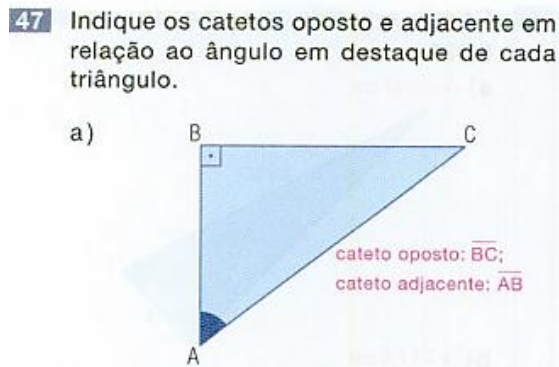
τ_{12} : Somar a medida encontrada a uma medida dada (ou a outra medida calculada) para encontrar a medida total pedida

Nessa tarefa, observamos que foi realizada uma aproximação da medida da altura do prédio, a partir do valor aproximado da tangente de 40° . Não verificamos detalhes ou justificativas para as aproximações de valores numéricos na trigonometria, o que identificamos foi algumas orientações no manual do professor para considerar os valores em até duas casas decimais na/para a resolução dos exercícios no capítulo dos livros analisados. Além disso, na tabela dos valores das razões trigonométricas apresentadas nos livros analisados, trabalha-se com uma ou duas casas decimais, podendo isso ser um critério a observar para a resolução das tarefas.

Por mais que tenhamos tentado catalogar todas as tarefas analisadas, identificamos algumas que não se encaixavam em nenhum dos grupos definidos por nós. Essas tarefas são

identificadas em alguns dos livros e demandam a ação de “indicar os lados de um triângulo em relação ao ângulo em destaque”, e são resolvidas por meio da técnica *identificar os lados de um triângulo*. Um exemplo apresentado a seguir.

Figura 9 - INDICAR OS CATETOS OPOSTO E ADJACENTE EM RELAÇÃO A UM ÂNGULO EM UM TRIÂNGULO RETÂNGULO.



Fonte: Coleção Praticando Matemática – 9º ano, 2012, p. 160.

Verificamos que, tanto a técnica quanto o tipo de tarefa, não possuem elementos tecnológicos teóricos matemáticos e nesse caso dizemos que esse é um tipo de tarefa que pertence e pode ser solucionado por uma técnica advinda da chamada *matemática escolar*, isto é, àquela matemática ensinada na escola que, não apenas proporciona o desenvolvimento de técnicas algoritmizáveis, conceitos e fórmulas, como também propiciam a criatividade e o desenvolvimento abstrato, favorecendo novas descobertas. Entendemos que a exploração desse tipo de tarefa, bem como da técnica reflete uma escolha didática do autor em relação ao conteúdo de trigonometria para posteriormente trabalhar com técnicas que dependem dessa identificação. Desse modo, achamos necessário discutir o quantitativo de tarefas com essa ação.

Tabela 2 - QUANTITATIVO DE TAREFAS PERTENCENTES AO TIPO: INDICAR OS LADOS DE UM TRIÂNGULO RETÂNGULO

L_1	L_2	L_3	L_4
4	8	0	0

Fonte: Autores da pesquisa

Verificamos que apenas os dois livros mais adotados exploram esse tipo de tarefa, sendo que o livro *Vontade de Saber – Matemática* é o que mais trabalha tarefas desse tipo. Nesse sentido, observamos nesses dois livros a preocupação em propiciar primeiramente as

tarefas que exploram a identificação dos lados do triângulo para depois trabalhar com técnicas e tarefas mais abrangentes. Assim, isso pode ser uma estratégia dos autores desses livros para proporcionar uma melhor compreensão da aplicação das demais técnicas institucionalizadas no capítulo.

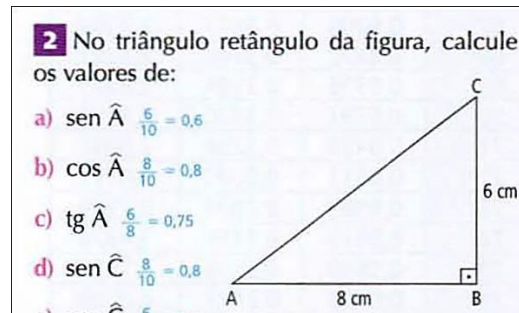
3.3 TÉCNICAS

As tarefas analisadas são respondidas mediante a mobilização de uma ou mais técnicas. Consideramos técnica, aquela que resolve determinada tarefa, de acordo com a proposta do livro didático em exemplos que antecedem as atividades e na própria resolução da atividade apresentada no Manual do Professor. Muitas vezes, algumas tarefas podem ser solucionadas por meio de outras técnicas, porém, analisamos a técnica apresentada no livro uma vez que o que nos interessa é a organização matemática proposta que consiste da intenção dos autores do livro didático.

Tendo em vista a subdivisão em tipos de tarefas que fizemos, observamos na resolução de algumas tarefas o emprego de um tipo de tarefa, que nesse caso torna-se uma técnica, o que está de acordo com a teoria (CHEVALLARD, 1999). Destacamos que cada técnica só foi modelada após a análise de várias atividades. É relevante mencionar que este é um trabalho longo de idas e vindas entre os tipos de tarefas e as técnicas, até encontrar um modelo para a praxeologia que nos parecesse representar o que encontramos. Assim, não se trata de modelar uma técnica a partir de uma única tarefa de um determinado tipo, como pode parecer na apresentação deste texto. A seguir, apresentamos as técnicas que identificamos na resolução das tarefas pertencentes a cada tipo.

- ✓ Técnicas mobilizadas nos tipos de tarefas: $T_{k,7}$: *Calcular a medida de um ângulo, dadas as medidas de dois lados de um triângulo* e $T_{k,8}$: *Calcular o valor de uma razão trigonométrica*

O tipo de tarefas $T_{2,8}$ é composto por tarefas cuja ação a ser executada é calcular o valor do seno, cosseno ou tangente de um ângulo, dado a medida de dois lados de um triângulo; esse tipo foi explorado em ambos os livros. Um exemplo é dado a seguir, calcular o seno do ângulo \hat{A} .

Figura 10 - CALCULAR O VALOR DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Fonte: Coleção Praticando Matemática – 9º ano, 2012, p. 210

Na resolução da tarefa observamos que para calcular o valor do seno do ângulo indicado, a técnica empregada é a combinação das técnicas τ_3 : *Substituir a medida do cateto oposto e da hipotenusa na razão que define seno para encontrar o valor do seno do ângulo* e τ_2 : *substituir a medida dos catetos (hipotenusa e cateto) na relação pitagórica para encontrar a medida da hipotenusa (do outro cateto)*.

Notamos que não é fornecida a medida da hipotenusa necessária para o uso da técnica τ_3 e que o seu cálculo é omitido. Entendemos que essa medida pode ser calculada por meio da técnica τ_2 . Talvez essa omissão esteja relacionada com o fato de τ_2 ter sido institucionalizada no capítulo anterior. Verificamos que a técnica τ_2 é sempre empregada em conjunto com outra que mobiliza elementos tecnológicos teóricos advindos da trigonometria, sendo assim, considerada uma técnica auxiliar nesse capítulo.

O tipo de tarefas $T_{k.7}$ é composto por aquelas que têm como ação a ser executada “calcular a medida de um ângulo”, sendo necessário, portanto, a medida ou o valor de dois lados de um triângulo retângulo, como no exemplo a seguir.

Figura 11 - TAREFA CALCULAR A MEDIDA DE UM ÂNGULO



Fonte: Coleção Praticando Matemática – 9º ano, 2012, p. 211

Para resolver a tarefa “calcular a medida do ângulo indicado, dada as medidas dos catetos” são empregadas as técnicas $\tau_{2.8}$: *calcular o valor de uma razão trigonométrica* e τ_9 : *usar a tabela trigonométrica para encontrar a medida de um ângulo (ou o valor de uma razão trigonométrica) definido pela razão trigonométrica atribuída (em relação a um ângulo dado)*.

Constatamos que nesse tipo de tarefa alguns tipos assumem o papel de técnica, como verificado na resolução do exemplo. Apresentamos a seguir as técnicas mobilizadas na resolução de tarefas pertencentes aos tipos $T_{k.8}$ e $T_{K.7}$.

Quadro 2 - TÉCNICAS MOBILIZADAS PARA RESOLUÇÃO DE TAREFAS DOS TIPOS $T_{K,8}$ E $T_{K,7}$

Nomenclatura	Descrição da Técnica	
	$T_{K,8}$	$T_{K,7}$
τ_3	Substituir a medida do cateto oposto e da hipotenusa na razão que define seno para encontrar o valor do seno do ângulo	
τ_4	Substituir a medida do cateto adjacente e da hipotenusa na razão que define cosseno para encontrar o valor do cosseno de um ângulo	
τ_5	Substituir a medida dos catetos na definição de tangente para encontrar o valor da tangente.	
τ_{15}	Substituir o valor do seno e do cosseno na relação que define tangente e realizar cálculos para encontrar o valor da tangente	
τ_{16}	Substituir o valor do cosseno (seno) na relação fundamental da trigonometria e realizar cálculos para encontrar o valor do seno (cosseno)	
τ_9	Usar a tabela trigonométrica para encontrar a medida de um ângulo (ou o valor de uma razão trigonométrica) definido pela razão trigonométrica atribuída (em relação a um ângulo dado).	Usar a tabela trigonométrica para encontrar a medida de um ângulo (ou o valor de uma razão trigonométrica) definida pela razão trigonométrica atribuída (em relação a um ângulo dado).
τ_{17}	Utilizar a calculadora para calcular o valor da razão trigonométrica (ou a medida de um ângulo)	Utilizar a calculadora para calcular o valor da razão trigonométrica (ou a medida de um ângulo)
$\tau_{2,8}$		Calcular o valor de uma razão trigonométrica
τ_{14}		Utilizar relações métricas no triângulo para encontrar a medida da altura relativa à base do triângulo (ou hipotenusa).

Fonte: Autores da pesquisa

As técnicas τ_{15} e τ_{16} são identificadas unicamente na resolução proposta em duas tarefas no livro *Projeto Teláris*: “calcular o valor da tangente desse ângulo” e “calcular o valor do cosseno de um ângulo, dado o valor do seno desse ângulo”. Já as técnicas τ_9 e τ_{17} , mobilizadas em várias resoluções, assim como a τ_2 , são consideradas auxiliares quando estão acompanhadas de outras que utilizam elementos tecnológicos teóricos referentes à trigonometria.


Identificamos algumas tarefas que são resolvidas somente com o emprego das técnicas τ_9 e τ_{17} e estas optamos por colocar à parte, pois acreditamos que, embora a sua exploração seja importante, as técnicas mobilizadas por si só, não fazem referência a um conteúdo matemático específico e estão mais relacionadas a uma escolha didática do autor e sendo justificadas pela matemática escolar, como podemos observar no seguinte exemplo.

Figura 12 - USO DA CALCULADORA PARA CALCULAR UMA RAZÃO TRIGONOMÉTRICA

Copie a tabela da página anterior, mas preencha-a com os valores aproximados na forma de número decimal. Use calculadora.

	sen	cos	tg
30°	0,5	0,865	0,577
45°	0,705	0,705	1
60°	0,865	0,5	1,73

Utilize estes valores aproximados: $\sqrt{2} = 1,41$ e $\sqrt{3} = 1,73$.



Fonte: Coleção ProjetoTeláris– 9º ano, 2012, p. 214.

Como podemos perceber, essa atividade tem como tarefa “calcular o valor das razões trigonométricas indicadas” e utiliza-se da técnica τ_{17} para ser resolvida. Com a mensagem que o balão traz podemos deduzir que nesse cálculo é para se considerar aproximação dos valores em no mínimo duas casas decimais.

Notamos que somente nos livros “Bianchini – Matemática” e “Projeto Teláris” é apresentada uma explicação sobre como utilizar a técnica τ_{17} , sendo que os demais livros apenas indicam o seu uso. Trazemos a seguir, um quadro em que apresenta o quantitativo de tarefas que mobilizam unicamente essa técnica de resolução.

Tabela 3 - QUANTITATIVO DE ALGUMAS TÉCNICAS MOBILIZADAS NO TIPO DE TAREFAS $T_{K.7}$ E $T_{K.8}$

Técnicas	L ₁		L ₂		L ₃		L ₄	
	T _{K.8}	T _{K.7}	T _{K.8}	T _{K.7}	T _{K.8}	T _{K.7}	T _{K.8}	T _{K.7}
τ_{17}	0	0	1	0	0	6	0	4
τ_9	3	9	6	6	0	6	6	6

Fonte: Autores da pesquisa

Observamos que em alguns livros as técnicas τ_{17} e τ_9 são mobilizadas sozinhas e em outros essas técnicas não são trabalhadas. Nesse sentido, percebemos que as propostas dos livros L₂ e L₄ são mais flexíveis quanto ao uso dessas técnicas que, embora não carreguem elementos tecnológicos matemáticos, se fazem importantes para auxiliar na compreensão e no uso de técnicas mais abrangentes.

✓ *Técnicas mobilizadas em tarefas pertencente aos tipos T_{kj} , onde $j= 1,2,3,4,5,6$.*

Esses tipos são compostos por tarefas que demandam como ação calcular a medida de um lado do triângulo retângulo e, para isso, no enunciado da tarefa são dadas algumas informações. Em alguns casos, como naqueles que envolvem um contexto matemático, essa “medida” representa o valor de um lado, sem fazer referência a um sistema de medida e nem a uma unidade. Em geral as técnicas mobilizadas nesses tipos de tarefas são:

Quadro 3 - TÉCNICAS MOBILIZADAS NOS TIPOS T_{kj} , ONDE $J= 1,2,3,4,5,6$

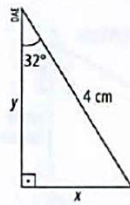
Nomenclatura	Descrição da Técnica
τ_6	Substituir o valor do seno de um ângulo e a medida da hipotenusa (cateto oposto a esse ângulo) na razão que define seno e resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto oposto (hipotenusa).
τ_7	Substituir o valor do cosseno de um ângulo e a medida do cateto adjacente (hipotenusa) a esse ângulo na razão que define cosseno e resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida da hipotenusa (cateto adjacente ao ângulo.).
τ_8	Substituir o valor da tangente de um ângulo e a medida do cateto adjacente (oposto) a esse ângulo na razão que define tangente e resolver equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto oposto (adjacente)
τ_{13}	Somar a medida encontrada a uma medida dada (ou a outra medida calculada) para encontrar a medida total pedida
τ_2	Substituir a medida dos catetos (hipotenusa e cateto) na relação pitagórica para encontrar a medida da hipotenusa (do outro cateto)

Fonte: Autores da pesquisa

Para exemplificar o uso de algumas dessas técnicas, apresentamos duas atividades. A primeira tem como tarefa calcular a medida dos catetos. Para tanto é necessário realizar duas ações: *calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo* ($T_{2,1}$) e *calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo* ($T_{2,3}$).

Figura 13 - EXPLORAÇÃO DO TIPO DE TAREFAS

Observe um exemplo no qual seno e cosseno de um ângulo dado nos permitirão encontrar medidas desconhecidas:



x : cateto oposto ao ângulo de 32° .

y : cateto adjacente ao ângulo de 32° .

$$\text{sen } 32^\circ = \frac{x}{4} \text{ e } \text{cos } 32^\circ = \frac{y}{4}$$

Na tabela, $\text{sen } 32^\circ \approx 0,53$ e $\text{cos } 32^\circ \approx 0,85$.

$$0,53 = \frac{x}{4} \quad 0,85 = \frac{y}{4}$$

$$0,53 \cdot 4 = x \quad 0,85 \cdot 4 = y$$

$$x = 2,12 \text{ cm} \quad y = 3,4 \text{ cm}$$

Fonte: Coleção Praticando Matemática – 9º ano, 2012, p. 204.

Como podemos observar na resolução, a medida do cateto adjacente e oposto ao ângulo de 32° foram obtidas mobilizando as técnicas:

τ_7 : substituir o valor do cosseno de um ângulo e a medida da hipotenusa (cateto adjacente a esse ângulo) na razão que define cosseno e resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto adjacente (da hipotenusa).

τ_6 : substituir o valor do seno de um ângulo e a medida da hipotenusa (cateto oposto a esse ângulo) na razão que define seno e resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto oposto a esse ângulo (hipotenusa).

A outra atividade proposta é calcular a altura de um pinheiro cujo tronco está quebrado, conforme figura abaixo:

Figura 14 - TAREFA ∈ TIPO G₁

33 Qual era a altura deste pinheiro? (Considere $\sqrt{3} = 1,7$.) 16,99 m

$\text{cos } 30^\circ = \frac{10}{y} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10}{y} \Rightarrow y = \frac{20\sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{34}{3} = 11,33$
 $\text{tg } 30^\circ = \frac{x}{10} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{x}{10} \Rightarrow x = \frac{10\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = 5,66$
 Então: $x + y = 16,99$

Fonte: Praticando Matemática, 9º ano, 2012, p. 218

Como o ostensivo gráfico utilizado representa a situação por meio de um triângulo retângulo, verificamos que a tarefa tem sua resposta mediante a resolução de duas ações:

calcular a medida da hipotenusa desse triângulo, dados o ângulo de 30° e a medida do cateto adjacente a este ângulo ($T_{1.6}$), e calcular a medida do cateto oposto ao ângulo de 30° , dada a medida do cateto adjacente ($T_{1.1}$). A solução proposta no livro didático é a soma das medidas encontradas.

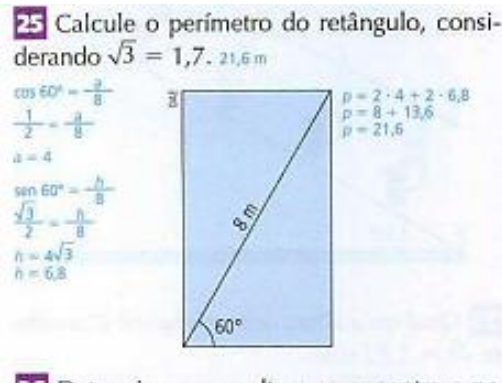
Desse modo, o cálculo da medida do cateto oposto a um ângulo de 30° é realizado por meio da técnica que nomeamos τ_8 : *substituir o valor tangente de um ângulo e a medida do cateto adjacente (oposto) a esse ângulo na razão que define tangente e resolver equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto oposto (adjacente) ao ângulo dado*. E a medida da hipotenusa é calculada por meio da técnica τ_7 : *substituir o valor do cosseno de um ângulo e a medida do cateto adjacente (hipotenusa) a esse ângulo na razão que define cosseno e resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida da hipotenusa (cateto adjacente ao ângulo)*. A altura do pinheiro é dada pela soma das duas medidas encontradas, e para isso podemos utilizar a técnica τ_{13} : *Somar a medida encontrada a uma medida dada (ou a outra medida calculada) para encontrar a medida total pedida*.

Observamos que a técnica τ_{13} também é considerada auxiliar e geralmente é mobilizada em atividades que apresentam contexto extraescolar e que ao final querem um valor “total”.

✓ *Técnicas mobilizadas no tipo de tarefa $T_{2.11}$: calcular a medida do perímetro e $T_{2.12}$: calcular a medida da área*

Esses dois tipos de tarefas foram explorados no capítulo destinado ao estudo do perímetro e área de figuras planas, anterior ao capítulo de trigonometria. Assim, as tarefas pertencentes a esse tipo, embora não sejam especificamente sobre trigonometria, são resolvidas mediante a mobilização de técnicas referentes a trigonometria associada a outras institucionalizadas em capítulos anteriores. Observamos na praxeologia analisada, que em outros tipos de tarefas alguma das técnicas mobilizadas em tarefas pertencentes a $T_{2.11}$ são consideradas tipos de tarefas e, nesse assume a função de técnica. Para exemplificar, apresentamos a resolução de duas atividades a seguir.

Figura 15 - EXEMPLO DE TIPO DE TAREFA PARA CÁLCULO DO PERÍMETRO.



Fonte: Coleção Praticando Matemática – 9º ano, 2012, p. 217.

Para calcular o perímetro do retângulo ilustrado é necessário conhecer a medida dos lados do retângulo, desse modo são mobilizadas as técnicas: $\tau_{2.1}$: “calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e desse ângulo” e $\tau_{2.2}$: “calcular a medida do cateto adjacente dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo” e em conjunto a técnica τ_1 : somar a medida de cada lado da figura para encontrar a medida do perímetro.

Já em outra tarefa com ação de calcular a área lateral de um prisma se trabalha com as técnicas $\tau_{2.1}$ e $\tau_{2.3}$.

Figura 16 - TAREFA CALCULAR A ÁREA DA LATERAL DO PRISMA E T_5

31 (Saresp) O prisma reto triangular da figura abaixo tem altura de 10 dm.

Sua base é um triângulo retângulo, conforme o desenho apresentado abaixo.

Considerando $\sin \alpha = 0,6$ e $\cos \alpha = 0,8$, a área lateral do prisma é, aproximadamente:

a) 130 dm² x c) 120 dm²
 b) 110 dm² d) 80 dm²

$\sin \alpha = \frac{a}{5} \Rightarrow a = 3$
 $\cos \alpha = \frac{b}{5} \Rightarrow b = 4$
 $A = (3 + 4 + 5) \cdot 10 = 120$

Fonte: Coleção Praticando Matemática – 9º ano, 2012, p. 218.

A resolução dessa tarefa nos mostra que ela é respondida por meio das técnicas: $\tau_{2.1}$: *calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo* e $\tau_{2.3}$: *calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas as medidas da hipotenusa e a desse ângulo*. E ainda a técnica denominada τ_{12} : *multiplicar o perímetro da base do prisma pela medida de sua altura para encontrar a sua área lateral*. Em geral as técnicas mobilizadas nesses tipos de tarefas são:

Quadro 4 - TÉCNICAS MOBILIZADAS NOS TIPOS DE TAREFAS $T_{K.9}$ E $T_{K.10}$

Nomen- clatura	Técnicas	
	T_9	T_{10}
$\tau_{2.1}$	Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo.	Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo.
$\tau_{2.2}$	Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo.	Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo.
$\tau_{2.3}$	Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo.	Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo.
$\tau_{2.4}$	Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida do cateto oposto e a desse ângulo.	Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dada a medidas do cateto oposto e a desse ângulo.
$\tau_{2.6}$	Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto adjacente e a de um ângulo.	---
τ_1	Somar a medida de cada lado da figura para encontrar a medida do perímetro	-----
τ_{10}	--	Substituir as medidas na formula da área conveniente a figura dada, realizar cálculos e obter a medida da área dessa figura.
τ_{12}	-----	Multiplicar o perímetro da base do prisma pela a medida de sua altura para encontrar a sua área lateral
$\tau_{3.11}$		Substituir o valor do seno e a medida dos catetos na fórmula $(a.b. \text{sen}\alpha)/2$ e realizar cálculos para encontrar a área do triângulo.
τ_2	Substituir a medida dos catetos (hipotenusa e cateto) na relação pitagórica para encontrar a medida da hipotenusa (do outro cateto)	Substituir a medida dos catetos (hipotenusa e cateto) na relação pitagórica para encontrar a medida da hipotenusa (do outro cateto)

Fonte: Autores da pesquisa

Em particular cada uma das técnicas τ_{12} e τ_{11} é empregada em apenas uma tarefa identificada, uma no livro *Praticando Matemática* e a outra no livro *Projeto Teláris*. As demais identificamos o seu emprego em várias tarefas propostas nos quatro livros analisados.

Mediante as tarefas e técnicas analisadas observamos que o ensino proposto de trigonometria traz em cena a aproximação dos valores e também o conteúdo de unidades e medidas. Nesses livros, embora apareçam tais assuntos, eles não são discutidos na unidade referente a trigonometria, e sim nos capítulos que os correspondem, verificamos algumas notas quanto a aproximação das casas decimais no decorrer do estudo de trigonometria. Nas tarefas que trabalham com medidas percebemos que não exploram a transformação das unidades e, nesse caso, trabalham com centímetros ou com metros.

Apresentamos a seguir detalhes da análise das organizações matemática e didática de cada um dos livros.

3.4 ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA E ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DOS LIVROS *PRATICANDO MATEMÁTICA E VONTADE DE SABER – MATEMÁTICA*

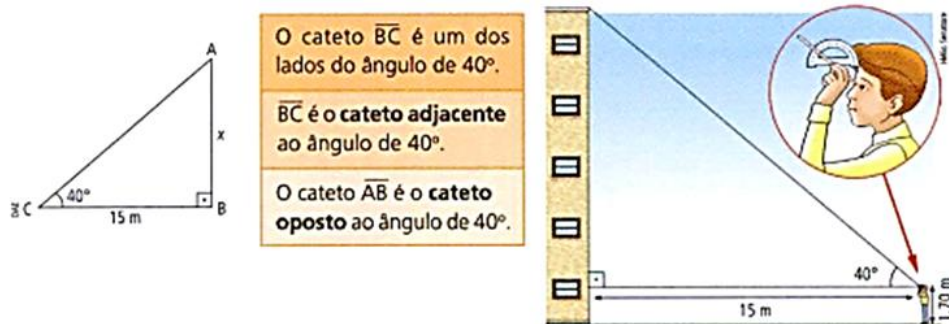
Os livros *Praticando Matemática* e *Vontade de Saber – Matemática* conduzem o ensino de trigonometria de maneira semelhante, no entanto, a identificação dos momentos didáticos nos permitiu verificar algumas diferenças na abordagem do assunto. Vejamos como cada livro explora esses os momentos didáticos.

Nesses livros, notamos que o primeiro encontro com a trigonometria ocorre na unidade destinada ao estudo tema e sem a pretensão de se aprofundar matematicamente no assunto. Desse modo, no livro *Praticando Matemática* esse encontro acontece por meio de um diálogo envolvendo dois personagens, em que se afirma a possibilidade de calcular a altura ou o comprimento de determinados objetos sem a necessidade de medi-los diretamente, conforme apresenta a figura 17, a seguir:

Figura 17 - PRIMEIRO ENCONTRO COM A TAREFA: COMO RESOLVER PROBLEMAS ENVOLVENDO TRIÂNGULOS RETÂNGULOS



Veja, na ilustração a seguir, o procedimento e as medidas que o professor Jorge anotou. Na sala de aula, ele desenhou esse triângulo:



Fonte: Coleção Praticando Matemática, 2012, p. 205.

Podemos verificar a apresentação do tema com uma situação que remete ao contexto extraescolar, calcular a altura do prédio da escola. Ao ser modelado tem como tarefa calcular a medida do cateto oposto ao ângulo 45° , dada a medida do cateto adjacente a esse ângulo, problema este que será resolvido após a construção do entorno tecnológico-teórico da tangente.


Por sua vez, no livro *Vontade de Saber – Matemática*, a unidade reservada para o estudo de trigonometria é composta por duas situações que indicam ser o primeiro encontro com a trigonometria. Tendo em vista que nesse capítulo são abordados os conteúdos: sendo o primeiro, relações métricas no triângulo e o segundo, a trigonometria. Assim, a primeira situação ocorre na primeira página da unidade com um texto que discute a questão da acessibilidade para pessoas portadoras de necessidades especiais, em particular as rampas de acesso. A segunda ocorre na página 159 com um texto acerca do contexto histórico de trigonometria e de suas aplicações, como apresenta a figura 18:

Figura 18 - PRIMEIRO ENCONTRO COM A TRIGONOMETRIA


Relações trigonométricas no triângulo retângulo

As relações métricas no triângulo retângulo estudadas anteriormente relacionam apenas as medidas dos lados do triângulo. Agora, veremos relações que envolvem as medidas dos lados e também as dos ângulos internos do triângulo. O ramo da geometria que estuda os métodos para calcular as medidas dos lados e dos ângulos de um triângulo é a **trigonometria**.

Não é certa a origem da trigonometria, porém há alguns problemas relacionados à trigonometria registrados no Papiro de Rhind e também em tábulas babilônicas.



Fragmento do Papiro de Rhind.



Tábua babilônica.

É provável que a trigonometria tenha iniciado com os astrônomos babilônios da Antiguidade.

Trigonometria nas profissões

A trigonometria é de grande importância não somente para os matemáticos, mas também para outros profissionais como engenheiros, astrônomos, topógrafos e músicos.



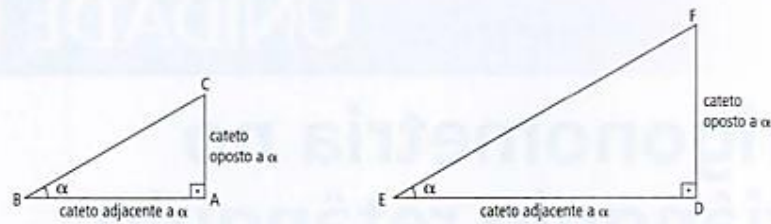
Fonte: Vontade de Saber Matemática – 9º ano, 2013, p. 159.

Podemos até dizer que com esse texto ocorre o (re)encontro com a trigonometria, no sentido de retomar o que foi explicitado na primeira página da unidade. Os escritos não fornecem detalhes acerca do conteúdo de trigonometria a ser estudado. Desse modo, entendemos que tem a pretensão de apresentar o conteúdo de trigonometria, sendo este último mais específico. Após a apresentação do conteúdo, nos dois livros tem-se início a construção do bloco tecnológico-teórico das razões trigonométricas seno, cosseno e tangente, que consiste no terceiro momento didático.

O entorno tecnológico teórico em ambos os livros é formado pelo conceito de semelhanças de triângulos e pelas demonstrações dos valores das razões trigonométricas para os ângulos notáveis. Vejamos como cada livro aborda esse momento. No livro *Praticando Matemática*, inicialmente é construído primeiro o entorno tecnológico teórico da tangente. Nesse sentido, é explicado que existe uma proporcionalidade entre os lados correspondentes de dois triângulos semelhantes, conforme a figura 19 a seguir:

Figura 19 - ELABORAÇÃO DO BLOCO TECNOLÓGICO-TEÓRICO

Traçamos dois triângulos retângulos semelhantes: $\triangle ABC$ – $\triangle DEF$ pois têm um ângulo de medida α e um ângulo reto. Identificamos em cada triângulo o cateto oposto e o cateto adjacente ao ângulo marcado.



Os lados correspondentes são proporcionais, certo?

$$\frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$$

Multiplicamos os termos da proporção em cruz:

$$AC \cdot DE = DF \cdot AB$$

E escrevemos outra proporção:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{DE} = \frac{\text{medida do cateto oposto a } \alpha}{\text{medida do cateto adjacente a } \alpha}$$

Atenção!

Para simplificar a escrita, quando escrevemos " α " estaremos nos referindo ao ângulo cuja medida é igual a α .

Qualquer triângulo retângulo que tenha um ângulo de medida α será semelhante aos que desenhamos acima. A razão entre a medida do cateto oposto a α e a do cateto adjacente a α será a mesma em todos eles.

Essa razão recebe o nome de **tangente de α** . Abreviadamente escrevemos **tg α** .

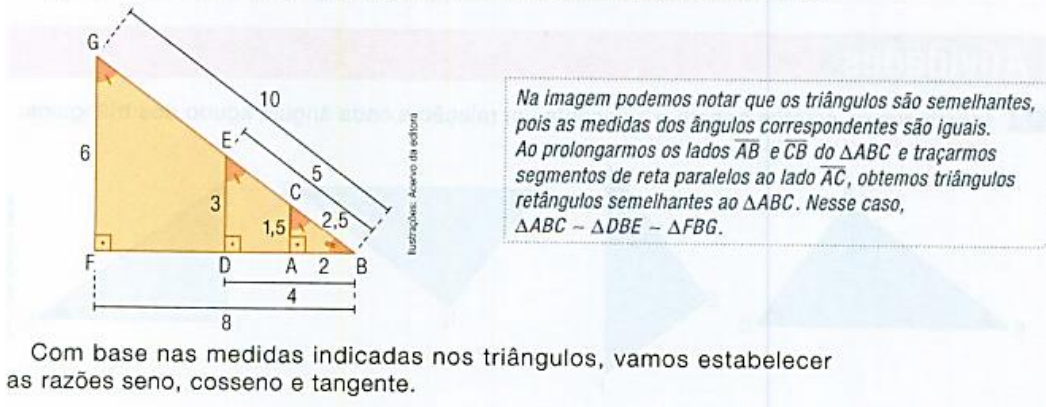
Fonte: Livro praticando Matemática, 9º ano, 2012, p. 204

Nesse contexto, a razão entre o cateto oposto e o cateto adjacente em relação a um ângulo é denominada tangente. O mesmo se observa quando são definidos seno e cosseno. No entanto, não é dada ênfase à justificativa dessas duas razões, porque elas são relacionadas à proporcionalidade obtida entre as medidas dos lados correspondentes de dois triângulos semelhantes, explicada anteriormente. Desse modo, tanto a definição de seno quanto a de cosseno de um ângulo são justificadas por meio do discurso tecnológico teórico de semelhança de triângulos, explicado ao definir a razão tangente. Percebemos que o segundo momento didático ocorre de modo articulado com o terceiro momento didático, pois após cada definição são expostos alguns exemplos que constitui a exploração de tipos de tarefas e elaboração de técnicas.

Da mesma forma, no livro “*Vontade de Saber – Matemática*” o que constrói e constitui o entorno tecnológico-teórico de trigonometria no triângulo retângulo também é o conceito de semelhança de triângulo e as demonstrações dos valores das razões trigonométricas para os ângulos notáveis. Observamos que a elaboração do bloco tecnológico teórico das razões trigonométricas acontece em conjunto com a exploração do tipo de tarefa, “calcular uma razão trigonométrica”, não tendo como precisar quando termina um e inicia o outro.

Figura 20 - ELABORAÇÃO DO ENTORNO TECNOLÓGICO-TEÓRICO DAS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS

Agora, observe os triângulos retângulos semelhantes ABC, DBC e FBG.



Fonte: Vontade de Saber Matemática – 9º ano, 2013, p. 159

Verificamos que em ambos os livros é revisado ou citado rapidamente o conceito de semelhanças de triângulos e feita a identificação dos lados de triângulo retângulo. Associamos essa justificativa simplificada para as razões trigonométricas ao fato do conteúdo semelhanças de triângulos ter sido trabalhado no capítulo anterior. E a partir de exemplos, são definidas as razões trigonométricas, como podemos notar na figura a seguir.

Figura 21 - ELABORAÇÃO DO BLOCO TECNOLÓGICO TEÓRICO

- Razão entre o cateto adjacente ao ângulo \hat{B} e a hipotenusa.

ΔABC	ΔDBE	ΔFBG
$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{2,5} = 0,8$	$\frac{DB}{BE} = \frac{4}{5} = 0,8$	$\frac{FB}{BG} = \frac{8}{10} = 0,8$

As razões obtidas também são iguais. Essa razão é chamada **cosseno** do ângulo \hat{B} e indicamos por $\cos \hat{B} = 0,8$.

Fonte: Vontade de Saber Matemática – 9º ano, 2013, p. 160.

Após a elaboração do bloco tecnológico teórico e da exploração dos tipos de tarefas e elaboradas as técnicas, em ambos os livros tem-se o trabalho com a técnica. Vale mencionar que o livro Vontade de Saber Matemática apresenta, antes do trabalho com a técnica, um quadro em que são apresentadas de modo resumido as razões trigonométricas.

Figura 22 - INSTITUCIONALIZAÇÃO DOS CONCEITOS TRIGONOMÉTRICOS ESTUDADOS

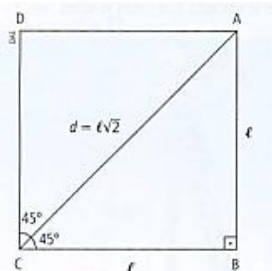
Tomando como referência o ângulo \hat{C} :	Tomando como referência o ângulo \hat{B} :
$\text{sen } \hat{C} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$	$\text{sen } \hat{B} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{B}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$
$\text{cos } \hat{C} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{C}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$	$\text{cos } \hat{B} = \frac{\text{cateto adjacente a } \hat{B}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}$
$\text{tg } \hat{C} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{C}}{\text{cateto adjacente a } \hat{C}} = \frac{c}{b}$	$\text{tg } \hat{B} = \frac{\text{cateto oposto a } \hat{B}}{\text{cateto adjacente a } \hat{B}} = \frac{b}{c}$

Fonte: Vontade de Saber Matemática – 9º ano, 2013, p. 160.

A maneira escolhida para apresentar as razões trigonométricas indica, implicitamente ao aluno, que são essas relações que devem ser lembradas e aprendidas no decorrer do capítulo, ocorrendo assim a institucionalização das razões trigonométricas, que consiste no quinto momento didático. Não identificamos a institucionalização das razões trigonométricas no livro *Praticando Matemática*

Após o trabalho com a técnica verificamos uma ampliação do bloco tecnológico teórico com a demonstração dos valores das razões trigonométricas para os ângulos notáveis. No livro “Praticando Matemática”, primeiro é demonstrado o valor do seno, cosseno e tangente para o ângulo de 45° , e depois para os ângulos de 30° e 60° , enquanto no livro “Vontade de Saber – Matemática”, primeiro foram demonstrados tais valores para os ângulos de 30° e 60° e em seguida para o ângulo de 45° . Podemos verificar na figura a seguir, a demonstração do valor do ângulo de 45° no livro *Praticando Matemática*.

Figura 23 - RETOMADA AO TERCEIRO MOMENTO DIDÁTICO



Já descobrimos, pelo teorema de Pitágoras, que $d = l\sqrt{2}$.
O triângulo ABC é retângulo. Vamos calcular:

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\text{medida do cateto oposto ao ângulo de } 45^\circ}{\text{medida da hipotenusa}}$$

$$\text{sen } 45^\circ = \frac{l}{l\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

↑
racionalizando o denominador

Sobre a Trigonometria

Como já dissemos, a palavra **trigonometria** vem do grego e significa “medida de triângulos”. O desenvolvimento deste ramo da Matemática está ligado a Astronomia, navegação, cartografia, entre outros. Você prosseguirá com o estudo da Trigonometria no Ensino Médio e terá a oportunidade de aplicar estes conhecimentos na Física, por exemplo.

Fonte: Coleção Praticando Matemática – 9º ano, 2012, p. 212.

Observamos que ao justificar o valor da razão que define seno para o ângulo de 45° , são omitidos os passos da resolução da medida da diagonal do quadrado, por não ser, talvez, o seu foco. Conhecendo a medida da hipotenusa substitui-se a sua medida e a medida do cateto oposto na relação que define seno e, após os cálculos, prova-se que $\text{seno } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. O mesmo acontece ao demonstrar o valor do cosseno 45° .

Nessas demonstrações, constatamos no livro “Vontade de Saber” a presença de explicações e de alguns passos que são omitidos no livro “Praticando Matemática” e vice-versa. Em seguida, nesses livros é exposta uma tabela que apresenta os valores das razões trigonométricas para os ângulos notáveis.

Figura 24 - RETOMADA AO BLOCO TECNOLÓGICO TEÓRICO

Organizando os resultados obtidos em um quadro, temos:

x	30°	45°	60°
sen x	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg x	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Fonte: Vontade de saber matemática, 9º ano, 2013, p. 165

Compreendemos que essa tabela resume todo o bloco tecnológico-teórico apresentado, fazendo referência ao que deve ser lembrado no estudo das razões trigonométricas nesse nível escolar. Assim, com essa tabela acontece o quinto momento didático, sendo a institucionalização dos valores das razões trigonométricas para os ângulos notáveis apresentados nessa retomada do terceiro momento didático. Vemos que, novamente, é retomado o trabalho com a técnica.

No trabalho com a técnica em ambos os livros são propostas várias atividades das quais identificamos tarefas que são pertencentes aos grupos e tipos de tarefas que identificamos. Observamos que, alguns tipos de tarefas, foram apresentados diretamente no trabalho com a técnica, isto é, não foram explorados quando ocorreu o segundo momento didático, no entanto são respondidas por técnicas elaboradas nesse momento didático, como o tipo $T_{K.6}$. A seguir, apresentamos o quantitativo de tarefas identificadas em cada tipo de tarefas.

Tabela 4 - QUANTITATIVO DE TAREFAS IDENTIFICADAS NOS TIPOS DE TAREFAS NOS LIVRO L₁ E L₂

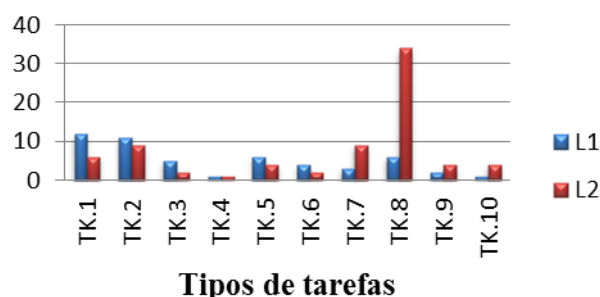
Tipos de tarefas	L₁	L₂
T _{k.1} : Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	12	6
T _{k.2} : calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo	11	9
T _{k.3} : calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	5	2
T _{k.4} : calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida do cateto oposto e a desse ângulo	1	1
T _{k.5} : calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto oposto a um ângulo e a desse ângulo	6	4
T _{k.6} : calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto adjacente e de um ângulo.	4	2
T _{k.7} : calcular a medida de um ângulo, dadas as medidas de dois lados de um triângulo	3	9
T _{k.8} : Calcular o valor de uma razão trigonométrica	6	34
T _{k.9} : calcular o perímetro	2	4
T _{k.10} : calcular a área	1	4
Total de tarefas analisadas por livro	51	75

Fonte: Autores da pesquisa

Independente do grupo que as tarefas pertencem, percebemos que o tipo de tarefa que mais se destaca no livro *Praticando Matemática* é T_{k.1} com aproximadamente 22% do total de tarefas, enquanto esse mesmo tipo de tarefas no livro *Vontade de saber* representa 8% das tarefas. Verificamos que aproximadamente 45,3% das tarefas do L₂ correspondem ao tipo de tarefas T₈ enquanto no L₁ esse tipo de tarefa apresenta aproximadamente 11,76% do total de tarefas. Diante desses dados, concluímos que entre os livros existe uma diferença em relação aos tipos de tarefas identificados em cada um, conforme gráfico a seguir:

Gráfico 1 - COMPARATIVO ENTRE OS LIVROS *PRATICANDO MATEMÁTICA E VONTADE DE SABER - MATEMÁTICA*

Comparativo entre os tipos de tarefas identificados em cada livro



Fonte: Autores da pesquisa

Verificamos que os tipos de tarefas com maior destaque no livro “Praticando Matemática” são o tipo $T_{K.1}$ e $T_{K.2}$. Em particular o $T_{K.2}$ contém uma quantidade de tarefas bem próxima do que foi identificado nesse mesmo tipo no livro L_2 . No livro “Vontade de Saber – Matemática” a ênfase é dada especialmente aos tipos de tarefa $T_{K.8}$, o que apresenta uma grande diferença em relação à quantidade de tarefas do mesmo tipo no livro L_1 . Tarefas do tipo $T_{K.7}$ também receberam mais atenção em L_2 do que em L_1 . Notamos, ainda, que o tipo de tarefa que menos se destaca, nos dois livros, é o $T_{K.4}$. Em geral, observamos no livro L_1 que, por mais que um tipo de tarefa se destaque entre os demais, a diferença da quantidade de tarefas entre os tipos não é grande como o tipo $T_{K.8}$ e os demais no livro L_2 .

A desproporcionalidade na distribuição das tarefas entre os tipos em um livro pode tornar algumas tarefas cansativas, o que também pode indicar que algumas técnicas são mais trabalhadas do que outras, a exemplo aquelas que são as utilizadas para responder as tarefas pertencente ao tipo $T_{K.8}$ no livro L_2 . Desse modo, o equilíbrio na distribuição das tarefas em relação aos tipos pode favorecer um melhor aproveitamento do trabalho com as técnicas proporcionando o levantamento de estratégias e conjecturas para respondê-las.

Nos dois livros o que observamos é que na maioria das vezes são empregadas as mesmas técnicas para responder o mesmo tipo de tarefa. A diferença é a quantidade de tarefa pertencente ao tipo o que implica em algumas técnicas serem mais trabalhadas do que outras e isso independe do grupo a qual a tarefa pertence. Assim, apresentamos a seguir as técnicas e/ou o conjunto de técnicas mais trabalhadas no estudo de trigonometria identificada nos tipos de tarefas em cada livro, bem como o quantitativo de tarefas que as utilizam.

Tabela 5 - TÉCNICAS IDENTIFICADAS EM RELAÇÃO AOS TIPOS DE TAREFAS NOS LIVRO L₁ E L₂

Tipo de tarefa	Técnica	L₁	L₂
T_{K.1}	τ_6	10	4
	τ_6 e τ_{10}	1	2
	τ_8	1	0
T_{K.2}	τ_8	11	4
	τ_8 e τ_{10}	0	5
T_{K.3}	τ_7	5	2
T_{K.4}	τ_8	1	1
T_{k.5}	τ_6	5	4
	τ_6 e τ_{10}	1	0
T_{K.6}	τ_7	4	2
T_{K.7}	$\tau_{1.2}$ e τ_9	0	4
	$\tau_{1.3}$ e τ_9	3	5
T_{k.8}	τ_2 e τ_3	1	0
	τ_3	1	11
	τ_4	2	10
	τ_5	2	13
T_{k.9}	$\tau_{2.1}$, $\tau_{2.3}$ e τ_1	2	1
	$\tau_{2.4}$, $\tau_{2.5}$ e τ_1	0	2
	$\tau_{2.6}$, $\tau_{2.2}$ e τ_1	0	1
T_{K.10}	$\tau_{2.2}$, $\tau_{2.6}$ e τ_1	1	0
	$\tau_{3.1}$, $\tau_{2.2}$ e τ_{10}	0	1
	$\tau_{2.4}$ e τ_{10}	0	1
	$\tau_{2.2}$ e τ_{10}	0	2

Fonte: Autores da pesquisa

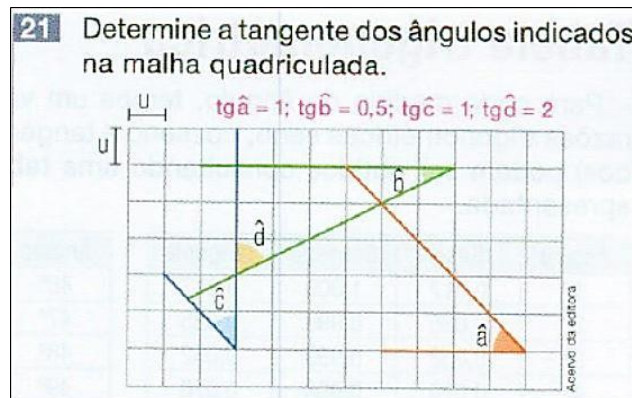
Observamos no quadro que a técnica mais é trabalhada no L₁ é τ_6 : substituir o valor do seno de um ângulo e a medida da hipotenusa (cateto oposto a esse ângulo) na razão que define seno e resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto oposto (hipotenusa), enquanto no livro L₂ é a técnica τ_8 : *substituir o valor da tangente de um ângulo e a medida do cateto adjacente (oposto) a esse ângulo na razão que define tangente e resolver equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto oposto (adjacente)*. Vale ressaltar que as técnicas τ_3 e τ_5 também têm elementos tecnológicos da definição do seno e da tangente o que destaca o uso de tais técnicas no estudo de trigonometria.

Todavia, identificamos algumas tarefas no livro *Vontade de Saber – Matemática* pertencentes ao tipo “Calcular o valor de uma razão trigonométrica” que são resolvidas com

auxílio de técnicas que não são constituídas de elementos tecnológicos teóricos referentes a um conteúdo matemático e assim como outras já comentadas, tais técnicas pertencem à matemática escolar. Entendemos que elas refletem a escolha ou estratégia a didática escolhida para a condução do ensino de trigonometria. Apresentamos, a seguir, duas dessas tarefas que trabalham tais técnicas.

A primeira consiste em calcular o valor da tangente dos ângulos indicados, conforme a imagem a seguir:

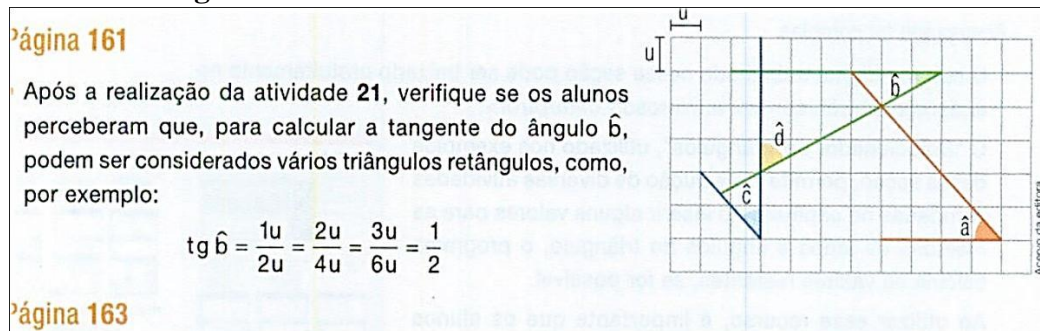
Figura 25 - TAREFA CALCULAR A TANGENTE



Fonte: Vontade de saber Matemática, 2013, p. 161

Considerando que cada lado do quadradinho da malha mede $1u$, um possível caminho para resolver a tarefa seria a utilização das técnicas que denominamos τ_{11} : *contar os lados dos quadradinhos para encontrar a medida dos lados do triângulo* e τ_5 . No manual do professor é apresentada uma nota quanto à abordagem dessa atividade, sugerindo que o professor mostre outras formas para resolvê-la.

Figura 26 - TAREFA CALCULAR A TANGENTE



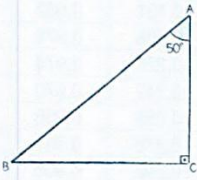
Fonte: Manual do Professor - Vontade de saber Matemática, 9º ano, 2013, p. 49.

Nesse comentário, verificamos que uma possível intenção do autor seria formular outras formas de resolver a atividade partindo do princípio que para calcular a tangente do ângulo B podem ser considerados vários triângulos. No manual do professor também é sugerido que após as resoluções das demais atividades se volte à atividade 21, com intuito de mostrar que é possível determinar a medida do ângulo \hat{B} , utilizando o Teorema de Pitágoras e uma das razões trigonométricas seguida da técnica τ_9 . A segunda tarefa também demanda a ação “calcular a razões trigonométricas referentes a um ângulo”:

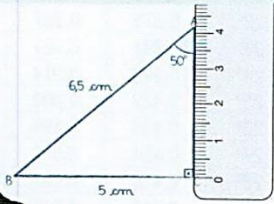
Figura 27 - TAREFA CALCULAR AS RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS INDICADAS

22 Observe como Juliano calculou o valor aproximado de $\text{sen}50^\circ$.

Inicialmente, utilizando régua e transferidor, construí um triângulo retângulo com um dos ângulos medindo 50° .



Depois, com a régua, obtive as medidas aproximadas dos lados do triângulo e calculei o $\text{sen}50^\circ$.



$\text{sen} 50^\circ \approx \frac{5}{6,5} \approx 0,769$

a) Calcule os valores aproximados de cosseno e tangente de 50° .
 $\cos 50^\circ = 0,646$; $\text{tg} 50^\circ = 1,190$

Relações

Protótipo: Getty Images

Ilustrações: Acervo da editora

Fonte: Vontade de saber Matemática, 9º ano, 2013, p. 161.

O próprio enunciado da atividade instrui que para respondê-la é preciso que se faça o uso da régua para medir os lados do triângulo e do transferidor para medir os ângulos. Assim, inferimos que por meio das técnicas: *utilizar o transferidor e a régua para construir um triângulo com os ângulos indicados, utilizar a régua para medir os lados de um triângulo e substituir a sua medida na razão trigonométrica conveniente para encontrar o valor de cada razão trigonométrica pedida*, a tarefa pode ser resolvida.

Entendemos que as técnicas “*utilizar o transferidor e a régua para construir um triângulo com os ângulos indicados*”, “*utilizar a régua para medir os lados de um triângulo*” e “*contar quadradinhos para encontrar a medida dos lados do triângulo*” ajudam na

compreensão do que está sendo proposto no ensino de trigonometria, mas de certa forma não carregam elementos tecnológico teóricos sobre, assim se tornando técnicas auxiliares na condução desse estudo. E como essas técnicas aparecem poucas vezes e somente nesse livro, optamos por não colocá-las no quadro de técnicas e apenas fazer referência a seu uso.

Em suma, a análise da organização matemática em relação aos tipos de tarefas nos leva a concluir que esses livros abordam o conteúdo de trigonometria de forma semelhante, mas, se diferencia pela quantidade de tarefas pertencentes aos tipos identificados, o que nos revela entre tantos detalhes, perceber quais os tipos de tarefas e técnicas mais valorizadas em cada um, sendo destaque o tipo $T_{k,8}$ com 34 tarefas no livro L_2 e no L_1 o tipo $T_{k,1}$ como 11 tarefas. Sendo assim, no próximo tópico, veremos como as tarefas são exploradas nesses livros, considerando o contexto no qual estão inseridas.

3.4.1 Considerações acerca das organizações didática e matemática dos livros *Praticando Matemática* e *Vontade de Saber - Matemática*

Como verificamos, a condução do ensino de trigonometria nos livros “*Praticando Matemática*” e *Vontade de Saber – Matemática*, ocorrem, em geral, de forma alternada e repetidas vezes. Nesses livros, o primeiro encontro com a trigonometria acontece por meio de uma situação problema ou de um texto, sem a preocupação real de aprofundar o tema. O segundo momento acontece em um livro, de forma alternada com o terceiro momento, e no outro livro, em conjunto com o terceiro sem termos como precisar quando termina um e se inicia o outro. O bloco tecnológico teórico referente à trigonometria nesses livros é formado pelo conceito de semelhança de triângulos e pelas demonstrações dos valores das razões trigonométricas para os ângulos notáveis e o trabalho com a técnica por meio de várias atividades propostas. Por último, ocorre a institucionalização mediante tabelas ou de um texto que resume o assunto. Assim, dizemos que a identificação desses momentos se faz pertinente e nos permitiu descrever e analisar a organização didática proposta para o estudo de trigonometria nos livros didáticos, ajudando-nos a caracterizar esse ensino.

Vejam, então, como estão distribuídas as tarefas considerando o contexto a qual remetem e para isso apresentamos o quantitativo de tarefas que compõem os grupos G_1 : *resolver uma situação que envolve triângulos retângulos e um contexto extraescolar* e G_2 : *resolver uma situação que envolve triângulos retângulos e um contexto matemático* nos tipos identificados nos livros “*Praticando Matemática*” e “*Vontade de Saber – Matemática*”.

Tabela 6 - QUANTITATIVO DE TAREFAS CONTIDAS NOS GRUPOS G_1 E G_2 IDENTIFICADAS NO LIVRO L_1

Grupos de tarefas	Tipos de tarefas	G_1	G_2
Livro: <i>Praticando Matemática</i>	T _{K.1} : Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	9	3
	T _{K.2} : calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo	10	1
	T _{K.3} : calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	2	3
	T _{K.4} : calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida do cateto oposto e a desse ângulo	1	0
	T _{K.5} : calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto oposto a um ângulo e a desse ângulo	6	0
	T _{K.6} : calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto adjacente e de um ângulo.	4	0
	T _{K.7} : calcular a medida de um ângulo, dadas as medidas de dois lados de um triângulo	3	0
	T _{K.8} : calcular o valor de uma razão trigonométrica	0	6
	T _{K.9} : calcular a medida do perímetro	0	2
	T _{K.10} : calcular a medida da área	0	1
Total de tarefas nos grupos		35	16

Fonte: Autores da pesquisa

Podemos observar que os tipos de tarefas que compõe o grupo G_1 são T_{1.1}, T_{1.2}, T_{1.3}, T_{1.4}, T_{1.5}, T_{1.6} e T_{1.7}. Nesse grupo, o destaque são os tipos T_{1.1} e T_{1.2}, com respectivamente com 9 e 10 tarefas cada um. O tipo de tarefas T_{1.4} é o que contém a menor quantidade de tarefas nesse grupo. De modo geral, percebemos o trabalho com a técnica em uma variedade de tipos de tarefas que apresentam de alguma forma um contexto extraescolar. Em relação ao grupo G_2 , identificamos que ele é composto por seis tipos de tarefas (T_{2.1}, T_{2.2}, T_{2.3}, T_{2.8}, T_{2.9} e T_{2.10}), destes quatro foram elaborados no capítulo de trigonometria e os demais em capítulos anteriores. O destaque desse grupo é o tipo de tarefa T_{k.8} com seis tarefas, o analisando detalhadamente pode ser subdividido em três subtipos de tarefas, como descritos a seguir:

Tabela 7 - TIPO DE TAREFAS: CALCULAR O VALOR DE UMA RAZÃO TRIGONOMÉTRICA, NO LIVRO L_1

Subtipo de tarefa	Qtde de tarefas
T _{2.8.1} : calcular a razão seno de um ângulo	2
T _{2.8.2} : calcular a razão cosseno de um ângulo	2
T _{2.8.3} : calcular a razão tangente de um ângulo	2

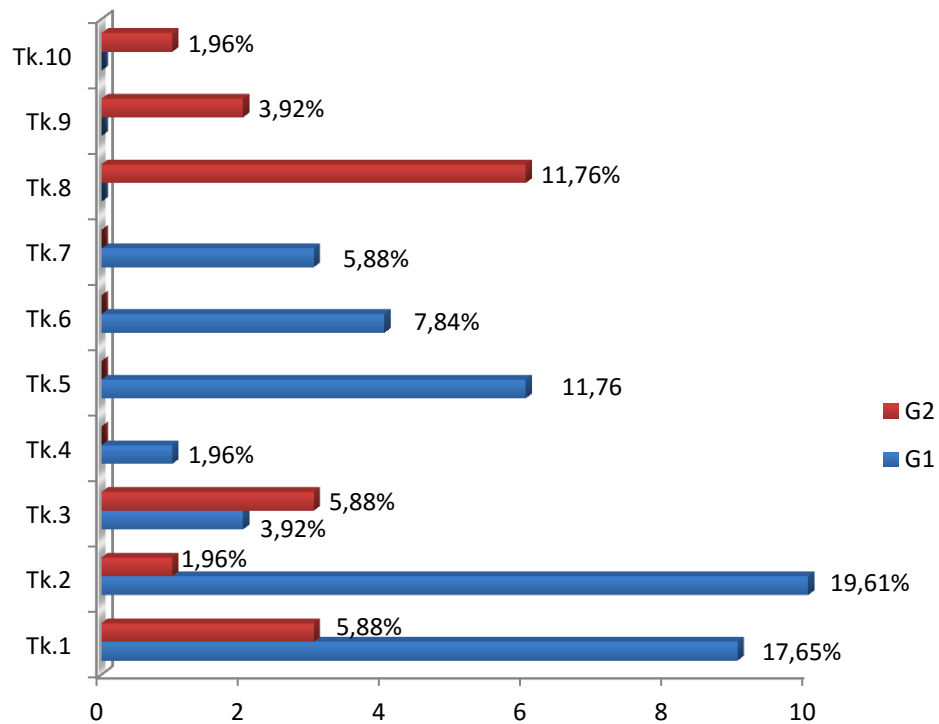
Fonte: Autores da pesquisa

No quadro observamos que a quantidade de tarefas entre os subtipos é equilibrada, sendo representativa em relação ao quantitativo de tarefas verificados nos outros tipos contido

no grupo. Além disso, é importante lembrar o que as tarefas pertencentes aos tipos $T_{k,9}$ e $T_{k,10}$ são respondidos por uma dessas ações. O gráfico a seguir resume o que verificamos nesse livro a respeito dos tipos e grupos de tarefas.

**Gráfico 2 - COMPARATIVO ENTRE OS TIPOS DE TAREFAS NO LIVRO
*PRATICANDO MATEMÁTICA***

TIPOS DE TAREFAS



	Tk.1	Tk.2	Tk.3	Tk.4	Tk.5	Tk.6	Tk.7	Tk.8	Tk.9	Tk.10
G2	3	1	3	0	0	0	0	6	2	1
G1	9	10	2	1	6	4	3	0	0	0

Fonte: Autores da pesquisa

Os tipos de tarefas mais explorados no estudo de trigonometria são $T_{1,1}$ e $T_{1,2}$ onde representam respectivamente 17,65% e 19,61% das tarefas analisadas. O terceiro e quarto tipo mais explorado é $T_{1,5}$ e $T_{2,8}$ com 11,76% das tarefas, o restante está distribuindo entre os demais tipos. Somando-se as tarefas pertencentes a cada grupo, observa-se o empenho dos autores em explorar tarefas situadas em um contexto extraescolar, sendo destaque o tipo $T_{1,2}$.

Vejamos a seguir, o quantitativo de tarefas em cada tipo identificado no livro L_2 :

Tabela 8 - QUANTITATIVO DE TAREFAS CONTIDAS NOS GRUPOS G_1 E G_2 IDENTIFICADAS NO LIVRO L_2

Grupos de tarefas	Tipos de tarefas	G_1	G_2
Livro: <i>Vontade de Saber Matemática</i>	$T_{K.1}$: Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	4	2
	$T_{K.2}$: calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo	7	2
	$T_{K.3}$: calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e desse ângulo	0	2
	$T_{K.4}$: calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida do cateto oposto e a desse ângulo	0	1
	$T_{K.5}$: calcular a medida da hipotenusa, dado a medida do cateto oposto a um ângulo e desse ângulo	2	2
	$T_{K.6}$: calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto adjacente e a de um ângulo.	0	2
	$T_{K.7}$: calcular a medida de um ângulo, dadas as medidas de dois lados de um triângulo	0	9
	$T_{K.8}$: calcular o valor de uma razão trigonométrica	0	34
	$T_{K.9}$: calcular a medida do perímetro	0	4
	$T_{K.10}$: calcular a medida da área	0	4
Total de tarefas		13	62

Fonte: Autores da pesquisa

O grupo G_1 composto pelos tipos de tarefas $T_{1.1}$, $T_{1.2}$ e $T_{1.5}$ contém 13 tarefas, sendo destaque $T_{1.2}$ com 7 tarefas, o que se observa a preferência por esse tipo em tarefas que apresentam um contexto extraescolar. Por sua vez, o grupo G_2 composto pelos tipos de tarefas $T_{2.1}$, $T_{2.2}$, $T_{2.3}$, $T_{2.4}$, $T_{2.5}$, $T_{2.6}$, $T_{2.7}$, $T_{2.8}$, $T_{2.9}$ e $T_{2.10}$ contém 62 tarefas, nele o destaque é $T_{K.8}$ com 34 tarefas, as demais tarefas estão distribuídas proporcionalmente entre os demais tipos.

Observa-se assim, uma valorização do tipo $T_{2.8}$ e das técnicas empregadas para responder as tarefas que a ele pertence. Com intuito de detalhar o tipo $T_{K.8}$ verificamos que também poderia ser subdividido em três subtipos de tarefas, como segue:

Tabela 9 - TIPO DE TAREFA: CALCULAR O VALOR DE UMA RAZÃO TRIGONOMÉTRICA NO LIVRO L_2

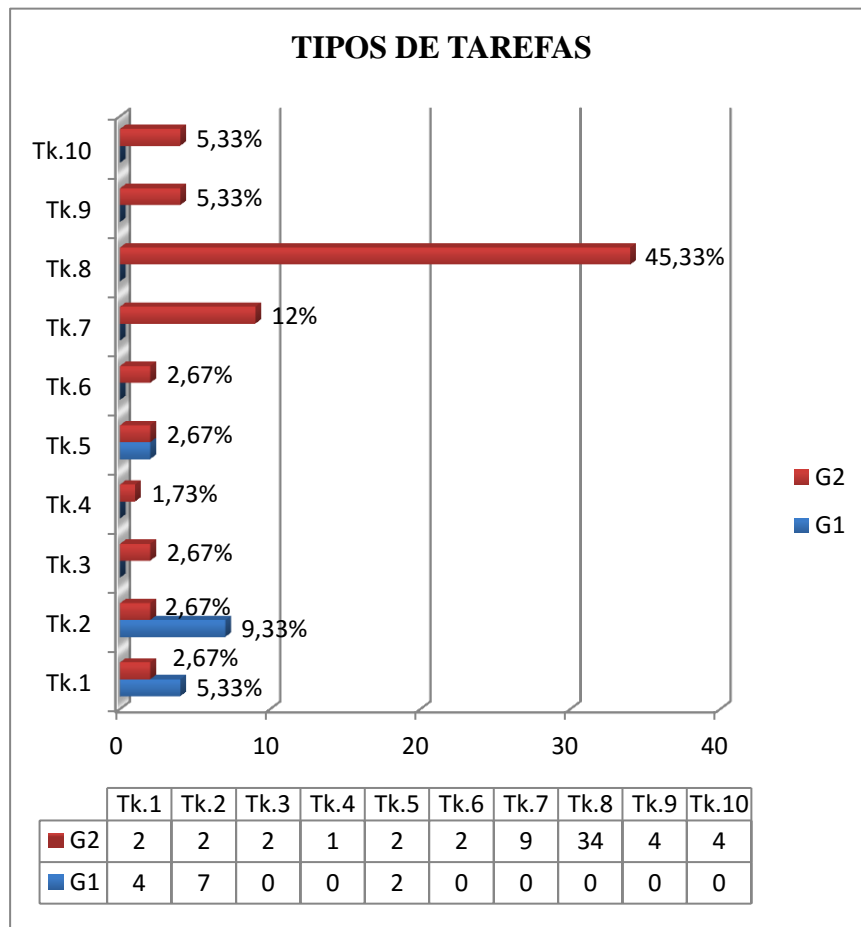
Subtipo de tarefa	Qtde de tarefas
$T_{3.8}$: calcular o seno de um ângulo	11
$T_{3.9}$: calcular o cosseno de um ângulo	10
$T_{3.10}$: calcular a tangente de um ângulo	13

Fonte: Autores da pesquisa

Podemos observar certo equilíbrio entre a quantidade de tarefas em cada subtipo, mas mesmo assim, as técnicas mobilizadas nesse tipo são mais trabalhadas que outras, visto que tais técnicas também são mobilizadas ao responder as tarefas do tipo $T_{2.9}$ e $T_{2.10}$. Faz-se

necessário salientar, que em tarefas desse tipo que são empregadas técnicas auxiliares que utilizam materiais como, régua e transferidor, para serem respondidas, sendo isto não verificado no livro *Praticando Matemática*. No gráfico a seguir resumimos o que identificamos nesse livro a respeito dos tipos e grupos de tarefas.

Gráfico 3 - COMPARATIVO ENTRE OS TIPOS DE TAREFAS DO LIVRO VONTADE DE SABER - MATEMÁTICA



Fonte: Autores da pesquisa

Podemos verificar que tipos de tarefas que mais se destacam são $T_{2.8}$ e $T_{2.7}$ com 45,33% e 12% das tarefas desse livro. Em terceiro lugar, observamos o tipo $T_{1.2}$ com 7 tarefas. Em geral, nota-se que as técnicas elaboradas são mais testadas e aperfeiçoadas em diferentes tipos de tarefas contidos no grupo G_2 , o que indica a valorização de tarefas que apresentam um contexto matemático, visto que aproximadamente 17,83% das tarefas apresentam um contexto extraescolar e estão distribuídas em três tipos de tarefas nesse grupo.

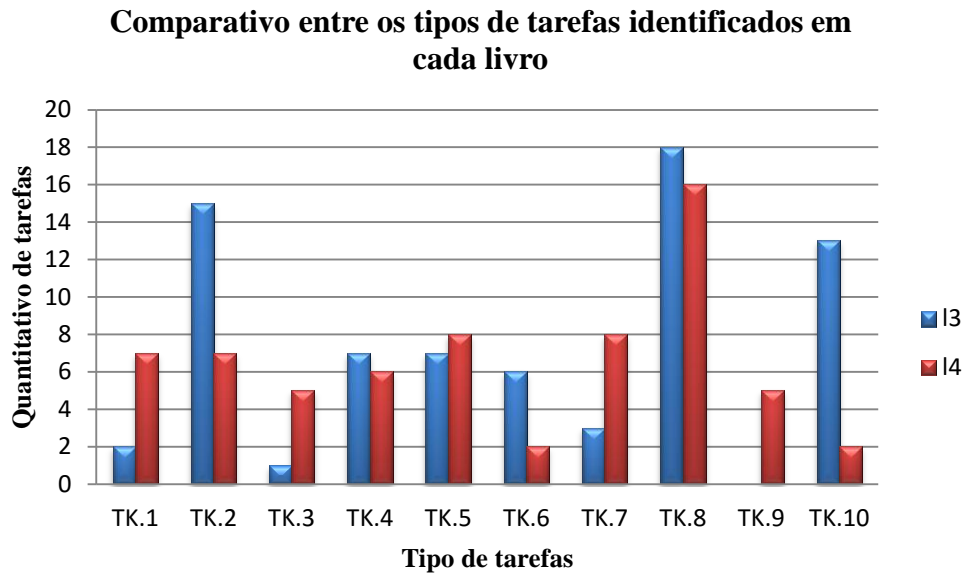
Portanto, nesses livros não são identificadas tarefas pertencentes aos tipos $T_{1.8}$, $T_{1.9}$ no estudo de trigonometria, talvez isso ocorra por não ser o foco explorar tais tipos no

capítulo de trigonometria, visto que eles foram explorados e elaborados em capítulo anterior. No livro *Aprendendo Matemática*, é possível observar a valorização do trabalho com a técnica em diferentes tipos de tarefas, as quais apresentam um contexto extraescolar, sendo o mesmo não verificado no livro *Vontade de Saber – Matemática*, o qual dá ênfase a tarefas com contexto matemático em uma variedade de tipos de tarefas, onde são mobilizadas entre outras, técnicas não trabalhadas no outro livro. Assim, percebemos a diferença na condução do ensino de trigonometria nesses livros, que mesmo apresentando o conteúdo de maneira semelhante mostra estratégias de ensino distintas.

3.5 ORGANIZAÇÃO DIDÁTICA E ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA DOS LIVROS “PROJETO TELÁRIS” E “BIANCHINI”

Nos livros “Projeto Teláris” e “Bianchini – Matemática” o estudo de trigonometria é descrito de modo semelhante aos livros L_1 e L_2 . Identifica-se que os momentos didáticos ocorrem de modo alternado e repetidas vezes. Assim, como nos outros livros analisados, o bloco tecnológico teórico de trigonometria no triângulo retângulo é formado pelo conceito de semelhança de triângulos e também pelas demonstrações dos valores das razões trigonométricas para os ângulos notáveis. Observa-se que o trabalho com a técnica ocorre após a construção do entorno tecnológico teórico das razões trigonométricas; já a exploração dos tipos de tarefas e elaboração das técnicas ocorre em parceria com o bloco tecnológico teórico, quando são apresentadas as definições seguidas de exemplos. A seguir, apresentamos um gráfico no qual comparamos o quantitativo de tarefas que pertencem aos tipos de tarefas identificados em cada um dos dois livros.

Gráfico 4 - COMPARATIVO ENTRE OS LIVROS PROJETO TELÁRIS E BIANCHINI - MATEMÁTICA



Fonte: Autores da pesquisa

Observa-se o destaque para atividades do tipo $T_{K,2}$ e $T_{K,8}$ no livro L_3 . Por sua vez, no L_4 verifica-se maior quantidade de tarefas pertencentes ao tipo $T_{2,5}$ e $T_{2,8}$. De certa forma, observa-se que, tais coleções valorizam o trabalho com a técnica em diferentes tipos de tarefas. Vejamos agora os tipos de tarefas identificados em cada grupo seguido pela quantidade de tarefas em cada um dos tipos:

Tabela 10 - QUANTITATIVO DE TAREFAS CONTIDAS NOS GRUPOS G_1 E G_2 IDENTIFICADAS NO LIVRO L_3 E L_4

Tipo de tarefa	Qtde de tarefas - L_3		Qtde de tarefas - L_4	
	G_1	G_2	G_1	G_2
$T_{K,1}$	0	2	4	3
$T_{K,2}$	12	3	2	5
$T_{K,3}$	0	1	2	3
$T_{K,4}$	5	2	5	1
$T_{K,5}$	3	4	6	2
$T_{K,6}$	3	3	1	1
$T_{K,7}$	2	1	0	8
$T_{K,8}$	0	17	0	16
$T_{K,9}$	0	0	0	5
$T_{K,10}$	0	13	0	2
Total de tarefas	25	46	20	46

Fonte: Autores da pesquisa

Como podemos observar, existe certa aproximação entre os livros quanto aos grupos de tarefas, no qual se verifica no livro “Projeto Teláris” 25 tarefas que apresentam algum contexto extraescolar e 46 que envolve um contexto matemático, no “Bianchini - Matemática” o grupo G_1 é composto por 20 tarefas e G_2 por 46. Assim, nota-se em ambos a valorização de tarefas que apresentam um contexto matemático, além disso, verifica-se que uma quantidade de tarefas semelhante.

Algumas diferenças podem ser verificadas entres esses livros ao analisarmos os tipos de tarefas e técnicas como, por exemplo, a valorização das pertencentes ao tipo $T_{1.2}$ no livro L_3 não ocorre com a mesma ênfase no livro L_4 . E também, a ausência de tarefas pertencentes ao tipo $T_{1.1}$ e $T_{1.3}$ no livro L_3 , sendo os mesmos compostos por quatro e duas tarefas respectivamente no livro L_4 . Em particular, observamos que no livro Projeto Teláris observa que são trabalhadas técnicas se que não foram trabalhadas em nenhum dos livros analisados.

Em geral, são explorados vários tipos de tarefas, as quais envolvem um contexto matemático ou extraescolar, com destaque para o tipo $T_{2.8}$. Em um aspecto particular, o livro Projeto Teláris se destaca entre os livro analisados com uma quantidade significativa de tarefas pertencentes ao tipo $T_{K.10}$ e por institucionalizar técnicas não trabalhadas em outros livros. Assim, verificamos que é valorizado o trabalho com a técnica em tarefas que apresentam um contexto matemático.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o intuito de responder nossa questão de pesquisa – *Como é proposto o ensino de trigonometria no ensino fundamental?* – buscamos caracterizar o ensino de trigonometria proposto nos livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental. Nossa análise abordou os livros *Praticando Matemática*, *Vontade Saber- Matemática*, *Teláris* e *Bianchini*.

Utilizamos como referencial teórico e metodológico a Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLAD, 1999) que possui elementos que permitem analisar a maneira escolhida para conduzir o estudo de um determinado tema e também a matemática que está sendo estudada. Assim, essa teoria permitiu-nos analisar detalhadamente a escolha didática dos autores (organização didática) e também os procedimentos e algoritmos utilizados no ensino de trigonometria (organização matemática), sendo esses os nossos objetivos específicos.

Com base nas noções de organização matemática e organização didática, analisamos o ensino de trigonometria proposto nos livros didáticos do 9º ano do ensino fundamental, focando em pontos que consideramos estratégicos para esse nível de ensino e que nos dariam uma visão ampla e detalhada da praxeologia, atingindo assim o nosso intuito. Dessa forma, optamos por analisar os quatro livros mais adotados pelas escolas públicas brasileiras, aprovados pelo PNLB, no ano de 2014, sendo foco de nossas análises os dois primeiros livros mais empregados.

Em relação à organização didática desses livros, encontramos semelhanças com alguns resultados apresentados nas pesquisas discutidas no primeiro capítulo. A nossa análise indicou que o ensino de trigonometria conduzido nos quatro livros é iniciado por meio da apresentação do tema sem aprofundamento matemático, seguido da construção do bloco tecnológico teórico das razões trigonométricas. O entorno tecnológico-teórico é constituído tanto pelo conceito de semelhanças de triângulos como também pelas demonstrações para os valores das razões para os ângulos notáveis. Nesses livros, as justificativas para as razões trigonométricas aparecem de forma concisa e direta, e inferimos que isso se deve ao fato de que o conteúdo *semelhanças de triângulo* foi trabalhado anteriormente.

Verificamos, ainda, que a exploração dos tipos de tarefas e elaboração das técnicas ocorre em conjunto ou articulado com a elaboração do bloco tecnológico teórico, geralmente após uma definição. E por último, são propostas atividades, o que propicia o trabalho com a técnica. Tendo em vista os resultados apontados pelos pesquisadores quanto à estrutura didática dos livros analisados, verificamos que esta não se diferencia da que identificamos nos

livros atuais, sendo que, em ambos, o conteúdo de trigonometria é justificado por semelhança de triângulos e apresenta consideravelmente vários exercícios de fixação após as definições.

No desenvolvimento da nossa análise, notamos que as atividades propostas nos livros didáticos se diferenciavam em relação ao contexto emitido pelo enunciado da atividade ou do ostensivo que a acompanha. E, como consequência disso, as separamos em dois grupos: resolver uma situação que envolve triângulos retângulos em um contexto extraescolar (G_1) e resolver uma situação que envolve triângulos retângulos em um contexto matemático (G_2), e em dez tipos de tarefas como aparece no quadro abaixo. Essa divisão nos proporcionou perceber certa tendência dos autores em valorizar um determinado tipo de tarefa nos livros e também a ter indícios de uma tentativa de contextualização do conteúdo de trigonometria.

A tabela abaixo apresenta o quantitativo de tarefas identificadas em cada grupo e tipo de tarefas em cada livro. Como é possível observar, são exploradas várias tarefas sobre o tema, o que pode indicar que, no decorrer da explanação do tema, se tornem meros exercícios mecânicos e repetitivos como é referido nas pesquisas aqui discutidas, a exemplo são as 34 tarefas que exploram as técnicas utilizadas para calcular o valor de uma razão trigonométrica, contra 1 também do tipo $T_{K,4}$ no livro *Vontade de Saber Matemática*.

Tabela 11 - SÍNTESE: QUANTITATIVO DE TAREFAS IDENTIFICADAS NOS LIVROS

Tipos de tarefas	Livro		L ₁		L ₂		L ₃		L ₄	
	G ₁	G ₂	G ₁	G ₂	G ₁	G ₂	G ₁	G ₂		
T _{k,1} : Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo										
T _{k,2} : Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo	T _{K,1}	9	3	4	2	0	2	4	3	
T _{k,3} : Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo	T _{K,2}	10	1	7	2	12	3	2	5	
T _{k,4} : Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida do cateto oposto e a desse ângulo	T _{K,3}	2	3	0	2	0	1	2	3	
T _{k,5} : Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto oposto a um ângulo e a desse ângulo	T _{K,4}	1	0	0	1	5	2	5	1	
T _{k,6} : Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto adjacente e de um ângulo.	T _{K,5}	6	0	2	2	3	4	6	2	
T _{k,7} : Calcular a medida de um ângulo, dadas as medidas de dois lados de um triângulo	T _{K,6}	4	0	0	2	3	3	1	1	
T _{k,8} : Calcular o valor de uma razão trigonométrica	T _{K,7}	3	0	0	9	2	1	0	8	
T _{k,9} : Calcular o perímetro	T _{K,8}	0	6	0	34	0	17	0	16	
T _{k,10} : Calcular a área	T _{K,9}	0	2	0	4	0	0	0	5	
	T _{K,10}	0	1	0	4	0	13	0	2	
	Total parcial	35	16	13	62	25	46	20	46	
	Total geral	51		75		71		66		

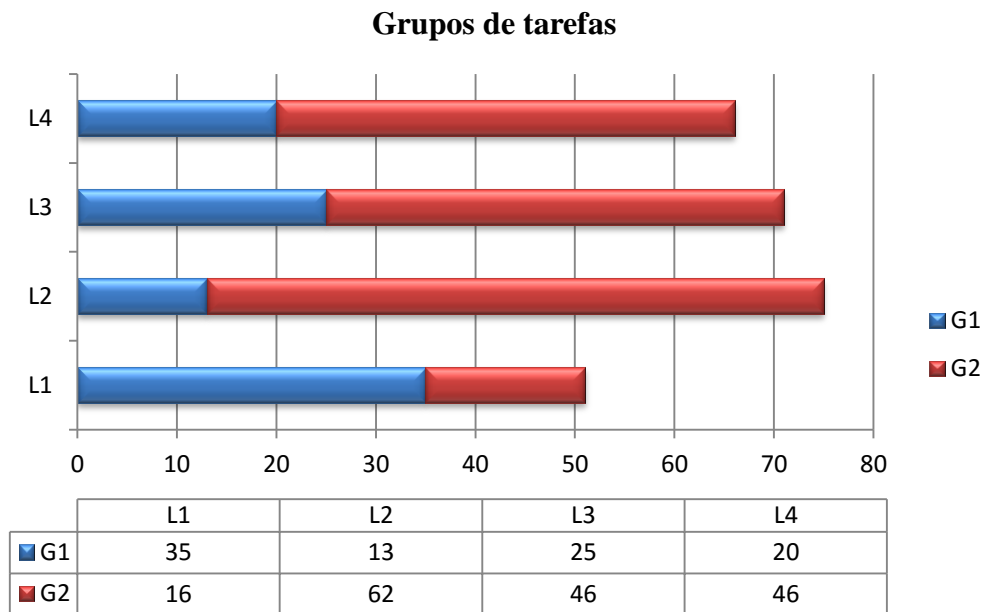
Fonte: Autores da pesquisa

De modo geral, nos quatro livros analisados, são valorizados os tipos de tarefas $T_{K,1}$, $T_{K,2}$ e $T_{K,8}$. Em particular nos livros L_2 , L_3 e L_4 há mais destaque para os tipos $T_{K,8}$ e em L_1 o tipo $T_{K,1}$ e $T_{K,2}$ que juntos representam mais de 50% das tarefas identificadas. Todavia, percebemos que o trabalho com as técnicas elaboradas ocorre em diferentes tipos de tarefas, o que acontece é que algumas são mais trabalhadas do que outras em determinados livros, tendo em vista essa tendência em valorizar certo tipo de tarefa.

Nesse contexto, observamos que as técnicas mais trabalhadas no ensino de trigonometria são τ_6 , τ_7 e τ_8 . Em particular, nos livros L_2 , L_3 , e L_4 algumas tarefas são respondidas por meio de técnicas consideradas da matemática escolar, que utilizam dos instrumentos régua e transferidor para medir os lados e o ângulo de um triângulo respectivamente, como também faz uso da calculadora para calcular o ângulo e uma razão trigonométrica. São poucas as tarefas identificadas que utilizam tais técnicas para serem respondidas.

Entre os tipos de tarefas identificadas no estudo de trigonometria, destacamos os $T_{K,9}$ e $T_{K,10}$, que, embora institucionalizados no capítulo sobre áreas e perímetros de figuras planas, utilizam as razões trigonométricas para serem respondidas. Nesse sentido, é compreensível não identificarmos tarefas desses tipos imersas em um contexto extraescolar, talvez porque o objetivo seja uma rápida articulação entre os conteúdos. Cabe ressaltar, que identificamos algumas tarefas pertencentes ao tipo de tarefa, *indicar os lados de um triângulo retângulo*, nos L_1 e L_2 , o qual não é apresentado na tabela anterior por critério nosso, pelo fato de não movimentar elementos tecnológicos e teóricos, sendo mais uma identificação dos nomes dados aos lados de um triângulo retângulo por convenção.

No que se refere aos grupos de tarefas, podemos ter um retrato do que chamamos de uma tentativa de contextualização do ensino de trigonometria, o que pode ser justificado pela quantidade de tarefas no grupo G_1 . A exemplo, no livro L_1 com cerca de 60% do total de tarefas que remetem a um contexto extraescolar, sendo este o que mais apresenta tarefas pertencentes a G_1 .

Gráfico 5 - GRUPOS DE TAREFAS

Fonte: Autores da pesquisa

Observamos também que os livros L_2 , L_3 e L_4 valorizam as tarefas pertencentes ao grupo G_2 , ao contrário do que ocorre no Livro L_1 . Verificamos semelhança entre os dois últimos livros nos quais são apresentadas a mesma a quantidade de tarefas pertencentes ao grupo G_2 . Os livros L_1 e L_3 são os que mais exploram tarefas pertencentes ao grupo G_1 , em particular, verificamos que o livro L_2 se destaca em relação aos outros com uma quantidade maior de tarefas que envolvem um contexto matemático.

As tarefas pertencentes ao grupo G_1 chamaram-nos a atenção e nos remeteram ao tema contextualização no ensino de trigonometria, o qual pode ser explorado em outras pesquisas. A nossa investigação indicou que, na maioria dos livros analisados, são priorizadas tarefas voltadas a um contexto matemático, visto que entre os quatro livros analisados, apenas um explora mais tarefas que envolvem um contexto extraescolar, o que nos faz lembrar que um dos resultados apontados pelos pesquisadores quanto aos exercícios, que eram resolvidas com a mera aplicação das fórmulas, seno, cosseno e tangente de um ângulo, não privilegiando o desenvolvimento de estratégias e conjecturas.

Além disso, a quantidade de tarefas propostas e as técnicas mobilizadas para respondê-las, evidenciou a valorização do ensino de trigonometria por meio do trabalho com a técnica. Uma característica desses livros que reforça essa afirmação é que as atividades são propostas após a construção do bloco tecnológico teórico, por meio de semelhanças de triângulos, o que dá a ideia da fixação da técnica por meio da resolução de vários exercícios,

uma vez que, em tais livros, esse conteúdo foi abordado no capítulo anterior, cujo foco é a definição das razões trigonométricas.

Diante de todos os dados expostos e discutidos, verificamos nos quatro livros a valorização da construção do entorno tecnológico-teórico de trigonometria no triângulo retângulo, bem como do trabalho com as técnicas de resolução. Desse modo, a ênfase nesses dois momentos didáticos (terceiro e quarto), demonstrou que tais livros conduzem o ensino de trigonometria por meio de uma organização didática clássica, como menciona Gáscon (2003).

Na introdução deste trabalho, foram explanadas as razões pelas quais o tema escolhido foi o ensino de trigonometria, mediante relato da experiência da pesquisadora enquanto bolsista dos programas de Tutoria e PIBID da UFMT. Foram tecidas também algumas indagações acerca do ensino de trigonometria no contexto escolar, relacionado com as dificuldades apresentadas pelos alunos. Nesse contexto, nossa pesquisa discutiu apenas um dos fatores que pode estar relacionado com as dificuldades de aprendizagem ou de compreensão do tema pelos alunos. Mediante esta investigação, constatamos que essa dificuldade está intimamente ligada com a maneira de se abordar e de se conduzir o ensino.

Desse modo, acreditamos que essa pesquisa pode oferecer subsídios para trabalhos futuros a respeito do tema, entre eles, analisar se a praxeologia adotada pelo professor difere daquela apresentada no livro didático, investigar a aprendizagem dos alunos frente a uma sequência de ensino, tendo como base pressupostos da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988) ou os Percursos de Estudo e Pesquisa (CHEVALLARD, 2011).

Portanto, essa pesquisa nos permitiu verificar que a utilização da Teoria Antropológica do Didático como referencial teórico e metodológico foi fundamental para analisarmos o ensino proposto de trigonometria nos livros didáticos. A análise das praxeologias didáticas e matemáticas permitiu obtermos uma visão detalhada das praxeologias propostas nos livros didáticos possibilitando responder nossa questão de pesquisa, bem como os objetivos traçados para essa finalidade. Além disso, esse processo de investigação favoreceu nosso desenvolvimento como professores, nos constituindo enquanto pesquisadores, abertos às novas oportunidades que se encontram em constante movimento.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. S. M. **A articulação entre o ensino de polígonos e de poliedros em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental**. 2015. Dissertação (Mestrado) – UFMS, Campo Grande.
- ANDRINI, Á. **Praticando Matemática**. Álvaro Andrini, Maria José C. de V. Zampirolo. – 9º ano. 3ª Ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.
- BIANCHINI, E. **Matemática Bianchini**. Edwaldo Roque Bianchini. 9º ano. 7º Ed. Editora Moderna, 2011.
- BORGES, C. F.. **Transição das razões trigonométricas do triângulo retângulo para o círculo trigonométrico: uma sequência para ensino**. Dissertação de Mestrado PUC, São Paulo, 2009.
- BORTOLI, G.; MARCCHIR, M. I.; GIONGIO, I. M. **Entrecruzamentos do pensamento etnomatemático e da história da matemática: possibilidades para uma prática pedagógica**. Revista online: Zetetiké, Unicamp – v. 22, n. 41, 2014.
- BOSCH M. e CHEVALLARD Y. **Ostensifs et sensibilité aux ostensifs. Recherches en didactique des mathématiques**, 1999.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília, 2000.
- _____, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Volume 2, 2006.
- _____, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica I. **Guia de Livros Didáticos: PNLD/2013**. Brasília: MEC/SEF, 2012.
- CHEVALLARD, Y. **L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. Recherches en Didactiques des Mathématiques**, 19 (2), 221-266, 1999.
- DANTE, L. R. **Projeto Teláris – Matemática**. Luiz Roberto Dante – 9º ano. 1º Ed. Editora Ática, 2012.
- DIONIZIO, F. Q.; BRANDT, C. F.; MORETHI, M. T. **Emprego das Funções Discursivas da Linguagem na Compreensão de Erros de Alunos em uma Atividade que Envolve Noções de Trigonometria**. Revista online: Perspectivas na Educação Matemática, Campo Grande, v. 7, p. 513-536, 2014.
- FREITAS, M. V. C. **Um estudo sobre volume de sólidos geométricos em quatro coleções de livros didáticos do Ensino Médio**. 2015. Dissertação (Mestrado) – UFMS, Campo Grande.

FRITZE, K.R **Estudo do sistema conceitual de trigonometria no Ensino Fundamental: uma leitura histórico-cultural.** Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade do Estado de Santa Catarina, Criciúma, Santa Catarina, 2011.

GASCÓN, J. **A necessidade de utilizar modelos em didática das matemáticas.** Revista Educação Matemática Pesquisa. Vol 5, n. 2. 2003. ISSN 1516-5388.

GIONGIO, I. M.; REHFELDT, M. J. H.; QUARTIERI, M.T. **Cálculo de área de triângulos quaisquer: uma proposta a partir de práticas laborais.** Revista online: GEPEN, 2012.

GOMES, S. C. **Ensino de Trigonometria numa Abordagem Histórica: um produto educacional.** Revista online: BOLEMA, Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 563-577, 2013.

KASPARY, D. R. D. A. **Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.** Dissertação (mestrado), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

KLEIN, M. É. Z. **O ensino da trigonometria subsidiado pelas teorias da aprendizagem significativa e campos conceituais.** Dissertação (Mestrado), Pontifícia Universidade Católica de Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2009.

KLEIN, M. E. Z.; COSTA, S.S. C. **Investigando as Concepções Prévias dos Alunos do Segundo Ano do Ensino Médio e seus Desempenhos em alguns Conceitos do Campo Conceitual da Trigonometria.** Revista online: BOLEMA, Rio Claro (SP), v. 24, n. 38, p. 43-73, 2013.

LAJOLO, M. **Livro Didático: um (quase) manual de usuário.** Em Aberto, Brasília, n. 69, v. 16, jan./mar. 1996. Disponível em: <http://rbep.inep.gov.br/index.php/emaberto/article/viewFile/1033/935>. Acesso em: 4 ago. 2015.

LINDEGGER, L.R.M. **Construindo os conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir na manipulação de modelos.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

LOPES, M. M. **Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra.** Revista online: BOLEMA Rio Claro (SP), v. 27, n. 46, p. 631-644, 2013.

MARTINS, I. **Analisando Livros Didáticos na Perspectiva dos Estudos do Discurso: compartilhando reflexões e sugerindo uma agenda para a pesquisa.** Pro-Posições v. 17, n. 1 (49) - jan./abr. UFRJ, 2006. Disponível em: http://www.proposicoes.fe.unicamp.br/proposicoes/textos/49_dossie_martinsi.pdf. Acesso em: 4 ago. 2015.

NOGUEIRA, R. C. S. **A Álgebra nos Livros Didáticos do Ensino Fundamental: Uma Análise Praxeológica.** 2008. Dissertação (Mestrado) – UFMS, Campo Grande.

OLIVEIRA, H. **Descobrimo as razões trigonométricas no triângulo retângulo.** Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, São Paulo, 2013.

OLIVEIRA, T. **Trigonometria: A mudança da prática docente mediante novos conhecimentos.** Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, São Paulo, 2010.

PATÁRO; SOUZA. **Vontade de Saber Matemática.** Patrícia Rosana M. Pataro e Joamir Roberto de Souza. 9º ano. 2º Ed. São Paulo: FTD, 2012.

PONTES F. G.; MOURA M. O. **Sequência Didática e Paradidáticos de Matemática: Uma Abordagem Construtiva no Ensino da Trigonometria para Alunos do 9º Ano.** In **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática** – ISSN 2178 - 034X Curitiba –Paraná – 2013. Disponível em: <http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/746_1681_ID.pdf> Acesso em: 21 dez. 2014.

SILVA, S. A. da. **Trigonometria no triângulo retângulo: construindo uma aprendizagem significativa.** Dissertação (Mestrado profissional em Educação Matemática). São Paulo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

SOUZA, N. F.de **Contextualização no ensino da álgebra: análise de livros didáticos do 7º ano.** Dissertação (mestrado), Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2014.

TAGLIANI, D. C. **O livro didático como instrumento mediador no processo de ensino-aprendizagem de língua portuguesa: a produção de textos.** *Rev. bras. linguist. apl.* [online]. 2011, vol.11, n.1, pp. 135-148. ISSN 1984-6398. <http://dx.doi.org/10.1590/S1984-63982011000100008>. Disponível em <http://www.scielo.br/pdf/rbla/v11n1/v11n1a08.pdf>. Acesso em: 4 ago. 2015

ZAMBON, L. B.; TERRAZZAN, E. A. **Políticas de Material Didático no Brasil: organização dos processos de escolha de livros didáticos em escolas públicas de educação básica.** *Rev. bras. Estud. pedagog.* (online), Brasília, v. 94, n. 237, p. 585-602, maio/ago. 2013.

APÊNDICE

Resumo das técnicas

Técnica	Descrição da técnica
τ_3	Substituir a medida do cateto oposto e da hipotenusa na razão que define seno para encontrar o valor do seno do ângulo
τ_4	Substituir a medida do cateto adjacente e da hipotenusa na razão que define cosseno para encontrar o valor do cosseno de um ângulo
τ_5	Substituir a medida dos catetos na definição de tangente para encontrar o valor da tangente.
τ_{15}	Substituir o valor do seno e do cosseno na relação que define tangente e realizar cálculos para encontrar o valor da tangente
τ_{16}	Substituir o valor do cosseno (seno) na relação fundamental da trigonometria e realizar cálculos para encontrar o valor do seno (cosseno)
τ_9	Usar a tabela trigonométrica para encontrar a medida de um ângulo (ou o valor de uma razão trigonométrica) definido pela razão trigonométrica atribuída (em relação a um ângulo dado).
τ_{17}	Utilizar da calculadora para calcular o valor da razão trigonométrica (ou a medida de um ângulo)
$\tau_{2.8}$	Calcular o valor de uma razão trigonométrica
τ_{14}	Utilizar relações métricas no triângulo para encontrar a medida da altura relativa à base do triângulo (ou hipotenusa).
τ_6	Substituir o valor do seno de um ângulo e a medida da hipotenusa (cateto oposto a esse ângulo) na razão que define seno e resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto oposto (hipotenusa).
τ_7	Substituir o valor do cosseno de um ângulo e a medida do cateto adjacente (hipotenusa) a esse ângulo na razão que define cosseno e resolver a equação do 1º grau para encontrar a medida da hipotenusa (cateto adjacente ao ângulo.).
τ_8	Substituir o valor da tangente de um ângulo e a medida do cateto adjacente (oposto) a esse ângulo na razão que define tangente e resolver equação do 1º grau para encontrar a medida do cateto oposto (adjacente)
τ_{13}	Somar a medida encontrada a uma medida dada (ou a outra medida calculada) para encontrar a medida total pedida
τ_2	Substituir a medida dos catetos (hipotenusa e cateto) na relação pitagórica para encontrar a medida da hipotenusa (do outro cateto)
$\tau_{2.2}$	Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida do cateto adjacente e a desse ângulo.
$\tau_{2.3}$	Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e a desse ângulo.
$\tau_{2.4}$	Calcular a medida do cateto adjacente a um ângulo, dadas a medida do cateto oposto e a desse ângulo.
$\tau_{2.6}$	Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto adjacente e a de um ângulo.
τ_1	Somar a medida de cada lado da figura para encontrar a medida do perímetro
τ_{10}	Substituir as medidas na fórmula da área conveniente a figura dada, realizar cálculos e obter a medida da área dessa figura.
τ_{12}	Multiplicar o perímetro da base do prisma pela a medida de sua altura para encontrar a sua área lateral
$\tau_{3.11}$	Substituir o valor do seno e a medida dos catetos na fórmula $(a.b. \text{ Sen}\alpha)/2$ e realizar cálculos para encontrar a área do triângulo.
$\tau_{2.1}$	Calcular a medida do cateto oposto a um ângulo, dadas a medida da hipotenusa e

	desse ângulo
$\tau_{2.5}$	Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto oposto a um ângulo e a desse ângulo
$\tau_{2.6}$	Calcular a medida da hipotenusa, dadas a medida do cateto adjacente e a de um ângulo.