UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LEONARDO DOURADO DE AZEVEDO NETO

# “VEM JOGAR MAIS EU[1]”: MOBILIZANDO CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS POR MEIO DE ADAPTAÇÕES DO JOGO MANKALA *AWALÉ*

Campo Grande - MS
2016

1 A expressão “vem jogar mais eu” é o nome de um corrido da copeira angola de autoria popular.

LEONARDO DOURADO DE AZEVEDO NETO

# "VEM JOGAR MAIS EU": MOBILIZANDO CONHECIMENTOS MATEMÁTICOS POR MEIO DE ADAPTAÇÕES DO JOGO MANKALA *AWALÉ*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador(a): José Luiz Magalhães de Freitas

Campo Grande – MS, 21 de março de 2016.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas (Orientador)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Prof. Dr. José Pedro Machado Ribeiro
Universidade Federal de Goiás – UFG

Prof. Dr. Márcio Antônio da Silva
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Prof. Dr. Luiz Carlos Pais (Suplente)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

FAPEAM
Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas

SECTI
Secretaria de Estado de Ciência, Tecnologia e Inovação
Certificada pela ISO 9001:2008

AMAZONAS
GOVERNO DO ESTADO
CRIANDO OPORTUNIDADES

"Este trabalho foi desenvolvido com o apoio do Governo do Estado do Amazonas por meio Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas, com a concessão de bolsa de estudo".

## DEDICATÓRIA

Dedico esta pesquisa a minha esposa Márdila Bueno pelo companheirismo, compreensão e incentivo diário. Dedico também aos meus pais Sílvio Dourado e Maria Jesus por sempre me apoiarem nos estudos.

## AGRADECIMENTOS

Existem momentos na vida em que é fundamental poder contar com o apoio e a ajuda de algumas pessoas.

Para a realização desta pequisa de mestrado, pude contar com várias. E a essas pessoas prestarei, por meio de poucas palavras, os mais sinceros agradecimentos:

Aos meus pais, **Sílvio Dourado** e **Maria Jesus**, que me deram as condições necessárias para chegar até aqui, incentivando-me sempre;

À minha esposa, **Márdila Bueno**, que soube me incentivar com carinho e compreensão. Madinha eu amo muito você. Obrigado pelo apoio;

Ao professor **José Luiz Magalhães de Freitas**, por orientar, estimulando a autonomia e a criticidade de ideias, respeitando-me como pesquisador e, também, por compartilhar seus conhecimentos, sua atenção e sua boa vontade;

Aos **professores** do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, responsáveis por transformar o modo como eu via o mundo, a educação e a educação matemática;

Aos professores membros da banca examinadora, **José Pedro Machado Ribeiro**, **Márcio Antônio da Silva** e **Luiz Carlos Pais**, pela paciência, disposição, contribuições e seriedade com que apreciaram a minha pesquisa;

Aos professores **Rogério Ferreira** e **Marta Borges**, pelo exemplo de dedicação, profissionalismo e luta por uma educação pública de qualidade. Vocês são responsáveis pela concretização de meu sonho de ser EDUCADOR matemático;

Aos membros do grupo de capoeira *Camuanga de Angola*, em especial ao senhor **José Leandro Leite** (Mestre Pequeno), por terem me acolhido na família Camuanga. Vocês contribuíram bastante nessa caminhada. "*Iê, viva meu mestre camará!*";

Aos meus amigos **Sérgio**, **Ana Carolina**, **Renan**, **Jhenifer**, **Maxlei**, **Darlysson**, **Mauro** (Tiozinho) e **Luana**, pela amizade e companheirismo. Obrigado pelo auxílio no desenvolvimento da pesquisa e também pelos “puxões de orelha”, quando necessário;

Aos **membros** do grupo de pesquisa **Didática da Matemática – DDMat**, pelo apoio e contribuições no desenvolvimento do trabalho;

Aos **sujeitos** que participaram da pesquisa, pela oportunidade de aprendizagem;

À **Universidade Federal do Amazonas**, por ter concedido meu afastamento para cursar o mestrado.

Ao Governo do Estado do Amazonas por meio da **Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Amazonas**, pela concessão de bolsa de estudo.

***Verdades da Profissão de Professor***

*Ninguém nega o valor da educação e que um bom professor é imprescindível. Mas, ainda que desejem bons professores para seus filhos, poucos pais desejam que seus filhos sejam professores. Isso nos mostra o reconhecimento que o trabalho de educar é duro, difícil e necessário, mas que permitimos que esses profissionais continuem sendo desvalorizados. Apesar de mal remunerados, com baixo prestígio social e responsabilizados pelo fracasso da educação, grande parte resiste e continua apaixonada pelo seu trabalho. A data é um convite para que todos, pais, alunos, sociedade, repensemos nossos papéis e nossas atitudes, pois com elas demonstramos o compromisso com a educação que queremos. Aos professores, fica o convite para que não descuidem de sua missão de educar, nem desanimem diante dos desafios, nem deixem de educar as pessoas para serem "águias" e não apenas "galinhas". Pois, se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela, tampouco, a sociedade muda.*

*Paulo Freire (1921-1997)*

# RESUMO

O objetivo desta pesquisa é analisar a mobilização de conhecimentos matemáticos por alunos do 5º e do 6º ano do ensino fundamental por meio de adaptações do jogo Mankala *awalé*. O jogo Mankala *awalé* é milenar na África e abrange nos movimentos de captura e defesa das peças, bem como conceitos matemáticos, práticas religiosas, filosóficas e culturais africanas. Para atingir o objetivo desta pesquisa utilizamos a Teoria das Situações Didáticas proposta por Brousseau como referencial teórico, e, a Engenharia Didática descrita por Artigue como referencial metodológico. Realizamos encontros durante os quais desenvolvemos uma sequência de atividades contendo jogadas que, para a captura ou a defesa, envolve situações de divisão de naturais. A coleta dos dados foi realizada por meio de registros escritos e gravações audiovisuais das conversas dos alunos durante os encontros. Os sujeitos desta pesquisa são alunos do 5º e do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública localizada no município de Campo Grande – MS. Com o desenvolvimento da pesquisa com o jogo Mankala *awalé* foi observado que os alunos desenvolvem habilidades de: realizar divisões utilizando o cálculo mental, reconhecer os divisores de determinados números, bem como de elaborar estratégias exitosas de captura e defesa diante de uma grande variedade de possibilidades de jogadas.



**Palavras-chave:** Estratégias; Jogos Mankalas; Ensino Fundamental.

**ABSTRACT**

The goal of this research is to analyze the mobilization of mathematical knowledge by $5^{th}$ and $6^{th}$ graders from adaptations of the Mancala Awale game. The Mancala Awale game is a millennial game from Africa that includes movements like capturing and defending pieces, as well as math concepts, religious, philosophical and cultural African practices. To reach the goal of this research we used the Theory of Didactical Situations proposed by Brousseau as a theoretical reference, and the Didactic Engineering described by Artigue as a methodological reference. We held meetings in which we could develop a sequence of activities containing movements that embrace natural divison situations either for capturing or defending pieces. The data collecting was made through written and audiovisual records of the students' dialogs during the meetings. The Subjects of this research are $5^{th}$ and $6^{th}$ graders from a public school located in the city of Campo Grande – MS. With the development of the research with the Mancala Awale game, we could observe that the students develop abilities to make divisions using mental calculation and recognize divisors of some numbers, as well as elaborating successful strategies by defense and capture on a wide variety of possibilities of movements.

**Keywords:** Strategies; Mancala Games; Elementary school.

**SUMÁRIO**

# INTRODUÇÃO

*“A crise da Educação no Brasil não é uma crise, é um projeto.”*
*Darcy Ribeiro*[2] *(1922-1997)*

Em 2007, último ano do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal de Goiás – *Campus* Catalão, fiz[3] parte da equipe organizadora da exposição intitulada “*MATEMATIQ?* - Interação e Arte” realizada durante o Simpósio de Matemática - XVII Jornada de Matemática de Catalão. Nessa oportunidade apresentei alguns jogos africanos de tabuleiro.

Nos anos de 2008 e 2009 fui voluntário no Projeto Educar para a Vida, tendo como entidade proponente a Província do Santíssimo Nome de Jesus e a supervisão da Escola Paroquial São Bernardino de Siena. Durante esse período desenvolvi o projeto intitulado “Jogos e Atividades Matemáticas como Ferramentas no Processo de Ensino-Aprendizagem” que tinha como objetivo trabalhar conteúdos de Matemática e Geometria por meio de jogos e atividades matemáticas, visando auxiliar na aprendizagem matemática das crianças do "Projeto Educar para a Vida".

No ano de 2009 consegui aprovação no Processo Seletivo Simplificado para atuar como professor auxiliar I do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Goiás - *Campus* Catalão. Nesse mesmo ano, fiz parte da comissão organizadora do projeto de extensão "Integrar - Escola e Matemática" que buscou incentivar novas práticas e pesquisas educacionais e apresentar uma matemática interessante e motivadora aos alunos da educação básica, por meio de oficinas, em que foram propostas várias atividades adequadas à realidade e ao nível cognitivo dos alunos presentes.

Em 2010 participei do projeto de extensão "Torneio de Jogos Matemáticos" que foi um torneio, composto por jogos estratégicos envolvendo raciocínio lógico dedutivo, entre as escolas de Catalão e região. O projeto resultou em uma pesquisa sobre a importância dos jogos como metodologia de ensino e, jogos: seus aspectos históricos e suas estratégias.

2 Darcy Ribeiro foi um antropólogo, escritor e político brasileiro, conhecido por seu foco em relação aos índios e à educação no país. Disponível em <http://www.fundar.org.br/controller.php?pagina=12>. Acesso em: 27 de nov. de 2015.

3 O texto está em primeira pessoa por se tratar de experiências pessoais vivenciadas pelo pesquisador.

Em 2011 fui aprovado no concurso público para a carreira do magistério superior do Instituto de Educação, Agricultura e Ambiente (IEAA) *Campus* do Vale do Rio Madeira (Humaitá-AM) da Universidade Federal do Amazonas. Nesse mesmo ano, coordenei o projeto de extensão "Jogos e atividades matemáticas multiculturais" que investigou meios para inserir conhecimentos de raízes africanas e indígenas nas aulas de matemática das escolas municipais de Humaitá - AM (Leis 10.639/2003 e 11.648/2008). O projeto foi desenvolvido, em forma de oficinas, com professores de Matemática da Secretaria Municipal de Educação (SEMED). Nas oficinas trabalhamos com os professores: história e cultura de algumas sociedades africanas e indígenas, produção de desenhos e outras imagens com motivos africanos e indígenas, utilização de materiais recicláveis nas confecções dos tabuleiros, desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, elaboração de atividades visando o desenvolvimento de habilidades importantes, tais como calcular, medir e resolver problemas.

No ano de 2012, coordenei o projeto de extensão "Jogos Mankalas numa perspectiva indígena" que foi desenvolvido, em forma de oficinas, com os professores das escolas indígenas da Secretaria Municipal de Educação (SEMED) de Humaitá - AM. O objetivo desse projeto foi investigar alguns jogos da família Mankala buscando formas de inseri-los nas aulas de Matemática das escolas indígenas do município de Humaitá - AM.

Ainda em 2012 participei da equipe de criação do Núcleo de Estudos e Pesquisas Afrobrasileiras e Indígenas – NEABI/UFAM que é um núcleo interdisciplinar que congrega docentes, pesquisadores, profissionais e estudantes de diversas áreas do conhecimento, vinculados à Universidade Federal do Amazonas (UFAM), que desenvolvem projetos de pesquisa, estudo, ensino, formação e extensão na área das relações étnicorraciais. De outubro de 2012 a março de 2014 fui docente suplente da coordenação do NEABI/UFAM.

Em 2013 participei do Processo Seletivo visando a seleção de candidatos para preenchimento de vagas no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Curso de Mestrado, do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Devido a minha trajetória acadêmica, fiz a proposta tentando responder a seguinte questão: "*Quais possibilidades de inserção de elementos da História e Cultura Afrobrasileira, por meio dos Jogos Mankalas, nas aulas de Matemática dos anos finais do ensino fundamental?*". Essa questão se justificava legalmente por meio da Lei n. 10.639, de 9 de janeiro de 2003, que alterou a Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. A Lei brasileira n. 10.639/2003 (Art. 26-A: § 2) salienta que os conteúdos referentes à História e Cultura Afrobrasileira deverão ser ministrados no âmbito de todo o currículo escolar.

Ao ser aprovado no processo de seleção do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, comecei a participar do grupo de pesquisa Didática da Matemática – DDMat na linha de pesquisa ensino e aprendizagem. Devido a trajetória de pesquisas do grupo DDMat decidimos[4], meu orientador e eu, buscar respostas para à seguinte questão norteadora: *"Quais conhecimentos matemáticos e estratégias são mobilizados, por alunos do 5º e do 6º ano do ensino fundamental, diante das adaptações do jogo Mankala awalé?"*. Enfatizamos o conteúdo divisão de números naturais explorando possibilidades de realizarem contagens, cálculo mental, simulações, elaboração de estratégias e conjecturas ao trabalharem com o jogo Mankala *awalé*.

Para o desenvolvimento da pesquisa, utilizamos como referencial teórico a Teoria das Situações Didáticas (BROUSSEAU, 1996, 2008) e a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996) como referencial metodológico. Elaboramos uma sequência de atividades composta por situações-problema que envolviam jogadas de ataque e defesa. Analisamos as possibilidades de realizarem contagens, cálculo mental e simulações na elaboração de estratégias e conjecturas, analisamos também possíveis erros que poderiam surgir.

A escolha da expressão "*Vem Jogar mais Eu*" para o título da dissertação foi devido a minha convivência com o grupo de Capoeira Angola "Camuanga de Angola", que tem como responsável o senhor José Leandro Leite, mais conhecido como mestre Pequeno. O grupo Camuanga de Angola desenvolve um projeto de Extensão na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, oferecendo aulas de Capoeira Angola para alunos, docentes e comunidade externa. A expressão "*Vem Jogar mais Eu*" é o nome de um corrido da Capoeira Angola de autoria popular (Anexo B).

A dissertação foi organizada em cinco capítulos, sendo eles: " A divisão de naturais e os jogos Mankalas", "Referencias teórico e metodológico", "Análises preliminares", "A construção da base experimental, análises *a priori* e *a posteriori*" e "Considerações finais", respectivamente.

No capítulo 1, discorremos sobre elementos do ensino da divisão de números naturais analisando as orientações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998). Também discorremos sobre o uso do jogo como recurso didático enfatizando o jogo Mankala

---

4 No texto, a partir desse momento, utilizamos os verbos no plural por se tratar de um trabalho conjunto do pesquisador e do orientador.

*awalé*. Além disso, apresentamos a questão de pesquisa, o objetivo geral e os objetivos específicos.

No capítulo 2, apresentamos elementos da Teoria das Situações Didáticas que constitui o nosso referencial teórico. Essa teoria foi desenvolvida por Guy Brousseau (1996, 2008), a partir de estudos sobre o construtivismo originados na teoria de Piaget. Também apresentamos, de forma resumida, aspectos que consideramos essenciais da Engenharia Didática descrita por Michèle Artigue (1996), nosso referencial metodológico, que nos orienta na elaboração, aplicação e análise da nossa sequência de atividades.

No capítulo 3, falamos sobre os aspectos da divisão de números naturais apresentando técnicas e processos históricos utilizados para resolução das quatro operações fundamentais. Por fim, discorremos sobre quatro pesquisas que abordaram o jogo Mankala e o ensino da Matemática.

No capítulo 4, apresentamos os sujeitos da pesquisa e os encontros da pré-experimentação que buscava apresentar aos alunos as regras adaptadas do jogo Mankala *awalé*. Expomos, também, o desenvolvimento experimental da pesquisa. Esse capítulo é composto pela análise *a priori* e *a posteriori* da sequência de atividades dos cinco encontros realizados. É composto também, pela experimentação e considerações de cada encontro.

E no capítulo 5, apresentamos as considerações finais da pesquisa, enfatizando a contribuição da mesma para o pesquisador, para os sujeitos da pesquisa e para futuros trabalhos relacionados com a temática estudada.

**CAPÍTULO 1**

# A DIVISÃO DE NATURAIS E OS JOGOS MANKALAS

> *"A educação feita mercadoria reproduz e amplia as desigualdades, sem extirpar as mazelas da ignorância. Educação apenas para a produção setorial, educação apenas profissional, educação apenas consumista, cria, afinal, gente deseducada para a vida."*
>
> *Milton Santos[5] (1926-2001)*

Neste capítulo, apresentamos elementos do ensino da divisão de números naturais analisando as orientações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998). Também discorremos sobre o uso do jogo como recurso didático enfatizando o jogo Mankala *awalé*. Além disso, apresentamos a questão de pesquisa, o objetivo geral e os objetivos específicos.

## 1.1. Divisores de um número natural

Nos livros didáticos do ensino fundamental, geralmente a divisão de números naturais é empregada quando precisamos "dividir uma quantidade em partes iguais" ou "saber quantas vezes uma quantidade cabe em outra quantidade". Essas ideias associadas à divisão, muitas vezes, são apresentadas aos alunos a partir do princípio fundamental da divisão. Bittar e Freitas (2005) expressaram o princípio fundamental da divisão da seguinte forma:

> Numa divisão de dois números naturais, com o divisor diferente de zero, o dividendo é igual ao produto do divisor pelo quociente somado com o resto. Em linguagem matemática escrevemos:
> $D = q \times d + r$,
> onde D é o dividendo, q é o quociente, d o divisor e r o resto (BITTAR; FREITAS, 2005, p. 78).

Como consequência, elencamos algumas considerações sobre a divisão de números naturais:

- Nem sempre é possível realizar a divisão de um número natural por outro número natural;

5 Milton Santos foi um geógrafo brasileiro. Ele destacou-se por seus trabalhos em diversas áreas da geografia, em especial nos estudos de urbanização do Terceiro Mundo. Disponível em: <http://brasilescola.uol.com.br/geografia/milton-santos.htm>. Acesso em: 27 de nov. de 2015.

- Nem sempre a divisão de um número natural não-nulo por outro número natural não-nulo resulta em um número natural;
- Quando o dividendo é 0 e o divisor é um número natural diferente de 0, o quociente é 0;
- Quando o dividendo e o divisor são números naturais iguais e não-nulos, o quociente é 1.

Queremos que os alunos consigam compreender as situações de divisão e atribuam significados a conceitos básicos envolvidos nessa operação. No entanto, o ensino por meio dos algoritmos acaba não proporcionando a busca dessa compreensão. “Os algoritmos, isolados de seu contexto, nada mais são que respostas adquiridas para perguntas futuras; servirão para resolver problemas, mas ninguém sabe de que problema se trata” (DEUS; TAHAN, 1998, p. 21).

Acreditamos que os algoritmos devem continuar a ser ensinados, mas atualmente deve dar-se menos atenção à prática repetitiva dos algoritmos e mais atenção à compreensão das operações e das relações entre eles.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) propõem trabalhar paralelamente multiplicação e divisão, envolvendo os significados dessas operações que ocorrem em situações dos tipos: associadas a “multiplicação comparativa”, associadas à comparação entre razões neste caso, envolvendo a ideia de proporcionalidade, associadas ao produto de medidas e associadas à ideia de combinatória.

Deus e Tahan (1998) afirmam que:

> A representação da divisão não pode se reduzir ao conhecimento de uma estratégia de solução acompanhada de um suposto ‘sentido’ ou significado que permita aplicar a operação. Na verdade implica a capacidade de controlar várias estratégias, passando de uma a outra de acordo com as circunstâncias (DEUS; TAHAN, 1998, p. 23).

Deus e Tahan (1998) consideram que o ensino deve provocar a evolução do sentido da divisão a partir de três aspectos:

> - Resolução de problemas que impliquem divisão, admitindo que os problemas favorecem a construção de novas aprendizagens. Os problemas para os quais um conhecimento é útil dão sentido a esse conhecimento.
> - Manuseio de textos e representações dessa operação, com suas possíveis variações. Isso implica assumir que os conhecimentos e suas

> representações não são estáticos, estão em constante aperfeiçoamento e reelaboração.
> • Uso e domínio do algoritmo, como consequência do trabalho na resolução de problemas, assumindo a relação entre o significado da divisão e seu algoritmo (DEUS; TAHAN, 1998, p. 23).

Nesse sentindo, os alunos ao jogarem e realizarem as atividades propostas, deverão trabalhar com múltiplos e divisores, cálculo mental, cálculo de possibilidades, simulações, contagem, levantamento de conjecturas e estratégias, dentre outros.

## 1.2. O jogo como recurso didático

Os jogos constituem uma forma interessante de propor problemas, pois permitem que estes sejam apresentados de modo atrativo e favoreçam a criatividade na elaboração de estratégias de resolução e busca de soluções. Possibilitam trabalhar os conteúdos de maneira lúdica e contribuem para a formação de atitudes e para o desenvolvimento de habilidades. Para Lara (2011) o caráter lúdico, normalmente, se encontra na maioria dos jogos, independente de serem pedagógicos ou não. São as técnicas, intelectuais e a formação de relações sociais que devem ser consideradas com mais atenção (LARA, 2011, p. 19).

Em relação a utilização de jogos os PCN (1998), relatam que:

> O jogo além de ser um objeto sociocultural em que a Matemática está presente, é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos; supõe um “fazer sem obrigação externa e imposta”, embora demande exigências, normas e controle (BRASIL, 1998, p. 47).

Ainda nesse contexto, Huizinga (2012), afirma que:

> Não foi difícil mostrar a presença extremamente ativa de um certo fator lúdico em todos os processos culturais, como criador de muitas das formas fundamentais da vida social. O espírito de competição lúdica, enquanto impulso social, é mais antigo que a cultura, e a própria vida está toda penetrada por ele, como por um verdadeiro fermento. O ritual teve origem no jogo sagrado, a poesia nasceu do jogo e dele se nutriu, a música e a dança eram puro jogo. [ ] Daí se conclui necessariamente que em suas fases primitivas a cultura é um jogo (HUIZINGA, 2012, p. 193).

De acordo com os PCN (1998) os jogos podem contribuir para um trabalho onde os alunos enfrentam desafios, lançam-se na busca de soluções, desenvolvem a crítica, a intuição, a criação de estratégias e a possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório. Todos esses elementos são necessários para a aprendizagem da Matemática.

Rêgo e Rêgo (2009) afirmam que:

> O jogo, se bem escolhido e explorado, pode ser um elemento auxiliar de grande eficácia para alcançar alguns dos objetivos do ensino, dentre eles, ajudar o aluno a desenvolver suas potencialidades, tanto intelectuais quanto afetivas e físicas (RÊGO; RÊGO, 2009, p. 25).

Os jogos de estratégia (busca de procedimentos para ganhar) partem-se da realização de exemplos práticos (e não da repetição de modelos de procedimentos criados por outros) que levam ao desenvolvimento de habilidades específicas para a resolução de problemas e os modos típicos do pensamento matemático.

Lara (2011) caracteriza os jogos estratégicos como:

> Jogos que façam com que o aluno crie estratégias de ação para uma melhor atuação como jogador. Onde ele tenha que criar hipóteses e desenvolver um pensamento sistêmico podendo pensar múltiplas alternativas para resolver um determinado problema (LARA, 2011, p. 24).

De acordo com Rêgo e Rêgo (2009):

> Os jogos, em geral, não precisam estar, necessariamente, voltados para o desenvolvimento de conteúdos curriculares específicos para trazer ganhos cognitivos que auxiliarão o aluno a construir conhecimentos significativos não apenas na Matemática, mas em outras áreas, enriquecendo sua formação geral. Seu uso adequado poderá promover com eficiência: a) a ampliação da linguagem do aluno, facilitando a comunicação de ideias matemáticas; b) a produção de estratégias de resolução de problemas e de planejamento de ações; c) a capacidade de fazer estimativas e cálculos mentais; d) a introdução ao uso de métodos de investigação científica e da notação matemática e estimular sua concentração, raciocínio, perseverança e criatividade (RÊGO; RÊGO, 2009, p. 25-26).

Por isso, escolhemos trabalhar com um jogo da família Mankala que é milenar na África e envolve estratégias, estimativa e cálculo mental. “As estratégias são exercícios de cálculos matemáticos, pelos quais desenvolvemos a rapidez mental, a lógica e a concentração” (LIMA; GNEKA; LEMOS, 2005, p. 54). Envolve ainda, na fase dos movimentos de captura e defesa das peças, conceitos matemáticos, práticas religiosas, filosóficas e culturais africanas.

Os jogos Mankalas contribuem também para a implantação da Lei nº. 10.639/03[6] nas aulas de Matemática. Pereira (2011), estudou a possibilidade de utilizar o jogo de tabuleiro africano *awalé* da família do Mankala como recurso metodológico de ensino e aprendizagem matemática, associado ao ensino de história, cultura africana e afro-brasileira. A pesquisa de Pereira (2011) será detalhada no capítulo 3.

## 1.3. Aspectos históricos e culturais do jogo Mankala

O Mankala é um jogo de regra que possui como fundamento geral a semeadura, contagem e captura de sementes. "Segundo o pesquisador H. J. R. Murray, existem quase 200 tipos diferentes de Mancalas" espalhados por toda a África, ao sul da Ásia, Américas e na maior parte da Oceania (EDITORA ABRIL, 1978, p. 123)". A palavra Mankala, que também pode ser escrita Mancala ou Manqala, deriva do árabe naqala. Para Zaslavsky (2000):

> Mankala é uma palavra árabe, que significa "transferir". Pedras ou sementes são transferidas de um recipiente a outro em um tabuleiro com duas, três ou quatro filas de recipientes. Em cada região o jogo tem seu próprio nome e seu próprio conjunto de regras (ZASLAVSKY, 2000, p. 32).

Alguns estudiosos consideram que os jogos da família Mankala são os mais antigos do mundo. De acordo com a Editora Abril (1978):

> A sua origem mais provável é o Egito. A partir do vale do Nilo eles teriam se expandido progressivamente para o restante do continente africano e para o oriente. […] têm cerca de 7 mil anos de idade; entre outros indícios da sua antiguidade estão os tabuleiros encontrados nas escavações da antiga cidade síria de Allepo, no templo de Karnak (Egito) e no Theseum, em Atenas (EDITORA ABRIL, 1978, p. 123).

Uma outra versão sobre a origem do jogo Mankala é apresentada por De Voogt (1997 *apud* MACEDO; PASSOS; PETTY, 2000, p. 70). Segundo ele:

> Acredita-se que o mancala originou-se na Ásia ou na África, mas o desenrolar de sua história continua obscuro, principalmente porque não se estudou muito os jogos de mancala asiáticos nem há informações mais

---

6 Altera a Lei nº. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira", e dá outras providências.

> aprofundadas sobre os africanos (DE VOOGT, 1997, *apud* MACEDO; PASSOS; PETTY, 2000, p. 70).

O jogo Mankala, antigamente, era associado a rituais mágicos e sagrados. Alguns jogos eram somente para homens ou reservado para os idosos ou sacerdotes. “Recentes descobertas antropológicas revelam que o mancala asiático é jogado principalmente por mulheres e crianças, enquanto os africanos são predominantemente jogados por homens (DE VOOGT, 1997, *apud* MACEDO; PASSOS; PETTY, 2000, p. 70)”.

Em outras regiões, ao jogar o que se está fazendo é repetir os ciclos da natureza: o cultivo do solo e das colheitas, que seguem o ritmo das estações (LIMA; GNEKA; LEMOS, 2005, p. 54).

Geralmente, nas extremidades dos jogos Mankalas, existem grandes cavidades, denominadas depósitos, destinadas ao armazenamento das peças coletadas. A maioria dos jogos são para duas pessoas, que transferem as peças ou sementes de um recipiente para outro. “É um jogo de semeadura e colheita que na movimentação das sementes o princípio fundamental é semear para colher, que não varia. Esse é o segredo e a fonte, na prática ancestral africana, da troca (LIMA; GNEKA; LEMOS, 2005, p. 54).”

Os Mankalas de duas filas de recipientes são os mais comuns, mas há também tabuleiros com três filas, encontrados na Etiópia, e com quatro filas, presentes no leste da África.

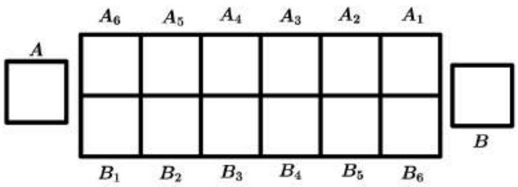



Figura 1: Tabuleiro distribuído em duas filas de recipientes.
Fonte: elaborada pelo autor.

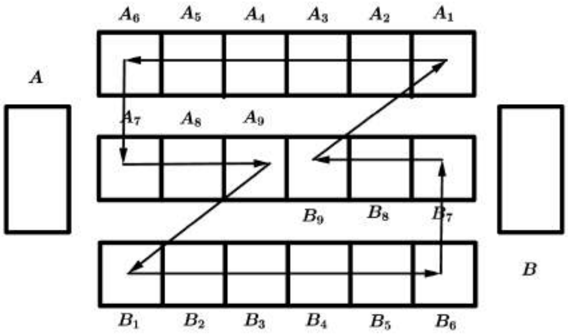



Figura 2: Tabuleiro distribuído em três filas de recipientes.
Fonte: elaborada pelo autor.

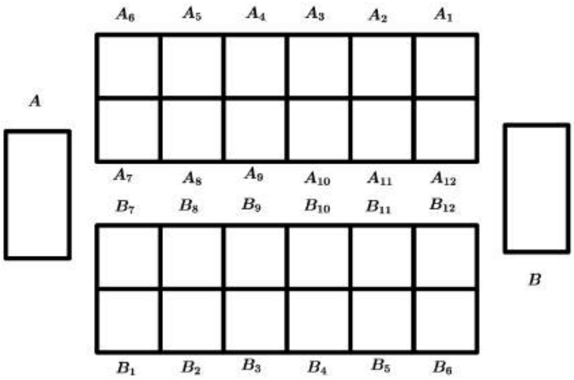



Figura 3: Tabuleiro distribuído em quatro filas de recipientes.
Fonte: elaborada pelo autor.

Nos jogos da família Mankala existem características comuns às diferentes modalidades existentes, descritas por Odeleye (1977, *apud* MACEDO; PETTY; PASSOS, 2000, p. 71):

> a) são jogados por duas pessoas, uma em frente à outra, com o tabuleiro longitudinalmente colocado entre elas[7];
> b) antes de começar o jogo, o mesmo número de sementes é distribuído em cada uma das cavidades do tabuleiro;
> c) os jogadores se alternam para jogar, distribuindo as sementes da cavidade escolhida, uma a uma, no sentido anti-horário, nas cavidades subsequentes[8];
> d) sempre há captura de sementes, sendo a forma de captura diferente, dependendo do jogo em questão;
> e) a partida termina quando restam muito poucas sementes para o jogo continuar ou quando resta apenas uma semente em cada lado;
> f) ganha quem tem o maior número de sementes;
> g) as estratégias do jogo envolvem movimentos calculados, que exigem muita concentração, antecipação e esforço intelectual (ODELEYE, 1977, p. 8, *apud* MACEDO; PETTY; PASSOS, 2000, p. 71).

7 Como existem variações dos jogos Mankalas para mais de dois jogadores esta característica não é definitiva.
8 Existem variações em que o jogador pode distribuir as sementes da cavidade escolhida no sentido horário ou anti-horário, dependendo da estratégia planejada.

O objetivo do jogo é realizar uma grande colheita, portanto o jogador que colher o maior número de sementes até o final da partida, é o vencedor. “Mas é, sobretudo, um jogo baseado na generosidade: para ganhar, um jogador tem que saber doar ao seu adversário (LIMA; GNEKA; LEMOS, 2005, p. 54)”.

A matemática envolvida favorece o desenvolvimento nos alunos da criatividade, da habilidade de contar, de calcular e resolver problemas. Acima de tudo, eles aprendem a pensar criticamente.

Dentre os vários jogos da família Mankala escolhemos trabalhar com o *awalé*. Esse jogo, pela África onde é jogado, é considerado um dos mais populares de todos os Mankalas. Ele recebe vários nomes: *wari*, no Sudão, Gâmbia, Senegal e Haiti; *aware*, no alto Volta; *adi*, no Daomé, Baulé, na Costa do Marfim, Filipinas e Ilhas Sonda; *ayo*, na Nigéria; e muitos outros nomes como *walu*, *adji* e *ti* (LIMA; GNEKA; LEMOS, 2005, p. 54).

O jogo Mankala *awalé* é tradicionalmente um jogo para homens, embora seja também praticado por mulheres e crianças, em algumas regiões da África.

O *awalé* possui seu próprio conjunto de regras. Georges Gneka[9] (2005) descreve-as em um encarte do livro *A semente que veio da África* (ver Anexo A).

Jogado quase sempre como puro entretenimento, embora às vezes também valendo dinheiro, o *awalé* tem em algumas regiões significado religioso. No Suriname (antiga Guiana Holandesa), por exemplo, é costume jogar-se o *awari* – uma variante do *awalé* – na véspera de um enterro, para distrair o espírito do morto que ainda não partiu para a eternidade. Na manhã seguinte, porém, os tabuleiros são jogados fora. Em muitas tribos africanas acredita-se também que, se o *awalé* for jogado à noite, espíritos do outro mundo virão juntar–se aos jogadores vivos e partirão levando suas almas.

De acordo com a Editora Abril (1978):

> Entre os Alladians – povo da Costa do Marfim – quando um rei morre, os pretendentes ao trono jogam a*welé* entre si, durante a noite que se segue aos ritos funerários. O novo rei – afirmam eles – será escolhido pelos deuses e o sinal é a vitória que ele obtém no jogo contra seus concorrentes (EDITORA ABRIL, 1978, p. 125).

Nessa pesquisa, trabalhamos com levantamento de conjecturas, simulações, com divisão de naturais focando na elaboração das estratégias que os alunos poderiam mobilizar e,

9 Nascido na Costa do Marfim, é um contador de histórias africanas.

para isso, decidimos realizar adaptações[10] no jogo Mankala *awalé*. Realizamos três adaptações no jogo para que as jogadas durassem menos tempo e para aprimoramento do cálculo mental.

## 1.4. As adaptações do jogo Mankala *awalé*

Nessa perspectiva, a primeira adaptação estava relacionada com a quantidade de recipientes. O tabuleiro do jogo foi dividido em dois territórios, com quatro recipientes[11] em cada um, numerados em $A_1$, $A_2$, $A_3$ e $A_4$ para o jogador **A** e em $B_1$, $B_2$, $B_3$ e $B_4$ para o jogador **B**. Cada recipiente receberá, inicialmente, 4 sementes, de forma que cada jogador preencha todos os recipientes de seu território, perfazendo um total de 16 sementes.

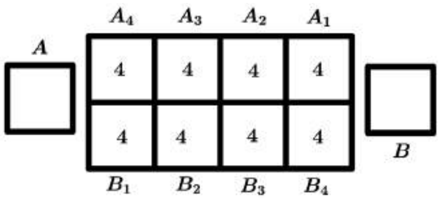



Figura 4: Organização das sementes para início da partida.
Fonte: elaborada pelo autor.

A segunda adaptação foi em relação à regra de movimentação escrita por Gneka (2005), em um encarte do livro *A semente que veio da África.*

Gneka (2005) descreve que os jogadores decidem quem irá iniciar a partida. Quem começa, escolhe um dos recipientes do seu território e retira as 4 sementes para redistribuí-las. Depois de esvaziar o recipiente escolhido, o jogador coloca uma das 4 sementes em cada um dos recipientes seguintes. O sentido para a redistribuição é sempre o anti-horário (direita).

Na nossa adaptação, depois de retirar as 4 sementes do recipiente escolhido, o jogador decidirá o número de sementes que irá distribuir em cada recipiente, fazendo a divisão do número de sementes em partes iguais e distribuindo as partes em sequência nos recipientes. Nesse momento, o jogador estará buscando os divisores de um determinado número para, diante das possibilidades de jogada, escolher uma e iniciar a movimentação.

10 As regras do Mankala *awalé* adaptado estão no Apêndice A.
11 O jogo Mankala *awalé* tradicional contém 6 recipientes ou valas.

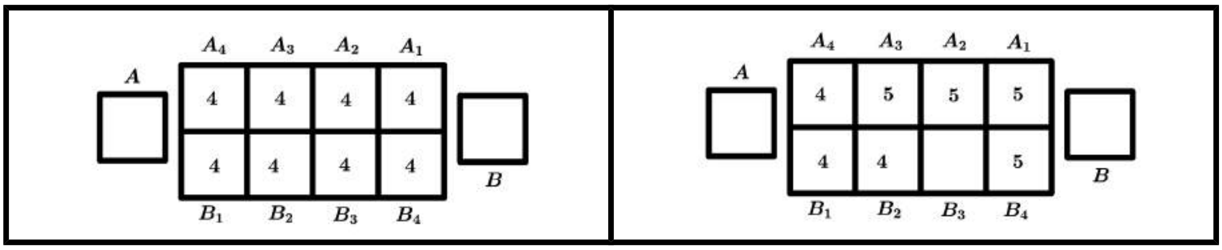
Assim, podemos identificar os elementos do princípio fundamental da divisão durante a realização das jogadas, isto é, como *dividendo*, consideramos o número que representa a quantidade de sementes existentes no recipiente escolhido, como *divisor*, o número de recipientes seguintes que o jogador queira distribuir as sementes e como *quociente*, o número de sementes que serão deixadas em cada recipiente. Como as sementes sempre serão distribuídas em partes iguais teremos *resto* zero.

Uma das regras do Mankala *awalé* tradicional, diz que quando o recipiente escolhido pelo jogador para iniciar a jogada tiver mais de 11 sementes, ele terá de depositar as demais em sequência, uma em cada recipiente, o que fará com que dê uma volta completa no tabuleiro, passando pelos dois campos. Nesse caso, a cada passagem o jogador deverá pular o recipiente de partida, que deve ficar sempre vazio.

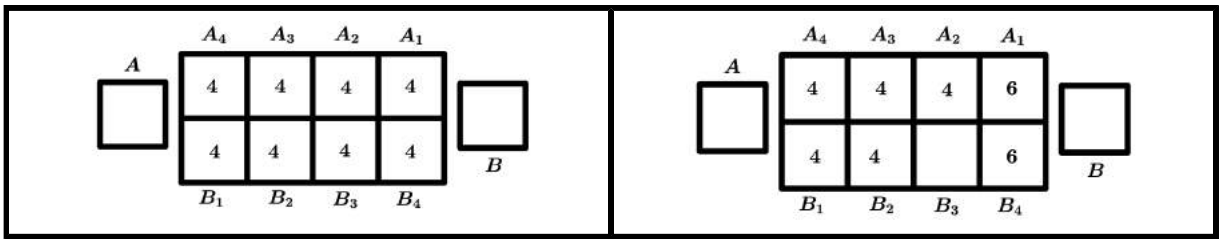
Na terceira adaptação, se o recipiente escolhido pelo jogador para iniciar a jogada tiver uma quantidade de sementes que fará com que dê uma volta completa no tabuleiro, passando pelos dois campos, nesse caso, a cada passagem o jogador **deverá deixar** sementes no recipiente de partida.

## 1.5. Algumas considerações sobre as regras do jogo Mankala *awalé*

No jogo Mankala *awalé*, para iniciar a movimentação das sementes, o jogador escolhe um recipiente, no seu território, retira dele todas as sementes e as redistribui, respeitando o sentido (anti-horário) e a sequência (não pular nenhum recipiente). Dependendo da quantidade de sementes contidas em um recipiente, na redistribuição elas podem se deslocar por entre os recipientes do seu território, mas também nos do adversário. Se o jogador **B** escolher o recipiente $B_3$ e distribuir suas sementes uma a uma (Quadro 1) ou de duas em duas (Quadro 2), observamos que ele semeia-as nos dois territórios.



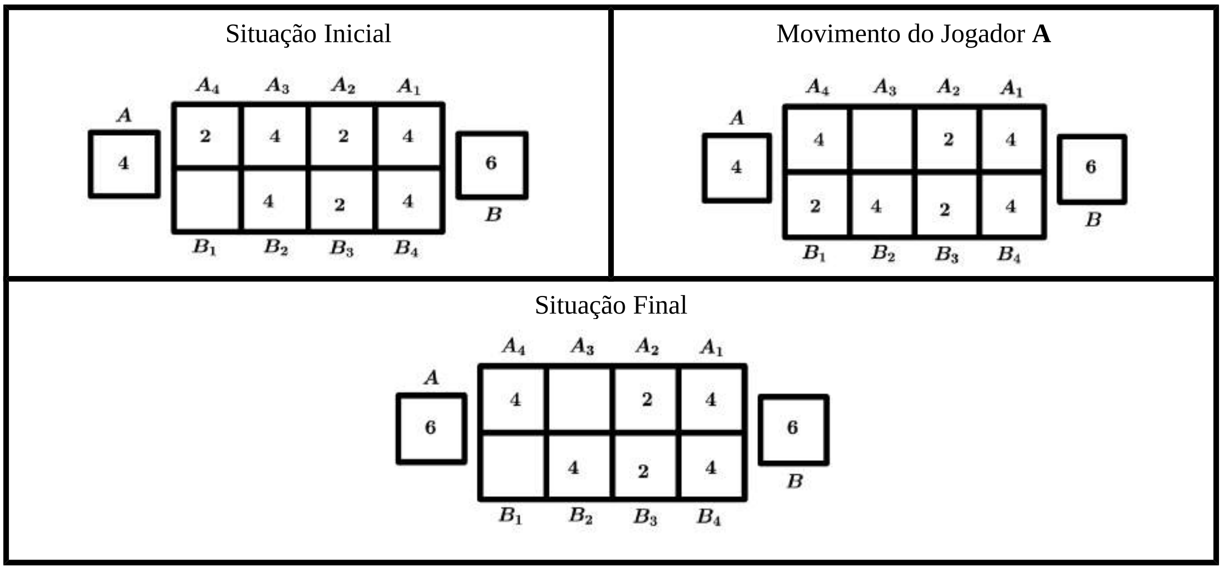

Quadro 1: Jogador **B** semeando as suas sementes uma a uma e percorrendo nos dois territórios.
Fonte: elaborado pelo autor.



Quadro 2: Jogador **B** semeando as suas sementes duas a duas e percorrendo nos dois territórios.
Fonte: elaborado pelo autor.

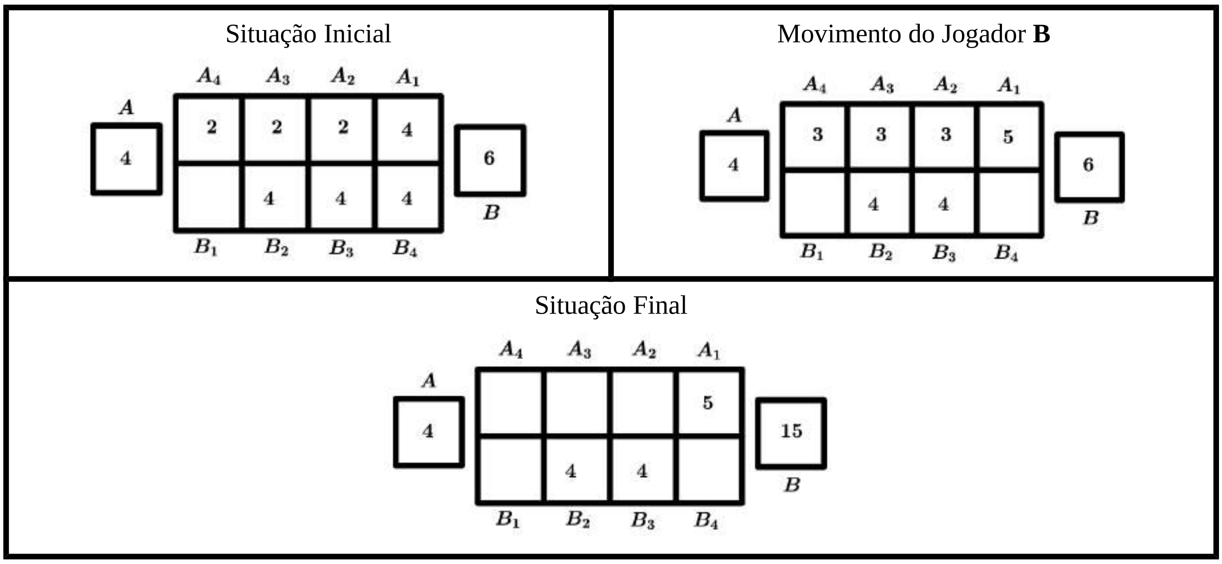
Na distribuição cada recipiente vai acumulando novas sementes, que se somam às iniciais. Também pode acontecer situações em que os recipientes fiquem com poucas sementes.

Os recipientes com 0, 1 ou 2 sementes estão em perigo. Se um jogador calcular bem, de forma que a última semente distribuída caia em um recipiente do adversário que tenha 2 ou 3 sementes (contando com a semente que acabamos de depositar), ele tem o direito de recolher as sementes para si e colocá-las no seu depósito. Nesse momento está ocorrendo a captura também conhecida como colheita. No quadro 3, o jogador **A** faz uma captura simples de 2 sementes, ao escolher o recipiente $A_3$ e distribuí-las de duas a duas.




Quadro 3: Colheita simples de 2 sementes efetuada pelo jogador **A**.
Fonte: elaborado pelo autor.

Se um jogador consegue capturar todas as sementes de algum recipiente, conforme descrito acima, todos os recipientes precedentes que também contiverem 2 ou 3 sementes serão esvaziadas. Quando isso acontece dizemos que ocorreu uma colheita múltipla. No quadro 4, vemos um exemplo onde o jogador **B** efetua uma colheita múltipla capturando 9 sementes do adversário, ao escolher o recipiente $B_4$ e distribuir as sementes de uma em uma. Salientamos, que as capturas múltiplas somente foram apresentadas aos alunos no quinto encontro, por isso não iremos mencioná-las nas análises do primeiro, do segundo, do terceiro e do quarto encontro.




Quadro 4: Colheita múltipla de 9 sementes efetuada pelo jogador **B**.
Fonte: elaborado pelo autor.

Se em algum momento da partida o adversário não tiver mais nenhuma semente em seu território, o outro jogador deve escolher um recipiente que tenha a quantidade suficiente de sementes para alimentar o território do adversário.

Quando um jogador fica sem sementes em seu território e o adversário não tem como jogar para alimentá-lo, a partida termina e o adversário recolhe as sementes que estão nos seus recipientes para seu depósito.

Ganha a partida quem tiver capturado o maior número de sementes (16 ou mais).

## 1.6. Objetivos da pesquisa

A pesquisa de Pereira (2011) mostrou a possibilidade de utilizar o jogo *awalé* como recurso metodológico de ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, associado ao ensino de história, cultura africana e afro-brasileira. Ele trabalhou estratégia, estimativa, cálculo mental, raciocínio, lógica, o conceito de probabilidade, porcentagem e análise combinatória por intermédio do jogo *awalé*.

Temos ainda, a pesquisa de Lacanallo (2011) que investigou como os jogos de regras podem constituir-se em um recurso metodológico na organização do ensino da matemática e na formação do pensamento teórico dos alunos. Ela selecionou o jogo Mankala *kalah*. Segundo ela, este jogo de origem africana possibilita o desenvolvimento de várias estratégias quando os jogadores analisam a relação entre as peças no tabuleiro, as movimentações feitas e as possibilidades de jogo. O jogo ainda contribui para a exploração de diversos conhecimentos matemáticos, como a contagem, adição, diferentes formas de cálculo (estimativo, probabilístico), antecipação e análise das possibilidades testadas, além da exploração das funções psicológicas superiores (memória, atenção, linguagem, pensamento). Salientamos que esses conhecimentos também foram explorados na nossa pesquisa.

Destacamos também, a pesquisa de Santos (2014) que investigou a contribuição do jogo *Mankala Colhe Três* para a aprendizagem de conhecimentos matemáticos por alunos de 6º ano do Ensino Fundamental. Ele mostrou que, por meio do jogo, é possível desenvolver estratégias de quantificar mentalmente, resolver problemas de situações mistas: aditivas e multiplicativas, dividir por cálculo mental, mapear as possibilidades, reconhecer divisores de um determinado número, identificar múltiplos de um número e reconhecer números primos.

Em nossa pesquisa de mestrado pretendemos, dentre as diversas contribuições dos jogos Mankalas citadas acima, trabalhar o conteúdo divisão de números naturais explorando possibilidades de realizarem contagens, cálculo mental, simulações, elaboração de estratégias e conjecturas ao trabalharem com o jogo Mankala *awalé*. Temos por objetivo responder à seguinte questão norteadora: *Quais conhecimentos matemáticos e estratégias são mobilizados, por alunos do 5º e do 6º ano do ensino fundamental, diante das adaptações do jogo Mankala awalé?*

Buscando responder nossa questão de pesquisa temos como objetivo geral **analisar a mobilização de conhecimentos matemáticos *por alunos do 5º e do 6º ano do ensino fundamental a partir* de adaptações do jogo Mankala *awalé.***

Para alcançar nosso objetivo geral, elencamos dois objetivos específicos. O primeiro objetivo específico é **analisar possibilidades de realizarem contagens, cálculo mental, simulações, elaboração de estratégias e conjecturas, envolvendo o conteúdo divisão de um número natural por meio do jogo adaptado**, pois ao jogarem e realizarem as atividades propostas, os alunos deverão trabalhar com múltiplos e divisores, cálculo de possibilidades, contagem, levantamento de conjecturas, simulações, dentre outros.

De acordo com Bittar e Freitas (2005):

> O cálculo mental é uma técnica operatória muito importante, porque permite que as crianças desenvolvam seus próprios procedimentos sem se limitar a um único processo. […] É fundamental que o professor estimule o aluno a realizar um cálculo mental antes de efetuar o cálculo no papel. Isso o ajuda a fazer estimativas e o aproxima das situações do cotidiano (BITTAR; FREITAS, 2005, p. 87).

O segundo objetivo específico é **analisar dificuldades manifestadas pelos alunos diante do jogo proposto**. Esse objetivo específico foi traçado, devido a investigação feita na pesquisa de Dias (2009), que pretendia ampliar a compreensão das dificuldades em matemática, utilizando o jogo de regras Mankala como instrumento de avaliação e intervenção. Ela analisou os erros relativos às regras e às estratégias no jogo Mankala *kalah*. Por isso, consideramos pertinente realizar uma análise semelhante em nossa pesquisa.

**CAPÍTULO 2**

# REFERENCIAIS TEÓRICO E METODOLÓGICO

> "O saber deve ser como um rio, cujas águas doces, grossas, copiosas, /transbordem do indivíduo, e se espraiem, estancando a sede dos outros. Sem um fim social, o saber será a maior das futilidades."
>
> *Gilberto Freyre[12] (1900-1987)*

Tentando responder nossa questão de pesquisa apresentamos nesse capítulo elementos da Teoria das Situações Didáticas (TSD) que constitui o nosso referencial teórico. Essa teoria foi desenvolvida por Guy Brousseau (1996, 2008), a partir de estudos sobre o construtivismo originados na teoria de Piaget. A TSD "trata de formas de apresentação, a alunos, do conteúdo matemático, possibilitando melhor compreender o fenômeno da aprendizagem da Matemática" (FREITAS, 2012, p. 77).

Também apresentamos a Engenharia Didática (ED) descrita por Michèle Artigue (1996), nosso referencial metodológico, que nos orienta na elaboração, aplicação e análise da nossa sequência de atividades. A ED "se constituiu com a finalidade de analisar as situações didáticas objeto de estudo da Didática da Matemática" e "é empregada nas pesquisas que incluem uma parte experimental, desde a década de 80" (MACHADO, 2012, p. 233).

## 2.1. Teoria das Situações Didáticas

A matemática, assim como as outras formas de conhecimento, está em permanente evolução. Mesmo assim, o ensino tradicional ainda possui falhas, que acabam deixando de explorar várias formas de ensinar matemática. Para Aranão (2007):

> O ensino tradicional, portanto, incentiva a postura positivista, em que o principal responsável pelo fracasso escolar é o próprio aluno e, o que é pior, essa concepção recai principalmente nos alunos das classes populares, sob a alegação de que estes não têm condições de aprender […] (ARANÃO, 2007, p. 8).

12 Gilberto Freyre, como escritor, dedicou-se à ensaística da interpretação do Brasil sob ângulos da sociologia, antropologia e história. Foi também autor de ficção, jornalista, poeta e pintor. Disponível em: <http://www.releituras.com/gilbertofreyre_bio.asp>. Acesso em: 27 de nov. de 2015.

Por isso o professor deve procurar atividades atrativas para serem desenvolvidas em sala de aula, tanto em grupos ou individuais, de tal forma que, tais atividades possam criar um espaço para a participação, questionamento, investigação e argumentação dos alunos. “As crianças são curiosas por natureza, mas só aprendem se tiverem espaço para a participação. E isso só existe quando há conversa, fala e argumentação e não um ambiente de apatia” (MENEZES, 2007, p. 35).

Entendemos que “é importante abrir espaço para que o conhecimento dos alunos se manifeste” (D'AMBROSIO, 2010, p. 85), nessa perspectiva acreditamos que a TSD pode contribuir para a organização dessa manifestação do conhecimento.

A TSD foi um instrumento científico[13] importante nas pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Matemática, tendo a concepção que o sujeito aprende por meio de um processo que produz contradições e desequilíbrios.

Para Freitas (2012) a TSD é um referencial que:

> […] por um lado, valoriza os conhecimentos mobilizados pelo aluno e seu envolvimento na construção do saber matemático e, por outro, valoriza o trabalho do professor, que consiste, fundamentalmente, em criar condições suficientes para que o aluno se aproprie de conteúdos matemáticos específicos (FREITAS, 2012, p. 78).

Assim, o professor, ao organizar o *meio*, cria expectativas quanto à participação dos alunos e estes observam o professor afim de determinar o que está em jogo. “O meio é onde ocorrem as interações do sujeito, é o sistema antagonista no qual ele age” (FREITAS, 2012, p. 79). Dessa forma, a aprendizagem ocorre quando o sistema didático (aluno, professor, saber) sofre um desequilíbrio provocado por uma mudança no meio. Essa mudança pode ser provocada por novos problemas, novos exercícios, novas situações que exigem novos conhecimentos.

Brousseau (2008, p. 19) denomina situação como sendo “o modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento, como o recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável”.

Quando na ação do professor ficar caracterizado a finalidade de proporcionar ao aluno a aprendizagem de um conteúdo temos uma situação didática.

---

13 Termo utilizado por Brousseau (2008, p. 16)

### 2.1.1. As situações didáticas

Brousseau (1986, *apud* Freitas, 2012) define situação didática como sendo:

> Um conjunto de relações estabelecidas explicitamente e ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo eventualmente instrumentos e objetos, e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a estes alunos um saber constituído ou em vias de constituição (BROUSSEAU, 1986, p. 8, *apud* FREITAS, 2012, p. 80).

Inspirado pelas pesquisas de Piaget sobre o conhecimento lógico-matemático, Brousseau (1996) desenvolveu um trabalho didático, com base na problematização matemática, considerando três elementos distintos: o trabalho do matemático, o trabalho do aluno e o trabalho do professor.

O matemático, na tentativa de determinar a solução de um problema, procura filtrar dentre as reflexões realizadas quais podem transformar-se num saber interessante para os outros. Durante a resolução elimina reflexões inúteis, caminhos errados, procuram por uma teoria mais geral em que os resultados continuam válidos. Brousseau (1996, p. 37), enfatiza que o trabalho do matemático despersonaliza, descontextualiza e destemporaliza o mais possível os seus resultados.

O trabalho do aluno deve ser, em alguns momentos, comparado à atividade científica. Segundo Brousseau (1996):

> Uma boa reprodução pelo aluno de uma atividade científica exige que ele aja, formule, prove, construa modelos, linguagens, conceitos, teorias, os troque com outros, reconheça aqueles que não são conformes à cultura, retire desta aqueles que lhe são úteis, etc (BROUSSEAU, 1996, p. 38).

Piaget enfatiza o quanto é importante trabalhar com o aluno fazendo com que ele encontre suas próprias respostas e construa soluções para os problemas enfrentados. Aprender a pensar é fundamental, pois possibilita ao aluno refazer um caminho já percorrido, valorizando sua capacidade de compreensão e reconstrução (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2000, p. 37-38). Para tornar possível uma atividade desse gênero o professor deve propiciar aos alunos tais situações.

O professor deve fazer o trabalho inverso do cientista, recontextualizando, repersonalizando e temporizando o conteúdo matemático, evitando apresentações de resultados prontos, promovendo sempre que possível simulação de um ambiente científico, onde o aluno possa ter momentos de investigações e criar suas próprias conjecturas, refazendo alguns passos do cientista.

Macedo, Petty e Passos (2000), enfatizam que o papel do professor em sala de aula é um elemento fundamental. Segundo eles:

> Piaget reforça a importância do professor no trabalho em sala de aula. O professor teria a função de estimular o aluno a pensar e propor situações-problema, proporcionando mais espaço para o descobrimento e construção de suas ideias sobre o mundo em vez de fornecer informações “prontas” (MACEDO; PETTY; PASSOS, 2000, p. 38).

O desafio está em criar condições para que o aluno construa um conhecimento que demorou muito tempo para ser construído. Assim, o aluno deve se tornar um pequeno cientista, o professor não deve apenas fazer a comunicação do conhecimento pronto, mas a devolução de um bom problema. Para Brousseau (2008):

> A *devolução* é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência (BROUSSEAU, 2008, p. 91, grifo do autor).

Se o aluno aceita a responsabilidade de resolver o desafio, como se fosse dele, e se obtiver êxito no seu trabalho, então inicia-se o processo de aprendizagem. Para compreender as etapas entre a devolução do problema e a aprendizagem exitosa, faz-se necessário apresentar a noção de situação *adidática*.

### 2.1.2. As situações *adidáticas*

Uma situação *adidática* é caracterizada por Brousseau (1996) da seguinte maneira:

> A concepção moderna do ensino solicita, pois, ao professor que provoque no aluno as adaptações desejadas, através de uma escolha judiciosa dos problemas que lhe propõe. Estes problemas, escolhidos de forma a que o

> aluno possa aceitá-los, devem levá-lo a agir, a falar, a reflectir[14], a evoluir por si próprio. Entre o momento em que o aluno aceita o problema como seu e o momento em que produz a sua resposta, o professor recusa-se a intervir como proponente dos conhecimentos que pretende fazer surgir. O aluno sabe perfeitamente que o problema foi escolhido para o levar a adquirir um conhecimento novo, mas tem de saber igualmente que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode construí-lo sem fazer apelo a razões didácticas[15]. Não somente pode, como deve fazê-lo, porque só terá verdadeiramente adquirido esse conhecimento quando for capaz de aplicá-lo por si próprio às situações com que depara fora do contexto de ensino, e na ausência de qualquer indicação intencional (BROUSSEAU, 1996, p. 49-50).

Para o aluno vivenciar uma situação *adidática* é fundamental que ele passe pelo momento de devolução do problema. Para Freitas (2012, p. 85) "a devolução de uma situação consiste no conjunto de condições que permitem que o aluno se aproprie da situação", ou seja:

> A devolução, aqui, tem o significado de transferência de responsabilidade, uma atividade na qual o professor, além de comunicar o enunciado, procura agir de tal forma que o aluno aceite o desafio de resolvê-lo, como se o problema fosse seu e não somente porque o professor quer (FREITAS, 2012, p. 83).

Após ter aceito o desafio e vivenciado o momento de devolução o aluno passa a interagir com o meio. Para Brousseau (2008):

> As relações de um aluno com o meio podem ser classificadas, no mínimo, em três grandes categorias:
> - troca de informações não codificadas ou sem linguagem (ações e decisões);
> - troca de informações codificadas em uma linguagem (mensagens);
> - troca de opiniões (sentenças referentes a um conjunto de enunciados que exercem o papel de teoria) (BROUSSEAU, 2008, p. 27).

No momento em que os alunos se apropriam do problema caracteriza-se a situação *adidática*, e passam a percorrer três tipos de situações que a compõem: situação de *ação*, situação de *formulação* e situação de *validação*.

Salientamos que essas três categorias "são estritamente encaixadas umas nas outras, porque uma troca de juízo é uma troca de informações particulares, e esta é um tipo particular de acção[16] e de decisão" (BROUSSEAU, 1996, p. 95).

14 Mesmo que refletir. Livro fonte escrito em Português de Portugal.
15 Mesmo que didáticas. Livro fonte escrito em Português de Portugal.
16 Mesmo que ação. Livro fonte escrito em Português de Portugal.

Na situação *adidática* de *ação*, o aluno empenha-se na busca de solução de um problema, realizando ações que resultam na produção de um conhecimento operacional. O aluno na maioria das vezes nos fornece uma resposta, mas sem nenhum argumento teórico para fundamentá-la, não explicitando sua elaboração. Em uma situação de ação o aluno realiza ações mais experimentais sem se preocupar em explicar ou justificar sua resposta.

Quando o aluno começa a utilizar alguns esquemas na tentativa de fundamentar sua resposta, constitui uma situação *adidática* de *formulação*. Na situação de *formulação* o saber tem uma função de justificação e controle das ações. O aluno começa a tentar justificar suas ações, com uma abordagem mais teórica, mas sem muito rigor matemático.

Na situação *adidática* de *validação* o aluno já utiliza esquemas de provas e utiliza o saber para essa finalidade. Segundo Freitas (2012):

> O trabalho do aluno não se refere somente às informações em torno do conhecimento, mas a certas afirmações, elaborações, declarações a propósito desse conhecimento. Nessas situações, é preciso elaborar algum tipo de prova daquilo que já se afirmou, de outra forma, pela ação (FREITAS, 2012, p. 98).

Ao vivenciarem uma situação *adidática* o aluno age sobre o meio realizando descobertas, assimilando elementos que podem subsidiar outros conhecimentos. Ao término da fase *adidática*, “como a produção de conhecimentos, [...] é ampla, faz-se necessária uma fase de institucionalização do saber, que deve ser conduzida pelo professor” (FREITAS, 2012, p. 93). Nesse momento, saímos de um momento adidático e começamos a vivenciar uma fase didática, já que o controle do saber volta ao professor. Ele institucionaliza as novas regras e sistematiza o que os alunos já formularam. Isso é necessário para que o aluno reconheça o que construiu como um saber novo, aceito culturalmente. Aqui os protagonistas do processo são ambos, aluno e professor, diferente das outras fases em que o aluno era o ator principal.

Segundo Brousseau (2008):

> A institucionalização acontece tanto em uma situação de ação – quando se reconhece o valor de um procedimento que se tornará um meio de referência – como em uma formulação. […] Nas situações de prova também: deve-se identificar, dentre as propriedades encontradas, quais serão mantidas (BROUSSEAU, 2008, p. 102-103).

## 2.2. Engenharia Didática

A ED foi desenvolvida para analisar as situações didáticas, focando o sistema didático (aluno, professor, saber), em que incluem uma parte experimental utilizada para que o aluno tenha a possibilidade de apreender um conteúdo novo, ou simplesmente um elemento do mesmo. Conta como aporte teórico, para que ocorra essa aprendizagem, a TSD desenvolvida por Brousseau.

Artigue (1996, p. 196) caracteriza a ED "[…] por um esquema experimental baseado em "realizações didácticas[17]" na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências de ensino".

Esse esquema experimental da ED é composto de quatro fases: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e análise *a posteriori* e validação. Lima (2015, p. 37), enfatiza que "a Engenharia Didática não é uma metodologia fechada. O pesquisador, caso sinta necessidade, durante o desenvolvimento da ED tem a liberdade de retomar fases anteriores e reestruturá-las, tendo em vista alcançar os objetivos da sequência".

### 2.2.1. Fases da Engenharia Didática

A **análise preliminar**, busca identificar os problemas de ensino e aprendizagem do objeto de estudo presente na pesquisa, contendo as dimensões epistemológica, didática e cognitiva do assunto. Machado (2012) enfatiza que a fase de análise preliminar é composta de:

> A análise epistemológica dos conteúdos contemplados pelo ensino; a análise do ensino atual e de seus efeitos; a análise da concepção dos alunos, das dificuldades e dos obstáculos que determinam sua evolução; a análise do campo dos entraves no qual vai se situar a efetiva realização didática. Tudo isso levando em consideração os objetivos específicos da pesquisa (MACHADO, 2012, p. 238).

Sendo assim, realizamos uma investigação a fim de compreender como se deu o desenvolvimento histórico do conteúdo divisão de números naturais e na aplicação do conceito de divisor de um número natural para resolver uma situação-problema.

---

17 Mesmo que didáticas. Livro fonte escrito em Português de Portugal.

Analisamos as orientações acerca do conteúdo divisão de números naturais e também em relação à utilização dos jogos, propostas nos Parâmetros Curriculares Nacionais. Analisamos, ainda, como os jogos Mankalas são abordados nas pesquisas.

Na segunda fase, **concepção e análise *a priori***, o pesquisador escolhe um certo número de variáveis pertinentes para o problema estudado. Essas variáveis são chamadas de variáveis de comando. Artigue (1996) distingue dois tipos de variáveis de comando:

> *As variáveis macro-didácticas*[18] *ou globais*, que dizem respeito à organização global da engenharia;
> E *as variáveis micro-didácticas*[19] *ou locais*, que dizem respeito à organização local da engenharia, isto é, à organização de uma sessão ou de uma fase (ARTIGUE, 1996, p. 202, grifo da autora).

Por exemplo, em um determinado conteúdo a ser ensinado, ao nível microdidático, podemos ter variáveis que são próprias do problema (de ordem geral) e as variáveis que dependem da situação, do meio (específicas). Ressaltamos que as escolhas globais e as locais possuem uma dependência recíproca, mesmo aparecendo separadamente. “Temos de assegurar-nos constantemente da capacidade que a concepção geral tem de permitir a invenção, a organização e o desenrolar de situações locais” (BROUSSEAU, 1981, p. 55, *apud* ARTIGUE, 1996, p. 204).

O objetivo da segunda fase, concepção e análise *a priori* da sequência de atividades, para Artigue (1996) é:

> [ ] determinar de que forma permitem as escolhas efectuadas[20] controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, funda-se em hipóteses; será a validação dessas hipóteses que estará, em princípio, indirectamente[21] em jogo no confronto, operado na quarta fase, entre a análise *a priori* e a análise *a posteriori* (ARTIGUE, 1996, p. 205, grifo da autora).

A análise *a priori* busca analisar a consideração do aluno sobre os aspectos descritível e o previsível. Machado (2012) descreve que na análise *a priori* deve-se:

---

18 Mesmo que macrodidáticas. Livro fonte escrito em Português de Portugal.
19 Mesmo que microdidáticas. Livro fonte escrito em Português de Portugal.
20 Mesmo que efetuadas. Livro fonte escrito em Português de Portugal.
21 Mesmo que indiretamente. Livro fonte escrito em Português de Portugal.

> • descrever cada escolha local feita (eventualmente, relacionando-as às escolhas globais) e as características da situação adidática decorrentes de cada escolha;
> • analisar qual o desafio da situação para o aluno, decorrente das possibilidades de ação, de escolha, de decisão, de controle e de validação de que ele disporá durante a experimentação;
> • prever os comportamentos possíveis e mostrar no que a análise efetuada permite controlar o sentido desses comportamentos; além disso, deve-se assegurar que, se tais comportamentos ocorrerem, resultarão do desenvolvimento do conhecimento visado pela aprendizagem (MACHADO, 2012, p. 243-244).

Antes de iniciar a terceira fase, experimentação, iremos elaborar situações-problema que envolvam jogadas de captura e defesa, para a qual o aluno terá que analisar suas jogadas e buscar estratégias exitosas. Nesse sentido, é necessário registrar diferentes situações desenvolvidas durante as partidas do jogo Mankala *awalé*. Para isso, é preciso buscar uma forma de registro que nos permita fazer as análises dos movimentos realizados. O registro adotado foi:

1. Identificamos os recipientes do território do jogador **A** por $A_1$, $A_2$, $A_3$ e $A_4$ e do jogador **B** por $B_1$, $B_2$, $B_3$ e $B_4$;
2. Cada aluno deverá anotar o movimento inicial, isto é, o número de sementes correspondente a cada recipiente antes das sementes serem retiradas para a iniciar a distribuição;
3. Cada aluno deverá anotar a situação final, isto é, o número de sementes correspondente a cada recipiente após as sementes serem distribuídas.

Como exemplo, citamos uma parte da primeira atividade apresentada aos alunos no primeiro encontro. Na atividade, o aluno teria que analisar uma situação específica de uma partida entre os jogadores **A** e **B**. No primeiro item, o aluno precisava justificar qual jogador ele gostaria de ser.

Elencamos, na análise *a priori*, algumas estratégias que os alunos poderiam mobilizar para realizar essa escolha, como: Escolher o jogador **A** pois capturou mais sementes que o jogador **B**; escolher o jogador **A** pois possui mais sementes em seu território; escolher o jogador **B** pois possui um recipiente a mais com sementes.

A terceira fase, **experimentação**, é caracterizada pela aplicação da sequência de atividades, ou seja, é a fase da realização da ED com os alunos. Segundo Artigue (1996) a experimentação supõe:

> Observações realizadas nas sessões de ensino, mas também produções dos alunos na sala de aula ou fora dela. Estes dados são frequentemente completados por dados obtidos através da utilização de metodologias externas: questionários, testes individuais ou em pequenos grupos, realizados em diversos momentos do ensino ou no final (ARTIGUE, 1996, p. 208).

Inicialmente, apresentamos o jogo Mankala *awalé*, em seguida falamos de sua origem e depois explicamos suas regras. Depois disso, aplicamos a sequência de atividades elaboradas afim de obtermos os dados para a nossa pesquisa. Utilizamos como dados para a análise, os protocolos com as produções dos alunos e gravações de áudio dos encontros.

Na última fase, da **análise *a posteriori*** e da **validação**, analisamos os dados obtidos na fase da experimentação contidos nos protocolos com as produções dos alunos realizadas durante cada encontro. Buscando uma melhor compreensão dos fatos ocorridos na experimentação, foi necessário buscar dados complementares por meio de entrevistas individuais com os alunos. Percebemos na pesquisa, que as fases da experimentação e da análise *a posteriori* não são excludentes, mas complementares conforme enfatizado por Artigue (1996).

Finalmente, no confronto dos resultados obtidos na análise *a posteriori* com as hipóteses levantadas na análise *a priori*, realizamos a validação da ED.

**CAPÍTULO 3**

# ANÁLISES PRELIMINARES

*"A ciência deve ser universal, sem dúvida. Porém, nós não devemos acreditar incondicionalmente nisto."*
*César Lattes[22] (1924-2005)*

Neste capítulo, apresentamos aspectos históricos da divisão de números naturais mostrando técnicas e processos utilizados para resolução das quatro operações fundamentais. Apresentamos, ainda, uma análise de quatro pesquisas que abordaram o jogo Mankala e o ensino da Matemática.

## 3.1. Aspectos históricos

A Matemática está presente nas atividades humanas das diversas culturas. Um olhar histórico mostra que, em todas as épocas, as atividades matemáticas sempre permearam as interações do homem com o mundo físico, social e cultural. A Matemática pode ser concebida como uma fonte de modelos para os fenômenos nas mais diversas áreas do saber. "Modelos matemáticos incluem conceitos, relações entre conceitos, procedimentos e representações simbólicas que, em um processo contínuo, passam de instrumento na resolução de problemas a objeto próprio de conhecimento" (BRASIL, 2013, p. 14).

Conhecer técnicas e processos históricos utilizados para resolução das quatro operações fundamentais pode trazer grandes contribuições para o ensino da matemática na atualidade.

Boyer e Merzbach (2012), no que diz respeito às operações matemáticas, afirmam que a operação aritmética fundamental no Egito era a adição. A nossa operação de divisão, encontrada em registros no Papiro de Ahmes (ou Rhind[23]), era efetuada por duplicações sucessivas, "com base no fato de que todo número pode ser representado por uma soma de

22 César Lattes, foi um físico brasileiro, co-descobridor do méson pi, descoberta que levou o Prêmio Nobel de Física de 1950, concedido a Cecil Frank Powell. Disponível em: <http://www.cbpf.br/Staff/Hist_Lat.html>. Acesso em: 27 de nov. de 2015.

23 Conhecido como Papiro de Rhind ou de Ahmes, como homenagem ao escriba que o copiou por volta de 1650 a. C. É um manuscrito matemático composto por 84 problemas sobre questões variadas. Juntamente com o Papiro de Moscou compõem as principais fontes de informações da matemática do Egito Antigo. (BOYER; MERZBACH, 2012)

potências de 2" (EVES, 2011, p. 72). Para realizar a divisão, invertiam o processo de duplicação, e o *divisor* era dobrado sucessivamente, em vez do *multiplicando*.

Como exemplo, citamos o problema 70, que:

> "Requer o quociente da divisão de $100$ por $7+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ ; o resultado, $12+\frac{2}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$ é obtido assim: dobrando o divisor sucessivamente, primeiro obtemos $15+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ , depois $31+\frac{1}{2}$ , e finalmente $63$ , que é oito vezes o divisor. Além disso, sabe-se que dois terços do divisor é $5+\frac{1}{4}$ . Portanto o divisor, quando multiplicado por $8+4+\frac{2}{3}$ dará $99\frac{3}{4}$ , faltando $\frac{1}{4}$ para o produto $100$ que se quer. [...] Como oito vezes o divisor dá $63$ , resulta que o divisor quando multiplicado por $\frac{2}{63}$ produzirá $\frac{1}{4}$ . Da tabela para $\frac{2}{n}$ sabe-se que $\frac{2}{63}$ é $\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$ ; portanto, o quociente procurado é $12+\frac{2}{3}+\frac{1}{42}+\frac{1}{126}$ " (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 32).

Mostraremos outro exemplo para a divisão egípcia, utilizando uma tabela com duas colunas, em que na primeira coluna colocamos duplicações a partir do número 1, e na segunda coluna duplicações a partir do divisor. Como exemplo, iremos efetuar a divisão de 252 por 12.

| | |
|---|---|
| 1 | 12 |
| 2 | 24 |
| 4 | 48 |
| 8 | 96 |
| 16 | 192 |

Tabela 1: Divisão egípcia de 252 por 12.
Fonte: elaborada pelo autor.

Na primeira coluna, realizamos duplicações a partir do 1 e, na segunda coluna a partir do divisor 12. Dobramos sucessivamente o divisor 12 até o ponto em que o próximo dobro exceda o dividendo 252. Para encontrar o resultado, procuramos na segunda coluna, os números que somados resultam em 252. Esses números são: 12, 48 e 192. Em seguida, somamos os números da primeira coluna correspondentes a 12, 48 e 192. Assim, $252\div 12=1+4+16=21$ .

De maneira análoga, resolviam divisões não-exatas. Como exemplo, iremos efetuar a divisão de 537 por 25.

| | |
|---|---|
| 1 | 25 |
| 2 | 50 |
| 4 | 100 |
| 8 | 200 |
| 16 | 400 |

Tabela 2: Divisão egípcia de 537 por 25.
Fonte: elaborada pelo autor.

Temos que:

$$537 = 400 + 137$$

$$537 = 400 + 100 + 37$$

$$537 = 400 + 100 + 25 + 12$$

Somando os números da primeira coluna correspondentes a 25, 100 e 400, temos: $537 \div 25 = 1 + 4 + 16 = 21$ . Observe que o número 12 não aparece na segunda coluna e consequentemente, não possui correspondente na primeira. Nessa situação, o número 12 é o resto da divisão de 537 por 25.

Os babilônicos tratavam as operações aritméticas fundamentais de modo "quase" semelhante ao usado hoje. "A divisão [...] era efetuada por uma fácil multiplicação do dividendo pelo inverso do divisor, usando os itens apropriados nas tabelas" (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 43).

> Assim como hoje, o quociente de 34 por 5 é achado facilmente multiplicando 34 por 2 e colocando vírgula, na antiguidade o mesmo processo era realizado achando o produto de 34 por 12 e deslocando uma casa sexagesimal[24], dando $6\frac{48}{60}$ (BOYER; MERZBACH, 2012, p. 43).

24 Sistema de numeração de base 60.

O livro *Os Elementos* de Euclides contêm bastante teoria dos números e não apenas geometria como muitos pensam. Os Livros VII, VIII e IX, que no total têm 102 proposições, tratam da teoria elementar dos números. O livro VII começa com o processo, hoje conhecido como algoritmo euclidiano, para achar o máximo divisor comum de dois ou mais números inteiros e o usa para verificar se dois inteiros são primos entre si (EVES, 2011, p. 173).

As duas proposições que deram origem a regra denominada de "algoritmo de Euclides", para encontrar o máximo divisor comum entre dois números, segundo Bicudo (2009) foi expressada por Euclides como:

> 1. Sendo expostos dois números desiguais, e sendo sempre subtraído de novo o menor do maior, caso o que restou nunca meça exatamente o antes dele mesmo, até que reste uma unidade, os números do princípio serão primos entre si.
> 2. Sendo dados dois números não primos entre si, achar a maior medida comum entre eles (BICUDO, 2009, p. 270-271).

Percebemos na demonstração que Euclides explora a ideia geométrica expressando os números como medidas de segmentos e em nenhum momento utilizou-se de cálculos em forma de algoritmos.

Para Eves (2011) o algoritmo euclidiano:

> Se encontra nos fundamentos de vários progressos da matemática moderna. Enunciado em forma de regra, é o seguinte: *Divida o maior dos dois números inteiros positivos pelo menor e então divida o divisor pelo resto. Continue esse processo de dividir o último divisor pelo último resto, até que a divisão seja exata. O divisor final é o m.d.c. procurado* (EVES, 2011, p. 181, grifo do autor).

O livro VII termina com a proposição 39 que hoje é uma regra para determinar o mínimo múltiplo comum de vários números.

Eves (2011) faz uma descrição das primeiras aritméticas:

- **Aritmética de Treviso**: A mais antiga aritmética impressa, publicada em 1478 na cidade de Treviso, localizada no caminho que liga Veneza ao norte. Trata-se de uma aritmética amplamente comercial, dedicada a explicar a escrita dos números e a efetuar cálculos com eles.
- **Aritmética comercial escrita por Piero Borghi**: Esse trabalho foi publicado em Veneza em 1484 e alcançou pelo menos 17 edições, a última de 1557. Em 1491 foi

publicada em Florença uma aritmética de autoria de Filippo Calandri. Continha o primeiro exemplo impresso do moderno processo de divisão e também os primeiros problemas ilustrados a aparecerem na Itália.

- **Aritmética de Widman:** Muito influente na Alemanha foi publicada em Leipzig no ano de 1489. Outra importante aritmética do período foi a de autoria de Jacob Köbel, um Rechenmeister de Heidelberg. Mas talvez a mais influente de todas as aritméticas comerciais alemãs tenha sido a de Adam Riese , publicada em 1522.
- **Aritmética de Cuthbert Tonstall**: Primeiro trabalho dedicado inteiramente à matemática a ser publicado na Inglaterra . Esse livro, baseado na Sūma de Pacioli, foi escrito em latim e impresso em 1552.

As aritméticas dos séculos XV e XVI traziam descrições de algoritmos para as operações fundamentais. O algoritmo mais comumente usado para a divisão antes de 1600 era o método do galeão ou método de riscar de origem hindu. Acompanhe a descrição do método, nos seguintes passos da divisão de 9413 por 37.

1. Escreva o divisor, 37, abaixo do dividendo, como se mostra ao lado. Obtenha, da maneira habitual, o primeiro algarismo do quociente, 2, e escreva-o à direita do dividendo.
2. Faça mentalmente: 2 x 3 = 6 e 9–6 = 3. Risque o 9 e o 3 e escreva 3 acima do 9. Faça mentalmente: 2 x 7 = 14, 34 – 14 = 20. Risque 7, 3 e 4 e escreva 2 acima do 3 e 0 acima do 4.
3. Escreva o divisor, 37, uma casa à direita, diagonalmente. O dividendo resultante após o Passo 2 é 2013. Obtenha o próximo algarismo do quociente, 5. Faça mentalmente: 5 x 3 = 15, 20 – 15 = 5. Risque 3, 2 e 0 e escreva 5 acima do 0. Faça mentalmente: 5 x 7 = 35, 51 – 35 = 16. Risque 7, 5 e 1 e escreva 1 acima do 5 e 6 acima do 1.
4. Escreva o divisor, 37, mais uma vez, uma casa à direita e diagonalmente. O dividendo resultante após o Passo 3 é 163. Obtenha o próximo algarismo do quociente, 4. Faça mentalmente: 4 x 3 = 12, 16 – 12 = 4. Risque 3, 1 e 6 e escreva 4 acima do 6. Faça mentalmente: 4 x 7 = 28, 43 – 28 = 15. Risque 7, 4 e 3 e escreva 1 acima do 4 e 5 acima do 3.
5. O quociente é 254 e o resto é 15.

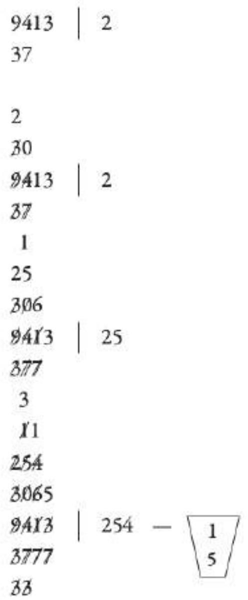


Figura 5: Divisão de 9413 por 37 por meio do método do galeão ou do método de riscar.
Fonte: Eves (2011, p. 324)

Castro (1885, p. 47) define divisão como "operação por meio da qual se deduz do dividendo um número chamado quociente, que seja do dividendo o que é o divisor da unidade". Segundo ele o problema da divisão se resume em: "dado um produto de dois fatores e um dos fatores, achar o outro fator". Assim, a divisão é o inverso da multiplicação.

Castro (1885) enfatiza também a divisão como sendo uma caso particular da subtração, em que subtrai-se o divisor do dividendo tantas vezes quantas forem precisas para que este se anule. O quociente buscado será a quantidade de vezes que se tenha praticado as subtrações. Observe a divisão de 40 por 5, por meio desse caso particular:

$$40-5=35 \quad (1)$$

$$35-5=30 \quad (2)$$

$$30-5=25 \quad (3)$$

$$25-5=20 \quad (4)$$

$$20-5=15 \quad (5)$$

$$15-5=10 \quad (6)$$

$$10-5=5 \quad (7)$$

$$5-5=0 \quad (8)$$

Neste caso, o quociente seria 8 que representa o número de subtrações efetuadas. No entanto, esse processo pode se tornar muito longo dependendo dos números envolvidos. A partir dessa problemática, Castro (1885) considerou e definiu as regras para três casos de divisão.

- **1º Caso**: divisão de dois números simples[25] ou de um número composto[26] de dois algarismos por um número simples quando o quociente é simples.

  No 1º caso, os quocientes eram obtidos na tabela pitagórica.

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |

25 Números simples possuem um algarismo: 1, 2, 3, …, 9.
26 Números compostos possuem dois ou mais algarismos: 10, 11, …, 100, 101, ...

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Tabela 3: Tabela Pitagórica ou Tabela da Multiplicação.
Fonte: elaborada pelo autor.

Acompanhe o processo, na divisão de 48 por 6. Primeiro localiza o número 48 na coluna do 6 (destaque em azul) em seguida busque o número que corresponde a linha do 48, que neste caso é o 8 (destaque em amarelo).

- **2º Caso**: Divisão de um número de dois ou mais algarismos por um número simples.

No 2º caso, escrevemos o divisor à direita do dividendo separando-os por um traço vertical e o divisor do quociente por um traço horizontal. Em seguida, considera-se tantos algarismos à esquerda do dividendo quantos forem necessários para conter o divisor, buscamos o número de vezes que se contém e escreve-o no quociente. Multiplica-o pelo divisor e subtrai esse produto dos algarismos separados à esquerda do dividendo. Abaixa-se e escreve-se à direita do resto o algarismo seguinte do dividendo e continua a divisão. Quando o resto do algarismo seguinte do dividendo não contiver o divisor, escreve-se zero no quociente, abaixa-se novamente o algarismo seguinte e continua a divisão. Castro (1885, p. 48) apresentou a divisão de 32056 por 8, como exemplo.

$$\begin{array}{r|l} 32056 & 8 \\ \cline{2-2} 0056 & 4007 \\ 0 & \end{array}$$

- **3º Caso**: Divisão de um número composto por outro número composto.

No 3º caso, escrevemos o divisor à direita do dividendo separando-os por um traço vertical e o divisor do quociente por um traço horizontal. Em seguida, separam-se à esquerda do dividendo tantos algarismos quantos forem necessários para conter o divisor, formando assim um dividendo parcial. Divide-se o primeiro ou os dois primeiros algarismos desse dividendo parcial pelo primeiro do divisor (esse primeiro algarismo do dividendo deve ser pelo menos igual ao divisor). Acha-se o quociente, multiplica-o por todo o divisor, subtrai-se esse produto do dividendo parcial. Abaixa-se e escreve-se à direita do resto o algarismo seguinte do dividendo, continua a divisão do mesmo modo até o último algarismo do dividendo, que dará o último do quociente. Quando o resto com o algarismo seguinte do dividendo não contiver o divisor, escreve-se zero no quociente, abaixa-se o algarismo seguinte e continua a divisão. Castro (1885, p. 49) apresentou a divisão de 259578 por 594, como exemplo.

| | |
|---|---|
| 259578 | 594 |
| 2197 | 437 |
| 4158 | |
| 0000 | |

## 3.2. Jogos Mankalas e o ensino da Matemática

Apresentamos, a seguir, a pesquisa de Dias (2009) intitulada “*A construção do conhecimento em crianças com dificuldades em matemática, utilizando o Jogo de Regras Mancala*”, de Lacanallo (2011) intitulada “*O Jogo no Ensino da Matemática: contribuições para o desenvolvimento do pensamento teórico*”, de Pereira (2011) intitulada “*O Jogo Africano Mancala e o Ensino de Matemática em Face da Lei nº 10.639/03*” e de Santos (2014) intitulada “*Mankala Colhe Três: jogando e explorando conhecimentos matemáticos por meio de situações didáticas*”.

Pereira (2011) analisou a possibilidade de utilizar o jogo Mankala *awalé* como metodologia de ensino e aprendizagem no campo da Matemática, associado ao ensino de história e da cultura afro-brasileira, com a finalidade de inclusão da Lei nº 10.639/03 no ensino da Matemática.

A pesquisa foi caracterizada como sendo uma pesquisa intervenção, com entrevistas semiestruturadas e ações pedagógicas em sala de aula. Os sujeitos da pesquisa foram alunos do 6º, 7º, 8º e 9º ano das escolas municipais de ensino fundamental Heloísa Abreu Júdice de Mattos e Manoel Mello Sobrinho, localizadas, respectivamente, em Vitória e em Cariacica no Espírito Santo, onde Pereira (2011) atuou como professor de Matemática.

Essa intervenção se deu por meio do jogo Mankala *awalé* com a coleta de dados mediante a observação, a interação e a consideração do pesquisador como principal instrumento de investigação. Houve também coleta de dados por intermédio de questionários com perguntas abertas e fechadas, antes e após a intervenção pedagógica, e entrevistas semiestruturadas como instrumentos de investigação.

Na primeira etapa da pesquisa Pereira (2011) coletou os dados por meio das observações em sala de aula sobre a aprendizagem matemática e sobre as relações sociais em relação ao negro e sua cultura. Em seguida, pela aplicação de um questionário com perguntas abertas e fechadas em relação à matemática e ao negro. Foi realizada ainda entrevistas semiestruturadas como instrumento de investigação. A análise dos dados se deu por intermédio da classificação, interpretação e comparação dos dados coletados antes, durante e após a intervenção pedagógica com o jogo *a*walé.

Pereira (2011) concluiu que o jogo *a*walé contribuiu para a mudança de postura do professor de matemática em relação a reaprender e aprender a ensinar matemática. Considerou o jogo significativo para o professor, pois contribuiu também para a dinâmica das aulas de matemática no quotidiano escolar e proporcionou a interação entre alunos e professor.

Ele percebeu ainda que houve um aumento na auto identificação afrodescendente e na autoestima do aluno em relação à matemática. Sendo assim, concluiu na pesquisa que o jogo *a*walé contribuiu para uma aprendizagem significativa de matemática tendo em vista a sua contribuição para a construção de conceitos matemáticos por intermédio da prática do jogo. Ele identificou na prática do jogo o uso sistemático da lógica, do raciocínio sobre as diversas possibilidades de movimento, do cálculo mental e da estimativa, elementos importantes para a aprendizagem matemática.

Os aspectos culturais presentes nos movimentos do jogo também contribuíram para a inclusão da Lei 10.639/03 nas aulas de matemática. Pereira (2011) identificou a cultura africana e afro-brasileira na forma de praticar o jogo, tendo em vista a relação dele com as sementes do baobá, nos movimentos e nas regras. Por intermédio do baobá ele contou histórias e lendas sobre a árvore bem como sua importância para a cultura africana e afro-brasileira.

Nos movimentos do jogo, Pereira (2011) identificou a presença da cultura africana e afro-brasileira na circularidade dos movimentos do jogo, na oralidade do cálculo mental, na tradição milenar do jogo na África, na ancestralidade milenar da troca tendo em vista que é um jogo de semeadura e colheita uma prática ancestral africana e na cosmovisão africana.

Nas regras ele percebeu a filosofia de matriz africana presente no compartilhar, na generosidade e no trabalho em equipe. Estes representam o caráter comunitário do bem estar social e respeito à diversidade que é comum nas sociedades africanas.

Por fim, Pereira (2011) afirmou que o jogo *a*walé pode contribuir para a formação de professores em Africanidades matemáticas tendo em vista o seu potencial pedagógico para o ensino de matemática, história e cultura afro-brasileira.

Analisamos também a pesquisa de Dias (2009), que baseada na Teoria Psicogenética de Jean Piaget analisou as etapas de aquisição e do domínio referentes às regras e às estratégias do Jogo Mankala *kalah*, em crianças que apresentam dificuldades em Matemática e em crianças que não apresentam dificuldades nessa área de conhecimento.

Foram selecionados 24 alunos do 4º ano do ensino fundamental, com idade de nove e dez anos, de uma escola pública da cidade de Amparo, interior do estado de São Paulo. Eles foram divididos em dois grupos: doze alunos com dificuldades em matemática (Grupo A) e doze alunos que não demonstravam dificuldades nessa área de conhecimento (Grupo B). A seleção desses alunos foi realizada por indicação da professora.

Foram realizadas seis sessões individuais com cada aluno duas vezes por semana, com duração de 50 minutos cada uma. As sessões eram realizadas duas vezes por semana fora do período das aulas. A pesquisadora jogou 13 partidas com cada criança, perfazendo um total de 312 partidas.

Na primeira sessão, a pesquisadora apresentou aos alunos o material (tabuleiro e peças) e algumas informações a respeito do jogo Mankala *kalah*. Em seguida, aplicou questões com o objetivo de verificar os conhecimentos prévios que os alunos apresentavam relativamente às operações aritméticas e à noção de conservação de quantidades discretas implícitas no jogo.

Na segunda sessão, as regras foram apresentadas de forma sucinta e quatro partidas foram efetuadas com a finalidade de aprendizagem do jogo.

Da terceira sessão à sexta, foram realizadas duas partidas em cada encontro, nas quais a pesquisadora trabalhou questões de três estilos e finalidades diferentes: 1. perguntas de exploração, planejamento e justificação; 2. análise das possibilidades de ação; 3. estratégias do jogo conforme roteiro de base.

O procedimento de análise de dados foi dividido em cinco etapas. Na primeira etapa foi realizada a avaliação das respostas das crianças às questões sobre operações aritméticas e noção de conservação de quantidades discretas implícitas no jogo Mankala *kalah*.

As respostas apresentadas pelos alunos foram classificadas em categorias, de acordo com os procedimentos de resolução usados por eles.

Dias (2009) classificou as respostas apresentadas pelos alunos referente à questão de divisão em cinco categorias de procedimentos de resolução, a saber: 1. cálculo mental; 2. cálculo mental com contagem nos dedos ou nas casas do tabuleiro; 3. resolução gráfica por meio de algoritmos; 4. resolução gráfica por meio de símbolos ou sinais; 5. resolução empírica, com as peças do jogo.

Dias (2009) apresentou a seguinte questão envolvendo a operação de divisão: "Eu darei a você 18 peças. Você deve colocar um número igual de peças nas suas 6 casas. Quantas peças você colocará em cada casa?

Como resultado ela verificou que no Grupo A houve um predomínio da categoria cálculo mental com contagem nos dedos (33,3%), enquanto no Grupo B, a maioria resolveu as questões por meio do cálculo mental (50%). Percebeu ainda que 8,3% do Grupo A e 8,3% do Grupo B utilizaram na resolução a categoria gráfica, por meio de símbolos e sinais. Em relação à categoria empírica com as peças do jogo, observou que 33,3% do Grupo A fez uso desse procedimento, enquanto no Grupo B, apenas 8,3%.

Na questão que envolvia a multiplicação (operação inversa à questão de divisão proposta), os procedimentos de resolução usados pelos alunos foram classificados em três categorias: 1. cálculo mental; 2. gráfica por meio de símbolos ou sinais; 3. empírica, com as peças do jogo.

A questão apresentada por Dias (2009) foi descrita da seguinte maneira: "Para organizar a disposição inicial do tabuleiro, colocam-se 3 peças em cada uma das suas 6 casas. Quantas peças terão no total das suas 6 casas do seu lado do tabuleiro?

Analisando os procedimentos de resolução, Dias (2009) verificou que 91,6% dos alunos, considerando os dois grupos, resolveram por meio do cálculo mental, ou seja, dos 24 alunos 22 fizeram uso dessa categoria de resolução. Dos doze participantes do Grupo A dez resolveram a questão de multiplicação por meio do cálculo mental (83,4%). Uma criança utilizou o procedimento de resolução gráfica por meio de símbolos e sinais e outra utilizou as peças do jogo para encontrar a resposta correta. No Grupo B, 100% dos participantes fizeram uso do cálculo mental.

Os procedimentos de resolução usados pelos alunos na questão que envolvia a operação de subtração, foram classificados em quatro categorias: 1. cálculo mental; 2. cálculo mental com contagem nos dedos; 3. gráfica por meio de algoritmos; 4. empírica, com as peças do jogo.

A questão descrita por Dias (2009) foi: “Agora que você fez uma distribuição de peças, algumas vieram para o meu lado do tabuleiro. Quantas peças ficaram em suas casas ao total?

Dias (2009) verificou que houve um predomínio do cálculo mental em ambos os grupos, mas com um maior percentual do Grupo A (91,7%) em relação ao Grupo B (58,3%). Além dessa categoria de resolução, 8,3% do Grupo A utilizou o procedimento de cálculo mental com contagem nos dedos e 33,3% resolveram de forma empírica, utilizando as peças do jogo. Já no Grupo B, os que não usaram cálculo mental (18,3%) fizeram uso da resolução gráfica por meio de algoritmos.

Na pesquisa de Dias (2009), as questões envolvendo a operação de adição foram efetuadas após o participante ter feito uma distribuição das peças conforme as regras do jogo Mankala *kalah*. Todos os participantes de ambos os grupos responderam corretamente a essas questões com facilidade, utilizando o procedimento de resolução da contagem de peças. As questões apresentadas foram:

1. Agora que você fez uma distribuição de peças, quantas peças há em cada casa do seu lado do tabuleiro?
2. Quantas peças há no seu oásis[27]? E no meu?

Analisando as relações entre igualdades e diferenças e entre maior e menor quantidade de peças, todos os participantes dos grupos A e B responderam corretamente, também com facilidade, utilizando o procedimento de contagem das peças. As questões apresentadas eram:

1. Em suas casas e nas minhas há a mesma quantidade?
2. Quem tem o maior número de peças no oásis: você ou eu?

Na questão que envolvia organização espaço-temporal, os alunos não souberam o que significavam os termos sentido horário e sentido anti-horário. Dias (2009) explicou que o termo sentido anti-horário significava a movimentação no sentido contrário ao do ponteiro do

27 Cavidade maior localizada no extremo do tabuleiro conhecida como oásis, depósito, armazém ou kalah.

relógio, com isso todos os alunos de ambos os grupos conseguiram distribuir as peças corretamente conforme a regra do jogo. A questão apresentada foi definida como: “Como você fará para distribuir essas peças, uma a uma, no sentido anti-horário, sem saltar nenhuma casa?”

As respostas referentes às questões de conservação de quantidades discretas foram classificadas em três categorias de resolução, a saber: 1. conservação do número total de peças com justificativa lógica; 2. conservação do número total de peças por meio de contagem; 3. conservação do número total de peças após ter observado a equivalência quantitativa das peças fora do tabuleiro.

A questão apresentada por Dias (2009) aos alunos foi: “Quantas peças há no total do tabuleiro? Após a movimentação das peças durante o jogo, a pesquisadora propôs: Desse jeito, há no total o mesmo número de peças no tabuleiro?”.

Dias (2009) observou que em ambos os grupos houve um predomínio da conservação do número total de peças com justificativa lógica, em que a antecipação estava presente via dedução. O Grupo B apresentou um percentual maior (91,1%) em relação ao Grupo A (66,7%). Na categoria conservação do número total de peças por meio de contagem, estão incluídos 16,7% do Grupo A e 8,3% do Grupo B; a antecipação encontrava-se atrelada à contagem. Apenas os alunos do Grupo A (16,7%) fizeram uso da categoria conservação do número total de peças após a constatação de equivalência da quantidade.

Dias (2009) concluiu que para os alunos do Grupo A houve a necessidade da correspondência termo a termo, o que não foi observado com os alunos do Grupo B. Verificou ainda que o Grupo B apresentou procedimentos mais bem elaborados de resolução das questões aritméticas e de noção de conservação de quantidades discretas implícitas no jogo, quando comparado ao Grupo A.

Na segunda etapa foi realizada a identificação e classificação dos tipos de erros cometidos pelos alunos relacionados às regras e às estratégias. Foi elaborado um sistema de categorização com base na análise de Queiroz e Dias (2005). Essa categorização continha oito possíveis erros de regras e cinco possibilidades de estratégias. Posteriormente, na terceira etapa, para a análise dos erros cometidos pelos alunos, Dias (2009) classificou-os em dois grupos: erros sistemáticos e erros procedimentais. Os erros procedimentais são aqueles que possibilitam a abertura de novas possibilidades de ação e com isso há a incorporação de informações sobre os esquemas. Já os erros sistemáticos marcam o limite entre o que um sujeito consegue fazer ou não.

Dias (2009) observou que o Grupo A cometeu mais erros de regras (total de 136) do que o Grupo B (total de 39). Ambos os grupos cometeram mais erros relacionados à não captura das peças que os alunos tinham direito. O Grupo A cometeu mais o erro de regra, 22,1% do total de erros cometidos por esse grupo, que se refere à não captura da peça que caiu em uma casa vazia do lado do tabuleiro do próprio jogador, mesmo quando não há peça alguma na casa da frente. O Grupo B teve uma maior incidência do erro de regras, 28,2% do total de erros cometidos por esse grupo, no qual a ausência de captura ocorre quando a peça cai em uma casa vazia do lado do tabuleiro do próprio jogador, após dar uma volta completa no tabuleiro durante a distribuição de peças.

O erro de aplicação de regras que obteve a menor frequência foi "incluir na contagem as pedras restantes no tabuleiro" com 2,2% do total de erros cometidos pelo Grupo A e 2,6% do total de erros cometidos pelo Grupo B.

Considerando o total de erros de regras cometidos pelo Grupo A, Dias (2009) verificou que 89 foram erros procedimentais e 49 erros sistemáticos; já o Grupo B cometeu 34 erros procedimentais e 5 erros sistemáticos.

Com relação aos erros de estratégias Dias (2009) verificou que houve uma incidência maior do Grupo A, que cometeu 256 erros de estratégias, enquanto o Grupo B cometeu 223. A maior incidência foi no erro de estratégia que se refere ao aspecto defensivo do jogo (não evitar que o adversário capture peças), com o Grupo A apresentando 125 erros e o Grupo B apresentando 95.

O Grupo B (21,1%) também apresentou um alto índice de erro de estratégia, que se refere à situação em que o jogador captura peças, mas deixa uma possibilidade do adversário capturar uma quantidade maior na jogada seguinte. Nesse erro, o Grupo A apresentou a menor incidência (9%).

Nos erros procedimentais e sistemáticos de estratégias, Dias (2009) constatou que não houve diferença estatisticamente significativa entre os grupos. Considerando o total de 256 erros de estratégias cometidos pelo Grupo A, 149 foram erros procedimentais e 93 foram erros sistemáticos. Já o Grupo B dos 223 erros de estratégia cometidos, 110 foram erros procedimentais e 99 foram erros sistemáticos..

Já na quarta etapa foi feita uma categorização das respostas apresentadas pelos alunos, referentes às perguntas de exploração, planejamento e justificação durante as sessões de intervenção. Essa categorização foi apoiada nos estudos de Queiroz (1995, 2000) e analisada de acordo com a proposta de Dias e Brenelli (2008).

No total das oito partidas, foram efetuadas 376 perguntas de exploração das regras aos integrantes do Grupo A e 88 aos participantes do Grupo B, observando-se um índice superior da quantidade de perguntas referentes às regras do jogo, efetuadas ao Grupo A. Sobre o planejamento das jogadas, foram efetuadas 474 perguntas ao Grupo A e 402 ao Grupo B. Sobre a justificação das estratégias, foram realizadas 380 perguntas ao Grupo A e 377 ao Grupo B. Dias (2009) verificou uma diferença estatisticamente significativa entre os argumentos apresentados pelos participantes dos dois grupos: o Grupo B apresentou respostas mais bem elaboradas, referentes às regras, à antecipação e às estratégias, do que o Grupo A.

E na quinta etapa Dias (2009) comparou a quantidade e os tipos de erros cometidos nos dois grupos de alunos. Ela percebeu que durante as partidas houve uma tendência de queda no percentual de erros de regras, o que não fica evidente com relação ao percentual de erros de estratégia. Dias (2009) ressalta que os erros de estratégia categorizados se referiram muitas vezes à não utilização da melhor estratégia.

Para a comparação do desempenho no decorrer das partidas, utilizou o Teste não paramétrico de Wilcoxon, que é um teste para duas amostras pareadas e determina-se o percentual de erro que uma partida difere de outra. Nesse caso, em relação aos erros de regras, Dias (2009) verificou que no grupo B houve uma melhoria entre a primeira partida e a última. Nos dois grupos, observou-se melhoria entre a segunda e oitava. Nos erros de estratégia, o grupo B se manteve constante no percentual de erros. Já no grupo A, houve uma melhoria na primeira, terceira, quarta, sexta e sétima, sempre em comparação com a última partida.

Para a comparação entre os dois grupos, em todas as partidas realizadas, utilizou-se o Teste não paramétrico de Mann-Whitney (teste para duas amostras independentes). Dias (2009) não percebeu diferença estatisticamente significante entre os dois grupos em relação ao percentual de erros de estratégia em cada partida. Apesar disso, foi possível verificar que, em geral, as crianças do Grupo B tomavam consciência dos erros cometidos mais rapidamente do que as do Grupo A.

Houve também no Grupo B uma maior incidência de erro de estratégia, indicando procedimentos mais bem elaborados quando comparados aos outros tipos de erros. Já em relação aos erros de regra, houve diferença entre os grupos nas partidas 2, 4 e 5, sempre com maiores valores de percentual de erro no grupo A.

Dias (2009) observou ainda que o Grupo B, cujos participantes não apresentavam dificuldades em matemática, utilizou procedimentos de resolução das questões aritméticas mais elaborados e que também um maior número de alunos desse grupo apresentou a noção de quantidades discretas com justificativa lógica, quando comparado ao Grupo A. Além disso, de uma maneira geral, o Grupo B apresentou um desempenho melhor durante as sessões com o jogo Mankala.

Outra pesquisa que analisamos foi a de Santos (2014) que investigou a contribuição do jogo Mankala Colhe Três para a aprendizagem de conhecimentos matemáticos por alunos de 6º ano do ensino fundamental. Utilizou como fundamentação teórica da pesquisa a Teoria das Situações Didáticas, proposta por Brousseau (1996).

Os procedimentos metodológicos da pesquisa foram baseados na vivência de momentos práticos entre alunos do 6º ano do ensino fundamental e o jogo Mankala Colhe Três.

Inicialmente, foram realizados dois Estudos Preliminares e um mapeamento parcial das possibilidades de jogadas do Mankala Colhe Três.

Santos (2014) realizou, no primeiro Estudo Preliminar, duas partidas com os três alunos jogando entre si. Como resultado, obteve uma certa resistência dos alunos em realizar um tipo específico de jogada, com isso Santos (2014) repensou o processo de instrução do jogo e buscou um aprofundamento no estudo do processo de devolução, elemento fundamental da Teoria das Situações Didáticas.

No segundo Estudo Preliminar também foram realizadas duas partidas, porém as partidas foram jogadas aluno versus pesquisador. Esta experimentação teve como característica a intervenção constante do pesquisador durante as partidas que questionava sobre as opções de jogadas do aluno. Como resultado, Santos (2014) percebeu que era preciso uma exploração maior dos alunos com o jogo para que fossem capazes de mobilizar tais conhecimentos.

A análise dos Estudos Preliminares e do mapeamento do jogo contribuíram para a elaboração do Dispositivo Experimental Central da pesquisa.

O Dispositivo Experimental Central foi realizado em uma escola da rede privada de ensino, localizada em Recife-PE. Participaram da pesquisa quatro alunos, nomeados de A, B, C e D, que foram sorteados dentre os alunos da única turma de 6º ano do ensino fundamental da escola. A experimentação foi dividida em três etapas: na primeira etapa foram realizadas partidas individuais, na segunda etapa foram realizadas partidas em duplas e na terceira etapa, entrevistas com aplicação de testes.

As Etapas 1 e 2 tiveram uma duração de 50 minutos e intervalo de uma semana entre elas. As entrevistas tiveram uma duração de 30 minutos cada, e foram realizadas duas semanas após a realização da Etapa 2. Para as entrevistas, Santos (2014), utilizou um teste, contendo configurações do tabuleiro, jogadas do Mankala Colhe Três e outras características do jogo. As duas etapas iniciais do Dispositivo Experimental Central foram filmadas e transcritas e as entrevistas apenas filmadas.

Santos (2014) percebeu, como resultado da pesquisa, que a utilização do Mankala Colhe Três propiciou momentos de ludicidade e permitiu interações entre os alunos. As situações de jogo permitiram a mobilização de importantes atitudes de convivência, como exemplo, citou o fato de alunos adversários no jogo realizarem, em algumas ocasiões, análises de jogadas juntos. Percebeu ainda, que dois dos quatro alunos do dispositivo central apresentaram dificuldades nas interações como parceiros de jogo, caracterizada pela existência de certa dominação de um aluno sobre o outro na realização das jogadas. Para Santos (2014) a maneira como o dispositivo foi realizado pode ter interferido nessa dominação, pois não foi verificado o que poderia acontecer se os alunos fossem trocados de duplas.

Santos (2014) verificou que os alunos mobilizaram e reconheciam o trabalho com situações mistas (aditivas e multiplicativas) durante as partidas do jogo. Percebeu também que os alunos eram postos a mapear as possibilidades de jogadas a partir das configurações do tabuleiro. Com o passar do tempo de jogo esse mapeamento foi ficando mais elaborando. Percebeu, ainda, que durante as suas jogadas, os alunos reconheciam múltiplos e divisores de um número e também a característica de divisibilidade dos números primos.

Santos (2014) concluiu que os alunos apresentaram uma evolução significativa de suas estratégias durante o Dispositivo Experimental Central, mesmo que o tempo destinado à exploração e apropriação do jogo sendo limitado.

Santos (2014) sugere a continuidade, em outras pesquisas, com o trabalho do Mankala Colhe Três no viés da Etnomatemática, explorando o aspecto cultural do jogo e associando à sua provável origem africana. Sugere também que seja preparado um dispositivo experimental que proporcione a participação dos alunos de uma sala de aula, o que poderia permitir momentos de institucionalização. Para finalizar, ele sugere o trabalho com algumas variações do Mankala Colhe Três de modo a permitir a mobilização de outros conhecimentos matemáticos.

Uma outra pesquisa que analisamos foi a de Lacanallo (2011) que investigou como os jogos de regras podem constituir-se em um recurso metodológico na organização do ensino da matemática e na formação do pensamento teórico dos escolares.

Foram selecionados seis alunos do ensino fundamental, três cursavam a 5ª série e os outros três a 6ª série, de escolas públicas de Maringá-PR. Os alunos participantes apresentavam notas baixas em matemática e este foi o critério principal para composição do grupo que faria parte da pesquisa. Esses alunos, por apresentarem dificuldades escolares em diferentes áreas de conhecimento, foram encaminhados pela escola ao Programa Interdisciplinar de Pesquisa e Apoio à Excepcionalidade – PROPAE.

Foi trabalhado com esses alunos o jogo *kalah* que foi escolhido para entender, a partir dos pressupostos da teoria histórico-cultural, o papel da escola, a função do jogo e a sua relação com a Matemática, a aprendizagem e desenvolvimento.

A coleta de dados foi realizada em 15 encontros, no período de junho a julho de 2009 a fim de que todos os sujeitos pudessem completar a mesma carga horária de participação.

Lacanallo (2011) aplicou um teste piloto com o jogo *kalah* com outro grupo de alunos. Foi identificado, por meio do teste piloto, possíveis problemas e a necessidade de reorganizações teórica e prática em torno do trabalho que seria proposto.

Ela utilizou entrevistas semiestruturadas com os alunos para avaliar a sua relação com a Matemática, com seus conceitos e com os jogos. As entrevistas foram feitas individualmente a fim de evitar que as ideias e argumentos de um deles influenciassem os demais.

Para a coleta de dados, Lacanallo (2011), fez uso da observação participante durante as aulas com os jogos, por entender que ao fazer parte das situações de jogos as intervenções seriam melhor conduzidas. As aulas foram organizadas em grupos e as situações de jogos feitas em duplas ou em trios. As aulas foram gravadas e algumas fotografadas com o objetivo de registrar o movimento de aprendizagem dos alunos bem como as suas estratégias nas situações de jogo.

Lacanallo (2011), num primeiro momento da coleta de dados, trabalhou com o jogo da Trilha a fim de conhecer a maneira como os alunos jogavam, lidavam com as regras, com a proposta de jogar como forma de aprender matemática. A pesquisadora não realizou qualquer intervenção e denominou a etapa de “Conhecendo os alunos e seus modos de jogar”.

Após conhecer a maneira de jogar dos alunos, Lacanallo (2011) estruturou um trabalho com o jogo *kalah*, de forma orientada, aplicando os indicadores que podem fazer com que o jogo seja uma atividade.

A análise dos dados foi feita dividindo os encontros em três momentos:

*1. preparação para jogar:* identificação dos elementos que devem estar presentes na organização física e psíquica do sujeito antes de iniciar a ação de jogar.

Nesse momento, Lacanallo (2011) elencou algumas ações e operações sob um enfoque orientado, a saber: organização para jogar (física e psíquica), envolvimento com o jogo, identificação e relação com os conceitos matemáticos, elaboração e seleção de critérios para jogar e definição de objetivos e avaliação.

Essas ações e operações que foram identificadas nas situações vivenciadas nos encontros evidenciaram que a etapa de preparação para jogar não é algo superficial, e como, a partir dela, o aluno inicia o ato de jogar, pensando em hipóteses, solucionando problemas e estruturando cálculos e raciocínios, mesmo sem conhecer as regras do jogo, entendendo-o como uma atividade de fato. No decorrer dos encontros, os alunos foram ampliando e enriquecendo as relações estabelecidas. Esse movimento interno e externo demonstrado pelos alunos, tanto na esfera física quanto psíquica, indica evolução na maneira de lidar com o jogo e na forma como se preparavam para iniciá-lo.

*2. O ato de jogar e suas estratégias:* operações mentais feitas pelo sujeito no decorrer do jogo.

Nesse momento, Lacanallo (2011) percebeu importantes ações e operações no trabalho com o jogo por meio de um enfoque orientado, a saber: compreensão das regras, elaboração e modificação de estratégias, envolvimento com a atividade, tomada de consciência e registro das estratégias, identificação de conceitos matemáticos e antecipação de jogadas.

*3. As relações desenvolvimentos na ação de jogar:* ampliação das relações conceituais do sujeito com o jogo e os contextos envolvidos.

As ações e operações envolvidas nesse terceiro momento, foram: verificação da eficácia do jogo, aprendizagem de conceitos matemáticos, possibilidade de integração com conceitos de outras áreas do conhecimento, ampliação das relações estabelecidas com o jogo e reconhecimento de contribuições e modificações.

Lacanallo (2011) percebeu que esses momentos se completam, e foram essenciais, não sendo esse um processo linear, mas que se caracteriza por idas e vindas de ideias e ações. Percebeu ainda, ao analisar os dados coletados, que jogar para os alunos tinha relação com o motivo, ganhar atrelava-se ao pensar, ou seja, o desejo de ganhar estava estruturado por ações mentais que indicam que os sujeitos estavam vendo o jogo como uma atividade.

Os alunos propuseram outras sugestões em relação às regras, à forma de jogar, bem como à própria estruturação dos trabalhos. Sugeriram, também, a criação de um campeonato para definir quem seria o melhor jogador. Pensaram em premiações, formas de disputa, registro de pontos e até em festa para a entrega dos prêmios e encerramento dos trabalhos. Os alunos escolheram o *kalah* numérico e decidiram que o vencedor não seria aquele que tivesse o maior número de vitória, mas sim o maior número de pontos acumulados ao longo de todas as partidas. Para a premiação escolheram para os três primeiros lugares um tabuleiro de *kalah* verdadeiro e para o quarto e quinto lugar um tabuleiro do jogo de Trilha. Decidiram que a festa de premiação seria africana, já que o jogo tinha origem africana, com comidas e objetos típicos da África.

Para finalizar, Lacanallo (2011) percebeu que, além dos conceitos matemáticos, os alunos da pesquisa ampliaram seus conhecimentos em outras áreas de conhecimentos, como: história, geografia e língua portuguesa. O histórico do *kalah* despertaram nos alunos o interesse em conhecer a história da África, a sua localização, a sua cultura, dentre outras curiosidades.

As pesquisas apresentadas acima analisam estratégias e dificuldades que os alunos do 5º e do 6º ano do ensino fundamental apresentam quando resolvem situações- problema envolvendo conceitos matemáticos, como: cálculo mental, mapeamento de jogadas, estimativas, divisão de naturais, dentre outros. Estas pesquisas, juntamente como nosso referencial metodológico, nos orientarão na elaboração, aplicação e análise da nossa sequência de atividades.

**CAPÍTULO 4**

# A CONSTRUÇÃO DA BASE EXPERIMENTAL, ANÁLISES *A PRIORI* E *A POSTERIORI*

*“A resposta certa, não importa nada: o essencial é que as perguntas estejam certas.”*

*Mario Quintana*[28] *(1906-1994)*

Neste capítulo, apresentamos os sujeitos da pesquisa e os encontros da pré-experimentação que tiveram como objetivo apresentar aos alunos as regras adaptadas do jogo Mankala *awalé* e identificar elementos que poderiam aparecer durante o desenvolvimento da pesquisa.

Apresentamos também as atividades que compõem os nossos encontros, com análise *a priori* e possíveis estratégias que os alunos podem mobilizar. Em seguida, descrevemos a experimentação, a análise *a posteriori* e algumas considerações dos encontros.

## 4.1. Sujeitos da Pesquisa

A presente pesquisa foi realizada com alunos do 5º e 6º ano do ensino fundamental de uma escola estadual localizada na cidade de Campo Grande – MS. A escola funciona em tempo integral, oferece do 1º ao 6º ano do ensino fundamental no período matutino e no período vespertino são desenvolvidos projetos e aulas de reforço escolar. A escolha por esses sujeitos foi devido ao nosso objeto matemático ser trabalhado com mais ênfase nesses níveis de escolaridade. Nossos encontros aconteciam duas vezes por semana, na segunda-feira das 12h às 13h45min e também na sexta-feira no mesmo horário.

Realizamos o primeiro encontro[29] com uma turma do 5º ano e nesse dia 16 alunos estavam presentes. Apresentamos o projeto e, em seguida os alunos foram separados em duplas para iniciarem as partidas. Durante o encontro houve alunos dispersos e acabaram atrapalhando o andamento da experimentação. Por isso, conversamos com os alunos que estavam motivados com o jogo e selecionamos 8 alunos para continuarmos a investigação.

---

28 Mário Quintana foi um poeta, tradutor e jornalista brasileiro. Disponível em: <http://www.releituras.com/mquintana_bio.asp>. Acesso em: 27 de nov. de 2015.

29 Salientamos que os encontros mencionados nesse subcapítulo referem-se à pré-experimentação.

No segundo encontro, aplicamos a pré-experimentação na turma do 6º ano, que tinha 19 alunos presentes. Nesse dia uma aluna se recusou a participar. Já prevíamos dificuldades e também já havíamos decidido limitar em um total de 8 alunos. Analisamos detalhadamente os alunos que estavam motivados e fizemos a escolha.

A pesquisa, então, iria acontecer com 16 alunos, sendo 8 do 5º ano e 8 do 6º. No entanto, 4 alunos do 5º ano e 4 do 6º não quiseram mais participar. Nesse momento, achamos adequado continuar a pesquisa com os alunos que realmente estavam interessados.

Ao final do terceiro encontro entregamos para cada aluno um tabuleiro adaptado do jogo Mankala *awalé* e uma ficha contendo as regras com suas adaptações, para que os alunos pudessem jogar em casa.

Nos encontros posteriores alguns alunos relataram que estavam jogando em casa com seus familiares. Nesse momento, percebemos que o jogo favoreceu tanto o aspecto lúdico quanto o educativo, ao propiciar diversão e prazer.

Durante esse período fomos convidados, pela coordenadora, para apresentar o projeto para os demais professores. A escola realizou uma reunião pedagógica com os professores do 1º ao 6º ano do ensino fundamental e com os coordenadores pedagógicos. Nesse momento, a equipe participante da reunião aprendeu a utilizar o jogo africano Mankala *awalé*. De acordo com os professores, além do valor histórico, o Mankala oferece forte potencial de aprendizado, uma vez que é um jogo que exige concentração e muita agilidade no pensamento para se fazer boas jogadas. Os professores relataram que, posteriormente, o jogo Mankala *awalé* seria utilizado em sala de aula, com os estudantes.

Após alguns encontros, dois alunos que estavam na pesquisa foram transferidos para outra escola e finalmente tivemos a definição do número de participantes. A pesquisa, então, ficou com 3 alunos do 5º ano e 3 do 6º ano. Chinara[30], Zulu[31] e Oluchi[32] foram os nomes

30 Nome feminino que significa “Deus pode receber (ibo da Nigéria)”. Disponível em:<http://arquivo.geledes.org.br/areas-de-atuacao/educacao/lei-10-639-03-e-outras/22445-significados-dos-nomes-proprios-africanos>. Acesso em: 25 de jan. 2016.

31 Nome masculino que significa “Céu, um grupo étnico na África do Sul”. Disponível em:<http://arquivo.geledes.org.br/areas-de-atuacao/educacao/lei-10-639-03-e-outras/22445-significados-dos-nomes-proprios-africanos>. Acesso em: 25 de jan. 2016.

32 Nome feminino que significa “A arte, obra de Deus”. Disponível em:<http://arquivo.geledes.org.br/areas-de-atuacao/educacao/lei-10-639-03-e-outras/22445-significados-dos-nomes-proprios-africanos>. Acesso em: 25 de jan. 2016.

fictícios atribuídos aos alunos do 5º ano e Kojo[33], Makida[34] e Silko[35] os nomes dos alunos do 6º ano.

Nos encontros da fase de pré-experimentação focamos na apresentação das regras do jogo Mankala *awalé*. Percebemos, por meio das observações, que surgiam comumente algumas situações equivocadas. Quando o aluno ainda não sabe como acertar, faz tentativas, à sua maneira, construindo uma lógica própria para encontrar a solução (BRASIL, 1997, p. 41).

Segundo Lorenzato (2010):

> O erro pode ter distintas causas: falta de atenção, pressa, chute, falha de raciocínio, falta de estudo, mau uso ou má interpretação da linguagem oral ou escrita da matemática, deficiência de conhecimento da língua materna ou de conceitos matemáticos. Detectar a(s) causa(s) de cada erro, na maioria das vezes, não é fácil (LORENZATO, 2010, p. 50).

Na aprendizagem escolar o erro é inevitável e, muitas vezes, pode ser interpretado como um caminho para buscar o acerto. Ao procurar identificar, mediante a observação e o diálogo, como o aluno está pensando, o professor obtém as pistas do que ele não está compreendendo e pode planejar a intervenção adequada para auxiliar o aluno a refazer o caminho (BRASIL, 1998, p. 55).

Para Macedo, Passos e Petty (2000):

> Quando se trata de analisar erros, é importante ter uma questão sempre em mente, para não confundir os tipos de erros que aparecem: são eles resultados de problemas com a compreensão das regras ou decorrem de limitações correspondentes ao nível de desenvolvimento do próprio jogador? Para checar essa questão, uma possibilidade é observar as crianças jogando ou trabalhar com registros de partidas (MACEDO; PASSOS; PETTY, 2000, p. 78).

Para Dias (2009, p. 13) são os erros que, ao se tornarem observáveis, levam o jogador a buscar novas hipóteses de trabalho, abrindo novas possibilidades e fechando outras, determinadas como impossíveis. Ela, em sua pesquisa, classificou os erros em dois tipos, a

33 Nome masculino que significa “Nascido Domingo (Ashanti da Gana)”. Disponível em:<http://arquivo.geledes.org.br/areas-de-atuacao/educacao/lei-10-639-03-e-outras/22445-significados-dos-nomes-proprios-africanos>. Acesso em: 25 de jan. 2016.

34 Nome feminino que significa “A Bonita (Etiópia)”. Disponível em:<http://arquivo.geledes.org.br/areas-de-atuacao/educacao/lei-10-639-03-e-outras/22445-significados-dos-nomes-proprios-africanos>. Acesso em: 25 de jan. 2016.

35 Nome masculino que significa “Monarca nos Núbios”. Disponível em:<http://arquivo.geledes.org.br/areas-de-atuacao/educacao/lei-10-639-03-e-outras/22445-significados-dos-nomes-proprios-africanos>. Acesso em: 25 de jan. 2016.

saber: erros de regras (ER) e erros de estratégias (EE). Na nossa pesquisa, fizemos uma adaptação na classificação realizada por ela. Assim, com base no sistema de categorização das possibilidades de erros de regras e estratégias elaborado por Dias (2009), elencamos os seguintes erros:

- ***Erros de regras (ER):***
  - ER1: Escolher um dos recipientes do território do adversário para iniciar a distribuição das sementes;
  - ER2: Distribuir as sementes no sentido horário (esquerda);
  - ER3: Não distribuir as sementes em partes iguais;
  - ER4: Pular recipientes na distribuição das sementes;
  - ER5: Realizar uma jogada de forma que a última semente distribuída caia em um recipiente do adversário que tenha 2 ou 3 sementes (contando com a semente que acabamos de depositar), porém não efetivar a captura das sementes;
  - ER6: Não alimentar o território do adversário se em algum momento da partida o adversário não tiver mais nenhuma semente em seu território;
  - ER7: Jogar em um momento diferente do especificado pela regra;
  - ER8: Capturar sementes em uma situação diferente da especificada pela regra.
  - ER9: Capturar sementes e não anotá-las no protocolo de resolução.
- ***Erros de estratégias (EE):***
  - EE1: Não jogar do recipiente que permite a captura de sementes;
  - EE2: Não evitar que o adversário ganhe sementes (não se defender) ou não defender a maior quantidade de sementes possível;
  - EE3: Capturar sementes, mas deixar possibilidade para o adversário capturar uma quantidade maior na jogada seguinte.

Em seguida, apresentamos a nossa sequência de atividades que é estruturada com uma ou duas situações-problema em cada encontro. As situações foram elaboradas pautados nos resultados encontrados na análise preliminar e durante os encontros da fase pré-experimental.

## 4.2. Primeiro Encontro

O primeiro encontro foi composto por duas atividades que envolviam momentos de uma partida entre os jogadores **A** e **B**. Essas atividades tinham como objetivo explorar movimentos de ataque e de defesa havendo ou não capturas.

Para Macedo, Passos e Petty (2000):

> Atacar pode ser entendido como uma jogada cujo resultado é apropriar-se de sementes do campo adversário e também como a preparação de uma jogada que o outro não poderá desfazer. Defender, por outro lado, significa evitar que certas sementes do seu campo sejam "comidas" e também atrapalhar uma armação do adversário, impedindo-o de fazer uma boa jogada (MACEDO; PASSOS; PETTY, 2000, p. 77).

Ao realizarem esses movimentos de ataque e defesa esperamos que os alunos explorem conhecimentos matemáticos, como: contagens, cálculo mental, simulações, elaboração de estratégias e conjecturas, envolvendo o conteúdo de divisão de um número natural.

### 4.2.1. Experimentação

Esse encontro aconteceu no dia 04 de maio de 2015, das 12h às 13h45min, e contou com a presença de 5 alunos, a saber: Chinara, Zulu, Oluchi, Kojo e Makida. Para este encontro foi apresentado duas atividades que envolviam momentos de uma partida entre os jogadores **A** e **B**. Inicialmente, apresentamos a primeira atividade e logo após o término entregamos a segunda. Ambas foram realizadas individualmente. Para a realização das duas atividades disponibilizamos os tabuleiros aos alunos para eles poderem acompanhar visualmente os movimentos das jogadas em questão.

### 4.2.2. Análise *a priori* da primeira atividade

A primeira atividade apresentada aos alunos foi a seguinte:

*Analise a situação abaixo, de um momento de uma partida entre os jogadores **A** e **B**, e responda às questões a seguir:*

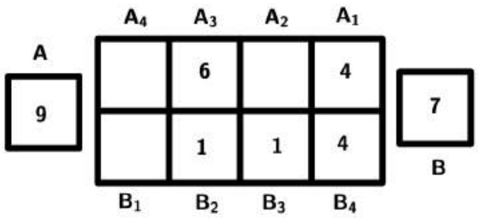



Figura 6: Momento de uma partida entre os jogadores **A** e **B**.
Fonte: elaborada pelo autor.

*a) Qual jogador você gostaria de ser? Justifique.*

*b) Suponha que a distribuição das sementes fosse feita pelo jogador* ***A****. Qual seria o melhor recipiente para começar a jogada? Justifique.*

*c) E se fosse feita pelo jogador* ***B****. Qual seria o melhor recipiente para começar a jogada? Justifique.*

Apresentamos, a seguir, algumas estratégias que os alunos podem utilizar para responder o **item a)** da primeira atividade proposta no primeiro encontro. “Determinar uma estratégia significa explorar ao máximo as possibilidades a cada jogada, elegendo a melhor” (MACEDO; PASSOS; PETTY, 2000, p. 76).

- $E_1$ [36]: Escolher o jogador **A**, pois capturou mais sementes que o jogador **B**.
- $E_2$ : Escolher o jogador **A**, pois possui mais sementes em seu território.
- $E_3$ : Escolher o jogador **A**, pois possui 7 possibilidades para iniciar a distribuição, enquanto o jogador **B** possui apenas 5.
- $E_4$ : Escolher o jogador **B**, pois possui um recipiente a mais com sementes.

Para responder o **item b)** da primeira atividade proposta no primeiro encontro, apresentamos algumas estratégias que os alunos podem mobilizar.

- $E_5$ : Escolher o recipiente $A_3$ e distribuir de dois em dois.

Como o recipiente $A_3$ possui 6 sementes, com a distribuição de dois em dois o jogador **A** irá capturar 3 sementes no recipiente $B_2$ , porém o jogador **A** deixaria possibilidade para o jogador **B** capturar 2 sementes no próximo movimento. Nessa jogada, o aluno estaria realizando uma captura múltipla. Ele também poderia capturar as 2 sementes do

36 A primeira estratégia será indicada por $E_1$ , a segunda estratégia por $E_2$ , a terceira estratégia por $E_3$ e assim sucessivamente.

recipiente $B_1$, já que o recipiente $B_1$ precede o recipiente $B_2$ e continha a quantidade de sementes que configura uma captura. No entanto, as capturas múltiplas ainda não tinham sido apresentadas aos alunos.

- $E_6$: Escolher o recipiente $A_1$ e realizar a distribuição de dois em dois ou simplesmente colocar as 4 sementes no recipiente $A_2$.

O recipiente $A_1$ contém 4 sementes e com a distribuição de dois em dois ou simplesmente movendo as 4 sementes para o recipiente seguinte, o jogador **A** não capturaria sementes mas evitaria que o jogador **B**, na próxima jogada, capturasse.

- $E_7$: Escolher o recipiente $A_3$ e realizar a distribuição de um em um.

Como o recipiente $A_3$ contém 6 sementes, com a distribuição de um em um o jogador **A** não captura sementes mas evita que o jogador **B**, na próxima jogada, capture.

A seguir, apresentamos algumas estratégias que os alunos podem utilizar para responder o **item c)** da primeira atividade proposta no primeiro encontro.

- $E_8$: Escolher o recipiente $B_4$ e realizar a distribuição de dois em dois.

O recipiente $B_4$ contém 4 sementes e com a distribuição de dois em dois o jogador **B** captura 2 sementes no recipiente $A_2$. No entanto, ele deixa possibilidade para o jogador **A** capturar 3 sementes em sua próxima jogada.

- $E_9$: Escolher o recipiente $B_4$ e realizar a distribuição de um em um.

Como o recipiente $B_4$ contém 4 sementes, com a distribuição de um em um o jogador **B** não captura sementes, porém evitaria uma captura do jogador **A** na próxima jogada.

As estratégias $E_1$, $E_2$, $E_3$ e $E_4$ por estarem relacionadas com a opção pessoal de cada jogador não são consideradas estratégias de defesa e nem de ataque. As estratégias $E_5$ e $E_8$ são de ataque, no entanto deixam possibilidades para capturas de sementes no próximo movimento. Ao utilizar a estratégia $E_8$ os jogadores cometem o erro de estratégia EE3. Já as estratégias $E_6$, $E_7$ e $E_9$ são de defesa, pois não permitem que o adversário capture sementes na próxima jogada.

4.2.3. Análise *a posteriori* da primeira atividade

Previmos na análise *a priori* da primeira atividade situações relacionadas às quantidades de sementes nos territórios, nos recipientes, nos depósitos dos jogadores **A** e **B** e também estratégias de ataque e defesa havendo ou não capturas.

No entanto, ao iniciarmos a análise *a posteriori* nos deparamos com uma situação em que a aluna Chinara relaciona sua escolha com o fator sorte, mesmo tendo sido enfatizado que nos jogos Mankalas não há sorte envolvida. Por isso, não havíamos planejado esta justificativa na análise *a priori* do encontro.

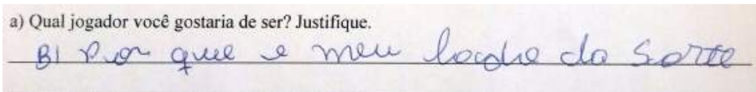



Figura 7: Protocolo de resolução, do item a), da primeira atividade do primeiro encontro da aluna Chinara.
Fonte: dados da pesquisa.

Na justificativa da aluna Makida, percebemos que sua escolha pode estar relacionada com o fato do jogador **A** possuir 7 possibilidades para iniciar a distribuição, enquanto que o jogador **B** possui apenas 5 e, nesse caso existe maior possibilidade de distribuição, conforme previsto na estratégia $E_3$ .

Ao justificar a escolha pelo jogador **A** percebemos que a aluna Makida fez uma leitura das sementes do tabuleiro, realizou o cálculo de possibilidades de movimentação de cada jogador para então montar uma estratégia de jogo. Nesse momento, Makida está vivenciando uma *situação de ação*, pois ela se encontra empenhada em buscar uma solução para a atividade proposta, realizando ações imediatas (FREITAS, 2012, p. 95).

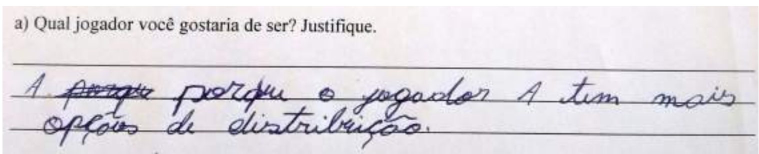
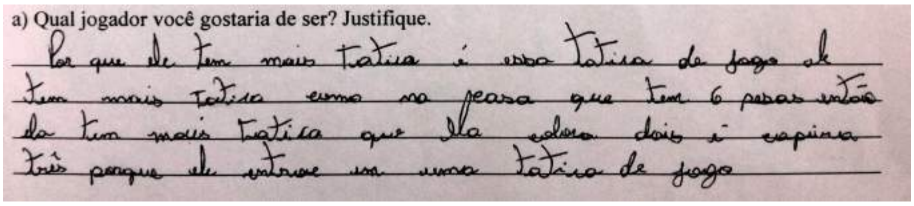



Figura 8: Protocolo de resolução, do item a), da primeira atividade do primeiro encontro da aluna Makida.
Fonte: dados da pesquisa.

O aluno Kojo escolheu o jogador **A** pois segundo ele existe mais possibilidades para iniciar a distribuição. Fato esse descrito por ele como táticas de jogo.

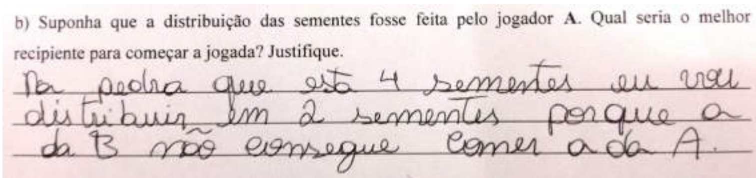

a) Qual jogador você gostaria de ser? Justifique.

Por que ele tem mais tatica e essa tatica de jogo ele tem mais tatica como na peasa que tem 6 pesas então ela tem mais tatica que ela coloca dois e capina três porque ele entrou em uma tatica de jogo

Figura 9: Protocolo de resolução, do item a), da primeira atividade do primeiro encontro do aluno Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

Zulu e Oluchi também justificaram a escolha pelo jogador **A** devido a existência de mais oportunidades para jogar.

No **item b)** da primeira atividade, percebemos que a aluna Oluchi utilizou uma estratégia de defesa (estratégia $E_6$ ) ao escolher o recipiente $A_1$ , que contém 4 sementes, e realizar a distribuição de dois em dois evitando que o jogador **B**, na próxima jogada, capturasse sementes.


b) Suponha que a distribuição das sementes fosse feita pelo jogador **A**. Qual seria o melhor recipiente para começar a jogada? Justifique.

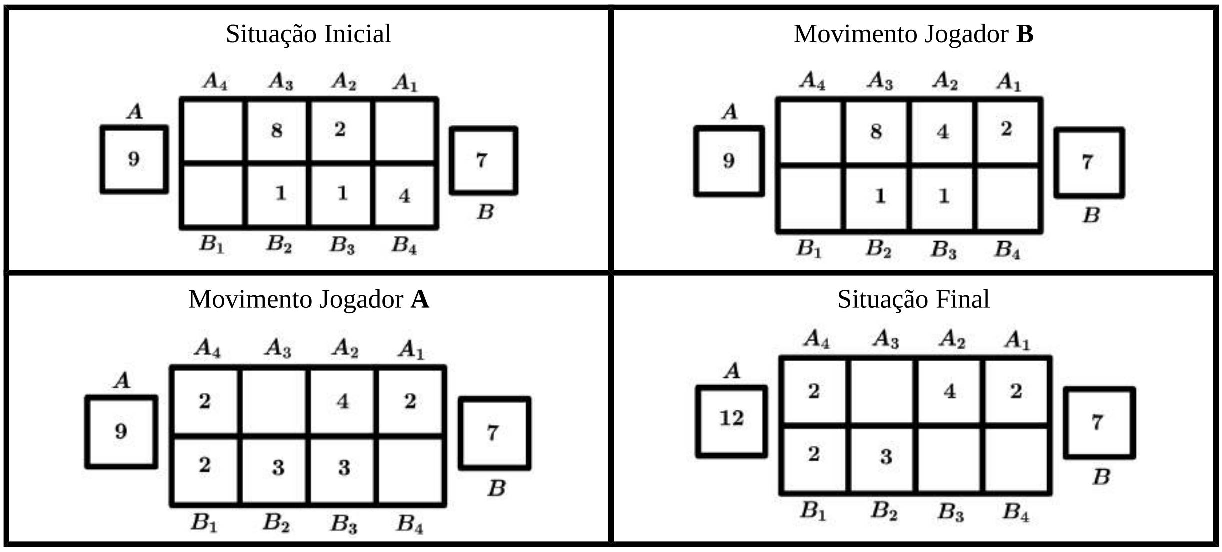
Na pedra que está 4 sementes eu vou distribuir em 2 sementes porque a da B não consegue comer a da A.

Figura 10: Protocolo de resolução, do item b), da primeira atividade do primeiro encontro da aluna Oluchi.
Fonte: dados da pesquisa.

Oluchi faz afirmações relativas à sua interação com a atividade mas sem a intenção de validação, vivenciando assim uma situação *adidática* de *formulação* (FREITAS, 2012, p. 97).

Dias (2009), em sua pesquisa, identificou e classificou tipos de erros cometidos pelos alunos relacionados às regras e às estratégias. A não realização dessa jogada executada por Oluchi (não evitar que o adversário capture sementes) foi o erro de estratégia que obteve a maior incidência na pesquisa dela.

Após essa estratégia de defesa (estratégia $E_6$ ) realizada pela aluna Oluchi a movimentação passa para o jogador **B** e dependendo da distribuição realizada por ele, o jogador **A** poderá capturar até 3 sementes na próxima jogada, totalizando 12 sementes em seu depósito e aumentando a diferença das sementes capturadas para 5.




Quadro 5: Situação envolvendo a captura de 3 sementes realizada pelo jogador **A**
Fonte: elaborado pelo autor.

A aluna Makida, escolheu uma estratégia de ataque (estratégia $E_5$ ), iniciando a distribuição pelo recipiente $A_3$ , que contém 6 sementes, realizou a distribuição de dois em dois e capturou 3 sementes no recipiente $B_2$ , totalizando 12 sementes eu seu depósito.

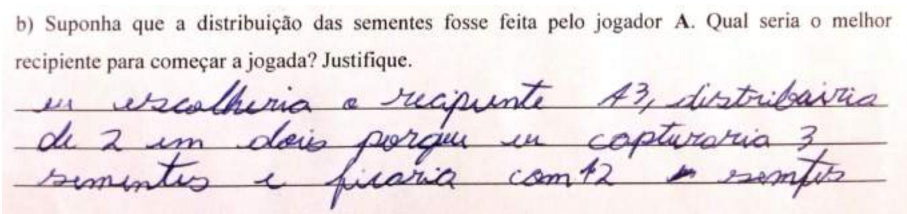
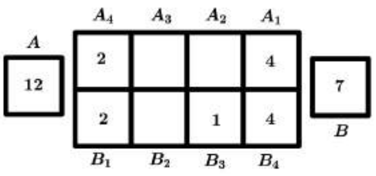
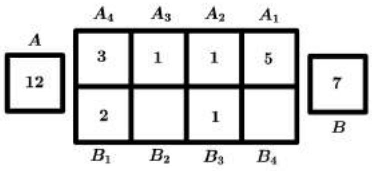
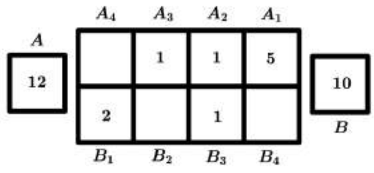

b) Suponha que a distribuição das sementes fosse feita pelo jogador **A**. Qual seria o melhor recipiente para começar a jogada? Justifique.
eu escolheria o recipiente A3, distribuiria de 2 em dois porque eu capturaria 3 sementes e ficaria com 12 sementes

Figura 11: Protocolo de resolução, do item b), da primeira atividade do primeiro encontro da aluna Makida.
Fonte: dados da pesquisa.

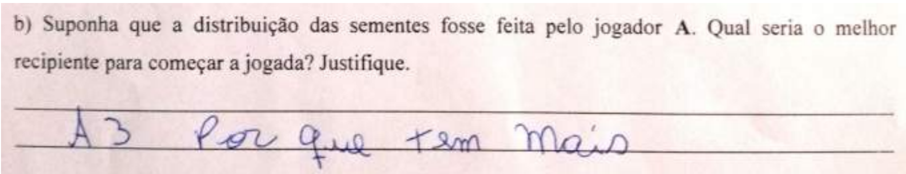
Essa escolha de Makida apesar de deixar possibilidades para o adversário capturar sementes na próxima jogada não foi considerada um erro de estratégia, pois se o jogador **B** escolher o recipiente $B_4$ , que contém 4 sementes, e realizar a distribuição de um em um ele capturará 3 sementes no recipiente $A_4$ , nesse caso, a mesma quantidade de sementes capturadas pelo jogador **A**.

| Situação Inicial | Movimento Jogador B | Situação Final |
|---|---|---|
|  |  |  |

Quadro 6: Captura de 3 sementes realizada pelo jogador **B**.
Fonte: elaborado pelo autor.

No entanto, essa estratégia mobilizada por Makida não trouxe prejuízo, pois antes da distribuição realizada por ela a diferença entre as sementes capturadas era de 2, e após a distribuição a diferença permaneceu em 2.

A aluna Chinara relacionou sua estratégia com a maior quantidade de sementes no recipiente, conforme descrito no protocolo de construção abaixo.


b) Suponha que a distribuição das sementes fosse feita pelo jogador **A**. Qual seria o melhor recipiente para começar a jogada? Justifique.

A3 Por que tem Mais

Figura 12: Protocolo de resolução, do item b), da primeira atividade do primeiro encontro da aluna Chinara.
Fonte: dados da pesquisa.

Inicialmente, a resposta de Chinara, nos pareceu vaga. No entanto, no decorrer dos encontros percebemos que em vários momentos os alunos acumulavam sementes em determinados recipientes para depois realizar uma grande distribuição, sempre dando preferências por quantidades pares de sementes. Nas conversas, percebemos que os alunos tinham facilidade em dividir as sementes em partes iguais, quando a quantidade de sementes no recipiente era par.

Oluchi, no **item c)** da primeira atividade, tentou utilizar, novamente, uma estratégia de defesa (estratégia $E_6$ ) ao escolher o recipiente $B_2$ , que contém 1 semente, e movimentá-la para o recipiente $B_2$ evitando que o jogador **A**, na próxima jogada, capturasse sementes.

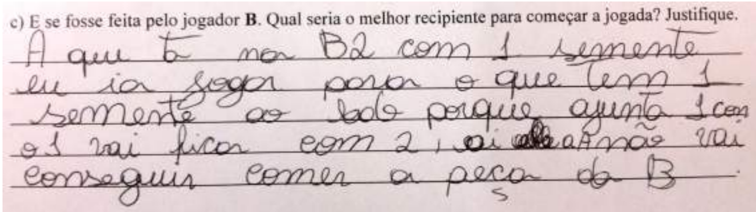
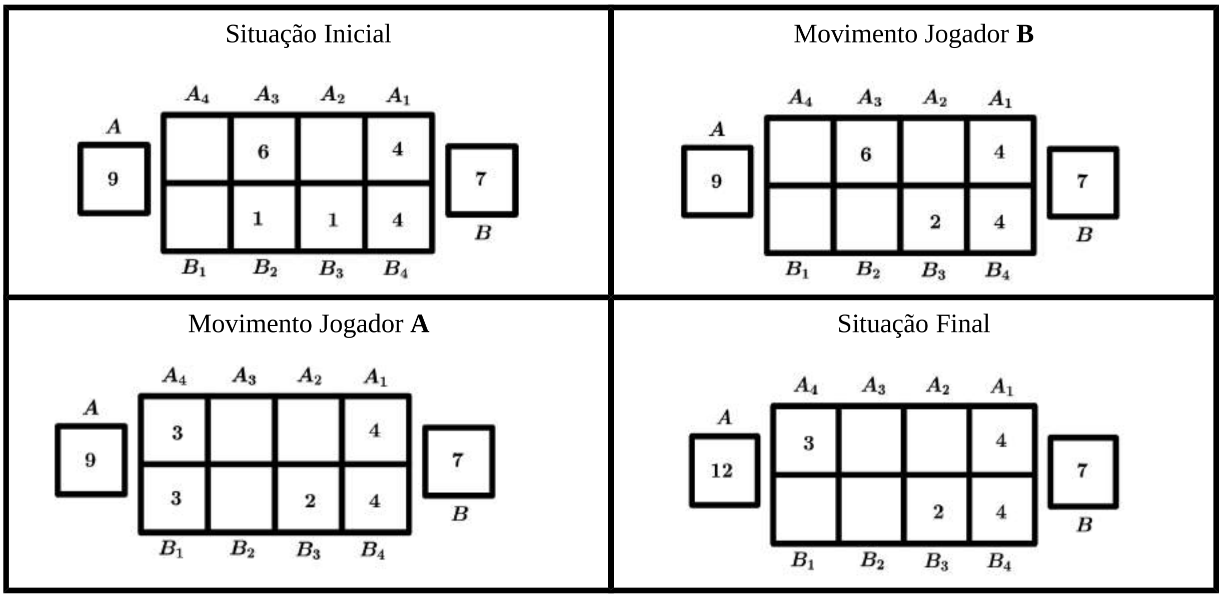

c) E se fosse feita pelo jogador **B**. Qual seria o melhor recipiente para começar a jogada? Justifique.
A que tá na B2 com 1 semente
eu ia jogar para o que tem 1
semente ao lado porque ajunta 1 com
o 1 vai ficar com 2, aí o A não vai
conseguir comer a peças do B.

Figura 13: Protocolo de resolução, do item c), da primeira atividade do primeiro encontro da aluna Oluchi.
Fonte: dados da pesquisa.

Para planejar, é necessário analisar bem o tabuleiro, observando a localização de todas as sementes. Só assim é possível definir qual a melhor jogada naquele momento e evitar jogadas impulsivas e precipitadas, que podem levar a situações de "prejuízo" (MACEDO; PASSOS; PETTY, 2000, p. 75).

Percebemos que Oluchi ao não considerar a possibilidade do jogador **A** distribuir as sementes do recipiente $A_3$ de três em três acabou cometendo o erro de estratégia EE2, pois na próxima jogada, o jogador **A** poderia escolher o recipiente $A_3$, que contém 6 sementes, realizar a distribuição de três em três[37] e capturar 3 sementes no recipiente $B_1$.



Quadro 7: Captura de 3 sementes realizada pelo jogador **A**.
Fonte: elaborado pelo autor.

Podemos inferir, que Oluchi, não analisou todas as possibilidades de distribuição do recipiente $A_3$ Para executar uma estratégia é importante realizar análises dos movimentos

37 O jogador **A** também poderia escolher o recipiente $A_3$, que contém 6 sementes, e realizar a distribuição de dois em dois e capturar 2 sementes no recipiente $B_2$.

possíveis. Para o jogador iniciar um movimento, é necessário fazer a leitura das sementes do tabuleiro, para depois montar uma estratégia de jogo. O aluno precisa analisar as possibilidades de capturas e defesas das sementes nos recipientes do tabuleiro. Nesse caso, essa leitura deveria considerar todos os divisores do número 6 (1, 2, 3 e 6), pois eles representam as possibilidades de distribuição em partes iguais do recipiente $A_3$, que continha 6 sementes.

Com essa jogada precipitada de Oluchi o jogador **A** passaria a ter 12 sementes em seu depósito, enquanto o jogador **B** permaneceria com 7. E ainda, no próximo movimento, o jogador **A** poderá capturar 2 sementes (se o o jogador **B** escolher o recipiente $B_4$ e realizar a distribuição de um em um, aumentando as sementes do seu depósito para 14) ou 3 sementes (para qualquer distribuição, feita pelo jogador **B**, diferente da mencionada anteriormente, totalizando 15 sementes).

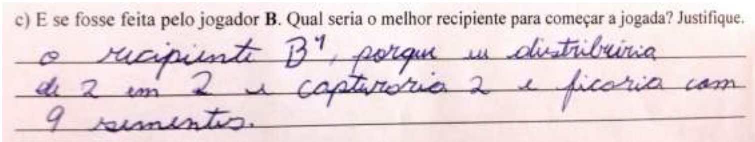
Segundo Santos (2014):

> Para a realização de boas jogadas no *Mankala Colhe Três*, é crucial uma boa capacidade de mapear as jogadas. Uma boa jogada no Mankala Colhe Três é aquela que favorece o jogador ou que desfavorece o adversário. Para que, de fato, isso aconteça, é preciso que as possíveis jogadas sejam antecipadas. Sendo assim, quanto maior a capacidade de mapear ou antecipar jogadas, maior será a chance de vitória (SANTOS, 2014, p. 27).

No jogo Mankala *awalé*, assim como no *Mankala Colhe Três*, é importante que o jogador consiga mapear e antecipar suas jogadas e as do adversário. Ao mapeá-las ele estaria mobilizando conteúdos e habilidades matemáticas, como: cálculo mental, múltiplos e divisores, simulação, concentração, memória, análise de possibilidades, dentre outras.

Percebemos que a aluna Oluchi não conseguiu realizar a antecipação das jogadas, pois provavelmente a sua escolha de movimentação vai levá-la a derrota. No entanto, “ser capaz de considerar todos os aspectos envolvidos numa partida e antecipar boas jogadas é um trabalho de observação constante e isso é adquirido com a prática do jogo” (MACEDO; PASSOS; PETTY, 2000, p. 77).

A aluna Makida escolheu uma estratégia de ataque (estratégia $E_8$) com capturas de sementes. Ela cometeu o erro de estratégia EE3, pois deixou possibilidades do adversário capturar uma quantidade maior de sementes na jogada seguinte. Uma dessas possibilidades do adversário capturar Makida havia mencionado no **item b)**.


c) E se fosse feita pelo jogador **B**. Qual seria o melhor recipiente para começar a jogada? Justifique.

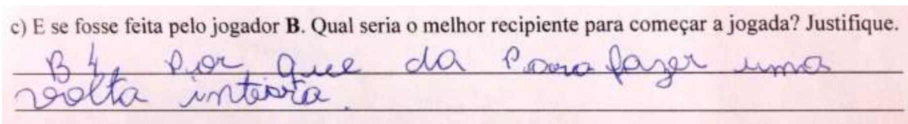
o recipiente B4, porque eu distribuiria de 2 em 2 e capturaria 2 e ficaria com 9 sementes.

Figura 14: Protocolo de resolução, do item c), da primeira atividade do primeiro encontro da aluna Makida.
Fonte: dados da pesquisa.

Percebemos que Makida mobilizou essa estratégia de forma impulsiva e precipitada, sem observar e analisar a estratégia que ela havia escolhido no **item b)**, onde a distribuição das sementes foi feita pelo jogador **A** e ela escolheu uma estratégia de ataque (estratégia $E_5$ ), ao iniciar a distribuição pelo recipiente $A_3$ , que contém 6 sementes, realizando a distribuição de dois em dois e capturando 3 sementes no recipiente $B_2$ .

Já pela descrição da aluna Chinara, inferimos que ela distribuirá as sementes de um em um, pois entendemos que "*fazer uma volta inteira*", nessa situação, seria deixar sementes em todos os recipientes no território do jogador **A**.

Chinara mobilizou uma estratégia de defesa (estratégia $E_9$ ), ao escolher o recipiente $B_4$ , que contém 4 sementes, e realizar a distribuição de um em um com isso evitou que o jogador **A**, na próxima jogada, capturasse sementes.


c) E se fosse feita pelo jogador **B**. Qual seria o melhor recipiente para começar a jogada? Justifique.

B4 por que da para fazer uma volta inteira.

Figura 15: Protocolo de resolução, do item c), da primeira atividade do primeiro encontro da aluna Chinara.
Fonte: dados da pesquisa.

4.2.4. Análise *a priori* da segunda atividade

A segunda atividade do primeiro encontro foi a seguinte:

*O jogo está como mostra a situação abaixo:*

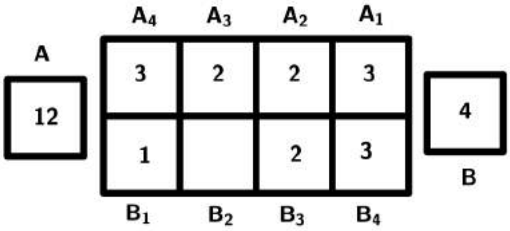



Figura 16: Situação de uma partida entre os jogadores **A** e **B**.
Fonte: elaborada pelo autor.

*Analise a situação e responda: "Se você fosse o jogador* ***A****, em qual recipiente mexeria? Por quê?"*

Apresentamos, a seguir, algumas estratégias que os alunos podem utilizar para responder a segunda atividade proposta no primeiro encontro.

- $E_1$ : Escolher o recipiente $A_4$ e realizar a distribuição uma a uma.

O recipiente $A_4$ contém 3 sementes, com a distribuição uma a uma o jogador **A** capturaria 3 sementes no recipiente $B_3$ , totalizando 15 sementes em seu depósito. No entanto, deixaria a possibilidade para o jogador **B** também capturar 3 sementes.

- $E_2$ : Escolher o recipiente $A_3$ e realizar a distribuição uma a uma.

Como o recipiente $A_3$ contém 2 sementes, com a distribuição uma a uma o jogador **A** capturaria 2 sementes no recipiente $B_1$ , totalizando 14 sementes em seu depósito. Com essa jogada ele não deixaria chances para o jogador **B** capturar sementes no próximo movimento.

- $E_3$ : Escolher o recipiente $A_2$ e realizar a distribuição uma a uma.

O recipiente $A_2$ contém 2 sementes, com a distribuição uma a uma o jogador **A** não capturaria sementes mas evitaria que o jogador **B**, na próxima jogada, capturasse 3 sementes.

As estratégias $E_1$ e $E_2$ são de ataque, no entanto com a mobilização da estratégia $E_1$ o jogador **A** não consegue evitar que o jogador **B** capture sementes e com isso ele cometeria o erro de estratégia EE2. Já a estratégia $E_3$ é de defesa e não deixa oportunidades de capturas para o próximo movimento.

### 4.2.5. Análise *a posteriori* da segunda atividade

Na segunda atividade a movimentação seria do jogador **A**. Oluchi, na descrição mobiliza uma estratégia de ataque (estratégia $E_2$) ao escolher o recipiente $A_3$, que contém 2 sementes, realizar a distribuição de um em um e capturar 2 sementes no recipiente $B_1$, totalizando 14 sementes em seu depósito.

Ao descrever a estratégia Oluchi enfatiza que capturaria 3 sementes, no entanto a distribuição de um em um iniciada no recipiente $A_3$ só captura 2 sementes.

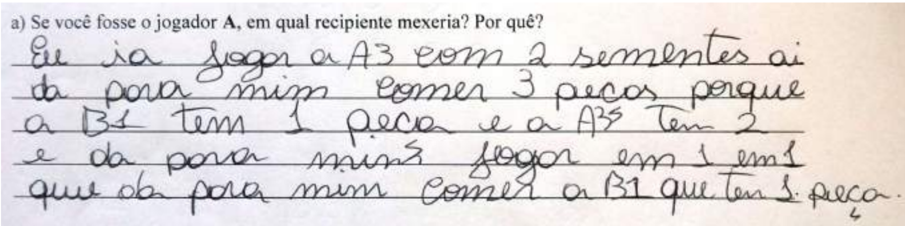

a) Se você fosse o jogador **A**, em qual recipiente mexeria? Por quê?
Eu ia jogar a A3 com 2 sementes ai da para mim comer 3 peças porque a B1 tem 1 peça e a A3 tem 2 e da para mim jogar em 1 em 1 que da para mim comer a B1 que tem 1 peça.

Figura 17: Protocolo de resolução, do item a), da segunda atividade do primeiro encontro da aluna Oluchi.
Fonte: dados da pesquisa.

Essa movimentação realizada por Oluchi foi uma jogada excelente pois ela conseguiu realizar uma captura de 2 sementes aumentado a quantidade de sementes no seu depósito para 14 e, ainda, minimizou a perda de sementes, já que na próxima jogada o jogador **B**, não consegue capturar sementes.

Makida novamente age de forma impulsiva e precipitada ao descrever a estratégia mobilizada. Ela justifica a jogada dizendo que o adversário não teria chances de capturar sementes dela, porém além dela não capturar sementes, Makida ainda deixa a possibilidade do jogador **B** capturar três sementes na jogada seguinte.

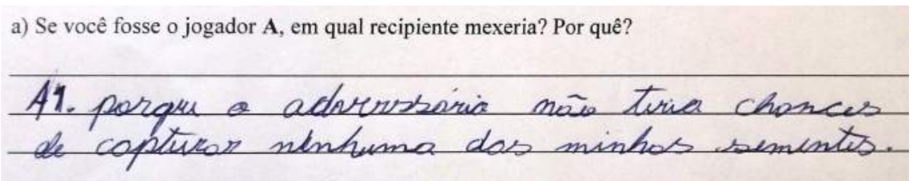
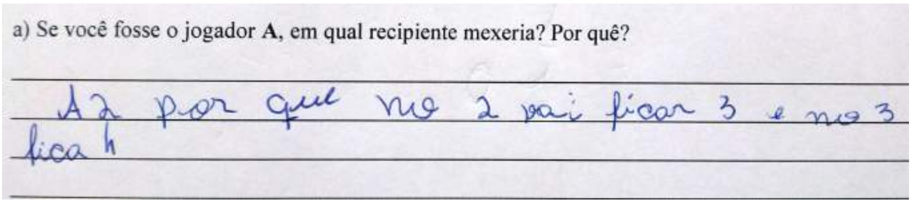

a) Se você fosse o jogador **A**, em qual recipiente mexeria? Por quê?
A1. porque o adversária não tiria chances de capturar ninhuma das minhas sementes.

Figura 18: Protocolo de resolução, do item a), da segunda atividade do primeiro encontro da aluna Makida.
Fonte: dados da pesquisa.

Na análise *a priori* da segunda atividade, priorizamos estratégias de ataque e de defesa com ou sem capturas de sementes e, essa estratégia mobilizada por Makida não foi considerada nem de ataque e nem de defesa. Ela cometeu o erro de estratégia EE1 (não jogar do recipiente que permite a captura de sementes) e o erro de estratégia EE2 (não evitar que o adversário ganhe sementes).

Chinara ao escolher o recipiente $A_2$ e realizar a distribuição uma a uma evitou que o jogador **B**, na próxima jogada, capturasse 3 sementes. Essa jogada mobilizada por ela é uma estratégia de defesa ( $E_2$ ) prevista na análise *a priori* da questão.


a) Se você fosse o jogador **A**, em qual recipiente mexeria? Por quê?

A2 por que no 2 vai ficar 3 e no 3 fica 4

Figura 19: Protocolo de resolução, do item a), da segunda atividade do primeiro encontro da aluna Chinara.
Fonte: dados da pesquisa.

Com essa jogada Chinara conseguiu ainda mobilizar uma estratégia de ataque já que no próximo movimento do jogador **A**, independente da movimentação do jogador **B**, ele poderá capturar 2 ou 3 sementes.

Não podemos inferir se Chinara percebeu tal fato ou se foi apenas uma jogada isolada, pois ela não registrou nada referindo a essas estratégias mencionadas.

### 4.2.6. Algumas considerações sobre o primeiro encontro

Durante os encontros da pré-experimentação trabalhamos com os alunos as regras do jogo *awalé*, com as adaptações, somente em partidas nos tabuleiros. Quando iniciamos os encontros com a sequência de atividades os alunos, ao perceberem que elas seriam por escrito, começaram a conversar mostrando desinteresse com a proposta. Com essa situação, pensamos que não haveria o momento de devolução (BROUSSEAU, 2008). Já que “a devolução apresenta grandes dificuldades que são analisadas tradicionalmente no que se refere à motivação do aluno” (BROUSSEAU, 2008, p. 91).

Por isso, tivemos que buscar novas estratégias para que os alunos começassem a resolver as atividades propostas, pois parecia que tínhamos rompido com o contrato didático[38] em vigência até o momento.

Na tentativa de motivar os alunos, fizemos uma renegociação e propusemos a eles a possibilidade de jogarem nos tabuleiros assim que terminarem as atividades apresentadas. Esse novo contrato também seria válido para os próximos encontros.

Após essa conversa, os alunos começaram as atividades e apresentaram dificuldades em representar nos protocolos as estratégias mobilizadas durante a realização das mesmas.

Em relação às atividades propostas os alunos mobilizaram diversas estratégias, algumas previstas na análise *a priori*. A aluna Chinara na primeira atividade relacionou sua escolha com o fator sorte não apresentando estratégias de defesa e nem de ataque. No entanto, na segunda atividade, começou a mobilizar tais estratégias, porém percebemos que a mesma estava com dificuldades na compreensão das regras do jogo *awalé*.

O aluno Zulu mobilizou, nas duas atividades propostas, estratégias de ataque e defesa, no entanto apresentou dificuldades em escrever as justificavas delas no protocolo de resolução. A aluna Oluchi apresentou estratégias de ataque e defesa bem justificadas.

Kojo demonstrou ter compreendido as regras do jogo *awalé* e mobilizou diversas estratégias de ataque e defesa com êxito, no entanto apresentou dificuldades em redigir as estratégias mobilizadas.

A aluna Makida conseguiu articular com êxito estratégias de ataque e defesa sendo capaz de prever jogadas futuras, um dos fatores essenciais para jogar *awalé*.

O aluno Silko não participou do primeiro encontro.

Destacamos a participação dos alunos nos momentos de validação e apresentação das estratégias. Todos participaram desses momentos, discutiram suas estratégias e as dos outros e apresentaram suas opiniões sobre elas. Questionamos os alunos em relação aos possíveis conhecimentos matemáticos que eles achavam que trabalharam durante o encontro e, surgiram como respostas: divisão, adição, contagem e cálculo mental.

Em seguida apresentamos aos alunos que as adaptações do jogo Mankala *awalé* proporcionavam possibilidades de desenvolver estratégias de quantificar mentalmente, de

38 Chama-se contrato didático o conjunto de comportamentos do professor que são esperados pelos alunos e o conjunto de comportamentos do aluno que são esperados pelo professor […] Esse contrato é o conjunto de regras que determinam uma pequena parte explicitamente, mas sobretudo implicitamente, do que cada parceiro da relação didática deverá gerir e daquilo que, de uma maneira ou de outra, ele terá de prestar conta perante o outro (BROUSSEAU, 1986, *apud* SILVA, 2012, p. 50).

resolver problemas com situações mistas: aditivas e multiplicativas, de dividir por cálculo mental, de mapear as possibilidades e de explorar as possibilidades de distribuição em partes iguais a partir das quantias existentes nos recipientes.

Por fim, esses momentos de discussão das estratégias proporcionado pelos alunos, com argumentos e reflexões, nos forneceram subsídios para a realização da institucionalização do encontro.

## 4.3. Segundo Encontro

No segundo encontro aplicamos a terceira atividade que envolvia partidas entre os jogadores **A** e **B**. Os jogadores foram representados pelos alunos que jogaram entre si e também tinham que registrar todos os movimentos. O objetivo desse encontro era analisar as estratégias mobilizadas pelos alunos durante toda a partida e não somente em uma situação isolada como foi aplicado no primeiro encontro.

Para esse encontro não realizamos a análise *a priori* das estratégias que os alunos poderiam mobilizar, devido as várias possibilidades que podem surgir a partir de cada configuração do tabuleiro. Para se ter uma ideia, só no primeiro movimento da partida o jogador teria 145 possibilidades de jogadas para analisar, sendo 12 jogadas possíveis para ele iniciar e mais 133 possibilidades (que o adversário terá para realizar o segundo movimento) que surgem dessas 12 iniciais. Por isso, acompanhamos as partidas atentamente e, na medida do possível, dialogamos com os alunos.

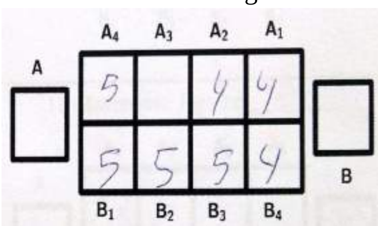
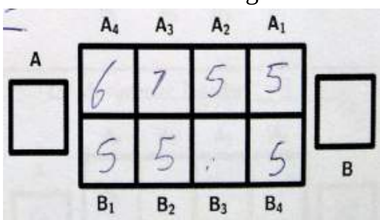
### 4.3.1. Experimentação

Esse encontro aconteceu no dia 08 de maio de 2015, das 12h às 13h45min, e contou com a presença de 5 alunos, a saber: Zulu, Oluchi, Kojo, Makida e Silko. Os alunos jogaram o Mankala *awalé*, com as adaptações, e representaram todos os movimentos da partida no esquema entregue a eles. Analisamos as partidas entre: Oluchi *x* Zulu, Kojo *x* Pesquisador, Makida *x* Silko e Kojo *x* Silko.

### 4.3.2. Análise *a posteriori* da primeira partida

Na primeira partida analisada, o jogador **A** foi representado pela aluna Makida e o jogador **B** pelo aluno Silko. Makida possuía 12 possibilidades para começar a primeira jogada. Ela realizou o primeiro movimento iniciando pelo recipiente $A_3$, com isso ela não deixou possibilidade para Silko capturar sementes no próximo movimento. Por outro lado Silko, após a movimentação de Makida, ficou com 9 possibilidades para distribuir as sementes. Silko distribuiu suas sementes iniciando do recipiente $B_3$ que continha 5 sementes.

Com essa distribuição, Silko deixou possibilidade para Makida capturar 2 sementes no próximo movimento se ela começasse do recipiente $A_4$ e distribuísse de dois em dois. Ao realizar essa jogada Silko cometeu o erro de estratégia EE2, pois ele não capturou sementes e ainda deixou possibilidade para Makida capturar.

| 1º Movimento: Jogador A | 2º Movimento: Jogador B |
|---|---|
|  |  |

Quadro 8: Protocolo de resolução, do 1º e 2º movimento, da partida entre Makida e Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Para iniciar o 3º movimento, Makida dispunha de 9 possibilidades. Em 3 delas ela não capturava sementes, porém no próximo movimento Silko poderia capturar. Se ela começasse dos recipientes $A_1$ ou $A_2$ e distribuísse de um em um, Silko tinha a chance de capturar 3 sementes na próxima jogada e, se iniciasse do recipiente $A_1$, que continha 5 sementes, e apenas movê-las para o recipiente $A_2$, Silko poderia capturar 2 sementes.

Em apenas uma das possibilidades Makida poderia capturar sementes. Se começasse a movimentação do recipiente $A_4$, distribuindo de dois em dois, ela poderia capturar 2 sementes e ainda não deixava possibilidades para Silko capturar no próximo movimento.

Nas outras 5 possibilidades Makida não capturava e, no próximo movimento, Silko também não.

Makida, então escolhe o recipiente $A_3$ e move a semente dele para o $A_4$, pois no próximo movimento Silko poderia capturar 2 sementes.

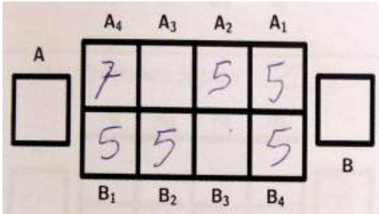



Figura 20: Protocolo de resolução do 3º movimento realizado por Makida, representando o jogador A.
Fonte: dados da pesquisa.

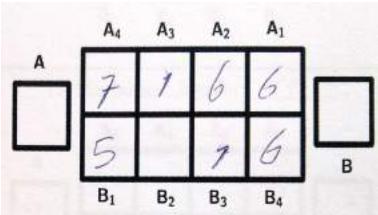
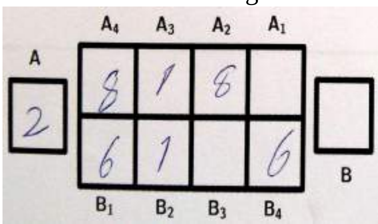
Nesse momento, o pesquisador entrou em cena questionando Makida a respeito da movimentação que ela realizou.

> *Pesquisador: Makida, por que você realizou essa movimentação?*
> *Makida: Ele podia capturar 2 sementes minhas aqui (**apontando para o recipiente** $A_3$ , grifo nosso) e eu não gosto de perder sementes.*
> *Pesquisador: E o que aconteceria se você tivesse começado do recipiente* $A_4$ *?*
> *Makida: (**Ela fica pensativa e começa a realizar a divisão das 6 sementes em partes iguais**, grifo nosso) Eu ia capturar duas sementes dele, mas nem percebi isso.*
> *Pesquisador: E Silko poderia capturar?*
> *Makida: Não...Essa seria uma boa jogada.*

Nesse diálogo, fica evidente que Makida privilegia as estratégias de defesa, havendo ou não capturas, no entanto se ela escolhesse o recipiente $A_4$ mobilizaria uma estratégia de ataque, com capturas, e uma estratégia de defesa, devido ao fato de Silko não conseguir capturar sementes no próximo movimento.

Fica evidente, também, que Makida não estava analisando todas as possibilidades que ela dispunha para iniciar a movimentação das sementes. Nos jogos Mankalas é essencial que o jogador analise possibilidades de jogadas, a todo instante, do tipo: se eu mexer no recipiente $A_4$ , não capturo sementes mas deixo a possibilidade do adversário capturar 3 sementes. Essas análises precisam ser feitas em todas as possibilidades que ela possua para iniciar o movimento e também em relação às consequências que cada movimento possa acarretar nas jogadas futuras do adversário.

No registro do 5º movimento, realizado por Makida, eles cometeram dois erros de regras. Ela iniciou a distribuição pelo recipiente $A_1$ , de um em um, e eles não registraram a semente do recipiente $A_3$ , cometendo o erro de regra ER4 (pular recipientes na distribuição das sementes) e, ainda, registraram 2 sementes a mais no recipiente $A_2$, cometendo o erro de regra ER3 (não distribuir as sementes em partes iguais).

| 4º Movimento: Jogador B | 5º Movimento: Jogador A |
|---|---|
|  |  |





Quadro 9: Protocolo de resolução, do 4º e 5º movimento, da partida entre Makida e Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Inferimos que esses erros foram ocasionados por descuido nas anotações, pois ambos tinham conhecimento das regras do jogo. A figura abaixo, mostra como ficaria a distribuição com a movimentação sem os erros cometidos.

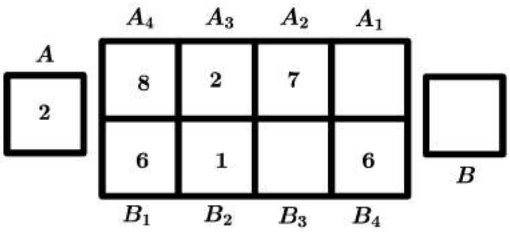
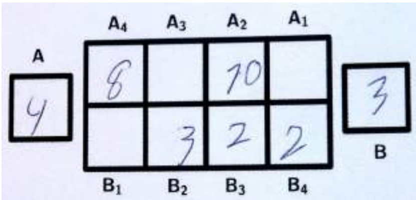
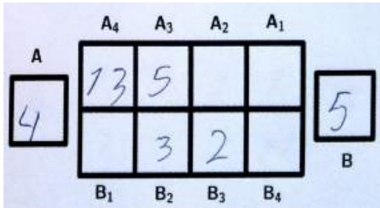



Figura 21: Distribuição correta do 6º movimento realizado por Makida.
Fonte: elaborada pelo autor.

Observamos, pelo quadro 9, que Makida capturou 2 sementes no recipiente $B_3$ mesmo cometendo erro no registro das sementes do recipiente $A_2$ e $A_3$. No entanto, Silko poderia capturar 3 sementes no recipiente $A_3$ se começasse a distribuição do recipiente $B_1$. Ainda nessa jogada, Makida cometeu o erro de estratégia EE3, pois ela capturou sementes, mas deixou a possibilidade do adversário capturar uma quantidade maior na jogada seguinte. Makida e Silko não perceberam o erro no protocolo de resolução e continuaram a partida.

Ao realizar o 8º movimento, Silko mobilizou uma estratégia de ataque e ao mesmo tempo uma de defesa, pois deixou Makida sem possibilidades de capturar sementes em sua jogada. É importante lembrar que, nessa jogada, não houve capturas, porém no seu próximo movimento, independentemente da movimentação de Makida, Silko terá a possibilidade de capturar. Percebemos tal fato no 10º movimento, realizado por Silko, com a captura de 2 sementes no recipiente $A_1$.

Percebemos que Silko começou a mapear as jogadas, realizando análise das possibilidades que dispunha e, com isso, conseguia antecipar as jogadas futuras.

| 8º Movimento: Jogador B | 10º Movimento: Jogador B |
| --- | --- |
|  |  |

Quadro 10: Protocolo de resolução do 8º e 10º movimento realizado por Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Makida, no 13º movimento, simplesmente moveu as 14 sementes do recipiente $A_4$ para o recipiente $B_1$ não realizando capturas mas deixou possibilidades para Silko capturar 3 sementes se escolhesse o recipiente $B_1$ e distribuísse de três em três ou 2 sementes se iniciasse do recipiente $B_4$ e distribuísse de dois em dois. Essa escolha de Makida foi classificada como um erro de estratégia pois ela não capturou sementes em sua jogada e deixou possibilidades para Silko capturar (EE2).

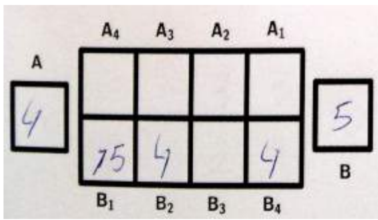
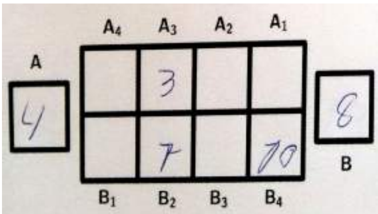
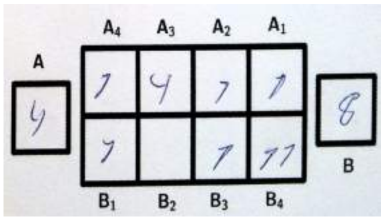


Figura 22: Protocolo de resolução do 13º movimento realizado por Makida, representando o jogador A.
Fonte: dados da pesquisa.

No movimento seguinte Silko escolheu o recipiente $B_1$, distribuiu de três em três e capturou 3 sementes no recipiente $A_2$.

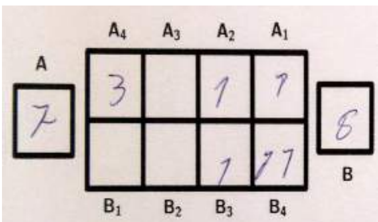
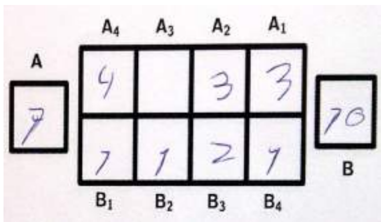
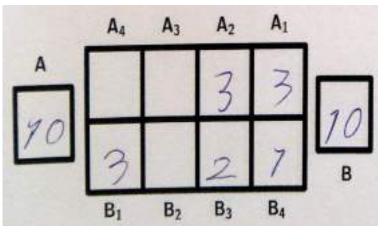

Figura 23: Protocolo de resolução do 14º movimento realizado por Silko, representando o jogador B.
Fonte: dados da pesquisa.

Silko no 18º movimento também cometeu dois erros de estratégia pois ele não capturou sementes em sua jogada mesmo tendo possibilidades de capturar (EE1) e ainda deixou possibilidades para Makida capturar (EE2).

<table>
<tr><td>17º Movimento: Jogador A<br></td><td>18º Movimento: Jogador B<br></td></tr>
</table>

Quadro 11: Protocolo de resolução, do 17º e 18º movimento, da partida entre Silko e Makida.
Fonte: dados da pesquisa.

Makida, então, no 19º movimento realizou uma captura de 3 sementes, porém Silko capturou 2 sementes no 20º movimento. Makida, capturou mais 3 sementes no 21º movimento e nesse momento a partida ficou empatada, com 10 sementes capturadas para cada.

<table>
<tr><td>19º Movimento: Jogador A<br></td><td>20º Movimento: Jogador B<br></td></tr>
<tr><td colspan="2">21º Movimento: Jogador A<br></td></tr>
</table>

Quadro 12: Protocolo de resolução, do 19º ao 21º movimento, da partida entre Makida e Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Percebemos que no 22º movimento, efetuado por Silko, houve um erro de marcação no protocolo, pois ele moveu as sementes do recipiente $B_1$ para o recipiente $B_3$, não deixando sementes em $B_2$ (erro de regra ER4). Esse erro também foi percebido na pesquisa de Lacanallo (2011), segundo ela "ainda que tentassem estruturar melhor suas jogadas, sentiam dificuldade, confundiam-se no meio do jogo, erravam movimentações e só reconheciam o erro depois de realizar a movimentação" (LACANALLO, 2011, p. 71).

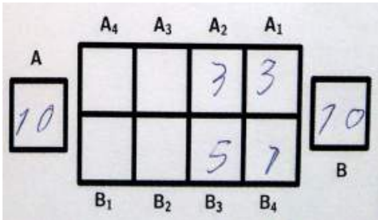
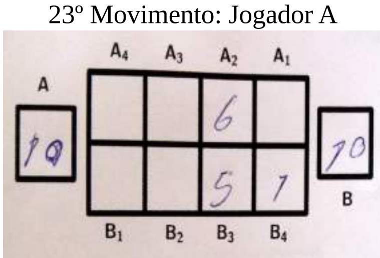



Figura 24: Protocolo de resolução do 22º movimento realizado por Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

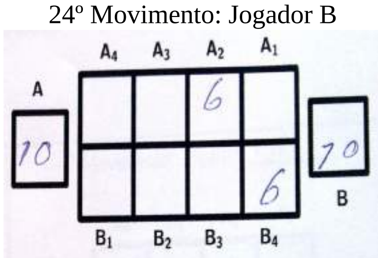
Em seguida, Makida mobilizou uma estratégia de ataque deixando possibilidades de capturas para o seu próximo movimento. Percebemos que ela tinha uma visão geral do tabuleiro e conseguia antecipar as jogadas, para isso contava o número de sementes que havia em cada recipiente e também quantas haveria após a movimentação. Assim, ela conseguia realizar jogadas exitosas.

Ao perceber que Makida, no 23º movimento, tinha deixado 6 sementes no recipiente $A_2$ mobilizando uma estratégia com chances de capturas de 2 sementes no próximo movimento dela, Silko, então, realizou uma jogada em que ele, em seu próximo movimento, teria a oportunidade de capturar 3 sementes (24º movimento). No entanto, essa jogada o deixaria sem sementes em seu território.

23º Movimento: Jogador A

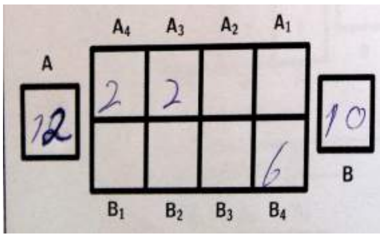
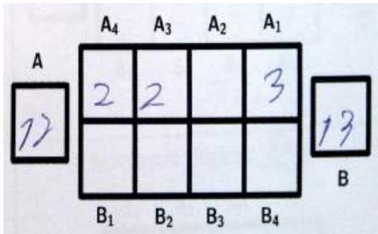



24º Movimento: Jogador B




Quadro 13: Protocolo de resolução, do 23° e 24º movimento, da partida entre Makida e Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

No 25º movimento, Makida efetuou sua jogada planejada no movimento anterior e capturou 2 sementes. Em seguida, Silko também realizou sua movimentação (26º movimento) e capturou 3 sementes, ficando sem sementes em seu território.

| 25º Movimento: Jogador A | 26º Movimento: Jogador B |
| --- | --- |
|  |  |

Quadro 14: Protocolo de resolução, do 25 e 26º movimento, da partida entre Makida e Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Nas regras apresentadas aos alunos se, em algum momento da partida, o adversário ficasse sem nenhuma semente em seu território, o outro jogador devia escolher um recipiente que tivesse a quantidade suficiente de sementes para alimentar o território do adversário.

Então, como Silko estava sem sementes em seu território, era de se esperar que Makida, no 27º movimento, fosse alimentá-lo com pelo menos uma semente. No entanto, ela moveu as 2 sementes do recipiente $A_4$ para o recipiente $B_1$ e como configurou uma jogada de captura, ela recolheu-as para o seu depósito, não deixando sementes no território de Silko. Makida ao não alimentar o território do adversário cometeu o erro de regra ER6.

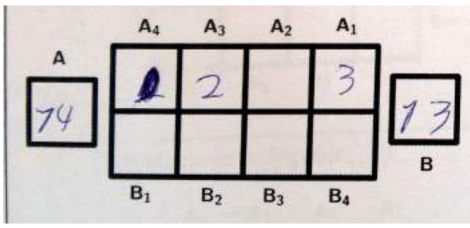



Figura 25: Protocolo de resolução do 27º movimento realizado por Makida.
Fonte: dados da pesquisa.

Como o jogo estava equilibrado, com chances de vitória para ambos, Silko questionou o pesquisador sobre a jogada efetuada por Makida.

> *Silko: Professor, aqui ela não teria que passar sementes pra mim? (**Silko aponta para o tabuleiro, representado no 26º movimento**, grifo nosso)*
> *Pesquisador: Teria sim.*
> *Silko: Te falei Makida.*

*Makida: "Mais" eu posso capturar.*
*Pesquisador: Mas como ele não possui sementes em seu território você tem que passar sementes pra ele na sua próxima jogada.*
*Makida: "Mais" na regra não fala nada sobre quando pode capturar também.*
*Pesquisador: Você pode capturar se você, mesmo capturando, deixar sementes no território dele.*
*Makida: Não entendi isso não.*
*Silko: Deixa, professor….Hum, ela ganhou!*

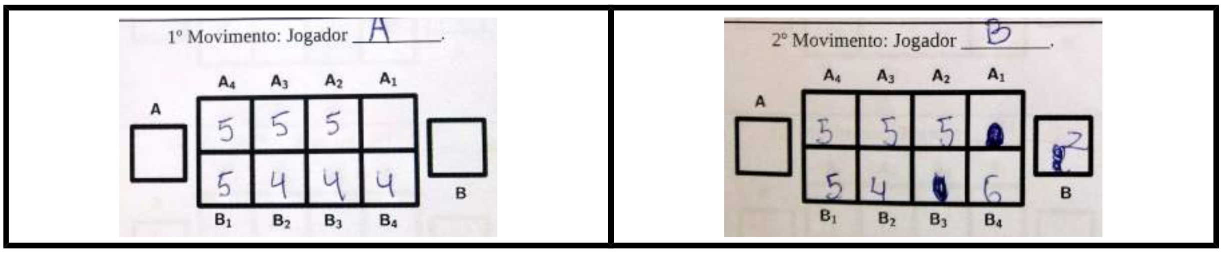
Após esse diálogo, percebemos que essa regra poderia deixar margem para a interpretação de Makida. Nesse momento, explicamos para todos o fato que aconteceu na partida entre Makida e Silko, enfatizando que, em situações como essa, o jogador só poderá capturar sementes se no território do adversário ficar pelo menos uma semente.

Em seguida, verificamos que essa jogada também estava acontecendo em outras partidas. E a escolha em capturar ou não ficava por conta do jogador.

### 4.3.3. Análise *a posteriori* da segunda partida

Na segunda partida analisada, o jogador **A** foi representado pelo aluno Silko e o jogador **B** pelo aluno Kojo. Silko iniciou a partida pelo recipiente $A_1$ e distribuiu de um em um, com isso ele deixou possibilidade para Kojo capturar 2 sementes no próximo movimento. Kojo percebeu tal fato e iniciou a movimentação pelo recipiente $B_3$, distribuindo de dois em dois, capturando 2 sementes no recipiente $A_1$.

Como Silko não conseguiu realizar um movimento de defesa, ou seja, não evitou que o adversário capturasse sementes, ele acabou cometendo o erro de estratégia EE2. Um fator que leva o aluno a cometer esse erro (EE2) durante a formulação das estratégias está relacionado com a não realização do cálculo de possibilidades, das contagens, das simulações, dos levantamentos de conjecturas. Para jogar o Mankala *awalé* é essencial que o jogador considere todos esses fatores.



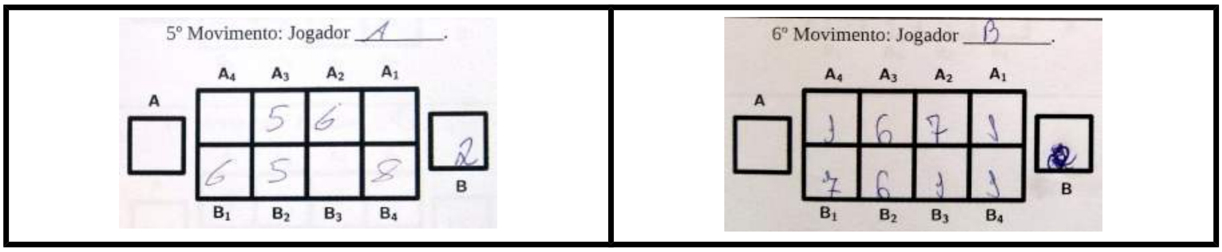

Quadro 15: Protocolo de resolução, do 1º e 2º movimento, da partida entre Kojo e Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Essa jogada realizada por Kojo é a forma de captura que exige a menor quantidade de movimentos. No Mankala *awalé* adaptado há possibilidades de capturas no segundo movimento, desde que o primeiro jogador inicie a movimentação pelos recipientes $A_1$ ou $A_2$, se o jogador **A** realizar o primeiro movimento, e $B_1$ ou $B_2$, caso o jogo seja iniciado pelo jogador **B**.

No protocolo representado pelo quadro 16, percebemos que Silko, ao realizar o 5º movimento, deixou possibilidade para Kojo capturar 2 sementes no recipiente $A_4$ se ele começasse a jogada pelo recipiente $B_4$, que contém 8 sementes, e distribuísse de dois em dois. Com essa jogada Silko não se defendeu e acabou cometendo o erro de estratégia EE2.

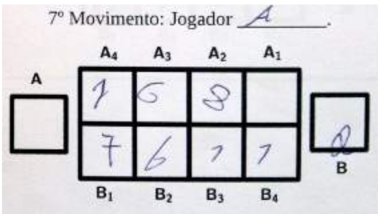
No entanto, Kojo escolheu o recipiente $B_4$ e distribuiu de um em um, com isso ele cometeu o erro de estratégia EE1, pois jogou do recipiente que permitia a captura de sementes, no entanto não utilizou a distribuição que resultaria em capturas.

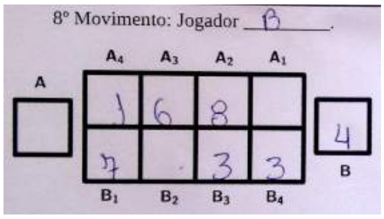
Analisando detalhadamente o movimento executado por Kojo percebemos que ele mobilizou uma estratégia de ataque exitosa ameaçando o recipiente $A_1$ deixando uma armadilha para Silko, pois independente da movimentação realizada por ele, no próximo movimento de Kojo ele irá capturar sementes no recipiente $A_1$.




Quadro 16: Protocolo de resolução, do 5º e 6º movimento, da partida entre Kojo e Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Tal fato se consuma no 8º movimento, realizado por Kojo, em que ele escolheu o recipiente $B_3$, que continha 6 sementes, distribuiu de dois em dois e capturou 2 sementes no recipiente $A_1$.




Quadro 17: Protocolo de resolução, do 7º e 8º movimento, da partida entre Kojo e Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Percebemos nessa partida que do 1º até o 8º movimento o jogador Silko não teve a possibilidade de realizar nenhuma jogada em que houvesse capturas de sementes. Porém, Kojo ao terminar seu 8º movimento deixou possibilidade para Silko capturar. Em seguida, no 9º movimento, Silko iniciou sua jogada pelo recipiente $A_3$, distribuiu de dois em dois e capturou 2 sementes no recipiente $B_2$.

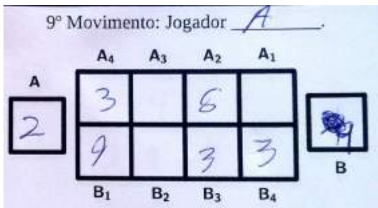
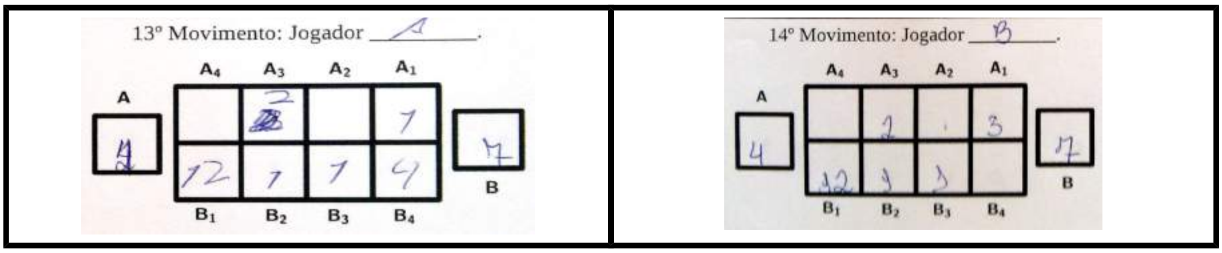



Figura 26: Protocolo de resolução 9º movimento realizado por Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

No 14º movimento, o aluno Kojo realizou uma jogada e capturou 2 sementes no recipiente $A_2$ (escolheu o recipiente $B_4$, que continha 4 sementes, e distribuiu de dois em dois). No entanto, essas 2 sementes capturadas não foram anotadas no depósito dele, com isso o tabuleiro, representado no 14º movimento do quadro 18, ficou com 30 sementes. Nesse movimento Kojo cometeu o erro de regra ER9 ao capturar sementes e não anotá-las no protocolo de resolução.




Quadro 18: Protocolo de resolução, do 13º e 14º movimento, da partida entre Kojo e Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Na figura 27, percebemos que o depósito de Kojo, no 16º movimento, continha 9 sementes, no entanto ele não capturou sementes nessa jogada.


Figura 27: Protocolo de resolução 16º movimento realizado por Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

Ao verificarmos tal fato, iniciamos um diálogo com Kojo e Silko:

> *Pesquisador: Percebi que no 15º movimento, Kojo tinha 7 sementes em seu depósito e no 16º essa quantidade aumentou para 9 sementes. No entanto, no 16º não houve capturas. O que aconteceu?*
> *Kojo: É que eu capturei duas sementes e não anotei.*
> *Silko: Ele capturou aqui professor (**apontando para o 14º movimento realizado por Kojo, representado no quadro 18**, grifo nosso).*
> *Pesquisador: Ah sim. Entendi.*
> *Pesquisador: E como vocês perceberam esse fato?*
> *Kojo: E que no tabuleiro tava diferente do anotado no papel.*

Inferimos, com isso, que Kojo e Silko estavam contando suas sementes capturadas e ao perceberem que havia uma diferença entre as quantidades de sementes capturadas e as registradas no esquema, eles imediatamente corrigiram a anotação.

No jogo, Mankala *awalé* adaptado, a contagem das sementes é essencial para elaborar estratégias exitosas. Santos (2014) diz que:

> Durante as partidas de *Mankala Colhe Três*, a necessidade de contar elementos surge naturalmente e a todo instante. De fato, desde o início das partidas, [...] ou durante qualquer outro momento do jogo, a tarefa de contar sementes é a base da realização de cada jogada (SANTOS, 2014, p. 25).

Essa afirmação de Santos (2014) vem enfatizar a importância de realizar as contagens das sementes antes de iniciar cada jogada.

Silko, ao finalizar o 21º movimento, ficou sem sementes em seu território e conforme as regras do jogo, Kojo teria que realizar um movimento que deixasse possibilidade de Silko movimentar pelo menos uma semente.

Para isso, Kojo teria que iniciar a distribuição pelo recipiente $B_1$ , que continha 15 sementes, e distribuir de um em um ou de três em três.

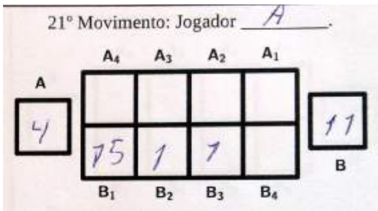
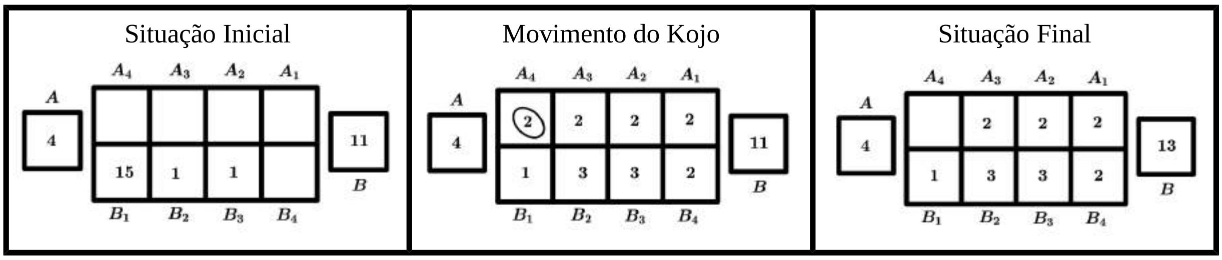



Figura 28: Protocolo de resolução 21º movimento realizado por Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Se Kojo movimentasse de um em um ele capturaria 2 sementes totalizando 13 em seu depósito. No entanto, deixava várias possibilidades para Silko movimentar.




Quadro 19: Esquema da distribuição de um em um que Kojo poderia utilizar.
Fonte: elaborado pelo autor.

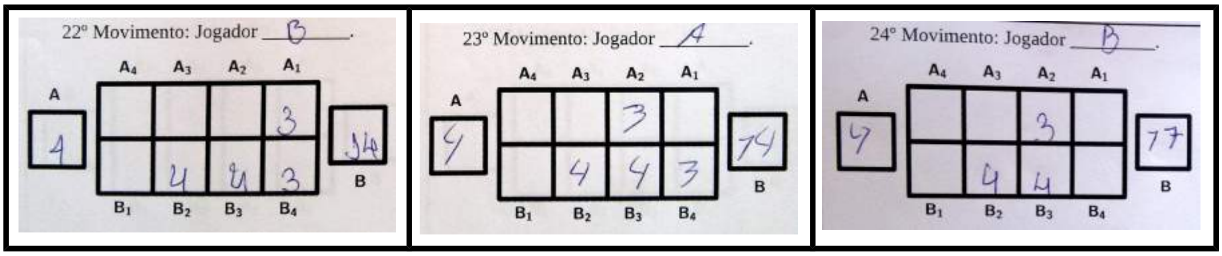
No entanto, com a movimentação um a um, ele deixaria seis possibilidades para Silko iniciar sua jogada e, Silko teria a possibilidade de realizar uma movimentação que evitava sua derrota.

Kojo distribuiu de três em três e capturou 3 sementes no recipiente $A_2$ , se as capturas múltiplas já tivessem sido apresentadas, ele também capturaria as 3 sementes do recipiente $A_1$ e seria o vencedor da partida. Ao percebermos a distribuição realizada por ele, iniciamos um diálogo:

*Pesquisador: Por que você distribuiu de três em três?*

*Kojo: Eu vi que dava pra ir de três. Fica partes iguais. E eu capturo 3 sementes.*
*Pesquisador: E o que acontece depois?*
*Kojo: O Silko tem que mexer aqui (**apontando para o recipiente** $A_1$, grifo nosso) e vai ficar 0. Ai eu mexo aqui (**apontando para o recipiente** $B_4$, grifo nosso) e capturo 3 sementes.*
*Pesquisador: E ai?*
*Kojo: Aí eu ganhei.*

Um importante conhecimento matemático vinculado à mobilização das estratégias dos alunos é a capacidade de mapear jogadas, prevendo jogadas futuras permitindo a visualização e execução de jogadas favoráveis. Quando essa capacidade evolui, outros conhecimentos também são mobilizados, como cálculo mental, contagens, cálculo de possibilidades, simulações, elaboração de estratégias, levantamento de conjecturas, reconhecimento de múltiplos, de divisores, dentre outros. Pelo diálogo, percebemos que Kojo conseguiu elaborar uma estratégia exitosa, levando-o a vitória. O diálogo acima está representado no quadro 20.




Quadro 20: Protocolo de resolução, do 22º ao 24º movimento, da partida entre Kojo e Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Nessa partida, Silko capturou apenas 4 sementes, sendo 2 no 9º movimento e 2 no 11º. Durante toda a partida teve apenas essas duas possibilidades de capturar sementes. Resolvemos então, conversar com ele:

*Pesquisador: Percebemos que você capturou poucas sementes. O que aconteceu?*
*Silko: Eu não tive mais chances.*
*Pesquisador: Por que você acha que isso aconteceu?*
*Silko: Acho que foi por causa da casa que escolhi pra começar. Eu comecei aqui (**apontando para o tabuleiro**, grifo nosso) e na vez dele, ele capturou 2.*
*Pesquisador: Hum…*
*Silko: Acho que quem começa aqui (**apontando para o recipiente** $A_1$, grifo nosso) perde. Eu já comecei outras vezes e perdi também.*
*Pesquisador: E por qual motivo começou novamente?*
*Silko: Queria confirmar minha dúvida.*
*Pesquisador: Que dúvida?*

*Silko: De que quem começa nesse recipiente perde a partida.*

Nesse diálogo, Silko fez uma afirmação importante sobre o primeiro movimento da partida. Com isso, inferimos que ele vivenciou uma situação *adidática* de *formulação* (BROUSSEAU, 1996, 2008). Em uma situação de *formulação*, “o aluno faz determinadas afirmações relativas à sua interação com o problema, mas sem a intenção de julgamento sobre validade, embora contenham implicitamente intenções de validação” (FREITAS, 2012, p. 97).

### 4.3.4. Análise *a posteriori* da terceira partida

Na terceira partida analisada, o jogador **A** foi representado pelo aluno Kojo e o jogador **B** pelo pesquisador. Nessa partida acompanhamos detalhadamente as estratégias mobilizadas pelo aluno Kojo. Verificamos como ele dividia as sementes em partes iguais e como escolhia a melhor maneira de distribuí-las.

Na figura 29, destacamos a jogada realizada pelo pesquisador durante o 3º movimento. Nesta jogada deixamos duas possibilidades de capturas para Kojo e cometemos o erro de estratégia EE2, no entanto esse erro foi proposital pois queríamos analisar como o aluno Kojo estava estruturando suas estratégias.

Para iniciar a movimentação Kojo precisava analisar 11 possibilidades para distribuir as sementes. Em apenas duas das possibilidades ele poderia capturar 3 sementes. Dentre as 11 possibilidades, em uma delas, ele não capturava e ainda deixava chances para o adversário capturar 3 sementes.

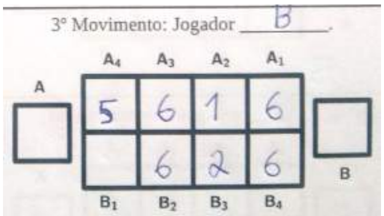



Figura 29: Protocolo de resolução do 3º movimento realizado pelo Pesquisador.
Fonte: dados da pesquisa.

Na primeira possibilidade ele poderia iniciar a movimentação do recipiente $A_3$ , que continha 6 sementes, distribuir de três em três e capturar 3 sementes no recipiente $B_1$ . Já na segunda, começaria a jogada pelo recipiente $A_1$, que também continha 6 sementes, realizando a distribuição uma a uma e capturando 3 sementes no recipiente $B_3$.

Após Kojo escolher o recipiente $A_1$, que continha 6 sementes, realizar a distribuição uma a uma e capturar 3 sementes no recipiente $B_3$, iniciamos um diálogo com ele.

> *Pesquisador: Kojo, você percebeu que tinha outra maneira de capturar?*
> *Kojo: Percebi sim. Aqui né? (**apontando para o recipiente** $A_3$, grifo nosso).*
> *Pesquisador: Por que você começou pelo recipiente $A_1$?*
> *Kojo: Se tivesse mexido aqui (**apontando para o recipiente** $A_3$, grifo nosso) o senhor poderia capturar 2 sementes minha se mexesse aqui (**apontando para o recipiente** $B_4$, grifo nosso) de dois em dois.*
> *Pesquisador: Bela jogada Kojo.*

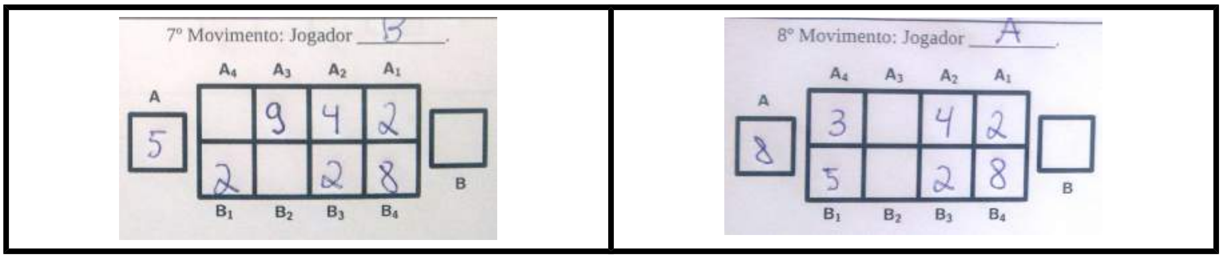
Percebemos pela afirmação de Kojo, que ele estava antecipando suas jogadas e com isso conseguia articular jogadas de ataque e defesa sempre minimizando as perdas de sementes. Pelo diálogo observamos que ele estava em uma situação de *formulação* (BROUSSEAU, 1996, 2008).

Kojo contava as sementes dos recipientes em voz alta e simulava as possibilidades de distribuição mas ele ainda não conseguia reconhecer de imediato os divisores dos números. Sendo assim, ele sempre começava tentando de um em um, de dois em dois e de três em três. Ao identificarmos tal fato, questionamos ele:

> *Pesquisador: Percebi que você sempre inicia sua simulação de um em um, de dois em dois ou de três em três. Pode nos dizer por que?*
> *Kojo: É que pra "mim" capturar só de dois em dois e de três em três.*
> *Pesquisador: E as outras possibilidades não poderiam ser interessantes também?*
> *Kojo: Sim. Primeiro testo essas aí vejo se vou capturar e também se não vou perder sementes, depois testo as outras.*
> *Pesquisador: Hum. Entendi.*

Voltando para a partida, após o pesquisador realizar o 7º movimento, Kojo (no 8º movimento) tinha a possibilidade de capturar 3 sementes, se escolhesse o recipiente $A_3$, que continha 9 sementes, e distribuísse de três em três. No entanto, no 9º movimento o pesquisador também poderia capturar 3 sementes.

Kojo escolheu essa jogada e capturou 3 sementes e após o término de seu movimento, iniciamos um diálogo com ele.

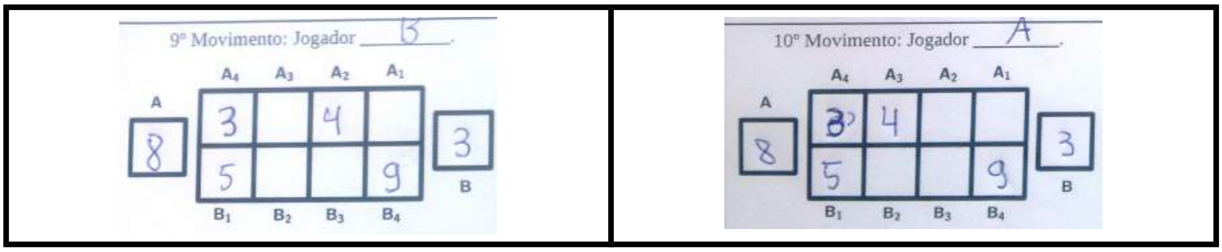



Quadro 21: Protocolo de resolução, do 7º e 8º movimento, da partida entre Kojo e Pesquisador.
Fonte: dados da pesquisa.

> *Pesquisador: Agora eu também posso capturar 3. Por que você não defendeu?*
> *Kojo: Não tinha jeito.*
> *Pesquisador: Como assim? Pode me explicar como pensou?*
> *Kojo: Se eu mexesse no* $A_1$ *, eu defendia do* $B_3$ *mas o senhor podia mexer no* $B_4$ *de dois em dois e capturar 2 sementes minhas.*
> *Pesquisador: Hum...*
> *Kojo: Ai se eu mexesse no* $A_3$ *eu capturo 3 sementes e o senhor 3, mais eu vou ficar com 8 sementes. E o senhor ainda não capturou nada.*
> *Pesquisador. Certo.*

Percebemos que Kojo estava determinado a vencer a partida e conseguia relacionar, nas estratégias de ataque e defesa com e sem capturas, a quantidade de sementes que já tinham sido capturadas. Ele apresentou ainda movimentos calculados com antecipação da sua jogada e das consequências dela em todo o movimento do tabuleiro. Kojo demonstrou muita concentração no decorrer da partida.

Em seguida, o pesquisador mobilizou uma estratégia de ataque capturando 3 sementes e ainda ameaçou o recipiente $A_3$ (9º movimento). Kojo percebeu a situação e executou uma jogada de defesa, movendo as 4 sementes do recipiente $A_2$ para o $A_3$ (10º movimento), conforme representado pelo quadro 22.




Quadro 22: Protocolo de resolução, do 9º e 10º movimento, da partida entre Kojo e Pesquisador.
Fonte: dados da pesquisa.

No 12º movimento, Kojo moveu as sementes do recipiente $A_1$ para o $A_2$, conforme figura 30.

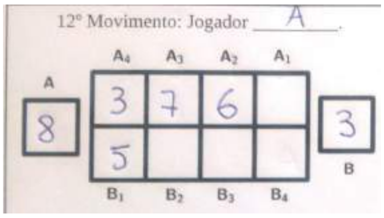



Figura 30: Protocolo de resolução do 12º movimento realizado por Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

Novamente questionamos Kojo sobre a jogada realizada por ele.

> *Pesquisador: Você tinha sementes em todos os recipientes e moveu as do $A_1$. Pode nos dizer o motivo?*
> *Kojo: O senhor só pode mexer na $B_1$ e eu vou mexer aqui (**apontando para o recipiente** $A_4$, grifo nosso) e capturar 3 sementes.*
> *Pesquisador: Então, quer dizer que você fez uma armadilha pra mim?*
> *Kojo: Foi sim (**Kojo sorriu**, grifo nosso).*

Kojo a cada movimento apresentava indícios de que estava antecipando suas jogadas e não estava deixando oportunidades para o pesquisador capturar. Ele aprimorava suas estratégias e quase sempre seus movimentos terminavam com capturas.

Para realizar o 15º movimento, percebemos que independentemente da escolha de distribuição efetuada pelo pesquisador, Kojo iria capturar sementes no próximo movimento dele.

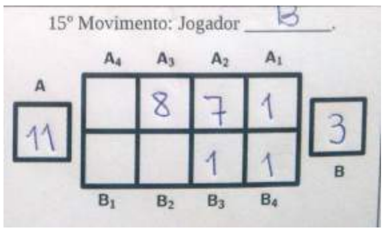
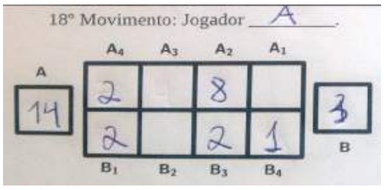
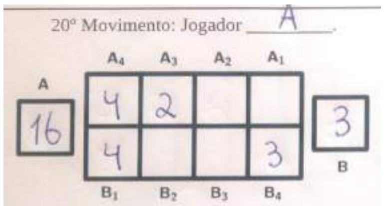



Figura 31: Protocolo de resolução do 15º movimento realizado pelo Pesquisador.
Fonte: dados da pesquisa.

Ao terminar o 18º movimento Kojo consolidou sua vitória pois, independente da escolha de movimentação do pesquisador no 19º movimento, ele capturaria 2 sementes na sua próxima jogada, totalizando assim 16 sementes capturadas.

| | |
|---|---|
|   |   |

Quadro 23: Protocolo de resolução do 18º e 20º movimento realizados por Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

Identificamos alguns conhecimentos de matemática básica presentes nas jogadas de Kojo, como: as análises de possibilidades e escolhas adequadas para fazer o movimento das peças, noções de quantidade, sequência na distribuição das peças do tabuleiro e as contagens, o cálculo mental, aplicadas a cada movimento.

4.3.5. Análise *a posteriori* da quarta partida

Na quarta partida analisada, o jogador **A** foi representado pela aluna Oluchi e o jogador **B** pelo aluno Zulu.

Zulu iniciou a partida pelo recipiente $B_4$ e não deixou possibilidade para Oluchi capturar sementes no próximo movimento. No entanto, ao realizar o 3º movimento, ele cometeu o erro de estratégia EE2, pois executou uma jogada em que não houve capturas de sementes e ainda deixou chances para Oluchi capturar.

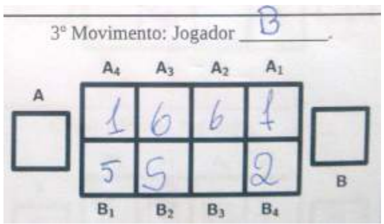
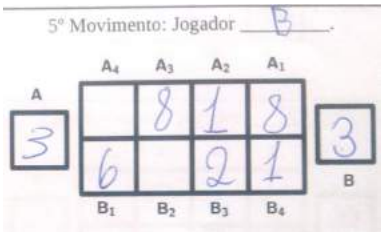


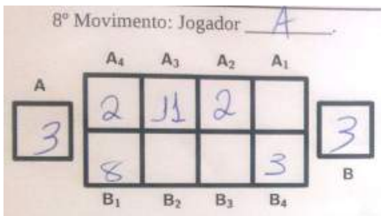

Figura 32: Protocolo de resolução do 3º movimento realizado por Zulu.
Fonte: dados da pesquisa.

Percebendo o erro cometido por Zulu, Oluchi mobilizou uma estratégia de ataque iniciando pelo recipiente $A_2$ , distribuindo de um em um e capturando 3 sementes no recipiente $B_4$ . No entanto, com essa jogada, ela também deixou possibilidades para Zulu capturar 3 sementes. Então, ele iniciou a movimentação pelo recipiente $B_2$ , distribuiu de um em um e capturou 3 sementes no recipiente $A_4$ . Essas duas capturas estão representadas, no quadro 24, pelo 4º e 5º movimento respectivamente.


Quadro 24: Protocolo de resolução, do 4º e 5º movimento, da partida entre Oluchi e Zulu.
Fonte: dados da pesquisa.

Oluchi, ao se deparar com a configuração do tabuleiro, após o 7º movimento realizado por Zulu, não percebeu que podia capturar 3 sementes se redistribuísse as sementes do recipiente $A_3$ de três em três. Sendo assim, ela executou uma jogada que não resultou em colheita e deixou possibilidades para Zulu capturar, cometendo o erro de estratégia EE1 e o EE2.


Quadro 25: Protocolo de resolução, do 7º e 8º movimento, da partida entre Oluchi e Zulu.
Fonte: dados da pesquisa.

Assim como Oluchi, Zulu ao executar o 9º movimento também não percebeu que existia uma jogada em que ele poderia capturar sementes (mover as 3 sementes do recipiente $B_4$ para o $A_1$ ). Além de não capturar sementes, ele permitiu ainda, que Oluchi pudesse capturar sementes na jogada seguinte. Com esse movimento Zulu também cometeu o erro de estratégia EE1 e o EE2.

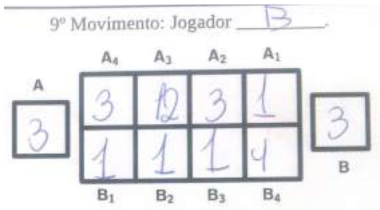


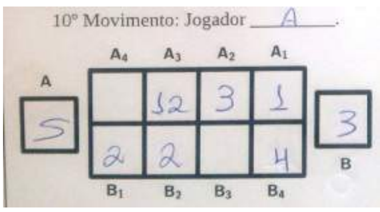

Figura 33: Protocolo de resolução do 9º movimento realizado por Zulu.
Fonte: dados da pesquisa.

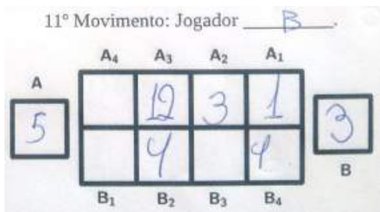
Para iniciar o 10º movimento, Oluchi precisava analisar 11 possibilidades para realizar a distribuição e também as consequências que cada jogada poderia influenciar no movimento de Zulu. Em três possibilidades havia oportunidades de capturas. Se iniciasse a jogada do recipiente $A_2$ distribuindo de um em um, capturaria 2 sementes, no entanto deixava chances para Zulu capturar no movimento seguinte. Se começasse do recipiente $A_4$ distribuindo de um em um, também capturaria 2 sementes mas não deixava oportunidades de capturas para Zulu. E se começasse do recipiente $A_3$, distribuindo de três em três, ela capturaria 3 sementes no recipiente $B_3$ mas também deixava chances para Zulu capturar.

Oluchi então, iniciou pelo recipiente $A_4$, capturou e não deixou chances para Zulu capturar.

Em seguida, Zulu executou o 11º movimento deixando novamente possibilidades para Oluchi capturar e cometendo mais uma vez o erro de estratégia EE2.

No entanto, Oluchi não percebeu que poderia iniciar sua movimentação pelo recipiente $A_3$, distribuindo de três em três e capturando 3 sementes no recipiente $B_3$, com isso ela cometeu o erro de estratégia EE1. Ela optou por mover a semente do recipiente $A_1$ para o $A_2$, não havendo capturas mas também não deixou possibilidades para Zulu capturar.




Quadro 26: Protocolo de resolução, do 10º e 11º movimento, da partida entre Oluchi e Zulu.
Fonte: dados da pesquisa.

Percebendo que Oluchi e Zulu estavam desperdiçando várias oportunidades de capturar sementes, então iniciamos um diálogo com eles.

> *Pesquisador: Oluchi, você teve algumas possibilidades de capturar sementes e não as realizou. Por que?*
> *Oluchi: Eu tava com dificuldade em anotar os movimentos aí não olhava direito as jogadas.*
> *Zulu: Eu também tive dificuldade em anotar as jogadas.*
> *Pesquisador: E como vocês estavam fazendo para anotar?*
> *Oluchi: Quando o Zulu jogava eu anotava e quando eu jogava ele anotava.*

Silko, Makida e Kojo terminaram suas partidas por volta do 24º movimento já Zulu e Oluchi, só conseguiram finalizar a partida no 52º movimento. Eles precisaram de todo o tempo do encontro na execução da partida entre eles, enquanto Silko, Kojo e Makida jogaram mais de uma partida.

Durante a partida observamos que Oluchi e Zulu também apresentaram dificuldades em realizar as divisões das sementes em partes iguais. “Sabemos que os alunos sentem dificuldade para resolver operações com Números Naturais, sobretudo no que diz respeito à operação de divisão” (CASTELA, 2005, p. 34).

Machado (2012) afirma que:

> Geralmente, quando a experimentação prevê mais de uma sessão, é aconselhável fazer-se uma análise *a posteriori* local após uma ou algumas sessões, confrontando com as análises *a priori* feitas, para eventuais correções da “rota prevista” (MACHADO, 2012, p. 245).

Destacamos aqui a importância em realizar uma análise *a posteriori* local das sessões pois podemos executar correções para os encontros seguintes. Tendo em vista tais dificuldades, identificadas na análise *a posteriori* local do encontro, elaboramos para o próximo encontro atividades que visam explorá-las.

### 4.3.6. Algumas considerações sobre o segundo encontro

Antes do início do encontro a coordenadora da escola nos procurou e disse que precisaria da sala que estava destinada à aplicação das atividades para a realização de um outro projeto. O motivo foi devido ao fato da sala possuir um aparelho de TV e de DVD e o outro projeto iria utilizar. Com isso, as atividades foram desenvolvidas na sala dos professores.

Neste encontro percebemos que os alunos Oluchi e Zulu apresentaram dificuldades no desenvolvimento da atividade, tendo em vista que conseguiram jogar somente uma partida do jogo Mankala *awalé*. Durante a partida, eles relataram dificuldades em ter que anotar os movimentos e ainda elaborar estratégias exitosas. Observamos que em várias situações eles deixaram de efetuar capturas pois não olhavam direito as jogadas.

Sabemos que “o *meio* é onde ocorrem as interações do sujeito” (FREITAS, 2012, p. 79) e neste encontro inferimos que o espaço físico (meio material[39]) pode ter influenciado na concentração dos alunos Oluchi e Zulu, pois em vários momentos entravam professores na sala.

Observamos que o aluno Kojo, nas duas partidas, conseguiu antecipar suas jogadas e com isso mobilizava estratégias de ataque e defesa exitosas sempre minimizando as perdas de sementes.

Já Silko, durante as duas partidas, mobilizou várias estratégias em que não capturava sementes e ainda deixava possibilidades para o adversário capturar.

A aluna Makida executou várias jogadas de defesa, evitando que o adversário capturasse suas sementes. Percebemos ainda, que ela contava o número de sementes que havia em cada recipiente e também quantas haveria após a movimentação e com isso conseguia antecipar as jogadas realizando jogadas exitosas.

Todos os alunos participaram do momento de validação apresentando suas estratégias e suas opiniões sobre elas. Questionamos os alunos em relação aos possíveis conhecimentos matemáticos que eles achavam que trabalharam durante o encontro e, surgiram como respostas: divisão, adição, contagem e cálculo mental.

No momento de discussão das estratégias mobilizadas pelos alunos enfatizamos que para a realização de boas jogadas no Mankala *awalé* adaptado, é importante ter uma boa capacidade de mapear as jogadas, tentando antecipá-las. Ou seja, quanto maior a capacidade de mapear as possibilidades de jogo, maior a chance de realizar boas jogadas. Esse momento nos forneceu meios para a realização da institucionalização do encontro.

## 4.4. Terceiro Encontro

No terceiro encontro aplicamos, inicialmente, a quarta atividade e, em seguida, a quinta. Essas atividades envolviam momentos de uma partida entre os jogadores **A** e **B** e,

39 Quando o professor prepara sua aula, organiza um meio – que inclui as regras que determinam o sucesso ou fracasso – chamado “meio material” (ainda que não haja objetos concretos). Ele deve considerar, também as interações de um sujeito simbólico com esse meio (BROUSSEAU, 2008, p. 57).

tinham como objetivos encontrar os divisores de determinados números naturais e também explorar movimentos de ataque e de defesa havendo ou não capturas.

### 4.4.1. Experimentação

Esse encontro aconteceu no dia 11 de maio de 2015, das 12h às 13h45min, e contou com a presença de apenas dois alunos, a saber: Kojo e Silko. Para este encontro foi apresentado a quarta e a quinta atividade que envolviam momentos de uma partida entre os jogadores **A** e **B**. Inicialmente, apresentamos a quarta atividade e logo após o término entregamos a quinta. Essas atividades exploravam noções de divisores de determinados números naturais e também estratégias mobilizadas nos movimentos de ataque e defesa. Ambas foram realizadas individualmente. Para a realização das atividades disponibilizamos os tabuleiros aos alunos para acompanharem visualmente os movimentos das jogadas em questão.

### 4.4.2. Análise *a priori* da quarta atividade

A quarta atividade apresentada aos alunos foi a seguinte:

*Analise a situação abaixo, de um momento de uma partida entre os jogadores **A** e **B**, e responda às questões a seguir:*

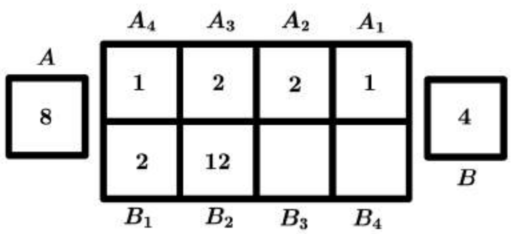



Figura 34: Momento específico de uma partida entre os jogadores **A** e **B**.
Fonte: elaborada pelo autor.

*a) Suponha que a próxima jogada seja do jogador **B**. Ele escolheu o recipiente $B_2$ para realizar a distribuição das sementes. De quantas maneiras distintas o jogador **B** pode realizar a distribuição. Quais são essas maneiras?*

*b) Se você fosse o jogador **B** qual das maneiras de distribuir as sementes você escolheria? Justifique.*

No **item a)** da quarta atividade, proposta no terceiro encontro, queríamos encontrar quantas e quais são as maneiras distintas para o jogador **B** realizar a distribuição iniciando do recipiente $B_2$, que continha 12 sementes. Na primeira parte, a resposta esperada era 6 maneiras distintas, tendo em vista, que o número natural 12 possui seis divisores. No segundo momento, esperávamos como resposta, a distribuição uma em uma, duas a duas, três a três, quatro a quatro, seis a seis e doze.

No entanto, temos várias possibilidades de combinações e as respostas poderiam ser as mais diversas possíveis. Os alunos poderiam pensar que existiam apenas uma, duas, três, quatro, cinco ou seis maneiras de distribuir as sementes. Para cada caso, a quantidade de possibilidades pode ser comprovados utilizando conceitos de análise combinatória. É esperado que os alunos encontrem dificuldades em identificar todas as possibilidades.

Para analisar os outros itens, iremos considerar os seis tipos diferentes de movimentações que o aluno poderia mobilizar para iniciar a distribuição, a saber: de um em um, dois em dois, três em três, quatro em quatro, seis em seis e doze.

- *Primeira estratégia:* $E_1$ *: Distribuir de um em um.*

Para responder o **item b)** da quarta atividade, proposta no terceiro encontro, o aluno poderia escolher o recipiente $B_2$, que contém 12 sementes, e realizar a distribuição de um em um, com isso o jogador **B** não capturaria sementes e deixava possibilidades para o jogador **A** capturar 2 sementes no movimento seguinte. Com esse movimento o jogador **B** cometeria o erro de estratégia EE2.

- *Segunda estratégia:* $E_2$ *: Distribuir de dois em dois.*

Para responder o **item b)** da quarta atividade, proposta no terceiro encontro, o aluno poderia escolher o recipiente $B_2$, que contém 12 sementes, e realizar a distribuição de dois em dois capturando 3 sementes. No entanto no próximo movimento o jogador **A** também teria a possibilidade de capturar 3 sementes.

- *Terceira estratégia:* $E_3$ *: Distribuir de três em três.*

Para responder o **item b)** da quarta atividade, proposta no terceiro encontro, o aluno poderia escolher o recipiente $B_2$, que contém 12 sementes, e realizar a distribuição de três em três, com isso o jogador **B** não capturaria sementes e deixava possibilidades para o jogador

**A** capturar 3 sementes no movimento seguinte. Com essa jogada o jogador **B** cometeria o erro de estratégia EE2.

- *Quarta estratégia:* $E_4$ *: Distribuir de quatro em quatro.*

Para responder o **item b)** da quarta atividade, proposta no terceiro encontro, o aluno poderia escolher o recipiente $B_2$ , que contém 12 sementes, e realizar a distribuição de quatro em quatro, com isso o jogador **B** não capturaria sementes e deixava possibilidades para o jogador **A** capturar 3 sementes no movimento seguinte. Com esse movimento o jogador **B** cometeria o erro de estratégia EE2.

- *Quinta Estratégia:* $E_5$ *: Distribuir de seis em seis.*

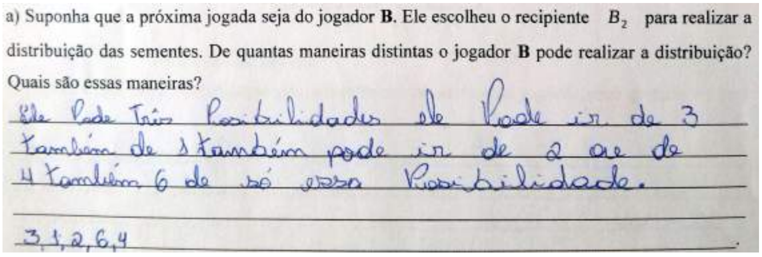
Para responder o **item b)** da quarta atividade, proposta no terceiro encontro, o aluno poderia escolher o recipiente $B_2$ , que contém 12 sementes, e realizar a distribuição de seis em seis, com isso o jogador **B** não capturaria sementes e deixava possibilidades para o jogador **A** capturar 3 sementes no movimento seguinte. Com esse movimento o jogador **B** cometeria o erro de estratégia EE2.

- *Sexta Estratégia:* $E_6$ *: Mover as as 12 sementes para o próximo recipiente.*

Para responder o **item b)** da quarta atividade, proposta no terceiro encontro, o aluno poderia escolher o recipiente $B_2$ , que contém 12 sementes, e movê-las para o recipiente $B_3$ , com isso o jogador **B** não capturaria sementes e deixava possibilidades para o jogador **A** capturar 3 sementes no movimento seguinte. Com esse movimento o jogador **B** cometeria o erro de estratégia EE2.

### 4.4.3. Análise *a posteriori* da quarta atividade

O aluno Kojo, no **item a)** da quarta atividade, escreveu que só existem três possibilidades para iniciar a distribuição das sementes, no entanto ele listou cinco, de um em um, de dois em dois, de três em três, de quatro em quatro e de seis em seis, não listando a possibilidade de apenas mover as 12 sementes para o recipiente seguinte. Percebemos, nas observações, que essa jogada praticamente não era utilizada pelos alunos.


a) Suponha que a próxima jogada seja do jogador **B**. Ele escolheu o recipiente $B_2$ para realizar a distribuição das sementes. De quantas maneiras distintas o jogador **B** pode realizar a distribuição? Quais são essas maneiras?

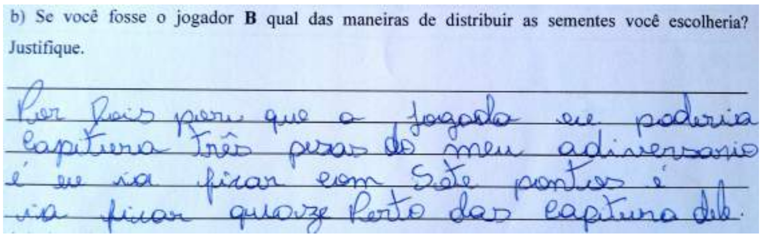
Ele Pode Três Possibilidades ele Pode ir de 3 também de 1 também pode ir de 2 ou de 4 também 6 de só essa Possibilidade.

3, 1, 2, 6, 4

Figura 35: Protocolo de resolução do item a) da quarta atividade do aluno Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

No **item b)**, Kojo mobilizou a estratégia $E_2$, distribuindo de dois em dois e capturando 3 sementes no recipiente $A_4$, totalizando 7 sementes em seu depósito ficando "*quaze perto das capitura dele*", conforme descrito no protocolo de resolução da figura 36.

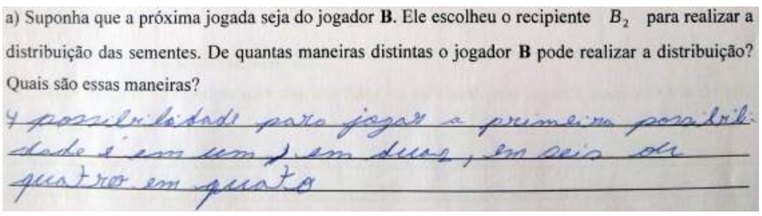
Essa estratégia mobilizada por Kojo, apesar de deixar chances do jogador **A** capturar sementes em seu próximo movimento, era a única movimentação em que ele teria oportunidade de capturar sementes, conforme previsto na análise *a priori* da atividade. Nas outras possibilidades ele não capturaria e ainda deixava opções de capturas para o jogador **A**.


b) Se você fosse o jogador **B** qual das maneiras de distribuir as sementes você escolheria? Justifique.

Por Pois para que a jogada eu poderia capitura Três pesas do meu adiversario é eu ia fixar com Sete pontos é ia fixar quaze Perto das captura dele.

Figura 36: Protocolo de resolução do item b) da quarta atividade do aluno Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

Silko, no **item a)**, disse que havia quatro possibilidades para efetuar a distribuição, sendo elas de um em um, de dois em dois, de quatro em quatro e de seis em seis. Não especificando a possibilidade de realizar a distribuição de três em três e nem a de, simplesmente, mover as 12 sementes para o recipiente seguinte.


a) Suponha que a próxima jogada seja do jogador **B**. Ele escolheu o recipiente $B_2$ para realizar a distribuição das sementes. De quantas maneiras distintas o jogador **B** pode realizar a distribuição? Quais são essas maneiras?

4 possibilidade para jogar a primeira possibilidade é em um, em duas, em seis ou quatro em quato

Figura 37: Protocolo de resolução do item a) da quarta atividade do aluno Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Kojo e Silko apresentaram dificuldades em representar todas as maneiras possíveis de distribuir as sementes do recipiente $B_2$ . No recipiente havia 12 sementes e cada forma de distribuí-las representava um divisor do número natural 12.

Um modo organizado de encontrar todos os divisores de um número é escrever o número como produto de dois fatores, começando pelo caso em que um dos fatores é 1. Veja, por exemplo, como obter todos os divisores de 12:

$12 = 1 \; x \; 12 \qquad 12 = 2 \; x \; 6 \qquad 12 = 3 \; x \; 4$

Com o fator 4, obtemos um produto que já foi mostrado: 12 = 4 *x* 3. Com o 5, não podemos obter produto 12, no conjunto dos números naturais.

Como já apareceram todos as possibilidades, concluímos que os divisores de 12 são: 1, 2, 3, 4, 6 e 12.

Apresentamos esse modo de encontrar todos os divisores no momento de validação e apresentação das estratégias dos alunos e na institucionalização do encontro.

Para responder o **item b)**, Silko mobilizou a estratégia $E_5$ com isso ele não capturou sementes e deixou duas possibilidades para o jogador **A** capturar 3 sementes no movimento seguinte, cometendo o erro de estratégia EE2. No entanto, Silko argumentou que utilizou essa estratégia, pois dependendo do movimento executado pelo jogador **A**, ele teria possibilidades de capturar no próximo movimento dele.

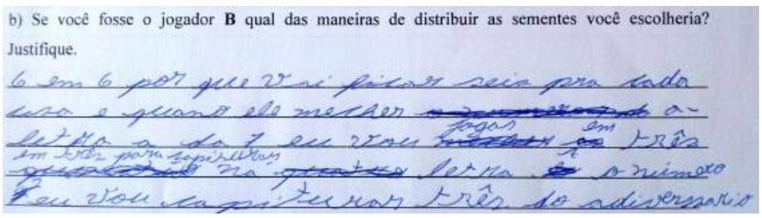

b) Se você fosse o jogador **B** qual das maneiras de distribuir as sementes você escolheria? Justifique.

Figura 38: Protocolo de resolução do item b) da quarta atividade do aluno Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Percebemos pelas justificativas apresentadas por Silko, que ele não analisava todas as possibilidades, pois não implementava jogadas que terminavam em capturas favoráveis e executava movimentos em que não capturava e ainda deixava chances para capturas do adversário. Kojo, também apresentou essa dificuldade classificada como erro de estratégia (EE2), tendo em vista que o aluno não capturava e deixava possibilidades para o adversário capturar.

4.4.4. Análise *a priori* da quinta atividade

A quinta atividade apresentada aos alunos foi a seguinte:

*Considere a situação inicial de uma partida entre os jogadores* ***A*** *e* ***B****, e responda às questões a seguir:*

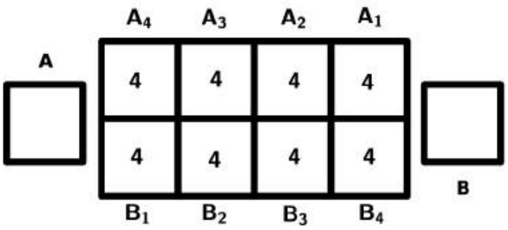


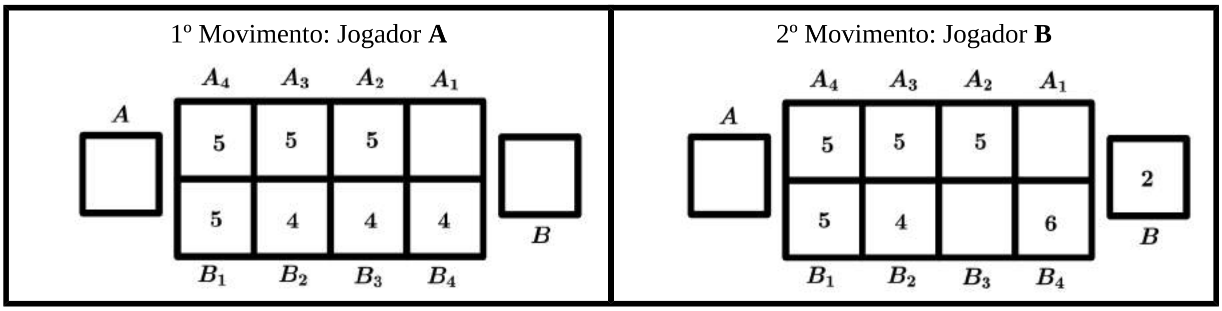

Figura 39: Situação inicial de uma partida entre os jogadores **A** e **B**.
Fonte: elaborada pelo autor.

*a) Qual a quantidade mínima de movimentos para que haja a primeira captura? Quantas sementes serão capturadas? Justifique.*
*b) Registre os movimentos até ocorrer a primeira captura.*
*c) Após ocorrer a primeira captura o próximo jogador também poderá capturar sementes? Justifique.*
*d) Considere a situação inicial de uma partida entre os jogadores* ***A*** *e* ***B****, escolha um dos jogadores* ***A*** *ou* ***B****. Qual o melhor recipiente para iniciar a partida? Justifique.*

No **item a)** da quinta atividade, proposta no terceiro encontro, queríamos encontrar a quantidade mínima de movimentos para que acontecesse a primeira captura e quantas sementes seriam capturadas. Na primeira parte, a resposta esperada era 2 movimentos, mas consideraremos outras possibilidades, pois a partir do segundo movimento, em toda jogada poderia existir chances de capturas. Já na segunda parte, a quantidade mínima de sementes que seriam capturadas está relacionada com a quantidade de movimentos realizados. No segundo movimento há possibilidades de capturar 2 sementes, no terceiro também há chances de capturar 2.

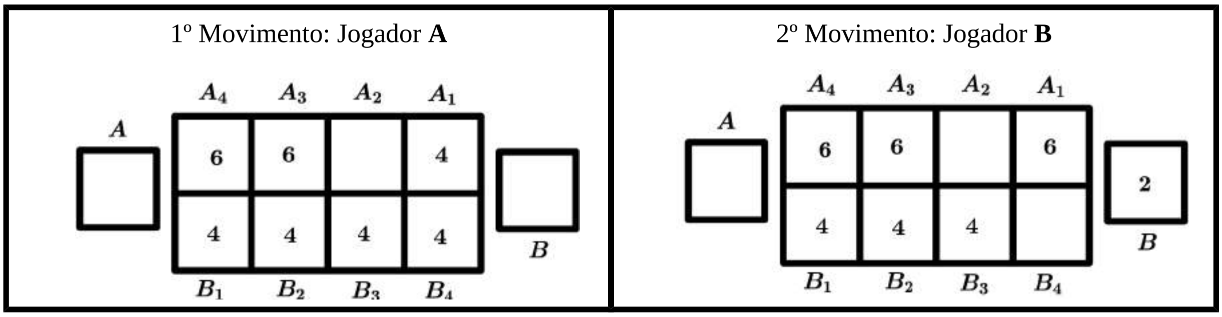
Para o **item b)** iremos representar três possibilidades de capturas, sendo duas no segundo movimento e uma no terceiro movimento.

Suponhamos que o primeiro movimento seja do jogador **A**, na primeira possibilidade de captura, se ele iniciar a movimentação do recipiente $A_1$, distribuir de um em um, de dois em dois ou simplesmente, mover as 4 sementes para o recipiente seguinte, no segundo movimento o jogador **B**, poderia começar do recipiente $B_3$ distribuir de dois em dois e capturar 2 sementes no recipiente $A_1$. O quadro abaixo representa essa possibilidade, com a distribuição uma a uma, no primeiro movimento, realizado pelo jogador **A**.



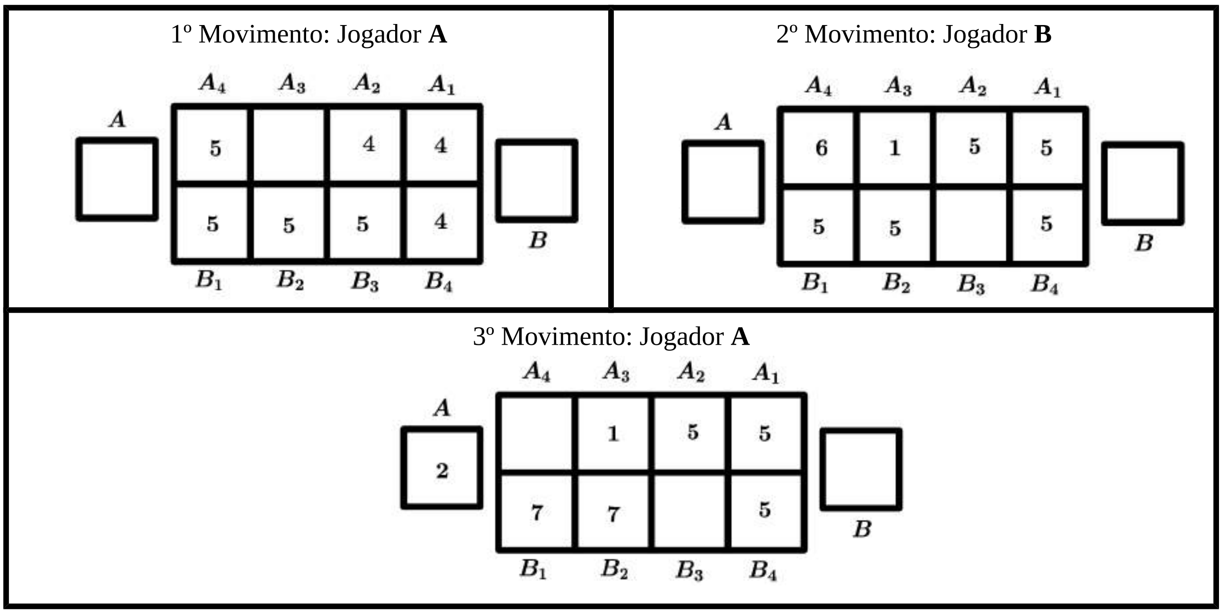
Quadro 27: Primeira possibilidade de captura no segundo movimento.
Fonte: elaborado pelo autor.

Na segunda possibilidade de captura, suponhamos que o primeiro movimento também seja do jogador **A**, e se ele iniciar a movimentação do recipiente $A_2$, distribuir de um em um, de dois em dois ou simplesmente, mover as 4 sementes para o recipiente seguinte, no segundo movimento o jogador **B**, poderia começar do recipiente $B_4$ distribuir de dois em dois e capturar 2 sementes no recipiente $A_2$. O quadro abaixo representa essa possibilidade, com a distribuição dois a dois, no primeiro movimento, realizado pelo jogador **A**.



Quadro 28: Segunda possibilidade de captura no segundo movimento.
Fonte: elaborado pelo autor.

E na terceira possibilidade de captura, suponhamos que o primeiro movimento ainda seja do jogador **A**, se ele iniciar a movimentação do recipiente $A_3$ , distribuir de um em um, no segundo movimento o jogador **B**, começaria do recipiente $B_3$ também distribuindo de um em um, então no terceiro movimento o jogador **A** teria a chance de capturar 2 sementes no recipiente $B_3$ , se iniciasse do recipiente $A_4$ movendo de dois em dois. O quadro abaixo representa essa possibilidade.



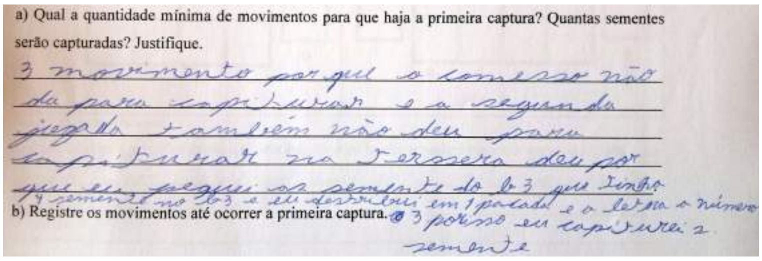

Quadro 29: Possibilidade de captura no terceiro movimento.
Fonte: elaborado pelo autor.

No **item c)**, se a primeira captura ocorrer no segundo movimento, então o próximo jogador não poderá capturar sementes. Se a primeira captura for depois do segundo movimento precisaríamos analisar cada caso, no entanto o que nos interessa nesse momento e que a primeira captura ocorra com a quantidade mínima de movimentos.

Já no **item d)**, se o jogador **A** for iniciar a partida, o melhor recipiente para ele começar a jogada seria o $A_3$ ou o $A_4$ e para o jogador **B** seria o $B_3$ ou $B_4$ , pois assim o próximo jogador não teria a possibilidade de capturar sementes no movimento seguinte.

### 4.4.5. Análise *a posteriori* da quinta atividade

A quinta atividade, no **item a)**, envolveu jogadas relacionadas com a quantidade mínima de movimentos necessários para que ocorresse a primeira captura. Silko descreveu que eram necessários três movimentos e que com a jogada capturaria 2 sementes. Previmos essa resposta na análise *a priori* da atividade, tendo em vista que a partir do segundo movimento há possibilidades de capturas.


a) Qual a quantidade mínima de movimentos para que haja a primeira captura? Quantas sementes serão capturadas? Justifique.

3 movimento porque o comesso não da para capiturar e a segunda jogada também não deu para capiturar na terseira deu porque eu peguei as semente do b3 que tinha 4 semente no b3 e eu destribui em 1 parada e a letra e número é 3 porisso eu capiturei 2 semente

b) Registre os movimentos até ocorrer a primeira captura.

Figura 40: Protocolo de resolução do item a) da quinta atividade do aluno Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Ao confrontarmos a descrição realizada por Silko no **item a)** com a representação da jogada efetuada por ele, no **item b)**, notamos uma movimentação equivocada executada por ele. Pelo registro de Silko, percebemos que o primeiro movimento foi realizado pelo jogador **A**, o segundo pelo **B** e no terceiro movimento, em que ele citou a jogada que haveria capturas de sementes, também foi realizado pelo jogador **B**. No entanto, o terceiro movimento deveria ser implementado pelo jogador **A**. Com isso, Silko cometeu o erro de regra ER1.

Para que houvesse a captura a partir das jogadas representadas por Silko, no terceiro movimento, o jogador **A** deveria iniciar pelo recipiente $A_2$ , que continha 6 sementes, e distribuir de um em um, capturando, com isso, 2 sementes no recipiente $B_4$ .

Percebemos que Silko, observou a possibilidade de captura do jogador **B**, no entanto não percebeu que estaria efetuando dois movimentos seguidos com o mesmo jogador. E execução de dois movimentos seguidos com o mesmo jogador só é permitida se, o jogador implementar um movimento em que haja capturas e deixando o outro jogador sem sementes. Nesse caso, o mesmo jogador realiza outra jogada em que haja possibilidades de fornecer sementes ao adversário.

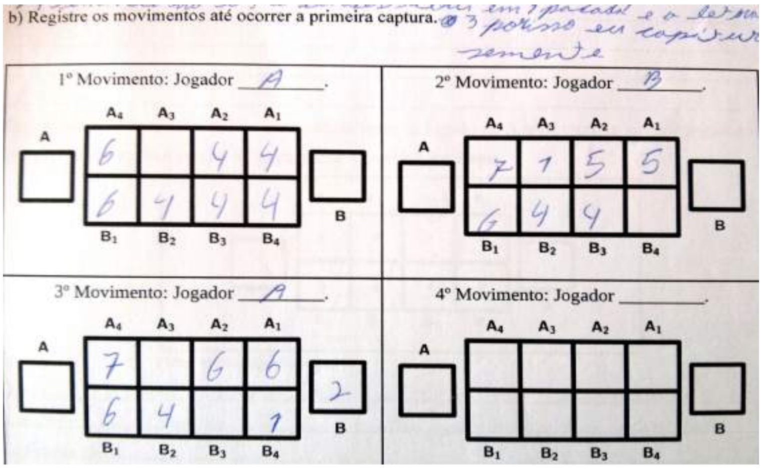



Figura 41: Protocolo de resolução do item b) da quinta atividade do aluno Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

No **item d)**, Silko escolheu iniciar a partida pelo recipiente $A_2$ e com isso no próximo movimento o jogador **B**, poderia capturar 2 sementes. No segundo encontro, ele também começou uma partida pelo recipiente $A_2$ e seu adversário a partir do segundo movimento foi realizando capturas, não deixando oportunidades para ele capturar. No diálogo realizado entre Silko e o pesquisador durante o segundo encontro, ele atribuiu sua derrota e as poucas chances de capturas à escolha do recipiente $A_2$ para iniciar a partida. No entanto, Silko escolheu, novamente, o mesmo recipiente para iniciar a partida.

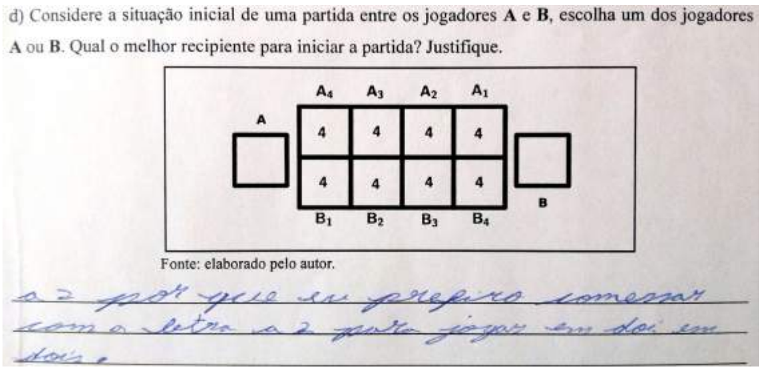
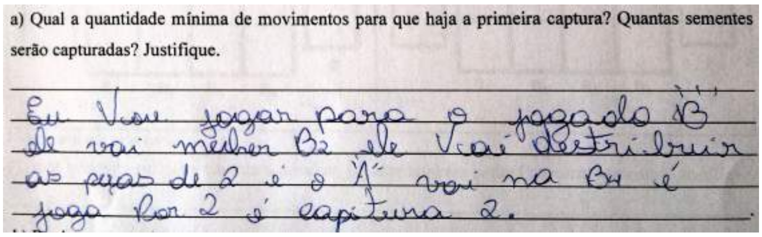



Figura 42: Protocolo de resolução do item d) da quinta atividade do aluno Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Kojo, no **item a)**, implementou a segunda possibilidade de captura prevista na análise *a priori*, iniciando o primeiro movimento do jogador **B** no recipiente $B_2$, distribuindo de dois em dois, com isso no segundo movimento o jogador **A**, começou do recipiente $A_4$ distribuindo de dois em dois e capturou 2 sementes no recipiente $B_2$.


a) Qual a quantidade mínima de movimentos para que haja a primeira captura? Quantas sementes serão capturadas? Justifique.

Eu vou jogar para o jogado B ele vai mexer B2 ele vai destribuir as peças de 2 e o A vai na B4 e joga por 2 e captura 2.

Figura 43: Protocolo de resolução do item a) da quinta atividade do aluno Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

Pelo protocolo de resolução do **item a)** percebemos que Kojo, no segundo movimento realizado pelo jogador **A**, descreveu que a distribuição seria iniciada no recipiente $B_4$, de dois em dois, capturando 2 sementes. No entanto, esse movimento seria iniciado no recipiente $A_4$ porém, pela representação da jogada, no **item b)**, observamos que ele representou corretamente o segundo movimento.

Kojo havia percebido a possibilidade de capturas no segundo movimento na pré-experimentação, onde foi realizada várias partidas entre os alunos.

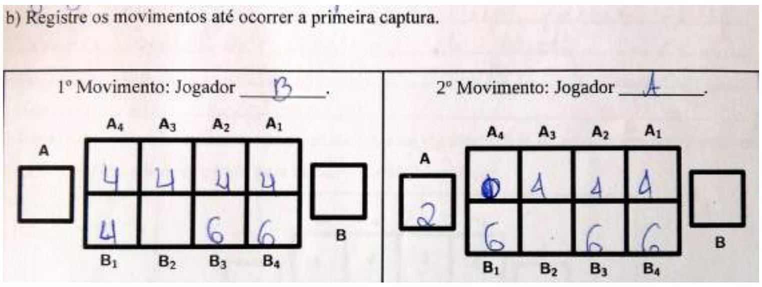
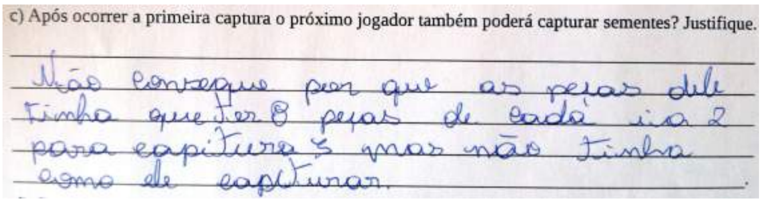



Figura 44: Protocolo de resolução do item b) da quinta atividade do aluno Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

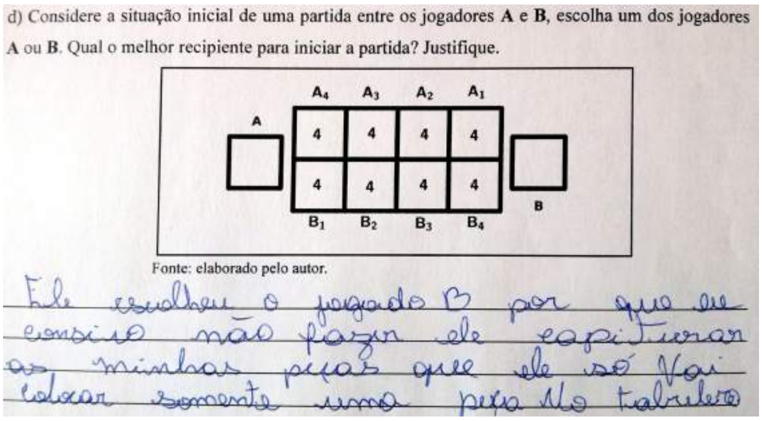
No **item c)**, Kojo justificou que não teria como o jogador **B** efetuar capturas no terceiro movimento e que para isso ocorrer deveria ter 8 sementes no recipiente $B_4$. Salientamos aqui que Kojo realmente compreendeu os objetivos do jogo, implementado nas jogadas estratégias exitosas e ainda conseguindo antecipá-las prevendo os melhores movimentos a serem realizados. Todo esse êxito só pode ser alcançado se o jogador realizar simulações das jogadas, trabalhar com cálculo mental, dentre outras. Kojo vivenciou situações *adidáticas* de *ação* e de *formulação* (BROUSSEAU, 1996, 2008) e percebemos, nelas, a mobilização de conhecimentos envolvendo cálculo mental e análise de possibilidades.


c) Após ocorrer a primeira captura o próximo jogador também poderá capturar sementes? Justifique.

Não consegue por que as peças dele tinha que ter 8 peças de cada ia 2 para capitura s mas não tinha como ele capturar.

Figura 45: Protocolo de resolução do item c) da quinta atividade do aluno Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

No **item d)**, Kojo justificou que conseguiria realizar um movimento em que, na próxima jogada não teria como o jogador capturar. No entanto, ele escolheu o jogador **B** para iniciar a partida e não especificou qual seria a jogada.


d) Considere a situação inicial de uma partida entre os jogadores **A** e **B**, escolha um dos jogadores **A** ou **B**. Qual o melhor recipiente para iniciar a partida? Justifique.



Fonte: elaborado pelo autor.

Ele escolheu o jogado B por que eu consiso não fazer ele capiturar as minhas peças que ele só Vai colocar somente uma peça No tabuleiro

Figura 46: Protocolo de resolução do item d) da quinta atividade do aluno Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

Neste momento, iniciamos um diálogo com Kojo:

> *Pesquisador: Percebemos que você escolheu o jogador B, mas qual jogada você faria?*
> *Kojo: Eu comecei de* $B_4$ *, de dois em dois, aí o adversário só consegue deixar uma semente se ele for de um em um.*
> *Pesquisador: Existe mais possibilidades?*
> *Kojo: Eu também posso começar no* $B_3$ *.*
> *Pesquisador: E você prefere começar a partida ou deixar que o adversário comece?*
> *Kojo: Prefiro deixar ele começar.*
> *Pesquisador: Por qual motivo?*
> *Kojo: É que às vezes eles não percebem isso e começa aqui (**apontando para o recipiente*** $A_2$ *, grifo nosso) ou aqui (**apontando para o recipiente*** $A_1$ *, grifo nosso) ai eu vou e capturo 2 sementes.*
> *Pesquisador: Muito bem Kojo. É uma ótima estratégia.*

### 4.4.6. Algumas considerações sobre o terceiro encontro

Os alunos Zulu, Oluchi, Makida e Chinara não participaram do encontro. Zulu e Chinara não foram a escola nesse dia, sendo que as alunas Oluchi e Makida, a pedido da coordenadora, foram participar de um ensaio de uma dança que elas iriam apresentar na escola.

Em relação as atividades propostas os alunos mobilizaram diversas estratégias, algumas previstas na análise *a priori*. O aluno Kojo demonstrou aprofundamento nas regras do jogo *awalé*, mobilizando diversas estratégias de ataque e defesa com êxito, apresentou ainda capacidade de prever jogadas. Percebemos também, melhoras nas justificativas das estratégias mobilizadas.

O aluno Silko teve dificuldades em analisar todas as possibilidades de uma determinada situação e com isso não elaborava estratégias exitosas. Ele não efetuava jogadas que terminavam em capturas favoráveis e executava movimentos em que não capturava e ainda deixava chances para capturas do adversário.

Por fim, no momento de validação e apresentação das estratégias, Kojo e Silko discutiram suas estratégias apresentaram suas opiniões sobre elas. No **item a)**, da quinta atividade, Kojo mostrou para Silko que poderia haver capturas no segundo movimento, dependendo da escolha inicial do jogador. Explicou ainda, que os melhores recipientes para iniciar a partida são o terceiro ou o quarto. Nesse momento, Silko demonstrou ter compreendido as estratégias apresentadas por Kojo.

Em seguida questionamos os alunos em relação aos possíveis conhecimentos matemáticos que eles achavam que trabalharam durante o encontro e, surgiram como respostas: divisão, adição, contagem e cálculo mental.

Nesse encontro enfatizamos sobre possibilidades de explorar distribuição em partes iguais a partir das quantias existentes nos recipientes e reconhecer os divisores de determinados números naturais. Em cada jogada, o aluno identifica os divisores do número que representa a quantidade de sementes nos recipientes, para determinar quantas jogadas possui e quais jogadas são favoráveis naquele momento. Esse momento de discussão das estratégias proporcionado pelos alunos nos forneceu meios para a realização da institucionalização do encontro.

## 4.5. Quarto Encontro

No quarto encontro aplicamos, inicialmente, a sexta atividade e, em seguida, a sétima. Essas atividades envolviam momentos de uma partida entre os jogadores **A** e **B** e, tinham como objetivo explorar movimentos de ataque e de defesa havendo ou não capturas.

### 4.5.1. Experimentação

Esse encontro aconteceu no dia 15 de maio de 2015, das 12h às 13h45min, e contou com a presença de 4 alunos, a saber: Zulu, Oluchi, Kojo e Silko. Para este encontro foi apresentado atividades que envolviam momentos de uma partida entre os jogadores **A** e **B**. Inicialmente, apresentamos a sexta atividade e logo após o término entregamos a sétima. Ambas foram realizadas individualmente. Para a realização das atividades disponibilizamos os tabuleiros aos alunos para poderem acompanhar visualmente os movimentos das jogadas em questão.

### 4.5.2. Análise *a priori* da sexta atividade

A sexta atividade proposta no quarto encontro era a seguinte:

*Represente no tabuleiro a seguinte situação de uma partida entre os jogadores **A** e **B**, e responda a questão a seguir:*

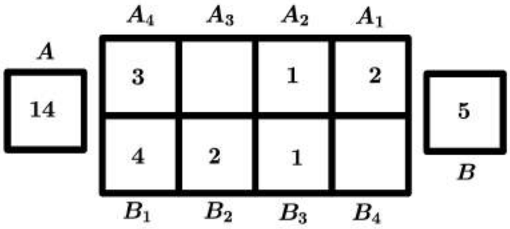



Figura 47: Momento específico de uma partida entre os jogadores A e B.
Fonte: elaborada pelo autor.

*Suponha que a próxima jogada seja feita pelo jogador **B**. Em qual recipiente você mexeria? De que maneira você distribuiria as sementes? Justifique.*

Para responder a questão os alunos precisam analisar seis possibilidades de movimentação. Para efetuar uma jogada é importante que eles realizem o mapeamento de cada uma e elaborem suas estratégias. A seguir, descrevemos as seis possibilidades.

- $E_1$

O aluno pode escolher o recipiente $B_3$, que continha 1 semente, e movê-la para o recipiente $B_4$, com isso ele não captura sementes e não deixa possibilidades para o jogador **A** capturar no seu próximo movimento.

- $E_2$

O aluno pode escolher o recipiente $B_2$, que continha 2 sementes, e movê-las para o recipiente $B_3$, evitando, com isso, que o jogador **A**, no seu próximo movimento, capture sementes e vença a partida.

- $E_3$

O aluno poderia escolher o recipiente $B_2$, que continha 2 sementes, e distribuir de um em um, com isso, deixaria possibilidades para o jogador **A** capturar sementes e vencer a partida.

- $E_4$

O aluno poderia escolher o recipiente $B_1$, que continha 4 sementes, e distribuir de um em um, com isso, capturaria 3 sementes no recipiente $A_1$, no entanto deixaria possibilidades para o jogador **A** capturar sementes e vencer a partida.

- $E_5$

O aluno poderia escolher o recipiente $B_1$, que continha 4 sementes, e distribuir de dois em dois, com isso, ele deixaria chances para o jogador **A** capturar sementes e vencer a partida.

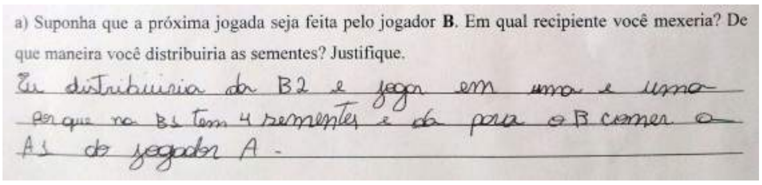
- $E_6$

O aluno poderia escolher o recipiente $B_1$, que continha 4 sementes, e simplesmente movê-las para o recipiente $B_2$, com isso, ele deixaria chances para o jogador **A** capturar sementes e vencer a partida.

4.5.3. Análise *a posteriori* da sexta atividade

A sexta atividade envolvia uma situação de uma partida entre os jogadores **A** e **B**. Cada aluno representou a situação em seu tabuleiro e depois começaram a analisar as questões propostas. O movimento seria realizado pelo jogador **B** e ele poderia perder a partida dependendo da jogada escolhida para iniciar a movimentação.

A aluna Oluchi mobilizou a estratégia $E_3$ ao escolher o recipiente $B_2$, que continha 2 sementes, e distribuir de um em um. Com essa jogada, ela cometeu dois erros de estratégia: o erro EE2, pois não capturou sementes e ainda deixou possibilidades para o jogador **A** capturar e vencer a partida; e o erro EE1, ao não jogar do recipiente que permitia a captura de sementes.


a) Suponha que a próxima jogada seja feita pelo jogador **B**. Em qual recipiente você mexeria? De que maneira você distribuiria as sementes? Justifique.

Eu distribuiria do B2 e jogar em uma e uma
por que no B1 tem 4 sementes e da para o B comer o
A1 do jogador A.

Figura 48: Protocolo de resolução do item a) da sexta atividade da aluna Oluchi.
Fonte: dados da pesquisa.

No entanto, Oluchi ao dizer "*por que no* $B_1$ *tem 4 sementes e da para o B comer a* $A_1$ *do jogador A*" como justificativa para a escolha do recipiente $B_2$ chamou nossa atenção e devido a isto iniciamos um diálogo com ela.

> *Pesquisador: Percebemos que você iniciou a movimentação pelo recipiente* $B_2$*, no entanto usou como justificativa uma outra jogada iniciando do* $B_1$*. Qual foi o motivo?*
> *Oluchi: É que no* $B_1$*, dava pra capturar só que o* $A_4$ *também poderia capturar...ai eu pensei no* $B_1$ *como uma jogada futura quando o* $A_4$ *não pudesse capturar.*
> *Pesquisador: Mas pela sua jogada o jogador* ***A*** *pode capturar e ganhar a partida. Você percebeu?*
> *Oluchi: Claro que percebi.*
> *Pesquisador: Então por que você justificou pensando em jogadas futuras?*
> *Oluchi: Por que se ele não percebesse eu poderia capturar.*

Percebemos pelo diálogo, que Oluchi estava mobilizando em suas estratégias antecipações das jogadas para depois efetivar seus movimentos. No entanto, pela última fala, inferimos que ela estava usando o fator sorte na escolha.

Zulu e Kojo mobilizaram a estratégia $E_4$ ao escolherem o recipiente $B_1$, que continha 4 sementes, distribuíram de um em um e, com isso, capturaram 3 sementes no recipiente $A_1$. Com a mobilização dessa estratégia eles capturaram sementes, mas deixaram possibilidade para o adversário também capturar na jogada seguinte e assim vencer a partida.

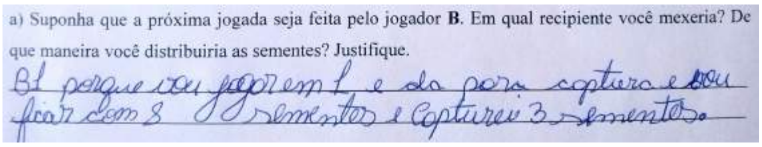

a) Suponha que a próxima jogada seja feita pelo jogador **B**. Em qual recipiente você mexeria? De que maneira você distribuiria as sementes? Justifique.
B1 porque vou jogar em 1 e da para captura e vou ficar com 8 sementes e Capturei 3 sementes.

Figura 49: Protocolo de resolução do item a) da sexta atividade do aluno Zulu.
Fonte: dados da pesquisa.

O aluno Silko mobilizou a estratégia $E_2$ e escolheu o recipiente $B_2$, que continha 2 sementes, e moveu-as para o recipiente $B_3$, evitando, com isso, que o jogador **A**, no seu próximo movimento, capturasse sementes e vencesse a partida.

Essa jogada efetuada por Silko, foi uma excelente estratégia de defesa pois apesar do jogador **A** ter capturado 9 sementes a mais que o jogador **B**, ele não permitiu a vitória do jogador **A** no próximo movimento.

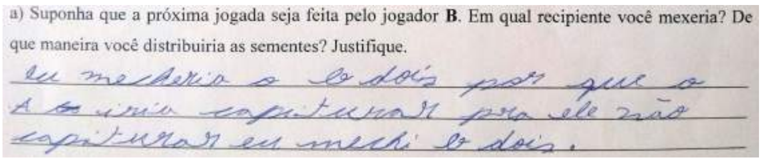

a) Suponha que a próxima jogada seja feita pelo jogador **B**. Em qual recipiente você mexeria? De que maneira você distribuiria as sementes? Justifique.
eu mecheria o b dois por que o A ~~a~~ iria capiturar pra ele não capiturar eu mechi b dois.

Figura 50: Protocolo de resolução do item a) da sexta atividade do aluno Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

## 4.5.4. Análise *a priori* da sétima atividade

A sétima atividade proposta aos alunos no quarto encontro foi:

*Elabore uma situação de uma partida entre os jogadores* ***A*** *e* ***B*** *para o caso a seguir:*

- *Próximo movimento será do jogador* ***A*** *e nessa jogada ele irá capturar 3 sementes. Justifique.*

Essa questão possui diversas configurações que resulta em uma captura de 3 sementes. Esperamos que os alunos analisem algumas possibilidades e representem a que eles acharem mais vantajosa. Devido a existência de várias maneiras para os alunos elaborarem a situação solicitada não iremos realizar a análise *a priori* da atividade. Como exemplo, uma possível situação é a seguinte:

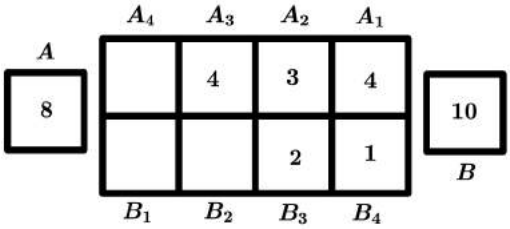



Figura 51: Exemplo de uma captura de 3 sementes realizada pelo jogador **A**.
Fonte: elaborada pelo autor.

Nessa situação o jogador **A**, poderia escolher o recipiente $A_3$, distribuir de um em um e capturar 3 sementes no recipiente $B_3$. Com essa jogada ele passaria a ter 11 sementes no seu depósito e ainda não deixaria a possibilidade do jogador **B** capturar sementes no movimento seguinte. Para elaborar uma situação como essa, o aluno precisa mobilizar cálculo mental, análise de possibilidades e simulações mentais, mapeamento das jogadas e noção de divisão em partes iguais.

4.5.5. Análise *a posteriori* da sétima atividade

Os alunos vivenciaram durante a pré-experimentação diferentes partidas com as adaptações do jogo Mankala *awalé* onde puderam mobilizar estratégias de ataque e defesa com ou sem capturas de sementes. No decorrer dos encontros foram apresentadas, até o momento, seis atividades envolvendo situações de determinadas partidas entre os jogadores **A** e **B**. Em cada atividade, propusemos questionamentos que levaram o aluno a refletir sobre as estratégias que eles poderiam mobilizar. No momento das reflexões os alunos estavam mobilizando conhecimentos matemáticos como: contagens e simulações nas tentativas de encontrar a configuração solicitada; cálculo mental, elaboração de estratégias e conjecturas, envolvendo conteúdo divisão de um número natural.

Na sétima atividade resolvemos deixar a cargo dos alunos a elaboração de uma situação de uma partida entre os jogadores **A** e **B**. Os alunos deveriam elaborar um situação em que o próximo movimento seria do jogador **A** e nessa jogada ele iria capturar 3 sementes.

Para a realização da atividade os alunos simularam partidas entre os jogadores **A** e **B**, nos tabuleiros disponibilizados para eles, até encontrarem as situações solicitadas e em seguida representaram no protocolo de resolução.

A justificativa da representação da situação da aluna Oluchi evidencia que ela estava simulando uma partida, pois ela começou explicando uma jogada isolada que inferimos ser o movimento que gerou essa possibilidade de captura.

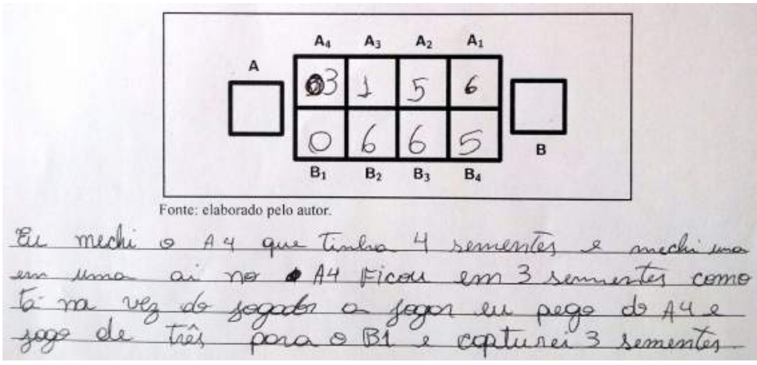



Figura 52: Protocolo de resolução da sétima atividade da aluna Oluchi.
Fonte: dados da pesquisa.

Para esclarecer tal justificativa iniciamos um diálogo com Oluchi:

> *Pesquisador: Oluchi, o que você quis dizer com a frase “eu mexi o* $A_4$ *que tinha 4 sementes [...]”?*
> *Oluchi: É que eu ia descrever os movimentos até o jogador A capturar 3 sementes.*
> *Pesquisador: E por que não descreveu?*
> *Oluchi: Pensei que fosse demorar muito.*
> *Pesquisador: Esse movimento foi o que gerou a possibilidade de captura?*
> *Oluchi: Qual movimento professor?*
> *Pesquisador: Esse que você descreveu no início.*
> *Oluchi: Foi não, esse foi o primeiro movimento.*
> *Pesquisador: Hum.*

Pela justificativa e pelo diálogo com ela, percebemos que ela vivenciou uma situação *adidática* de *ação*, pois ela estava ativamente empenhada na busca da solução do problema, realizando ações mais imediatas (FREITAS, 2012, p. 95).

Essa estratégia mobilizada por Oluchi permitiu que ela capturasse 3 sementes e além de deixar o jogador adversário sem possibilidades de capturas em seu próximo movimento, ela ainda pode capturar mais sementes no próximo movimento dela, dependendo da jogada executada pelo jogador adversário.

Zulu simula uma jogada em que todas as sementes estão dispostas nos recipientes, ou seja, ainda não houve nenhuma captura. A situação representada por ele pode ser considerada uma excelente jogada pois ele efetuou a captura de 3 sementes e ainda não permitiu que o adversário capture sementes no próximo movimento.

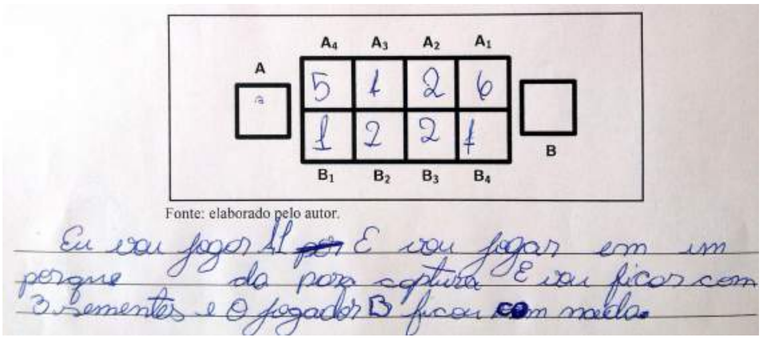



Figura 53: Protocolo de resolução da sétima atividade do aluno Zulu.
Fonte: dados da pesquisa.

O aluno Kojo elaborava excelentes estratégias de ataque e defesa, porém apresentava dificuldades em descrevê-las. Ele descreveu uma justificativa confusa, conforme protocolo de resolução abaixo.

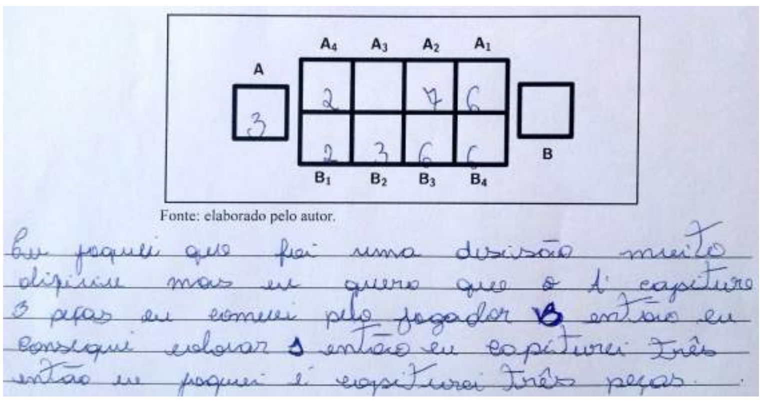



Figura 54: Protocolo de resolução da sétima atividade do aluno Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

Neste caso, tivemos que conversar com Kojo para entendermos a justificativa apresentada por ele:

*Pesquisador: Analisando sua representação percebemos que há 35 sementes. O que aconteceu?*
*Kojo: Eu capturei 3 sementes no* $B_2$ *aí deixei elas na casa pra indicar onde capturei.*
*Pesquisador: Como você realizou a jogada?*
*Kojo: No* $B_2$ *tinha uma semente e no* $A_3$ *tinha 6. Eu distribuí de dois em dois e capturei 3.*
*Pesquisador: E como você chegou nessa configuração do tabuleiro?*
*Kojo: Eu fui jogando sozinho mexendo com o jogador B primeiro e depois com o A.*
*Pesquisador: Hum.*

Pelo diálogo percebemos qual foi a estratégia mobilizada por Kojo, fato que não era perceptível pela justificativa. Essa estratégia executada por ele deixou a possibilidade do jogador adversário capturar 2 sementes no movimento seguinte se ele iniciar do recipiente $B_4$ e distribuir de um em um.

Silko apresentou uma configuração diferente de todas anteriores devido ao fato de conter sementes no depósito do jogador **B**, evidenciando que o jogador **B** já havia capturado sementes. Nesta representação de Silko, o jogador **A** tinha duas possibilidades para capturar 3 sementes. A primeira era começar do recipiente $A_4$, que continha 12 sementes, e distribuir de três em três, capturando 3 sementes no recipiente $B_4$. A segunda, que foi executada por ele, era iniciar do recipiente $A_3$, que continha 3 sementes, distribuir de um em um, capturando 3 sementes no recipiente $B_3$.

Analisando o próximo movimento, que seria efetivado pelo jogador **B**, percebemos que em ambas as possibilidades, Silko deixou oportunidades para o adversário capturar.


Figura 55: Protocolo de resolução da sétima atividade do aluno Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

### 4.5.6. Algumas considerações sobre o quarto encontro

Os alunos Zulu, Oluchi, Kojo e Silko participaram do encontro. Já as alunas Makida e Chinara não estavam presentes. Chinara só compareceu ao primeiro encontro, devido a isso procuramos a coordenadora da escola para informar a situação da aluna à coordenação quanto a ausência. A coordenadora disse que havia realizado uma reunião com os pais da aluna Chinara a fim de esclarecer as ausências dela, pois nos dias informados ela também não compareceu as aulas na escola..

O aluno Kojo, participou de todos os encontros e percebemos que ele conseguia mapear as jogadas, antecipando-as com êxitos. Também apresentou facilidade em realizar as divisões das sementes em partes iguais. No entanto, apresentou dificuldade para justificar suas estratégias. Em alguns casos tivemos que dialogar com ele pois as estratégias mobilizadas não estavam perceptíveis pelas justificativas.

Zulu, na sexta atividade, realizou um movimento e cometeu o erro de regra ER3, ou seja, não distribuiu as sementes em partes iguais. Na sétima atividade ele realiza uma excelente jogada pois ele efetuou a captura de 3 sementes e ainda não permitiu que o adversário capture sementes no próximo movimento.

Oluchi mobilizou em suas estratégias antecipações das jogadas e também percebemos que ela mapeava as situações e depois escolhia o movimento que lhe era favorável. Na sétima atividade ela, na busca de soluções para a atividade, vivenciou uma situação *adidática* de *ação*.

Silko mobilizou excelentes estratégias de defesa não deixando oportunidades para o jogador adversário capturar sementes em seu próximo movimento.

Por fim, no momento de validação e apresentação das estratégias, os alunos discutiram suas estratégias e apresentaram suas opiniões sobre elas. Em seguida os questionamos em relação aos possíveis conhecimentos matemáticos que eles achavam que trabalharam durante o encontro e, surgiram como respostas: divisão, adição, contagem e cálculo mental.

Aproveitamos o momento de validação e enfatizamos a importância de antecipar as jogadas mapeando as possíveis situações para depois escolher a mais exitosa. Destacamos ainda, as excelentes estratégias de defesa mobilizadas por Silko. Esse momento de discussão das estratégias proporcionado pelos alunos nos forneceu meios para a realização da institucionalização do encontro.

## 4.6. Quinto Encontro

No dia 18 de maio de 2015, das 12h às 13h45min, realizamos um encontro cujo objetivo foi apresentar a regra que envolvia as capturas múltiplas. Eles jogaram algumas partidas podendo realizar capturas múltiplas. Participaram do encontro todos os alunos sujeitos da pesquisa: Chinara, Oluchi, Makida, Silko, Zulu e Kojo. Durante as partidas acompanhamos cada aluno e percebemos que eles demonstraram ter compreendido a nova regra. Nesse encontro não propusemos nenhuma atividade para análise.

O quinto encontro, realizado no dia 22 de maio de 2015, foi composto por duas atividades que envolviam momentos de uma partida entre os jogadores **A** e **B**.

### 4.6.1. Experimentação

Esse encontro aconteceu no dia 22 de maio de 2015, das 12h às 13h45min, e contou com a presença de 4 alunos, a saber: Chinara, Oluchi, Silko e Kojo. Para este encontro foram apresentadas a oitava e a nona atividade que envolviam momentos de uma partida entre os jogadores **A** e **B**. Inicialmente, apresentamos a oitava atividade e logo após o término entregamos a nona. Ambas foram realizadas individualmente. Para a realização das duas atividades disponibilizamos os tabuleiros aos alunos para poderem acompanhar visualmente os movimentos das jogadas em questão.

### 4.6.2. Análise *a priori* da oitava atividade

A oitava atividade proposta no quinto encontro era a seguinte:

*Analise a seguinte situação de uma partida entre os jogadores **A** e **B**, e responda a questão a seguir:*

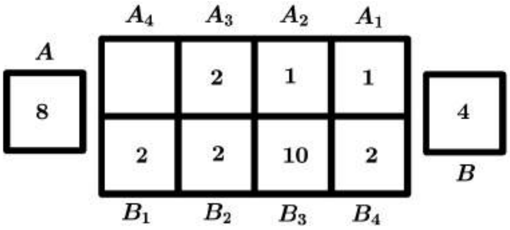



Figura 56: Situação de uma jogada entre os jogadores **A** e **B**.
Fonte: elaborada pelo autor.

*Suponha que a próxima jogada seja feita pelo jogador **B**. Em qual recipiente você mexeria? De que maneira você distribuiria as sementes? Justifique.*

Para responder a oitava atividade, o aluno precisa analisar as possibilidades de movimentação do jogador **B** para então mobilizar a estratégia que seja mais favorável. O jogador **B** possui sementes em todos os recipientes e por meio de um mapeamento das jogadas o aluno pode perceber que existem 10 possibilidades para ele iniciar a jogada. O aluno precisa, ainda, realizar análises de cada jogada elencando as possibilidades de captura e defesa e a influência que sua jogada irá acarretar no movimento seguinte do adversário.

Como análise *a priori*, iremos apresentar as possibilidades para a jogador **B** realizar a movimentação descrevendo algumas situações que possa acontecer com essa escolha.

- $E_1$ : Escolher o recipiente $B_4$ e distribuir de um em um.

Com essa estratégia, o jogador **B** capturará 2 sementes no recipiente $A_2$ e ainda poderá capturar as 2 sementes do recipiente $A_1$ . Ele estaria realizando uma captura múltipla de 4 sementes, totalizando 8 sementes no seu depósito. No entanto, na próxima jogada, o jogador **A** poderá mexer no recipiente $A_3$ movimentando de um em um e com isso capturaria 3 sementes no recipiente $B_1$ , totalizando 11 sementes no depósito dele.

- $E_2$ : Escolher o recipiente $B_4$ e, simplesmente, mover as sementes para o recipiente $A_1$ .

Ao mobilizar essa estratégia o jogador **B** realizará uma captura de 3 sementes no recipiente $A_1$ , totalizando 7 sementes no seu depósito. No entanto, na próxima jogada, o jogador **A** poderá mexer no recipiente $A_3$ movimentando de um em um e com isso capturaria 3 sementes no recipiente $B_1$ , totalizando 11 sementes no depósito dele.

- $E_3$ : Escolher o recipiente $B_3$ e distribuir de um em um.

Com essa estratégia, o jogador **B** realizará uma captura de 3 sementes no recipiente $A_1$, totalizando 7 sementes no seu depósito. E não deixará possibilidade para o jogador **A** capturar sementes na jogada seguinte.

- $E_4$ : Escolher o recipiente $B_3$ e distribuir de dois em dois.

Ao mobilizar essa estratégia o jogador **B** realizará uma captura de 2 sementes no recipiente $A_4$, totalizando 6 sementes no seu depósito. No entanto, o jogador **A**, poderá escolher o recipiente $A_2$, distribuir de um em um e capturar 3 sementes no recipiente $B_1$, totalizando 11 sementes em seu depósito. Com essa escolha, o jogador **B** estará cometendo o erro de estratégia EE3.

- $E_5$ : Escolher o recipiente $B_3$ e distribuir de cinco em cinco.

Ao mobilizar essa estratégia o jogador **B** não capturará sementes. No entanto, o jogador **A**, poderá escolher o recipiente $A_3$, distribuir de um em um e capturar 3 sementes no recipiente $B_1$, totalizando 11 sementes em seu depósito. Com essa escolha, o jogador **B** estará cometendo os erros de estratégias EE1 e EE3.

- $E_6$ : Escolher o recipiente $B_3$ e, simplesmente, mover as sementes para o recipiente $B_4$.

Com essa estratégia o jogador **B** não capturará sementes. No entanto, o jogador **A**, poderá escolher o recipiente $A_3$, distribuir de um em um e capturar 3 sementes no recipiente $B_1$, totalizando 11 sementes em seu depósito. Com essa escolha, o jogador **B** estará cometendo os erros de estratégias EE1 e EE3.

- $E_7$ : Escolher o recipiente $B_2$ e, simplesmente, mover as sementes para o recipiente $B_3$.

Com essa estratégia o jogador **B** não capturará sementes. No entanto, o jogador **A**, poderá escolher o recipiente $A_3$, distribuir de um em um e capturar 3 sementes no recipiente $B_1$, totalizando 11 sementes em seu depósito. Com essa escolha, o jogador **B** estará cometendo os erros de estratégias EE1 e EE3.

- $E_8$ : Escolher o recipiente $B_2$ e distribuir de um em um.

Com essa estratégia o jogador **B** não capturará sementes. No entanto, o jogador **A**, poderá escolher o recipiente $A_3$, distribuir de um em um e capturar 3 sementes no recipiente $B_1$, totalizando 11 sementes em seu depósito. Com essa escolha, o jogador **B** estará cometendo os erros de estratégias EE1 e EE3.

- $E_9$ : Escolher o recipiente $B_1$ e distribuir de um em um.

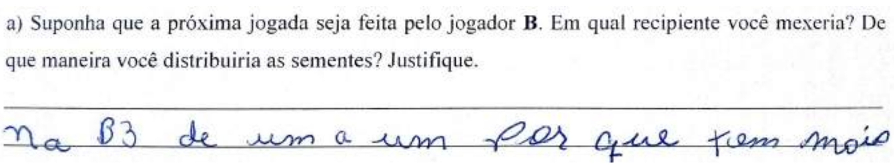
Com essa estratégia o jogador **B** não capturará sementes. No entanto, o jogador **A**, também não poderá capturar.

- $E_{10}$ : Escolher o recipiente $B_1$ e, simplesmente, mover as sementes para o recipiente $B_2$ .

Com essa estratégia o jogador **B** não capturará sementes. No entanto, o jogador **A**, também não poderá capturar.

4.6.3. Análise *a posteriori* da oitava atividade

Percebemos pela justificativa que a aluna Chinara mobilizou a estratégia $E_3$, porém ela não mencionou a captura de 3 sementes no recipiente $A_1$. Dentre as estratégias previstas na análise *a priori* da questão, esse é um dos movimentos mais vantajosos, pois não deixa possibilidade para o jogador adversário capturar sementes na jogada seguinte. Chinara, até o momento, só havia participado do primeiro encontro e nele já tinha apresentado justificativa para iniciar de um determinado recipiente devido a ele ter mais sementes. Podemos inferir que Chinara não estava fazendo simulações e nem tampouco analisando o leque de possibilidades de distribuir as sementes.


a) Suponha que a próxima jogada seja feita pelo jogador **B**. Em qual recipiente você mexeria? De que maneira você distribuiria as sementes? Justifique.

na B3 de um a um por que tem mais

Figura 57: Protocolo de resolução da oitava atividade da aluna Chinara.
Fonte: dados da pesquisa.

Após verificarmos a justificativa de Chinara, resolvemos questioná-la a fim de obtermos mais informações.

> *Pesquisador: Chinara, você poderia detalhar melhor a sua escolha pelo recipiente* $B_3$ *?*

> *Chinara: Professor, eu escolhi o recipiente que tinha mais sementes que é o $B_3$ . Depois joguei de um em um e terminou aqui (**apontando para o recipiente** $A_1$ , grifo nosso).*
> *Pesquisador: E como você decidiu iniciar pelo recipiente $B_3$ ?*
> *Chinara: Eu olhei os recipientes e escolhi ele por que tinha mais sementes.*
> *Pesquisador: Certo. Quantas sementes ficaram no recipiente $A_1$ ?*
> *Chinara: Três sementes.*
> *Pesquisador: E o que acontece quando fica 3 sementes no último recipiente em que você depositou?*
> *Chinara: Eu capturo elas. Mas […]*
> *Pesquisador: Mas o que?*
> *Chinara: Eu pensei que só era para capturar quando fosse captura múltipla.*
> *Pesquisador: Não Chinara. A captura múltipla é uma forma de você poder capturar mais sementes, no entanto as capturas simples continuam valendo.*
> *Chinara: Eu pensei que não podia.*

De acordo com os PCN (BRASIL, 1998), um dos objetivos do ensino fundamental é levar o aluno a:

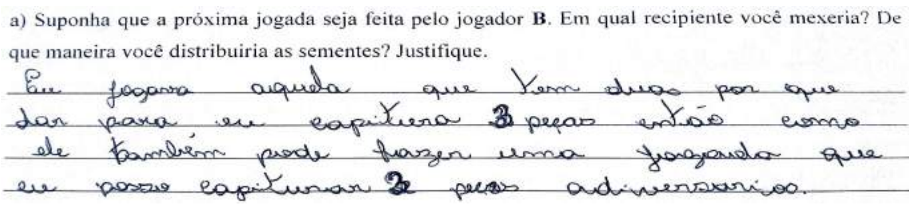
> resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis (BRASIL, 1998, p. 48).

Pelo diálogo, percebemos que Chinara ao resolver a atividade não analisou as possibilidades de distribuir as sementes com as simulações mentais de cada jogada e suas consequências no movimento seguinte do jogador adversário. E como ela não mencionou a captura das 3 sementes no recipiente $A_1$ , ela cometeu o erro de regra ER9.

A ausência de um trabalho identificação de possibilidades e com cálculo mental, juntamente com o abandono da exploração dos algoritmos das operações fundamentais comprometem a aprendizagem dos naturais no ensino fundamental (BRASIL, 1998, p. 97). Os jogos Mankalas têm um potencial grandioso no trabalho com cálculo de possibilidades, cálculo mental, dentre outros e, no entanto, Chinara não conseguia explorá-los na elaboração de suas estratégias.

Pela justificativa do aluno Kojo, podemos inferir que ele mobilizou a estratégia $E_2$ , pois é o único recipiente que contém 2 sementes que resulta em capturas após a movimentação. Percebemos que ele estava mapeando as jogadas, realizando antecipações de jogadas futuras, pois mencionou a captura de 3 sementes na jogada seguinte do adversário.

Essas antecipações podem ser feitas por meios de simulações das jogadas mostrando o seu movimento e as consequências dele nos movimentos seguintes.

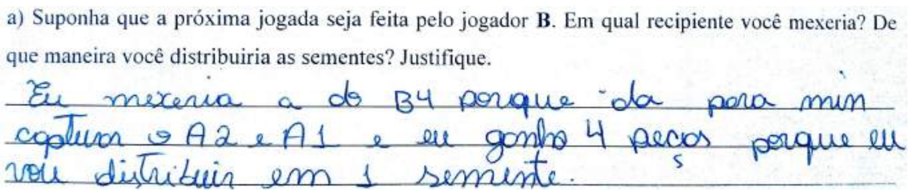

a) Suponha que a próxima jogada seja feita pelo jogador **B**. Em qual recipiente você mexeria? De que maneira você distribuiria as sementes? Justifique.

Eu jogaria aquela que tem duas por que dar para eu capitura 3 peças então como ele também pode fazer uma jogada que eu posso capiturar 2 peças adiversarios.

Figura 58: Protocolo de resolução da oitava atividade do aluno Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

A capacidade de mapear jogadas permite a visualização e execução de jogadas favoráveis. Quando aluno consegue mobilizar nas estratégias essa capacidade, outros conhecimentos também são mobilizados, como o reconhecimento de múltiplos, de divisores, cálculo mental, etc.

Oluchi mobilizou a estratégia $E_1$ justificando a captura das sementes dos recipientes $A_2$ e $A_1$. Com essa estratégia ela realizou uma captura múltipla de 4 sementes, no entanto deixou oportunidades para o jogador **A** capturar 3 sementes.


a) Suponha que a próxima jogada seja feita pelo jogador **B**. Em qual recipiente você mexeria? De que maneira você distribuiria as sementes? Justifique.

Eu mexeria a do B4 porque da para min capturar o A2 e A1 e eu ganho 4 peças porque eu vou distribuir em 1 semente.

Figura 59: Protocolo de resolução da oitava atividade da aluna Oluchi.
Fonte: dados da pesquisa.

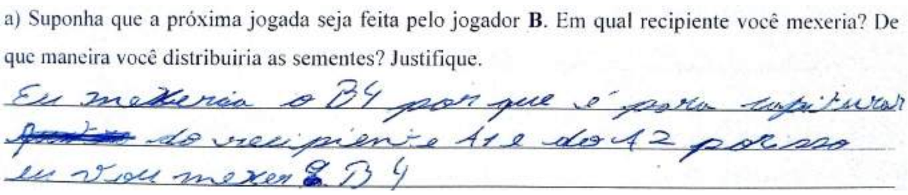
Resolvemos conversar com Oluchi a fim de obtermos mais informações sobre a estratégia mobilizada por ela.

> *Pesquisador: Oluchi, você analisou a sua jogada e as consequências que ela poderia acarretar no movimento do jogador **A**?*
> *Oluchi: Analisei sim.*
> *Pesquisador: Pode nos dizer como foi que você pensou?*
> *Oluchi: Eu joguei do $B_4$ para fazer uma captura múltipla de 4 sementes no $A_2$ e no $A_1$, ai eu fico com 8 sementes no depósito.*
> *Pesquisador: Certo. Suponha que eu seja o jogador **A**. Vou mexer no $A_3$ de um em um e capturar 3 sementes no $B_1$, ficando com 11 sementes no meu depósito. E agora o que você faria?*
> *Oluchi: Ai eu ganhei.*

*Pesquisador: Como assim?*
*Oluchi: Eu começo no $B_3$, jogo de dois em dois e capturo as sementes dos recipientes $A_4$, $A_3$, $A_2$ e $A_1$.*
*Pesquisador: Nossa! E quantas sementes você capturaria?*
*Oluchi: Capturaria 9 sementes e ficava com 17.*
*Pesquisador: Excelente jogada.*

Notamos pelo diálogo que Oluchi estava mapeando as jogadas e prevendo movimentos futuros. Realizou as análises das possibilidades e executou uma excelente estratégia. Percebemos que ela mobilizou alguns conhecimentos matemáticos nessa jogada, como: cálculo mental, análise de possibilidades e simulações mentais, mapeamento das jogadas e noção de divisão em partes iguais.

Silko também escolheu a estratégia $E_1$ e usou a mesma justificativa de Oluchi. Pensamos que a distância entre eles (estavam sentados muito perto) poderia ter interferido nas respostas.


a) Suponha que a próxima jogada seja feita pelo jogador **B**. Em qual recipiente você mexeria? De que maneira você distribuiria as sementes? Justifique.

Eu mexeria o B4 porque é para capturar do recipiente A1 e do A2 por isso eu vou mexer o B4

Figura 60: Protocolo de resolução da oitava atividade do aluno Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Por isso, resolvemos conversar com Silko afim de detalhar suas afirmações.

*Pesquisador: Silko, como você estruturou sua estratégia para realizar essa jogada?*
*Silko: Analisei algumas delas e percebi que essa dava pra capturar 4 sementes.*
*Pesquisador: E se seu adversário mexesse no recipiente $A_3$ de um em um e capturasse 3 sementes no $B_1$, ficando com 11 sementes no depósito dele, enquanto você ficou com 8. E agora o que você faria?*
*Silko: Em mexeria no $B_3$, jogo de um em um e capturaria 2 sementes no recipiente $A_1$. O jogador adversário não consegue capturar e no meu próximo movimento consigo capturar mais 2 sementes.*
*Pesquisador: Foi uma jogada bem pensada.*

Lacanallo (2011), em sua pesquisa, constatou que:

> Aos poucos, com mais oportunidades de lidar com o jogo, os sujeitos foram entendendo suas estratégias e demonstraram organização mental para antecipar resultados, alterar e modificar estratégias sempre que necessário sem receio de comprometer sua vitória (LACANALLO, 2011, p. 143).

Notamos que Silko, na elaboração de suas estratégias, estava mapeando as jogadas levando em consideração as análises de cada e assim conseguia antecipar os movimentos do adversário. Essas ações apresentadas por ele contribuem para a mobilização de conhecimentos matemáticos e são importantes na aprendizagem matemática.

Pereira (2011) em sua pesquisa, concluiu que:

> O jogo *awalé* contribuiu para uma aprendizagem significativa de matemática tendo em vista a sua contribuição para a construção de conceitos matemáticos por intermédio da prática do jogo. Percebeu que na prática do jogo o uso sistemático da lógica, do raciocínio sobre as diversas possibilidades de movimento, do cálculo mental e da estimativa e estes contribuem para a aprendizagem matemática (PEREIRA, 2011, p. 140).

4.6.4. Análise *a priori* da nona atividade

A nona atividade apresentada aos alunos foi a seguinte:

*a) Elabore uma situação de uma partida entre os jogadores* ***A*** *e* ***B*** *em que o jogador* ***B*** *será o próximo a movimentar e nessa jogada ele irá capturar 5 sementes. Justifique.*
*b) Considerando as capturas múltiplas, qual a maior quantidade de sementes que um jogador poderá capturar em uma única jogada? Justifique.*

O **item a)** está relacionado com a escolha pessoal de cada aluno. Para representar a situação solicitada o aluno possui inúmeras possibilidades, por isso não iremos apresentar a análise *a priori* deste item. Como exemplo, uma possível situação é a seguinte:

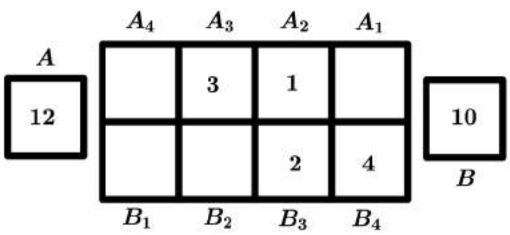



Figura 61: Exemplo de uma captura múltipla de 5 sementes realizada pelo jogador **B**.
Fonte: elaborada pelo autor.

Nessa situação o jogador **B**, poderia escolher o recipiente $B_4$, distribuir de dois em dois e realizar uma captura múltipla de 5 sementes, sendo 3 no recipiente $A_2$ e 2 no $A_1$. Com essa jogada ele passaria a ter 15 sementes no seu depósito e ainda não deixaria a possibilidade do jogador **A** capturar sementes no movimento seguinte. Para elaborar uma situação como essa, o aluno precisa mobilizar cálculo mental, análise de possibilidades e simulações mentais, mapeamento das jogadas e noção de divisão em partes iguais.

Para o **item b)**, o aluno tinha 11 possibilidades para respondê-lo. Poderia pensar que eram 2 sementes, nesse caso é a quantidade mínima, ou 3 sementes, ou ainda 4 sementes e assim sucessivamente. Para analisar esse item, o aluno precisa fazer combinações com as sementes nos recipientes de tal forma que configure uma captura múltipla. A resposta esperada é 12 sementes, sendo que a última semente caia no quarto recipiente totalizando 3 sementes nele, e os demais recipientes também fique com 3 sementes cada. Com isso, o aluno capturaria um total de 12 sementes.

4.6.5. Análise *a posteriori* da nona atividade

Chinara representou uma situação em que o jogador **A** tinha 3 possibilidades para realizar uma captura múltipla de 5 sementes. Na primeira, ele poderia escolher o recipiente $A_4$, distribuir de um em um e capturar as sementes dos recipientes $B_2$ e $B_1$. Na segunda, poderia iniciar do recipiente $A_3$, distribuir de um em um e capturar as sementes dos recipientes $B_2$ e $B_1$. E na terceira poderia movimentar as sementes do recipiente $A_2$, distribuir de um em um e capturar as sementes dos recipientes $B_2$ e $B_1$. A figura abaixo representa o protocolo de resolução da aluna Chinara.

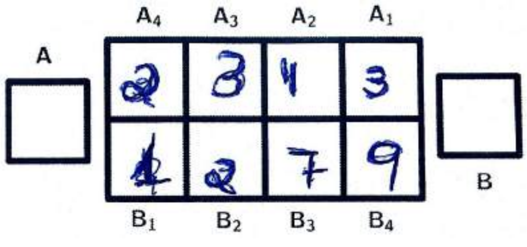



Figura 62: Protocolo de resolução, do item a), da nona atividade da aluna Chinara.
Fonte: dados da pesquisa.

Ao analisarmos a resolução de Chinara, percebemos que ela representou 31 sementes no protocolo e no jogo Mankala *awalé* adaptado temos 32 sementes. Conversamos com ela sobre a representação das sementes e ela disse que "*achava que tinha colocado 32 sementes*". Esse equívoco não prejudicou a análise da estratégia utilizada por ela.

Na justificativa (figura 63), Chinara descreve corretamente a estratégia mobilizada, no entanto com a jogada escolhida por ela, o adversário tem a possibilidade de capturar 3 sementes no próximo movimento.

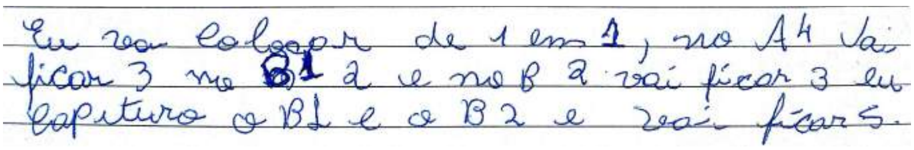

Eu vou colocar de 1 em 1, no A4 vai ficar 3 no B1 2 e no B 2 vai ficar 3 eu capituro o B1 e o B2 e vai ficar 5.

Figura 63: Protocolo com justificativa, do item a), da nona atividade da aluna Chinara.
Fonte: dados da pesquisa.

Como Chinara tinha 3 possibilidades para capturar 5 sementes, resolvemos conversar com ela para esclarecer os motivos de sua escolha.

*Pesquisador: Chinara, como você chegou nessa configuração do tabuleiro?*
*Chinara: Eu fui jogando sozinha no tabuleiro até conseguir essa jogada que capturava 5 sementes.*
*Pesquisador: A sua representação tem 31 sementes e deveria ter 32, você percebeu isso?*
*Chinara: Pensei que tinha colocado 32 sementes.*
*Pesquisador: Sem problemas. Agora, você poderia falar sobre sua estratégia. O que você pensou ao mobilizá-la?*
*Chinara: Tentei responder a pergunta e consegui essa jogada que captura 5 sementes, 3 no* $B_2$ *e 2 no* $B_1$ *.*
*Pesquisador: Suponha que o adversário comece do* $B_4$ *, distribua de três em três e capture 3 sementes no recipiente* $A_3$ *. O que você faria?*
*Chinara: Eu movia as 3 sementes do recipiente* $A_4$ *para o* $B_1$ *e capturaria elas.*
*Pesquisador: Você já havia pensando nessa jogada?*
*Chinara: Não. Eu vi agora que eu poderia capturar.*
*Pesquisador: Certo.*

Como Chinara participou apenas de dois encontros, já esperávamos que ela não apresentasse em suas jogadas antecipações e previsões de movimentos futuros (dela e do adversário).

No **item b)**, Chinara respondeu que o número máximo de sementes que poderíamos capturar em uma jogada eram 2 ou 3 sementes. Nessa atividade era para considerar as capturas múltiplas e ela deu como resposta a quantidade de sementes que podem ser capturadas nas capturas simples.

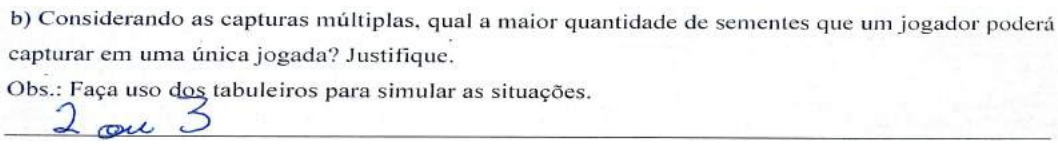

b) Considerando as capturas múltiplas, qual a maior quantidade de sementes que um jogador poderá capturar em uma única jogada? Justifique.
Obs.: Faça uso dos tabuleiros para simular as situações.
2 ou 3

Figura 64: Protocolo de resolução, do item b), da nona atividade da aluna Chinara.
Fonte: dados da pesquisa.

Como Chinara não justificou sua escolha, resolvemos conversar com ela afim de entender a sua resposta.

> *Pesquisador: Chinara, no* ***item a)*** *você elaborou uma situação que capturaria 5 sementes e no* ***item b)*** *disse que o máximo de sementes que pode ser capturadas em uma jogada são 2 ou 3. O que você pensa sobre isso?*
> *Chinara: É que nas regras pode capturar quando fica 2 ou 3 sementes.*
> *Pesquisador: Mas isso é nas capturas simples e aqui era para considerar as capturas múltiplas.*
> *Chinara: Nem percebi professor. E eu não entendi direito as capturas múltiplas.*
> *Pesquisador: Então, quantas sementes podem ser capturadas se considerarmos as capturas múltiplas?*
> *Chinara: Eu acho que são 6.*
> *Pesquisador: Como assim? Explique.*
> *Chinara: Acho que poder ser 3 em um recipiente e 3 no que vem antes dele.*
> *Pesquisador: E os outros que vem antes não podem?*
> *Chinara: Acho que não, pois quebra a sequência.*

Notamos que Chinara realmente não compreendeu as regras que envolvem as capturas múltiplas. Podemos inferir que, talvez, um motivo possa ser a pouca vivência dela com o jogo, tendo em vista que ela participou apenas de dois encontros e relatou que não estava jogando em casa com os familiares.

Kojo representou no protocolo um situação em que não há possibilidades para o jogador **B** capturar sementes em sua jogada. O protocolo está representado pela figura 65.

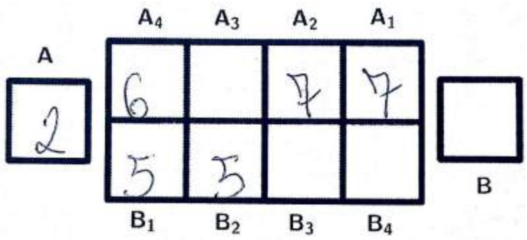



Figura 65: Protocolo de resolução, do item a), da nona atividade do aluno Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

Ao analisarmos a representação da situação no protocolo e a justificativa apresentada, não percebemos coerência entre eles. Kojo em vários momentos já manifestou dificuldades em descrever suas justificativas. Destacamos que ele, quando está jogando no tabuleiro, elabora estratégias exitosas, com simulações de jogadas e mapeamento das possibilidades.

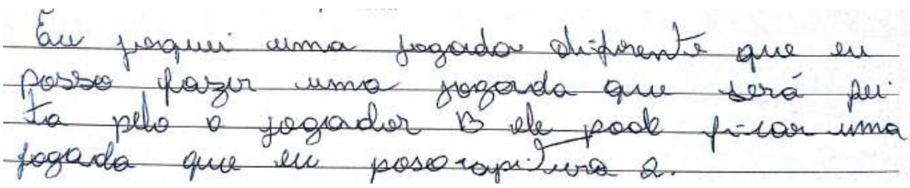
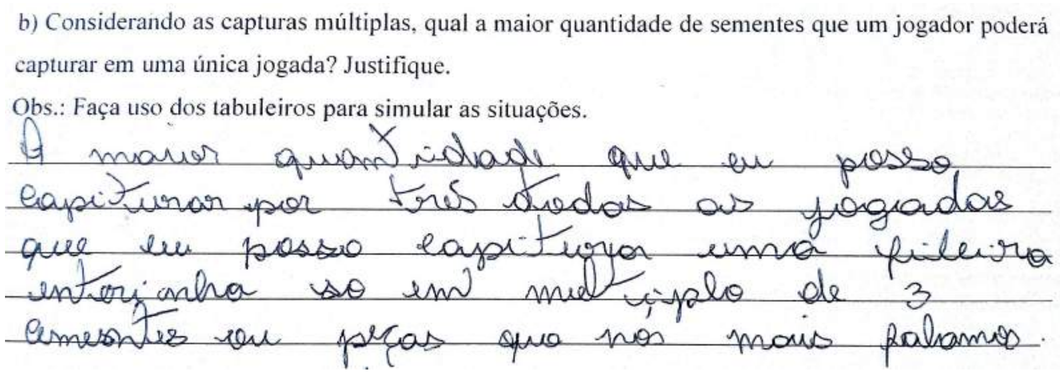

Eu jogui uma jogada diferente que eu posso fazer uma jogada que será fei ta pelo o jogador B ele pode ficar uma jogada que eu poso capitura 2.

Figura 66: Protocolo com justificativa, do item a), da nona atividade do aluno Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

Já no **item b)**, inferimos que ele ao dizer "*que eu posso capturar uma fileira inteirinha só em múltiplo de 3*", esteja referindo que a quantidade máxima seria 12 sementes, sendo 3 em cada recipiente.


b) Considerando as capturas múltiplas, qual a maior quantidade de sementes que um jogador poderá capturar em uma única jogada? Justifique.
Obs.: Faça uso dos tabuleiros para simular as situações.

A maior quantidade que eu posso capiturar por três todas as jogadas que eu posso capitura uma fileira entirinha so em multiplo de 3 sementes ou peças que nos mais falamos.

Figura 67: Protocolo de resolução, do item b), da nona atividade do aluno Kojo.
Fonte: dados da pesquisa.

Para constatar tal fato, iniciamos uma conversa com ele.

*Pesquisador: Kojo, o que você quer dizer com "que eu posso capturar uma fileira inteirinha só em múltiplo de 3"?*
*Kojo: É que em cada casa pode ficar 3 sementes.*
*Pesquisador: Certo. E você captura quantas sementes?*
*Kojo: Capturo 12 sementes.*
*Pesquisador: Como você chegou a esse número?*
*Kojo: Eu somei as sementes de cada casa.*
*Pesquisador: E existe outra maneira.*
*Kojo: Deixa eu ver (**ele fica em silêncio por alguns minutos**, grifo nosso). Posso pegar as 3 sementes de uma casa e multiplicar pelas casas.*
*Pesquisador: Muito bem Kojo.*

Kojo, no diálogo, demonstrou compreensão das noções de adição e multiplicação como adição de parcelas iguais. Segundo os PCN (BRASIL, 1998) esse estabelecimento entre as duas operações é um dos significados da multiplicação.

Uma abordagem frequente no trabalho com a multiplicação é o estabelecimento de uma relação entre ela e a adição: nesse caso a multiplicação foi apresentada como uma adição de parcelas iguais. Por exemplo: Uma fileira tem 4 recipientes, cada recipiente tem 3 sementes. Preciso capturar as 3 sementes de cada recipiente. Quantos sementes serão capturadas? Assim, associa-se a escrita 4 *x* 3, na qual se definem papéis diferentes para o 4 (número de repetições) e para o 3 (número que se repete), não sendo possível tomar um pelo outro. Essa escrita apresenta-se como uma forma abreviada da escrita: 3 + 3+ 3 + 3 (BRASIL, 1998, p. 109).

Oluchi representou uma situação em que o jogador **B** havia capturado 10 sementes e o jogador **A** 12. No protocolo de resolução apresentado por ela (figura 68), o jogador **B** iria capturar 8 sementes e com isso venceria a partida.

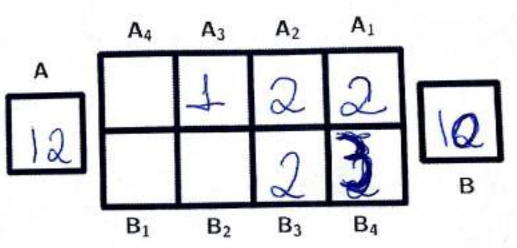



Figura 68: Protocolo de resolução, do item a), da nona atividade da aluna Oluchi.
Fonte: dados da pesquisa.

Na justificativa, ela disse que capturaria 5 sementes, ficando assim com 18. Inferimos que ela percebeu que capturou 8 sementes mas como queríamos uma captura múltipla de 5 sementes, ela mencionou apenas as 5.

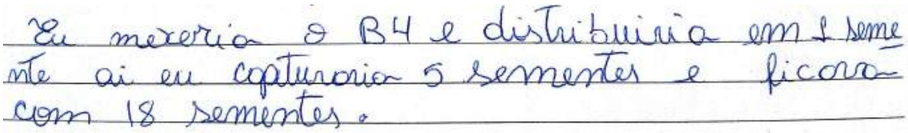

Eu mexeria o B4 e distribuiria em 1 semente ai eu capturaria 5 sementes e ficara com 18 sementes.

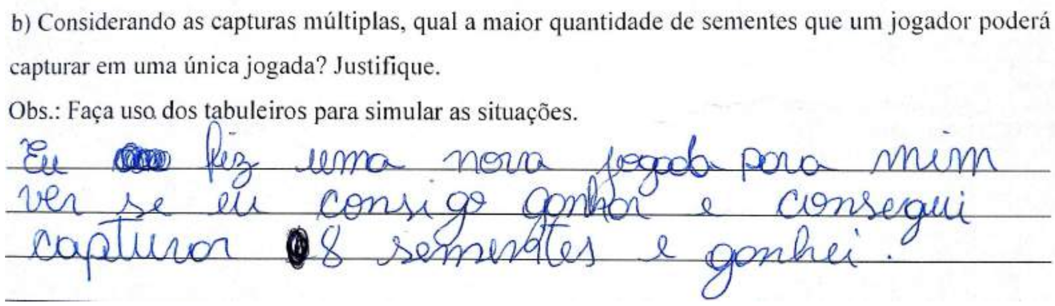
Figura 69: Protocolo com justificativa, do item a), da nona atividade da aluna Oluchi.
Fonte: dados da pesquisa.

Resolvemos, então, conversar com Oluchi.

> *Pesquisador: Oluchi, na sua justificativa você disse que capturaria 5 sementes e ficaria com 18 sementes mas o jogador* **B** *tinha apenas 10 sementes, como isso foi possível?*
> *Oluchi: É que na minha jogada eu capturei 8 sementes, 2 no $A_3$, 3 no $A_2$ e 3 no $A_1$.*
> *Pesquisador: Mas a atividade pedia para você capturar 5 sementes e não 8.*
> *Oluchi: Eu pensei assim, se eu capturo 8 sementes então capturei 5.*
> *Pesquisador: É verdade. Você está certa.*
> *Oluchi: Com isso o jogador* **B** *vence a partida.*
> *Pesquisador: Outra coisa, como você chegou nessa situação de jogo? Você simulou no tabuleiro?*
> *Oluchi: Eu não usei o tabuleiro, primeiro eu coloquei as sementes capturadas nos depósitos. Depois olhei quantas sementes tinham sobrado e preparei a jogada.*

Destacamos no diálogo a percepção que Oluchi teve ao identificar que se ela capturar 8 sementes então com certeza ela teria capturado 5. E a atividade não deixava restrições quanto as capturas superiores a 5 sementes, dizia apenas que o jogador **B** iria capturar 5 sementes.

Oluchi, na oitava atividade, previu uma jogada em que ela poderia capturar 9 sementes e no **item b)** da nona atividade justificou que 8 sementes é a quantidade máxima que podem ser capturadas em uma jogada.


b) Considerando as capturas múltiplas, qual a maior quantidade de sementes que um jogador poderá capturar em uma única jogada? Justifique.

Obs.: Faça uso dos tabuleiros para simular as situações.

Eu fiz uma nova jogada para mim ver se eu consigo ganhar e consegui capturar 8 sementes e ganhei.

Figura 70: Protocolo de resolução, do item b), da nona atividade da aluna Oluchi.
Fonte: dados da pesquisa.

Dialogamos novamente com Oluchi, para obtermos mais informações sobre a justificativa apresentada por ela.

> *Pesquisador: Como você concluiu que 8 sementes é quantidade máxima que podem ser capturadas em uma jogada?*
> *Chinara: Foi assim professor. Eu usei a quantidade que havia capturado na atividade anterior, e fui a ganhadora da partida.*
> *Pesquisador: Mas na oitava atividade você descreveu uma situação em que capturaria 9 sementes. Lembra disso? O que tem a nos dizer?*
> *Oluchi: Lembro sim. Eu acho que me empolguei com a jogada da nona atividade, pois estava perdendo e consegui capturar 8 sementes e venci a partida.*
> *Pesquisador: E agora quantas sementes você acha que podem ser capturadas?*
> *Oluchi: Acho que tem que ficar 3 sementes pois é a maior quantidade que capturo no recipiente. Então se tiver uma semente em cada recipiente do jogador **A** e no $B_4$ tiver 8 sementes, eu posso jogar de dois em dois e capturar a fileira toda. Posso fazer isso?*
> *Pesquisador: pode sim. E quantas sementes foram capturadas?*
> *Oluchi: Doze sementes.*

Lacanallo (2011) utilizou em sua pesquisa o jogo Mankala *kalah* que possui características comuns com o *awalé*, como por exemplo: sentido da movimentação, objetivo do jogo, forma de distribuir as sementes, dentre outras. Segundo ela:

> Este jogo, de origem africana e pouco conhecido no Brasil, possibilita o desenvolvimento de várias estratégias quando os jogadores analisam a relação entre as peças no tabuleiro, as movimentações feitas e as possibilidades de jogo. Além disso, cria espaço para a exploração de diversos conteúdos matemáticos, como a contagem, adição, diferentes formas de cálculo (estimativo, probabilístico), antecipação e análise das possibilidades testadas, além da exploração das funções psicológicas superiores (memória, atenção, linguagem, pensamento) (LACANALLO, 2011, p. 17).

Notamos que Oluchi apresentou em suas estratégias mobilização de diversos conteúdos, como: estimativas, cálculo, adição, multiplicação, divisão e antecipação das jogadas. A mobilização desses conteúdos foi verificado também na pesquisa de Lacanallo (2011).

Silko representou uma situação em que o jogador **B** capturaria 5 sementes e não deixava possibilidades para o jogador **A** capturar.

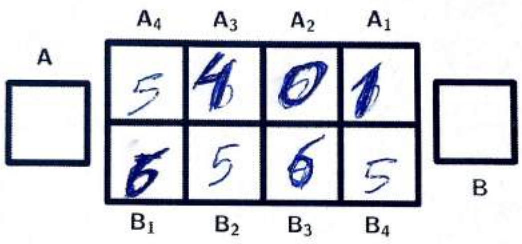



Figura 71: Protocolo de resolução, do item a), da nona atividade do aluno Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

A justificativa dele condiz com a representação e resolvemos não questioná-lo sobre a representação dessa atividade.

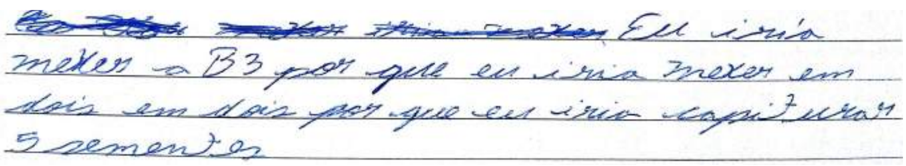
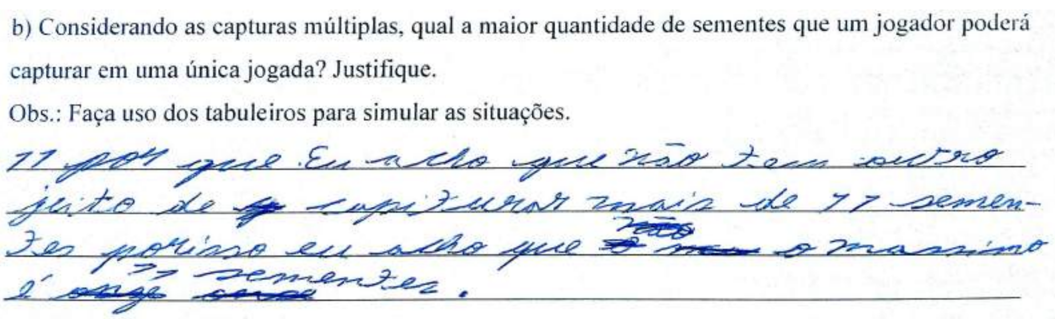

Eu iria mexer a B3 por que eu iria mexer em dois em dois por que eu iria capiturar 5 sementes

Figura 72: Protocolo com justificativa, do item a), da nona atividade do aluno Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

Já no **item b)**, ao analisarmos a justificativa de Silko, decidimos conversar com ele, pois a resposta dele foi muito próxima da esperada.


b) Considerando as capturas múltiplas, qual a maior quantidade de sementes que um jogador poderá capturar em uma única jogada? Justifique.

Obs.: Faça uso dos tabuleiros para simular as situações.

11 por que Eu acho que não tem outro jeito de capiturar mais de 11 sementes por isso eu acho que o maximo é 11 sementes.

Figura 73: Protocolo de resolução, do item b), da nona atividade do aluno Silko.
Fonte: dados da pesquisa.

> *Pesquisador: Silko, como você encontrou essa quantidade máxima de sementes que podem ser capturadas em uma jogada?*
> *Silko: Eu peguei o tabuleiro e fui simulando em uma linha inteira de capturas.*
> *Pesquisador: Como assim?*
> *Silko: Fui colocando sementes nos recipientes de uma linha do tabuleiro. Coloquei 2 sementes que é um número que captura e depois coloquei 3 que também captura. Aí depois eu contei elas.*
> *Pesquisador: Você descreveu no protocolo que encontrou 11 sementes. É isso mesmo?*

> *Silko: Deixa eu ver […] (***ele coloca as sementes novamente no tabuleiro e começa a contá-las***, grifo nosso). Na verdade são 12 sementes. Devo ter esquecido de contar uma.*
> *Pesquisador: Não tem problema.*

Silko demonstrou ter compreendido a regra que envolve as capturas múltiplas apesar de ter cometido um pequeno engano na contagem das sementes.

4.6.6. Algumas considerações sobre o quinto encontro

Participaram do encontro os alunos Chinara, Oluchi, Silko e Kojo. Chinara participou apenas do primeiro e do quinto encontro, mesmo assim resolvemos analisar os protocolos de resoluções das atividades dela.

A aluna Chinara não apresentou em suas jogadas antecipações e previsões de movimentos futuros do adversário e nem dela. Como ela participou de apenas dois encontros já esperávamos que ela não iria mobilizar tais conhecimentos.

No quinto encontro apenas a aluna Chinara cometeu um erro de regra (ER9). Os demais alunos não cometeram nenhum erro de regras e nem de estratégias.

Os alunos Oluchi, Silko e Kojo demonstraram que estavam mapeando as jogadas e prevendo movimentos futuros. Percebemos que eles mobilizaram alguns conhecimentos matemáticos durante as atividades, como: cálculo mental, análise de possibilidades, mapeamento das jogadas, noção de divisão em partes iguais, dentre outros.

No momento de validação e apresentação das estratégias questionamos os em relação aos possíveis conhecimentos matemáticos que eles achavam que trabalharam durante o encontro e, surgiram como respostas: divisão, adição, subtração, multiplicação, contagem e cálculo mental. Em seguida, pedimos a eles que exemplificassem o uso desses conteúdos nas atividades realizadas. Chinara disse que usou contagem para ver a quantidade de sementes em cada recipiente.

Oluchi enfatizou o uso do cálculo mental na elaboração e mapeamento das estratégias e finalizou dizendo que as quatro operações foram utilizadas a todo instante durante as partidas. Kojo disse que a divisão é a mais utilizada, pois é necessário dividir em partes iguais em todo movimento. Por fim, Silko falou sobre o uso da adição e da divisão durante as atividades propostas.

Aproveitamos o momento de validação e enfatizamos a importância de antecipar as jogadas mapeando as possíveis situações, da utilização do cálculo mental envolvendo as quatro operações. Esse momento de discussão das estratégias proporcionado pelos alunos nos forneceu meios para a realização da institucionalização alguns conteúdos e estratégias que permearam as atividades realizadas durante esse quinto encontro.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

> *"Seria uma atitude ingênua esperar que as classes dominantes desenvolvessem uma forma de educação que proporcionasse às classes dominadas perceber as injustiças sociais de maneira crítica."*
> *Paulo Freire*[40] *(1921-1997)*

Nesta pesquisa de mestrado analisamos a mobilização de conhecimentos matemáticos por alunos do 5º e do 6º ano do ensino fundamental a partir de adaptações do jogo Mankala *awalé*. Utilizamos como referencial teórico elementos da Teoria das Situações Didáticas, desenvolvida por Guy Brousseau (1996, 2008), por meio de estudos sobre o construtivismo originados na teoria de Piaget. Como referencial metodológico adotamos a Engenharia Didática que foi descrita por Michèle Artigue (1996). Essa teoria nos orientou na elaboração, aplicação e análise das atividades de nossa sequência.

Nosso interesse em utilizar o jogo Mankala *awalé* se deu por alguns motivos. Primeiramente, por ser um jogo acessível, pois o tabuleiro pode ser confeccionado com materiais recicláveis presente no dia a dia dos alunos. Nessa pesquisa, os tabuleiros foram construídos com caixas de maçãs e utilizamos sementes como peças. Outro motivo refere-se ao aspecto cultural, social, religioso e filosófico que o jogo traz enraizado nas suas regras, nos movimentos das peças, nas crenças, dentre outros.

Dentre os aspectos culturais presentes nos jogos Mankalas destacamos a forte significação que são apresentadas pelas regras. Elas possuem um vínculo muito forte com a cultura na qual esse jogo foi concebido. As regras estimulam a doação, a entrega ao "adversário" que não é colocado como "inimigo", mas como alguém a ser ajudado. Gneka (2005) descreve que o objetivo do jogo Mankala *awalé* tradicional é realizar uma grande colheita. O final do jogo ocorre quando um jogador não consegue mais ajudar o outro, não quando um jogador derrota o outro.

Percebemos tais fatos nas palavras usadas para descrever as regras, pois quando utilizamos os jogos Mankalas usamos termos que colocam o jogador adversário como seu inimigo e sua função naquele instante é derrotá-lo. Abaixo, apresentamos mais diferenciações entre outros termos:

40 Paulo Freire foi um educador, pedagogista e filósofo brasileiro. É considerado um dos pensadores mais notáveis na história da Pedagogia mundial, tendo influenciado o movimento chamado pedagogia crítica. Disponível em: <http://www.paulofreire.org/>. Acesso em: 27 de nov. de 2015.

| Cultura africana | Outras culturas |
|---|---|
| Covas ou buracos | Recipientes |
| Sementes | Peças |
| Colher | Capturar |
| Plantar | Distribuir |

Tabela 4: Diferenciação entre termos presentes no jogo Mankala *awalé*.
Fonte: elaborada pelo autor.

Destacamos ainda, a significação presente na distribuição das sementes. A cada movimento essa distribuição está relacionada ao conceito de tempo e espaço. Tempo, pode ser entendido como a sequência dos deslocamentos realizados num movimento compassado e rítmico. Espaço, pelo tabuleiro, com seus 10 recipientes, ou seja, os lugares onde as sementes são depositadas (MACEDO; PASSOS; PETTY, 2000, p. 76).

Outro fator que despertou nosso interesse em utilizar o jogo Mankala *awalé* é devido ao grande número de possibilidades e mapeamentos de jogadas que surgem a cada movimento realizado pelos jogadores. Gneka (2005, p. 54) afirma que o jogo *awalé* na África é fruto de ideias, formas de raciocinar e, também, da memória coletiva dos povos que o criaram.

Nessa perspectiva investigamos possibilidades de realizarem contagens, cálculo mental, simulações, elaboração de estratégias e conjecturas, envolvendo o conteúdo divisão de um número natural por meio de adaptações do jogo Mankala *awalé*.

Essa investigação ocorreu durante a sequência de atividades em que foi proposto diversos problemas envolvendo jogadas de ataque e defesa. Para Macedo, Passos e Petty (2000):

> O objetivo principal das situações-problema é “focar o olhar” do jogador para alguns pontos que podem ser melhorados e para as boas estratégias que adotou, às vezes sem perceber. É interessante, portanto, criar situações que “provoquem” o olhar numa determinada direção (MACEDO; PASSOS; PETTY, 2000, p. 74).

Nesse sentido as adaptações realizadas no jogo permitiu focar esse olhar. Percebemos, que as adaptações do jogo *awalé* possibilitou ao aluno mobilizar vários conhecimentos matemáticos. Ao invés de receber técnicas de cálculo prontas, como ainda são propostos nos livros didáticos, os alunos puderam inventar suas próprias estratégias. As estratégias pessoais de cada aluno mostraram que as atividades podem ser resolvidas de diversas maneiras, usando a operação de adição, multiplicação, divisão e subtração.

As adaptações do jogo, além de visar o favorecimento da exploração de conhecimentos matemáticos específicos também visaram promover adequações ao modelo cultural da escola ocidental. De fato, nesse modelo a competição é valorizada e estimulada. Além disso, há necessidade das jogadas não demorarem muito tempo, uma vez que o tempo escolar é um tempo *kronos* ,determinado por períodos pré-fixados (horas/aulas, bimestres, dentre outros) e não um tempo *kairós* (circular e prazeroso).

No decorrer das atividades o aluno Kojo demonstrou compreensão das noções de adição e multiplicação como adição de parcelas iguais. É importante que o aluno estabeleça conexões entre as duas operações, pois ele precisa desenvolver suas próprias formas de pensar e de resolver os problemas. “Ao pensar de várias maneiras em uma situação que envolve multiplicação, a criança sente que domina o próprio pensamento e estabelece relações entre os conhecimentos que já possui (DEUS; TAHAN, 1998, p. 24-25)”.

Os alunos Silko, Kojo e Oluchi mobilizaram nas suas estratégias mapeamento das jogadas e previsão de movimentos futuros. Realizaram análises das possibilidades de movimentação e apresentaram excelentes estratégias, tanto de defesas quanto de ataque. Percebemos que eles mobilizaram alguns conhecimentos matemáticos, como: cálculo mental, cálculo de possibilidades, levantamento de conjecturas e noção de divisão em partes iguais.

Bigode (1998) afirma que no mundo todo, os currículos de Matemática deste final de século conferem um lugar especial às habilidades de fazer estimativa e cálculo mental, que se combinam com as atividades de cálculo escrito (BIGODE, 1998, p. 36).

A aluna Chinara, participou apenas de dois encontros. Percebemos que ela, ao resolver as atividades, não analisava as possibilidades de distribuir as sementes com as análises de cada jogada e suas consequências no movimento seguinte do jogador adversário. Inferimos que a pouca participação dela na pesquisa possa ter ocasionado tal fato.

Nas observações, durante os encontros da fase pré-experimental, percebemos que surgiam comumente algumas situações equivocadas. Por isso, resolvemos analisar algumas dificuldades manifestadas pelos alunos diante das adaptações do jogo proposto. Para realizar esta análise, prevista nos objetivos específicos, buscamos suporte na pesquisa de Dias (2009) que identificou e classificou dos tipos de erros cometidos pelos alunos relacionados às regras e às estratégias. Na nossa pesquisa, fizemos uma adaptação na classificação realizada por ela. Esta adaptação resultou na categorização de nove erros de regras e três erros de estratégias.

Nas análises *a posteriori* da sequência de atividades, os alunos apresentaram vários erros de regras e de estratégias. Detectamos que alguns desses erros aconteceram devido aos alunos agirem de forma precipitada, às vezes, não simulavam detalhadamente cada possibilidade de distribuição para poder escolher a mais vantajosa. Outras vezes, se resumiam ao fato dos alunos estarem dispersos ou com pressa para terminar as atividades. Descrevemos, a seguir, os erros de regras e estratégias cometidos pelos alunos no desenvolvimento das atividades.

O erro de regra ER1 (escolher um dos recipientes do território do adversário para iniciar a distribuição das sementes) foi cometido apenas pelo aluno Silko. O erro de regra ER3 (não distribuir as sementes em partes iguais) foram cometidos pelos alunos Silko,Makida e Zulu. Os alunos Silko e Makida cometeram o erro de regra ER4 (pular recipientes na distribuição das sementes) duas vezes. O erro de regra ER6 (não alimentar o território do adversário se em algum momento da partida o adversário não tiver mais nenhuma semente em seu território) foi cometido apenas pela aluna Makida. Kojo e Chinara cometeram o erro de regra ER9 (capturar sementes e não anotá-las no protocolo de resolução). Já a aluna Oluchi não cometeu nenhum erro de regra.

O erro de estratégia EE1 (não jogar do recipiente que permite a captura de sementes) foi cometido uma vez pelos alunos Silko, Kojo, Zulu e Makida e três vezes pela aluna Oluchi. O erro de estratégia EE2 (não evitar que o adversário ganhe sementes ou não defender a maior quantidade de sementes possível) foi cometido uma vez pelo aluno Kojo, duas vezes pela aluna Makida, três vezes pelos alunos Oluchi e Zulu e cinco vezes pelo aluno Silko. Já o erro de estratégia EE3 (capturar sementes, mas deixar possibilidade para o adversário capturar uma quantidade maior na jogada seguinte) foi cometido duas vezes, apenas, pela aluna Makida.

Destacamos a alta ocorrência dos erros de estratégias EE1 e EE2 que estão relacionados com movimentos de captura e defesa. Na pesquisa de Dias (2009), esses dois erros de estratégias também foram os que aconteceram com maior frequência. Ela concluiu que o alto índice do erro de estratégia EE2 (não evitar que o adversário ganhe sementes ou não defender a maior quantidade de sementes possível) foi devido aos alunos focarem nos aspectos ofensivos do jogo, ou seja, na captura de sementes. No entanto, a dificuldade aparecia em coordenar, um movimento de defesa exitoso, nessa jogada atual com a possível jogada futura do adversário.

Durante a aplicação da Engenharia Didática, na fase de *experimentação*, tivemos muita dificuldade em identificar as situações *adidáticas* de *ação* e de *formulação*. A todo instante os alunos estavam empenhados na busca de soluções, mobilizando as mais variadas estratégias e tentando explicitar suas justificativas. Sugerimos, para trabalhos futuros com jogos Mankalas e com o uso da Teoria das Situações Didáticas, que desenvolvam partidas e atividades em duplas, em que o pesquisador e os alunos possam estar em constantes questionamentos.

Uma outra sugestão que deixamos para futuros trabalhos como o jogo Mankala *awalé* é a inserção da regra de capturas múltiplas já no primeiro encontro. Decidimos trabalhar com ela apenas no último encontro, no entanto, acreditamos que poderia ter sido explorada antes, trazendo várias contribuições para as análises.

Sugerimos ainda, para continuidade em outras pesquisas, trabalhos que explorem as questões culturais, sociais, religiosas e filosóficas presente nos jogos Mankalas. Trabalhos que abranjam um estudo da influência e participação dos africanos na construção econômica, social e cultural do Brasil, na criação tecnológica e artística, dentre outras. Dando ênfase aos modos em que as culturas africanas adentram em diferentes áreas do conhecimento (Matemática, Engenharia, Artes, Língua, etc.). Esses trabalhos podem ser desenvolvidos pelo viés da Etnomatemática.

Por fim, acreditamos que a utilização do jogo Mankala *awalé*, com suas adaptações, contribuiu para a mobilização de conhecimentos matemáticos por alunos do 5º e 6º ano do ensino fundamental. Eles conseguiram desenvolver maneiras de realizarem contagens, cálculo mental, cálculo de possibilidades simulações, elaboração de estratégias e conjecturas, envolvendo o conteúdo divisão de um número natural por meio do jogo adaptado.

## REFERÊNCIAS

ARANÃO, Ivana Valéria Denófrio. **A matemática através de brincadeiras e jogos**. 6. ed. Campinas, SP: Papirus, 2007. (Série Atividades)

ARTIGUE, Michèle. *Engenharia Didática*. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 193-217.

BICUDO, Irineu. **Os Elementos/Euclides**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BIGODE, Antônio José Lopes. *As ferramentas de cálculo*. In: Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação a Distância. Secretaria de Educação Fundamental. **Cadernos da TV Escola: PCN na Escola (Matemática 2)**. Brasília, 1998. p. 36-42.

BITTAR, Marilena. FREITAS, José Luiz Magalhães de. **Fundamentos e metodologia de matemática para os ciclos iniciais do ensino fundamental**. 2. ed. Campo Grande, MS: Ed. UFMS, 2005.

BOYER, Carl B. MERZBACH, Uta C. **História da Matemática**. [tradução de Helena Castro]. São Paulo: Blucher, 2012.

BRASIL. Presidência da República. Casa Civil. **Lei n. 10.639**, de 9 de janeiro de 2003. Altera a Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira", e dá outras providências. Brasília, 2003. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/2003/L10.639.htm>. Acesso em: 13 nov. 2015.

BRASIL. Presidência da República. Casa Civil. **Lei n. 11.645**, de 10 de março de 2008. Altera a Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996, modificada pela Lei n. 10.639, de 9 de janeiro de 2003, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da rede de ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira e Indígena". Brasília, 2008. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2007-2010/2008/lei/l11645.htm>. Acesso em: 13 nov. 2015.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **LDB – Lei nº 9394/96**, de 20 de dezembro de 1996. Estabelece as diretrizes e bases da Educação Nacional. Brasília: MEC, 1996.

BRASIL. Ministério de Educação e Cultura. **Guia de Livros Didáticos PNLD 2014: Matemática**. **Ensino Fundamental Anos Finais**. Brasília: MEC, 2013.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, 5ª a 8ª Séries**. Brasília, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília, 1997.

BROUSSEAU, Guy. *Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática*. In: BRUN, Jean. (Org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 35-113.

BROUSSEAU, Guy. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas**: conteúdos e métodos de ensino. 1. ed. 1. impr. São Paulo: Ática, 2008.

CASTRO, Eduardo de Sá Pereira de. **Explicador de Arithmetica**. 7. ed. Rio de Janeiro: Livraria Nicolau Alves, 1885.

D'ABROSIO, Ubiratan. *Ciência: perspectivas multiculturais*. In: BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Instituto Nacional de Estudos Pedagógicos. **Debates: Multiculturalismo e educação**. Brasília, 1998.

D'ABROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da Teoria à Prática. 19. ed. Campinas, SP: Papirus, 2010. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática)

DEUS, Jorgina de Fátima Pereira de. TAHAN, Simone Panocchia. *A natureza da divisão*. In: Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação a Distância. Secretaria de Educação Fundamental. **Cadernos da TV Escola: PCN na Escola (Matemática 2)**. Brasília, 1998. p. 19-23.

DEUS, Jorgina de Fátima Pereira de. TAHAN, Simone Panocchia. *Algoritmos de multiplicação e divisão*. In: Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação a Distância. Secretaria de Educação Fundamental. **Cadernos da TV Escola: PCN na Escola (Matemática 2)**. Brasília, 1998. p. 24-31.

DIAS, Letícia Pires. **A construção do conhecimento em crianças com dificuldades em matemática, utilizando o Jogo de Regras Mancala**. 2009. 176 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas/SP, 2009.

DIAS, Letícia Pires. CASSIANI, Simone. BRENELLI, Rosely Palermo. *Investigação do Desempenho de Crianças e Adolescentes no jogo Quarto*. In: ENCONTRO NACIONAL DE PROFESSORES DO PROEPRE, 24., 2008, Águas de Lindóia. **Anais...** Águas de Lindóia: Art Point, 2008. p. 241-246.

EDITORA ABRIL. **Os Melhores Jogos do Mundo** (em português). São Paulo: Editora Abril, 1978.

EVES, Howard . **Introdução à história da matemática**. [tradução Hygino H. Domingues]. 5. ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

FNDE – Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação. **Dados Estatísticos. PNLD 2014 – Coleções mais distribuídas por componente curricular – Ensino Fundamental**. Disponível em: <http://www.fnde.gov.br/arquivos/category/125-guias?download=8499:colecoes-mais-distribuidas-por-componente-curricular-ensino-fundamental>. Acesso em: 16 de nov. 2015.

FREITAS, José Luiz Magalhães de. *Teoria das Situações Didáticas*. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. revisada. 2. reimpr. São Paulo: EDUC, 2012. p. 77-111.

GNEKA, Georges. *Aprenda a jogar o Awalé*. In: LIMA, Heloisa Pires. GNEKA, Georges. LEMOS, Mário. **A semente que veio da África**. [ilustrações de Véronique Tadjo]. São Paulo: Salamandra, 2005.

HUIZINGA, Johan. **Homo Ludens:** o jogo como elemento da cultura. [tradução João Paulo Monteiro]. 7. ed. São Paulo: Perspectiva, 2012.

LACANALLO, Luciana Figueiredo. **O Jogo no Ensino da Matemática:** contribuições para o desenvolvimento do pensamento teórico. 2011. 218 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2011.

LARA, Isabel Cristina Machado de. **Jogando com a Matemática na Educação Infantil e Séries Iniciais**. 1. ed. Catanduva, SP: Editora Rêspel; São Paulo: Associação Religiosa Imprensa da Fé, 2011.

LIMA, Heloisa Pires. GNEKA, Georges. LEMOS, Mário. **A semente que veio da África**. [ilustrações de Véronique Tadjo]. São Paulo: Salamandra, 2005.

LIMA, Renan Gustavo Araújo de. **Problemas de Combinatória:** um estudo de conhecimentos mobilizados por licenciandos em Matemática. 2015. 198 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2015.

LODRON ZUIN, Elenice de Souza. SANT'ANA, Nádia Aparecida dos Santos. PRODUZINDO APROXIMAÇÕES DA CULTURA AFRICANA COM A MATEMÁTICA ESCOLAR: a utilização do jogo mancala. **Pedagogia em Ação**, [S.l.], v. 7, n. 1, Dez. 2015. ISSN 2175-7003. Disponível em: <http://periodicos.pucminas.br/index.php/pedagogiacao/article/view/11012>. Acesso em: 21 Jan. 2016.

LORENZATO, Sergio. **Para Aprender Matemática**. 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2010. (Coleção Formação de professores)

MACEDO, Lino de. PETTY, Ana Lúcia Sícoli. PASSOS, Norimar Christe. **Aprender com Jogos e Situações-problema**. Porto Alegre: Artmed, 2000.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. *Engenharia Didática*. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática:** uma (nova) Introdução. 3. ed. revisada. 2. reimpr. São Paulo: EDUC, 2012. p. 233-247.

MENEZES, Luiz Carlos de. **Como o professor vê a educação**. Revista Nova Escola. São Paulo, p. 35, nov. 2007.

MIGUEL, Antonio. MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática:** propostas e desafios. 1. ed. 1. reimp. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

NAME, Miguel Asis. ZAMPIROLO, Maria José C. de V. **Praticando Matemática – edição renovada**. 6º ano. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

PEREIRA, Rinaldo Pevidor. **O Jogo Africano Mancala e o Ensino de Matemática em Face da Lei nº 10.639/03**. 2011. 154 f. Dissertação (Mestrado em Educação Brasileira) – Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, 2011.

QUEIROZ, Sávio Silveira de. **Tipificação de erros em jogos de regras**: uma abordagem construtivista. 1995. 293 f. Dissertação (Mestrado em Psicologia) - Programa de Pós-Graduação em Psicologia, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 1995.

QUEIROZ, Sávio Silveira de. **Inteligência e afetividade na dialética de Jean Piaget:** um estudo com o Jogo da Senha. 2000. 160 f. Tese (Doutorado em Psicologia) - Programa de Pós-Graduação em Psicologia, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

QUEIROZ, Sávio Silveira de. DIAS, Letícia Pires. STURSA, Daiana. SILVA, Maytê Bellesa. PEREIRA, Paula Coimbra da Costa. *Aprendendo com o Mancala – dialética do pensamento em crianças com dificuldade de aprendizagem*. In: Congresso Brasileiro de Psicologia do Desenvolvimento. 2005, São Paulo. **Anais...** São Paulo: Sociedade Brasileira de Psicologia do Desenvolvimento, 2005. p. 114.

RÊGO, Rogéria Gaudencio do. RÊGO, Rômulo Marinho do. **Matematicativa**. 3. ed. rev. E ampl. 1. reimpressão. Campinas, SP: Autores Associados, 2009. (Coleção formação de professores).

SANTOS, Tarcisio Rocha dos. **"Mankala Colhe Três:** jogando e explorando conhecimentos matemáticos por meio de situações didáticas". 2014. 203 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2014.

SILVA, Benedito Antonio da. *Contrato didático*. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática:** uma (nova) introdução. 3. ed. revisada. 2. reimpr. São Paulo: EDUC, 2012. p. 77-111.

SOUZA, Joamir Roberto de. PATARO, Patrícia Rosana M. **Vontade de Saber Matemática**. 6º ano. 2. ed. São Paulo: FTD, 2012.

ZASLAVSKY, Claudia. **Jogos e Atividades Matemáticas do Mundo Inteiro –** diversão multicultural para idades de 8 a 12 anos. [tradução de Pedro Theobald]. Porto Alegre: Artmed, 2000.

## APÊNDICE A: As regras do jogo *awalé a*daptado

1. O objetivo do jogo é realizar uma grande colheita, portanto o jogador que colher o maior número de sementes até o final da partida, é o vencedor.

2. O tabuleiro do jogo é dividido em 2 territórios, com 4 recipientes em cada um.

3. Para iniciar o jogo, cada recipiente receberá 4 sementes, de forma que cada jogador preencha todos os recipientes de seu território, perfazendo um total de 16 sementes.

4. Os jogadores decidem quem irá iniciar a partida. Quem começa, escolhe um dos recipientes do seu território e retira as 4 sementes para redistribuí-las.

5. O sentido para a redistribuição é sempre o anti-horário (direita). Quem começa, escolhe um dos recipientes do seu território e retira as 4 sementes para redistribuí-las. Depois de retirar as 4 sementes do recipiente escolhido, o jogador decidirá o número de sementes que irá distribuir em cada recipiente (o número de sementes deve ser em partes iguais) e distribui as partes em sequência nos recipientes.

6. O próximo a jogar é o adversário. Ele escolhe um recipiente, no seu território, retira dele todas as sementes e as redistribui, respeitando o sentido (anti-horário) e a sequência (não pular nenhum recipiente). Dependendo da quantidade de sementes contidas em um recipiente, na redistribuição as sementes podem se deslocar por entre os recipientes do seu território, mas também nos do adversário. Na distribuição cada recipiente vai acumulando novas sementes, que se somam às iniciais. Também pode acontecer situações em que os recipientes fiquem com poucas sementes.

7. Os recipientes com 0, 1 ou 2 sementes estão em perigo. Se um jogador calcular bem, de forma que a última semente distribuída caia em um recipiente do adversário que tenha 2 ou 3 sementes (contando com a semente que acabamos de depositar), ele tem o direito de recolher as sementes para si e colocá-las no seu depósito. Nesse momento está ocorrendo a captura também conhecida como colheita.

8. Os recipientes do adversário que tenham poucas sementes se tornam alvo. Quando um dos jogadores consegue capturar todas as sementes de algum recipiente, como descrito acima, todos os recipientes precedentes que também contiverem 2 ou 3 sementes poderão ser capturados. O jogador pode, assim, conseguir, numa só jogada, capturar uma série grande de

sementes de vários recipientes em sequência. Nesse momento o jogador estará realizando uma captura múltipla.

9. Se o recipiente escolhido pelo jogador para iniciar a jogada tiver uma quantidade de sementes que fará com que dê uma volta completa no tabuleiro, passando pelos dois campos, nesse caso, a cada passagem o jogador deverá deixar sementes no recipiente de partida.

10. Se em algum momento da partida o adversário não tiver mais nenhuma semente em seu território, o outro jogador deve escolher um recipiente que tenha a quantidade suficiente de sementes para alimentar o território do adversário.

11. Quando um jogador fica sem sementes em seu território e o adversário não tem como jogar para alimentá-lo, a partida termina e o adversário recolhe as sementes que estão nos seus recipientes para seu depósito. Ou, também, quando o jogador capturar 16 sementes do seu adversário.

## ANEXO A: As regras do jogo *awalé* (escritas por Georges Gneka)

**1. <u>Objetivo do jogo:</u>** realizar uma grande colheita, portanto o jogador que colher o maior número de sementes até o final da partida, é o vencedor.

**2. <u>Campo do jogo:</u>** é dividido em 2 territórios, com 6 buracos cada um. Cada jogador escolhe o seu território: o sul ou o norte.

**3. <u>Início do jogo:</u>** cada cova receberá, igualitariamente, 4 sementes, de forma que cada jogador preencha todos os buracos do seu campo, plantando 24 sementes no total.

**4. <u>A vez de cada jogador:</u>** os participantes combinam sobre quem iniciará a partida. Quem começa, escolhe uma das covas do seu território e retira seu conjunto de sementes (4) para redistribuí-las.

**5. <u>A redistribuição:</u>** a direção do jogo é sempre para a direita. Depois de esvaziar a cova escolhida, o jogador coloca uma das 4 sementes em cada uma das covas seguintes. Portanto, os 4 buracos à direita do vazio receberão cada qual uma semente.

**6. <u>Plantar no território do adversário:</u>** o próximo a jogar é o adversário. Da mesma forma, ele escolhe uma cova, no seu território, retira dela todas as sementes e as redistribui, respeitando o sentido (sempre à sua direita) e a sequência (não pular nenhuma cova). Assim, as sementes se deslocam por entre as cavidades do seu território, mas também nas do adversário. E cada cova vai acumulando as novas, que se somam às sementes iniciais. O partilhar também gera situações em que as covas podem ficar com poucas sementes.

**7. <u>Colheita:</u>** as covas com 1 ou 2 sementes correm risco. Se um jogador calcular bem, de forma que a última semente distribuída caia numa cova do adversário que tenha 1 ou 2 sementes, ele tem o direito de esvaziar a cova, recolhendo as sementes para si e tirando-as do jogo. Mas isso vale apenas para as situações em que a última semente distribuída caia em um cova do adversário totalizando assim, 2 ou 3 sementes (contando com a semente que acabamos de depositar).

**8. <u>Colheita múltipla:</u>** as covas do adversário que tenham poucas sementes se tornam alvo. Quando um dos jogadores consegue colher todas as sementes de alguma cova, como descrito acima, todas as covas precedentes que também contiverem 2 ou 3 sementes poderão ser esvaziadas. O jogador pode, assim, conseguir, numa só jogada, colher uma série grande de sementes de várias covas em sequência.

**9. <u>Fazer um krou[41]:</u>** dar uma volta completa. Se a cova escolhida pelo jogador para iniciar a jogada tiver mais de 11 sementes, ele terá de depositar as demais em sequência, uma em cada cova, o que fará com que dê uma volta completa no tabuleiro, passando pelos dois campos. Nesse caso, a cada passagem o jogador deverá pular a cova de partida, que deve ficar sempre vazia.

**10. <u>Dar a comer:</u>** neste jogo, não se tem o direito de deixar o adversário faminto. Se o adversário não tiver mais nenhuma semente no seu campo, o outro jogador deve entregar-lhe uma semente, retirada de uma de suas covas, para que o jogo possa continuar. De uma semente pode-se voltar a ter muitas.

**11. <u>Fim do jogo:</u>** quando o número de sementes for tão pequeno que nenhum participante consiga capturar a semente do outro, o jogo acaba. Ganha quem tiver retirado o maior número de sementes.

**12. <u>O jogador:</u>** ele planta, ele colhe. E deve calcular, pela quantidade de sementes de onde parte, onde vai cair e o quanto poderá colher do adversário. Do mesmo modo, deve calcular para que as covas de seu território não fiquem com poucas sementes.

41 Nome do grupo e da etnia a que Georges Gneka pertence.

## ANEXO B: Letra do corrido “Vem Jogar mais Eu”

**Vem Jogar mais Eu**[42]

Vem jogar mais eu
Vem jogar mais eu, mano meu
Vem jogar mais eu
Vem jogar mais eu, mano meu
Vem jogar mais eu, mano meu
Vem jogar mais eu, mano meu
Vem jogar mais eu
Vem jogar mais eu, mano meu.

42 Disponível em: <http://www.letras.com.br/#!capoeira/vem-jogar-mais-eu>. Acesso em: 04 de Fev. de 2016.