UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

LIANA KRAKECKER

PRODUÇÃO DE CONJECTURAS E PROVAS DE PROPRIEDADES DE ÂNGULOS DE POLÍGONOS: UM ESTUDO COM ALUNOS DO OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

CAMPO GRANDE – MS
2016

LIANA KRAKECKER

PRODUÇÃO DE CONJECTURAS E PROVAS DE PROPRIEDADES DE ÂNGULOS DE POLÍGONOS: UM ESTUDO COM ALUNOS DO OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção título de Mestre em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas

CAMPO GRANDE - MS

2016

LIANA KRAKECKER

PRODUÇÃO DE CONJECTURAS E PROVAS DE PROPRIEDADES DE ÂNGULOS DE POLÍGONOS: UM ESTUDO COM ALUNOS DO OITAVO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção título de Mestre em Educação Matemática.

Campo Grande – MS, 28 de novembro de 2016.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Prof. Dr. João Ricardo Viola dos Santos
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC-SP (Membro externo)

Prof. Dr. Luiz Carlos Pais
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS (Suplente)


PAi, O QUE É "UTOPiA"?!
UTOPiA É COMO A LiNHA DO HORiZONTE...
POR MAiS QUE A GENTE CAMiNHE, NUNCA iREMOS ALCANÇAR!
E PARA iSSO SERVE A UTOPiA...
...PARA NOS FAZER CAMiNHAR!
beckilustras@gmail.com
Fernando Birri, citado por Eduardo Galeano

AGRADECIMENTOS

Depois de tudo, é preciso agradecer...

Um agradecimento especial ao meu orientador, professor José Luiz Magalhães de Freitas, ou simplesmente, **professor Zé**. *De ti, levo um exemplo para a vida! Depois dessa longa caminhada percebo que não poderia ter sido diferente! Obrigada por tudo...*

Aos professores **Saddo, Viola e Luiz** pelas contribuições neste trabalho.*Quero dizer que sinto-me honrada em tê-los em minha banca!*

Aos meus pais, **Dimas e Neide,** meu irmão **Natan** pelo incentivo e pela esperança em mim depositada. *Se concluo esta etapa, é por que vocês sempre estiveram comigo...*

Ao **grupo DdMat** pelas discussões em prol do meu trabalho. *Agradeço cada sugestão, cada ideia, cada uma das contribuições!*

Ao **grupo FAEM**, pela amorosa acolhida. *Se não fosse por vocês, talvez eu nunca fosse ler Peter Pan & Wendy... Vocês tornaram meus dias mais esperançosos!*

A todos os meus queridos **colegas de turma**, em especial, Camila, Florisval, Ivanete, Larissa e Relicler. *Vocês foram e sempre serão minha família de Campo Grande! Obrigada por sempre estarem junto de mim, seja no hospital, nas caminhadas até o lago, dividindo a mesma casa, nas conversas sobre meu casamento ou sobre minha dissertação...*

As minhas irmãs de orientação **Cíntia e Sônia** por tudo que fizeram por mim, sobretudo pelos ouvidos amorosos! *Obrigada sempre!*

A professora **Edilene Simões Costa**. *Muito obrigada pelas palavras encorajadoras nos momentos de dúvida.*

A **escola** e ao professor **Ronaldo** por terem aberto as portas para que pudéssemos desenvolver este trabalho. *Muito obrigada!*

A professora **Clarice** por não se deixar vencer pelo tempo e por seus inúmeros afazeres. *Continue sempre sonhando!*

E por fim, agradeço ao **Ricardo** pela compreensão e apoio nos momentos difíceis. *Não foi fácil ficar longe de ti por todo esse tempo... Mas com amor, paciência e uma espera ansiosa superamos tudo!*

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo analisar a produção de conjecturas e provas de propriedades, envolvendo ângulos de polígonos, de alunos do 8° ano do ensino fundamental. Nesse sentido, o trabalho visa observar argumentos utilizados pelos alunos para validarem as afirmações realizadas, identificar, analisar e classificar estratégias, bem como dificuldades e superações por eles apresentadas. Elaboramos uma sequência didática na qual procuramos privilegiar aspectos relativos à validação de propriedades geométricas, de modo mais específico, de propriedades de ângulos de polígonos. A sequência é composta por atividades que envolvem principalmente as noções de ângulos suplementares, ângulos de uma volta, ângulos opostos pelo vértice, retas paralelas interceptadas por uma transversal, soma dos ângulos internos de triângulos, quadriláteros e outros polígonos convexos, bem como da soma dos ângulos externos de polígonos. Tanto para a elaboração das atividades quanto para análise, tomamos como base a Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, de modo que as principais noções por nós consideradas foram à *devolução* e as *situações didáticas*. Utilizamos também a elaboração de conjecturas na perspectiva de Ponte e o modelo de provas estabelecido por Balacheff, que apresenta quatro tipos de provas, a saber, *empirismo ingênuo* e *experimento crucial*, situadas no nível pragmático, *exemplo genérico* e *experiência mental* referente ao nível intelectual. Para o desenvolvimento da parte experimental da pesquisa, fizemos uso da metodologia da Engenharia Didática descrita por Artigue. As atividades da sequência foram aplicadas em sete sessões, com duração média de duas horas e no contra turno escolar, com alunos do 8° ano do ensino fundamental de uma escola pública de Campo Grande/MS. Consideramos em nosso estudo, sete desses alunos por terem apresentado maior frequência nos encontros. Evidenciamos que as atividades experimentais, como também o uso do transferidor e o trabalho em duplas foram importantes elementos no processo de elaboração de conjecturas. Os alunos formulam enunciados de propriedades, mas apresentam dificuldades em relação à validação, de modo que a maioria das provas situa-se no nível pragmático, pois se fundamentam no transferidor e em experimentações, sem haver elementos voltados à generalização. Por outro lado, apresentam uma evolução referente ao envolvimento nas sessões, as argumentações realizadas e conseguiram estabelecer relações entre o que já foi trabalhado em sessões anteriores e as novas situações propostas. Desse modo, por diversas vezes percebemos a ocorrência da devolução e a vivência de situações adidáticas. No tocante às dificuldades dos alunos, evidenciamos a escrita em linguagem matemática, uma vez que os alunos, de modo geral, escreveram nos protocolos como/porque acreditavam que sua resposta estava correta.

Palavras-Chave:Ângulos de polígonos. Ensino Fundamental. Conjecturas. Validação.

ABSTRACT

This research aimed to analyze the production of conjectures and proofs of properties involving angles of polygons, from students of the 8th Grade of the Elementary School. Thereat, in the process of research, was observe arguments used by the students to validate the statements made, identify, analyze and classify strategies as well as difficulties and overruns presented by them. We developed a didactic sequence in which we seek to give priority aspects concerning the validation of geometric properties, specifically, properties of angles of polygons. The didactic sequence was composed of activities that involve some notions of angles supplementary, angles of one turn, angles opposite the vertex, parallel lines intersected by a transversal line, the sum of angles internal of a triangles, quadrilaterals and other polygons convex and the sum of angles external of polygons. For the preparation of activities and for analysis, we considered the Theory of Didactic Situations by Brousseau, so that the key notions that we considered was the devolution and the situations a-didactical. We also use the formulation of conjectures in the perspective by Ponte and the testing models established by Balacheff, a presenting four types of proves: naive empiricism and crucial experiment, located at the pragmatic level; and the generic example and thought experiment, for the intellectual level. For the development of the experimental part of the research, we used of the Didactic Engineering Methodology described by Artigue. The activities of the didactic sequence have been applied in seven sessions, with an average duration of two hours and in the reverse time of classes with students of the 8th Grade of one Public Elementary School, in Campo Grande / MS. We considered in our research a total of seven of these students because they appear more frequently in our meetings. We demonstraded that the experimental activities, as well as the use of the protractor and the work in pairs were important elements in the development of conjectures by the students. The students formulated the enunciation of properties, but a presented difficulties in the validation, so that most of the proves are in the pragmatic level, because are based on the use of protractor and experimentation, without having elements of generalization. On the other hand, the students presented a progress regarding involvement regarding in the sessions, at the arguments made and were able to establish relationships between what was worked in previous sessions and new situations proposed. Thus, many times we perceive the occurrence of the devolution and the experience of situations a-didactical. Regarding students difficulties, we demonstrate the writing mathematical, considering what the students written in the protocols, for example, how and why they believed that theirs answers were correct.

Keywords: Angles of polygons. Elementary School. Conjectures. Validation.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

> De um forno à lenha, saiam pães quentinhos, batatas assadas, cucas recheadas, ideias, desenhos e continhas... Lembro-me que os pedacinhos de giz que restavam ao final de um dia de aula, coloriam a porta do forno que, naquele tempo parecia ser enorme. Era grande o suficiente para se fazer passar por um quadro negro! Mas, o tempo foi passando e aos poucos deixei de levar os gizes para casa...

Sempre tive um apreço especial pela disciplina de matemática, como também pelos professores que a ministravam. Do ensino fundamental, resgato as ideias e propostas de uma professora de matemática sonhadora, sempre envolvida em atividades diferenciadas. Com ela, participei de diversas feiras da área apresentando projetos desenvolvidos em sala de aula. Um deles, com o qual ela ainda trabalha nos dias de hoje, envolvia a utilização do origami[1] no ensino e aprendizagem da geometria, principalmente, no que se refere aos conceitos primitivos e propriedades de polígonos.

Mais tarde, no ensino médio, a disciplina de matemática configurou-se deferente. Tratava-se de um professor que apreciava o silêncio e o estudo individual, e talvez por isso, muitos o chamavam de "tradicional". Depois de uma explicação sobre o conteúdo, recebíamos diversas atividades que precisávamos corrigir, indo até o quadro negro mostrar como as tínhamos resolvido. Eu adorava este momento, pois agora já não se tratava mais do tal forno da minha avó: era um quadro negro de verdade!

Na época próxima ao vestibular foi preciso realizar uma escolha sobre qual profissão seguiria. Influenciada por tudo isso, cogitei cursar licenciatura em Matemática e conversei com alguns professores para saber o que eles me diriam sobre esta escolha. A maioria me incentivou, semeando desde lá a ideia de uma pós-graduação em nível de Mestrado. Assim, em 2011 iniciei os estudos no Instituto Federal Catarinense – Campus Concórdia, passando a integrar a segunda turma do curso, a ser formada pela instituição.

Durante minha formação inicial, busquei envolver-me com as atividades oferecidas, buscando contribuições para minha trajetória acadêmica e profissional com o propósito de desenvolver-me ao máximo. Sempre que possível, participei de eventos da área, ora como ouvinte, ora apresentando relatos de experiência relacionados às propostas das disciplinas do curso. A geometria mostrou-se um tema frequente, tanto

[1] A palavra *origami* advém de *oru* (dobrar) e *kami* (papel). Técnica conhecida como arte de dobrar papel.

nas discussões com os colegas e professores, quanto nos trabalhos desenvolvidos, articulada a diferentes temas, resolução de problemas, jogos, origamis, entre outros.

Desde 2012 trabalhei em Escolas da Rede Estadual de Santa Catarina, estado em que nasci e vivi até pouco tempo, atuando como professora nos níveis Fundamental e Médio durante três anos. Um tempo consideravelmente curto, mas suficiente para suscitar inúmeros questionamentos e inquietações. Como ensinar? Como o aluno aprende? O que eu realmente faço na sala de aula? Por que demonstrar? Essas questões não eram apenas minhas. Eram também dos poucos colegas de turma que atuavam na área dos professores com quem tinha a oportunidade de conversar. Isso ficou mais evidente durante minha participação no Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) por meio do contato com outros profissionais. Em meio às conversas nos perguntávamos, por exemplo, como/porque os alunos não conseguiam bom desempenho numa avaliação cujas atividades eram idênticas às do caderno. Ora, notas podem não refletir o que o aluno realmente (não)sabe, mas eram uma esperança, uma luz no final caminho, parecia um último apelo: por favor, tirem notas boas! Acertem! Estudem o que está no caderno!

Foi neste momento também que pude observar na prática a aversão à geometria por grande parte dos professores com quem trocava ideias. Era muito difícil eu participar das discussões sobre o tema na licenciatura, pois minha vivência enquanto aluna sinalizava o contrário, pois os professores que tive sempre trabalharam este conteúdo.

Bem, finalizando esta etapa, a única certeza que me restava estava relacionada à complexidade das questões sobre o ensino e a aprendizagem. Por que os alunos pareciam não aprender? Eles não aprendiam? Não queriam aprender? Sendo assim, era preciso seguir em frente.

Com o interesse de continuar meus estudos após a graduação, dentre os vários cursos de mestrado oferecidos no país, encontrei o curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Interessei-me pela área de concentração Ensino e Aprendizagem da Matemática, pois ela contemplava aquilo que eu queria compreender, e, por conseguinte, pesquisar. Dentre as questões que trouxe comigo, a partir de minhas vivencias enquanto professora,cito duas: *Por que alguns alunos encontram tantas dificuldades para mobilizar diferentes conteúdos matemáticos para resolver uma* *atividade? Qual o motivo da resistência apresentada quando se trata de reinvestir alguns conceitos para provar uma propriedade Matemática?*

Após aprovada na seleção passei a discutir, juntamente com meu orientador, minhas intenções iniciais de pesquisa, bem como possibilidades de adequações. A opção por investigá-las por meio de uma sequência didática que privilegiasse aspectos relativos à validação de propriedades geométricas se deu por dois motivos. O primeiro, por acreditar que a geometria às vezes ocupa sim, um lugar de menor destaque nas aulas de matemática e que apesar disso constitui um campo fértil para a realização experimentações e validações. O segundo, por considerar que nesse processo ocorre o reinvestimento de conceitos matemáticos já vistos anteriormente, o que nos possibilitaria investigar como alunos mobilizam tais conhecimentos e como fazem uso deles para realizar a atividade proposta.

Diante disso, realizei leituras sobre o ensino da geometria, sobre os modos de validação de propriedades, de trabalhos cuja proposta se aproximasse daquela que pretendíamos implementar dentre outras. Em meio a este processo, longe de ser linear, e às discussões, seja com o orientador, nas disciplinas ou no grupo pesquisa, delineamos nossa questão de pesquisa: *como alunos do 8° ano do ensino fundamental elaboram conjecturas e provas de propriedades envolvendo ângulos de polígonos?*

Dos estudos preliminares, em especial, dos trabalhos de Mello (1999), Piccelli (2010), Aguilar (2012) e Oliveira (2009), das orientações curriculares e da Teoria das Situações Didáticas (TSD), de Brousseau (1996; 2008), elaboramos uma sequência didática com a intenção de analisar aspectos relativos à validação de propriedades de ângulos de polígonos. Além destes referenciais, consideramos a elaboração de conjecturas na perspectiva de Ponte (2003) e o modelo de Tipologia de Provas de Balacheff (1988) referente aos tipos de provas que os alunos poderiam apresentar.

Com a intenção de nos aproximarmos de nosso objeto de estudo, a produção de conjecturas e provas de ângulos de polígonos, no capítulo 1 discutimos aspectos relacionados à geometria dedutiva, como também ao ensino deste conteúdo. Apresentamos ainda, considerações acerca de pesquisas que tangenciam o trabalho que desenvolvemos e finalizamos o capítulo apresentando nossos objetivos: geral e específicos.

No capítulo 2 estão descritos os principais elementos teóricos por nós assumidos em relação à TSD e à elaboração de conjecturas e de provas de propriedades.

No capítulo 3, dialogamos com os documentos oficiais e com o livro didático adotado pela escola sobre questões relativas à argumentação, elaboração de conjecturas e de provas, com a intenção de observar o que nos dizem sobre estes elementos. No caso específico dos livros didáticos, procuramos descrever como tratam o tema ângulos de polígonos e os tipos de prova que apresentam.

Aspectos relativos aos encaminhamentos metodológicos são encontrados no capítulo 4, em que descrevemos a Engenharia Didática (ARTIGUE, 1988), metodologia da qual fizemos uso, o contexto e os participantes da pesquisa.

No capítulo 5 o leitor encontrará a análise *a priori*, na qual descrevemos os objetivos das sessões e atividades, estratégias de resolução, possíveis comportamentos e produções dos alunos, questionamentos a serem feitos, dentre outras coisas. Estas são seguidas de um resumo sobre como ocorreram às experimentações, análises *a posteriori* e considerações sobre cada uma das sessões em específico.

E, por fim, as considerações e conclusões com base nas análises que fizemos em relação ao nosso objeto de estudo.

1. ASPECTOS INICIAIS DA PESQUISA

Neste capítulo vamos realizar discussões referentes a *aspectos da geometria dedutiva*, assim como *considerações sobre o Ensino da Geometria* pensando em sua abordagem em sala de aula. Procuramos envolver elementos como, por exemplo, a pouca valorização deste conteúdo e a abordagem de provas de propriedades de um modo geral. Além disso, discutimos a complexidade das noções de ângulo e polígono.

Apresentamos também considerações advindas de *pesquisas próximas* ao nosso objeto de estudo, bem como os *objetivos da pesquisa* por nós definidos. Trata-se de uma tentativa de retratar a composição dos primeiros movimentos da pesquisa e algumas de suas idas e vindas.

1.1 Aspectos da geometria dedutiva

As primeiras considerações referentes à geometria são, certamente, bastante antigas. As primeiras noções geométricas surgiram a partir de diversas circunstâncias cotidianas, como por exemplo, a necessidade de demarcação de terras, a observação do contorno do Sol, do movimento descrito ao arremessar uma pedra para o alto, dentre muitos outros (EVES, 1992).

Com o passar do tempo, por meio de observações de tamanhos, formas, dentre outros, foram realizadas generalizações e além dos problemas geométricos concretos considerados isolados, passaram a serem tratados também, os problemas ordenados em conjuntos. Estes poderiam ser resolvidos a partir de um mesmo procedimento geral. Assim, "a geometria transformou-se num conjunto de receitas práticas e resultados de laboratório, alguns concretos e alguns apenas aproximados, referentes a áreas, volumes e relações entre as várias figuras sugeridas por objetos físicos." (EVES, 1992, p. 3).

Mais tarde, defendendo a ideia de que as conclusões geométricas deveriam ser obtidas por meio de raciocínios dedutivos e de que as verdades concluídas a partir de experimentações em laboratório deveriam ser abandonadas, os gregos deram início ao que se pode chamar de geometria demonstrativa. Dentre os matemáticos da época por volta dos anos 600 a.C., destacam-se Tales de Mileto e Pitágoras de Samos. O primeiro é considerado precursor da organização dedutiva da geometria. O segundo, juntamente com sua irmandade secreta, forneceu contribuições para a álgebra geométrica e exploraram consideravelmente os aspectos dedutivos da geometria. (EVES, 1992).

Posteriormente por volta de 300 a.C Euclides, outro grande matemático grego cujo trabalho teve e tem grande repercussão no mundo, em específico, no ensino de geometria. Sua obra mais famosa é constituída de 13 volumes, quase 500 proposições é intitulada “Os Elementos”. Tomando como base cinco postulados e cinco axiomas, Euclides apresenta dedutivamente toda teoria, organizando produções de três séculos anteriores.

Outras civilizações e outros matemáticos também contribuíram para o desenvolvimento da geometria dedutiva do modo como hoje se constitui. Entretanto, fazendo um primeiro resgate da nossa problemática, gostaríamos de propor o seguinte questionamento: como, a geometria dedutiva poderia ser introduzida em sala de aula no Ensino Fundamental?

Em relação a isso, Segadas e Teixeira (1990) fazem uma análise acerca do desenvolvimento do raciocínio dedutivo em geometria explicitando aspectos antes, durante e depois do Movimento da Matemática Moderna. Segundo os autores, antes desse Movimento as demonstrações, neste trabalho entendidas como um tipo prova[2], ocupavam um lugar de destaque e o raciocínio dedutivo já era explorado na antiga 3ª e 4ª séries (ginasial) na álgebra, mas principalmente, na geometria. Desta forma, o curso iniciava por meio da apresentação de alguns conceitos tais como, proposição, postulado, teorema, hipótese e tese, bem como os conceitos de ponto, reta, plano, dentre outros. Assim,

> Toda a seqüência era apresentada de forma tal, que na demonstração de um teorema se pretendia somente recorrer a axiomas já apresentados ou a teoremas já demonstrados. Para facilitar a referenda aos teoremas no desenvolvimento das demonstrações, usava-se por vezes enumerá-los. (SEGADAS; TEIXEIRA, 1990, p. 2).

Na década de 1960, esse enfoque às demonstrações também era evidenciado nos exercícios propostos pelos livros didáticos, que de modo geral, realizavam muitas demonstrações e propunham, ao final de cada capítulo, exercícios do tipo "provar os teoremas". Nessa abordagem, tinha-se a intenção de colocar o aluno diante do modelo de construção da geometria proposto por Euclides, com a ideia de construção axiomática a partir de conceitos primitivos, postulados e axiomas (IMENES, 1987).

Durante o Movimento da Matemática Moderna, mudanças radicais ocorreram em relação, especificamente, ao ensino da geometria, dada a influência do formalismo e,

---

[2] Ver sessão 3.4

nesse sentido, os conteúdos geométricos passam a ser abordados por meio de espaços vetoriais e transformações. Tinha-se uma preocupação com precisão e coerência dos símbolos, representações e com o rigor das definições. De acordo com Miorim (1998, p. 114) "em nenhum outro momento o ensino da Matemática foi tão discutido, divulgado e comentado como naquele período. Os jornais noticiavam, os professores faziam cursos, os livros didáticos multiplicavam-se, os pais assustavam-se e os alunos "aprendiam" a Matemática Moderna".

Ainda, procurava-se trabalhar uma geometria "intuitiva", que traduzia-se nos livros pela utilização de teoremas como postulados, mediante os quais se resolvia problemas e não havia preocupação em construir uma sistematização a partir de noções primitivas. Então, muitos professores ficaram perdidos em meio às controvérsias sobre a relação entre a álgebra linear e a geometria. A proposta de ensinar esta última sob enfoque das transformações não era assunto de domínio da grande maioria dos professores, que passaram a deixar a geometria para segundo plano (PAVANELLO, 1993).

Segundo Imenes (1987), ao mesmo tempo em que a geometria recebia diversas modificações, ocorria o abrandamento em relação às demonstrações, à exigência de se demonstrar teoremas.

> Não se pode afirmar que este abrandamento fizesse parte das novas propostas trazidas pela Matemática Moderna. Talvez ele tenha sido uma resposta a inadequação do tratamento que antes se dava a geometria: no momento das mudanças aproveitou-se para pôr de lado uma abordagem não apropriada. É difícil saber até onde esta atitude foi consciente. O fato é que este abrandamento na exigência de se demonstrar os teoremas teve aspectos positivos e negativos. Um aspecto positivo esta na ruptura com o modelo anterior (onde pretendia-se "demonstrar tudo"), que já havia demonstrado sua inadequação. Um aspecto negativo daquele abrandamento é que, com o passar do tempo, passou-se ao extremo oposto: "demonstrar nada" (IMENES, 1987, p. 57).

Na década de 1970, começam a surgir diversas críticas a esse Movimento, já que o efeito esperado não estava sendo atingido. Algumas mudanças em relação a isso podem ser observadas nos livros didáticos, os quais conservaram algumas demonstrações em seu conteúdo, diferentemente dos exercícios propostos, nos quais atividades para demonstrar já não eram encontradas.

Na sala de aula, como dito, deixa-se de abordar e incentivar os alunos a demonstrarem sob o pretexto da falta de tempo e de suas dificuldades de compreenderem as demonstrações, devido à complexidade exigida para realizar tal atividade.

Estes aspectos relativos ao abandono da geometria e das provas, junto de outros como, por exemplo, a formação dos professores em geometria discutido na próxima sessão.

1.2. Considerações sobre o ensino da geometria

De acordo com Pavanello (2004), a partir da Matemática Moderna, a geometria foi praticamente excluída do currículo, passando a ser desenvolvida no âmbito escolar de modo muito mais formal. Felizmente, nos últimos anos, a quantidade de professores e pesquisadores que têm dispensado uma maior atenção à geometria e ao seu ensino tem sido crescente. Mas, ainda é possível observar algumas lacunas decorrentes de tal exclusão, como por exemplo, a constatação de dificuldades quanto à utilização de representações geométricas para a visualização de conceitos matemáticos em alunos de cursos superiores desta área. (PAVANELLO, 2004).

Gazire (2000) em sua tese de doutorado apresenta um estudo acerca do (não) resgate da geometria, referindo-se à exclusão de seu ensino, e aponta algumas causas alusivas ao fato deste conteúdo ainda ocupar um lugar à margem nas aulas de alguns professores. De acordo com a autora, o analfabetismo, no sentido do não domínio dos conteúdos geométricos, por parte de muitos deles é explícito, na medida em que eles próprios apresentam dificuldades devidas, principalmente à má formação concernente aos conteúdos geométricos. Essa lacuna de formação se manifesta, sobretudo quando se trata de definições complexas, como é o caso de ângulo, de polígono, poliedro entre outras e também com a produção de organizações dedutivas básicas, como algumas demonstrações diretas de proposições elementares.

Uma das explicações para essa dificuldade pode consistir na maneira pela qual estes mesmos professores aprenderam geometria ao longo de sua vida escolar. Isso porque muitos deles estudaram o referido conteúdo apenas durante o curso de sua formação inicial e, assim mesmo, sem muita ênfase. Isso também fica evidente no estudo de Pais e Freitas (1999), no qual os professores reconhecem as deficiências de suas formações com relação ao conteúdo – geometria – como também, às suas formas de apresentação didática. Assim, “[...] não é de se estranhar que o uso de ideias geométricas possa trazer algumas dificuldades para os professores e seja um dos obstáculos ao resgate da Geometria” (GAZIRE, 2000, p. 182). Trabalhos como o de Ferreira, Soares e Lima (2009) e Almouloud e Mello (2000) sugerem que este cenário não mudou em demasiado ao longo do tempo.

Há, pois, quem não goste de ensinar os conteúdos geométricos, dentre outros motivos, pelas experiências tidas durante a formação (pouca ênfase, foco em provas muitas vezes sem sentido à primeira vista, geometria algebrizada, dentre outros). Outros justificavam o “não trabalho” da geometria pela falta de tempo durante o ano escolar, uma vez que a maioria dos livros reservava apenas o último capítulo a ela (embora isso tenha mudado consideravelmente nos últimos anos).

Ademais, Gazire (2000) também constatou que os professores pesquisados tendiam a reproduziras aulas do modo como aprenderam, recaindo em aulas nas quais prevaleciam a imitação (dos professores que tiveram) sem criatividade. Essa reprodução, por sua vez, acarretava em uma geometria algebrizada com ênfase no uso de algoritmos para a resolução de atividades geométricas. E assim, o trabalho com a álgebra ganha preferência, pois o trabalho com a geometria tende a ser reduzido a medições e aplicação de fórmulas (GAZIRE, 2000).

Ainda hoje, apesar do ensino da geometria ter mais evidencia no cenário educacional, ainda é negligenciado por muitos professores que optam por uma abordagem na perspectiva pragmática, recaindo no ensino de medidas e álgebra. Barreto (2005, p. 1) escreve que “um dos problemas mais comuns observados nas aulas de Matemática é que os alunos são expostos a situações padrão acarretando uma aprendizagem de memorização e mecanizada.”.

Imenes (1987, p. 57), aponta que de modo geral, “[...] os alunos são apenas informados a respeito de certas propriedades das figuras. Nem descobrem tais propriedades fazendo experiências, nem chegam a elas fazendo deduções.” Pesquisas como as de Oliveira (2009), Mello (1999), entre outras, nos fazem acreditar que esse panorama não tenha mudado tanto assim na maioria das escolas. Em seus trabalhos, como veremos na sessão 1.3, a elaboração de conjecturas e a prova destas por meio de um raciocínio dedutivo é um trabalho difícil de ser desenvolvido por que os alunos não estão acostumados com este tipo de atividades. Então, apesar do destaque e das orientações dos documentos oficiais direcionadas a um ensino que valorize a produção de conjecturas e o processo dedutivo em geometria, ainda é muito evidente a algebrização e tal como Imenes escreve, “informação” de fórmulas e propriedades. Infelizmente, isso se manifesta em muitos alunos quando questionados acerca dos motivos pelos quais não gostam de Matemática, uma vez que muitos deles dizem não entender “por que” precisam repetir e repetir inúmeras vezes o mesmo processo, as mesmas fórmulas, os mesmos passos, enfim. Ou ainda, não compreendem de onde as coisas surgem ou por que motivo são válidas. Para Imenes (1987),

> Quando afirmo que simplesmente informamos os alunos a respeito destas propriedades quero dizer que as idéias contidas naquelas proposições não costumam ser construídas. Poderíamos construí-las realizando experimentos simples com tesoura e papel para, depois, apresentá-las dedutivamente (como mostraremos logo adiante). Entretanto, não se faz nem uma coisa nem outra. Estas informações costumam ser apresentadas isoladamente, uma a uma, sem que se estabeleça qualquer relação entre elas. São apresentadas sem justificativas e como se fossem fatos independentes. (IMENES, 1987, p. 57).

Romper com essa forma de apresentação dos conteúdos matemáticos se torna uma tarefa difícil para os professores. Para Almouloud e Mello (2000), o baixo desempenho de alguns alunos em geometria, deve-se às escolhas didáticas feitas pelos professores. De acordo com os autores, faz-se necessário preocupar-se com uma formação inicial que valorize o trabalho com a demonstração no ensino básico afim de que estas, quando trabalhadas, não sejam apenas informadas aos alunos. Acreditamos que deste modo poder-se-ia diminuir as chances de se tornarem experiências negativas em relação à geometria, tal como apontado por Gazire (2000).

Nessa perspectiva, o professor assume um papel muito importante, pois ele é o responsável por estimular a interação, a cooperação entre os alunos, bem como mediar às discussões nas quais são confrontadas as ideias, convidando os alunos a formularem argumentos e validá-los (BRASIL, 1997).

Com relação à formação dos professores, Almouloud e Mello (2000) sublinham que boa parte daqueles atuantes nas escolas, recebeu uma formação precária em relação à geometria, devido, dentre outras coisas, à influência do movimento da Matemática Moderna nas décadas de 60 e 70. Sobre isso, os Parâmetros Nacionais Curriculares (PCNs) sublinham que:

> O ensino passou a ter preocupações excessivas com abstrações internas à própria Matemática, mais voltadas à teoria do que à prática. A linguagem da teoria dos conjuntos, por exemplo, foi introduzida com tal ênfase que a aprendizagem de símbolos e de uma terminologia interminável comprometia o ensino do cálculo, da geometria e das medidas. (BRASIL, 1997, pg. 20)

Diante desse quadro, D’ambrosio (2009, p.59) escreve que como consequência do fracasso do Movimento da Matemática Moderna ocorreu o surgimento de outro modo de conduzir as aulas, com mais participação dos alunos e menos ênfase em contas. Mesmo assim,

> [...] a Geometria tem tido pouco destaque nas aulas de Matemática e, muitas vezes, confunde-se seu ensino com o das medidas. Em que pese seu abandono, ela desempenha um papel fundamental no currículo, na medida em que possibilita ao aluno desenvolver um tipo de pensamento particular para compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive. [...] Além disso, é um campo fértil de situações-problema que favorece o desenvolvimento da capacidade para argumentar e construir demonstrações. (BRASIL, 1998, p.122)

Diante de tudo isso, observamos que estes documentos também destacam a importância das atividades de geometria as quais são favoráveis para que o professor possa fazer com que os alunos percebam a “importância e a necessidade da prova para legitimar as hipóteses levantadas” (BRASIL, 1998, p.126). Neste sentido, vemos também a necessidade de se explorar situações nas quais os alunos possam vivenciar os processos de investigar, argumentar, analisar, produzir conjecturas e validar suas respostas, de modo que seja possível estimular o pensamento matemático dedutivo. E, aqui, “o realizado com a geometria, [...] pode favorecer a análise de fatos e de relações, o estabelecimento de ligações entre eles e a dedução, e a partir daí, de novos fatos e de novas relações.” (PAVANELLO, 1993, p. 16).

1. 2. 1. Ângulos e polígonos

As orientações curriculares sinalizam que noções sobre ângulos devem ser abordadas desde os primeiros anos de escolaridade. Neste nível, os polígonos e suas diferenças e semelhanças, por exemplo, podem ser identificados por meio de critérios como número de lados, número de ângulos, dentre outros (BRASIL, 1997). Uma definição mais elaborada será trabalhada mais tarde nas séries finais do Ensino Fundamental. Contudo, muitos autores não explicitam que se trata da definição, e geralmente se propõem a trabalhar com o conceito de ângulo, “[...] mas o que vem em seguida não é um “trabalho” e sim uma frase, geralmente curta, seguida de observações quanto à notação.” (VIANNA; CURY, 2001, p. 23).

O que se percebe é que não há um consenso sobre a definição de ângulo propriamente dita. Para os gregos, “um ângulo é uma deflexão ou quebra em uma linha reta”. Para Euclides, “um ângulo plano é a inclinação recíproca de duas retas que num plano têm um extremo comum e não estão em prolongamento”. No ano de 1893, H.

Schotten resumiu as definições de ângulo em três tipos: “a diferença de direção entre duas linhas retas; a medida da rotação necessária para trazer um lado de sua posição original para a posição do outro, permanecendo entrementes no plano do ângulo; a porção do plano contida entre as duas retas que definem o ângulo” (SHEREVES, 1992, p. 31).

A complexidade em torno da definição de ângulo também é evidenciada no estudo de Vianna e Cury (2001), no qual analisaram livros didáticos e identificaram três tipos de definições: àquelas que recorrem às semirretas, àquelas que recorrem à região do plano e àquelas que não se enquadram em nenhum destes dois casos. Os autores escrevem que essas definições nem sempre abrangem todos os tipos de ângulos. Esta, por exemplo, não aceita ângulos nulo e raso: “considere três pontos não colineares: A, O e B. Ângulo geométrico AÔB é a figura formada pelas semirretas OA e OB (BONGIOVANNI et al., 1990, p. 212, 5a série *apud* VIANA; CURY, 2001).

Neste trabalho adotamos a seguinte definição de ângulo:

Duas semirretas de mesma origem dividem o plano que as contém em duas regiões. Cada uma dessas regiões chama-se *ângulo*.

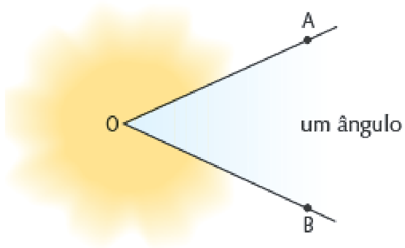


Figura1 - Representação de um ângulo.

As semirretas OA e OB são chamadas de *lados* do ângulo e fazem parte dele. A origem comum, o ponto O, chama- se *vértice* do ângulo. Se os lados do ângulo forem duas semirretas opostas, têm-se um ângulo de meia volta ou *ângulo raso*. Se os lados do ângulo forem semirretas que coincidem, forma-se o *ângulo nulo* ou o *ângulo de uma volta.*

Existem diversas formas de se representar um ângulo. Considerando a figura 2, o ângulo dado pode ser identificado como CÂB ou BÂC. Ao fazer uso desta notação, a letra indicativa do vértice deve sempre estar entre as outras duas que representam pontos nas semirretas que formam o ângulo. Neste caso, também seria possível utilizar a notação Â (pois A é o vértice do ângulo). Outra forma pela qual se pode representá-los é por meio de letras gregas, como na figura 3.

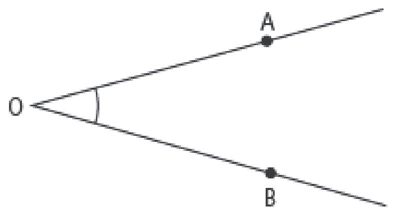


Figura 2 - Representação do ângulo AÔB = BÔA

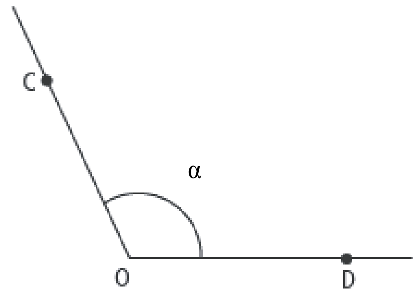


Figura 3 - Representação do ângulo α

Os ângulos podem ser medidos por meio do transferidor e sua unidade de medida é o grau, de origem babilônica. Os babilônios, civilização que se desenvolveu em torno da cidade da Babilônia no primeiro milênio a.C., absorveram grande parte da matemática egípcia e a ela acrescentaram conquistas outras. Dentre elas, o desenvolvimento da álgebra elementar e de um sistema próprio de numeração de base sexagesimal. Nas palavras de Barbosa (1999, p. 33) para eles "[...] foi muito natural dividir o círculo em 360 partes (grau), e cada uma dessas partes em 60 partes (minuto), e repetir o processo para estas subpartes. Assim, o grau é uma invenção dos Babilônicos [...]".

Diniz e Smole (2008) também sinalizam que o conceito de ângulo não é simples e pode levar um longo tempo para ser compreendido. Segundo as autoras, primeiro os alunos percebem o ângulo de modo holístico, depois conseguem perceber, por exemplo,quais são maiores e menores do que 90°, bem como identificar algumas propriedades. Entretanto, se o objetivo do ensino for à construção de noções, essas propriedades não devem ser trabalhadas como regras prontas, mas sim, acompanhadas de trabalhos com ângulos e polígonos (DINIZ; SMOLE, 2008).

Com relação aos polígonos, têm-se:

Dada uma *poligonal*, figura formada por uma sequência de pontos A_1, A_2,..., A_n, e pelos segmentos $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$,..., $\overline{A_{n-1}A_n}$ em que os pontos são seu *vértice* e os segmentos seus *lados*, um *polígono* é região do plano delimitada por uma poligonal em que são satisfeitas as seguintes condições:

a. $A_n = A_1$,

b. Os lados da poligonal pertencem ao polígono,se interceptando somente em suas extremidades e,

c. Dois lados com mesma extremidade não pertencem a uma mesma reta.

d. Um polígono de vértices A_1, A_2, ... , $A_{n+1} = A_1$, é representado por $A_1A_{2,}A_3$, ... A_n e terá n lados, n vértices e n ângulos. (adaptada de BARBOSA, 1999, p. 29-30). Como exemplo, temos:

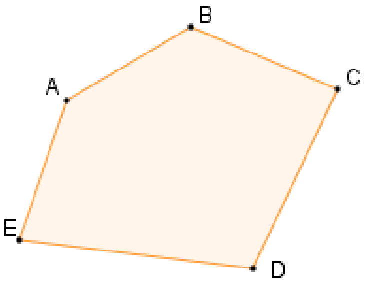


Figura 4 - Polígono ABCDE

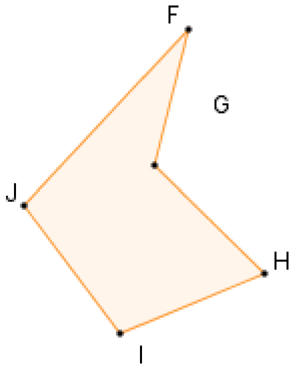


Figura 5 - Polígono FGHIJ

O polígono ABCDE, por exemplo, é composto por cinco lados, cinco vértices (A, B, C, D e E), como também por cinco ângulos: $E\hat{A}B$, $A\hat{B}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{D}E$ e $D\hat{E}A$.

1.3. Pesquisas próximas ao objeto de estudo

Com a intenção de identificar trabalhos existentes com relação à elaboração de conjecturas e à prova de propriedades geométricas, de maneira que estes pudessem fundamentar nossos primeiros movimentos no percurso desta pesquisa, realizamos uma busca em diversas fontes. Dentre elas, os anais das últimas edições do EBRAPEM (Encontro Nacional De Estudantes De Pós-Graduação Em Educação Matemática) e do SIPEM (Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática). Identificamos alguns trabalhos que envolviam elaboração de conjecturas, provas e percebemos que a maioria deles atrelavam o tema ao uso de *softwares*, como pode-se observar em Lima (2013), Silva (2014), Guerato (2014). Outros direcionaram seus estudos a professores e a licenciados, como Santos (2013) e Amorin e Pietropaolo (2011), respectivamente.

Olhamos também o banco de teses e dissertações da CAPES e o banco de teses e dissertações de Universidades. Foram encontradas diversas pesquisas próximas, contudo, as que não contemplaram a geometria foram descartadas. Em um segundo processo de filtragem, foram selecionadas aquelas cujas atividades realizadas se aproximaram daquelas que pretendíamos implementar. Desta forma, direcionamos nosso olhar para os trabalhos de Mello (1999), Piccelli (2010) e Aguilar Júnior (2012), Oliveira (2009).

Mello (1999) tinha o objetivo de elaborar uma sequência didática com alunos de oitava série do Ensino Fundamental, considerando a demonstração. Assim, desenvolveu 8 sessões com 14 alunos de uma escola pertencente a rede particular de ensino, que já haviam estudado geometria plana e desenho geométrico. A autora abordou alguns elementos da geometria iniciando pelos conceitos primitivos de tal conteúdo. Em suas considerações ela salienta que os resultados que obteve "determinam a possibilidade de desenvolver a introdução da técnica da demonstração a alunos da oitava série do Ensino Fundamental." (MELLO, 1999, p. 171).

Em seus estudos preliminares a autora constatou que existe certo preconceito por parte dos professores em relação à demonstração, reforçado pela ausência em livros didáticos, assim como discutimos na sessão anterior com base nos olhares de Gazire (2000), Pavanello (2004) e outros. Mello (1999) destaca ainda que os alunos com os quais trabalhou já haviam tido contato com o conteúdo abordado e, diferentemente de nossa proposta, focou em específico nas demonstrações e sua aprendizagem. Apesar disso, trata-se de uma pesquisa que colabora com nossos pressupostos acerca da possibilidade de se desenvolver um trabalho referente à validação e prova de propriedades matemáticas.

A pesquisa de Aguilar Júnior (2012) teve o intuito de entender como se dá a compreensão e a aceitação dos professores quanto às argumentações e provas apresentadas pelos alunos, bem como verificar se existe a preocupação por parte dos docentes do Ensino Básico em elaborar atividades e aulas que explorem e fomentem a habilidade de argumentar e provar em Matemática. Em uma das etapas de sua pesquisa, elaborou questões aplicadas a 124 alunos do 8° e 9°ano, de duas escolas municipais e uma escola federal. As atividades exigiam a construção de argumentos que comprovassem a validade das afirmações matemáticas e eram relativas à aritmética de números inteiros, sequências numéricas e identificação de padrões geométrico e numérico e geometria plana. O autor constatou que a maioria das provas apresentadas pelos alunos foi classificada como empirismo ingênuo[3]e que os professores investigados

[3] Ver sessão 2.4

manifestam pouca preocupação quanto ao planejamento de atividades de construção e argumentos que favoreçam a evolução dos tipos de prova.

Aguilar Júnior (2012) aponta que de maneira geral, o ensino da prova não faz parte da prática pedagógica dos professores da escola básica. Segundo o autor, existem diferentes visões acerca da prova, a saber, prova como instrumento de comunicação de saberes matemáticos; prova como validação de um resultado matemático; prova como argumentação encadeada; prova como instrumento de avaliação. Isso também foi discutido no estudo de Pais e Freitas (1999), no qual eles mostram que alguns professores acreditavam que para se demonstrar determinada propriedade bastava, por exemplo, mostrar sua validade através de experimentações práticas. De alguma maneira, estes aspectos podem ser resquícios da desvalorização da geometria e das demonstrações sob influência do Movimento da Matemática Moderna. Isso por que como discutimos, a maioria destes professores teve uma formação carente tanto em relação à geometria como também, às demonstrações que muitas vezes são abordadas de uma maneira que parece não fazer sentido (GAZIRE, 2000).

Evidenciamos também a pesquisa realizada por Piccelli (2010) cujo objetivo foi investigar a elaboração e a validação de conjecturas em Geometria plana por alunos do primeiro ano do Ensino Médio. O autor utilizou o software Cabri-Géomètre e pontua que apesar do software ter sido uma importante ferramenta para a validação das conjecturas relacionadas à geometria, a maioria dos alunos que conseguiu provar os teoremas pretendidos, também permaneceu no tipo de prova mais baixo, de acordo com a classificação de Balacheff, o empirismo ingênuo. Para alcançar níveis mais elevados, o autor destaca que é preciso proporcionar mais tempo durante as aulas a este tema, bem como propor atividades que permitam explorar validações. Em seu trabalho, as sessões ocorreram no espaço e tempo normais de uma aula, ou seja, em 50 min. Em virtude de nossos encontros serem no contra turno escolar, pudemos trabalhar com os alunos, em média duas horas para cada encontro.

Piccelli reitera a importância de incentivar os alunos a demonstrarem teoremas, “pois pode fazer com que os alunos saiam da posição de espectador e passem à posição de pensadores, tornando-se sujeitos ativos na aquisição do conhecimento” (PICCELLI, 2010, p. 18).

O trabalho desenvolvido por Oliveira (2009), no qual a autora realizou um estudo com 8 alunos do 8° ano em relação às construções geométricas no qual tinha o objetivo de analisar a evolução das argumentações que apareciam nas validações realizadas. No início de seu trabalho, a autora discute o Movimento da Matemática Moderna olhando, por exemplo, mudanças ocorridas no currículo em relação às construções geométricas.

Oliveira (2009) constatou que os alunos preferiam as provas situadas no empirismo ingênuo. Além disso, os alunos recebiam bem as atividades que exigiam algum tipo de argumentação, continuando a realizá-las mesmo após o término da aula. Seu trabalho soma-se a outros ao sugerir que um trabalho com provas em sala de aula demanda tempo, em especial, para o desenvolvimento de uma linguagem adequada.

Destas pesquisas, o que se evidencia é que o nível de prova apresentado pelos alunos com maior incidência foi a do tipo empirismo ingênuo, que de acordo com Oliveira (2009) é onde se sentem mais seguros. Isso não significa que outros tipos de prova não possam surgir, pois os estudos sinalizam que é possível desenvolver um trabalho que exija dos alunos validações. Acredita-se que com um trabalho de longo prazo é possível a realização de provas pertencentes ao nível intelectual.

Estes trabalhos nos dizem ainda que, de maneira geral, os alunos não estão acostumados com este tipo de atividade, o que nos leva a pensar que a elaboração de conjecturas e provas de propriedades nem sempre são trabalhadas na sala de aula. E isso pode estar ocorrendo por diferentes motivos que extrapolam o desejo específico do professor, como por exemplo, sua formação e sua relação com conjecturas e provas.

Outra questão a ser destacada é que estes trabalhos, embora tenham sido realizados com turmas de 8°/9° ano e envolvam, em maior ou menor grau a elaboração de conjecturas, estão mais direcionados para os tipos de prova, ou seja, para os modos de validação apresentados pelos alunos. Consideram, também, a evolução dos tipos de prova. Em nosso trabalho, procuraremos olhar com mais cuidado para a produção das conjecturas elaboradas e para as provas utilizadas para validá-las.

Pensando e levando em consideração todas essas discussões, apresentamos nossos objetivos, específicos e geral:

1.4. Objetivos da pesquisa

1.4.1. Objetivo geral

Analisar a produção de conjecturas e provas de propriedades, envolvendo ângulos de polígonos, de alunos do 8° ano do ensino fundamental.

1.4.2. Objetivos específicos

- Identificar e analisar argumentos produzidos por alunos durante a formulação e a validação de conjecturas;
- Identificar, analisar e classificar estratégias utilizadas pelos alunos;
- Investigar dificuldades e superações apresentadas pelos alunos no decorrer da aplicação de uma sequência de atividades.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Tendo em vista nossos objetivos, para a elaboração da sequência didática, nos apoiamos fundamentalmente na Teoria das Situações Didáticas – TSD de Brousseau (1986), sobre a qual discorremos neste capítulo. De acordo com Freitas (2012, p. 77), a TSD "trata as formas de apresentação, a alunos, do conteúdo matemático, possibilitando melhor aprender o fenômeno da aprendizagem Matemática". Na sessão *teoria das situações didáticas*, discutimos as ideias de devolução e de situação adidática, principais noções da TSD por nós consideradas. Na sessão *Investigação, argumentação e prova*, tentamos relacionar estes três elementos, evidenciando à que estamos nos referindo quando falamos em investigação. *Sobre as conjecturas*, ressaltamos seu caráter provisório e nesse sentido a importância da prová-las. E, por último, apresentamos as *provas como modos de validação de propriedades* discutindo possibilidades, bem como uma tipologia de provas, com base no modelo teórico de Balacheff.

2.1. Teoria Das Situações Didáticas (TSD)

A TSD é um referencial teórico que privilegia tanto o trabalho do aluno quanto o do professor, sendo este o principal responsável pela organização do meio, onde deverão ocorrer diversas situações didáticas e as interações entre o sujeito e os demais elementos que o compõem. Nesse sentido, é antagônico, ou seja, nele ocorrem situações de desequilíbrio e desestabilização, para as quais, o sujeito precisa adaptar-se. Assim, o aluno irá aprender por meio da adaptação ao meio, e "este saber, fruto da adaptação do aluno, manifesta-se através de respostas novas, que são a prova da aprendizagem" (BROUSSEAU, 1996, p. 48).

Reiteramos a importância do professor, pois no contexto da sala de aula e das diversas relações que se estabelecem entre os alunos e demais componentes do meio no qual estão inseridos, ele é o responsável por coordenar todo o processo. Noutras palavras, é ele quem deve planejar-se de maneira a proporcionar aos alunos a oportunidade de vivenciar o processo de investigação e descoberta dos conceitos e conteúdos matemáticos. Para Brousseau (1996, p. 38), o professor deve simular uma "micro sociedade científica" na qual os conhecimentos sejam meios para se colocar boas questões e debatê-las, a linguagem um meio para o domínio das situações de formulação e que demonstrações sejam provas. Além disso,

> As concepções atuais do ensino exigirão do professor que provoque no aluno – por meio da seleção dos "problemas" que propõe – as adaptações desejadas. Tais problemas, escolhidos de modo que o estudante os possa aceitar, devem fazer, pela própria dinâmica, com que o aluno atue, fale, reflita e evolua. (BROUSSEAU, 2008, p.34).

Uma possibilidade de isso ocorrer evidencia-se quando o próprio aluno aceita a proposta do professor, que passa a ser sua, assumindo a responsabilidade da situação de aprendizagem considerada e a real intenção de resolver as atividades propostas. Quando isso acontece, dizemos que ocorreu a devolução, que de acordo com Brousseau (2008, p. 91) "[...] é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência".

Uma vez ocorrida à devolução pode-se dizer que, a partir desse momento os alunos encontram-se em situações adidáticas as quais são caracterizadas pelo envolvimento deles, por meio do próprio esforço, no processo de resolução da situação-problema proposta. Assim, quando os alunos se apropriam da situação (devolução), responsabilizando-se pela aprendizagem, está-se diante de uma situação adidática (FREITAS, 2012). Neste caminhar,

> Do momento em que o aluno aceita o problema como seu até aquele em que produz a resposta, o professor se recusa a intervir como fornecedor dos conhecimentos que quer ver surgir. O aluno sabe que o problema foi escolhido para fazer com que ele adquira um conhecimento novo, mas precisa saber, também, que esse conhecimento é inteiramente justificado pela lógica interna da situação e que pode prescindir das razões didáticas para construí-lo. Não só pode como deve, pois não terá adquirido, de fato, esse saber até que o consiga usar fora do contexto de ensino e sem nenhuma indicação intencional. Tal situação denomina-se adidática. (BROUSSEAU, 2008, p.34-35).

Dentre as situações adidáticas, temos as situações adidáticas de ação, formulação e validação. Elas não necessariamente obedecem a uma ordem estabelecida podendo ocorrer de forma quase que simultânea, sendo laborioso tentar identificá-las ou separá-las. Entretanto, para fins de análise, caracterizamos tais situações em seguida.

Na situação adidática de ação, o aluno age de modo mais experimental, realizando determinadas ações mais imediatas, geralmente sem a preocupação com justificativas ou explicações para as respostas que apresenta. Quando o aluno começa a identificar certas regularidades e comunicar a elaboração de esquemas ou modelos, fica caracterizada a situação adidática de formulação. Nas palavras de Brousseau, "a formulação de um conhecimento corresponderia a uma capacidade do sujeito de retomálo (reconhecê-lo, identificá-lo, decompô-lo e reconstruí-lo [...])" (2008, p. 29). Nesta etapa, já há a pretensão de justificação das ações por meio de uma referência teórica.

Durante a situação adidática de validação, o aluno utiliza mecanismos de prova para convencer o outro e é capaz de validar a resposta apresentada.

Pontuamos também as situações de institucionalização. Elas devem estabelecer a objetividade, de modo a conferir um "status" de validade aos conteúdos matemáticos que surgiram nas fases anteriores. A responsabilidade de institucionalizar cabe ao professor e por isso, não se trata mais de uma situação adidática, mas sim, de uma situação didática, pois neste momento ele passa a ser o protagonista.

Isto posto, compartilhamos não somente do escrito de Brousseau, quando afirma que "o ensino que propomos pretende fazer com que o aluno faça a si mesmo perguntas que são de domínio do professor – tão importante quanto às respostas - e, dentro do possível, que os conhecimentos façam sentido." (2008, p. 92), mas também, da mais sincera intenção de torná-lo possível.

Procuramos elaborar uma sequência didática com atividades visando favorecer o trabalho do aluno, de maneira que a devolução e as situações adidáticas fossem os principais elementos a serem levados em consideração. Isso porque é de nossa intenção fazer com que os alunos se envolvam com as atividades de modo que seja possível analisar a produção de conjecturas e provas de propriedades de ângulos de polígonos, por meio do trabalho desenvolvido por eles mesmos (adidático) durante o processo de ensino e aprendizagem.

2.2. Investigação, argumentação e prova

Quando falamos em investigação, referimo-nos à investigação realizada pelo aluno no processo de descoberta das propriedades matemáticas. Nesse sentido, concordamos com Rocha e Ponte (2006, p.31), quando afirmam que o processo de investigação abarca a formulação de novas questões, elaboração de conjecturas, realização de testes para validá-las ou refutá-las, levantar novas questões para investigar, dentre outros. Trata-se da investigação relacionada à validade, teste, experimentação de hipóteses. Outra definição com a qual concordamos é aquela apresentada por Oliveira, Segurado e Ponte (1996), que caracterizam uma atividade investigativa quando "é dada ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, reflectir e generalizar" (p.2).

Segundo os autores supracitados, as investigações matemáticas realizadas pelos alunos podem contribuir, por exemplo, no tocante à aprendizagem de novos conceitos, ideias e procedimentos, na comunicação e trabalho em grupo, na formação de novas concepções e atitudes frente à matemática e na aprendizagem sobre as próprias investigações. Assim, "investigar em Matemática assume características muito próprias conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso." (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 10).

Quando diante de atividades que favoreçam a investigação, no sentido como aqui estamos tratando, muitas são as dificuldades dos alunos que não estão acostumados com tal abordagem. De acordo com Rocha e Ponte (2006) a maioria deles, quando estão acostumados com a realização de exercícios, utiliza as mesmas estratégias quando se trata de atividades investigativas, evidenciando uma visão linear, na qual rapidamente recolhem-se os dados. Estes por sua vez são organizados e então, formulam-se conclusões. Isso corrobora com o que escrevem Huete e Bravo (2006), apoiados em López Carretero (1988, p. 235), pois segundo estes autores, "se basearmos o ensino da matemática como mera imitação de modelos, a utilidade que posteriormente se faça dela será limitada, mostrando-se eficazes (os modelos) apenas em situações semelhantes às de sua apreensão." Podemos dizer equivale ao que Barreto (2005) sugeriu ao criticar um ensino por meio de situações padrões. Neste caso, evidencia-se a importância, por exemplo, de o livro didático explorar atividades outras, além daquelas tidas como comuns.

Tem-se ainda, dificuldades em relação aos aspectos específicos da atividade investigativa, tal como a demora da compreensão da necessidade de justificar as conjecturas. E, indo ao encontro disso, Almouloud e Mello (2000, p. 15) escrevem que, diante de alunos que não estão familiarizados com atividades que exigem argumentação e a apresentação de justificativas e provas de suas afirmações, o trabalho do pesquisador que pretende desenvolver uma proposta neste sentido torna-se árduo. De acordo com os autores, é preciso desenvolver um trabalho em longo prazo, iniciando desde os primeiro anos da escolaridade. Isso também é destacado por trabalhos como Oliveira (2009) e Aguilar Júnior (2012). Este último acrescenta que deveria haver uma "[...] constante gradação dos níveis de argumentação, de maneira a conduzir o aluno a construir justificativas que possam ser aceitas como prova de resultados matemáticos [...]" (p. 63-64). Além disso,

> "[...] é importante que o professor compreenda e aceite diversos níveis de argumentação que os alunos possam vir a apresentar para justificação de um dado resultado, compreender os elementos cognitivos coerentes com a faixa etária do educando e os conhecimentos adquiridos até a presente fase escolar. (AGUILAR JÚNIOR, 2012, p. 21)."

Assim, desenvolver um trabalho que envolve provas de propriedades referentes a ângulos de polígonos não é uma tarefa tão simples, sobretudo, quando os alunos não têm o costume de realizar este tipo de atividade. Oliveira (2009), por exemplo, infere que no decorrer das sessões as argumentações foram compondo as respostas dos alunos de modo gradativo, fortalecendo a ideia de que a argumentação é um elemento que se desenvolve ao longo do tempo, por meio de um trabalho orientado, com objetivos precisos.

Deste modo, estamos de acordo com Boavida (2005, p. 01) quando escreve que, durante as aulas de matemática, se faz necessário criar.

> [...] condições favoráveis ao envolvimento dos alunos em experiências de aprendizagem cujo foco é a explicação e a fundamentação de raciocínios, a descoberta do porquê de determinados resultados ou situações e a formulação, avaliação e prova de conjecturas [...]

É de nossa pretensão fazer com que os alunos entendam os motivos pelos quais algumas propriedades geométricas, referentes a ângulos de polígonos, são válidas. Seja isso por meio de atividades práticas ou um raciocínio dedutivo formal. Nesse sentido concordamos que ao enfatizar a importância da geometria dedutiva, "trata-se de apresentar, em momentos adequados, um pequeno número de proposições que se encadeiam logicamente, numa sequência de teoremas" (IMENES, 1987, p. 60). Procuramos elaborar atividades que permitissem a exploração, investigação, formulação de conjecturas e eventualmente, a possibilidade de produção de provas, a fim de que os alunos pudessem eles mesmos vivenciar o processo de "fazer matemática" seguindo uma sequência plausível da "gênese" de proposições. Sobre isso, concordamos com Boavida (et al., 2008, p. 85), quando escreve que conjecturas são "[...] entendidas como enunciados plausíveis, mas de validade provisória".

Assim, esperamos também fazer com que os alunos argumentem acerca da validade de suas afirmações, suscitando neles a importância de se apresentar elementos de justificação e convencimento. Sabemos que esta tarefa não é simples e que vários fatores influenciam no discurso argumentativo dos alunos, tais como a relação existente entre estes e o pesquisador/professor e a cultura presente no contexto escolar, ou seja, se é de costume dos alunos apresentarem justificativas ou não às afirmações por eles feitas, se elas fazem parte das regras implícitas (ou explícitas) presentes no contrato didático.

Entendemos que, quando o raciocínio dedutivo, o pensamento lógico e as justificativas, desde aquelas fundamentadas em experimentos até aquelas formais como as provas, desaparecem do ensino da geometria (e da matemática em geral), o que se observa é que a maioria dos alunos, dificilmente consegue estabelecer relações entre os conteúdos e sequer, resgatá-los junto aos conceitos matemáticos. Para Sales e Pais (2010, p. 119), a demonstração deve ser a culminância de um processo, de modo que existem alguns procedimentos que a devem anteceder:

> [...] procedimentos esses que são insuficientes em si mesmos para se constituírem em um final de processo e, por essa razão, possuem a flexibilidade necessária para conduzir à percepção da necessidade de um procedimento mais completo, que é a demonstração. Esses procedimentos pré-demonstrativos ao mesmo tempo que contribuem para o desenvolvimento da habilidade de demonstrar também contribuem para convencer da necessidade da demonstração.

Freitas e Pais (2009) escrevem que provas e demonstrações são fundamentais no tocante à valorização da matemática como ciência lógico-dedutiva. E destacam que, apesar de, “[...] no plano escolar a construção dessa lógica possa ser iniciada com práticas argumentativas do cotidiano, a partir de certo nível, deverá haver rupturas.” (FREITAS; PAIS, 2009, p. 156).

2.3. Sobre as conjecturas

Uma conjectura é uma proposição que ainda não foi provada e nem refutada e que pode ser verdadeira ou verdadeira apenas para alguns casos. Na organização dedutiva da matemática quando a conjectura é verdadeira apenas para alguns casos ela é falsa, pois bastaria um contraexemplo para invalidá-la. Por outro lado, quando se consegue provar que ela é verdadeira ela também deixa de ser uma conjectura e, nesse caso, passa a ser chamada de teorema.

Quanto à elaboração de conjecturas, “[...] é o processo de supor ou de perceber se uma afirmação é verdadeira, o que induz a necessidade de investigar a sua veracidade” (MASON et al. 1982, p. 71 *apud* MAGALHÃES E MARTINHO, 2014, p. 104). Esse processo pode ser cíclico e envolver várias fases: formular uma conjectura acreditando que é verdadeira, verificar sua validade para os casos conhecidos e exemplos, colocar em cheque sua veracidade na tentativa de encontrar um contraexemplo, compreender a razão pela qual a conjectura é válida ou, se for o caso, como pode ser alterada (idem, p. 104).

Em relação à matemática escolar, uma conjectura pode ser formulada pelo aluno de diversas maneiras, dentre elas, através da observação e/ou manipulação dos dados com os quais se está trabalhando. Nisso, inclui-se a busca por regularidades, a experimentação, a formulação de questões, enfim. Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) destacam que nem sempre o aluno explicita a conjectura em si, pois esse trabalho pode ficar restrito ao seu pensamento. Algumas podem ser parcialmente verbalizadas, outras podem ser explicitadas com o auxílio de gestos que contemplam aquilo que não é dito.

É importante destacar que nem toda formulação é verdadeira, o que evidencia o caráter provisório das conjecturas, mas é comum os alunos terem-nas como conclusivas, sem a necessidade de justificações ou ainda, aceitarem-nas após terem testado sua validade para alguns casos apenas (PONTE, 2003; 2006). Assim, é importante que o professor trabalhe com seus alunos a relevância de prová-las, porque as conjecturas que resistirem a vários testes ganharão credibilidade e para que os alunos não as tomem como verdadeiras, deve-se estimular a conferir-lhes uma validade matemática (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003). Assim,

> A introdução da ideia da prova matemática pode ser feita gradativamente, restringindo-se, numa fase inicial e com os alunos mais novos, à procura de uma justificação aceitável que se baseie num raciocínio plausível e nos conhecimentos que os alunos possuem. À medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas (idem, p. 38).

Para Arsac (1992), quando diante de uma conjectura o aluno utiliza, espontaneamente, uma “lógica natural” de validação, ou seja, certo número de regras raramente explícitas, que variam de acordo com o tempo e objetos de referência, então, o que se quer é que ele passe a utilizar regras da “lógica formal”.

Outra questão em relação à justificação, é que às vezes, embora algumas conjecturas pareçam ser simples, formuladas até mesmo por alunos de níveis mais elementares, escondem processos de prova complexos até mesmo para o professor.

(PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003). Neste caso, se ele não analisou anteriormente as provas possíveis, deve organizar-se rapidamente ou retomar num momento posterior.

Das pesquisas que se aproximam da nossa, vimos que a maioria das provas apresentadas pelos alunos foi do tipo empirismo ingênuo, ou seja, baseadas em alguns exemplos. Para Magalhães e Martinho (2014), uma possibilidade de superar esta questão e outras como a compreensão da necessidade de justificação em relação ao processo de provar propriedades, pode ser o trabalho com questões que estimulem a formulação e teste de conjecturas.

Essa perspectiva de trabalho exige do professor uma mudança de postura que difere daquela cujos conteúdos são prontamente “dados” aos alunos. Estes precisam experimentar, investigar, enfim, trabalhar, para que nesse processo ocorra a formulação de questões, conjecturas, teste, refinamento, dentre outros (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003).

2.4. Provas como modos de validação de propriedades

Para Freitas (2011), uma das justificativas para o trabalho com validações em sala de aula é a existência de inúmeras contradições e incoerências no mundo real. “Trata-se, portanto, de um campo de inestimável valor formativo, onde é possível encontrar o prazer da certeza, da não contradição, do uso de uma linguagem precisa, concisa e universal, enaltecida e cultivada durante séculos como honra do espírito humano” (FREITAS, 2011, p. 2).

Aguilar Júnior (2012) também aponta algumas das funções da prova em matemática e, a partir de seus estudos, elencou que uma prova pode ter por finalidade validar um resultado, sistematizar o processo de raciocínio dedutivo, descobrir e comunicar conhecimentos matemáticos e explicar ou elucidar um resultado obtido. Já para Arsac (1992) há duas finalidades básicas de uma validação em matemática. A primeira delas é o convencimento, ou seja, propor um argumento que não possa ser colocado em dúvida. Neste caso, responde-se ao questionamento “é verdade?”. A outra é a compreensão, sendo que a pergunta a ser feita passa a ser “por que é verdade?”.

Nessa perspectiva, Balacheff (1988) apresenta o modelo teórico da Tipologia de Provas, identificando quatro tipos de provas produzidas pelos alunos, apresentando uma classificação hierárquica em dois níveis: pragmático e intelectual. A partir disso o autor contempla desde validações fundamentadas em alguns exemplos, até as demonstrações mais formais. Considerando o ano de escolaridade com o qual trabalhamos (8° ano do Ensino Fundamental), bem como estudos prévios que sinalizam dificuldades em relação ao trabalho com demonstrações na sala de aula, acreditamos que esse Modelo nos fornece uma possibilidade de olhar para as validações dos alunos, independente do grau de generalidade que elas apresentem.

Assim, antes de apresentarmos os tipos de provas propostos por Balacheff, julgamos oportuno esclarecer as ideias de validação, explicação ou argumentação, prova e demonstração, segundo essa perspectiva. No que concerne à validação, temos que:

> [...] podemos dizer que um *processo de validação* se caracteriza, principalmente, como uma atividade que tem como finalidade assegurar a validade de uma dada proposição matemática, podendo ainda consistir na produção de uma explicação teórica. (FREITAS, 2012, p. 98, grifo do autor).

Na tentativa de validar as afirmações realizadas, os alunos podem apresentar um discurso de convencimento a um colega ou a um pequeno grupo no qual está inserido. A esse discurso, cujo locutor está convencido de sua validade e tenta convencer também outros colegas, mas que pode ser verdadeiro ou não, chamamos explicação ou argumentação.

Quando determinado grupo de pessoas (como em uma sala de aula, por exemplo) e em um determinado momento compartilham a validade de uma proposição, surge a noção de prova. Noutras palavras, as provas são explicações aceitas por um grupo em um dado momento. Uma explicação pode ter o status de prova para certo grupo, mas para outro, não (ARSAC, 1992). Sendo assim, “a prova tem valor relativo, serve apenas para o grupo que a aceita, que sentiu-se convencido pelo argumento (SALES, 1996, p. 36).”

Em se tratando da demonstração, são tipos de prova aceitos por determinada comunidade científica, em nosso caso, pela comunidade de matemáticos. As demonstrações são formais e obedecem a regras de desencadeamento fundamentadas em proposições já tidas como verdadeiras. Assim, segundo Balacheff, podemos dizer então que demonstrações são tipos particulares de prova e que estas são casos particulares de argumentações.

Quanto às provas, Balacheff (1988) às classifica em dois níveis sendo o primeiro deles referente às provas pragmáticas. Em relação a estas, são realizadas apoiadas em alguns exemplos singulares, sem que haja elementos voltados à generalização. Assim, são baseadas em manipulações e exemplos. Neste nível, há dois tipos de prova, a saber, *empirismo ingênuo* e *experimento crucial* (BALACHEFF, 1988). As provas são classificadas como *empirismo ingênuo* quando a afirmação é obtida com base em alguns casos particulares, como por exemplo, quando se conclui que ângulos opostos pelo vértice (OPV) têm mesma medida a partir da medição dos ângulos em dois ou três casos diferentes.

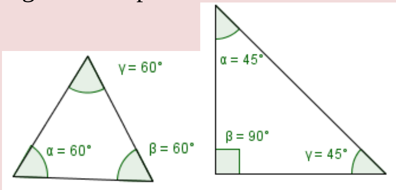
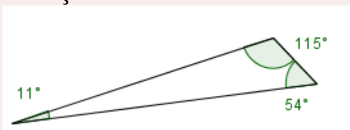
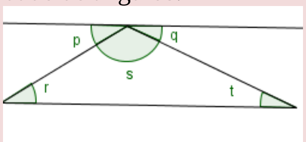
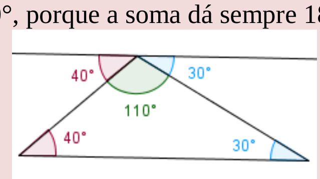
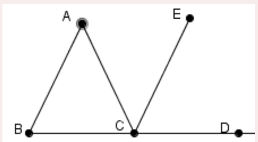
O *experimento crucial* é caracterizado quando o aluno, por exemplo, não se limita à verificação de casos particulares e para se convencer busca atestar a validade da afirmação para algum outro mais específico, não familiar. Esse nível de prova ficaria caracterizado se, após a verificação para alguns casos, há a necessidade de confirmar a igualdade das medidas por meio de uma situação em que um par de ângulos OPV tenha medidas próximas de 15°.

O segundo nível estabelecido por Balacheff (1988) recebe o nome de provas intelectuais, nas quais as conclusões obtidas são fundamentadas em deduções, pois neste nível já aparece a generalização. As provas que constituem esse nível são dos tipos *exemplo genérico* e *experimento mental* (BALACHEFF, 1988).

Com relação às provas do tipo *exemplo genérico*, ele ocorre quando o aluno escolhe um exemplo particular para representar todos os demais casos possíveis. Seria este o caso se, por exemplo, dados dois segmentos concorrentes ($\overline{AB}$ e $\overline{BC}$) de centro O e os quatro ângulos por eles formados (AÔC, CÔB, BÔD e DÔA) fossem feitas deduções, utilizando alguma propriedade válida para o caso geral, para chegar à conclusão de que as medidas dos ângulos AÔC e BÔD são congruentes.

E, por último, o *experimento mental*, em que a validação é baseada em uma proposição genérica. Para exemplificar este tipo de prova, podem-se citar as demonstrações formais, como quando se demonstra a partir de postulados e axiomas sem precisar recorrer ao auxílio da figura, ou quando a ela é utilizada de maneira genérica como apoio ao raciocínio e não como um caso particular. Podemos também considerar como uma demonstração,quando o discurso dedutivo que a acompanha possui um rigor matemático aceitável e, nesse caso, a figura serve apenas como suporte ao raciocínio, representando toda a generalidade. A principal diferença entre estes dois últimos tipos de prova consiste na generalização, que no primeiro caso é realizada raciocinando sobre um elemento particular. Já no *experimento mental*, mesmo diante de uma representação qualquer, está-se pensando para quaisquer elementos do grupo a que pertence essa representação. Podemos resumir os tipos de prova da seguinte maneira,

Quadro 1–Tipos de prova

Tipo de Prova		Descrição	Exemplo
Empirismo ingênuo	Baseadas em experimentações, manipulações e exemplos.	Consiste em afirmar a verdade de um resultado depois de verificar alguns casos.	Os alunos testam a validade para alguns exemplos: 
Experimento crucial		Consiste em afirmar a verdade de um resultado depois de verificar um caso diferente. É como se fosse: "se funciona aqui, sempre irá funcionar".	Os alunos acreditam que se vale para um triângulo “diferente”, a informação é verdadeira: 
Exemplo genérico	Possuem elementos voltados à generalização. Fundamentadas em deduções.	Consiste em afirmar a verdade de um resultado a partir da escolha de um representante da classe de todos os objetos possíveis.	Os alunos utilizam noções sobre retas paralelas e transversais e ângulos de meia volta para relacionar a igualdade de ângulos:  Os ângulos p e r/q e t são congruentes. Então p+s+q = r+s+t = 180°, porque a soma dá sempre 180°. 
Experimento mental		Consiste em afirmar a validade da afirmação de forma genérica. Este tipo de prova, “[...] evoca a ação, internalizando-a e desligando-se de uma representação particular”. (BALACHEFF, 1988, p. 219)	Os alunos utilizam linguagem formal e propriedades anteriormente provadas.  Dado um triângulo ABC, considere a reta r que passa pelo vértice C e paralela à reta determinada por A e B. O ponto C determina sobre r duas semirretas. Sejam X e Y dois pontos, um em cada uma destas semirretas. Temos: medidas $X\hat{C}A+\hat{C}+B\hat{C}Y=180°$. Como a reta AC é transversal às paralelas r e AB, segue da proposição “duas retas paralelas interceptadas por uma reta transversal determinam ângulos correspondentes congruentes” (já demonstrada) que $X\hat{C}A \equiv \hat{A}$. Analogamente concluímos que $B\hat{C}Y \equiv \hat{B}$. Portanto, medidas $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = X\hat{C}A + B\hat{C}Y+\hat{C} = 180°$.

Como vemos, há diversas maneiras de se provar determinada propriedade matemática, que vão desde uma verificação empírica até uma demonstração com argumentação dedutiva do discurso matemático, fundamentada em postulados e axiomas. Acreditamos que por meio disso, conseguiremos olhar para os modos de validação de conjecturas utilizados pelos alunos participantes, como já dissemos independentemente do nível em que eles se encontrem. Assim, pensamos que também será possível olhar para uma produção de provas que não sejam do tipo empirismo ingênuo.

No próximo capítulo, faremos uma discussão com os documentos legais e com o livro didático adotado pela escola em que desenvolvemos o trabalho. Neste último, mais exemplos sobre os tipos de prova podem ser observados, uma vez que procuramos identificar aqueles referentes a ângulos e polígonos.

3. CONJECTURAS E VALIDAÇÕES EM DOCUMENTOS OFICIAIS E LIVROS DIDÁTICOS

Neste capítulo, dentro da sessão *um diálogo com os documentos oficiais*, fazemos uma discussão com os documentos oficiais, considerando a investigação do aluno, argumentação e prova de propriedades matemáticas. Apresentamos também, *um olhar para o livro didático*, uma vez que ele também subsidiou a elaboração de nossa sequência didática. Além disso, observamos como são abordados nos livros o tema ângulos de polígonos, bem como, questões relacionadas propriedades enunciadas e as validações das mesmas.

3.1. Um diálogo com os documentos oficiais

De acordo com os PCNs mais do Ensino Médio, a geometria no ensino fundamental está estruturada de modo a favorecer “[...] uma primeira reflexão dos alunos através da experimentação e de deduções informais sobre as propriedades relativas a lados, ângulos e diagonais de polígonos, bem como o estudo de congruência e semelhança de figuras planas.” (BRASIL, 2002, p. 123).

Em se tratando da argumentação, os Parâmetros Nacionais Curriculares alusivos às séries iniciais escrevem que esta possui estreitos laços com a capacidade de os alunos justificarem suas afirmações e nos indica que, “se por um lado a prática da argumentação tem como contexto natural o plano das discussões, na qual se podem defender diferentes pontos de vista, por outro ela também pode ser um caminho que conduz à demonstração.” (BRASIL, 1997, p. 22). Dessa maneira, a investigação e a argumentação acerca da validade dos resultados e das conjecturas por meio da linguagem oral e das diversas representações matemáticas, constitui-se um dos objetivos da matemática no ensino fundamental apontado pelos PCNs e outras orientações oficiais.

Segundo estes documentos, a argumentação é fundamental para a compreensão das demonstrações, mas mesmo empregando com frequência os mesmos conectivos lógicos, existem exigências para demonstrar que não estão presentes na argumentação e assim, o refinamento desta deve ocorrer de maneira gradativa por meio da assimilação dos princípios de uma lógica formal, favorecendo as demonstrações (BRASIL, 1998).

Para Sales (2010) o desenvolvimento da capacidade de argumentar parece ser uma das necessidades cada vez mais presente na sociedade. Para o autor, “[...] o desenvolvimento cognitivo da argumentação, por exigir articulação entre diferentes conceitos, por envolver a atividade matemática e a comunicação, desloca o aluno da posição de passividade para transformá-lo em sujeito na construção do seu próprio conhecimento” (SALES, 2010, p. 83).

Concernente às relações entre argumentação e demonstração, Pietropaolo escreve que:

> A relação entre argumentação e demonstração torna-se evidente no caso da construção de um teorema e, portanto, na elaboração de uma conjectura e de sua prova. Certos pesquisadores analisam se existe ou não unidade cognitiva entre a argumentação e demonstração, pois para provar uma proposição deve-se fazer uma conjectura, que, por sua vez, está fundamentada em argumentações. (PIETROPAOLO, 2005, p. 74)

Balacheff (1999) considera que entre a argumentação e demonstração, há uma relação complexa, de modo que “argumentação constituiu-se como um obstáculo epistemológico à aprendizagem da demonstração e, mais geralmente, da prova matemática” (p. 5). Outros autores contestam essa perspectiva e “[...] defendem que a exploração, pelos alunos, de problemas abertos que requeira a formulação de conjecturas e a avaliação da sua plausibilidade, pode favorecer uma significativa atividade argumentativa que, em muitos casos, se revela muito útil na construção da prova” (BOAVIDA, 2005, p. 09).

Retomando a discussão anterior, os PCNs referentes às Séries Iniciais apontam que:

> Para tanto, o ensino de Matemática prestará sua contribuição à medida que forem exploradas metodologias que priorizem a criação de estratégias, a comprovação, a justificativa, a argumentação, o espírito crítico, e favoreçam a criatividade, o trabalho coletivo, a iniciativa pessoal e a autonomia advinda do desenvolvimento da confiança na própria capacidade de conhecer e enfrentar desafios. (BRASIL, 1997, p. 22)

Ao lançarmos mão de um olhar mais atento ao referido documento, bem como para os PCNs do Ensino Fundamental e Médio, percebemos que a recomendação para a prática da argumentação permeia ao longo dos textos específicos para a matemática. Com relação ao ensino de Geometria no 4° ciclo (7ª e 8ª séries), encontramos que os conteúdos geométricos favorecem a exploração do raciocínio dedutivo e que a capacidade de argumentação, que por sua vez, “[...] vem sendo desenvolvida desde os ciclos anteriores em todos os blocos de conteúdos." (BRASIL, 1998, p. 86). Observamos que, mesmo diante de tal afirmação, não temos garantia de que isso ocorre efetivamente na vivência escolar dos alunos, o que pode, por exemplo, dificultar o trabalho com as demonstrações.

Conforme o nível de escolaridade aumenta, os documentos oficiais do MEC orientam para a necessidade de se introduzir, aos poucos as demonstrações em sala de aula, como se pode observar no fragmento abaixo:

> Assim, é desejável que no terceiro ciclo se trabalhe para desenvolver a argumentação, de modo que os alunos não se satisfaçam apenas com a produção de respostas a afirmações, mas assumam a atitude de sempre tentar justificá-las. Tendo por base esse trabalho, pode-se avançar no quarto ciclo para que o aluno reconheça a importância das demonstrações em Matemática, compreendendo provas de alguns teoremas. (BRASIL, p. 1988 70-71)

Freitas e Pais (2009) também escrevem nesta perspectiva e sublinham que defender e valorizar a argumentação lógico-dedutiva, tal como é feito na apresentação textual do saber matemático, é legítimo. Apesar disso, parece ser mais adequado considerar esse tipo de argumentação como "ponto de chegada e não como ponto de partida", uma vez que

> Nas atividades características da cultura escolar não se trabalha somente com o argumento científico. Quanto menor o nível de escolaridade, mais válida nos parece essa postura. No âmbito da comunidade escolar, no espaço da sala de aula, é natural explorar formas diferenciadas de argumentação, como aquelas que constituem na verificação ou nas provas não formais. (FREITAS e PAIS, 2009, p. 157).

Para estes mesmos autores, a argumentação pode ser realizada por meio de procedimentos com estatutos diferentes. A validade de uma afirmação pode, por exemplo, ser argumentada tomando por base a exibição de uma figura ou a verificação de alguns casos particulares. Neste caso, apesar da observação ser uma prática utilizada para a descoberta de propriedades matemáticas, não se trata de uma conduta adequada durante a formalização do conhecimento uma vez que a generalidade matemática não pode ser concluída a partir de casos particulares.

Desta forma, quando se trata de geometria e medidas, temos oportunidades nas quais os alunos podem identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem e realizar procedimentos que culminem em fórmulas, tais como, cálculo de diagonais ou soma dos ângulos internos de polígonos. (BRASIL, 1998, p. 118).

Ainda segundo os PCNs, no quarto ciclo (ciclo no qual desenvolvemos nossa pesquisa), as atividades propostas em geometria deverão fazer com que os alunos tenham os primeiros contatos com as exigências de um raciocínio dedutivo, embora isso não signifique realizar um estudo absolutamente formal e axiomático.

Em nossa sequência didática, procuramos realizar atividades que favorecessem estes elementos, somados a outros advindos de nosso referencial teórico e metodológico.

3.2. Um olhar para o livro didático

Para a escolha e elaboração das atividades de nossa sequência didática, procuramos olhar para os livros da coleção adotada pela escola[4], com a intenção de identificar como os conhecimentos e conteúdos alusivos ao nosso tema, ângulos de polígonos são abordados. Olhamos também, para o modo como as provas de propriedades estão sendo trabalhadas. Esses elementos são importantes e merecem ser levados em consideração porque pesquisas como as de Mello (1999) e Piccelli (2010), sinalizam que os livros didáticos em geral, não trabalham com atividades que exijam provas de propriedades e nem mesmo fornecem os primeiros passos para demonstração.

Pensando nisso, o PNLD (2014), considera Gérard e Roegiers (1998), e destaca que algumas das importantes funções do livro didático são: auxiliar no planejamento e condução metodológica (distribuição de seleção dos conteúdos ao longo do período escolar), bem como na escolha das atividades, exercícios e trabalhos a serem propostos. (GÉRARD E ROEGIERS, 1998 *apud* BRASIL, 2014). Ponte e Santos (1996, p. 04) também escreve que, às vezes, constitui "[...] a principal fonte de organização das aulas e chega a assumir o papel de indicador oficial das expectativas relativamente aos conhecimentos prévios dos alunos.". Então, aspectos como a presença ou ausência de provas de propriedades no livro didático, por exemplo, podem interferir na elaboração de uma aula em que elas são ou não lavadas em consideração. Em geral, os professores escolhem um livro e o seguem tanto nos exercícios quanto na parte teórica, sendo esta última utilizada para preparação de suas aulas (MELLO, 1999, p. 34).

Aqui vale ressaltar que a utilização do livro didático não deve ser a única referência do professor com relação ao seu trabalho pedagógico e assim, os efeitos

[4] Coleção Praticando Matemática. ANDRINI, A. VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática.** 3 ed. renovada. São Paulo, editora do Brasil, 2012.

positivos da presença deste na sala de aula dependem, também, de sua utilização adequada (BRASIL, 2014).

Assim, ao olhar para os livros didáticos dentre outros elementos, nos questionamos:

a. O livro apresenta provas relacionadas a ângulos e polígonos? Se sim, quais?
b. Existem atividades relacionadas a ângulos e polígonos, do tipo *por quê?*,*justifique*, *prove* ou *demonstre*?
c. Quais tipos de prova, de acordo com a classificação de Balacheff, são encontrados?

– O livro do sexto ano é composto por 14 unidades, sendo a unidade 9 destinada especificamente para o estudo de *Ângulos* e a unidade 10 para as questões relativas a *Polígonos e circunferências*.

Na unidade 9, o autor apresenta os seguintes objetivos específicos "[...] identificar e representar um ângulo e seus elementos; definir ângulo nulo, ângulo raso e ângulo reto; medir e traçar ângulos com o auxílio do transferidor; classificar ângulos em agudos, retos ou obtusos [...]" (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012a, p. 80).

Nesse sentido são abordadas ideias tais como, associações com giros, inclinação, abertura e região, bem como as noções de ângulos reto, raso, agudo, obtuso e de uma volta. De modo geral, o livro apresenta um passo a passo sobre a utilização do transferidor, como também explora atividades para as quais se faz necessário medir ângulos.

Não identificamos provas de propriedades relativas a ângulos e polígonos, pois o autor realiza uma afirmação e em seguida propõe atividades de aplicação, de uso daquilo que afirmou. Também não encontramos atividades que exigissem validações.

Entretanto, um aspecto que consideramos importante é que algumas atividades exploradas pelo livro possibilitam a utilização do transferidor posicionado de diferentes formas, como por exemplo, o exercício 11 do capítulo 9. O exercício 10 não solicita a utilização do instrumento de medida, o que poderia ser uma possibilidade de identificar a medida do ângulo x por meio de um raciocínio dedutivo. A questão é que a posição dos ângulos da figura sugere um grau de dificuldade maior, pois não estão na forma canônica[5].

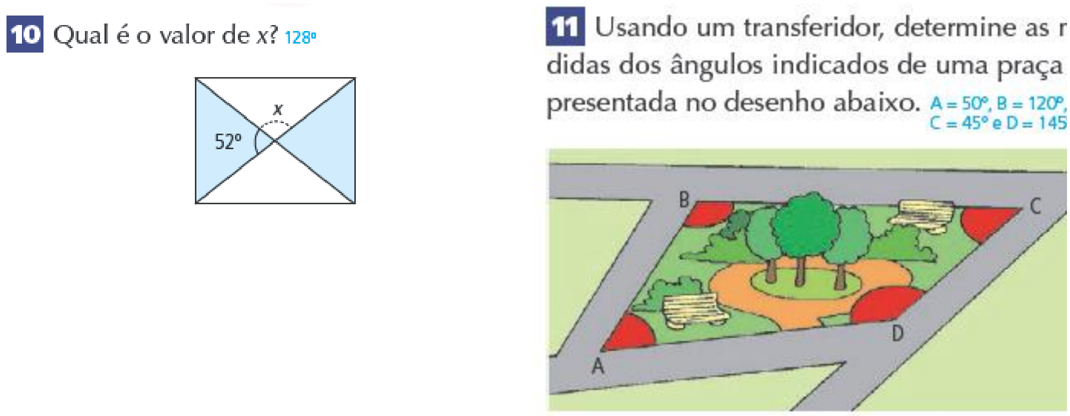
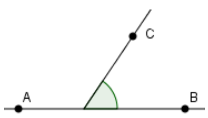


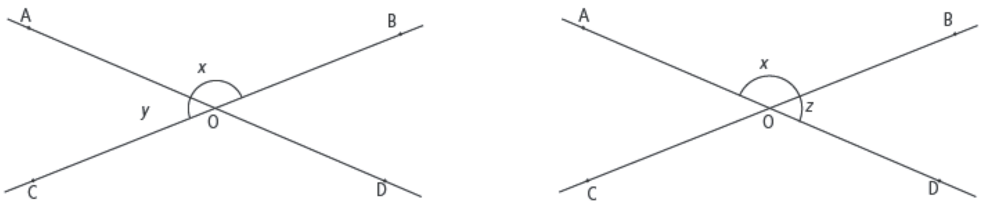
Figura 6 – Atividades do livro didático a
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012b, p. 142

– O livro do sétimo ano possui 11 unidades das quais a última é reservada para o estudo de *Ângulos e triângulos*. Nela, o autor convida os alunos a relembrarem o que supostamente já viram no 6° e retoma noções já trabalhadas dando maior ênfase a ideia de ângulos suplementares e complementares. Também são apresentadas as subdivisões do grau e as transformações de unidades. O transferidor entra em cena novamente, contudo as atividades que exigem o seu uso são pouco exploradas.

Nesta unidade o autor trabalha com ângulos opostos pelo vértice e propõe o questionamento: "será que todo par de ângulos opostos pelo vértice tem mesma medida?" seguido da frase "vamos mostrar que sim" e da realização da prova dessa propriedade.

---

[5] Consideramos aqui como sendo forma canônica ângulos como, por exemplo; 



AÔB e AÔC são suplementares:
$x + y = 180°$

AÔB e BÔD são suplementares:
$x + z = 180°$

Então, $x + y = x + z$. Subtraindo x de ambos os membros da igualdade, obtemos $y = z$.
Os ângulos AÔC e BÔD, que são opostos pelo vértice (opv), têm mesma medida.

Figura 7 – Prova da propriedade ângulos opostos pelo vértice
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012b, p. 240

A partir da tipologia de provas de Balacheff (1988), poderíamos classificar esta prova como sendo do tipo *exemplo genérica*, já que a partir de um caso particular dado, as semirretas opostas AD e CB e os ângulos formados entre si, o autor generaliza concluindo sua validade da afirmação para todos os casos. Neste caso, o fato de indicar as medidas dos ângulos pelas letras x, y e z, que são quaisquer, caracteriza a generalidade, o que permite concluir que se trata de uma prova do tipo intelectual, segundo o modelo de provas Balacheff.

No que se refere aos ângulos de triângulos e demais polígonos, há um esforço em mostrar como se utilizar o transferidor para encontrar a medida de ângulos internos. O autor propõe que o aluno desenhe em seu caderno um triângulo, encontre a soma das medidas dos ângulos internos para depois socializar com os colegas. Além disso, sugere a atividade experimental de pintar os ângulos internos de um triângulo, recortá-los e juntá-los em torno de um único vértice. Então, o autor conclui inferindo que por meio desta atividade verifica-se uma propriedade muito importante e a enuncia: “a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°”.

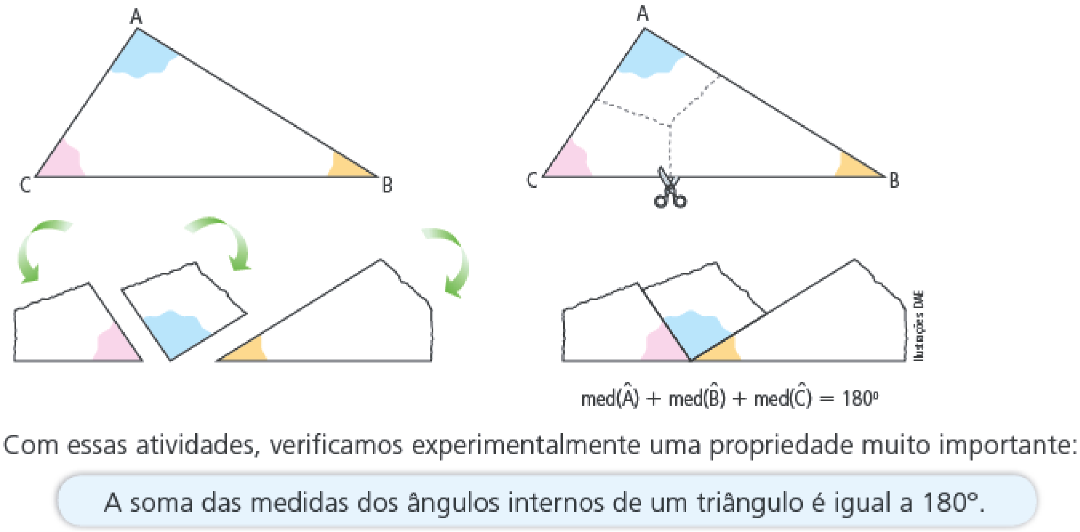


Figura 8 - Prova da propriedade ângulos internos do triângulo b
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012b, p. 255

Neste caso, a prova realizada pertence ao nível pragmático, já que o autor conclui que a informação é verdadeira com base em experimentações realizadas. Somente mais tarde, no oitavo ano o autor retoma essa propriedade e passa a prová-la a partir de um elemento particular, passando para o nível de provas intelectual (BALACHEFF, 1988).

Essa informação de que o resultado da soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre 180° é utilizada para deduzir a soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero a partir de sua divisão em dois triângulos.

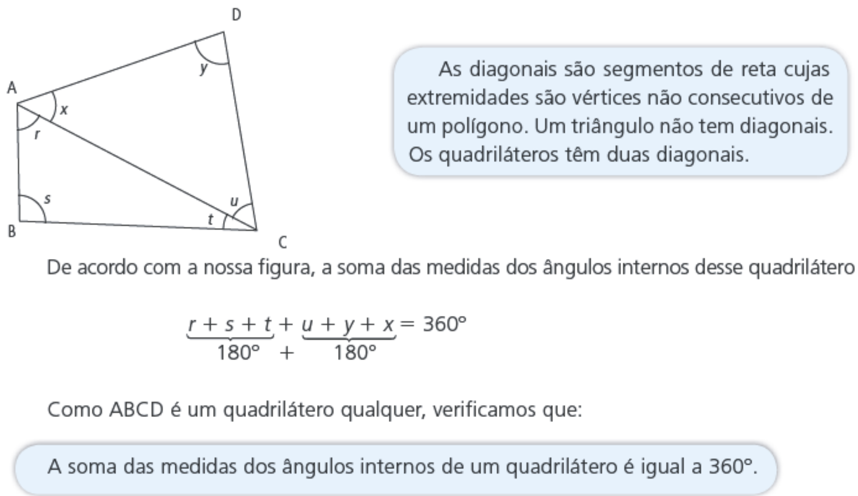


Figura 9 – Prova ângulos internos de quadriláteros
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012b, p. 257

Para provar a propriedade enunciada o autor utiliza uma informação já conhecida, referente à medida da soma dos ângulos internos de triângulos. O polígono

ABCD é escolhido para representar os demais quadriláteros e por isso essa prova pode ser classificada como *exemplo genérico*, pois a partir dessa escolha o autor estende a validade da afirmação para todos os polígonos de quatro lados. Aqui também, o fato de indicar as medidas pelas letras x, y, u, r, s e t, que são quaisquer, caracterizando a generalidade e o uso de propriedades também contribui para o nível intelectual da prova.

Com relação às atividades, não identificamos nenhuma que exigisse justificar, provar ou demonstrar. Percebemos, porém, diversos exercícios que necessitam de um tratamento algébrico, como por exemplo, o 22 (fig. 10). Outros, por serem mais simples, como o 13 e o 59-b, podem ser resolvidos por meio de um raciocínio lógico. Também notamos que algumas atividades exigem o reinvestimento de conceitos, como ângulos OPV ou ângulos suplementares como é o caso do 59-a e 65-b (fig. 10).

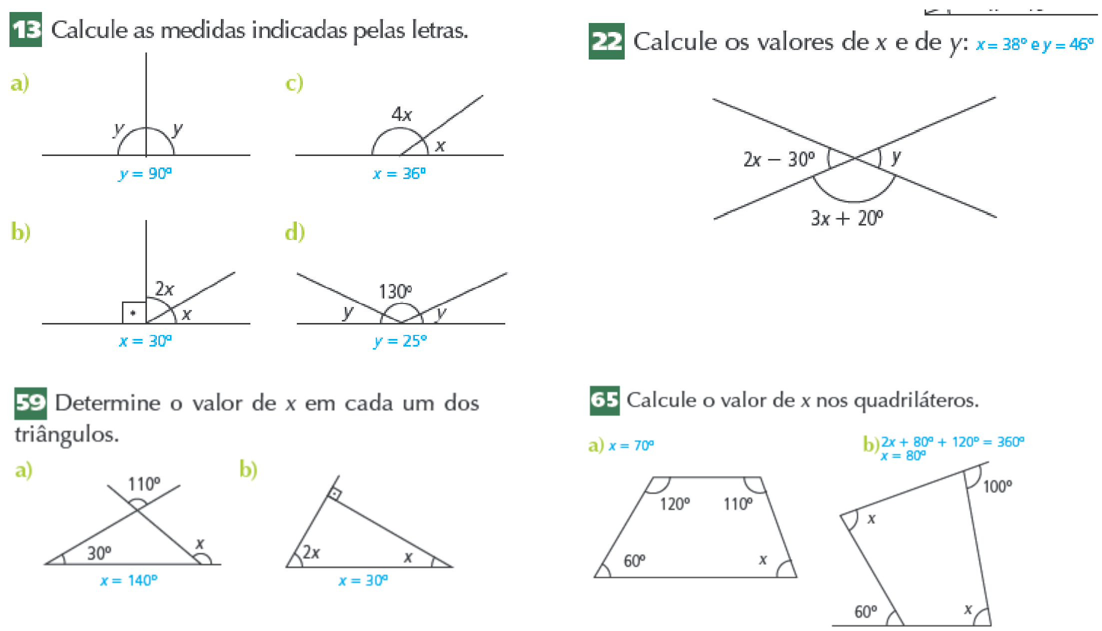


Figura 10 – Atividades do livro didático b
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012b

– O livro do oitavo ano possui 14 unidades e a unidade 9 é referente a *Retas e Ângulos*. Dentre outras coisas o autor trabalha com as retas paralelas interceptadas por uma transversal. Isso subsidia a prova relativa à soma dos ângulos internos de um triângulo, realizada no capítulo 10, *Triângulos*.

Diferentemente do que ocorre nos livros do sexto e sétimo anos, no oitavo ano as atividades solicitam uma maior interação por parte do aluno e aparecem nestes quadros de fundo rosado.

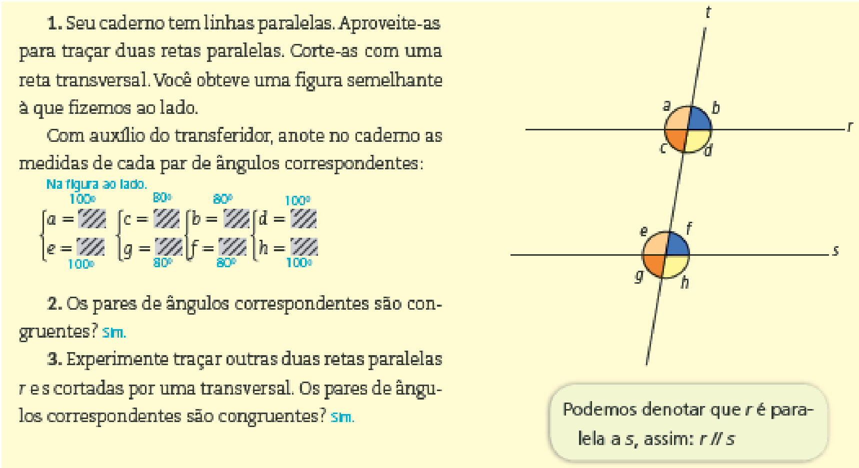


Figura 11 – Atividade retas paralelas e transversal
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012c, p. 169

Este é mais um caso em que o autor trabalha com nível de provas pragmáticas, em que a partir de medições e verificações se conclui a veracidade de uma propriedade. Não conseguimos classificar a prova apresentada como sendo do tipo empirismo ingênuo ou *experimento crucial*, pois não há elementos que nos informe o quanto ou para quantos casos o aluno irá testar a validade da afirmação.

Observamos que há uma tentativa de diálogo com o aluno em relação à prova de propriedades, no qual o autor infere que a parir da aplicação de “descobertas” anteriores, novas podem ser realizadas.

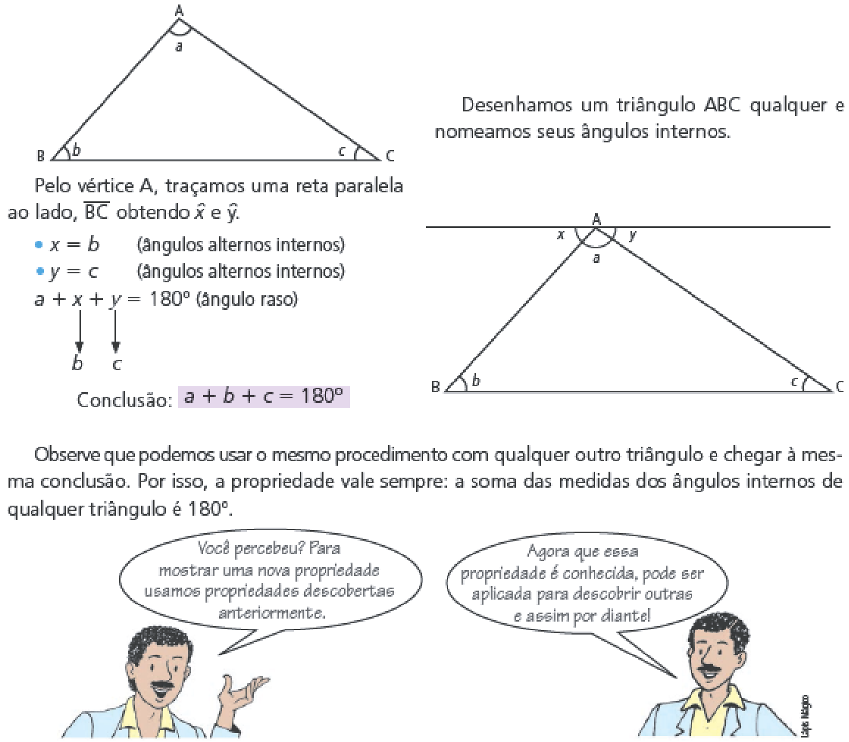
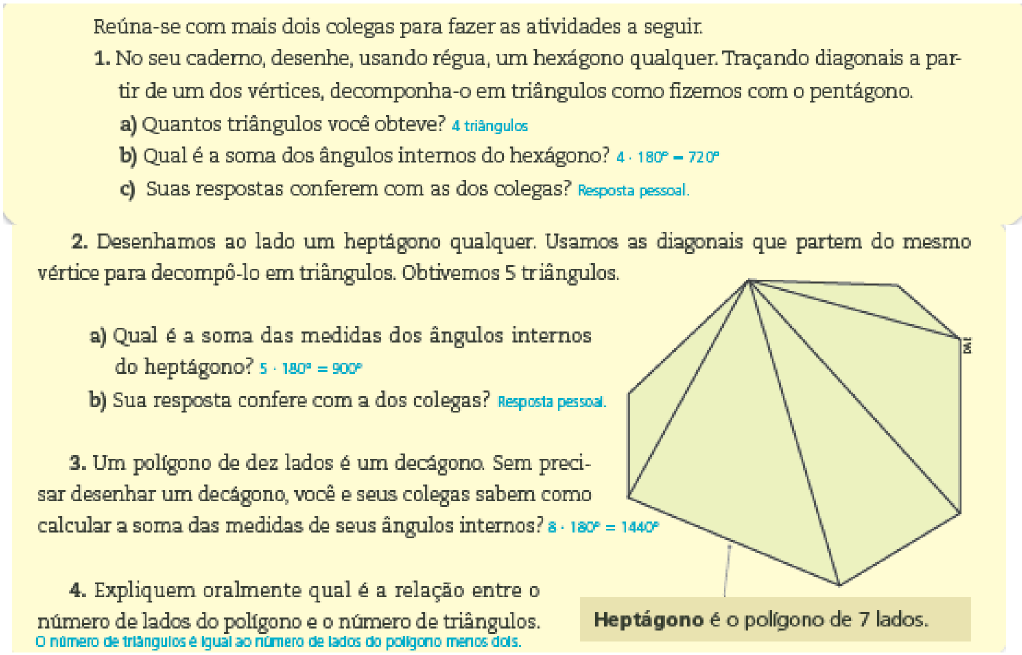


Figura 12 – Prova da propriedade ângulos internos do triângulo b
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012c, p. 183

Agora, o autor escolhe o triângulo ABC para ser o representante dos demais e novamente, permite identificá-la como provado tipo *exemplo genérico.* Para esta propriedade em questão, identificamos níveis de provas diferentes: no sétimo ano o nível pragmático e no oitavo ano passa-se ao nível intelectual. Acreditamos que essa opção do autor se deve ao fato dessa prova requerer a utilização de propriedades sobre retas paralelas e transversais, que no ano anterior ainda não haviam sido abordados. Além disso, o fato de apresentar, ao lado da figura, afirmações e justificativas para chegar à conclusão constitui numa apresentação resumida do discurso matemático dedutivo, ou seja, uma demonstração da proposição enunciada.

Continuando nessa perspectiva, o autor apresenta a propriedade de que a medida do ângulo externo é igual à soma das medidas dos ângulos internos não adjacentes a ele. Neste caso a dedução tem como base uma figura que também podemos considerar como uma prova do tipo *exemplo genérico*. E afirma que “[...] para demonstrar essa propriedade, usamos a definição de ângulos suplementares e a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo, que demonstramos anteriormente. Assim, vamos construindo o conhecimento em Geometria.” (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012c, p. 184).

Na unidade 12, *Quadriláteros e outros polígonos*, é proposto o trabalho com decomposição de polígonos em triângulos para encontrar a soma de seus ângulos internos. Após exemplificar com um polígono de cinco lados, é proposta uma sequência de atividades a fim de que os alunos percebam a relação existente entre o número de triângulos e o número de lados do polígono.



Reúna-se com mais dois colegas para fazer as atividades a seguir.

1. No seu caderno, desenhe, usando régua, um hexágono qualquer. Traçando diagonais a partir de um dos vértices, decomponha-o em triângulos como fizemos com o pentágono.

a) Quantos triângulos você obteve? 4 triângulos

b) Qual é a soma dos ângulos internos do hexágono? $4 \cdot 180° = 720°$

c) Suas respostas conferem com as dos colegas? Resposta pessoal.

2. Desenhamos ao lado um heptágono qualquer. Usamos as diagonais que partem do mesmo vértice para decompô-lo em triângulos. Obtivemos 5 triângulos.

a) Qual é a soma das medidas dos ângulos internos do heptágono? $5 \cdot 180° = 900°$

b) Sua resposta confere com a dos colegas? Resposta pessoal.

3. Um polígono de dez lados é um decágono. Sem precisar desenhar um decágono, você e seus colegas sabem como calcular a soma das medidas de seus ângulos internos? $8 \cdot 180° = 1440°$

4. Expliquem oralmente qual é a relação entre o número de lados do polígono e o número de triângulos.
O número de triângulos é igual ao número de lados do polígono menos dois.

Heptágono é o polígono de 7 lados.

Figura 13 – Atividades soma dos ângulos internos de polígonos
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012c, p. 219-220

Estas atividades podem levar o aluno a conjecturar acerca da soma da medida dos ângulos internos do triângulo, como também, a generalizar a fórmula em questão e produzir provas. Neste caso, as atividades exigem por parte do aluno um discurso argumentativo a fim de justificar suas respostas, como é o caso da atividade 4 em que é preciso explicar a relação entre o número de lados do polígono e o número de triângulos.

Logo abaixo destas atividades, há um quadro no qual dois estudantes conversam sobre essa relação. Observemos que, se o aluno estiver de posse do livro didático, bastará olhar para figura que encontrará os elementos necessários para responder aos questionamentos que lhes foram realizados (figura 13).

Figura 14 – Conversa entre estudantes.
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012c, p. 220.

Neste caso também consideramos que a prova apresentada para fórmula da soma dos ângulos internos de polígonos S_n = (n-2). 180° é do tipo *exemplo genérico, pois* há a utilização de caso particular para obter a conclusão sobreos demais.

Por último, o livro institucionaliza a fórmula para encontrar a soma dos ângulos internos de polígonos e traz a prova de que a soma de todos os ângulos externos resulta em 360°.

Marcamos, na ilustração de um pentágono, ângulos externos.

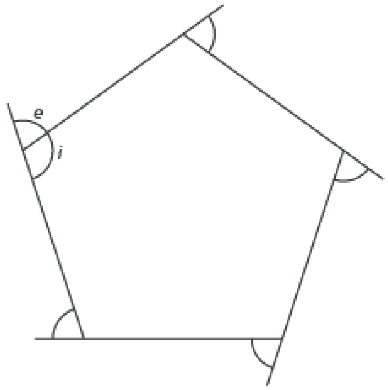
Observe que o vértice do ângulo externo é vértice do polígono. O prolongamento de um lado do polígono gera o outro lado do ângulo externo.

Chamando a medida de um ângulo interno de i, e a do externo de e, podemos ver que $i + e = 180°$

Já descobrimos como calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono.

Como será, então, que se calcula a soma das medidas dos ângulos externos?

Imaginemos um polígono de n lados. A medida de cada ângulo interno será indicada por $i_1, i_2, i_3, \dots i_n$ e a medida de cada ângulo externo por $e_1, e_2, e_3, \dots e_n$.



$$\underbrace{i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_n}_{\text{soma das medidas dos ângulos internos } S_i} + \underbrace{e_1 + e_2 + e_3 + \dots e_n}_{\text{soma das medidas dos ângulos externos } S_e} = n \cdot 180°$$

$(n - 2) \cdot 180° + S_e = n \cdot 180°$ Aplicando a propriedade distributiva:

$n \cdot 180° - 360° + S_e = n \cdot 180°$ Subtraindo $(n \cdot 180°)$ de ambos os membros:

$-360° + S_e = 0 \rightarrow \mathbf{S_e = 360°}$

A soma das medidas dos ângulos externos de um polígono é sempre igual a 360°.

Figura 15 – Prova ângulos externos de polígonos
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012c, p. 222

Trata-se novamente de uma prova do tipo de prova *exemplo genérico*, em que a partir de um pentágono escolhido o autor trabalha a generalidade. Agora, por exemplo, aparece a ideia de somar todos os ângulos internos e externos quantos forem, ou ainda, n ângulos.

Observamos que além da atividade 4 da figura 13, os capítulos que tratam de ângulos e polígonos contemplam mais uma atividade que exige justificação. É o caso do exercício 28.

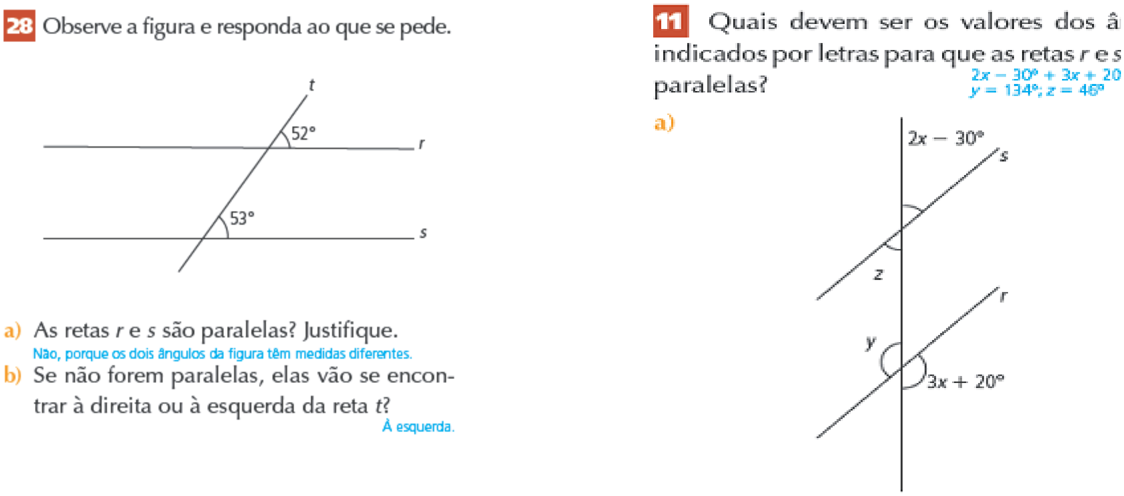


Figura 16 – Atividades do livro didático
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012c.

A atividade 11a é mais um exemplo de que o livro contempla atividades não canônicas. Vemos que as retas paralelas possuem um ângulo de inclinação diferenciado, o que atribui a atividade um grau de dificuldade maior. (Neste caso poderíamos dizer que as retas paralelas da atividade 28 compõe uma situação canônica).

No livro do 9° não há um capítulo específico que trabalhe ângulos e/ou polígonos, mas é possível observar provas relacionadas ao Teorema de Tales e Teorema de Pitágoras e a dedução da altura de triângulos equiláteros, por exemplo.

Olhando para a coleção e, de modo específico, para os capítulos que tratam de ângulos e polígonos, observamos que o livro do sexto ano possui uma abordagem mais diretiva onde as informações são apresentadas por meio de enunciados curtos seguidos de exercícios.

Os livros do sétimo e oitavo anos apresentam provas do tipo *exemplo genérico referentes* a ângulos opostos pelo vértice, soma dos ângulos internos de triângulos e demais polígonos, ângulos externos de polígonos. Para todos os casos segue-se o mesmo critério, ou seja, é escolhido um elemento para representar sua classe, generalizando a partir dele. Também identificamos provas no nível pragmático para o caso da soma dos ângulos internos de triângulos no livro do sétimo ano e dos ângulos formados por retas paralelas e transversais, no oitavo ano. Nestes casos, elementos necessários para provar de outro modo que não seja a verificação empírica, ainda não são conhecidos.

Diante disso, vemos que questões referentes a ângulos, como também a utilização do transferidor, são abordadas pelo livro didático adotado pela escola desde o sexto ano. As provas de propriedades relativas ao tema são trabalhadas pelo autor e em sua maioria pertencem ao nível intelectual, o que sinaliza um esforço em mostrar o “por que” das propriedades utilizadas são válidas através de deduções a partir de elementos conhecidos. Entretanto isso não implica em um trabalho com as provas, tanto por parte de professores quanto de alunos.

Percebemos que em alguns momentos as atividades propostas acabam recaindo em equações algébricas. Trata-se da geometria algebrizada, citada por Gazire (2000), em que a geometria serve de pretexto para o trabalho com a álgebra.

Também observamos que conforme o grau de escolaridade aumenta as atividades que possibilitam maior interação por parte do aluno também aumentam. Apesar disso, não encontramos enunciados que exigem explicar, justificar, provar ou demonstrar. Essa constatação vai ao encontro do que Mello (1999) sinalizou em seu trabalho, ao olhar para 10 livros didáticos da sétima série do ensino fundamental, em que 8 deles não apresentavam exercícios que exigissem, especificamente, provar ou demonstrar.

Outro elemento encontrado foi a utilização de figuras, polígonos ou ângulos em diferentes posições e graus de inclinação. Acreditamos ser esse um elemento importante para que o aluno compreenda os conteúdos matemáticos como um todo, não se restringindo apenas a situações comuns. Estas atividades podem favorecer, por exemplo, o estabelecimento de relações diversas no processo de investigação do aluno, já que este passa a vivenciar momentos nos quais não pode simplesmente reproduzir o que já lhe foi apresentado por meio de técnicas operacionais, fórmulas e procedimentos sem compreender o que se está fazendo (AGUIAR JÚNIOR; NASSER, 2014). Por isso, tudo é levado em consideração para a elaboração de nossa sequência didática.

4. PROCEDIMENTOSMETODOLÓGICOS

No que se refere aos encaminhamentos metodológicos da pesquisa, fizemos uso da Engenharia Didática, proposta por Artigue (1988). De acordo com Machado (2012), ela possibilita analisar as situações didáticas, as quais são nosso objeto de estudo. Neste capítulo, dentro da sessão *engenharia didática*, discutimos os pressupostos desta metodologia e os procedimentos que adotamos em nosso trabalho. Apresentamos *a sequência didática* elaborada e as variáveis didáticas, bem como *os participantes da pesquisa* numa tentativa de situar o leitor sobre como e com quem realizamos essa pesquisa.

4.1. Engenharia Didática

A Engenharia Didática pressupõe quatro fases, a saber: análises preliminares, concepção e análise *a priori*, experimentação e, por último, análise *a posteriori* e validação. Apresentamos em seguida uma descrição de cada uma delas.

Com relação à fase de análises preliminares, corresponde ao momento no qual o pesquisador (ou o professor) realiza um estudo epistemológico do conteúdo a ser abordado, uma análise acerca das concepções e dos obstáculos epistemológicos correspondentes, bem como uma análise do ensino habitual e de seus efeitos. Pode-se dizer que é nessa fase que se discute o quadro teórico da pesquisa. De acordo com Artigue (1996, p. 198), os trabalhos realizados neste momento "são retomados e aprofundados ao cabo das diferentes fases do trabalho, em função das necessidades, não sendo por isso prévios se não a um primeiro nível de elaboração".

Durante esta primeira fase realizamos diversas leituras relacionadas às intenções iniciais de pesquisa e às posições que íamos assumindo com o passar do tempo. Dentre elas, encontram-se aspectos referentes à geometria e, mais específicos, a ângulos de polígonos, validação de propriedades, demonstração, prova, conjecturas, enfim. No decorrer das demais fases, retomamos estes e outros estudos, relacionados aos nossos objetivos.

A segunda fase da Engenharia Didática, concepção e análise *a priori*, reservam-se à escolha do objeto matemático e das variáveis didáticas. Nesta etapa, os elementos da sequência didática devem ser elaborados considerando as situações adidáticas as quais se pretende criar, sempre tendo em vista o pressuposto de que o aluno deve ser o protagonista de sua aprendizagem. Assim, deve-se descrevê-los e prevê-los (no sentido de pensar em ações das quais o pesquisador deve lançar mão no momento da experimentação). Assim o objetivo da análise *a priori* consiste em

> [...] determinar de que forma permitem as escolhas efetuadas controlar os comportamentos dos alunos e o sentido desses comportamentos. Para isso, fundamenta-se em hipóteses; será a validação dessas hipóteses que estará, em princípio, indirectamente e jogo no confronto, operando na quarta fase, entre a análise *a priori* e análise *a posteriori*. (ARTIGUE, 1996, p. 205)

Nesta fase, de modo geral, o professor fica a margem das análises, uma vez que é considerado a partir de suas relações com a devolução e com a institucionalização ficando o papel central a cargo dos alunos.

Assim, nesse momento procuramos pensar em uma sequência didática que favorecesse a produção de conjecturas e provas envolvendo propriedades de ângulos de polígonos para que pudéssemos analisá-las. Para a elaboração das atividades que comporiam as sessões, consideramos os estudos teóricos, o livro didático, os documentos oficiais, as variáveis didáticas, dentre outros.

Nesse processo de descrição e previsão, para cada atividade são analisados os possíveis modos de resolução, dificuldades, comportamentos (deles e dos próprios pesquisadores) questionamentos, enfim. Essas questões encontram-se postas no próximo capítulo deste texto.

Quanto à terceira fase da Engenharia, trata-se da experimentação e caracteriza-se pela parte experimental/prática da pesquisa uma vez que é, de fato, a implementação da sequência didática elaborada na fase anterior. É durante a experimentação que os dados da pesquisa são produzidos por meio dos instrumentos devidamente escolhidos pelo pesquisador (ou pelo professor).

De acordo com Machado (2012, p. 244-245), esta fase pressupõe a explicitação aos alunos participantes dos objetivos da pesquisa, o estabelecimento do contrato didático, a aplicação dos instrumentos elaborados e o registro das observações e demais elementos que possam ser dados para a pesquisa.

A análise *a posteriori* e validação é a quarta e última fase e se dá por meio do tratamento dos dados obtidos, das observações realizadas, das produções dos alunos e, caso necessário, da análise das gravações de áudio e vídeo. A validação dos dados ocorre por meio da confrontação entre as análises realizadas *a priori* e *a posteriori*. É importante destacar que essa validação é interna ao processo da Engenharia e diferente da validação de uma propriedade matemática, como as provas, por exemplo.

Nesta fase, olhamos para a transcrição das falas, como também, para os protocolos (registros escritos) dos alunos num processo de análise, considerando o objetivo e os referenciais adotados. Esse movimento constitui-se, também, de idas e vindas entre as análises feitas por hora e aquelas feitas anteriormente, como se o pesquisador estivesse a amarrar as duas em apenas uma.

4.2. A sequência didática

A sequência didática é composta por sete sessões, com atividades elaboradas de acordo com os objetivos desta pesquisa, de maneira a favorecer o reinvestimento de conceitos matemáticos, sejam estes vistos nas aulas regulares ou durante as sessões, bem como a validação de propriedades. Desta forma, procuramos trabalhar com as noções de ângulos suplementares, ângulos de uma volta, propriedade envolvendo ângulos opostos pelo vértice, ângulos formados por retas paralelas interceptadas por uma transversal, soma dos ângulos internos de triângulos, quadriláteros e outros polígonos e soma de ângulos externos de um polígono qualquer.

Ponte et al. (2005) realizaram um trabalho com alunos dos 5º e 7º anos com relação às argumentações por eles produzidas. Em suas considerações, os autores escrevem que este tipo de atividade contempla todos os alunos e não apenas aqueles de melhor desempenho escolar, além disso, destaca o envolvimento com o fazer matemática, o fato de que é possível desenvolver a autonomia. Além disso, sublinha a vantagem do trabalho em grupo, uma vez que este favorece a interação e a discussão entre os alunos. Assim, cada sessão contém atividades as quais foram realizadas em duplas, pois acreditamos que, desta forma, favorecemos a interação, o diálogo e a discussão entre os alunos e, por consequência, a vivência de situações de ação, formulação e validação.

As atividades foram entregues as duplas em folha impressa – denominadas protocolos –, com exceção daquelas propostas para discussão. Para evitar a perca de dados escritos os quais também são importantes elementos de análise, todos foram orientados a não apagarem suas respostas e, para o caso de erros, continuarem a anotação a partir de um traço.

Ao final da resolução, recolhíamos os protocolos e iniciávamos as discussões das questões, realizadas uma a uma. Segundo Magalhães e Martinho (2014, p. 126) “os momentos de discussão em grande grupo revelaram-se importantes para os alunos, pelo facto de tornar possível ouvir a opinião, a explicação das ideias e os raciocínios dos demais colegas da turma”. Assim, o objetivo é fazer que com os alunos expusessem suas diferentes maneiras de resolução, argumentando sobre a validade das suas respostas. É neste momento que, de acordo com o referencial teórico que estamos utilizando, irá ocorrer a situação de institucionalização. Indo por essa direção, apresentamos a seguir uma síntese do que foi desenvolvido ao longo das sessões.

Quadro 2 - Síntese dos conteúdos trabalhados

SESSÃO	N°DE ATIVIDADES	SÍNTESE DO CONTEÚDO
01	Quatro	Ângulos suplementares, ângulo raso, ângulo de uma volta, Ângulo agudo, reto e obtuso.
02	Três	Ângulos opostos pelo vértice – OPV.
03	Uma	Ângulos opostos pelo vértice – OPV.
04	A sessão teve duas etapas com duas atividades	Primeira etapa: retas paralelas interceptadas por transversais. Segunda etapa: aplicação e reinvestimento de noções já trabalhadas.
05	Duas	Soma dos ângulos internos de um triângulo.
06	Cinco	Aplicação e reinvestimento de noções já trabalhadas.
07	Uma	Soma dos ângulos externos de um polígono qualquer.

Fonte: Dados da pesquisa.

Cabe destacar que pretendíamos fazer com que os alunos se envolvessem com as atividades, principalmente aquelas reservadas às discussões. Por isso, elaboramos para cada sessão, algumas perguntam a serem feitas aos estudantes no decorrer da sessão, para que participassem ativamente do desenvolvimento de nossas atividades. Noutras palavras, que ocorresse a devolução, que tem como “[...] objetivo provocar uma interação suficientemente rica e que permita ao aluno o desenvolvimento autônomo” (ALMOULOUD, 2007, p. 35).

4.2.1. Variáveis didáticas

Na segunda fase da Engenharia, concepção e análise *a priori*, deve-se tomar a decisão de agir sobre certo número de variáveis pertinentes ao problema estudado. Artigue faz distinção entre as variáveis globais ou macro didáticas, que respeitam a organização global e as variáveis locais ou microdidáticas concernentes à organização local, podendo ser a uma sessão ou uma fase da Engenharia (ARTIGUE, 1988). Elas devem ser escolhidas de acordo com a possibilidade de provocar as mudanças pretendidas com relação ao processo de ensino e aprendizagem.

Em nosso trabalho, são exemplos de variáveis macro didáticas:

- Durante a produção de conjecturas e a prova de propriedades geométricas, **o trabalho em grupos e, em nosso caso, em duplas** pode ser um elemento importante no debate de validação. Neste momento os alunos podem expor e discutir seus resultados a fim de se chegar a um consenso. Nas duplas o trabalho também pode ser realizado em conjunto quando, por exemplo, um aluno realiza a atividade sob a supervisão atenta do parceiro. Além disso, temos mais chances de que eles explicitem por meio da fala, por exemplo,o que e como estão pensando e suas conjecturas, sejam elas implícitas ou explicitas.
- A maneira como o enunciado é redigido, com **a (não) exigência de justificativas** pode interferir nas respostas que lhe são dadas. Mesmo conhecendo o conteúdo, por exemplo, os alunos podem encontrar dificuldades para responder algumas questões por não compreenderem o que está pedindo para ser feito. Em contrapartida, a partir do enunciado, podem sentir a necessidade de justificar as afirmações realizadas na tentativa de atender ao que é solicitado. Por isso, nas sessões procuramos inserir no enunciado expressões como, *explique*, *justifique* e *por quê?*
- **Presença ou ausência de figuras no enunciado**: a presença da figura pode influenciar na resposta dos alunos, pois em alguns casos a conclusão por eles obtida pode ser baseada na imagem presente no enunciado. De acordo com Arsac (1992), frente a uma situação de validação em geometria, os estudantes contentam-se vendo ou medindo o desenho para efetivar uma conclusão. Entretanto, esse “estatuto” da figura deve, aos poucos, evoluir. E essa evolução, de acordo com o autor, traduz-se em uma complicação da tarefa do aluno, uma vez que ele deixará de medir com o transferidor, por exemplo, para raciocinar,

deduzir, entre outros. Nesse sentido, a presença da figura pode influenciar quanto às produções apresentadas, pois poderá ser por si só uma justificativa.

- **Instrumento de medida: transferidor**: Sendo o transferidor um instrumento de medida, pode influenciar na resolução da atividade, pois o aluno pode não sentir a necessidade de encontrar a resposta por meio de um raciocínio dedutivo, se limitando a medir. Além disso, o uso do transferidor poderá interferir em alguns resultados, pensando na "precisão" das medidas dos ângulos, pois os alunos podem, por exemplo, posicioná-lo incorretamente ou arredondar medidas.
- **Questões do tipo abertas ou fechadas**: Quando propomos questões do tipo fechadas há um direcionamento de nossa parte sobre as respostas e até mesmo resoluções. As questões de caráter aberto também são propostas com objetivos previamente definidos, mas a grande diferença é que estas possibilitam ao aluno traçar suas próprias estratégias e trabalhar na busca por padrões ou regularidades, por exemplo. Ainda, segundo Boavida (2005 p.126), "confrontar os alunos com tarefas abertas que lhes permitam formular conjecturas e incentivá-los a reflectir sobre a sua validade, [...] poderá permitir o seu envolvimento emexperiências de aprendizagem com características, de algum modo, semelhantes, às da comunidade matemática." O que se aproxima de nossos pressupostos advindos da Teoria das Situações Didáticas.

Algumas variáveis de caráter microdidático que podem influenciar na mobilização de conhecimentos e estratégias dos alunos no decorrer de nossas sessões são:

- **A medida dos ângulos dados:** Em algumas atividades a medida do ângulo dado pode facilitar ou não a resolução do que se pede, bem como nos auxiliar quanto à identificação da utilização ou não do instrumento de medida (transferidor). Além disso, a opção por especificar as medidas ou solicitar aos alunos que as encontrem, utilizando uma notação genérica como x, por exemplo, pode influenciar no modo de resolução das mesmas.
- **O polígono dado:** Trabalhar com polígonos com uma quantidade muito grande de lados em determinados momentos pode confundir ou dificultar o trabalho dos alunos,uma vez que será preciso desenhar, medir ou explorar vários ângulos. A opção por polígonos cuja quantidade de lados seja três, quatro ou cinco, por exemplo, pode fazer com que eles fiquem mais tempo produzindo e investigando conjecturas do que o próprio polígono.

4.3. Os participantes da pesquisa

A pesquisa foi realizada com alunos de duas turmas de 8° ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Campo Grande/MS. As sessões ocorreram nas terças feiras de manhã das 07h às 09h e como as atividades foram realizadas em horário extraescolar, a participação dos alunos foi voluntária. Ao todo, foram realizadas sete, sendo duas no mês de outubro, quatro no mês de novembro e uma no mês de dezembro de 2015. Elas foram aplicadas por mim e por um colega de turma do curso de Mestrado, Florisval Santana Filho[6]. Participamos do mesmo grupo de pesquisa, DDMat e partilhamos as dúvidas e anseios de quem não conhece a fundo a realidade do local, uma vez que ele também mudou-se para Campo Grande para cursar o Mestrado em Educação Matemática. Sua ajuda foi de grande importância tanto na organização (do local, conferência dos gravadores e outros), quanto na participação efetiva nos encontros (observando os alunos, auxiliando nas discussões nas e sobre as sessões).

Sempre neste dia da semana e horário, um dos professores de matemática da escola ministrava aulas referentes aos conteúdos vistos em sala. Era uma espécie de aula de reforço na qual participavam alunos com baixo desempenho nas aulas regulares. Todos os alunos das duas turmas de 8° ano vespertino da escola foram convidados a participar de nossa proposta, entretanto, nosso público ficou bastante restrito àqueles que já frequentavam as aulas extras ofertadas. Apenas um deles, aluno que chamamos James[7] não frequentava anteriormente o espaço.

Assim, não tínhamos controle em relação à participação dos alunos e por isso tivemos uma disparidade considerável quanto ao número de participantes, uma vez que na sessão 1, participaram quatro alunos. Na sessão 2, seis alunos. Na sessão 3, novamente seis alunos. Na sessão 4 quinze alunos, sendo que onze deles estavam ali pela primeira vez. Na sessão 5, doze alunos. Na sessão 6 e 7, oito alunos. A maioria dos estudantes não considerados em nossas análises apresentou uma participação bastante aleatória e deste modo tínhamos que dedicar uma atenção especial a eles.

A seguir, resumimos a participação dos alunos analisados nas sessões, cujo critério de escolha foi à quantidade de sessões das quais participaram. Não foi possível manter as mesmas duplas do início ao fim, pois como nenhum deles esteve presente em todos os encontros, a cada sessão as organizávamos de acordo com a frequência.

[6]Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (PPGEdumat-UFMS), ingressante no ano de 2015.
[7]Os nomes dos alunos utilizados neste trabalho são pseudônimos.

Quadro 3 - Participação dos alunos nas sessões

ALUNO/SESSÃO	01	02	03	04	05	06	07
Lisa	X	X	X				
Peter	X	X		X	X	X	X
Mary	X		X	X		X	X
Wendy	X		X	X	X	X	X
Miguel		X	X	X	X	X	X
João		X	X	X	X	X	X
James				X	X	X	X

Fonte: Dados da pesquisa.

Estes foram os alunos que, dentro de suas possibilidades e interesses, saíam de suas casas nas terças feiras de manhã para participar de nossos encontros. Na sequência, descrevemos suas características, de acordo com as impressões que tivemos.

Lisa era muito próxima de Mary, sempre estavam juntas. Apesar de ter participado de três sessões, mostrou-se participativa e interessada nas atividades que propúnhamos. De acordo com Mary, Lisa adoeceu e por isso não conseguiu frequentar os encontros, assim como as aulas regulares por alguns dias.

Peter desde o primeiro encontro mostrou preferência pelo trabalho individual. Era um menino de poucas palavras, tanto que nos intervalos sentava no banco ao lado de fora da sala onde ocorriam as atividades, quase sempre sozinho. Numa de nossas sessões, por exemplo, mesmo diante de nossa insistência, preferiu trabalhar sozinho.

Mary, assim como Peter, era tímida. Falava sempre em tom baixo e, geralmente, dirigindo-se ao parceiro de dupla. Isso diminuiu um pouco à medida que as sessões ocorreram.

Wendy sempre falante e preocupada com suas notas baixas, tanto nas provas quanto no boletim escolar. Mesmo assim, estava sempre interessada nas propostas que desenvolvíamos. Assim como Mary, gostava de chegar com bastante antecedência em relação ao horário combinado e de se sentar sempre à frente dos demais.

Miguel e João eram inseparáveis, sempre chegando e saindo juntos das sessões. Miguel mais desinibido e sempre com suas gírias. João mas inseguro e cuidadoso com as palavras a nós dirigidas. Era preciso dispensar uma atenção especial a eles, pois se dispersavam com facilidade e nem sempre se movimentavam para realizar as atividades. Então, procurávamos questionar, conversar sobre as atividades e incentivar a realização das mesmas.

James iniciou sua participação nas sessões mais tardiamente. Desde o início mostrou ter facilidade em relacionar e reinvestir as propriedades que trabalhávamos. Ele foi o único, dentre os sete alunos, que não frequentava as aulas extras ofertadas pelo professor nos dias e horários em que ocorreram nossos encontros.

Estes sete alunos, assim como os demais que participaram de uma ou outra sessão específica, possuem também outras preocupações que extrapolam as paredes da escola. Certamente elas não estão relacionadas à celular de última geração, computadores ou algo do tipo. Um exemplo disso é que nos primeiros encontros alguns alunos chegaram a achar que os gravadores que utilizamos eram celulares. Por meio das gravações e do convívio que tivemos, percebemos que ali havia quem precisasse limpar a casa para a avó, havia quem precisasse tomar conta do irmão mais novo, havia quem ficasse muito feliz porque iria para o centro da cidade[8] junto da avó. Havia, também, quem estivesse preocupado com futebol do final de semana...

[8] A escola localiza-se a pouco mais de 10 km do centro de Campo Grande.

5. ANÁLISE *A PRIORI*, EXPERIMENTAÇÃO E ANÁLISE *A POSTERIORI*

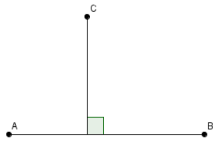
Neste capítulo tecemos nossas análises. Na análise *a priori*, apresentamos os objetivos da sessão, as atividades, estratégias de resolução, possíveis questionamentos e comportamentos, tanto dos alunos quanto dos pesquisadores. Em seguida, resumimos como foi à *experimentação*, ou seja, o dia em que ocorreram, quantos alunos participaram, como as duplas foram formadas, enfim. Na sessão *análise a posteriori* evidenciamos os aspectos que ocorreram, relacionando-os com as análises *a priori*. Neste caso, procuramos situar como foi nossa dinâmica do encontro, falando um pouco sobre cada atividade proposta, tanto no que se refere aos diálogos, quanto aos protocolos. Contudo, enfatizamos as discussões em que observamos a produção de conjecturas, o debate de validação e a produção de provas. Por último, apresentamos *considerações* específicas de cada sessão.

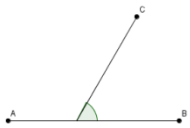
5.1. Sessão 01

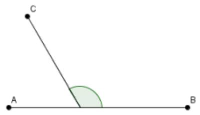
Por ser a primeira sessão, antes de iniciar com as atividades planejadas realizamos uma breve apresentação pessoal, explanar alguns dos objetivos da sequência didática, como também, expor como esperamos que os alunos se portem diante das atividades propostas, pois como afirma Machado “a experimentação supõe [...] a explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa à população de alunos que participará da experimentação”, bem como “o estabelecimento do contrato didático [...]” (2012, p. 244).

Esta sessão é composta por quatro atividades, cujas previsões de possíveis estratégias de resolução estão descritas a seguir. A intenção é identificar conhecimentos que os alunos já possuem em relação a ângulos e a medida de ângulos. Pretende-se, também, observar se conseguem utilizar alguns elementos já conhecidos para resolver determinadas atividades. Devido a isso esperamos a produção de provas de nível pragmático, pois se trata do primeiro encontro dos alunos com nossa proposta.

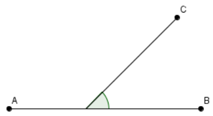
1. Utilizando o transferidor, identifique a medida de cada ângulo indicado nas figuras abaixo:

1. 

2. 

3. 

4. 

5. 

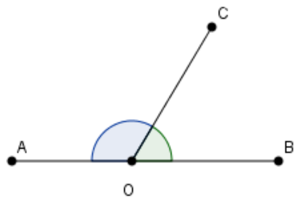
Espera-se que os alunos consigam realizar a atividade com êxito, uma vez que o livro didático adotado pela escola, como também as orientações legais curriculares (BRASIL, 1998) propõem a utilização do transferidor e trabalham com a ideia de ângulo, desde o 6° ano do Ensino Fundamental. Vimos que neste nível de escolaridade, são trabalhadas noções de ângulo reto, ângulo de meia volta, ângulo raso, entre outros. Além disso, os PCNs indicam que os instrumentos tais como esquadro, transferidor, régua e compasso devem ser utilizados para o estabelecimento de relações entre as propriedades geométricas e suas referidas construções já no 3° ciclo do Ensino Fundamental (correspondente a 5° e 6° ano) (BRASIL, 1998). No entanto, isso não significa que os alunos saibam ou lembrem como utilizar o instrumento de medida.

Com relação à resolução da atividade, inferimos que existe a possibilidade de que os alunos encontrem medidas diferentes para os mesmos ângulos dependendo do transferidor, pois pode haver imprecisões ou confusões quanto ao seu uso. Como é a primeira atividade da sequência, as figuras estão posicionadas a fim de que os alunos tenham o mínimo de dificuldade possível para realizá-la, ou seja, não será preciso, por exemplo, inclinar o transferidor para encontrar a medida dos ângulos dados.

Questão para discussão durante a socialização das respostas: Seria possível encontrar as medidas dos ângulos dados sem a utilização do transferidor?

Esperamos discutir a possibilidade de encontrarmos a medida de determinados ângulos sem o auxílio do instrumento de medida. Esse é o caso, por exemplo, dos ângulos 1 e 5, que representam respectivamente 90° e 180° e foram inseridos na atividade intencionalmente por serem ângulos cuja medida é de fácil identificação.

2. Observe a ilustração a seguir:



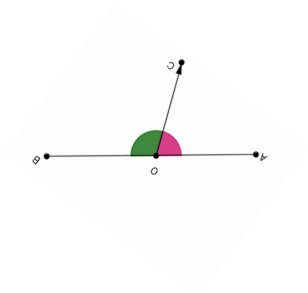
Há relações entre as medidas dos ângulos AÔB, AÔC e CÔB? Explique.

Espera-se que os alunos consigam observar que os ângulos AÔC e CÔB são suplementares e que, portanto, a soma de suas medidas é 180°, igual à do ângulo AÔB. Uma possibilidade é a de que os alunos respondam que juntos, os ângulos AÔC e CÔB formam um ângulo raso (que mede 180°).

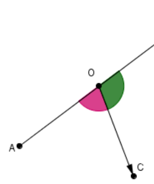
Caso os alunos não percebam a relação pretendida por não possuírem nenhum conhecimento a respeito, poderemos solicitar que os alunos identifiquem todos os três ângulos da atividade e que os meçam com o auxílio do transferidor. Poderá ser solicitado, também, que construam outros ângulos com as mesmas características da figura e que, novamente, identifiquem suas medidas.

Caso haja necessidade de realizar uma explanação acerca dos conceitos de ângulo reto, ângulo agudo, ângulo obtuso, ângulo raso e ângulo de uma volta, poderão fazê-lo, uma vez que essas noções, ao menos intuitivamente, são importantes para o desenvolvimento das demais sessões.

Questão para discussão durante a socialização das respostas: Descobrindo uma medida, seja ela a de AÔC ou CÔB, é possível identificar a outra? Por quê? (se sim) O que garante que sim?



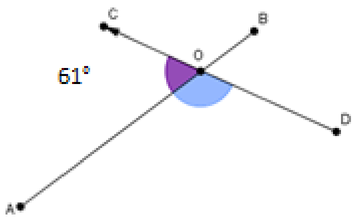
E se o desenho fosse da seguinte forma, poderíamos afirmar a mesma coisa? Por quê?



Neste segundo caso, a posição da figura pode influenciar a resposta dos alunos, pois devido à rotação já não é evidente que o ângulo AÔB possui medida 180°, o que proporciona um grau maior de dificuldade a atividade, pois não se trata de uma situação comum, como na primeira figura. Acreditamos ser importante propor diferentes situações a fim de que os alunos percebam que podem fazer uso de propriedades ou noções em diferentes casos.

Com a próxima atividade, queremos saber se os alunos conseguem utilizar a ideia de ângulos suplementares ou se recorrem ao instrumento de medida e por isso, optamos pela medida do ângulo ser 61°.

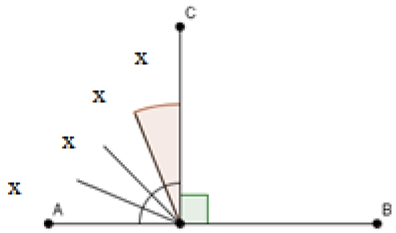
3. Tomando por base a informação dada pela figura, seria possível descobrir a medida do ângulo AÔD? Justifique a resposta.



Para a resolução, os alunos concluem observando que o ângulo AÔC é suplementar ao ângulo AÔD e que, portanto, mede 180°- 61° ou 119°. Logo, AÔD mede 119°.

A medida do ângulo AÔD pode ser encontrada por meio do instrumento de medida. E para este caso, mesmo tivéssemos o cuidado de que a medida de AÔC fosse o mais próximo possível de 61°. É possível que os alunos encontrem medidas próximas, como por exemplo, 120°. Se isso ocorrer, ficará evidente a não percepção da relação de suplementaridade.

4. É possível descobrir a medida de cada ângulo x indicado? De que forma?



De forma parecida à proposta anterior, apesar de não haver medidas na figura, os alunos podem perceber que existe uma relação de suplementaridade entre os ângulos. E assim, identificar a presença do ângulo reto (à direita, identificado pelo símbolo composto por um quadrado e um ponto em seu interior) e concluir que as medidas x equivalem ao resultado de 180° - 90° (ângulo reto) dividido igualmente por quatro. Logo, x = 22,5° (ou 22°, 30’).

Outra possibilidade de resolução pode ser por meio da medição com o transferidor, tal como ocorreu no pré-teste. Neste caso, alguns dos alunos que assim fizeram, encontraram medidas aproximadas, pois ‘x’ não é inteiro. Outros, não perceberam que estavam encontrando medidas diferentes para um mesmo ‘x’.

Para o caso dos alunos não conhecerem o significado do símbolo do ângulo reto, vamos realizar uma explicação a respeito. Se ocorrer de apenas alguns alunos não terem esse conhecimento, outros poderão ser solicitados para auxiliarem na explanação.

***Atividade para discussão ao final da socialização das respostas**:* Duas retas se cruzam de modo que formam quatro ângulos de mesma medida. Qual a medida de cada um desses ângulos?

Experimentação

Esta sessão ocorreu no dia 21 de outubro de 2015 e contou com a presença de 4 alunos. Pedimos para que sentassem em duplas as quais, dentro das possibilidades, seriam mantidas no decorrer das demais sessões. Assim, neste dia as duplas foram compostas por Lisa e Mary, Peter e Wendy. Reunimo-nos num espaço pequeno, deslocado das demais salas de aula e cheio de cadeiras e carteiras sobrepostas umas sobre as outras. Este local era anteriormente utilizado pelo professor que ministrava suas aulas complementares. Ao final, realizamos uma discussão com os alunos acerca de cada atividade, agregando as questões propostas em nossa análise *a priori* e outras mais que surgiram no decorrer da sessão. Em seguida, foi realizada a institucionalização de algumas propriedades, prevista por nosso referencial teórico.

Análise a posteriori

Em nossas análises *a priori*, consideramos a possibilidade dos alunos participantes da pesquisa possuírem algum conhecimento a respeito de ângulos em geral. Entretanto, os quatro alunos participantes desta sessão relataram, em nossa conversa inicial, que não sabiam muito sobre o assunto. De fato, percebemos que eles não conheciam o transferidor e que não sabiam como medir ângulos. Também, tinham dificuldades em identificar, por exemplo, ângulos de 90°, maiores ou menores. Uma aluna (Lisa), quando diante de um desenho que representava um ângulo de uma volta feito no quadro por nós, disse que media 360° por ser "uma bolinha".

Nossa postura frente a isso foi realizar uma breve explanação sobre ângulos, como identificá-los e medi-los. Mesmo assim os alunos encontraram algumas dificuldades relativas ao uso do transferidor. Algo que consideramos natural por ser o primeiro contato com o instrumento de medida. Desta forma, em relação à atividade 01, temos o seguinte diálogo:

Lisa: E esse daqui que deu bem no meio? Eu acho que é zero por que aqui não tem nenhum grau contando olha... Não tem nada. Eu acho, não tenho certeza! Espera aí, espera aí! Eu acho que é 180°, por que aqui está metade de uma bolinha. Professora?
Liana: Por que você acha que este ângulo mede 180°?
Lisa: Por causa que é uma metade de uma bolinha.
Liana: Como assim?
Lisa: É porque uma metade dá 180°.
Liana: Mary, você concorda com ela?
Mary: Eu não sei... Eu acho que está certo, mas eu não sei.
Liana: Quanto mede uma bolinha?
Lisa: 180°, quer dizer, 360°!

Fica evidente no diálogo a produção da conjectura de que o ângulo 4 da atividade 01, ao qual se referiam, mede 180°. Num primeiro momento, Lisa leva em conta a possibilidade da medida do ângulo ser 0°, depois, descarta esta possibilidade passando a acreditar que medida correta do ângulo seria 180°. Ela procura validar a conjectura dizendo que aquele ângulo em questão representava "metade de uma bolinha".

De modo geral, na atividade 01, os alunos conseguiram encontrar as medidas corretas para os ângulos dados. Com relação à atividade 02, nosso intuito de que os alunos percebessem a relação de suplementaridade entre os ângulos não foi alcançada de imediato. Ao longo da sessão isso foi se tornando mais claro, como veremos mais adiante.

Os diálogos abaixo ocorreram durante a resolução desta atividade:

Primeiro Diálogo
Wendy: Vai dar no 60° de novo!
Liana: Mas você acha que pode?
Wendy: Não! Não tem como dar 60° de novo!
Liana: Mas você acha que mede mais ou menos?
Wendy: É mais... É mais! Não é do 60° pra cá! É do 60° pra lá... [indicando a abertura]

Segundo Diálogo
Liana: AÔC, 60°. Qual é o AÔC? [indicou corretamente] Esse ângulo AÔC é maior ou menor que CÔB?
Lisa: Menor.
Liana: Olhando para a figura, o que você acha?
Lisa: Esse é menor [indicando AÔC, embora fosse maior]

No início do diálogo, vemos que Wendy não está convencida do resultado encontrado por meio do transferidor e, observando a figura, percebe que um dos ângulos é maior que o outro. Lisa, por sua vez afirma, no segundo diálogo, que o ângulo AÔC é menor que CÔB baseando-se na medição que realizou. Mesmo orientada por nós a observar a figura, manteve sua afirmação. É possível que isso tenha ocorrido devido à utilização do transferidor, ainda sendo aprendida, pois são dois ângulos cujo prolongamento da semirreta em comum implica em 120° e 60°, ao mesmo tempo.

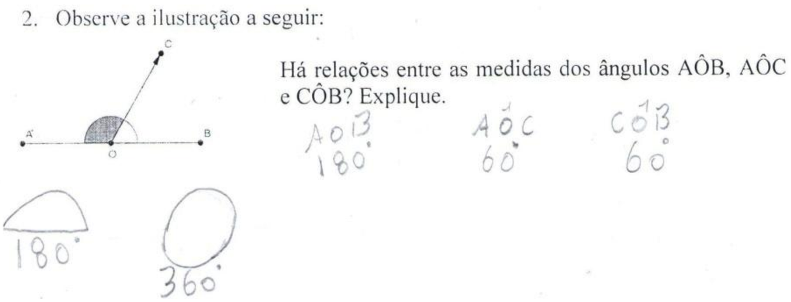


Figura 17 - Protocolo da aluna Lisa, sessão 01a
Fonte: Dados da pesquisa.

Observamos que Lisa, mesmo tendo afirmado anteriormente que um ângulo de meia volta corresponderia a um ângulo de medida 180° e representando, à sua maneira por meio de desenhos, não percebeu a incoerência ao ter dois ângulos suplementares de medida 60°. Ela apoiou-se no resultado encontrado no transferidor e como se trata do primeiro contato com o instrumento possivelmente, assim como Wendy, guiou-se pela medida do ângulo da direita (BÔC), cujo um dos lados coincide com o ângulo AÔC.

Na atividade 03, antes das discussões, tivemos as seguintes repostas:

Lisa

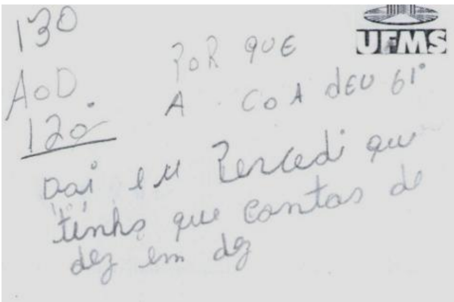


Figura 18 - Protocolo aluna Lisa, sessão 01b
Fonte: Dados da pesquisa

Mary

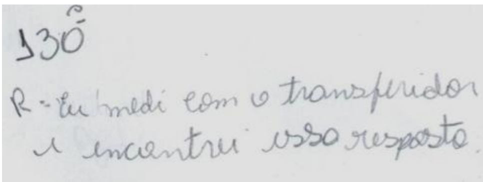


Figura 19 - Protocolo aluna Mary, sessão 01
Fonte: Dados da pesquisa

Wendy

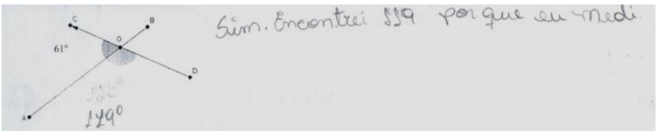


Figura 20 - Protocolo aluna Wendy, sessão 01
Fonte: Dados da pesquisa

Peter

120°

(Não apresentou justificativa)

Vemos que os alunos encontraram a medida do ângulo por meio do transferidor. Como já explicitamos em nossas análises *a priori*, tomamos o cuidado de que o ângulo AÔC medisse 61°, pois caso o aluno encontrasse respostas diferentes de 119°, nos mostraria que ainda não compreendeu ou não consegue reinvestir a relação de suplementaridade. Como a resposta inicial dos quatro alunos foi 120°, podemos afirmar que eles se utilizaram do transferidor para encontrar a resposta. No caso do protocolo de Wendy, percebemos que a mesma apagou sua resposta inicial que fora 120°, anotando 119°.

Durante a resolução da atividade 04 ocorreu a seguinte conversa:

Primeiro diálogo
Mary: Pra mim deu 20°
Lisa: Eu acho que é 10°
Mary: Eu acho que é 20°, porque aqui... 80° menos 60°... Eu acho que é 20°
Lisa: Eu acho que é 10° porque 10°, 20°, 30°...
Mary: Eu acho que é 20° porque aqui...
Lisa: Mas é tudo igual! Ai! Acertei!

Segundo Diálogo
Wendy: Se eu fizer 90° vezes... Não 90° vezes não... 90° dividido pra quatro? Dá ou não?
Liana: O que você acha Peter?
Peter: Acho que dá...
Liana: Mas porque vocês acham que dá certo?
Wendy: Sei lá...
Liana: Então pensem um pouco mais...
Na dupla:
Wendy: Faz aí!
Peter: Faz você...
Wendy: Eu não sei fazer divisão! Como que faz a divisão?
Peter: Como?
Wendy: Como que faz a divisão?
Peter: Mede aqui com a régua [transferidor]...

No primeiro diálogo a dupla discute sobre qual medida encontrada estaria correta, se 10° ou 20°. Embora Mary apresente a resposta que mais se aproxima da correta, não argumenta sobre o "porque" de sua afirmação. Pelo diálogo e pelos protocolos concluímos que eles tentaram encontrar a resposta por meio da medição. A outra dupla tenta encontrar a resposta sem medir e embora não tenham chegado à resposta final, consideramos que se trata de uma tentativa importante por ser nossa primeira sessão. Observamos que neste caso, Wendy percebe que as medidas dos quatro ângulos juntos devem resultar em 90° e, embora insegura, cogita a possibilidade da divisão. É provável que a dificuldade em realizar a operação, evidente no diálogo, tenha sido um impedimento para a conclusão da atividade, pois nos protocolos a dupla respondeu que havia possibilidade de descobrir a medida de x por divisão, embora não a tenham efetuado.

Durante as discussões sobre as atividades, desenhamos no quadro ângulos suplementares, sendo que apenas uma das medidas era conhecida e em posições diferentes. Assim, questionamos se seria possível descobrir a medida desconhecida em cada caso e para o primeiro deles (dois ângulos suplementares, sendo um deles 60°), os alunos responderam que a medida pretendida era 120°. Para validar a resposta, Wendy e Lisa apresentaram as seguintes respostas:

Florisval: Como vocês explicariam porque aquele ângulo mede 180°?
Wendy: Por que no de cima, também dá 180°.

Lisa: Por causa que... Uma bolinha pela metade dá 180° e inteira dá 360°!

Neste momento do debate, tanto Wendy quanto Lisa, mesmo que usando o termo não convencional "bolinha", conseguem explicar o porquê de um ângulo raso medir 180°. Para o grupo, a explicação de Lisa de que a medida do ângulo é 180° por ser a “metade de uma bolinha”, passa a ser uma prova, considerando que todos foram convencidos pelo argumento.

Em seguida, propusemos ao grupo a discussão da atividade 03 da sequência didática, ou seja, se seria possível identificarmos a medida desconhecida sem a utilização do transferidor. Pedimos quais respostas as duplas haviam encontrado e, em seguida, se de acordo com o que estávamos discutindo, estariam corretas ou não,

Liana: Agora voltando para a atividade 03, que medidas vocês encontraram?
Lisa e Mary: 130°
Liana: E vocês?
Wendy: Deu 120°
Liana: Vocês acham que está correto?
.
Alunos: Não!
Liana: Quanto seria então?
Peter: 119°! Eu acho que é!
Florisval: Como você pensou Peter?
Peter: Por que ali está 61° aí... 1° mais 19°, 20°! E 100° mais 60° e 160° mais 20° 180°!

Neste caso, o grupo reinveste a ideia que está sendo debatida, ou seja, de que a medida de dois ângulos que formam meia volta, devem resultar em 180°.

Quando perguntamos: duas retas se cruzam de modo que formam quatro ângulos de mesma medida. Qual a medida de cada um desses ângulos? Sem demora os alunos apresentaram suas respostas. Por meio da gravação em áudio, foi possível perceber que Mary logo propõe à Lisa que a medida dos ângulos seja 90°, 90°, 90° e 90°. Peter questiona Wendy sobre quanto seria 360° dividido por quatro e prontamente ela se manifesta para o grupo todo:

Wendy: Vai dar 90°!
Peter: 360° dividido por 4!
Wendy: Então! 90° olha!
Liana: Quanto?
Mary: 90°.
Wendy: É isso que eu ia falar!
Florisval: Por que 90°?
Mary: É porque se somar... É a metade...
Peter: É! Cada lado...
Lisa: Os quatro 90°...
Florisval: Como assim a metade?
Mary: Eu não se explicar...
Peter: 90° mais 90° da 180°, mais 180°, 360°...

Embora na sessão não tenhamos focado em ângulos de uma volta, Peter utiliza-se dessa informação para responder ao questionamento, bem como da ideia de ângulos suplementares, como fica claro em sua última fala.

Considerações sobre a sessão 01

Entregamos os protocolos aos alunos e vez ou outra auxiliávamos em questões como a utilização do transferidor e a compreensão da notação de ângulos. Ao final, realizamos uma discussão sobre cada uma das atividades da sequência, intercalando com os questionamentos que havíamos proposto.

Observamos que os alunos não tinham muito conhecimento sobre ângulos e à medida de ângulos em geral, o que reforça a ideia de que os conteúdos geométricos nem sempre têm o destaque que deveriam nas aulas de matemática, como discutimos em nossos estudos preliminares. Apesar disso, trata-se de uma rica oportunidade para que, de fato, eles possam investigar, descobrir, elaborar suas conjecturas e prová-las. A esse respeito, tivemos já nesta sessão, a elaboração de conjecturas acerca da medida de ângulos de meia volta, como também argumentos a fim de validá-las.

Mesmo diante de enunciados que solicitavam justificativas, os protocolos dos alunos permaneceram praticamente em branco e nesse sentido, quando este tipo de atividade não é comum na sala de aula, o registro escrito é um desafio a mais por que exige um tipo de representação que geralmente não utilizam (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003). Por outro lado, as explicações verbais foram surgindo à medida que questionávamos as respostas apresentadas.

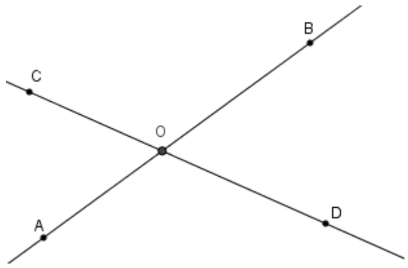
O debate no final da sessão ocorreu de forma tímida, pois de certa maneira, os alunos não estavam acostumados nem com nossa presença, nem com esta dinâmica. Em alguns momentos incentivamos o diálogo por considerarmos que era importante ouvi-los, entender como pensaram, independentemente da resposta estar correta ou não. Assim, embora a produção de provas, no sentido de Balacheff, quase não tenha ocorrido, consideramos que por ser nosso primeiro encontro, obtivemos resultados satisfatórios tanto no que se refere às formulações apresentadas pelos alunos, quanto ao envolvimento que tiveram.

5.2. Sessão 02

Esta sessão é composta por três atividades cuja pretensão é a de que os alunos elaborem conjecturas sobre ângulos opostos pelo vértice (OPV), por meio de atividades de medição e construção com o transferidor. É de nossa intenção, também, que eles utilizem algum tipo de argumento ou prova para validá-la.

As três atividades que serão trabalhadas neste encontro possuem em seu enunciado a expressão *explique*, por que buscamos justificativas para as respostas dadas, entender como ou por que motivo os alunos acreditam que a resposta está correta. Isso pode favorecer o aparecimento de provas para as conjecturas produzidas, já que se solicita uma explicação, uma justificativa para as afirmações.

1. Na figura, o que é possível afirmar sobre a medida dos ângulos?



Existe alguma relação entre as medidas dos ângulos CÔA e BÔD? Explique.

Para responder a esta questão os alunos podem apresentar diversas respostas, uma vez que se trata de uma atividade não muito delimitada, de caráter mais aberto se comparada às demais. Por isso, diferentes respostas podem surgir afinal muitas coisas são possíveis de se afirmar sobre a medida dos ângulos propostos. Com relação ao segundo questionamento poderemos ter, por exemplo, as seguintes respostas.

Sobre a relação existente entre CÔA e BÔD, responder que são dois ângulos de mesma medida baseados na observação do desenho.

Utilizar o transferidor para medir os ângulos AÔC e BÔD e verificar que eles possuem a mesma medida.

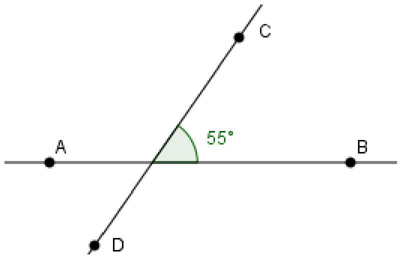
Considerar que ângulos OPV são congruentes, encontrar a medida de qualquer um deles e em seguida deduzir a do outro.

Caso seja necessário, poderíamos realizar uma explanação a respeito dos conceitos matemáticos de retas, semirretas e segmento de reta. Nossa intenção também é suscitar uma discussão sobre medidas aproximadas dos ângulos CÔA, CÔB, BÔD e DÔA e por isso, num primeiro momento não distribuiremos o transferidor. A figura está posicionada de forma que será preciso inclinar o instrumento de medida para medir os ângulos formados, pois queremos que os alunos percebam que devem utilizá-lo de acordo com a posição do ângulo cuja medida se quer saber. É esperado que os alunos observem que ângulos opostos pelo vértice serão sempre congruentes.

Considerando a nossa primeira sessão em que observamos que os alunos não têm muito conhecimento sobre ângulos em geral, esperamos que apareçam provas pertencentes ao nível pragmático. Ou seja, provas cujas fundamentações estejam relacionadas às medições e manipulações de exemplos particulares.

Ainda, esta atividade foi elaborada de modo que contemplassem uma figura representando ângulos OPV, pois possivelmente será o primeiro contato dos alunos com a propriedade. Caso precisassem desenhar, a atividade poderia ficar confusa e a intenção de produzir conjecturas, ficaria para segundo plano.

2. Quais as medidas dos ângulos da figura? Explique como você encontrou cada uma delas.

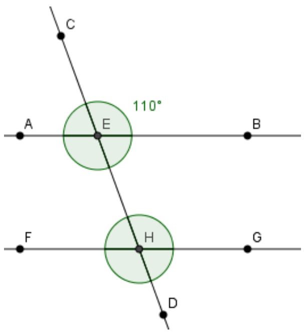


Com esta atividade, queremos que os alunos encontrem as medidas solicitadas, seja por meio do instrumento de medida ou de um raciocínio dedutivo, após uma discussão ocorrida na sessão 01 sobre ângulos suplementares.

Escolhemos que a medida do ângulo CÔB fosse 55° e que ficasse evidente para favorecer a resolução da atividade através desta estratégia. Assim, os alunos podem deduzir que a medida do ângulo AÔD é 55° por ser o ângulo oposto de CÔB, cuja medida é indicada na figura. Em seguida, será possível concluir que o ângulo AÔC é o suplemento de AÔD (também é o suplemento de CÔB) e, portanto, mede 180°-55° ou 125° e pelo mesmo raciocínio, encontrar a medida de BÔD. Logo, as medidas de AÔC, AÔD e BÔD são, respectivamente, 125°, 55° e 125°. Trata-se de uma das possibilidades, considerando a ideia de ângulos suplementares e OPV.

Também é possível que os alunos encontrem as medidas por meio do transferidor.

3. Considerando agora as retas paralelas a e d, interceptadas pela reta transversal b. Identifique a medida de todos os ângulos e explique como você as encontrou?



Com relação à atividade 3, a demonstração de que retas paralelas interceptadas por uma transversal resultam em ângulos correspondentes congruentes é complexa e não indicada a este ano de escolaridade. O livro didático adotado pela escola, por exemplo, quando trabalha estas noções apresenta provas pertencentes ao nível pragmático (ver sessão 2.2). Ainda, de acordo com os PCNs, mesmo que no quarto ciclo (7ª e 8ª séries) se inicie um trabalho com demonstrações, “[...] é desejável que não se abandonem as verificações empíricas, pois estas permitem produzir conjecturas e ampliar o grau de compreensão dos conceitos envolvidos” (BRASIL, p. 87, 1998). As verificações das medidas de ângulos dados, realizadas por meio do transferidor, por exemplo, apesar de empíricas podem suscitar questionamentos como: estes ângulos têm a mesma medida? E assim, contribuir quanto à elaboração de conjecturas pelo aluno e também de alguma justificativa.

Nesse sentido, nossa intenção é que eles façam uma verificação empírica de que determinados ângulos, nesta atividade, são congruentes. Se necessário, utilizando-se de outros desenhos formados por retas paralelas interceptadas por transversais. Assim, esperamos que apareçam provas pertencentes ao nível pragmático, ou seja, aquelas fundamentadas na medição e validação para alguns casos particulares.

Apesar disso, os alunos podem utilizar das mesmas estratégias referentes a atividade 1 para encontrar as medidas dos ângulos AÊC, CÊB, BÊD e DÊA, tendo em vista que é um caso análogo, porém com medidas diferentes. Entretanto, para identificar as medidas de $F\widehat{H}C$, $C\widehat{H}G$, $G\widehat{H}D$e $D\widehat{H}F$, caso os alunos não tenham conhecimento, mesmo que empírico, das propriedades dos ângulos formados por duas retas paralelas interceptadas por uma transversal, poderão encontrar dificuldades. Se isso ocorrer, podemos solicitar aos alunos que meçam todos os ângulos da figura com o transferidor e, caso necessário, que desenhem outros ângulos formados por paralelas e uma transversal, para a verificação.

É importante destacar que, tanto na atividade 2, quanto a atividade 3, as figuras estão posicionadas conforme configuração geométrica usual porque a intenção agora é a produção de conjecturas sobre aos ângulos OPV. Este aspecto será explorado em outro momento oportuno.

Experimentação

Esta sessão ocorreu no dia 27 de outubro de 2015, com a participação de 06 alunos. Organizamos as duplas de modo que Lisa e Peter ficassem juntos, pois haviam participado da sessão anterior. Miguel e João formaram a segunda dupla e, por último Ana e Maria. Estas últimas, não foram consideradas em nossas análises gerais, pois Maria participou pontualmente desse encontro e Ana esteve presente em dois deles. No início, questionamos os alunos com relação às medidas dos ângulos de meia volta, de uma volta e retos para relembrarmos o que foi visto na sessão anterior, bem como, para integrar os alunos que não participaram da sessão 01. Neste dia trabalhamos no laboratório de informática da escola, que proporcionava um espaço maior. Então arrumamos as carteiras que seriam utilizadas pelos alunos entre os espaços dos computadores. Este foi o local que utilizamos a partir de então.

Análise a posteriori

Em seguida à distribuição dos protocolos Peter nos chamou e questionou sobre como faria para responder a questão sem o transferidor, até então não distribuído aos alunos. Assim, propomos que pensassem em aproximações, ou seja, se os ângulos da figura mediam, por exemplo, mais ou menos do que 90°, na tentativa de incentivar, aos poucos, a abandono do transferidor. Sobre isso, tivemos a seguinte conversa:

Liana: Será que este ângulo, BÔD, mede mais ou menos de 90°? E DÔA, mais ou menos do que 90°?
Peter: Mais!
Liana: Mais? Como assim?
Peter: É! Mais de 90°!
Lisa: Não, eu acho que é a mesma quantidade!
Liana: Qual mede a mesma quantidade?
Peter: Aqui é menos do que aqui, olha!
Lisa: Esses dois aqui!
Liana: Então você acha que o DÔA e o BÔC medem a mesma coisa?
Peter: Você acha... Aqui, aqui é menos do que aqui, olha! Aqui é menos do que aqui![referindo-se aos ângulos suplementares]
Lisa: É! Então aqui...
Peter: Esses dois aqui são iguais! [referindo-se aos ângulos OPV]
Lisa: E esses dois aqui também são iguais!
Peter: Então! Esse aqui é igual a esse e esse é igual a esse!
Lisa: Então se a gente descobrir esse a gente descobre esse!
Peter: Sim!
Passado algum tempo
Lisa: Deu70° aqui! Deu 40°... Deu 90°!
Peter: Aonde?
Lisa: Esse daqui!10°, 20°, 30°... Não espera ai! 10°, 20°, 30°... Não, deu 110°!
Peter: Aqui olha! Aqui é 50° e aqui é 130°...
Lisa: Aqui no meu deu 110°.
Passado algum tempo
Liana: E o de baixo da quanto?
Peter: Aqui? 130°!
Liana: Você mediu?
Peter: Não, eu acho que é o mesmo tamanho...
Passado algum tempo
Lisa: É, está certo! É 130° mesmo olha aqui! Olha, 50° mais 50°... e aqui, 130° com 130° da 260° mais 50° mais 50°, dá 360°!

No excerto acima, observamos que a pergunta feita à dupla suscitou uma discussão sobre a igualdade dos ângulos, possível por que até então não havíamos distribuído o transferidor. Peter observa que os ângulos BÔC e BÔD são diferentes e que o primeiro tem maior medida do que o segundo. Em seguida diz que os ângulos DÔA e BÔC (que são OPV) têm mesma medida a partir da observação da figura presente na atividade, o que é mantido quando, mais tarde, diz achar que tem “o mesmo tamanho”.

Depois de certo tempo, distribuímos o transferidor as duplas e, embora a questão não solicitasse, passaram a medir os ângulos da figura. Possivelmente isso decorre do contrato didático (BROUSSEAU, 1996) estabelecido naquele contexto, pois mesmo que nós tentássemos incentivar seu abandono aos poucos, ele vinha sendo utilizado em todas as sessões. Vemos que Lisa, diferentemente de Peter, procura realizar as medições e validá-las com o instrumento de medida e mais tarde, alicerça-se na informação de que a medida de todos os ângulos deve resultar em 360°.

Tendo em vista a afirmação realizada pela dupla, de que os ângulos opostos pelo vértice teriam mesma medida, devolvemos o seguinte questionamento: se isso sempre aconteceria. A resposta imediata foi negativa, nem sempre teriam medidas iguais. Assim, os desafiamos a testarem com mais exemplos. Sobre isso, tivemos os seguintes diálogos,

Primeiro Diálogo
Liana: Testou?
Lisa: Não da igual!
Liana: Que medidas você encontrou?
Lisa: Esse daqui deu 130° e esse daqui deu 140°
Liana: E os outros?
Lisa: Deu 40° e 40°!
Liana: E o que Peter acha?
Peter: Tem que da 360°...
Lisa: Eu ia contar agora!
Na dupla
Peter: Não vai dar! Ai não da! Vai dar mais!
Lisa: Eu coloquei errado aqui, olha! Aqui da 50°!

Segundo Diálogo
Liana: Será que sempre, quando tivermos dois segmentos concorrentes como dessa forma, os ângulos OPV terão mesma medida?
Ana: Não
Lisa: Sim! Olha o que eu fiz... Deu a mesma coisa! Olha aqui, eu fiz um monte, olha! Deu tudo a mesma coisa! Olha aqui o tamanho desses!

Quanto ao primeiro diálogo, ocorrido durante a realização das atividades, percebemos que mesmo tendo afirmado anteriormente que, descobrindo-se um dos ângulos, é possível descobrir os demais, Lisa utiliza-se do transferidor para encontrar as medidas da figura. Como modo de conferência utiliza-se, novamente, da informação de que todos eles devem somar 360°. No entanto, tanto ela quanto Peter, não percebem de imediato que dois ângulos suplementares não podem ser 50° e 140°. Como neste momento, já havíamos nos afastado da dupla, não foi possível interferir com relação a isso.

Em se tratando da conjectura que está sendo elaborada, de que os ângulos opostos pelo vértice possuem a mesma medida, percebemos aqui o processo cíclico de Mason (1982), no qual dada a conjectura, testa-se para alguns casos, coloca-se em cheque sua veracidade e nesse momento, Lisa e Peter, buscam um contraexemplo e encontraram um caso em que os ângulos OPV não são congruentes. Mesmo sendo em função de uma incoerência, isso colocou em cheque a conjectura e nesse sentido, passam a testar para mais casos e daí, decorre o segundo diálogo ocorrido durante discussão final da sessão.

Neste, Lisa infere que os ângulos opostos sempre serão iguais pelo fato de ter "feito um monte". Poderíamos assim, classificar esse discurso como sendo o tipo de prova *experimento crucial*, cuja conclusão é baseada em diversos exemplos, sobretudo em algum bem particular, como é possível observar nos desenhos do protocolo. É importante dizer que mesmo tendo desenhado poucos casos, o fato de Lisa ter dito "Olha aqui o tamanho desses!" significa que para ela aquele desenho cujo prolongamento das semirretas foi pequeno, foi o caso não familiar, atípico.

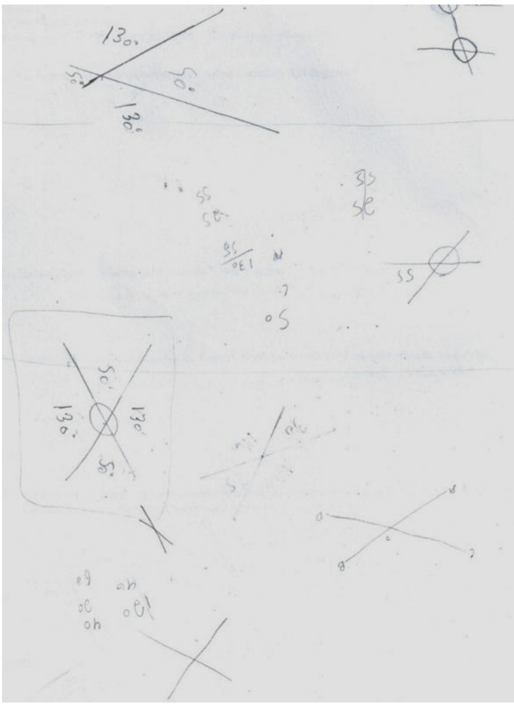


Figura 21 - Protocolo aluna Lisa, sessão 02a
Fonte: Dados da pesquisa

Em se tratando da segunda questão da atividade 1, concernente à existência de alguma relação entre os ângulos CÔA e BÔD, Lisa e Peter responderam "sim, eles têm a mesma medida". A dupla Miguel e João, não apresentou nenhuma resposta. Entretanto, discutem bastante na tentativa de encontrar as medidas dos ângulos, vivenciando o processo de investigação na busca de resposta. Processo este, "[...] fértil em acontecimentos inesperados, de movimentos para frente e para trás" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 15), como fica evidente no excerto abaixo. Apesar de ser a primeira sessão da qual participam, neste momento, podemos dizer que ocorreu a devolução e que os alunos estão vivenciando fases adidáticas,

Miguel: É assim... Tudo tem que dar 360°! Então olha se aqui é 55°... Aqui vai dar...
João: Agora vai dar 155°...
Miguel: Aqui tem que dar 360°...
João: Tudo?
Miguel: Tem que dar... 180°... Aqui, entendi... É 125°...
João: Aham! Por causa que...
Miguel: Não adianta a gente colocar o 130° aqui se deu 55°. Aqui deu 130°, tira 5° dali... vai virar 50° e aqui vai dar 130° e aqui também vai dar... E coloca em baixo também 155° e 130°! Não... Aqui também vai dar 55° e aqui 125°... Ai, 125° mais 125° vai dar 250° não é? 250° mais... A legal! Olha aqui...
João: 350°!
Miguel: Não... Olha aqui... 125° mais 125° vai dar 250° ai mais 50° vai dar... Ai... É 360° que tem que dar né?
João: É!
Miguel: Então está errado!
João: Aqui vai dar tudo 360°?
Miguel: Não! 125°...
João: 5 mais 5... 250°...
Miguel: Agora 55° mais 55°. 5° mais 5° sobe um... Vai dar... 120° mais 250° vai dar...
João: 370°
Miguel: Então tem mudar...
Contaram novamente
Miguel: Tá certo vai... Então vai dar 360°... Nós fizemos a conta dos dois, aí aqui deu 250° e aqui deu 110° aí nós somamos e deu 360°.

Nota-se que Miguel, imbuído das discussões iniciais da sessão, percebe que a medida do ângulo suplementar a CÔB não pode ser 130°, argumentando que "não adianta", pois "tem que dar 180°". Em seguida, raciocina sobre a possibilidade de, de fato, ser 130°, concluindo que se assim fosse, o outro ângulo deveria ter 50°. Depois de alguns pensamentos, afirma que os demais ângulos também deverão ter as medidas de 55° e 125° e apoiando-se na condição de que todas as medidas somadas devem resultar em 360°, realizam contas na tentativa de verificação.

Com relação a atividade 03, foram apresentadas as seguintes respostas

Lisa

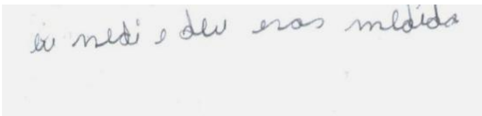


Figura 22 - Protocolo aluna Lisa, sessão 02b
Fonte: Dados da pesquisa

Peter

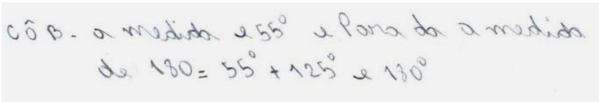


Figura 23 - Protocolo aluno Peter, sessão 02
Fonte: Dados da pesquisa

Lisa: Professor! Eu acho que aqui da 125°!
Florisval: Por que da 125°?
Lisa: Por que 125° mais 55° da 180°...
Florisval: E aí Peter?
Peter: Eu acho que aqui também da 125°!
Florisval: Como assim?
Peter: Por que 125° mais 55° é 180°...
Lisa mediu o ângulo dado no enunciado
Lisa: Aqui da 50°! Aqui pra mim deu 50°! Professora?
Peter: Por que aqui deu 50°?
Lisa: Eu contei aqui...
Peter: Mas olha,se aqui é 55° mais 125°...
Lisa: Vai ficar 180° aí aqui...
Peter: Ai aqui olha...
Lisa: 130° mais 50° é 180°...
Peter: Aí esse aqui, 125° mais 155°...
Lisa: Mas aqui... Olha aqui uma coisa...
Olha o tamanho desse pra esse...
Liana: O que vocês acham?
Lisa: Eu acho que é menor...
Peter: Eu acho que é igual...
Lisa: Na régua...
Peter**:** Aqui é 55°, mais 125°, 180°! Ai aqui... Quanto é que ia ser aqui? 125°... 55°!
Lisa: Mas aqui eu medi...

Miguel

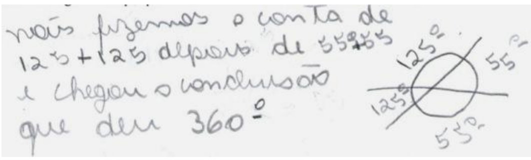


Figura 24 - Protocolo aluno Miguel, sessão 02
Fonte: Dados da pesquisa

João

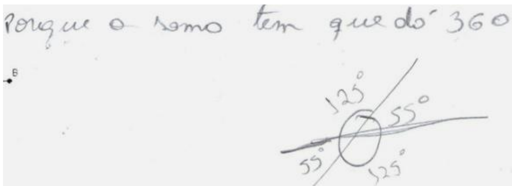


Figura 25 - Protocolo aluno João, sessão 02
Fonte: Dados da pesquisa

João: Eu coloquei por que a soma tem que dar 360°... É 360° não é?
Miguel: É 125° em cima, 125° em baixo, 55° aqui e ali...
João: Aqui é 125°?
Miguel: É!
João: Ah! Aqui que é 55°, por que os dois [referindo-se aos ângulos OPV] é o mesmo! Os dois são o mesmo...
Miguel: Mas vai ser o mesmo, o resultado é aquele lá mesmo...
Como que a gente vai escrever aqui?
João: Eu coloquei que a soma tem que dar 360°...
Algum tempo depois
Florisval: Por que você disse que aqui é 125°?
Miguel: Por que aqui a soma tem que dar 180°...

Aqui, novamente as respostas de Lisa são influenciadas pelo transferidor. Tanto é assim que procura sempre medir e mesmo afirmando em momentos anteriores que a soma das medidas de dois ângulos que formam meia volta é 180°, bem como apresentando uma justificativa para isso, quando questionada, o resultado do transferidor se sobressai. Tomamos o cuidado de que as medidas por nós convencionadas fossem compatíveis com a medida 'real' do ângulo, por isso, acreditamos que Lisa, ao medir, tenha encontrado 50° e não 55°, por um 'deslize' (que tem se mostrado muito comum) ao posicionar o transferidor.

Peter, por sua vez, percebe que não há a necessidade de medir. Na tentativa de convencer Lisa que a medida do ângulo é 125° e não 130°, pois apresenta o seguinte discurso: 'Aqui é 55°, mais 125°, 180°! Aí aqui... Quanto é que ia ser aqui? 125°. E aqui, 55°!'. No momento em que Lisa chama pela professora, estávamos próximos a dupla e foi possível observar que Peter, ao mesmo tempo em que questionou Lisa, realizou movimentos com o transferidor, evidenciando os dois ângulos suplementares (55° e 125°, depois 125° e 55°). Neste caso, o aluno procura encontrar a resposta deduzindo-a a partir da medida dada na figura presente na atividade. Percebemos a presença de um raciocínio um tanto avançado, considerando que fora apenas a segunda sessão e que os alunos ainda não haviam tido um contato expressivo com este tipo de atividades e conteúdo, conforme observamos na sessão 1.

Apesar de não podermos classificar o discurso apresentado por Peter como sendo um dos níveis de prova de Balacheff (1988), há possibilidade de classificá-lo como uma argumentação, pois, fora feito na tentativa de convencer o colega sobre a validade do que estava afirmando.

Quanto à outra dupla, quando João afirma "ah! Aqui que é 55°, porque os dois [referindo-se aos ângulos OPV] é o mesmo! Os dois são o mesmo..." temos uma evidencia da formulação da conjectura, iniciada desde a primeira atividade, para a qual eles discutem as medidas dos ângulos formados pela figura dada (diálogo anterior). Eles concluem que os ângulos CÔB e AÔD são congruentes, mas encontram dificuldades no tocante ao registro escrito. Quando Miguel questiona "como é que a gente vai escrever aqui?", parece-nos que a exigência do enunciado em apresentar uma explicação colocou a dupla a pensar como poderiam responder à atividade, ou seja, como justificariam as medidas dos ângulos encontradas.

Considerações sobre a sessão 02

Nesta sessão observamos a formulação da conjectura pretendida e nesse sentido também ficou evidente que as atividades de medir, explorar as medidas dos ângulos, como sugerem Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) e Imenes (1987), por exemplo, foram importantes para que isso ocorresse. Isso pôde ser observado nas discussões entre os alunos nas duplas que igualmente foi fundamental para observarmos a produção de conjecturas. Segundo Magalhães e Martinho (2014), quando os alunos estão em grupos suas opiniões e ideias tendem a ser organizadas e claras, pois precisam comunicar a um outro o que estão pensando e como raciocinam. Esse foi o caso, por exemplo, de Peter que em boa parte dos diálogos que trouxemos, estava discutindo com Lisa seus argumentos sobre a validade de suas afirmações em detrimento dos resultados do transferidor.

Também por meio dos diálogos compreendemos melhor como os alunos pensaram para a resolução das atividades que propomos, como foi o caso de Miguel na atividade 2.

No que se refere à validação da conjectura, Lisa apresentou o tipo de prova que classificamos como sendo *experimento crucial*. Apesar disso, no final da sessão percebemos que, mesmo apresentando tais discursos e justificativas, alguns pareciam expressar dúvidas com relação à propriedade das medidas dos ângulos OPV. Por isso, optamos por retomar na sessão 3 (ângulos opostos pelo vértice) para que, em seguida a uma melhor compreensão sobre o assunto, seguíssemos adiante. Ademais, devido às escolhas que fizemos, não houve tempo para muitas discussões sobre a atividade 4 da nossa sequência. Retomaremos este assunto em uma sessão posterior.

Neste dia Lisa e Peter, que já haviam participado da sessão 01 pareciam estar mais à vontade do que os demais alunos, expondo-se mais nas discussões finais, diferentemente de Miguel e João, por exemplo. Estes, embora mais tímidos neste último momento, discutiram bastante entre si a resolução das atividades.

5.3. Sessão 03

Esta sessão é composta por uma atividade cuja pretensão é a de fazer com que os alunos voltem a investigar em relação aos ângulos OPV (se possuem mesma medida). Para isso, procuramos propor um questionamento, cuja solução ótima fosse o conhecimento pretendido (BROUSSEAU, 1996) e por isso a atividade é fechada, ou seja, quer-se saber sobre os ângulos OPV: se possuem ou não mesma medida e por que. Neste caso, optamos por não inserir na atividade nenhuma figura, para não influenciar na resposta a ser dada. Na sequência didática elaborada por Oliveira (2009), por exemplo, as atividades sem figuras foram consideradas mais difíceis por que o aluno precisava realizar sua própria construção no software com o qual trabalhou. Em nosso caso, o aluno precisará construir seu próprio desenho, caso sinta necessidade.

1. Ângulos opostos pelo vértice possuem sempre a mesma medida? Por quê?

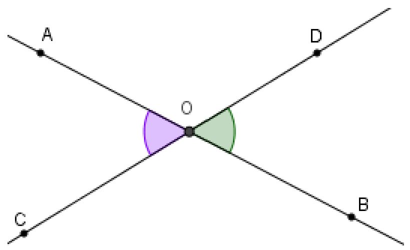
Possíveis respostas a serem apresentadas pelos alunos:

Afirmativa, porque para todos os casos realizados, sempre obtiveram a mesma medida. Neste caso, poderemos classificar a resposta como sendo *empirismo ingênuo*, uma vez que neste tipo de prova, de acordo com Balacheff (1988), a afirmação é realizada tendo por base apenas alguns exemplos. A esse respeito, Magalhães e Martinho nos dizem que:

> Em particular, quando os alunos efetuam as suas primeiras experiências em que é fundamental formular e avaliar conjeturas, verifica-se que a maioria dos alunos conclui a veracidade destas para a generalidade de objetos de um determinado universo, a partir apenas da verificação de um número pequeno de casos observados e testados (MAGALHÃES E MARTINHO, 2014, p. 105).

Afirmativa, porque é válida para todos os casos feitos, inclusive para algum em específico. Se o aluno apresentar essa justificativa, a prova será classificada como *experimento crucial* (BALACHEFF, 1988), pois não convencido em observar apenas alguns exemplos, o aluno realizou uma verificação para um caso bem específico, atípico. Como exemplo deste tipo de prova, tem-se a situação de um aluno que constrói ângulos opostos pelo vértice de modo que um dos ângulos é inferior a 10°, sendo observado que ele ainda não estava convencido da validade da propriedade e foi testar um caso que ele considera um tanto diferente do usual.

Afirmativa, pois dada a construção:



AÔD[9] + DÔB = 180°

AÔD + AÔC=180°

Portanto, DÔB e AÔC são congruentes.

Essa reposta pode ser classificada como *exemplo genérico*.

Experimentação

Esta sessão ocorreu no dia 03 de novembro de 2015. Estiveram presentes 06 alunos de modo que as duplas foram formadas da seguinte forma: Mary e Wendy que faltaram à sessão 2, sentaram-se respectivamente com Lisa e Ana. Miguel e João formaram a outra dupla. Neste dia entregamos os protocolos com o questionamento proposto e procuramos intervir minimamente no trabalho dos alunos, ficando também mais afastados fisicamente. Esta sessão, apesar de conter apenas uma atividade, foi uma das mais longas, ultrapassando às duas horas previstas, pois durante sua aplicação propusemos outras questões de acordo com a direção que os alunos seguiam. Para que isso ocorresse, também foi importante o envolvimento e comprometimento que eles tiveram com nossa proposta.

Análise a posteriori

Quando propusemos o questionamento, mesmo se tratando de algo já abordado na última sessão, as duplas aceitaram a questão, como evidenciamos nos diálogos. Percebemos que Lisa, mesmo tendo afirmado que os ângulos OPV teriam mesma medida na sessão anterior, parece apresentar dúvidas e deste modo, testa para mais casos.

[9]Neste trabalho vamos usar a mesma notação tanto para ângulo quanto para medida do ângulo.

Lisa: Ela quer saber se sempre vai dar igual aqui e aqui e aqui e aqui...
Mary: Ué! Lógico que sim!
Lisa: Mas não sei, eles podem ser diferentes! Ai olha aqui ó...
Mary: Mas do mesmo jeito tudo isso é igual! Mas é sobre aquele desenho ali ou qualquer desenho?
Lisa: Não você escolhe, só está perguntando aqui, olha! Aqui deu quanto?
Mary: Deu dois de 90°!
Lisa: 10°, 20°, 30°... Aqui deu 90° também! Deu igual!
Algum tempo depois
Mary: Eu acho que vai sim!
Lisa: Deu tudo 60°?
Mary: Então! Esse aqui da 60° esse da 60° também!
Lisa: Vamos tentar com outro ângulo... Deu 90°!
Mary: Aqui deu 90° e aqui deu 90°...
Lisa: Você mediu?
Mary: Não, mas vai dar 90°!
Algum tempo depois
Lisa: Quanto deu?
Mary: 140°. Ah! Aqui também deu 140°! Também deu 140° aqui olha! Eu medi errado antes...
Algum tempo depois
Lisa: Mesmo pequeno ou grande, dá do mesmo jeito [referindo-se as medidas]
Mary: Então vamos para resposta...

Percebemos por meio deste excerto que a dupla estava empenhada na resolução da atividade proposta. No primeiro momento, Mary infere que os ângulos serão iguais baseada na observação do desenho feito por Lisa, pois não havia figuras junto ao enunciado da questão. A dupla passou a testar para alguns casos a validade da conjectura de que os ângulos OPV possuem mesma medida e a partir disso conclui que é verdadeira.

Nesse sentido, conforme são encontradas as medidas dos ângulos em outros casos, as alunas parecem ficar convencidas de que ângulos OPV terão sempre mesma medida. Por meio do diálogo, notamos que Lisa expressa novamente certa resistência em deixar o uso do transferidor de lado, como fica claro no momento em que questiona Mary sobre como encontrou a medida 90°. Nos protocolos, e em específico, no de Lisa, novamente há diferentes desenhos realizados como podemos observar na figura abaixo. Isso, possivelmente contribuiu para que ela afirmasse que, independente de ser “grande ou pequeno”, os ângulos OPV terão a mesma medida.

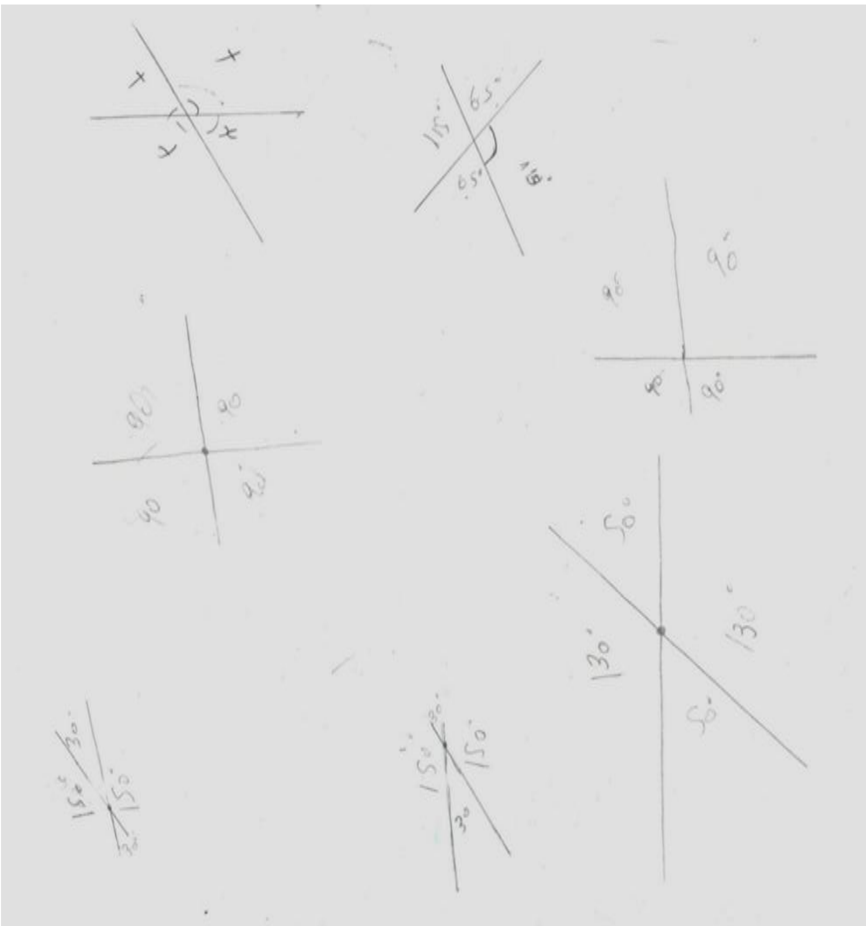


Figura 26 - Protocolo aluna Lisa, sessão 03
Fonte: Dados da pesquisa

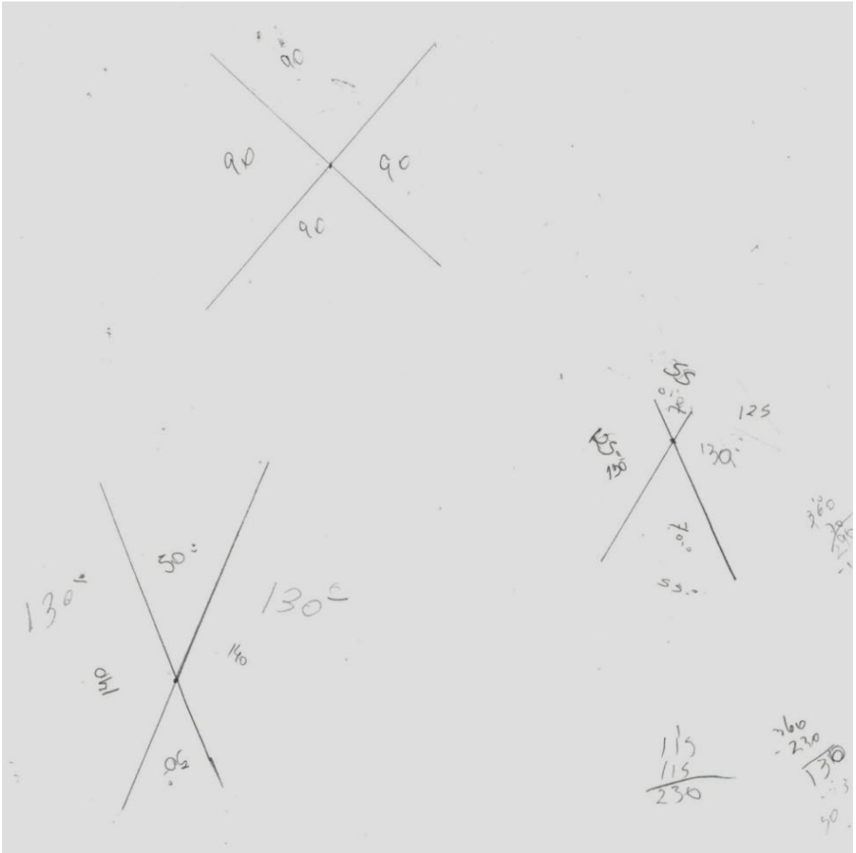


Figura 27 - Protocolo aluna Mary, sessão 03
Fonte: Dados da pesquisa

De acordo com Balacheff (1988), o tipo de prova produzido Lisa e por Mary nesta sessão é (assim como na sessão 02 no caso de Lisa), é do tipo *experimento crucial* porque elas trabalharam juntas na validação da conjectura e concluíram depois de terem testado para alguns casos, inclusive para aqueles cujo prolongamento das semirretas opostas é pequeno. Sabemos que isso não interfere na medida do ângulo formado, mas para elas isso fazia diferença, então era como se fosse: se vale para um caso destes, vale para todos.

Dado o curso da sessão, questionamos se, a partir de uma medida, seria possível descobrir as demais,

Liana: Será que a gente consegue sem o transferidor, descobrir a medida dos outros ângulos?
Lisa: Sim!
Liana: Como que vocês fariam?
Lisa: 115°... Quantos que falta?
Mary: 115° mais 115°...
Lisa: Vai dar 230°...
Mary: Ai quanto que falta pra chegar no 300°... Ai dá metade aqui e metade aqui...
Lisa: Tira o 5°, e se esse daqui fosse 20° ia faltar 60°. Vai ficar 65°!
Liana: Por que você falou em 300° e dividir?
Mary: Por que esse aqui tem que ser igual a esse. Aí a gente soma 115° mais 115°. Ai vai dar 230°. 360° menos 230° que vai dar... 130°. Então tem que ver quanto é a metade pra colocar metade aqui e metade aqui...
Liana: Mas você tem certeza que eles são iguais?
Mary: É porque... Eu acho que é...
Lisa: Deu 55°, está errado...
Mary: É que eu sou ruim de divisão...
Liana: Lisa, agora explica como você pensou...
Lisa: Eu contei mais. 115° mais 65° da 180°. Daí aqui também eu coloquei o mesmo resultado aí tudo dá 360°.

Neste caso, percebemos que, pelo menos Mary, está convencida de que ângulos OPV possuem mesma medida, pois parte dessa informação para encontrar as demais medidas dos ângulos formados por duas retas concorrentes. Assim, considera dois ângulos de 115° e verifica quanto falta para 360°. O resultado disso é dividido por dois, de modo que cada um deles é correspondente a uma medida do outro par de ângulos OPV.

Concernente a Lisa, já consegue observar a relação de suplementaridade e descobre o ângulo suplementar a 115°. Não é possível afirmar se continuou a encontrar as demais medidas por meio desse raciocínio ou se as instituiu por já acreditar que os ângulos OPV possuem mesma medida.

Frente à orientação de escrever os raciocínios as alunas disseram que não sabiam como fazer isso. Nossa orientação foi para que eles escrevessem, pelo menos como ou o que fez com que a conclusão fosse obtida. Ao analisarmos as produções escritas de Lisa e Mary nesta sessão, percebemos como acima evidenciado, diversos desenhos de retas concorrentes e alguns cálculos de soma e de subtração realizados.

Retomando nosso comentário sobre o diálogo, propomos outro questionamento na tentativa de induzir um pensamento genérico: se dado um ângulo de medida x, seria possível descobrir a medida do seu oposto pelo vértice, e em seguida, afastou-se. Mary, pergunta a Lisa sobre o que fariam e afirma "mas como é que a gente vai saber?". A dupla levanta a hipótese de todos os ângulos formados pelas retas concorrentes medirem "x" e abandonam a atividade.

Com relação à outra dupla, Miguel e João, evidenciamos os seguintes diálogos,

Primeiro Diálogo
João: O meu deu 140°!
Miguel: Mais 150° de novo, olha!
João: O meu é de novo 140°!
Miguel: Agora aqui deu 30° e o outro... Vamos medir... Deu mais 30°! Deu 360°, por que olha... Mais 30° de novo aí aqui eu medi deu 150° ai... 150° e 150° deu 300°. E eu acabei de medir àquela hora ali assim deu 30°...

Segundo Diálogo
Liana: Quanto mede esse ângulo?
João: 50°
Liana: Então?
Miguel: 130°...
Liana: Então quanto vai medir esse?
Miguel: 50°! Aqui vai medir 50° por causa que a medida sempre vai estar de assim e de assim.... Vai ficar... 50° de um lado e do outro...
João: Aqui tem que ser 50° pra dar 180°, 360° tudo!

Com relação ao primeiro diálogo, Miguel e João utilizam-se do transferidor para encontrar a medida dos ângulos, embora na sessão anterior tenham mencionando a possibilidade de encontrá-las por dedução. Miguel parece ficar surpreso quando diz “mais 150° de novo, olha!”, por ter medido e encontrado 150° novamente. Para conferir sua resposta, usa a ideia de ângulo de uma volta, somando dois ângulos de medida 150°, mais dois ângulos de medida 30°.

No segundo diálogo, suscitado com o objetivo de fazer com que os alunos não utilizem o transferidor para medir, Miguel parece apoiar-se na crença de que os ângulos serão congruentes dois a dois. João, por sua vez, explicita que a medida do ângulo deve ser 50° “para dar 180°”.

Wendy e Ana concluem inicialmente que os ângulos OPV nem sempre terão mesma medida e então questionamos se haviam concluído isso por terem medido. De pronto, respondem que não, não mediram e acrescentam o diálogo que segue:

Wendy: Mas dá para ver que não é igual!
Liana: Meça para ver que medidas encontra...
Algum tempo depois
Wendy: Eu medi e aqui deu 45° e aqui deu 50°, mas como que aqui deu mais se aqui é menor? Está errado?
Liana: Por que você acha que esse é menor?
Wendy: Não sei... Mas eu acho que vai dar a mesma medida nos dois lados...
Liana: Mas o que te faz pensar que esse é menor?
Wendy: O tamanho aqui...
Liana: O tamanho desses segmentos?
Wendy: É!

A resposta imediata de Wendy concernente ao questionamento proposto foi de que os ângulos OPV não seriam congruentes, justificando que dava “dá para ver que não é igual” (ao longo do diálogo, percebemos que o que levou a aluna a tal conclusão foi o comprimento dos segmentos que delimitavam a abertura dos ângulos formados, assim como Lisa e Mary). A esse respeito, Diniz e Smole (2008) escrevem que a associação de ângulo aos giros pode evitar a ideia errônea de que a medida deste é determinada pelo comprimento das marcas de lápis usadas para sua representação. Nesse sentido, essa discussão foi retomada posteriormente. Por hora, propomos que a dupla medisse, verificando por meio do transferidor e, apesar de ter encontrado medidas diferentes, 45° e 50° (conforme diálogo abaixo), Wendy parece reconsiderar sua afirmação anterior, mostrando-se agora, em dúvida.

Na sequência, ocorre o seguinte diálogo:

Ana: 115°... Esse daqui vai dar 105°... Quanto que é 115° mais 65°?
Wendy: deu 45°!
Ana: O que?
Wendy: Olha só, conta aqui! Deu 45° dos dois lados, olha!
Ana: Mas está torto! Esse é menor!
Wendy: Mas...
Ana: Espera aí, vamos ver... Está certo!
Wendy: Agora mede do outro lado...
Ana: 45°!
Wendy: Desse aqui...
Ana: A não, aqui é 45° e esse aqui... 45°... Deu 130°... E deu 145°, vai dar certinho!
Wendy: Mas e esse aqui?
Ana: É 145°!
Wendy: Não é 145°! Você está somando errado!
Ana: É sim!
Wendy: É daqui, olha!
Ana: Professor... Eu não sei somar!
Florisval: Como assim?
Ana: O desenho dela está muito apertado!
Florisval: Mas você pode desenhar do jeito que você quiser... Façam outros desenhos!
Florisval se afastou
Ana: Ali tem que ser 140°, estava certo... 50° lá. Estava certo! Eu contei errado... Olha 50° que faltou e aqui 140°...
Wendy: E aqui em cima?
Ana: 50°!
Wendy: Deu 380°.
Ana: 380°?
Wendy: Sim...
Ana: Sempre vai ser... Tudo tem que dar isso!
Wendy: Então sim, por que ela sempre vai ter a mesma medida!

Quando Ana questiona acerca da soma dos ângulos, a dupla passa a considerar duas vertentes, o resultado obtido por meio do transferidor e a ideia de ângulo raso. Quando seu colega afirma que “vai dar certinho”, Wendy contesta e afirma que a soma não está correta, apesar disso, não percebem que 140° e 50° graus não podem ser ângulos suplementares. No áudio, foi possível observar que algum tempo depois a Wendy questiona seu colega sobre a soma de todas as medidas dos ângulos ter resultado em 380° e percebem o erro. Infelizmente, antes que fosse possível a correção por iniciativa própria, intervimos propondo que a partir de um ângulo dado (55°), fossem descobertas as medidas dos demais ângulos formados por duas retas concorrentes. Desta forma, a dupla passa a considerar essa nova proposta, não retomando a questão para correção. Apesar disso, inspirada pelo raciocínio nela empregado, Wendy e Ana não tiveram dificuldades, em realizar a nova atividade, encontrando rapidamente as medidas dos ângulos, considerando a situação dada.

Nos protocolos, as respostas apresentadas ao nosso questionamento inicial foram se seguintes:

Mary	*Sim, por que medimos com o transferidor e o lado [referindo-se ao ângulo] oposto tem que ser igual ao outro e o total tem que dar 360° [referindo-se ao total da soma de todos os ângulos formados por retas concorrentes]*
Lisa	*Sim, por que sempre vai ter que dar 180° [a soma de dois ângulos suplementares] ou 360°de todos [o total da soma de todos os ângulos formados por retas concorrentes]. Por que se não der 180° ou 360° não vai estar certo [...].*
Wendy	*Sim, por que eles sempre vão ter mesma medida.*
Miguel	Não apresentou justificativa escrita.
João	Não apresentou justificativa escrita.

Lisa e Mary tentam justificar a resposta dada tendo em vista que o enunciado da questão solicitava uma justificação. Entretanto, o recurso de que dispõe para isso é a linguagem escrita, como se estivessem contando como ou “por que” acreditam que sua resposta está correta. Sobre isso, Aguilar Júnior destaca que em seu trabalho “foram também apresentadas respostas interessantes do ponto de vista da argumentação e da prova matemática, uma vez que os alunos tentaram justificar transcrevendo suas ideias através das palavras (2012, p. 55)”. Trata-se do que Almouloud e Mello (2000), Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) e outros autores sinalizam em relação à argumentação, apresentação de justificativas à produção escrita, devido ao fato de não haver o costume de se realizar este tipo de atividade na sala de aula.

Nesse sentido, a dupla se apoia no transferidor, mas já consegue utilizar outros elementos de conferência, como a noção de ângulos suplementares e ângulos de uma volta. Essa dificuldade de justificação também é evidenciada por Oliveira (2009). Nesse sentido, a autora aponta que um trabalho em sala de aula que não privilegia as argumentações, bem como as justificativas sobre as estratégias utilizadas, como fatores causadores de tais dificuldades. Assim, mesmo quando a necessidade de justificar ficava explícita na atividade, muitos alunos não a faziam, ou quando isso acontecia, as justificativas por eles apresentadas não passavam inicialmente de um empirismo ingênuo (OLIVEIRA, 2009).

Ao final da sessão foi institucionalizada uma prova da conjectura de que os ângulos OPV possuem mesma medida. Nesse momento também retomamos a discussão sobre alguns aspectos da noção de ângulo.

Considerações sobre a sessão 03

Nesta sessão, percebemos que há um consenso de que os ângulos OPV terão sempre mesma medida. O grupo já aceita a validade da afirmação e aqui entra em cena o valor relativo da prova (SALES, 1996). Nesse sentido tivemos, assim como na sessão 2, provas do tipo *experimento crucial*. Além disso, percebemos que os alunos mobilizaram noções de ângulos suplementares e ângulos de uma volta. Nos protocolos, embora muito timidamente, há tentativas de justificação das respostas.

A etapa inicial de uma situação é um momento para o qual grande parte dos alunos gasta algum tempo e aos olhos do professor pode parecer que nada está acontecendo ou que os alunos estão com dificuldades (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003), como por exemplo, quando propomos à Wendy e Ana que dados os ângulos OPV, cuja medida de um deles fosse 55°, descobrissem as demais achando que não estivessem envolvidas com as resoluções. Isso impossibilitou as alunas de retomarem o caso para o qual atribuíram medidas 140° e 50° para dois ângulos suplementares. Sentimos por não termos proposto às demais duplas a descoberta da medida de um ângulo oposto pelo vértice de um ângulo x, bem como a não devolução desta atividade a Lisa e Mary em função do término do tempo da sessão.

Ainda, de acordo com Balacheff (2009), uma das origens das dificuldades com relação ao ensino e aprendizagem da demonstração refere-se ao contrato didático emergente das posições assumidas, tanto pelo professor quanto pelo aluno, em relação ao saber em jogo. Nesse caminhar, durante nossa institucionalização realizamos com os alunos a prova da propriedade referente às medidas dos ângulos OPV com a intenção de discuti-la e de mostrar aos alunos como poderiam pensar nas próximas atividades que exigissem justificativas. Essa postura também foi adotada por Piccelli em sua experimentação e de acordo com o autor, “[...] antes de solicitar ao aluno que prove algum teorema, é preciso apresentar aos alunos o que realmente é uma prova e dar condições para que eles possam buscar sozinhos os resultados seguintes.” (2010, p. 22). Ainda, afirma que o aparecimento de provas do tipo *exemplo genérico* só foi possível após sua intervenção em que, por meio de questionamentos, os alunos foram direcionados a provarem a conjectura que estava sendo abordada.

Contudo, segundo Boavida et al.,

> Nem sempre os alunos conseguem provar as conjecturas formuladas, nem sequer acompanhar uma prova apresentada pelo professor. Este facto não

> constitui um factor negativo, pois a actividade de formulação de conjecturas tem, em si mesmo, valor educativo. Além disso, este facto pode proporcionar boas oportunidades para os alunos começarem a compreender a natureza do trabalho em Matemática onde a formulação de conjecturas e a sua prova, frequentemente, não ocorrem em simultâneo. (BOAVIDA et al., 2008, p. 89)

Em sua tese de doutorado, Boavida (2005) salienta que não é fácil fazer com que os alunos compreendam que a verificação de conjecturas apenas para alguns casos como fizeram Liza e Mary, por exemplo, não são simples, sobretudo quando estas parecem ser verdadeiras e resistem a várias situações. Ainda assim, dada à possibilidade de que os alunos evoluíssem no que concerne às provas apresentadas, esse momento foi necessário para mostrar outras possibilidades de prova, utilizando-se de diversos recursos além do transferidor.

5.4. Sessão 04

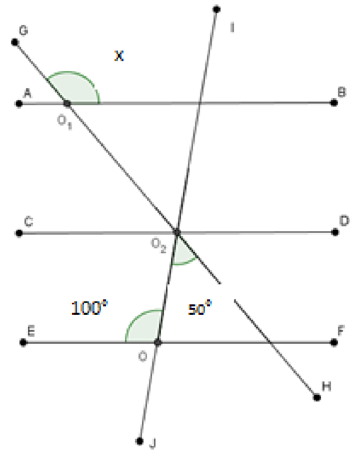
Neste encontro o objetivo é que os alunos conjecturem acerca da possibilidade da igualdade de alguns ângulos formados por retas paralelas e transversais e assim realizar uma discussão sobre isso.

Para tanto, a sessão será dividida em duas etapas. Na primeira delas, os alunos receberão a tarefa de, a partir de duas retas paralelas interceptadas por uma transversal, identificar quais ângulos possuem mesma medida. Como já dissemos na análise preliminar da sessão 2, não temos a pretensão de que os alunos provem suas afirmações em relação a este assunto em específico, uma vez que se trata de um raciocínio bastante rebuscado e não adequado para este nível de escolaridade.

Para esta proposta não entregamos nenhuma figura, assim era preciso que os alunos desenhassem e medissem com o transferidor os ângulos formados pelas retas paralelas e transversais. Embora houvesse um direcionamento de nossa parte, consideramos esta atividade de caráter aberto, pois havia a possibilidade de aparecer outras relações, diferentes de uma resposta do tipo sim/não.

Na segunda etapa, propomos às duplas as atividades abaixo, cuja pretensão é a de que os alunos possam reinvestir estratégias e propriedades acerca de ângulos suplementares, ângulo de uma volta, ângulo OPV e, na medida do possível, ângulos formados por paralelas e transversais. Assim, trata-se de atividades de determinação e não de provas. Para realizar esta atividade os alunos não contarão com o auxílio do transferidor, o que pode tornar a tarefa um pouco mais difícil.

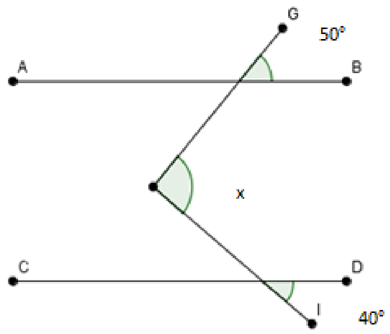
1. Na figura, temos que os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são paralelos e interceptados por outros dois segmentos transversais, $\overline{GH}$ e $\overline{IJ}$. Identifique a medida do ângulo x e justifique a resposta dada.



Para a resolução desta atividade os alunos precisariam fazer uso de conhecimentos sobre retas paralelas e transversais e por isso, tanto na atividade 1, quanto na 2, decidimos manter a figura numa posição de fácil visualização dos segmentos paralelos. Neste caso específico, também continha um terceiro segmento paralelo aos outros dois dados e que passa pelo ponto de intersecção $O_{2,}$ entre os segmentos $\overline{GH}$ e $\overline{IJ}$, pois essa percepção nem sempre é tida de imediato e pode ser um caminho pelo qual a resposta pode ser encontrada. Assim, apresentaremos uma possibilidade, dentre outras possíveis.

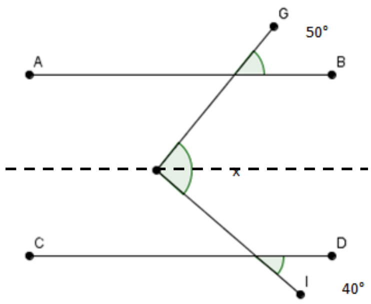
Dada à informação de que $E\hat{O}O_2$ mede 100°, o ângulo $I\hat{O}F$ medirá 80°, pois se trata de ângulos suplementares. Desta forma, o ângulo $I\hat{O}_2D$ também medirá 80°, por serem ângulos correspondentes (considerando o segmento $\overline{IJ}$). Como $G\hat{O}_2I$ é OPV de $O\hat{O}_2H$, medirá 50°. Os ângulos $I\hat{O}_2D$ e $G\hat{O}_2I$, juntos formam o ângulo $G\hat{O}_2D$, cuja medida é 130°. Como os ângulos $G\hat{O}_2D$ e $G\hat{O}_1B$ são congruentes, pois são ângulos correspondentes, considerando o segmento $\overline{GH}$. Logo, o ângulo $G\hat{O}_1B$, mede 130°.

2. Sendo os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ paralelos, encontre a medida de x e apresente uma justificativa para a sua resposta.



Para esta atividade, diferentemente da anterior, optamos por não inserir um terceiro segmento paralelo aos demais, pois isso poderia resultar em um caso análogo à primeira atividade. Deste modo, queremos observar que estratégias os alunos encontrarão a medida solicitada. Aguilar Júnior (2012) propôs em seu trabalho uma atividade parecida, com a diferença de que o autor utilizou as letras a e b para representar as medidas dos ângulos que, em nosso caso, são 50° e 40°, respectivamente. Não ficam claro quantos dos mais de cem alunos que responderam ao questionário resolveram a atividade, mas nos exemplos explorados ao logo de seu trabalho, os alunos traçaram por si mesmos o segmento paralelo à $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e que passa pelo ponto de intersecção dos segmentos transversais. Ainda, o autor conclui que as "[...] soluções refletem o trabalho em sala de aula que valoriza apenas o resultado final, sem explorar a coleta de premissas para construir argumentos e chegar às conclusões (2012, p. 62)".

Uma possibilidade de resolução desta atividade consiste em traçar um segmento de reta paralelo aos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$. Assim,



O ângulo GÔF e o ângulo de 50° dado pelo enunciado são ângulos correspondentes. Logo, GÔF = 50°. Por meio de um raciocínio análogo, observamos que FÔI é correspondente ao ângulo de 40° dado pelo enunciado. Logo, FÔI = 40°. Como o ângulo x é formado pelos ângulos GÔF e FÔI, somar as medidas destes últimos. Assim, x = 50° + 40° ou x = 90°.

Tendo em vista que as atividades 1 e 2 possibilitam a utilização da ideia de ângulos formados por retas paralelas e transversais. Os alunos podem encontrar dificuldades, como por exemplo, o reinvestimento dessas propriedades. Como o transferidor não poderá ser utilizado pelos alunos, estes poderão encontrar dificuldades também nesse sentido. Quanto à atividade 2, em específico, poderemos sugerir que um segmento paralelo seja traçado.

Experimentação

Nesta sessão, tivemos a participação de 15 alunos, sendo dez deles pela primeira vez. Não havia carteiras para todos e espaço agora se tornara menor, por isso, cada dupla utilizou apenas uma mesa, apoiando-se nela e naquelas sobre as quais ficavam os computadores. Iniciamos a sessão com alguns questionamentos sobre a medida de, por exemplo, ângulos de uma (360°) e de meia volta (180°). Percebemos que alguns sabiam identificar tais medidas e nesse sentido, conduzimos uma discussão. Apesar disso, foi necessário dispensar uma atenção especial a eles e principalmente, ajudá-los quanto à utilização do transferidor. As duplas foram formadas conforme a participação dos alunos da seguinte forma: Mary e Wendy, que como de costume sentaram-se à frente, Miguel e João que ficaram num espaço mais ao fundo e Peter, que apesar da insistência de nossa parte, preferiu realizar as atividades individualmente e distante dos demais colegas. Também nesta sessão, tivemos a participação do aluno James, considerado em nossas análises.

Análise a posteriori

Durante a conversa inicial com os alunos em relação aos conhecimentos que já tinham acerca da medida de ângulos, observamos que James conseguia perceber e identificar algumas medidas em relação a ângulos suplementares e ângulos de uma volta. Isso se evidencia no diálogo abaixo, que é referente ao primeiro questionamento realizado, ao iniciarmos a sessão...

Liana: Vocês saberiam dizer quanto mede um ângulo dessa forma [referindo-se ao desenho feito no quadro de um ângulo de meia volta]?
James e João: 180°
Liana: Como vocês sabem?
James: Por que a circunferência inteira dá 360° e como ali é a metade...

Liana: E se eu tivesse essa situação, um ângulo de medida 60°, eu conseguiria identificar a medida desse outro ângulo [referindo-se ao ângulo suplementar]?
James: Seria 120° por que ali é um quarto da circunferência total...

Assim, outras discussões foram realizadas, tais como, identificar as medidas de todos os ângulos formados por duas retas concorrentes. Em seguida a este momento demos início ao que havíamos planejado em nossas análises *a priori*. Pedimos para que os alunos desenhassem diversas retas paralelas interceptadas por uma transversal e que identificassem a medida de todos os ângulos formados. Feito isso, deixamos as duplas trabalhando nesta atividade, procurando intervir minimamente. Enquanto isso, auxiliávamos os alunos que ali estavam pela primeira vez quanto ao uso do transferidor, pois nesta atividade o instrumento poderia ser utilizado.

Observamos por meio dos diálogos entre as duplas Mary e Wendy (primeiro diálogo) e Miguel e João (segundo diálogo), que a devolução ocorreu e que eles estavam vivenciando situações adidáticas, transitando entre as situações adidáticas de ação, formulação e validação.

Primeiro Diálogo
Wendy: Da tudo a mesma coisa!
Mary: Aqui deu 170°, mas era pra dar 180°! Ah! Deu 110°, não deu 170°, é que eu medi errado!
Wendy: Olha, deu tudo a mesma coisa! Tem que ver se vai dar 360°...
Mary: Vai dar sim!
Algum tempo depois
Wendy: Mentira que vai dar 50° aqui de novo! Você já pegou outro [mediu outro caso]?
Mary: Não! Agora eu vou ver se da 360°. Viu! Deu 360°!
Wendy: Pra mim deu 50° de novo! Faz outro vê se vai dar a mesma coisa! Mede aqui... [ela trocaram os protocolos para medir]
Mary: 55°?
Wendy: É... 50°!

Segundo Diálogo
João: Agora a gente vai ter que medir... Vai dar 70°... 120° e 180°! Não, mas está errado! É daqui pra cá, não é?
Miguel: Vamos fazer esse aqui...
João: Deu um ângulo de 90°...
Miguel: Lógico! Está reto aqui...
João: Então! Um ângulo de 90°! Mede ai, então!
Miguel: É por que a linha está reta...
João: Olha, aqui vai dar 70°...
Miguel: Nessa deu 90°, na outra mais 90°, na outra mais 90°... Tudo 90°. Olha que massa! 90° mais 90° dá 180°! Da 180°, não da?
João: Dá!
Miguel: Então!

Mary e Wendy desenharam diversas retas paralelas interceptadas por uma reta paralela nos seus protocolos. Logo após identificarem algumas medidas, Wendy parece ficar surpresa por terem encontrado o mesmo valor para as medidas dos ângulos colaterais/alternos (identificados pelo desenho no protocolo), tanto que afirma “Mentira que vai dar 50° aqui de novo!”. O mesmo ocorre com Miguel, quando verifica que as medidas dos ângulos encontrados havia dado 90°. Observamos aqui que a conjectura a qual tínhamos a intenção de que os alunos elaborassem está presente, mesmo que implicitamente. Tanto é assim, que Wendy, por exemplo, pede que Lisa teste para outro caso para conferir se dará “a mesma coisa”. Acreditamos que esse processo de medir, analisar as medidas encontradas na busca de regularidades e a surpresa que Wendy e

Miguel tiveram aproxima-se do que Brousseau (1996) chama de “micro sociedade científica” onde os alunos são eles mesmos os protagonistas de sua aprendizagem.

Algum tempo depois, questionamos os alunos sobre as medidas encontradas e obtivemos as seguintes respostas:

Primeiro Diálogo
Wendy: Vai dar a mesma coisa sempre, tipo... Não importa o jeito que pode estar a figura, mas sempre vai dar a mesma coisa!
Liana: Aonde vai dar a mesma coisa?
Mary: Aqui olha, nesses...
Wendy: Ah... Tudo tem que somar 360°, não importa o jeito que esta!

Segundo Diálogo
Miguel: Eu acho que vai ser todos iguais, porque todos que eu fiz deram!

Mesmo não tendo a intenção de que os alunos provassem dedutivamente a propriedade em questão, diante de tais argumentos, poderíamos inferir que os alunos se encontram no que Balacheff (1988) classifica como sendo nível de provas pragmáticas. Por meio dos protocolos, não conseguimos diferenciar as provas *empirismo ingênuo* e *experimento crucial*, uma vez que os alunos testaram para diversas situações motivadas por nós e não por que realmente sentiram necessidade. No entanto, “os argumentos empíricos são possíveis, legítimos e, muitas vezes, valiosos, numa argumentação” (BOAVIDA et al., 2008, p. 85). E desta forma são importantes no processo de provar conjecturas.

Como o questionamento foi realizado para cada dupla individualmente, em função do tempo foi possível propor Mary e Wendy, a descoberta de todos os ângulos, dadas duas retas paralelas e agora, duas retas transversais, tendo estas últimas um ponto em comum. Essa escolha foi intencional por que os ângulos a serem descobertos são também os ângulos internos e externos de um triângulo, assunto a ser discutido na próxima sessão.

Percebemos que novamente ocorreu a devolução e que a dupla passou o restante do tempo destinado tentando realizar a atividade proposta. Com isso, foi possível perceber que, apesar da afirmação anterior, em relação à congruência de determinados ângulos formados por retas paralelas e transversais, ainda não conseguiram reinvesti-la. O que fica claro é a percepção e utilização da noção de ângulos OPV, como pode-se observar na figura abaixo

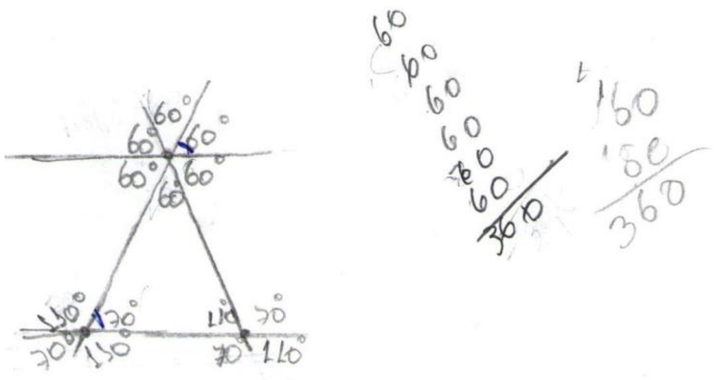


Figura 28 - Protocolo alunas Mary e Wendy, sessão 04
Fonte: Dados da pesquisa

Por meio da observação dos protocolos, bem como os diálogos, percebemos que Peter, Mary, Wendy, Miguel e João consideram as noções trabalhadas anteriormente (ângulos suplementares, ângulos de uma volta, dentre outros). Contudo, Peter mostrou-se bastante desconfiado com relação à congruência de ângulos formados por retas paralelas e transversais. Quando questionado, sobre essa possibilidade, respondia que não, nem sempre os ângulos formados seriam congruentes. Então, devolvemos o questionamento cogitando a possibilidade de que ele encontrasse um caso para o qual as medidas não fossem congruentes. E, como observamos na figura abaixo, o aluno procura medir com precisão e nesse sentido, acaba por encontrar medidas para ângulos colaterais/alternos congruentes e, também diferentes. Observamos que suas representações são feitas em diferentes posições e diferentemente do que tem se evidenciado com os demais alunos, demonstra preocupação com traços mais exatos e medidas precisas.

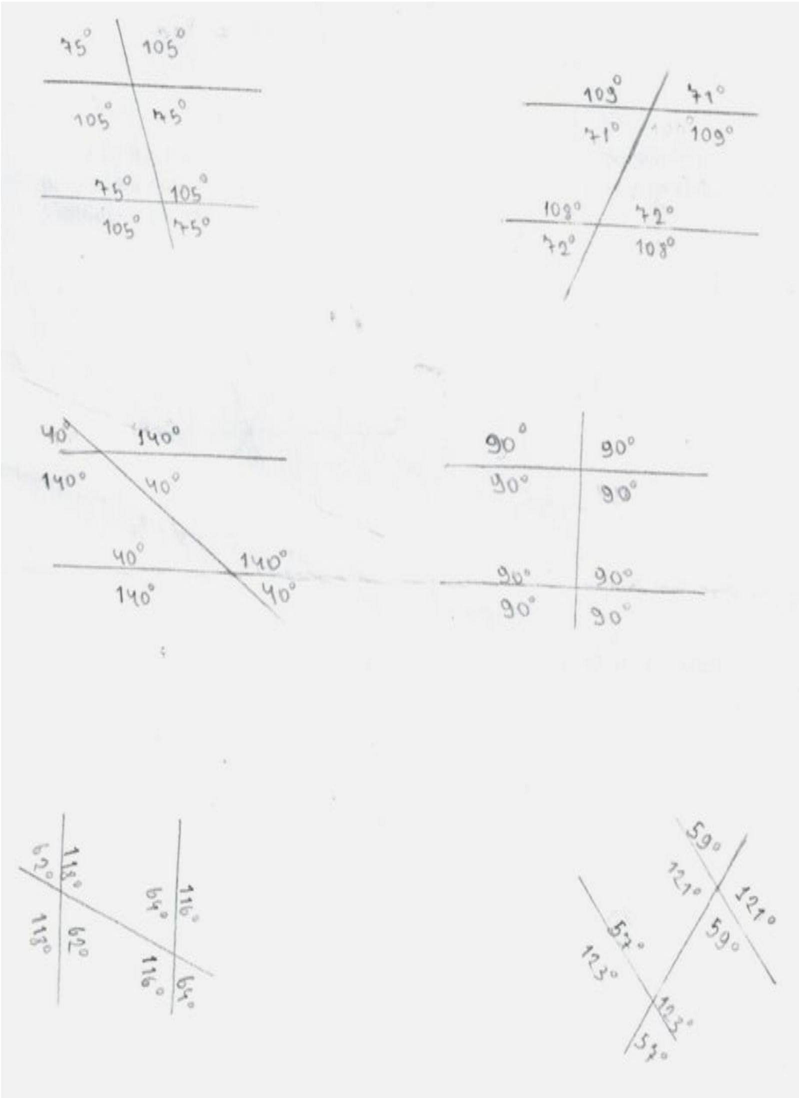


Figura 29 - Protocolo aluno Peter, sessão 04
Fonte: Dados da pesquisa

Verificamos que James, assim como Peter, em alguns casos as medidas encontradas para ângulos colaterais/alternos são diferentes. Apesar disso, em todos os casos, obedece à ideia de ângulos meia volta uma volta e OPV. Esta última, possivelmente movido pelas discussões iniciais.

Nesse caminhar, fizemos uma pequena discussão sobre o que as duplas haviam percebido com a realização da atividade e, em seguida, distribuímos aquelas previstas para a segunda etapa da sessão. Com relação à Mary e Wendy, percebemos um extenso diálogo na tentativa de encontrar as respostas e nesse sentido, afirmamos que a devolução ocorreu. As alunas apoiam-se nas noções de ângulos suplementares, ângulos de uma volta e ângulos OPV. Por outro lado, ainda não é muito clara a ideia das retas paralelas interceptadas por uma transversal, embora utilizem-se dela para resolução.

Infelizmente, não podemos dizer o mesmo com relação a Miguel e João e James, pois mesmo propondo algumas questões para discussão com as duplas, os alunos não demonstraram interesse em resolver as atividades.

Considerações sobre a sessão 04

Sentimos não ter proposto a dupla Miguel e João, como também a Peter a descoberta dos ângulos formados por duas retas paralelas e duas transversais, tendo estas últimas um ponto em comum, como fizemos com Mary e Wendy, na primeira parte da sessão. Poderíamos tê-la explorado e discutido com todos. Observamos que há uma evolução com relação à maneira como os alunos se portam diante das atividades propostas. Quer dizer, fomos solicitados pelos alunos poucas vezes e, em geral, para conferencia das respostas (embora procurássemos não dizer se estava correta ou não). O exemplo disso, temos os extensos diálogos entre Mary e Wendy durante a realização das atividades. Esse aspecto pode ter sido favorecido pelo aumento dos alunos, uma vez que procuramos ficar mais próximo daqueles que ali estavam pela primeira vez. Com relação a Peter, sentimos que poderia ter se envolvido mais com as atividades propostas se estivesse em dupla.

Além do mais, observamos que com a manipulação do transferidor e a medição em diferentes situações houve a produção da conjectura pretendida. Sua validação, outro objetivo de nossa investigação, aconteceu de modo empírico, pois foi fundamentada na atividade experimental e recebeu o status de verdadeira, mesmo sem a produção de provas mais elaboradas.

5.5. Sessão 05

Nesta sessão, composta por duas atividades, temos o objetivo de que os alunos conjecturem e argumentem a acerca da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer. Além disso, pretendemos analisar como e quais conhecimentos utilizam para realizar as atividades propostas, como também, o modo com o qual validam suas respostas.

Assim, distribuímos para as duplas diversos triângulos, de diversas formas e tamanhos. Os alunos deveriam medir os ângulos internos, anotar as medidas encontradas e, em seguida, somá-las. No decorrer da sessão, solicitamos aos alunos que pintassem e recortassem os ângulos internos, seja de um dos triângulos dados, seja de outro qualquer. Depois, solicitamos que os juntassem em torno de um único vértice e propomos a questão para discussão, em específico, nas duplas:

***Questão para discussão nas duplas*:** O que ocorre ao juntar todos os ângulos internos do triângulo em torno de um único vértice? Por quê?

Imenes (1987) ao se referir à geometria experimental escreve que a utilização de materiais e instrumentos, tais como, papel, cartolina, tesoura, compasso, transferidor e outros, favorecem a percepção do aluno em relação a determinadas propriedades. Por exemplo, "recortando um triângulo de papel, numerando seus ângulos, separando-os com a tesoura e dispondo-os de modo a representar sua soma, a criança compreende a propriedade relativa à soma dos ângulos de um triângulo." (IMENES, 1987, p. 58). Ainda segundo o autor, sem abandonar as verificações empíricas nas séries finais do ensino fundamental e mesmo no ensino médio, o raciocínio dedutivo deve ser gradativamente intensificado. Desse modo, aceitando por meio de constatação empírica, que ângulos correspondentes formados por retas paralelas interceptadas por uma transversal possuem a mesma medida, pode-se deduzir a medida da soma dos ângulos internos de um triângulo. Utilizando essa propriedade é possível deduzir a soma dos ângulos internos de qualquer polígono. A partir disso, deduzir a soma dos ângulos externos de polígonos e assim por diante.

Pudemos observar que este pressuposto está presente no livro didático de matemática adotado pela escola, uma vez que há o mesmo incentiva a utilização de propriedades conhecidas para descobrir outras. Consideramos que organizações dedutivas contendo provas "locais", permeadas por enunciados aceitos ou validados empiricamente, são escolhas válidas para esse nível de escolaridade.

O protocolo que entregamos aos alunos possui duas atividades, a primeira, de caráter fechado e a segunda de caráter aberto,

1. Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer? Justifique a resposta dada.

De acordo com os PCNs do Ensino Fundamental a demonstração desse teorema é acessível aos alunos e "[...] a concretização é bastante útil para levantar conjecturas sobre esse resultado." (BRASIL, 1998, p. 127). Também vimos que o livro didático da escola apresenta provas para esta propriedade. No sétimo ano explora atividades experimentais (nível pragmático) e no oitavo propõe uma prova do tipo *exemplo genérico.*

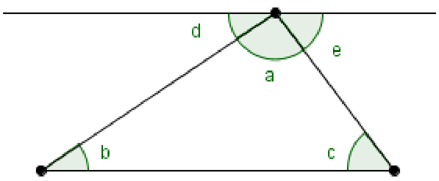
Optamos por não inserir figuras na atividade, pois os alunos já teriam realizado medições nos triângulos com os quais trabalharam anteriormente. Caso tivessem dúvidas ou sentissem essa necessidade, poderiam desenhar a figura por conta própria. A questão também exige uma justificativa e assim, algumas possíveis resoluções são:

A conclusão pode ser fundamentada na atividade realizada, observando que para todos os casos, os três ângulos juntos “aparentemente” formam um ângulo de 180°.

Afirmar que a soma dos ângulos internos dos triângulos será sempre 180° tomando por base alguns triângulos construídos por eles mesmos, medindo os ângulos com o auxílio do transferidor. Essa justificativa será classificada como uma prova do tipo *empirismo ingênuo.*

Construir um triângulo muito diferente dos exemplos considerados “normais” e, então se convencer de que a afirmação é válida. Caso isso ocorra, tem-se o tipo de prova e *experimento crucial.*

Traçar pelo vértice uma reta paralela ao lado oposto e observar relações entre as medidas dos ângulos obtidos com os ângulos internos do triângulo”.

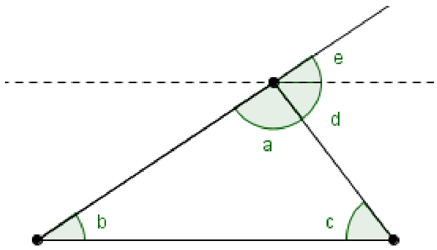


Assim, $\hat{b} = \hat{d}$ e $\hat{c} = \hat{e}$ por serem alternos internos.

Como $\hat{d} + \hat{a} + \hat{e} = 180°$, $\hat{b} = \hat{d}$ e $\hat{c} = \hat{e}$, substituindo temos:

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$$

Prolongar um dos lados de determinado triângulo a partir de um vértice, de modo que passe uma reta paralela ao ângulo oposto a esse vértice.



Assim, $\hat{a} + \hat{d} + \hat{e} = 180°$.

Como $\hat{b}$ e $\hat{e}$ são ângulos colateraiscorrespondentes (mesma medida).

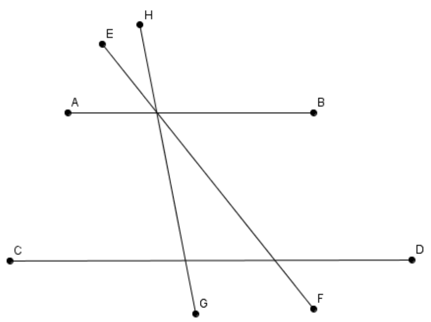
Como $\hat{c}$ e $\hat{d}$ são alternos internos, também são congruentes. Substituindo temos:

$$\hat{a} + \hat{c} + \hat{b} = 180°$$

As duas últimas maneiras de resolução serão classificadas como sendo *exemplo genérico*, pois a partir de um triângulo particular, são utilizados elementos para uma generalização. Pode-se também considerar como uma demonstração matemática nesse nível de escolaridade, dependendo do discurso dedutivo que acompanha a figura, que estaria servindo apenas de suporte para o raciocínio dedutivo formalizado.

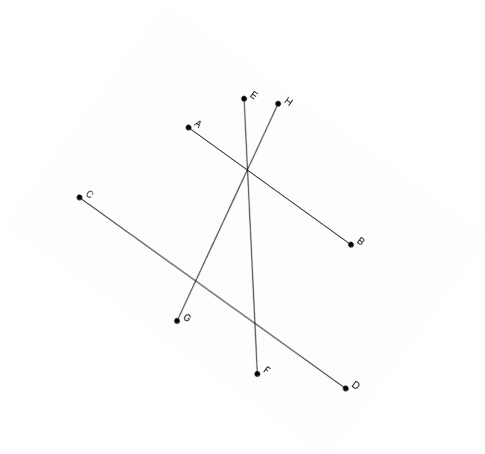
Propusemos também, uma segunda atividade, de caráter mais aberto, com o intuito de favorecer a investigação por parte dos alunos com relação ao trabalho relativo, dentre outras coisas, à descoberta de novas possibilidades de provar que os ângulos internos de um triângulo medem juntos, 180°.

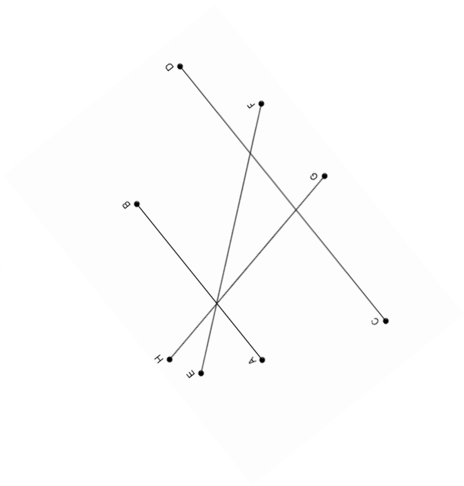
2. Sabendo que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são paralelos, o que é possível afirmar sobre os ângulos da figura?



Para esta atividade, os alunos podiam fazer uso do transferidor. E a esse respeito, a atividade talvez pudesse ser realizada mais facilmente. Embora não tivéssemos previsto anteriormente à experimentação, vimos que é possível observar que se essa estratégia de encontrar as medidas dos ângulos por meio do transferidor seria utilizada. Noutras palavras, se eles utilizariam o instrumento de medida ou um raciocínio dedutivo.

A figura poderia estar posicionada de outras maneiras, tais como:





Como a correspondência entre ângulos formados por retas paralelas interceptadas por uma transversal havia sido trabalhada recentemente, não queríamos um complicador a mais por que o objetivo principal era observar se os alunos identificariam os ângulos congruentes por meio de propriedades já vistas e se observariam que a soma dos ângulos internos do triângulo sempre será 180°.

Experimentação

A sessão ocorreu no dia 17 de novembro de 2015 e teve a participação de 12 alunos. As duplas analisadas foram formadas por Peter e Wendy, Miguel e João e também, James e Pedro, que participou pontualmente desse encontro.

Análise a posteriori

Na primeira parte da sessão, como havíamos planejado, distribuímos aos alunos diversos e diferentes triângulos, juntamente com uma folha na qual deveriam anotar as medidas dos ângulos internos encontrados. O excerto abaixo é decorrente desta atividade, no qual observamos claramente a desconfiança e a evidencia da conjectura de Wendy de que a soma dos ângulos internos de um triângulo resulta de 180°.

Wendy: Quanto deu a soma aqui?
Peter: 180° eu acho...
Wendy: Olha deu 180° de novo!
Algum tempo depois...
Wendy: Deu 180° de novo!
Peter: Não está dando todos 180° não!
Wendy: Está dando todos 180°!
Peter: Você já mediu quantos?
Wendy: Quatro!
Peter: Eu estou no terceiro ainda!
Algum tempo depois...
Wendy: Nossa está dando todos 180°! Eu acho que vai dar todos 180°...

Peter afirma que nem todas as somas feitas estão resultando em 180° e nesse sentido, observamos em sua folha de anotações que seus resultados, para a soma das medidas dos ângulos internos dos triângulos, foram 163° (um caso), 182° (três casos) e 184° (dois casos). Nas anotações de Wendy, por outro lado, todas as somas resultam em 180°. E aqui, não é possível concluir se ele arredondou as medidas dos ângulos ou se, percebendo para um ou dois casos a recorrência desse valor, modelou os demais.Depois de um processo de experimentação no qual Wendy mediu os ângulos internos de vários triângulos e somou as medidas encontradas, ela diz achar que “vai dar todos 180°”. Esse é um caso em que há a conjectura implícita de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

Com relação a Miguel e João, observamos que a partir das atividades conjecturaram que a soma das medidas dos três ângulos internos de um triângulo deve resultar em 360°. Por meio do diálogo, fica evidente a influência do transferidor para que eles chegassem à tal formulação.

Miguel: Agora eu não sei como mede a ponta dele aqui, esqueci...
João: O meu deu entre 60° e 70° e esse entre 40° e 130°
Miguel: Está errado!
João: O meu deu 80°, 60° e 50°.
Miguel: O meu 60° 20° e 80°. Olha 220° o meu deu! O seu deu 220°? E Aqui deu 360°, todos vai dar 360°?
João: Não sei, tem que medir... Deu 400°!
Miguel: Nossa!
João: Deixa eu contar de novo. Nossa deu mesmo!
Miguel: 180° esse daqui, que legal!
João: 360° o último deu!
Algum tempo depois
Miguel: Mas no final das contas tem que dar 360°... [referindo-se a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo]

É provável que alguns alunos tenham confundido a medida de ângulos internos e externos no momento de utilizar o transferidor e por isso tenham encontrado medidas como 220°, 400° e 360°. Assim, mesmo diante de um caso no qual a soma resulta em 180°, Miguel afirma que “[...] no final das contas, tem que dar 360°...”. Essa conjectura foi refutada quando a dupla realizou a proposta de pintar os ângulos, recortá-los e juntá-los em torno de um único vértice. Ao fazer isso, Wendy relaciona a atividade experimental com as noções já vistas anteriormente e conclui:

Wendy: Ahhh! Não falei que iria dar 180°! Deu a metade, olha... 180° aqui mais 180° vai dar 360°!

Logo em seguida, ainda sem realizar uma discussão sobre isso, entregamos os protocolos com as duas questões e como a primeira era concernente ao valor da soma dos ângulos internos de triângulos, obtivemos as seguintes respostas, aqui transcritas:

Peter	*180° é a metade de um ângulo de 360°.*
Wendy	*180°, porque todos são a metade de 360°[todos juntos formam a metade de uma circunferência]*
Miguel	Não apresentou justificativa.
João	Não apresentou justificativa.
James	*Porque uma meia volta tem que dar 180°.*

Observamos Peter, Mary e James obtêm conclusões por meio da atividade experimental realizada. Mesmo que João e Miguel não tenham apresentado justificativa escrita, observamos que todos os cinco alunos encontram-se no nível de provas pragmático, pois como evidenciamos nos diálogos, pois concluíram com base na atividade experimental, observando casos particulares.

Mello (1999) propôs uma questão parecida em seu trabalho na qual os alunos precisavam assinalar a alternativa que completaria a frase "a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer" e justificar sua escolha. Ele ressalta que a maioria dos alunos respondeu corretamente e apresentou justificativa, mas nenhuma delas de forma completa. Assim como em nosso caso, nenhum deles desenhou triângulos em seus protocolos. O interessante é que alguns alunos apresentaram respostas semelhantes às de Peter, Wendy e James, como por exemplo,

> Um triângulo tem soma dos seus ângulos internos 180 graus porque tem a metade do quadrado que tem 360°.
> [...]
> A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a 360°, assim, a soma dos ângulos internos do triângulo vale 180 graus, pois é a metade.
> [...]
> Se colocarmos em linha reta os ângulos, obteremos 180° com a soma deles. (MELLO, p. 60-61).

Piccelli (2010) na terceira sessão que desenvolveu tinha a intenção de que os alunos conjecturassem sobre a soma dos ângulos internos de triângulos por meio do software Cabri-Géomètre segundo ele só foi possível chegar ao segundo nível de provas, devido à interferência do pesquisador. Disso, observamos que o direcionamento dado pelo professor é importante para que os alunos cheguem ao nível de provas intelectuais e que atividades experimentais são importantes, pois, por exemplo, grande parte dos alunos associa/lembra a relação entre a soma dos ângulos internos de quadriláteros e triângulos. Isso não é ruim, pois como destacamos em nossas análises *a priori* atividades experimentais são importantes, poderia ser complementado um, um trabalho que envolvesse aspectos dedutivos como observamos, por exemplo, no livro didático que a escola adota. Isso tudo, "[...] nos leva a olhar atentamente o ensino atual da geometria, as exigências e prioridades devem ser refeitas com modificações profundas que tenham como meta facilitar o acesso ao raciocínio dedutivo do aluno." (MELLO, 1999, p. 61). Levando-o, assim a conjecturar, argumentar e validar suas respostas.

Em se tratando da atividade 02, observamos que o aluno James, em meio à resolução, solicita ao seu colega para que meça “o outro ângulo”, pois gostaria de verificar se a medida era 50°. Sua última fala nos possibilita pensar que essa hipótese pode ter sido levantada na tentativa de resolução sem o instrumento de medida.

James: Esse aqui é 50°?
Pedro: Esse outro tem que dar 30°!
James: Mede de novo, quero ver se é 50°...
Pedro: Esse outro aqui tem que dar 30°!
Ele mediu
Pedro: Deu 30°!
Florisval: Se você não tivesse o transferidor, aqui teria que dar quanto?
Pedro: 30°!
James: Viu! É lógica, eu falei!

Assim, quando James diz “é lógica”, nos indica que está tentando relacionar os resultados obtidos por meio do transferidor com a possibilidade de encontrá-los dedutivamente.

Ainda com relação a esta atividade, tivemos a seguinte conversa com Peter e Wendy:

Liana: Será que esse ângulo vai ter sempre a mesma medida que o outro? [referindo-se aos ângulos correspondentes]
Peter: Não sei...
Liana: Olhando por aquela ideia das retas paralelas...
Peter: Então eu acho que sim...
Liana: E esse? Aqui é 50°, mas poderia ser qualquer valor... Será que eles vão ter sempre a mesma medida?
Wendy: Acho que sim, por causa da...
Peter: Da reta paralela...
Liana: Então, quanto vai dar a soma dos três ângulos internos do triângulo?
Peter: 180°!
Liana: Como assim?
Wendy: Dá a mesma coisa aqui da 180° e aqui também, por que os ângulos são iguais: esses que da meia volta e esses que estão no triângulo.

Por meio do diálogo, percebemos que Peter se mostra em dúvida com relação à identificação de ângulos correspondentes. Quando lhe é proposto pensar na ideia de retas paralelas, responde ao questionamento realizado, contudo, não é possível identificar certeza em sua fala. Na sequência, perguntamos em relação a outro ângulo e Wendy prontamente responde achar que sim, eles sempre teriam mesma medida e conclui o diálogo afirmando que aqueles ângulos que formavam meia volta seriam iguais àqueles que estavam no triângulo. De fato, nas sessões anteriores, Wendy, diferentemente de Peter, parece ter se convencido mais da existência de uma relação de correspondência entre ângulos formados por retas paralelas interceptadas por transversais.

Nossa intenção com esta atividade era que os alunos percebessem outro modo de comprovar que a soma das medidas dos ângulos internos de triângulos possuem mesma medida foi atingida com Wendy. Ressaltamos que nossas escolhas podem ter influenciado para que isso ocorresse, pois se tivéssemos trabalhado mais com os alunos a ideia de retas paralelas e transversais, por exemplo, possivelmente os demais alunos também perceberiam a relação pretendida.

Considerações sobre a sessão 05

Nesta sessão, os alunos Miguel e João não se envolveram muito com as atividades e por isso, os diálogos relacionados às resoluções das atividades não são muitos. Por outro lado, Peter, Wendy e James mostram-se bastante interessados e engajados com nossa proposta. Peter tem se mostrado bastante cuidadoso com relação à medição dos ângulos, como pode ser observado em seus protocolos, e James parece perceber que algumas medidas podem ser encontradas por um modo dedutivo.

Ao que observamos, os alunos pareciam convencidos de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, considerando o que realizaram na atividade experimental no início da sessão, produzindo provas no nível pragmático. Isso pode ter influenciado as respostas nos protocolos referentes ao nosso questionamento, pois como vimos após a realização da segunda atividade da sessão, os alunos, em especial Wendy, perceberam relações entre as retas paralelas e transversais com a soma dos ângulos internos do triângulo. Nenhum aluno desenhou outro triângulo a fim de confirmar a conjectura. Talvez pudéssemos ter suscitado uma discussão mais aprofundada sobre isso, bem como termos proposto questões outras questões.

Sobre a utilização do transferidor, observamos que houve menos discussões no desenvolvimento da atividade 2 do que, por exemplo, nas atividades 1 e 2 da sessão 4, nas quais não era permitido utilizá-lo.

Neste encontro tivemos a produção da conjectura referente à soma das medidas dos ângulos internos de triângulos por meio de atividades de medir ângulos, como também de recortá-los e juntá-los em torno de um único vértice. As provas produzidas permaneceram no nível pragmático, principalmente fundamentadas na atividade experimental e sobre isso, parece haver uma confusão entre a formulação e a validação, pois os mesmo argumentos são utilizados durante as duas atividades.

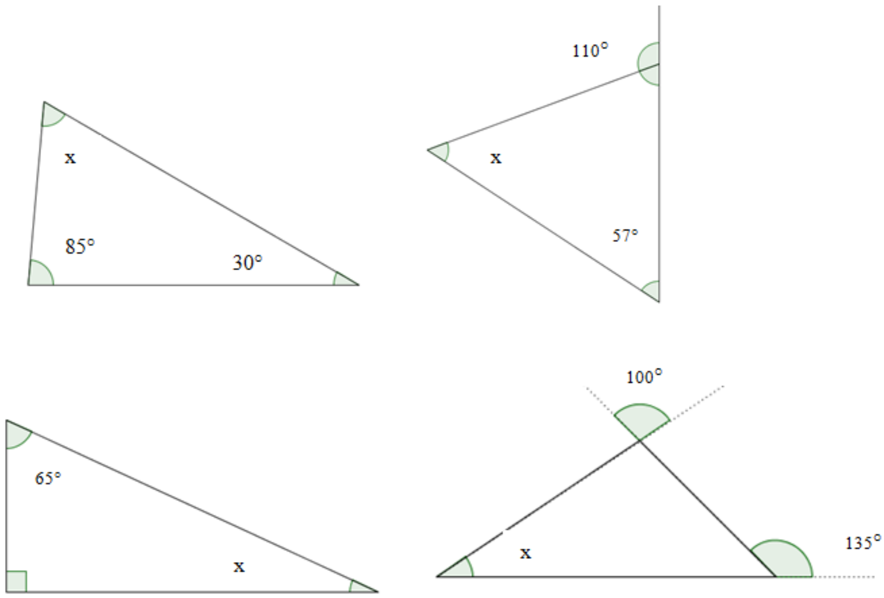
Ao final da sessão, realizamos uma discussão sobre as atividades realizadas, em especial da atividade 2, para a qual atribuímos valores genéricos aos ângulos e fomos questionando os alunos com a intenção de provar que a soma dos ângulos internos de triângulos é 180°.

5.6. Sessão 06

Nesta sessão trabalhamos com aplicação e reinvestimento de noções já exploradas nas sessões anteriores: ângulos de meia volta, ângulos OPV e soma dos ângulos internos de triângulos. Acreditamos que estas atividades, cuja intenção é determinar e não provar é importante para investigar a compreensão de propriedades, sobretudo quando precisam reinvesti-las em situações não comuns. Como verificamos em sessões anteriores, quando os alunos podem utilizar o transferidor para encontrar as medidas solicitadas é possível identificar qual foi à estratégia de resolução utilizada, por exemplo, se mediram ou se tentaram descobrir utilizando relações sem o uso desse instrumento de medida. Nesses problemas o objetivo principal era a determinação de um determinado ângulo, não sendo solicitada justificativa ou prova no enunciado.

Como dissemos, o livro didático com o qual a escola trabalha foi importante, dentre outras coisas, para nos inspirar quanto à elaboração e escolha de atividades da nossa sequência e, por isso, algumas delas se assemelham às do livro, como por exemplo, os triângulos 2 e 4 da primeira atividade. Procuramos, também, explorar figuras em diferentes posições e com que possuíssem ângulos de medidas variadas como 85°, 30°, 65°, 35° e 60° porque nesse momento a intenção era reinvestir as noções anteriormente trabalhadas e somar medidas como 81°, 37°, 68° ou 93° poderia ser um complicador a mais. A única exceção é o triângulo 2 da atividade 1, que possui um ângulo de medida 57°.

1. Encontre as medidas desconhecidas em cada um dos triângulos abaixo:



Possíveis resoluções

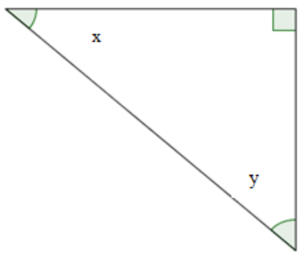
No triângulo 1, x = 65°, pois 180° - 85° - 30° = 65°.

No triângulo 2, x = 53°, já que o terceiro ângulo do triângulo mede 70° por que é o suplemento de 110° (ângulo dado na figura). Assim, 180° - 70° - 57° = 53°.

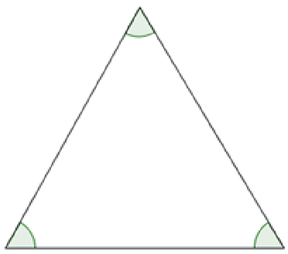
No triângulo 3, x = 25°, pois 180° - 65° - 90° = 25°.

No triângulo 4, x = 35°, já que um dos ângulos internos do triângulo mede 45° por que é o suplemento de 110° e o outro mede 100° por que é OPV do ângulo dado. Assim, 180° - 45° - 100° = 35°.

2. Qual o valor de x + y?



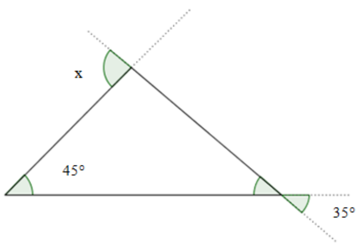
3. Sabendo que todos os lados do triângulo possuem mesma medida, qual o valor de cada ângulo do triângulo?



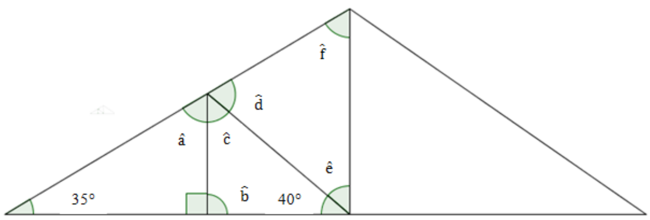
Em relação à questão 2, x + y = 90° por que 90° + x + y = 180°. Então, x + y = 180° - 90°, ou x + y = 90°.

Na questão 3, como se trata de um triângulo equilátero, todos os seus ângulos internos possuem mesma medida. Assim, cada um deles mede 60°.

4. Encontre as medidas desconhecidas em cada um dos triângulos abaixo:



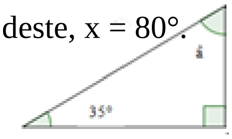
a



b

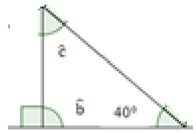
Para o triângulo a, um dos ângulos do triângulo é conhecido, 45°.

O outro é 35°, já que é OPV de um dos ângulos dado. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, o último ângulo interno será 180° - 45° - 35°, ou 100°. Como a medida do ângulo que se quer saber é o suplemento deste, x = 80°.



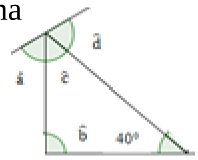
Para o caso do triângulo b:

â corresponde a 180° - 35° - 90°, ou â = 55°



$\hat{b}$ corresponde a 90° pois é o suplemento do ângulo reto dado.

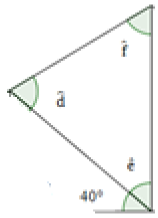
$\hat{c}$ corresponde a 180° - 40° - 90°, ou $\hat{c}$ = 50°.



$\hat{d}$ mede 180° - 50° - 55°, por que juntos formam um ângulo de uma volta, então $\hat{d}$ = 75°

ê é o complemento do ângulo de 40° dado. Assim, ê = 50°.

$\hat{f}$ mede 180° - 75° - 50°, ou $\hat{f}$ = 55°.

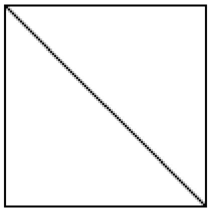


5. Qual o valor da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer? Explique como obteve a sua reposta?

Nesta questão de característica fechada, esperamos que os alunos mobilizem sem grandes dificuldades a propriedade de que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°, tendo em vista que ela já fora discutida nas sessões anteriores. Uma das estratégias possíveis de resolução é traçar diagonais, a partir de um único vértice, com a intenção de “dividir” o polígono em triângulos e multiplicar 180° pela quantidade de triângulos obtida. Neste caso, 2x180=360°.

Outra possibilidade é realizar a divisão do polígono em triângulos tendo como vértice comum um ponto qualquer do interior do quadrilátero. Neste caso, deve-se multiplicar 180° pela quantidade de triângulos obtida e diminuir 360°, ou 2 x 180°, que é a medida do ângulo central formado.

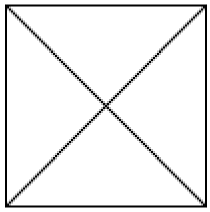
Qualquer uma dessas duas possibilidades de resposta pode ser classificada como sendo o tipo de prova *exemplo genérico*, uma vez que a ação é realizada sobre um quadrilátero específico, conclui-se que a soma dos ângulos internos de qualquer quadrilátero é 360°.



Si = 2 x 180°
Si = 360°

Ou

Si = (4-2) x 180°
Si = 360°



Si = 4 x 180° - 2 x 180°
Si = 360°

Ou

Si = (4-2) x 180°
Si = 360°

Caso os alunos justifiquem suas afirmações por meio do uso do transferidor ou porque em um quadrado, por exemplo, a soma de seus ângulos internos é 360°, o tipo de prova será *empirismo ingênuo*. Caso testem para diversos quadriláteros, inclusive um não familiar, será classificado como sendo *experimento crucial*.

Optamos pela ausência de figuras, porque em nosso pré-teste, observamos que vários alunos justificaram que a soma dos ângulos internos do quadrilátero é 360° por ele ser formado por quatro ângulos de 90°. Isso nos fez reformular a atividade pensada inicialmente, cujo objetivo era a generalização da fórmula da soma das medidas dos ângulos internos de polígonos e que continha às figuras de um triângulo, um quadrilátero, um pentágono e um hexágono regulares, uma vez que percebemos que ao propormos o quadrado, apresentamos ao mesmo tempo, a ideia implícita de que todos os quatro ângulos tinham realmente medida de 90°.

Com relação a isso, Souza (2009) realizou uma pesquisa inserida no projeto AProvaME[10], no qual analisou a resposta de 50 alunos à questão: "quadrilátero é um polígono de quatro lados. A afirmação abaixo é verdadeira ou falsa? Justifique sua resposta. – Quando se somam os ângulos internos de um quadrilátero qualquer, o resultado é sempre 360°" (SOUZA, 2009, p. 33-34). Em suas análises, observamos que alguns dos alunos que apresentaram justificativa para a resposta escolhida, apoiaram-se na suposição de que cada um dos quatro ângulos internos do quadrilátero mede 90°, mesmo não tendo nenhuma figura, como em nosso pré-teste. Além disso, como em outras pesquisas que compõem nosso quadro teórico, a autora constatou que grande parte das justificativas possui um raciocínio empírico.

Questão para discussão nas duplas: Qual seria a soma dos ângulos internos de um polígono de cinco lados?

[10] Projeto Argumentação e prova na Matemática Escolar

Com relação a esta questão, queremos realizar discussões que possam subsidiar a generalização da fórmula relacionada à soma dos ângulos internos de um polígono qualquer. A esse respeito, os PCNs versam que:

> No desenvolvimento de conteúdos referentes à geometria e medidas, os alunos terão também oportunidades de identificar regularidades, fazer generalizações, aperfeiçoar a linguagem algébrica e obter fórmulas, como para os cálculos das áreas. O aluno também poderá ser estimulado a construir procedimentos que levam à obtenção das fórmulas para calcular o número de diagonais ou determinar a soma dos ângulos internos de um polígono. (BRASIL, 1997, pg.118).

Assim, esperamos que os alunos percebam a relação entre a soma dos ângulos internos do triângulo e a soma dos ângulos internos de demais polígonos.

Experimentação

A sessão ocorreu no dia 24 de novembro de 2015 e teve a participação de 8 alunos. Mary e Wendy ficaram juntas neste dia assim como Miguel e João e James e Peter. Inicialmente entregamos os protocolos aos alunos sem maiores explicações sobre o que deveria ser realizado. Apenas orientamos que a dinâmica da sessão seria a resolução das atividades por parte das duplas e, num segundo momento discutiríamos as respostas e resoluções. Neste dia, Miguel e João não se envolveram muito com nossa proposta, tanto que suas falas evidenciam-se mais no início da sessão. Por isso e pelos nossos objetivos, nossas análises estão mais direcionadas às produções das demais duplas.

Análise a posteriori

Assim que propusemos as atividades as duplas prontamente iniciaram suas resoluções e como havíamos previsto em nossas análises *a priori*, foi possível identificar que tentaram encontrar as medidas solicitadas por meio de um raciocínio dedutivo, utilizando-se de noções anteriormente trabalhadas. Um exemplo disso pode ser observado no diálogo entre Wendy e Mary (que havia faltado na sessão anterior), e João e Miguel:

Primeiro diálogo
Mary: É mais ou é menos? Soma os dois, 115°, ai 360° menos 115°, 245°! Mas se é 180°... É 360°?
Wendy: Não! É 180°, por que esse daqui só vai dar assim, olha... Meia volta se for somar tudo! Lembra? Ah, você faltou, a gente viu que os triângulos dão todos 180°, não dá 360°...
Mary: Ah, entendi... Aqui da 115° menos...
Wendy: Você fez mais aqui?
Fizeram algumas contas
Wendy: Está errado...
Mary: Está mesmo...
Wendy: Mas não é 180° menos 115°? 85° mais 30° quantos que falta? 80°, 90°, 110°, 11°, 12°, 13°, 14°, 15°. Tá, da 115°, pra dar 180°... 15°... Deixa eu pensar...
Mary: 67°...
Wendy: Não da 77°, não dá...
Contado...
Mary: 75°...
Wendy: Se for 77° passa...
Mary: 75°

Segundo diálogo
João: Esse aqui tem que dar 180°, não é?
Miguel: É! Mais 25° aqui...
João: Como assim?
Miguel: Olha, aqui vai dar 25°, deixa 20°, fica 30°, aí 5° mais 5°...

No primeiro diálogo em que a dupla se refere ao triângulo 1 da primeira atividade, vemos que mesmo de posse do transferidor, as alunas tentam encontrar a medida do ângulo x fazendo contas, neste caso, a fim de que a soma de todos os ângulos internos do triângulo resulte em 180°.A discussão continua e as alunas concluem que a resposta correta é 65°, mas a maneira como elas tentam encontrar esta medida é interessante, uma vez que elas contam, hora de dez em dez, hora de um em um e analisam suas suposições. Neste caso, nossa opção por ângulos de medidas mais comuns (85°, 30°, entre outros) pode ter ajudado de alguma maneira Wendy e Mary em suas resoluções, já que esta é uma prática comum dos alunos, como também observamos no segundo diálogo. Neste, João e Miguel discutem qual a medida de x no triângulo 3 da atividade 1.

Sobre a segunda atividade que solicitava a soma das medidas de dois ângulos do triângulo, conhecendo o terceiro, 90°,

Primeiro diálogo
Wendy: Qual o valor de x mais y?
Mary: Esse aqui tem que dar 180°, não é? Aqui você coloca 90°, aqui 65° e aqui coloca 25°...
Wendy: É diferente! Ah!
Mary: Só está mais comprido... Vai ser a mesma coisa não vai?
Wendy: Nesse 65° e 25°... Qual é o valor de x mais y? [fez a conta] Mas passou... 10°... Vai dar 110° com mais 90°...
Mary: 190°!
Wendy: Então tá errado...
Mary: Mas por quê? Aqui deu 180°!

Segundo Diálogo
James: Aqui está difícil! Essa aqui x mais y, x e y...
...
Peter: Eu não sei como vamos fazer esse aqui se não tem nenhuma medida aqui...
...
Peter: Esse aqui é 90°, aqui é 90° também...
James: 90° mais 90° dá 180° já...
Peter: Então... Tem que dividir...
James: Da... Vai dar quanto? Vai dar 45° pra cá e 45° pra cá...
...
Liana: Você mediu?
James: Não, eu fui pela lógica!
Liana: Mas veja, neste outro triângulo também tem um ângulo de 90° e os demais não medem 45°...
James: É, mas aqui as medidas são iguais [referindo-se aos lados do triângulo!]. E aqui também já tinha uma [referindo-se a segunda medida dada em outro triângulo retângulo]

Mary inicialmente conjectura a possibilidade de um ângulo medir 65° e outro 25° em função da observação do triângulo 3 da atividade 1, cujas medidas dos ângulos são 90°, 65° e 25°. Numa tentativa de validar a resposta, somam todas as medidas a fim de que elas resultem em 180°.

James e Peter, por sua vez, estavam discutindo as resoluções e respostas, neste caso da atividade 2, mas estavam tão envolvidos com a proposta que por vezes, em meio a este diálogo, se referiam a outras atividades. Mas especificamente no excerto que evidenciamos, Peter diz não saber como encontrar a resposta solicitada e James acredita ser uma questão mais difícil possivelmente em função da presença das letras x e y. Em determinado momento da discussão, Peter percebe que um dos ângulos internos do triângulo mede 90° e já afirma "aqui é 90° também". Essa medida é dividida igualmente para cada um dos outros dois ângulos do triângulo, embora a atividade não solicitasse as medidas específicas de cada um deles. Quando percebemos que a dupla havia chegado a tal conclusão, questionamos se haviam utilizado o transferidor e James nos disse novamente, assim como na sessão anterior, que havia encontrado a resposta "pela lógica". Neste momento, queríamos saber o que fez com que eles acreditassem que os dois ângulos medissem 45° cada um, pois em outro caso (triângulo 3 da atividade 1), isso não acontecia. James nos disse que neste triângulo as medidas de dois lados eram iguais e que no caso à que foi comparado, já se conhecia duas medidas dos ângulos internos.

Essa hipótese também foi utilizada para a resolução da atividade 3, como percebemos na fala de James, em especial, quando supõe "se esse aqui é igual aqui [...]",

James: Se esse aqui é igual aqui pra dar 180°? É 60°! Se for 60° mais 60° 120°. Mais 60°, 180°!
Algum tempo depois
Liana: Por que aqui deu 60°?
James: Por que tem que somar 180°!
Liana: Mas veja os outros casos. Os demais triângulos também têm seus ângulos internos que somados resultam em 180° e nem por isso são iguais... Por que você acha que é 60°?
James: Por que esse aqui tem medidas iguais, esses aqui não têm... [mostrando os lados]

Esta ideia, de dividir 180° por três, também foi utilizada por Wendy e Mary em seus protocolos. Aqui, evidenciamos que nossa escolha pelo trabalho em duplas tem se revelado muito importante para a compreensão de como, porque ou que estratégias os alunos utilizaram em suas resoluções. Nesse trecho, por exemplo, caso James estivesse sozinho, possivelmente não explicitaria sua conjectura de que os três ângulos internos do triângulo em questão possuem mesma medida por que possuem, também, os três lados de mesma medida. Além disso, o debate de validação entre os alunos da dupla aparece aos poucos, como no caso de Wendy, ao argumentar sobre a medida dos ângulos na atividade 4a,

Wendy: Aqui, olha da uma voltinha, uma bolinha... Aqui tem que dar 360°! E aqui também... 45°, com 90°... Então aqui é 45°... Olha, é tudo 90°...
Mary: Vai dar 90°? Mais 90°, 180°!
Wendy: Olha aqui... As aqui dentro têm que dar 180°!
Mary: Ah, entendi o que você está querendo dizer... Aqui, nesses ‘negocinhos’ aqui é 360°, mas aqui dentro é 180°!
Wendy: Olha, 45°, mais 45° mais 90° vai dar 180°, aqui é 45°, mas aqui é 35° por que são ângulos opostos... Entendeu? Por que se colocar 35° mais 35° não vai dar... E aqui é 90°, não tem como colocar 80°.
Mary: Só esse aqui está errado...
Fizeram contas
Wendy: Ai dá certinho 360°, 45° aqui e 35° aqui... Pronto!

Tendo em vista que Wendy realiza afirmações e justifica, explicando para Mary porque acredita que suas respostas estão corretas, podemos classificar seu discurso como uma argumentação (BALACHEFF, 1988). Para tanto, ela reinveste propriedades já trabalhadas em sessões anteriores, tais como soma dos ângulos internos de triângulo e ângulos opostos pelo vértice.

Essa ideia também é utilizada para a resolução da atividade 4b, em que Mary acredita ser mais difícil por não ter “números” ao se referir a medida dos ângulos a serem descobertos. Nesse sentido, Wendy afirma “se você descobrir aqui, você vai descobrir aqui, aí vai ter um número... Por que aqui, olha, dá 180°!”, referindo-se a soma das medidas dos ângulos $\hat{a}$, $\hat{c}$ e$\hat{d}$, que juntos formam um ângulo de meia volta.

Mary: Esse aqui é mais difícil!
Wendy: Nossa como faz isso? Aqui da 90°... Olha, são três triângulos! Um, dois, três... Então tem que dar 180° aqui, 180° aqui e 180° aqui!
Fazem algumas contas
Wendy: 55°?
Algum tempo depois
Mary: Aqui não tem número né...
Wendy: Então... Mas... Mas se você descobrir aqui, você vai descobrir aqui, aí vai ter um número... Por que aqui, olha, dá 180°!
Mary: mais 55° mais 50° ,160°...
Wendy: Não dá 160° não! 55° mais 50° vai dar... Como que você sabe que aqui é 50°?
Mary: por que aqui vai dar 90°, não vai?

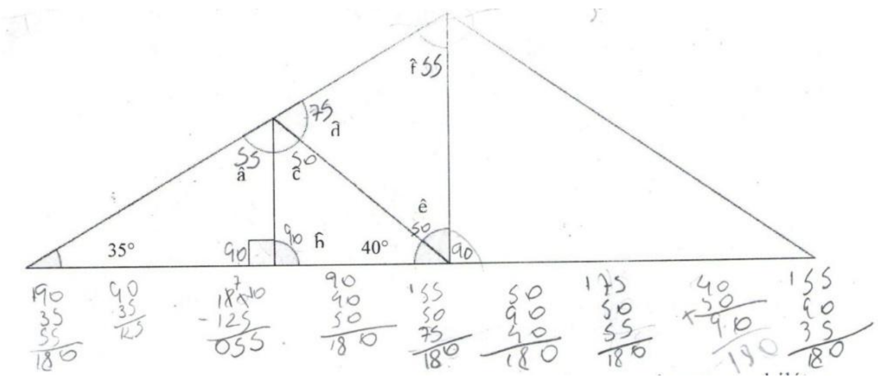


Figura 30 – Protocolo aluna Wendy, sessão 06
Fonte: Dados da pesquisa

Também percebemos que elas, na discussão, questionam uma à outra porque acreditam que determinada resposta está correta o que pode ser um início da compreensão da necessidade de justificação de afirmações, inclusive, de conjecturas. Nestes diálogos vemos também, que Wendy procura deduzir as respostas, a partir de informações já conhecidas, em que há uma sequência lógica de acontecimentos, ou ainda,

> Deste fato **decorre** este outro, que por sua vez **implica** neste outro, que **acarreta** esta outra conclusão, da qual pode-se **deduzir** esta outra propriedade etc. Eis um objetivo importante (mas não único) para o ensino de geometria no 1° grau: contribuir para que as pessoas aprendam a desenvolver raciocínios em cadeias lógicas, como na forma resumida acima (IMENES, 1987, p. 61).Grifo do autor.

Isso tudo é muito importante ao pensarmos nas provas de propriedades, pois para realizar tal atividade, essa ideia dedutiva quase sempre está presente. De acordo com Piccelli (2010), por exemplo, para que uma conjectura seja provada e se torne verdade, deveriam ser utilizadas afirmações já provadas um uma sequência lógica de afirmações.

Na atividade 5, observamos assim como analisamos *a priori* que a estratégia imediata das duplas foi pensar nos ângulos internos de um retângulo, especificamente, de um quadrado. Isso implicou na elaboração da conjectura de que a soma das medidas dos ângulos internos de quadriláteros é 360°, como percebemos abaixo,

Primeiro diálogo
Wendy: Qual o valor da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero?
Mary: 180° não é?
...
Mary: É esse aqui... Ai você vai ter que saber a medida desses ângulos aqui de dentro...
Wendy: 90°!
Mary: Mas eu não sei desenhar!
Wendy: Mas é 90°!
Mary: Vamos ver que vai dar... Vou colocar 90°!
Wendy: Aqui também vai dar 90°... Vai dar 360°!
Liana: E se for qualquer outro quadrilátero?
Wendy: Não sei... Mas vai dar 360° não vai? Por que 90°mais 90° mais 90° mais 90°...
Liana: Certo! Então teste com outro caso...
...
Mary: Cento e... Vai dar 360°! 85°... Agora deixa eu fazer a soma... Eu gosto de somar... Deu 365°...

Segundo diálogo
Peter: Mas, vai dar... Acho que vai dar 90°! Vai dar 90° todos aqui...
James: Então vai dar 45°...
Peter: eu acho que é, ai 90° mais 90°, 180°, vezes dois, 360°.
Algum tempo depois
Liana: Mas e se fosse um quadrilátero muito diferente? Desenhe um aí...
Ele desenhou
Liana: Será que a soma dos ângulos internos dessa figura também vai dar 360°?
Peter: Não...
James: Não, por que... A forma dele é diferente...
Liana: Então vejam quanto vai dar
...
Peter: Desenha na folha ai. Desenha um quadrado. E tem que medir certinho!
...
James: 90°! Quer medir o outro? Vai dar tudo 90°! Mede aí pra você ver!
Peter: Ai...
James: Tem que arredondar...
Peter: Não, tem que dar certinho nessa...
James: Tem que dar 360°
Peter: Se for retinho, assim retinho mesmo, ai da 360°! Agora aqui não! Vamos fazer um retinho desse aqui, olha.

Ao perceber que os alunos estavam se apoiando no desenho do quadrado, devolvemos o questionamento, ou seja, se a resposta seria a mesma considerando qualquer quadrilátero ou um caso bem diferente a fim de colocar em cheque a conjectura que estava se evidenciando. Wendy e Mary mostraram-se em dúvida e ao testar em outro caso, encontraram medidas como 365°. Peter e James afirmaram que não poderia ser 360° porque a "forma" seria diferente, mas mesmo assim, insistiram em desenhar um retângulo só que com o máximo de precisão possível, característico de Peter. A esse respeito, Ponte (2003, p. 29) sublinha que "[...] a colocação de questões é uma etapa a que os alunos tendem a prestar pouca atenção [...]. A sua tendência natural é considerarem que a verificação de diversos exemplos é suficiente para comprovar a validade de uma afirmação matemática."Nesse sentido, a autor pontua que uma experiência prolongada com estas atividades evidencia avanços significativos em relação a estes aspectos.

Nos protocolos, os alunos apresentaram as seguintes respostas para esta atividade:

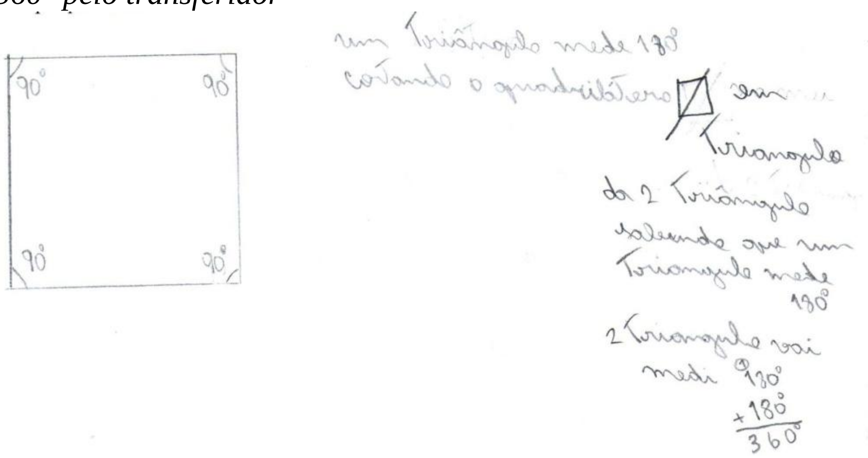
Wendy	*360°. A soma dos ângulos internos sempre será 360°.*
Mary	*360°. A soma dos ângulos internos sempre será 360°.*
Miguel	Não apresentou justificativa
João	Não apresentou justificativa
James	*360° pelo transferidor*
Peter	

Figura 31– Protocolo aluno Peter, sessão 06.
Fonte: Dados da pesquisa

James justificou sua resposta em função do transferidor e Wendy e Mary apenas realizaram uma afirmação e como não identificamos nos diálogos, nem nos protocolos o teste da conjectura para quaisquer casos não familiares, classificamos suas provas como *empirismo ingênuo*.

Peter pensou em dividir o quadrilátero em triângulos para responder ao questionamento que propomos e nesse sentido, classificamos sua justificativa como sendo o tipo de prova *exemplo genérico*. É importante destacar que mesmo considerando a hipótese de que ele tenha sido influenciado pela atividade experimental, apresenta uma sequência lógica de afirmações a partir da representação de um quadrilátero. Essa classificação seria outra, caso Peter respondesse algo do tipo “é 360°, por que quando recortamos e juntamos os dois triângulos, vimos que deu dois triângulos”. Segundo Balacheff (1987), quando se trata de uma evolução referente às provas, em específico das provas pragmáticas para as intelectuais, o processo é marcado não só por uma evolução a natureza do conhecimento, mas também por uma evolução das características linguísticas, como vem demonstrando Peter.

Outro elemento que nos fez atribuir a referida classificação à prova realizada, foi à presença de duas representações do quadrado em seu protocolo. Na primeira delas aspectos como o traço exato, a utilização da régua e a igualdade de certas medidas foram importantes para “constatar” a veracidade da conjectura. Na segunda, não há preocupação alguma em obedecer a tais regras, de modo que o estatuto passa a ser outro. Para Arsac (1982), pouco a pouco o aluno deve evoluir, e o estatuto da figura em geometria também. Isso é difícil de ser explicado ou definido precisamente para o aluno, mas este deixará de medir ou constatar com réguas ou transferidores para raciocinar ou ainda deduzir a partir da figura.

Consideramos a reposta de Peter bastante interessante, já que Souza (2009), que não desenvolveu uma sequência didática, mas tabulou dados de uma população total de 1998 protocolos constatou que apenas 1,3% dos alunos apresentaram justificativas para a questão[11]que se aproxima de uma prova e 2,5% justificaram utilizando propriedades e uma linguagem formal. Souza, que também realizou entrevistas, ao conversar com uma aluna que apresentou uma justificativa de nível intelectual, observou uma memorização e não uma compreensão da resposta. Segundo a entrevistada, ela respondeu de acordo como o que se lembrava de um exemplo que sua professora havia mostrado na lousa. Acreditamos que este não tenha sido o caso de Peter, que vêm reinvestido noções trabalhadas a cada sessão.

Conforme as duplas finalizavam as atividades, pedíamos para que recortassem o quadrilátero em dois triângulos e logo os alunos perceberam a relação entre a soma dos ângulos internos dos triângulos formados e a do quadrilátero.

Antes da discussão final, para Peter e James, que concluíram com antecedência, propomos a questão sobre a soma dos ângulos internos de um polígono de cinco lados,

Liana: Qual será a soma dos ângulos internos de um polígono de cinco lados?
Peter: Assim, olha, um, dois, três, quatro, cinco...
Algum tempo depois
James: Ah! Aqui dá pra fazer três triângulos! Aqui dá para fazer três triângulos!
Peter: Faz aí...
James: Deixa eu apagar aqui... Mas vai dar mais de 360°! Peter confere aqui pra mim pra ver se está certo, porque deu um número muito absurdo!
Peter: Têm quantos? Você colocou 110°?
James: Está certo?
Peter: Se mediu eu acho que está certo!
James: Está certo? Deu 545°...
Peter: Acho que aqui está errado... Aqui vai dar cem... Quer saber esse aqui, aí olha... Não está dando pra cá...
James: Quanto que vai dar?
Peter: Não sei não... Quanto deu em todo?
James: 545°

Assim que realizamos o questionamento da dupla eles iniciaram a resolução e logo James cogita dividir o polígono em três triângulos, mas por meio dos diálogos não conseguimos identificar se James encontrou 540° multiplicando 180° por três e achou como disse “um número muito absurdo” ou se mediu com o transferidor e encontrou

[11] Ver análise *a priori* da sessão 7

algo próximo disso. Então, ele solicita a Peter que confira seu resultado e eles acabam encontrando 545°.

Enquanto isso, as demais duplas foram finalizando seus trabalhos e dado o andamento da sessão, realizamos um apanhado de todas as atividades discutindo as respostas e as resoluções. Referente à última questão da sequência, por meio de questionamentos, fizemos uma prova de que a soma dos ângulos internos de quadriláteros é 360°.

Considerações sobre a sessão 06

Os alunos praticamente não utilizaram o transferidor para responder as atividades que propomos, com exceção da questão 5, que solicitava a soma das medidas dos ângulos internos de quadriláteros. E ainda assim, depois que propomos o teste da conjectura para casos diferentes de retângulos e quadrados.

Outro aspecto a ser evidenciado é o desenvolvimento dos trabalhos em duplas, pois em diversos momentos e nesta sessão em específico, possibilitou o debate entre os alunos e a evidencia de estratégias e de conjecturas. Por vezes, eles diziam o que ou como estavam pensando, mesmo que o colega estivesse atento a outras coisas, como foi o caso de James no início deste encontro e de Lisa na sessão 1.

Nesta sessão, obtivemos a primeira prova *exemplo genérico*, referente ao nível intelectual descrito por Balacheff (1988) o que pode indicar que a realização e discussão de provas que temos realizado ao final dos encontros, aos poucos, estão influenciando nas respostas dadas.

Durante nossa discussão final, cada dupla precisou expor seus resultados e justificá-los principalmente diante de divergências e nesse processo, "o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação dos seus resultados e na sua discussão e argumentação com os colegas e o professor." (PONTE, 2003, p. 10). Contudo, sentimos por João e Miguel não terem se envolvido muito com nossas atividades e mesmo tentando instigá-los por meio de questionamentos, este é um fator que não podemos controlar.

Por fim, a conjectura de que a soma dos ângulos internos de um polígono de cinco lados resulta em 545° não foi discutida em função do tempo, mas será retomada no início da sessão 7.

5.7. Sessão 07

Esta sessão é composta por uma atividade cujo intuito é fazer com que os alunos conjecturem acerca da medida soma dos ângulos externos de um polígono qualquer.

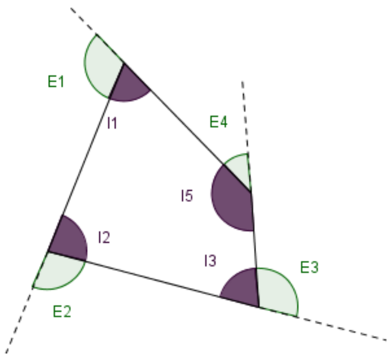
1. Qual será a soma dos ângulos externos de um polígono qualquer? Como você justificaria a sua resposta?

Esta atividade será realizada com a pretensão de que os alunos percebam que, independente do polígono escolhido, a soma dos ângulos agrupados em torno de um único vértice será sempre 360°. Como a atividade não contém figuras, orientaremos cada dupla a desenhar diversos polígonos diferentes, inclusive em relação ao número de lados, e a prolongar seus segmentos num mesmo sentido. Para encontrar as medidas dos ângulos necessárias, o transferidor poderá ser utilizado.

Os alunos podem encontrar todas as medidas utilizando-se do transferidor e neste caso, se justificarem que a resposta é 360° por que para todos os casos construídos, a soma sempre resultou neste valor, poderemos classificá-la como sendo *empirismo ingênuo* por levar em conta as construções realizadas. Ainda, se apresentarem dúvidas em relação à conjectura e sentirem necessidade de testar sua validade para um caso em específico, à prova será classificado como *experimento crucial* (BALACHEFF, 1988), cuja conclusão é fundamentada em exemplos, considerando casos não familiares.

Outra possibilidade é a dos alunos encontrarem por meio do transferidor as medidas dos ângulos internos do polígono e, em seguida, deduzir as medidas dos ângulos externos.

Pode-se ainda ter respostas, como por exemplo,



(1) $I_1+I_2+I_3+I_4=360°$
(2) $I_1+E_1=180°$
(3) $I_2+E_2=180°$
(4) $I_3+E_3=180°$
(5) $I_4+E_4=180°$
(6) (6) $I_1+E_1+I_2+E_2+I_3+E_3+I_4+E_4 = 4 \times 180°$. Substituindo (1) em (6)
$E_1+E_2+E_3+E_4+360° = 4 \times 180°$
$E_1+E_2+E_3+E_4 = 4 \times 180° - 360°$
$E_1+E_2+E_3+E_4 = 2 \times 180°$, logo
$S_e = 360°$

Se este for o caso, a prova será *exemplo genérico* por tratar-se de um caso particular sobre o qual ocorre a generalização. A prova desta propriedade em questão, assim como outras exploradas em nossa sequência são exploradas no livro didático utilizado na escola, o que pode ser um indicativo de que os alunos têm contato com essas provas, mesmo que o professor não as explore demasiadamente.

Experimentação

Nossa última sessão ocorreu no dia 01 de dezembro de 2015 e contou com a participação de 8 alunos. Foi à primeira vez em que numa sequência de encontros as duplas se mantiveram, sendo, portanto compostas por Miguel e João, Mary e Wendy e também, James e Peter. Num primeiro momento, retomamos a conjectura produzida por James referente à soma dos ângulos internos de um polígono de cinco lados e depois de discuti-la, demos início ao que havíamos pensado para a última sessão. No final, depois de encerrarmos as atividades, nos reunimos na frente da escola para uma pequena confraternização.

Análise a posteriori

Neste dia, as duplas prontamente se envolveram com nossas atividades, medindo, discutindo, enfim. E, ao retomarmos a conjectura de James de que a soma dos ângulos internos de um polígono de 5 lados é 545°, tanto Peter e James quanto Mary e Wendy já estão levando em consideração a ideia de dividir polígonos em triângulos. Ideia esta que é utilizada para refutar a conjectura em questão, e ao mesmo tempo, justificar a resposta dada, como percebeu nos diálogos:

Peter: Não... Não é 545°...
Liana: Se é 545° qual é a explicação?
Na dupla
James: É sim Peter!
Peter: 16, 24...
James: É que a gente mediu no transferidor... A gente tinha medido no transferidor. Era...
Peter: 540°... Ali vai cortar em três triângulos... Conta ai, três vezes 180°...

Na dupla.
Mary: Tem que ver quanto vai dar a soma de três triângulos...
Wendy: Isso!
Mary: A soma de três triângulos vai dar 540°, não é?

Para a turma em voz alta
Peter: É 540°!

Consideramos que tais argumentos são plausíveis e coerentes com o que havíamos discutido em sessões anteriores, como por exemplo, soma dos ângulos internos de triângulos e soma dos ângulos internos de quadriláteros. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) numa fase inicial de contato com provas, como é o caso dos alunos com quem estamos trabalhando, pois se trata de apenas sete encontros, é razoável aceitar justificações que se baseiem em raciocínios coerentes e em conhecimentos que os alunos já possuem. Nesse sentido, à medida que eles compreendem a necessidade de justificar e que suas ferramentas matemáticas se tornam mais sofisticadas, fica mais fácil o trabalho com provas. Alguns indícios já podem ser observados, como por exemplo, o raciocínio empregado por Wendy e Peter nas resoluções das questões da sessão seis e neste caso das duplas ao dividirem os polígonos em triângulos. Outro aspecto referente à justificação de conjecturas que pode ser observado neste caso é a que para que isso ocorra faz-se necessário que se encontre "[...] alguma razão ou estrutura, que enquadre o argumento, ou seja, que estabeleça uma ligação entre o que se sabe e o que se pretende justificar." (MAGALHÃES, 2010, p. 37). Nesse caso, os alunos já dispõem de noções trabalhadas em sessões anteriores, o que favorece a argumentação em prol de justificações.

Também questionamos acerca da soma dos ângulos internos de um polígono de 6 lados e obtivemos respostas corretas, a partir da mesma estratégia de resolução. Em seguida, entregamos os protocolos e, ao medir e somar os ângulos externos de polígonos de três, quatro e seis lados, as duplas encontram valores como 350°, 360°, 365°, 367°. Como não havia figuras no enunciado que pudessem ser observados, como exemplo, alguns alunos realizaram o prolongamento dos segmentos dos polígonos de maneira equivocada e nesse sentido, também houve a ocorrência de valores como 380° e 330°. Esse foi o caso de Wendy,

Wendy: 330°...
Mary: 365°... Não vai dar... Tem mais que 335°
Wendy: O meu deu 330°...
Florisval: Esse prolongamento...
Correção do prolongamento
Mary: 40° aqui. Dá 120°...
Wendy: Por que aqui deu 120°?
Mary: 380°... Deu 365° Wendy...
Wendy: O meu deu 360°...
Mary: Por que aqui deu... E aqui deu 360°? Por que o quadrado...
Wendy: Dentro... Dentro tem que dar 180° [referindo-se aos ângulos internos do triângulo] Aqui deu 180° certo?
Mary: Mas tem que medir o de fora...
Wendy: Verdade...

No diálogo também é possível perceber que inicialmente há também uma confusão em relação aos ângulos internos e externos, mas que na discussão, passa a ser resolvida. A dupla Miguel e João trabalham considerando polígonos de três e de quatro lados e a partir destes exemplos, Miguel toma a conjectura como sendo conclusiva, mesmo nós tendo proposto que os alunos testassem para polígonos com mais lados, o que como vimos em nossas análises preliminares é comum quando se trabalha com conjecturas (PONTE, 2003; 2006).

Miguel: É isso! 360°, certinho, nossa! Olha 130°, 120° e 110°...
Fez algumas contas
Miguel: Olhas as centenas... 300°, 10°, 20°, 30°... 40°, 50°, 60°!
João: Então, o meu deu 90°!
Miguel: A minha está reta... Quando estiver reto assim olha, é 90°!
João: É tudo 90°...
Miguel: Deu tudo 90° o deles... Lê a pergunta...
João leu a pergunta
Miguel: 360°!
...
João: Vai ser 360° por que nós medimos o triângulo e o quadrado...

A última fala de João vai ao encontro do que sinalizamos anteriormente sobre a relação entre o discurso e as justificativas nos protocolos, pois ela foi praticamente idêntica àquela apresentada nos protocolos.

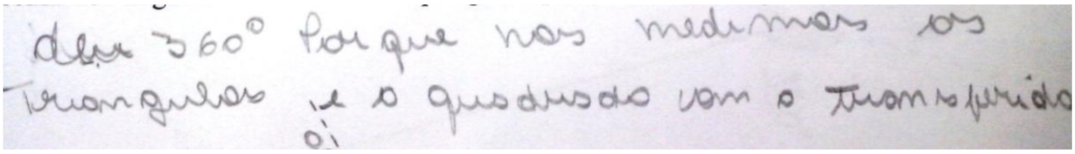


Figura 32 - Protocolo dos alunos João e Miguel, sessão 07
Fonte: Dados da pesquisa.

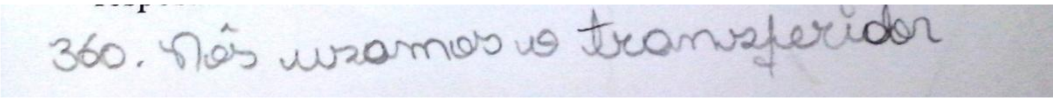


Figura 33 - Protocolo das alunas Wendy e Mary, sessão 07.
Fonte: Dados da pesquisa.

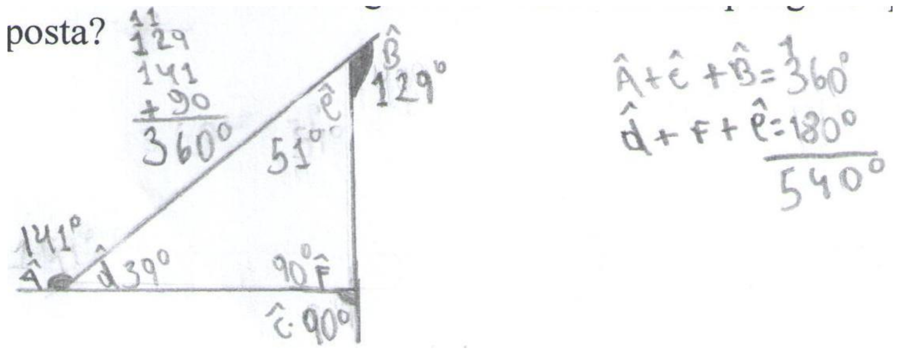


Figura 34 - Protocolo dos alunos Peter e James, sessão 07
Fonte: Dados da pesquisa.

Classificamos as provas apresentadas por João e Miguel e Wendy e Mary como sendo *empirismo ingênuo*. A resposta de Peter e James pode ser classificada como *exemplo genérico* porque os alunos escolheram o triângulo e utilizam a relação de suplementaridade entre ângulos internos e externos. Eles chegam à soma dos ângulos internos externos, buscando uma possível relação, mas essa ideia não foi explorada nem nos diálogos, nem nos protocolos.

Considerações sobre a sessão 07

Algo que evidencia é a evolução de Peter em relação à escrita em linguagem matemática, pois como observamos em sua resolução, está utilizando elementos genéricos. Os demais alunos, embora consigam estabelecer relações entre propriedades e mesmo diante das provas discutidas ao final de algumas sessões, têm justificado suas respostas nos protocolos pelo uso do transferidor. Então, assim como na sessão 06, tivemos a ocorrência de provas *empirismo ingênuo* e *exemplo genérico*.

Nos últimos encontros, nosso trabalho ficou mais restrito ao planejamento e acompanhamento da sessão, pois a maioria deles resolvia e respondia as atividades que propúnhamos de modo independente. Isso não ocorreu com todos, como foi o caso de Miguel e João e não sabemos exatamente o porquê isso ocorreu se devido à nossa proposta que não os atraiu ou se eles simplesmente não estavam interessados.

CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

O objetivo de nossa pesquisa consistiu em analisar a produção de conjecturas e provas de propriedades, relativas a ângulos de polígonos, de alunos do 8° ano do ensino fundamental. Nesse sentido, observamos o processo de investigação, elaboração de conjecturas, argumentos utilizados pelos alunos para validarem as afirmações realizadas, bem como dificuldades e superações por eles apresentadas.

A análise dos dados de sete alunos do 8° ano do Ensino Fundamental, produzidos a partir de uma intervenção realizada em contra turno escolar, nos permitiu chegar a algumas conclusões, as quais apresentaremos a seguir:

- *Em relação aos argumentos produzidos pelos alunos durante a formulação e a validação de conjecturas:*

Inicialmente o principal argumento, tanto no que se refere à formulação quanto à validação de conjecturas, era sustentado pela utilização do transferidor para medir figuras dadas, presente nas ações, nos discursos e nos protocolos produzidos pelos alunos. À medida que os encontros foram ocorrendo, observava-se no discurso o reinvestimento de propriedades, trabalhadas durante as sessões anteriormente realizadas por meio de atividades. Nesse sentido, nem sempre era possível distinguir as situações de formulação e de validação no discurso dos alunos, pois na maioria das vezes os mesmos argumentos são usados tanto para uma, quanto para a outra. Um exemplo disso é a resposta dada nos protocolos na sessão 05, referente à soma dos ângulos internos de triângulos e na sessão 07, sobre a soma dos ângulos externos de polígonos. Na primeira os alunos "validaram" a resposta com base no procedimento experimental de recortar os ângulos e juntá-los em torno de um único vértice. Na segunda, sustentado pela utilização do transferidor.

Ainda sobre a validação de conjecturas, conseguimos identificar algumas provas, sendo a maioria situada no nível das provas pragmáticas, cujas conclusões foram obtidas tomando por base exemplos singulares, manipulações, dentre outros, sem haver elementos relacionados à generalização. Segundo Balacheff (1987), quando se trabalha com uma geometria baseada na observação, a natureza do conhecimento do qual o aluno dispõem não o permite satisfazer as exigências de uma demonstração de modo imediato e que independentemente da negociação de um novo contrato didático, não se trata de uma simples passagem das provas pragmáticas até a demonstração.

Ainda segundo o autor, esta é constituída por uma sucessão de construções sobre o terreno do conhecimento e da racionalidade e que, portanto, requer certo tempo.

Nesse sentido, essa passagem não é tão simples e demanda certo tempo para ocorrer, sobretudo quando não se conhece muito sobre o tema como foi o caso dos alunos que analisamos, pois trata-se de um processo a ser percorrido. Entretanto, com o desenvolvimento das atividades, os alunos foram adquirindo ferramentas para seus argumentos de formulação e validação, como percebemos ao longo das sessões.

- *Em relação às estratégias utilizadas pelos alunos:*

Nas primeiras sessões as estratégias de resolução eram resumidas ao uso do instrumento de medida. No decorrer dos encontros, procuramos valorizar a utilização de raciocínios fundamentados em deduções, resgatando noções e propriedades já trabalhadas nos encontros anteriores. Para tanto, sempre que tínhamos oportunidade perguntávamos aos alunos se era possível encontrar as medidas solicitadas sem a utilização do instrumento de medida. A esse respeito, nas últimas sessões percebemos que para algumas atividades, mesmo de posse do transferidor, os alunos não os utilizavam, a não ser que fossem incentivados por nós ou que a proposta exigisse como ocorreu na última sessão em que era preciso desenhar diversos polígonos e medir seus ângulos externos.

- *Quanto às dificuldades e superações apresentadas pelos alunos no decorrer da aplicação da sequência didática:*

Aos poucos, como já dissemos, os alunos conseguiram estabelecer relações e reinvestir propriedades que já haviam sido trabalhadas em sessões anteriores para realizar novas situações propostas. As discussões e o debate de validação foram surgindo nas duplas e eles passaram a fazer parte dos encontros gradativamente, como pode ser observado, por exemplo, nas sessões 02 e 06. Em meio a isso, alguns alunos já não se satisfaziam com a resposta dada pelo parceiro, passando a questioná-lo sobre o porquê das afirmações, como foi o caso de Wendy na sessão 06. Nessa perspectiva, por diversas vezes ocorreu a devolução e foi possível perceber a vivência de situações adidáticas de formulação e de validação.

Em relação ao fato dos alunos terem pouco conhecimento sobre ângulos em geral quando iniciamos à experimentação, há duas questões a serem pontuadas. Numa direção, isso de alguma maneira reflete o que nossos estudos preliminares apontaram sobre o fato da geometria ainda ser um conteúdo ainda pouco explorado em sala de aula. Noutra, durante as sessões realizadas esses alunos tiveram a oportunidade de vivenciar um processo de elaboração de conjecturas, de investigação e de descoberta de propriedades matemáticas. Para nós foi um desafio pensar, ao mesmo tempo, nos alunos, na presença (ausência) deles nos encontros, no espaço da experimentação, na abordagem do conteúdo e possíveis aprendizagens, uma vez que estávamos diante da necessidade de enfrentar tais situações.

Outro aspecto a ser considerado é a escrita em linguagem matemática, uma vez que os alunos, de modo geral, escreviam nos protocolos como se estivessem nos contando como ou porque acreditavam que sua resposta estivesse correta. Contudo, trata-se de algo a ser desenvolvido em longo prazo, como pontuamos em nosso estudo preliminar, mas mesmo assim, alguns mostraram superações com relação a isso, como é o caso de Peter, por exemplo.

- E, por último, sobre *a produção de conjecturas e provas de propriedades, envolvendo ângulos de polígonos, por alunos do 8° ano do ensino fundamental.*

Depois de tudo, dizemos que a produção de conjecturas, assim como havia nos sinalizado Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), ocorrem de diversas maneiras e em diferentes situações. Em nosso caso, a manipulação do transferidor foi fundamental para que os alunos elaborassem suas conjecturas, como por exemplo, na sessão 05 em que por meio da medição de ângulos internos de triângulos conjectura-se sobre o valor de sua soma. As atividades experimentais nas quais foi preciso desenhar, medir, recortar, manipular, entre outros, também foram importantes, mesmo sendo tomadas como conclusivas na maioria das vezes.

Há de se destacar ainda que o trabalho em duplas além de nos possibilitar observar este processo por meio dos diálogos, foi importante porque os alunos debatiam uns com os outros os resultados obtidos e se auxiliavam nas resoluções das atividades.

Quanto às provas, desde a terceira sessão passamos a discutir uma prova nos momentos finais de cada encontro, pois mesmo que os alunos não conseguissem inicialmente acompanhar, eram oportunidades que tínhamos de mostrar outras maneiras de se validar propriedades matemáticas. Como observou Boavida et al. (2008) a elaboração de conjecturas geralmente não ocorre de modo simultâneo à elaboração de provas e essa postura do professor pode servir como estímulo para que o aluno comece a compreender a natureza do trabalho em questão.

Nesse sentido, consideramos que os argumentos produzidos durante a formulação e validação de conjecturas – fundamentados principalmente no transferidor e experimentações –, a confusão entre formulação e validação, a produção de provas em sua maioria do nível pragmático, a escrita em linguagem (não) matemática, dentre outros elementos que apareceram, estão todos relacionados uns com os outros. Como os alunos não estavam acostumados a trabalhar com validações, diante de uma mudança no contrato didático desse tipo é esperado encontrar dificuldades, pois precisaram se adaptar a um meio diferente do habitual. Nas primeiras sessões, como os alunos poderiam apresentar provas do tipo *experimento mental* se não as conheciam? Como os alunos poderiam justificar suas respostas se não o fazem sempre?

Essas são questões que enfrentamos no decorrer de nossa caminhada. Acreditamos que outros, sejam pesquisadores ou professores, certamente também enfrentarão, por que faz parte do processo natural de adaptação a uma nova proposta. Mas, como evidenciamos em nossas análises, há sim superações, como por exemplo, as discussões de validação nas duplas, o reinvestimento de noções e a apresentação de provas, mesmo que as do nível pragmático ainda sejam predominantes. Acreditamos que um tempo maior de trabalho com os alunos poderia levá-los a atingir níveis mais elevados de prova, pois as ferramentas para isso aos poucos iam passando a fazer parte do repertório deles. É importante dizer que para outros temas, diferentes daquele com que trabalhamos um intenso trabalho também precisará ser desenvolvido pelo professor ou pelo pesquisador, pois para a produção de conjecturas, e principalmente para a produção de provas de propriedades, é preciso que haja a utilização de algumas noções anteriormente trabalhadas. Aos poucos os alunos passam a entrar nesse “novo jogo” e a procurar elementos de validação para suas conjecturas.

- *Outras coisas a se dizer...*

Quando pensamos em desenvolver este trabalho, sabíamos que, de alguma forma, a realidade da escola iria nos respingar, afinal estaríamos lá por mais de sete semanas, desde o momento em que apresentamos nossa proposta aos responsáveis, fomos conhecer o espaço, as turmas entre outros. Sendo assim, algumas coisas nos aconteceram as quais achamos pertinente relatar, dentre elas a organização do espaço no qual se deu a pesquisa. Havíamos pensado em manter a composição das duplas do início ao final da experimentação, mas isso não foi possível porque a participação dos alunos nas sessões oscilou consideravelmente. Agora vemos que este aspecto possibilitou que eles trabalhassem com parceiros diferentes, discutissem coisas diferentes e aprendessem coisas também diferentes.

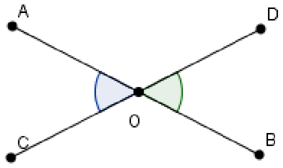
Como nosso trabalho foi desenvolvido em contraturno escolar e a participação foi voluntária, alguns compareceram em apenas uma ou duas sessões. Isso fez com que às vezes tivéssemos muitos alunos, como foi o caso da sessão 04 em que dez deles ali estavam pela primeira vez. Isso dificultou um pouco nosso trabalho, pois foi preciso dedicar um tempo para inseri-los quanto ao uso do transferidor, identificação de ângulos, entre outros conhecimentos já abordados. Num outro sentido isso fez com o que os alunos que já estavam participando dos encontros precisassem agir de modo mais independente, pois não estávamos sempre por perto para que pudessem fazer perguntas ou conferir resoluções, mesmo que não fornecêssemos respostas.

Pensando em nosso objetivo, elaboramos uma sequência didática com a intenção de favorecer a produção de conjecturas para que pudéssemos analisá-las. Olhando para as atividades e para o desenvolvimento das sessões, observamos que nem sempre a produção de conjecturas está relacionada à quantidade de questões, como pode ser observado nos encontros em que trabalhamos com uma pergunta. Nesse caso, foi preciso que estivéssemos atentos aos alunos e ao trabalho por eles desenvolvido, sempre propondo outras questões a fim de incentivá-los a pensar, trabalhar, colocar em cheque a conjectura que estava se evidenciando.

Também foram importantes as atividades ou sessões cujo objetivo foi o reinvestimento de noções já trabalhadas, pois nestes momentos os alunos colocavam em prática o “conhecimento teórico” que estava sendo estudado, podendo estabelecer diversas relações. Para nós, foram oportunidades de observar a (não) mobilização das noções que estavam em jogo em prol da realização da tarefa.

Antes da realização efetiva da experimentação, aplicamos as primeiras atividades da nossa sequência com alguns alunos de oitavo ano, mas estes já haviam trabalhado durante o ano algumas propriedades referentes a ângulos e polígonos. Apesar da diferença de contextos, este pré-teste foi importante para que pudéssemos refazer ou ajustar algumas atividades pensando na produção de conjecturas. A exemplo disso podemos citar o enunciado, pois alguns continham sub questões do tipo a, b, c, direcionando para a resposta que queríamos ou ainda, questões cuja resposta estava presente no enunciado. Nas colunas apresentadas adiante, observamos essas mudanças em que no primeiro caso, duas atividades são transformadas em apenas uma e no segundo,há uma reformulação na escrita da questão. Além do pré-teste, para estas mudanças consideramos a possibilidade de o aluno realizar atividades com vistas a um processo de investigação e descoberta, como pontuamos no referencial teórico que utilizamos. Sendo assim, é importante pensar no enunciado, tanto para favorecer o aparecimento de provas (OLIVEIRA, 2009) quanto para a produção de conjecturas, pois caso tivéssemos optado por perguntar “a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer será sempre 180°? Justifique.”, outras conjecturas poderiam ser produzidas, mas não a de que a de que ao se somarmos as medidas dos três ângulos internos de triângulos, obteremos 180°, pois ela já aparece no enunciado. Por outro lado, se o objetivo fosse especificamente à produção de provas, esta poderia ser uma boa pergunta a ser proposta para os alunos e daí a importância do objetivo a ser alcançado e das variáveis.

1. Com o auxílio do transferidor, identifique a medida pretendida, em seguida, faça o que se pede:

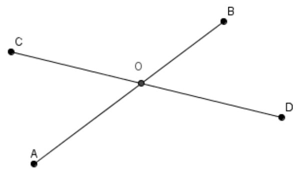


AÔC=
DÔB=

2. Trace dois segmentos de reta quaisquer (desde que não formem 90°), de modo que sejam concorrentes entre si e meça dois de seus ângulos Opostos Pelo Vértice – OPV.
a. Quais foram as medidas dos ângulos encontrados?
b. É possível identificar alguma regularidade com relação aos ângulos OPV? Se sim, descreva.

3. A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer será sempre 180°? Justifique.

1. Na figura, o que é possível afirmar sobre a medida dos ângulos?



Existe alguma relação entre as medidas dos ângulos CÔA e BÔD? Explique.

1. Qual é a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer? Justifique a resposta dada.

O referencial teórico adotado, em especial a Teoria das Situações Didáticas, orientou nosso trabalho tanto no que concerne à elaboração das atividades e a previsão de novos questionamentos e de nossas atitudes frente aos alunos nas análises *a priori*, quanto à implementação das mesmas. Com relação a este aspecto, por exemplo, não fornecíamos respostas, sempre questionávamos os alunos em relação às afirmações e procurávamos deixá-los trabalhar da maneira mais independente possível.

Embora saibamos que a prática pode ser muito distante do que pensamos *a priori*, o uso da Engenharia Didática nos permitiu pensar nas sessões e respectivas atividades, suas resoluções e possíveis estratégias a serem utilizadas pelos alunos. Isso fez com que nos sentíssemos mais seguros em relação ao nosso objetivo, como também, ao momento da aplicação do que planejamos. Nesse processo, consideramos que as variáveis macro e microdidáticas foram importantes tanto na previsão quanto na implementação do que propomos, como foi o caso dos momentos em que identificamos tentativas de encontrar respostas sem o uso do transferidor (sessão 1). Existem, porém, aquelas que escapam ao nosso controle, sobre as quais pouco podemos agir, como por exemplo, a frequência dos alunos nas sessões.

- *Perspectivas*

Depois de tudo, deixamos aqui questões que não foram possíveis de serem exploradas ou ainda, que nos surgiram ao longo do desenvolvimento do trabalho:

Como teria sido desenvolver um trabalho em que envolvesse, além de conjecturas verdadeiras, conjecturas falsas? Aqui, não se trata da elaboração, mas da exploração delas e a partir daí a necessidade de uma prova que ultrapasse verificações empíricas.

Há diferença quando se trata do reinvestimento de noções cujo nível de prova pertenceu ao nível pragmático e daquelas cujo nível é o intelectual? Esta inquietação advém das primeiras sessões, quando Lisa chegou a apresentar uma prova do tipo *experimento crucial*, mas posteriormente, mostrou-se em dúvida.

Outra questão que deixamos para uma reflexão futura é em que medida a manipulação de softwares teria contribuído para a produção de conjecturas? Neste caso considerando a ferramenta como um caminho para se chegar à produção de conjecturas e possivelmente, de provas.

E ainda, em que medida a produção de conjecturas e provas é abordada e discutida na formação de professores? Isso partindo da hipótese de que muitos deles não trabalham nessa perspectiva de descoberta, de realização de experimentações e manipulações, preferindo institucionalizar já no primeiro contato dos alunos com o conteúdo, talvez não conhecerem outros modos de trabalho diferente deste.

Por fim, como estão nossos alunos hoje? O que Lisa, Peter, Mary, Wendy, Miguel, João e James diriam sobre nós e sobre o tema com o qual trabalhamos?

Deixamos aqui nossa inquietação com relação a estes elementos e que por razões que ultrapassam nossa vontade não são contempladas neste trabalho, mas que podem ser futuramente investigadas.

Esperamos que nosso trabalho, assim como estas questões que apresentamos, seja como a "utopia" do início do texto ou ainda, como o autor mesmo escreve: como a linha do horizonte... Mesmo que perfeições ou respostas às inúmeras perguntas, nunca sejam possíveis de serem alcançadas, que nos inspirem e nos movam para que continuemos sempre a caminhar.

REFERÊNCIAS

AGUILAR JUNIOR, C. A. **Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e prova matemática apresentados por alunos do ensino fundamental.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Mestrado em Ensino de Matemática, Rio de Janeiro, 2012.

AGUILAR JÚNIOR, C. A.; NASSER, L. **Estudo sobre a Visão do Professor em Relação à Argumentação e Prova Matemática na Escola**. Bolema. Boletim de Educação Matemática (UNESP. Rio Claro. Impresso), v. 28, p. 1012-1031, 2014.

AMORIM, M. E; PIETROPAOLO, R. C. **Concepções de futuros professores de matemática a respeito do ensino e aprendizagem de provas no ensino fundamental ii.** Anais do XV EBRAPEM, Campina Grande-PB, 2011.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da matemática.** 2 ed. Curitiba, UFPR, 2007.

ALMOULOUD, S. A,; MELLO, E. G. S. **Iniciação à demonstração aprendendo conceitos geométricos.** Disponível em <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_23/iniciacao.pdf> 23a reunião anual da anped. 2000. Acesso em 20 de maio de 2015.

ANDRINI, A. VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática 6° ano.** 3 ed. renovada. São Paulo, editora do Brasil, 2012 a.

ANDRINI, A. VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática 6° ano.** 3 ed. renovada. São Paulo, editora do Brasil, 2012b.

ANDRINI, A. VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática 6° ano.** 3 ed. renovada. São Paulo, editora do Brasil, 2012c.

ARSAC, G. et al. **Initiation au raisonnementdéductif au collège**. Lion-França: PressesUniversitaires de Lion, 1992.

ARTIGUE, M**. IngénierieDidactique**. Recherches en didactiquedêsmathématiques. v. 9. n. 3. 1988.

ARTIGUE, M.Engenharia didática. In BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Instituto Jean Piaget, 1996.

BALACHEFF, N. **Processus de preuveet situations de validation. in educational studies in mathematics**, nº18, 1987, pp.147-176.

BALACHEFF, N. **Une étude des processus de preuve en Mathématiquechez les élèves de collège.**Tese de Doutorado. Grenoble: Université Joseph Fourier, 1988.

BALACHEFF, N.**¿Eslaargumentaciónun obstáculo? Invitación a un debate**. Disponível em <http://www.didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990506Theme/990506ThemeES.html> Acesso em 25 de maio de 2015. 2009

BARBOSA, J. L. M.**Geometria Euclidiana Plana.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1999. 161p.

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática, 5ª a 8ª Séries. Brasília, 1998.

BRASIL, **Parâmetros Curriculares Nacionais:** 1ª a 4ª séries. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL, **PCN+ ensino médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: Semtec, 2002.

BRASIL, MEC-SEB. **Guia de livros didáticos: PNLD 2014** – matemática. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

BOAVIDA, A.M. **A argumentação em matemática. Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração**. Tese de doutorado, Universidade do Minho. 2005

BOAVIDA, A. M. et.al. **A experiência matemática no Ensino Básico. Programa de formação contínua em Matemática para professores do 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico.** Lisboa: Ministério da Educação, 2008.

BROUSSEAU, G. **Fondements et méthodes de ladidactique dês mathématiques. recherchesendidactiquedesmathématiques**. v. 7. n. 2. 1986.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo das situações didáticas:** Conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática, 2008.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática. Da Teoria à Prática**. 17. ed. Campinas: Editora Papirus, 2009.

DINIZ, M.I. de S.; SMOLE, K. C. S. **O conceito de ângulo e o ensino da geometria**. 1 ed. São Paulo: CAEM/IME-USP, 2008.

EVES, H. **Tópicos da História da Matemática para uso em sala de aula**. São Paulo: Editora Atual, 1992.

FERREIRA, E. B.; SOARES, A. B.; LIMA, J. C. **As Demonstrações no Ensino da Geometria:** discussões sobre a formação de professores através do uso de novas tecnologias. Bolema, Rio Claro, v. 22, n. 34, p. 185–208, fev., 2009.

FREITAS, J. L. M. de. Teoria das Situações Didáticas. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. revisada. 2. reimpr. São Paulo: EDUC, 2012. p. 77-111.

FREITAS, J. L. M.**Uma sinopse de trabalhos sobre validação matemática na educação básica**. In: XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011, Recife - PE. XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife - PE: Editora da UFPE, 2011. v. 1. p. 1-13.

GAZIRE, E. S., **O não resgate das geometrias.** Tese de doutorado, Universidade Estadual de campinas - Faculdade de Educação, Doutorado em Educação Matemática, Campinas-SP, 2000.

GUERATO, E. T. **Exploração de lugares geométricos planos com o *software* geogebra.** Anais do XVIII EBRAPEM, Recife – PE, 2014.

HUETE, J. C.; BRAVO, J. A. F**. O ensino da matemática:** fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas. Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2006.

IMENES, M. I. **A Geometria no Primeiro Grau: experimental ou dedutiva?**. Revista de Ensino de Ciências, n.19, p. 55-60, out. 1987.

LIMA, M. L. da S. **Provas e demonstrações na aprendizagem da geometria no ensino médio utilizando o aplicativo GeoGebra.** Anais do XVII EBRAPEM, Vitória – ES, 2013.

MACHADO, S. A. Engenharia Didática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Educação Matemática:**uma (nova) introdução. 3. ed. revisada. 2. reimpr. São Paulo: EDUC, 2012. p. 233-247.

MAGALHÃES, M da G. **A argumentação matemática na resolução de tarefas com a utilização da calculadora gráfica: experiência numa turma do 11.º ano.**Tese de doutorado, Universidade do Minho. 2010.

MAGALHÃES, M. da G.; MARTINHO, M. H. **O desenvolvimento da argumentação matemática no estudo das funções racionais.** Quadrante, Vol. XXIII Nº 1, 2014

MELLO, E. G. S. **Uma sequência didática para a introdução do seu aprendizado no ensino da geometria.** Dissertação de Mestrado, Universidade Pontifícia Católica de São Paulo, Mestrado em Educação Matemática, São Paulo, 1999.

MIORIM, M. A. **Introdução à história da educação matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

OLIVEIRA, H., SEGURADO, M. I., PONTE, J. P. **Tarefas de investigação em matemática: Histórias da sala de aula**. In Atas ProfMat 96, APM Lisboa:1996.

OLIVEIRA, S. G. da S. **Um estudo de argumentações produzidas por alunos do 8º ano em atividades de construções geométricas envolvendo pontos notáveis de triângulo**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação Matemática, Campo Grande, 2009.

PAIS, L. C.; FREITAS, J. L. M. **Um Estudo dos Processos de Provas no Ensino e na Aprendizagem da Geometria no Ensino Fundamental**. Bolema (Rio Claro), Rio Claro - SP, v. 13, p. 62-70, 1999.

PAVANELLO, M. R. **O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências**. In: Revista Zetetiké, ano 1, nº 1, pp. 07-17. UNICAMP, Faculdade de Educação, 1993.

PAVANELLO, R. M**. Por que Ensinar/aprender Geometria?** In VII Encontro Paulista de Educação Matemática. 2004. Disponível em: Acesso em: 9 Set. 2011.

PICCELLI, P. H. **Processos de validação de conjecturas em geometria plana.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação Matemática, Campo Grande, 2010.

PIETROPAOLO, R.C. **(Re) significar a demonstração nos currículo da educação básica e da formação de professores de matemática**. Tese de doutorado, Doutorado em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005.

PONTE, J.P. **Investigações matemáticas em Portugal**. Investigar em educação, 2, 93-169, 2003.

PONTE, J. P. et al. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula:** Um Projecto Colaborativo. Publicado originalmente em inglês com o título Mathematical investigation sinthe classroom: A collaborative project, como capítulo do livro de V. Zack, J. Mousley, &C.Breen (Eds.). (1997). Developing practice: Teachers' inquiry and educational change (pp. 135-142), Geelong, Australia: Centre for Studies in Mathematics, Science and Environmental Education.

PONTE, J.P.; SANTOS, L. **Práticas lectivas nun contexto de reforma curricular.** Quadrante 7(1), 3-33.

PONTE, J.P; BROCARDO, J. OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula.** 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

ROCHA, A., PONTE, J. P.**Aprender Matemática investigando**. Zetetiké, 14(26), 29-54. 2006.

SALES, A. **O ensino de matemática no 1° grau:** um estudo sobre o significado do conhecimento geométrico para alunos da 8a série. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação, Campo Grande, 1996.

SALES, A. **Práticas argumentativas no estudo da geometria por acadêmicos de licenciatura em matemática**. Tese de doutorado, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Mestrado em Educação, Campo Grande, 2010.

SALES, A.; PAIS, L. C. **A argumentação nas atividades de geometria desenvolvidas por acadêmicos**. Revista da Faculdade de Educação (Universidade do Estado de Mato Grosso), v. 13, p. 117-132, 2010.

SANTOS, M.C. dos. **Provas e demonstrações matemáticas: usando o trabalho colaborativo como fio condutor para uma nova visão do resgate significativo destas ferramentas.** Anais do XVII EBRAPEM, Vitória – ES, 2013.

SEGADAS, C.; TEIXEIRA, M. T. **O Raciocínio Dedutivo no Ensino da Geometria.** Bolema (Rio Claro), Rio Claro, SP, v. 6, p. 29-33, 1990.

SILVA, M. B. da. **O uso de um software de geometria dinâmica como elemento facilitador no aprendizado de provas e demonstrações das identidades trigonométricas.** Anais do XVIII EBRAPEM, Recife – PE, 2014.

SHEREVES, J. W. Ângulo.In:KENNEDY, E. S. **História da trigonometria**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo. Atual, 1992.

VIANNA, C.R.; CURY, H.N. **Ângulos: uma "História" escolar**. História & Educação Matemática – v.1-n.1, Rio Claro-SP: SBHMat, 2001.

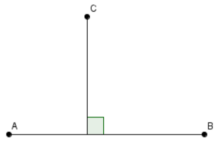
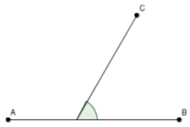
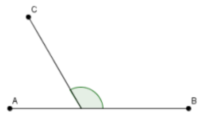
BARRETO, M. Co**nstrução da mediatriz de um segmento**: um exemplo de aprendizagem significativa. Universidade Federal do Rio Grande do Sul Instituto de Matemática. Programa de pós-graduação em ensino de Matemática. Tópicos de Educação Matemática, 2005.

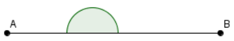
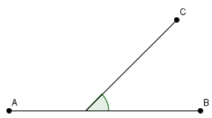
SOUZA, M. E. C. de O. **A questão da argumentação e prova na matemática escolar:** o caso da medida da soma dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer. Dissertação de Mestrado, Universidade Pontifícia Católica de São Paulo, Mestrado em Educação Matemática, São Paulo, 2009.

ANEXO 1 – SEQUÊNCIA DE ATIVIDADES

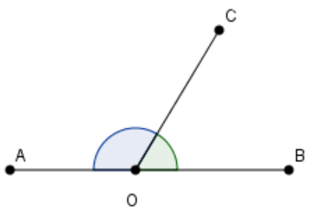
<u>Sessão 01</u>

1. Utilizando o transferidor, identifique a medida de cada ângulo indicado nas figuras abaixo:

1. 
2. 
3. 

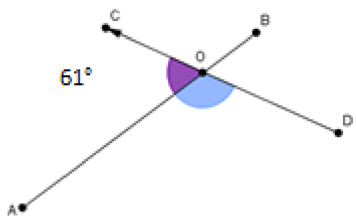
4. 
5. 

2. Observe a ilustração a seguir:

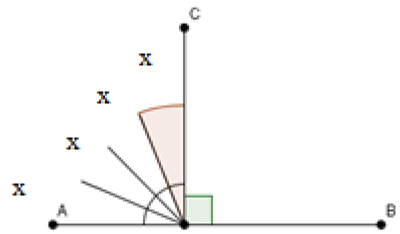


Há relações entre as medidas dos ângulos AÔB, AÔC e CÔB? Explique.

3. Tomando por base a informação dada pela figura, seria possível descobrir a medida do ângulo AÔD? Justifique a resposta.

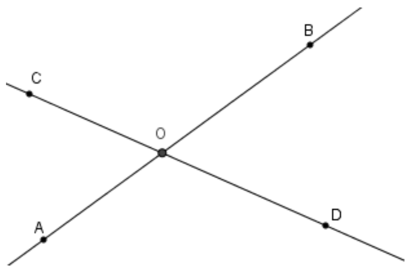


4. É possível descobrir a medida de cada ângulo x indicado? De que forma?



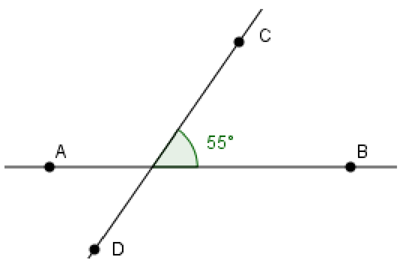
Sessão 02

1. Na figura, o que é possível afirmar sobre a medida dos ângulos?

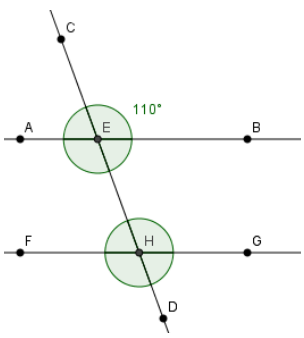


Existe alguma relação entre as medidas dos ângulos CÔA e BÔD? Explique.

2. Quais as medidas dos ângulos da figura? Explique como você encontrou cada uma delas.



3. Considerando agora as retas paralelas a e d, interceptadas pela reta transversal b. Identifique a medida de todos os ângulos e explique como você as encontrou.

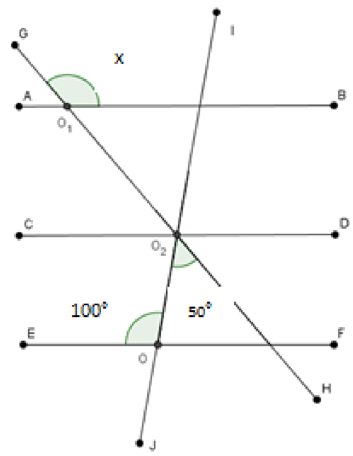


Sessão 03

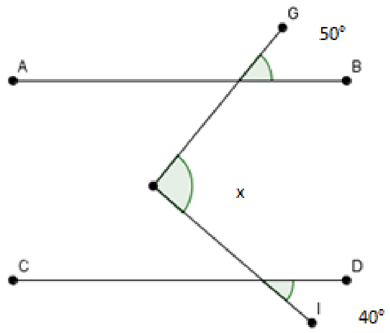
1. Ângulos opostos pelo vértice possuem sempre a mesma medida? Por quê?

Sessão 04

1. Na figura, temos que os segmentos de reta $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ e $\overline{EF}$ são paralelos e interceptados por outros dois segmentos transversais, $\overline{GH}$ e $\overline{IJ}$. Identifique a medida do ângulo x e justifique a resposta dada.

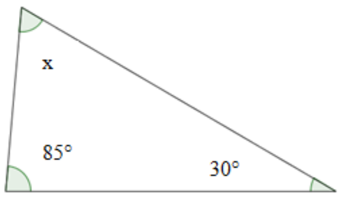


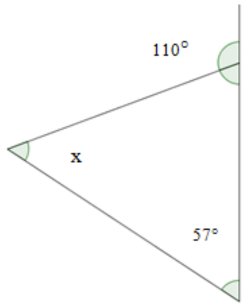
2. Sendo os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ paralelos, encontre a medida de x e apresente uma justificativa para a sua resposta.

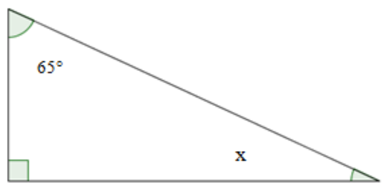


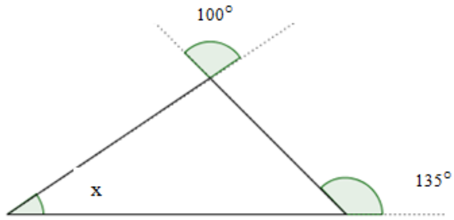
Sessão 05

1. Encontre as medidas desconhecidas em cada um dos triângulos abaixo:

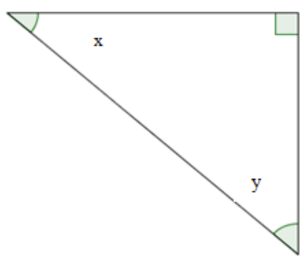




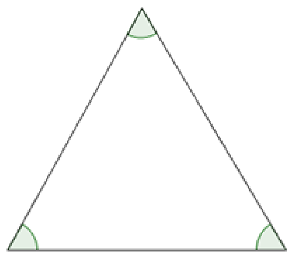




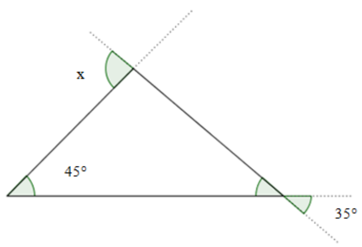
2. Qual o valor de x + y?



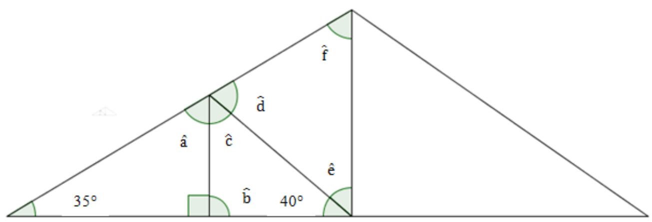
3. Sabendo que todos os lados do triângulo possuem mesma medida, qual o valor de cada ângulo do triângulo?



4. Encontre as medidas desconhecidas em cada um dos triângulos abaixo:



a



b

5. Qual o valor da soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero qualquer? Explique como obteve a sua reposta?

Sessão 07

1. Qual será a soma dos ângulos externos de um polígono qualquer? Como você justificaria a sua resposta?