UNIVERSIDADE FEDERAL DO MATO GROSSO DO SUL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Kleber Ramos Gonçalves

A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO COMO FERRAMENTA PARA O ESTUDO DE TRANSPOSIÇÕES DIDÁTICAS: O CASO DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Campo Grande - MS
2016

Kleber Ramos Gonçalves

A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO COMO FERRAMENTA PARA O ESTUDO DE TRANSPOSIÇÕES DIDÁTICAS: O CASO DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à banca examinadora, como exigência final para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS, sob orientação da professora Drª. Marilena Bittar.

Campo Grande - MS
2016

Kleber Ramos Gonçalves

A TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO COMO FERRAMENTA PARA O ESTUDO DE TRANSPOSIÇÕES DIDÁTICAS: O CASO DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS NO 7º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Dissertação apresentada à banca examinadora, como exigência final para obtenção do título de Mestre em Educação Matemática, pela Universidade Federal do Mato Grosso do Sul – UFMS, sob orientação da professora Drª. Marilena Bittar.

Campo Grande, MS, 09 de Junho de 2016.

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Drª. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS

____
Prof. Dr. Luiz Marcio Santos Farias
Universidade Federal da Bahia – UFBA

____
Prof. Dr. João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul - UFMS

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo rico dom da vida e de lutar por ela, pela promessa cumprida em minha vida e pela força, que só vinda do céu, poderia me impulsionar a vencer os desafios que enfrentei.

Aos meus pais, por sempre terem me incentivado em tudo, principalmente nos estudos, pela formação do meu caráter e pelos exemplos de homem e mulher de bem.

À minha mãe, que me auxiliou nas primeiras tarefas escolares, me ensinando com muita paciência, não apenas as lições da escola, mas também nas lições que estão gravadas em meu coração.

Ao meu pai, pelas conversas e conselhos que serviram e servirão de parâmetro em minha vida. Pelo exemplo de pai, de irmão e de avô, pela hombridade, honestidade e pelo caráter imaculado.

À minha esposa, pela compreensão dos momentos de ausência, pelo companheirismo rotineiro, pelas palavras que me firmaram sem deixar o desânimo ser maior que o sonho de findar mais essa etapa de estudo. Pelos olhares e gestos que, mesmo sem nenhuma palavra, valeram como força e ânimo nas horas de angústia. Exemplo de mulher, de esposa, de filha e de mãe. Deus não poderia ter colocado outra mulher em minha vida. Sou grato por ter me escolhido e ter tornado minha vida mais iluminada e abençoada.

Ao meu filhinho, que, apesar da pouca idade, mostrou-se compreensivo e detentor de atos de carinho e afeto que me fizeram superar as dificuldades. Pelos rabiscos nas folhas dos cadernos, pelas algazarras que, em meio aos estudos, aconteciam depois de um sorriso que me pedia um minutinho de atenção para que a brincadeira acontecesse.

Ao meu sogro Severo, como gostava de ser chamado, que, com pesar, não está mais entre nós, e, infelizmente, não pôde participar dos últimos atos desse processo. Assim como um pai, conselheiro e incentivador dos esforços dedicados ao estudo foi um dos responsáveis pela realização de sonho. Vai, Severo!

À minha sogra, pelas palavras doces que me fizeram seguir em frente, e, muitas vezes, foi ela quem me confortou nos momentos de angústia.

Ao Luiz Carlos Tramujas de Azevedo e à Inez Nazira Abrão, companheiros, por terem contribuído no projeto apresentado na seleção do mestrado.

À equipe de Avaliação da SEMED, que, além do apoio emocional e incentivo, sempre me auxiliaram nos momentos difíceis, com palavras e gestos que nunca havia encontrado em outro ambiente de trabalho. Pessoas especiais que fazem parte da promessa de Deus em minha vida.

Aos colegas e aos professores do Programa, que, cada um à sua forma, deixaram suas contribuições para que esse sonho se tornasse realidade.

À banca, aos professores Pitombeira e Luiz, que prontamente me aceitaram e puderam, de maneira especial, me auxiliar nesse processo. Contribuições e correções com tanta educação e humildade, que, mesmo com o peso de suas carreiras brilhantes, me deixaram à vontade, dando a entender que estávamos em meio a conversas informais, embora estivesse eu entre mestres com sabedoria que eu não pudesse expressar de igual modo.

À minha ilustríssima orientadora, profª Marilena, pois, que eu não esperava que me aceitasse como orientando – embora isso nunca fosse segredo. Agradeço pelas orientações, conselhos e por muitas vezes ter assumido o papel de uma mãe, pois foram tantas as reclamações e queixas, ouvidas e devidamente aconselhadas, e transformadas em palavras de incentivo.

A Deus, pois Ele é o princípio e o fim de tudo, em Suas mãos está a nossa vida e, o caminho que devemos peregrinar nessa Terra.

RESUMO

Esta pesquisa teve como objetivo compreender distanciamentos e aproximações entre a construção dos números inteiros e propostas de ensino das operações de adição e subtração desse conjunto em um livro didático do 7º ano do ensino fundamental. Estudamos a construção dos inteiros articulada com aspectos epistemológicos e históricos e utilizamos o conceito de Transposição Didática (CHEVALLARD, 1991) para analisarmos as adaptações usadas pelos autores nesse livro. A Teoria Antropológica do Didático (TAD), nosso referencial teórico e metodológico, permitiu mapear as propostas de ensino do conteúdo investigado, por meio da análise das Organizações Matemáticas e Didáticas (CHEVALLARD, 1999) do referido livro. As Organizações Matemáticas deram-se pela descrição dos tipos de tarefas e das técnicas que permitem resolvê-las, bem como pela busca em detalhar as justificativas dessas técnicas. As Organizações Didáticas foram descritas por meio dos momentos didáticos, que permitem analisar, em cada um deles, as escolhas metodológicas dos autores. As análises realizadas revelaram um roteiro de estudo iniciado com ensino por meio da apresentação de exemplos cotidianos dos conceitos, precedidos da exploração de algumas atividades representativas das tarefas que são propostas e de suas respectivas técnicas de resolução. Esse roteiro é finalizado com listas de atividades que visam aprimorar as técnicas ensinadas. Para alguns conceitos, principalmente das operações, identificamos elementos que embasam a utilização e justificam as formas de resolver as atividades propostas. Identificamos ainda, que alguns procedimentos de ensino são utilizados como substitutos de conceitos que não estão no mesmo nível cognitivo de ensino do sétimo ano do ensino fundamental.

Palavras-chave: Números Inteiros. Teoria Antropológica do Didático. Livros Didáticos. Transposição Didática.

ABSTRACT

This research had as a goal to understand distances and approximation between the construction of integers and teaching proposals of the addition and subtraction operations of this set on a textbook from the 7th grade of elementary school. We studied the construction of the articulated integers with epistemological and historical aspects and we used the concept of Didactic Transposition (CHEVALLARD, 1991) to analyze the used adaptations by the authors in this book. The Anthropological Theory of Didactic, our theoretical and methodological reference allowed mapping the teaching proposals of the investigated content, by means of the analysis of Mathematics and Teaching Organizations (CHEVALLARD, 1999) of that book. Mathematical Organizations occurred by the description of the types of tasks and techniques that allow us to solve them, as well as the search in detail the reasons of these techniques. The Didactic Organizations were described by the teaching moments that allow us to analyze, in each of them, the methodological choices of the authors. The analysis performed revealed a study guide started with teaching by presenting examples of everyday concepts, preceded from the exploitation of some representative activities of the tasks that are proposed and their respective techniques of resolution. This guide is completed with lists of activities that seek to improve the taught techniques. For some concepts, particularly of operations, we identified elements that support the use and justified the ways of solving the proposed activities. We’ve identified yet, that some teaching procedures are used as substitutes for concepts which aren’t in the same cognitive level of education for the 7th year of elementary school.

Keywords: Integers. Anthropological Theory of Didactic. Didatic books. Didactic Transposition.

Lista de Figuras

Lista de Quadros

Lista de Tabelas

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

No final de 2003, um ano após ter concluído o ensino médio, inscrevi-me para o vestibular concorrendo a uma vaga no curso de licenciatura em Matemática. Com muitas dificuldades em alguns procedimentos para resolução de problemas, principalmente em Física, iniciei meus estudos com o sonho de me formar professor de Matemática. As experiências foram muitas, mas destaco uma que me encaminhou para o Mestrado em Educação Matemática. Ao final da graduação, mais especificamente na disciplina de Prática de Ensino de Matemática, foram-me apresentadas algumas teorias de origem francesa do campo da Didática da Matemática, que tratam dos processos de ensino e de aprendizagem de conteúdos matemáticos. Esses processos promovem e propiciam reflexões acerca das práticas em sala de aula e sobre as ações dos professores frente às dificuldades dos alunos. Essas teorias não *oferecem receitas* prontas e nem afirmam o que seria *correto*, mas orientam a observar elementos acerca dos processos de ensino e de aprendizagem e, a partir disso, possibilitam aos professores formas de auxiliarem seus alunos a aprenderem e a encontrarem sentido nos conteúdos propostos. Dessa forma, meus primeiros passos nessa carreira foram contagiados por essas ideias, pois as reflexões acerca das formas de ensino e de aprendizagem, me encaminharam a pôr em prática essas metodologias, que em muitos aspectos eram diferentes daquelas que convivi durante minha vida acadêmica.

Essas metodologias trazidas pelo campo da Didática da Matemática foram reforçadas no início da minha docência, quando, em reuniões pedagógicas ou nas formações continuadas, ouvia dos coordenadores, e também de outros professores, explanações acerca de aulas que poderiam ser pautadas em tendências metodológicas do campo da educação matemática, que visam estratégias diferenciadas para as propostas de ensino. “Não se trata de tornar a aprendizagem mais fácil, a aprendizagem deve ser favorecida com situações que a tornem mais significativa” (BITTAR, 2010, p.220), com a utilização de jogos, softwares e materiais diversos, em atividades em que os alunos participem efetivamente dos processos de aprendizagem em relação aos saberes que estão em jogo. Entretanto, como diz o ditado popular, “a teoria na prática é outra”, pois, quando tentei inserir algumas dessas estratégias em minhas aulas, percebi que os resultados não foram satisfatórios: os alunos continuavam com muitas dificuldades e com nível de aprendizagem abaixo das “minhas” expectativas. Então, o que fazer? Identifiquei que uma *possível solução* seria investigar variadas propostas de ensino e como se dão seus processos de avaliação. Mas como encaminhar essa pesquisa? Era evidente a necessidade de auxílio para percorrer esse caminho.

Os processos de ensino seriam o foco dos estudos, pois havia uma espécie de ruptura entre as abordagens que estudei e o que realmente eu estava executando em sala de aula. Por várias vezes, identifiquei alguns problemas, mas não conseguia contornar as dificuldades de aprendizagem dos alunos. Surgiu, assim, a necessidade de investigar as escolhas e os processos que permeiam o contexto dos planejamentos, da execução desses planejamentos e, principalmente, da avaliação dos resultados alcançados e das metodologias utilizadas para sanar as dificuldades diagnosticadas.

Na busca de possibilidades para realizar essa tarefa, me inscrevi para o processo de seleção do curso de Mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da UFMS, procurando por respostas às tantas inquietações provocadas pela relação ensino e aprendizagem e pelos resultados – que, por vezes, não eram razoáveis – observados nas produções dos meus alunos e pela condução da minha prática.

Ao ser aprovado e inserido no Grupo de Estudos em Didática da Matemática (DDMat), pude novamente conduzir meus estudos acerca das teorias da didática da Matemática. O DDMat é liderado pela professora Drª. Marilena Bittar e dele participam professores e pesquisadores do Instituto de Matemática (INMA), mestrandos e doutorandos do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e professores de outras instituições de ensino de Mato Grosso do Sul[1].

Para o ingresso no Mestrado, apresentei, como intenção de pesquisa, a constituição de um grupo de alunos-monitores do ensino fundamental com intuito de investigar como esse grupo poderia contribuir para a aprendizagem dos alunos de toda a classe. Tal intenção devia-se às experiências que eu já desenvolvia com meus alunos. Entretanto, ao começar a frequentar as aulas e o DDMat, fui, aos poucos, mudando meu projeto. Entre as pesquisas já desenvolvidas e em desenvolvimento pelos participantes do DDMat, têm sido bastante presentes aquelas voltadas para a análise de livros didáticos, orientadas pela professora Marilena Bittar, e sob o viés teórico e metodológico da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1999). As discussões e leituras

[1]O Grupo DDMat - Grupo de Estudos em Didática da Matemática, criado no ano de 2013, surge a partir do encontro proposto pela professora Doutora Marilena Bittar e pelo professor Doutor José Luiz Magalhães de Freitas, que tem como foco o estudo de teorias como: Teoria das Situações Didáticas, Teoria Antropológica do Didático, Teoria dos Campos Conceituais, Teoria de Registros de Representação Semiótica e Engenharia Didática. Texto extraído do site do Grupo DDMat: Disponível em: < http://ddmat.webnode.com/historico/>. Acesso em 26 de Maio de 2015.

desses trabalhos nos encaminharam[2], também, a querer desenvolver uma investigação acerca da proposta de ensino em livros didáticos do ensino fundamental, conforme discutiremos a seguir.

A construção do nosso objeto de pesquisa foi fruto de muitas discussões que permearam anseios iniciais, do que se pesquisava no DDMat e da viabilidade e pertinência do que se pretendia pesquisar. Além dessas discussões, algumas leituras foram fundamentais para determinar os novos rumos da pesquisa. Vários foram os fatores que nos conduziram a delimitar nosso objeto e, assim, podemos considerar que essa nova configuração foi uma construção coletiva do nosso grupo.

Nossa pesquisa se insere em um contexto de investigação que se preocupa com as escolhas didáticas e matemáticas feitas por autores de livros didáticos destinados ao ensino fundamental e por professores que atuam nesse nível de escolaridade, tendo em vista o livro didático adotado e as influências que os livros didáticos exercem sobre a prática pedagógica desses professores.

Para a estruturação dessa investigação, fez-se necessário escolher um conceito matemático e delimitar o ano de escolaridade. Entre aqueles que fazem parte do trabalho em sala de aula, destacamos os números inteiros, devido às confusões com as regras de sinais e às dificuldades em operar esses números, que percebemos que os alunos têm ao serem apresentados a esse conjunto numérico. Assim, definimos, inicialmente, a seguinte questão de pesquisa que, como veremos a seguir, sofreu algumas alterações devido aos dados produzidos: *O que trazem os livros didáticos do 7º ano do ensino fundamental acerca das operações de adição e subtração, no Conjunto dos Números Inteiros?*

Essa questão surge com o intuito de entender o que ocorre com as orientações dos documentos oficiais articuladas às propostas de ensino dos inteiros. Busca-se, portanto, compreender o *que* é ensinado e *como* essas propostas e abordagens são apresentadas em livros didáticos destinados ao 7º ano. Escolhemos analisar livros didáticos, porque nesses materiais conseguimos observar estas duas perspectivas de análise: a Matemática proposta e as abordagens didáticas. Além disso, há que se considerar a influência desse recurso didático na prática do professor, principalmente no momento do planejamento das atividades de ensino (OLIVEIRA, 2010).

Frison (2009) vale-se das ideias de Lopes (2007) para destacar as influências que o livro didático pode exercer sobre os professores que, em alguns casos, são bem maiores

---

[2]A partir desse momento, ao utilizamos a primeira pessoa do plural estaremos tratando do trabalho desenvolvido em parceria com a orientadora dessa pesquisa.

do que se poderia imaginar, pois, eles são utilizados como o principal orientador das práticas, conduzindo de forma direta os planos de aula e as metodologias utilizadas.

> Embora [...] professores salientem a importância atribuída ao livro didático como um auxiliador nas aulas [...], percebe-se que alguns professores o utilizam como um roteiro a ser seguido rigorosamente, “se tornando um padrão curricular desejável, mesmo quando se considera a possibilidade de que seja modificado de alguma forma” (LOPES, 2007, p. 212). [...] O livro didático é utilizado pela maioria dos professores como instrumento principal que orienta os conteúdos que devem ser desenvolvidos, a sequência desses conteúdos, as atividades de aprendizagem e a avaliação para o ensino. (FRISON, et al., 2009, p. 11).

A escolha da teoria antropológica do didático como referencial teórico principal para a investigação foi determinada pelo fato de que essa teoria permite descrever e analisar tanto os saberes matemáticos propostos, como as escolhas didáticas para a realização desse estudo em uma determinada instituição. Utilizamos essa teoria também como aporte metodológico para a análise da proposta de ensino dos autores do livro didático, pois, ela nos proporciona um caminhar metodológico que possibilita desenhar como os saberes e as atividades Matemáticas estão dispostas e articuladas, ou não, no livro didático. Além disso, a teoria antropológica do didático fornece alguns elementos teóricos que favorecem, ao pesquisador, a organização dos dados analisados, sejam eles relativos a definições, algoritmos, atividades propostas e exemplos entre outros, ou ainda relativos à abordagem dos conteúdos, favorecendo a compreensão de características de uma possível transposição didática.

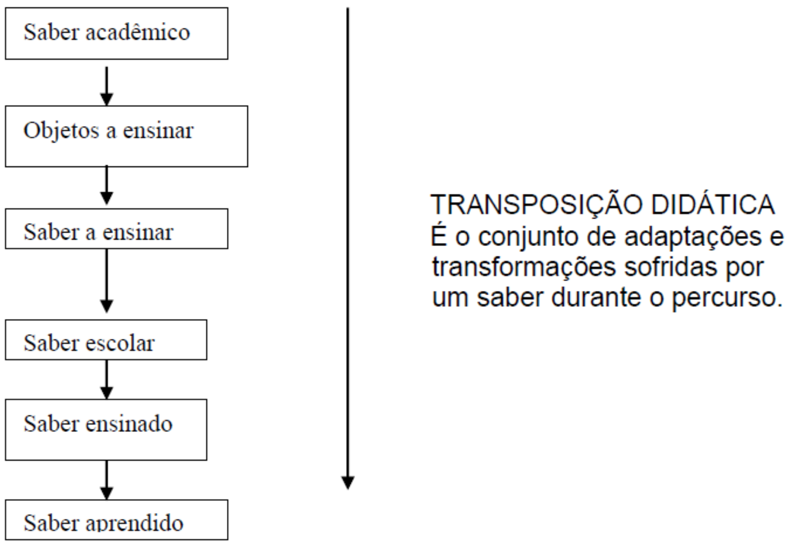
Nossas análises contemplam, além de outros documentos, o volume do 7º ano da coleção mais adotada no Programa Nacional do Livro Didático de 2014 (PNLD/2014), uma vez que é nesse volume que nosso objeto matemático de estudo está presente. Nossa atenção é dirigida especialmente, ao capítulo que trata das operações de adição e subtração dos números inteiros e, buscamos discutir *o que* são esses números e *como* são apresentados. Além das operações de adição e subtração, também são analisados os conceitos de oposto, reta numérica e módulo.

Com as primeiras análises, que envolveram o volume do 7º ano, algumas pesquisas com foco em investigar livro didático, leituras de algumas obras que contemplam a construção dos números inteiros e aspectos epistemológicos e históricos desse conjunto, conseguimos estruturar um conjunto de dados que nos levaram a novos caminhos, além daqueles que buscavam caracterizar o ensino dos números inteiros. Foi possível identificar diferenças entre as propostas de ensino destes conceitos no ensino fundamental e sua construção teórica: alguns resultados (propriedades, teoremas, demonstrações, entre outros) que estão na construção dos inteiros e não estão na educação básica e, inversamente, procedimentos presentes na educação básica e que não aparecem na construção dos inteiros. Tais diferenças decorrem do processo de transposição didática (CHEVALLARD, 1991) necessário para que um determinado objeto possa ser ensinado.

> Um conteúdo do conhecimento designado, tendo sido designado como saber a ensinar, sofre transformações adaptativas que vão torná-lo apto a tomar seu lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que, de um objeto de saber a ensinar faz um objeto de ensino, é chamado de transposição didática (CHEVALLARD, 1991, p. 39).

Os saberes presentes nos livros podem ser classificados como *saber escolar*, que foram pensados e articulados a partir do *saber a ensinar*, que por sua vez, é o saber organizado pelo sistema educativo que se responsabilizou em organizá-lo em blocos de conhecimentos que devem ser ensinados aos alunos. Percebe-se, assim, que os saberes construídos e divulgados pelos matemáticos no decorrer da história (*saber acadêmico*) são organizados em *objetos a ensinar*, isto é, de tudo que foi produzido, elenca-se o que é importante para a formação dos alunos, sendo essa a primeira transposição.

Dessa forma, termos da transposição didática, tais como *objetos a ensinar*, *saber acadêmico*, *saber a ensinar*, *saber escolar*, entre outros, segundo Chevallard (1991), fazem parte do processo da transposição didática e funcionam aparentemente ao modelo a seguir:



"O estudo da trajetória percorrida pelo saber escolar permite visualizar as influências recebidas do saber científico, bem como de outras fontes" (PAIS, 2012, p. 16). Chevallard denominou de *noosfera* o conjunto das fontes de influência dos processos seletivos dos conteúdos, que compõem os programas de ensino e definem os processos de ensino.

Para Chevallard (1991), essa trajetória se inicia pelo *saber acadêmico.* Esse *saber* está vinculado aos estudos e às produções dos matemáticos, que, ao publicarem seus artigos, apresentam um caráter despersonalizado, descontextualizado e destemporalizado. Pode-se dizer que os percursos, as dificuldades e alguns procedimentos são limpos, sendo apresentados em estrutura própria do meio acadêmico por meio de textos técnicos. Esses textos dão origem aos *objetos a ensinar,* pois, a partir dos artigos produzidos, o sistema social de ensino ou a noosfera selecionam os que deverão ser ensinados. Assim, eles são considerados importantes na formação dos estudantes. Essa passagem do *saber acadêmico* aos *objetos a ensinar* é considerada o primeiro ato da transposição didática.

O *saber a ensinar* é aquele que o sistema educativo traduziu, em um conjunto de conhecimentos, que os estudantes deverão aprender. Formam-se as disciplinas e estruturam-se os anos escolares, que irão integrar às propostas curriculares. A passagem dos *objetos a ensinar* ao *saber a ensinar* é considerada o segundo ato da transposição.

A terceira etapa da transposição é a passagem do *saber a ensinar* ao *saber escolar,* que é caracterizada pela instituição de uma cultura particular nos sujeitos de uma mesma época. De modo geral, assim como o *saber a ensinar*, o *saber escolar* está presente nos livros didáticos, programas e outros materiais de apoio. Dessa forma, as adaptações e as transformações realizadas pelos professores são consideradas o quarto ato da transposição didática e estão no nível do *saber a ensinar* e do *saber ensinado*. A evolução dos saberes e da aprendizagem dependerá das formas que o professor propõe às suas turmas, logo, o *saber ensinado* progredirá conforme sua programação na instituição a que pertence.

O *saber aprendido* é aquele que está ao alcance dos alunos e “é aquele registrado no plano de aula do professor e que, não necessariamente, coincide com aquela intenção prevista nos objetos programados no nível do *saber a ensinar”* (PAIS, 2012, p.24). Nesse contexto, surge o conceito de *tempo didático*, que não é o mesmo que o *tempo de aprendizagem*, ou seja, o tempo programado para o ensino e aprendizagem de determinado conteúdo não coincide com o tempo real que os alunos irão aprender tal conteúdo.

O *tempo didático* é aquele “marcado nos programas escolares e nos livros didáticos em cumprimento a uma exigência legal. [...] Isso implica o pressuposto de que seja possível, de alguma forma, ‘enquadrar’ o saber num determinado espaço de tempo” (PAIS, 2012, p.33, grifo do autor). E o *tempo de aprendizagem* está vinculado aos conflitos de conhecimentos e interrupções dos processos de aprendizagem, exigindo reorganizações das informações que dão o tom da aprendizagem de determinado conteúdo. Portanto, um dos desafios dos professores é superar as distâncias entre esses dois tempos, propiciando aos alunos oportunidades de aprendizagem com constantes movimentos de aproximações dos saberes (PAIS, 2012).

A noção de transposição didática está vinculada ao processo evolutivo das fontes que influenciam e condicionam as transformações do saber escolar e das práticas educativas associadas (PAIS, 2012). Em determinadas situações, observamos alguns saberes sendo transportados de uma instituição para outra, por exemplo, os saberes presentes nos livros didáticos, apresentados para os alunos em sala de aula e, que por meio das intervenções dos professores, são adaptados e estruturados para atender aos objetivos traçados para a turma. As transformações ocorridas em um determinado *saber* podem ser de cunho mais geral, quando pensamos nas transposições que permitiram a síntese de um determinado saber e de cunho mais pessoal, quando o "conhecimento [é restrito] ao plano da elaboração subjetiva da pessoa que estuda Matemática" (PAIS, 2012, p. 12).

Cabe aqui uma diferenciação entre *saber* e *conhecimento.* O *saber* está vinculado a contextos científicos, em que na maioria das ocasiões é descontextualizado e despersonalizado. O *conhecimento* está vinculado a contextos mais individuais e subjetivos, ou seja, quando o sujeito tem uma experiência mais direta com o conceito em questão (PAIS, 2012).

Em sala de aula, em determinadas ocasiões, percebe-se uma seleção de exercícios, de materiais e procedimentos de resolução, que auxiliam na aprendizagem. A transposição didática visa estudar esses processos seletivos, que estão inclusos em uma rede de influências ligadas às várias esferas do sistema educacional.

Tendo em vista essas reflexões, redefinimos nossa questão de pesquisa como segue:

Como algumas justificativas da construção dos números inteiros são discutidas em um livro didático do 7º ano do ensino fundamental acerca das operações de adição e de subtração?

Para responder esta questão, definimos os seguintes objetivos:

a) Geral: Compreender distanciamentos e aproximações entre a Matemática presente na construção do conjunto dos números inteiros e a Matemática proposta para o ensino das operações de adição e subtração dos números inteiros em um livro didático do 7º ano do ensino fundamental.
b) Específicos:

- Identificar conceitos, procedimentos e algoritmos usados no estudo de números inteiros presentes na construção axiomática desses números;
- Identificar e analisar conceitos, procedimentos, e algoritmos usados no estudo de números inteiros presentes em um livro didático do 7º ano do ensino fundamental;
- Identificar e analisar as abordagens utilizadas pelos autores do livro didático relativas ao ensino de números inteiros.

Nossa análise também contemplou o Guia do PNLD/2014, pois, nele encontramos as resenhas dos livros aprovados, que trazem algumas das principais características de cada obra, tais como, *visão geral*, com uma síntese analítica de cada coleção; *metodologia de ensino,* com a abordagem didática praticada pelos autores; *contextualização,* que visa descrever como a coleção relaciona os conhecimentos matemáticos com as práticas cotidianas e sociais e com outras áreas do conhecimento; *distribuição dos conteúdos*, que descreve como são trabalhados cada um dos eixos de conteúdo da Matemática, bem como a importância dada a cada um deles e, finalmente, o *Manual do Professor*, que deve conter elementos de auxílio ao trabalho docente com a coleção.

Sendo assim, nossa dissertação apresenta seis capítulos, divididos em partes, a seguir descritas:

- Parte A: Introdução – com as motivações iniciais que nos impulsionaram à seleção do mestrado em Educação Matemática; seguimos com a construção do nosso objeto de pesquisa, em que apresentamos algumas das idas e vindas dos nossos objetivos de pesquisa; finalizamos com os conceitos de Transposição Didática (CHEVALLARD,1991), que nos auxiliaram em um dos principais focos de nossa pesquisa, ou seja, nos estudos das diferenças de alguns resultados que estão na construção dos inteiros e não estão na educação básica, bem como no estabelecimento, ou não, de paralelos entre essas instituições: Matemática formal e livro didático.
- Parte B: Nosso Objeto Matemático: Números Inteiros – iniciada pelo capítulo 1, com a apresentação de algumas reflexões sobre os números inteiros relativas ao ponto de vista da Matemática formal, buscando compreender a construção axiomática desse objeto matemático. Finalizamos essa parte com o capítulo 2, onde apresentamos várias reflexões que nos auxiliaram na compreensão da construção dos inteiros, tanto referente ao panorama histórico quanto a alguns elementos epistemológicos.

- Parte C: Objeto Matemático no Livro Didático – capítulo 3, essa parte trata dos estudos da teoria antropológica do didático, nosso referencial teórico e metodológico. Trazemos também, algumas leituras e considerações sobre outras dissertações que utilizaram tal teoria; finalizamos com o capítulo 4, apresentando os procedimentos utilizados para a produção e análise dos dados do livro escolhido para estudo.
- Parte D: Essa parte trata das nossas considerações referentes ao livro analisado, bem como sobre alguns aspectos gerais da nossa pesquisa. Buscamos no capítulo 5, evidenciar dados da nossa investigação que nos permitiram responder, ou trazer elementos de resposta, à nossa questão de pesquisa. Tal trabalho nos possibilitou estabelecer aproximações e afastamentos entre o que realizado com o conjunto dos números inteiros nas duas instituições. E, no capítulo 6, prosseguimos com algumas considerações finais sobre os resultados da nossa pesquisa.

Estes estudos nos permitem compreender como se dá o ensino dos inteiros tanto na educação básica como no ensino superior.

NOSSO OBJETO MATEMÁTICO – NÚMEROS INTEIROS

1 UM ESTUDO SOBRE A CONSTRUÇÃO DOS NÚMEROS INTEIROS

Um dos objetivos desse estudo é compreender como a construção dos números inteiros é trabalhada em ambos os níveis de escolaridade – ensino superior e ensino médio –, observando como os conceitos de anel, domínio de integridade e as propriedades dessas estruturas algébricas são adaptados, ou não, por autores de um livro didático para o ensino fundamental.

Para identificar qual Matemática está sendo estudada em um volume de uma coleção aprovada pelo PNLD/2014, fizeram-se necessários aprofundamentos sobre a teoria que fundamenta nosso objeto matemático. Levantamos algumas obras bibliográficas sobre a teoria dos números que contemplassem com maior ênfase o conjunto dos inteiros, pois, as análises preliminares do livro didático não revelaram elementos acerca de algumas justificativas relativas aos conceitos ensinados. Pretendemos entender e trazer nesse capítulo quais são esses elementos, com o intuito de fornecer ao leitor dessa pesquisa, análises mais aprofundadas deste tema. Nosso intuito, no entanto, não é o de complementar o livro didático, e sim, de compreender possíveis razões de tais elementos não estarem presentes nesse livro, bem como fundamentar nossa compreensão dos procedimentos, dos algoritmos e, principalmente, dos conceitos do conjunto dos números inteiros.

Sendo assim, escolhemos três livros: Introdução à Álgebra (GONÇALVES, 2006) por ter composto a bibliografia de um dos cursos de graduação[3] e Introdução à Álgebra Abstrata (EVARISTO, PERDIGÃO, 2012) e; Curso de Álgebra (HEFEZ, 2002) por trazerem elementos que complementassem o primeiro. Essa escolha deu-se devido à objetividade da apresentação dos tópicos que nos interessavam e ao fato de terem uma linguagem bem próxima ao que esperávamos para a escrita desse texto. Dessa forma, descrevemos sucintamente como são apresentados os números inteiros, enfatizando alguns pontos que são destaque na coleção do ensino fundamental que analisamos.

Para a construção dos inteiros, nas obras citadas acima, são utilizados os conceitos de *anéis* e *domínios de integridade*, isto é, trazem-se os inteiros como exemplo dessas estruturas algébricas. Uma estrutura algébrica é um conjunto em que são definidas operações e suas propriedades. Para o caso dos inteiros, trata-se das propriedades da

[3] O curso de graduação citado é o da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, no qual me formei em 2007 e a professora Marilena compunha a equipe docente.

adição e da multiplicação. Nos livros "Introdução à Álgebra" e "Curso de Álgebra", realiza-se tal construção de forma direta; trabalham-se diretamente os conceitos dos inteiros. A obra "Introdução à Álgebra Abstrata" traz, inicialmente, os naturais, expandindo essa construção para os inteiros. Vejamos:

O conjunto dos números naturais, representado por $\mathbb{N}$, satisfaz os axiomas conhecidos como postulados de Peano:

Quadro 1 – Axiomas de Peano.

1) Existe uma função injetiva s de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$ (a função s é chamada *sucessor* e, para cada $n \in \mathbb{N}$, a imagem $s(n)$ é dita *sucessor de n*).
2) Em $\mathbb{N}$ existe um elemento, chamado *um* e indicado por 1, tal que $s(\mathbb{N}) = $
$= \mathbb{N} - \{1\}$.
3) Se um predicado p definido em $\mathbb{N}$ é tal que
   i. $p\ (1)$ é verdadeiro,
   ii. se $p\ (n)$ é verdadeiro, acarreta que $p(s(n))$ é verdadeiro, então p é uma tautologia[4] em $\mathbb{N}$.

Fonte: Evaristo e Perdigão, 2012, p.24.

Observa-se que, por meio do segundo axioma, pode-se concluir que $\mathbb{N} \neq \emptyset$ e $s\ (1) \neq 1$, ou seja, existem os elementos $2 = s\ (1)$, $3 = s\ (2)$, $4 = s\ (3)$, assim sucessivamente, permitindo escrever que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$. Esse axioma implica, ainda, que existe $m \in \mathbb{N}$, tal que n é sucessor de m, ou m é antecessor de n. O sucessor de n é indicado por $s(m) = n+1$ e o antecessor de n, por $n - 1 = m$.

Em relação ao terceiro axioma, ele nos permite demonstrar afirmações dentro do conjunto dos naturais, isto é, prova-se que uma afirmação é válida para o primeiro natural. Em seguida, supõe-se que é verdadeira para um elemento k qualquer, provando que para $k+1$ também é verdadeira. Esse axioma é denominado de princípio da indução e "a condição (i) é chamada *base da indução* e a assunção $p\ (n) = V$ é chamada *hipótese de indução"* (EVARISTO; PERDIGÃO, 2012, p. 25). O terceiro axioma pode ainda ser enunciado pela *proposição* 1, a seguir.

[4] Definição: Chama-se tautologia toda a proposição composta cuja última coluna da sua tabela-verdade encerra somente a letra V(verdade), ou seja, é toda proposição composta P(p, q, r, ...) cujo valor lógico é sempre V(verdade), quaisquer que sejam os valores lógicos das proposições simples componentes p, q, r, ⋯.

Proposição 1

O princípio da indução é equivalente à seguinte propriedade: Se A é um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $1 \in A$ e $n \in A$ implica $s(n) \in A$, então $A = \mathbb{N}$.

Demonstração:

Para a demonstração dessa proposição, é preciso mostrar que a propriedade equivale ao princípio (I) e que a indução equivale à propriedade (II).

(I) *A propriedade implica o princípio da indução*. Seja um predicado p em $\mathbb{N}$ tal que $p(1)$ verdadeiro e se $p(t)$ é verdadeiro, então $p(\mathrm{s}(t))$ é verdadeiro. Toma-se o conjunto $A = \{x \in \mathbb{N} | p\}$ de forma que, $p(1)$ é verdade segue que $1 \in A$ e de $p(t)$ verdadeiro implica $p(s(t))$ verdadeiro segue que $n \in A$ implica $s(n) \in A$. Logo, por essa, $A = \mathbb{N}$ e p e uma tautologia em $\mathbb{N}$.

(II) *O princípio da indução implica a propriedade*. Seja A um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que $1 \in A$ e $n \in A$ implica $s(n) \in A$. Toma-se o predicado p em $\mathbb{N}$ definido por $p(t)$ verdadeiro, se, e somente se, $t \in A$. De $1 \in A$ temos que $p(1)$ verdadeiro e de $n \in A$ implica $s(n) \in A$, temos que $p(n)$ verdadeiro implica $\mathrm{p}(\mathrm{s}(n))$ verdadeiro. Assim, pelo princípio da indução, p é uma tautologia em $\mathbb{N}$ e, portanto, $n \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $A = \mathbb{N}$.

Ao considerarmos esses três axiomas e tentando aproximá-los da realidade dos anos finais do ensino básico, vemos que a construção do conceito de sucessor pode ser aplicada à construção da reta numérica[5] e, como veremos posteriormente, à construção das operações. Mas esse processo de ensino envolve alguns conceitos que necessitam serem justificados e não fazem parte, diretamente, do currículo dessa etapa de escolaridade. Conceitos tais como funções, noções de conjuntos e de lógica Matemática (proposições, conectivos e tautologias) são alguns exemplos desse fato.

Assim, é possível utilizar esses conceitos como ferramentas de resolução de situações-problema, mas não é possível justificá-los matematicamente, ainda. Nossas análises preliminares, juntamente com a leitura das pesquisas de Nogueira (2008), Queiroz (2006) e de Pommer (2010) apontaram que o trabalho de justificar esse ensino passa por metodologias baseadas em exemplos práticos e na memorização de regras. Um

[5]Os números negativos também podem ser associados a pontos de uma reta. Traçamos uma reta e escolhemos um ponto para representar o zero: Usando sempre a mesma unidade, marcamos os pontos que representam os números inteiros positivos à direita do zero, por exemplo, +1, depois seu sucessor +2 e, assim sucessivamente e os pontos que representam os números inteiros negativos à esquerda do zero, valendo-se da mesma ideia para os positivos.

exemplo seria quando se quer determinar o sucessor de um natural somando-se *um* ao número dado, ou para determinar a construção da reta numérica marcando-se a origem e determinando-se uma unidade e, a partir dessa origem, soma-se (ou subtrai-se) de *uma* em *uma* unidade, para se obter os pontos de tal reta. Dessa forma, como anunciado pela pesquisa de Almeida (2015), dependendo do ano escolar, não há condições de explorar os embasamentos matemáticos formais e, para contornar essa restrição, uma alternativa seria utilizar exemplos pragmáticos.

Para a continuidade da construção dos naturais, a partir desses três axiomas e da propriedade equivalente ao princípio da indução, podem-se definir as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{N}$.

$\forall$ m, n $\in$ $\mathbb{N}$:

Adição: i) $n+1 = s(n)$;

ii) $n + (m+1) = s(n+m)$, ou equivalente $n + s(m) = s(n+m)$;

Multiplicação: i) $n.\ 1 = n$;

ii) $n.\ (m+1) = n.\ m + n$, ou equivalente $n.\ s(m) = n.\ m + n$.

Definidas essas duas operações, precisa-se demonstrar que elas são fechadas em $\mathbb{N}$, ou seja, se $m, n \in \mathbb{N}$, então $m + n$, $m.\ n \in \mathbb{N}$. Para essa demonstração, usaremos o princípio da indução e a faremos para a multiplicação, pois, o caso da adição é bem semelhante.

Demonstração:

Seja então, $n \in \mathbb{N}$ e o predicado em $\mathbb{N}$ definido por $p\ (m)$ verdadeiro se $n.\ m \in \mathbb{N}$. Temos que $p\ (1)$ verdadeiro, pois $n.1 = n$ e tem-se uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$. Além disso, se $p.\ (m+1)$ verdadeiro, temos $n.m+1 \in \mathbb{N}$ e então, como $n.\ s(m) = n.\ (m + 1) = n.m + n$, temos $p\ (s\ (m + 1))$ verdadeiro, pois, tem-se uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{N}$.

Por meio das definições da adição e da multiplicação, pode-se concluir, por exemplo, que:

i. $1 + 1 = s(1) = 2$;
ii. $2 + 1 = s(2) = 3$;
iii. $3 + 1 = s(3) = 4$;
iv. $1 . 2 = 1 . (1 + 1) = 1 . 1 + 1 = 1 + 1 = 2$;
v. $2 . 2 = 2 . (1 + 1) = 2 . 1 + 2 = 2 + 2 = 4$;
vi. $5 = 4 + 1$; $6 = 5 + 1$;

vii. Se $n \neq 1$, então $(n - 1) + 1 = n$, pelos conceitos de sucessor e de adição já definidos.

Pode-se, ainda, denominar a imagem $(n + m)$ como a soma de *n* e *m,* bem como a imagem $(n.m)$ pelo produto de *n* por *m*. Tem-se também que, para a adição, *n, m* são *parcelas* e, para a multiplicação, são *fatores.*

Veremos ainda, nas seções posteriores, que na ampliação do conjunto dos naturais para os inteiros são utilizadas organizações lógicas e dedutivas. Esse trabalho por meio de axiomas, lemas, corolários, teoremas e proposições não faz parte dos estudos do sétimo ano do ensino fundamental. E, para a fundamentação teórica dos inteiros, foi necessária uma organização Matemática mais rigorosa, o que, de certa forma, apresenta uma proposta de ensino diferente daquela explorada no ensino para os alunos do sétimo ano do ensino fundamental.

Ainda em relação à operação de multiplicação, para verificar a comutatividade, a associatividade e a existência do elemento neutro é necessário o lema 1, a seguir:

Lema 1

Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

i. $n + 1 = 1 + n$;

ii. $n.1 = 1.n$.

Demonstração:

i. Considera-se o predicado em $\mathbb{N}$, p(n) verdadeiro se ocorra i. Para p (1), isto é, $1 + 1 = 1 + 1$ é evidente que p (1) é verdadeiro. Agora, se p (n) verdadeiro tem-se que provar que p (s (n)) verdadeiro. Logo, $1 + n = n + 1$ e então $1 + s(n) = s(1+n) = s(n+1) = (n+1) + 1 = s(n) + 1$. Assim, p (s (n)) verdadeiro e pelo princípio da indução p (n) é verdadeiro para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

ii. Considera-se o predicado em $\mathbb{N}$, p(n) é verdadeiro se $n.\ 1 = 1.\ n$. Temos que p(1) é verdadeiro pois, evidentemente, $1.\ 1 = 1.\ 1$. Suponhamos agora que p(n) é verdadeiro e provemos, que p(s(n)) é verdadeiro. De p(n) verdadeiro, temos $n.\ 1 = 1.\ n$ e então $s(n)\ .\ 1 = s(n) = n + 1 = n.\ 1 + 1 = 1.\ n + 1 = = 1\ .\ s(n)$, em que, na última igualdade, utilizamos o item (ii) da definição da multiplicação. Logo p(s(n)) é verdadeiro.

Assim, da igualdade 1 + n = n + 1, garante-se a inexistência de *um* elemento neutro para a adição. Se, por hipótese, existisse $e \in \mathbb{N}$, tal que n + e = e + n = n, segue que, 1 + e = e + 1 = 1, o que contraria o segundo postulado de Peano. Por outro lado, as igualdades n = 1. n = n. 1 implicam na existência de um único elemento neutro da multiplicação, isto é, o natural 1.

Para as demais propriedades dessas operações, vejamos as próximas proposições e, para evitar que essa parte fique exaustiva ao leitor, e também por não termos a pretensão de organizar um curso de teoria dos números, deixamos de realizar algumas demonstrações, por exemplo, para a proposição 2.

Proposição 2:

As operações de adição e multiplicação são associativas e comutativas e a multiplicação é distributiva em relação à adição[6], isto é, para todos n, m, $p \in \mathbb{N}$, tem-se:

i. $n + (m+p) = (n+m) + p$ (associatividade da adição);
ii. $n.(m+p) = n.m + n.p$ (distributividade da multiplicação em relação à adição);
iii. $n.(m.p) = (n.m).p$ (associatividade da multiplicação);
iv. $n + m = m + n$ (comutatividade da adição);
v. $n.m = m.n$ (comutatividade da multiplicação);

Dessas propriedades decorre o seguinte corolário:

Corolário 1

Se $n, m \in \mathbb{N}$, então $s(n) + m = n + s(m)$.

Demonstração

Temos s(n) + m = (n + 1) + m = n + (1 + m) = n + (m + 1) = n + s(m).

A injetividade da função sucessor estabelecida no primeiro axioma de Peano, garante que de n + 1 = m + 1 implica m = n. Na verdade, está conclusão pode ser generalizada, de acordo com a seguinte proposição, chamada lei do corte (ou do cancelamento) da adição.

[6] Essa prova encontra-se, em Evaristo, Perdigão (2012, p. 27).

Proposição 3 (lei de corte ou cancelamento)

Sejam $n, m, k \in \mathbb{N}$. Se $n + k = m + k$, então $n = m$.

A definição a seguir nos ajudará na análise de uma lei do corte para a multiplicação e para a definição de uma relação de ordem no conjunto dos números naturais.

Definição:

Se x é uma indeterminada em $\mathbb{N}$ e n, m são números naturais, uma igualdade do tipo $n + x = m$ é chamada de uma *equação* em $\mathbb{N}$. Um natural s tal que $n + s = m$ é chamado *solução* da equação e se uma equação admitir uma solução ela é dita *solúvel*.

Por exemplo, a equação $1 + x = 5$ é solúvel, sendo 4 sua solução. Obviamente, a solução de uma equação em $\mathbb{N}$ é única. De fato, se s e s' são soluções da equação $n + x = m$, temos $n + s = m$ e $n + s' = m$ o que implica, pela transitividade da igualdade, $n + s = n + s'$, advindo daí, pela lei do corte para adição, $s = s'$. Assim, 4 é a solução da equação $1 + x = 5$. (EVARISTO, PERDIGÃO, 2012).

A proposição 3, que trata da lei de cancelamento, é utilizada como ferramenta de resolução das equações em $\mathbb{N}$, sendo aceita sem demonstração nos anos finais do ensino fundamental. Geralmente, o que é trabalhado com os alunos são exemplos com materiais concretos (balanças) ou com softwares (jogos com as mesmas ideias da balança). Nessa etapa escolar, os professores justificam os algoritmos por meio de estratégias didáticas[7] que, por sua vez, também são utilizadas como passos para se obter as soluções.

Os estudos dos conceitos das equações em $\mathbb{N}$ fazem parte da construção do conjunto dos inteiros, em especial para o trabalho com os conceitos da propriedade do cancelamento e do princípio da boa ordenação. Acerca dessas equações, tem-se a seguinte proposição:

Proposição 4

Sejam[8] $n, m \in \mathbb{N}$,

i. A equação $n + x = n$ não tem solução.
ii. Se a equação $n + x = m$ tiver solução, então a equação $m + x = n$ não terá solução.

[7] Por trás dessa expressão, têm-se conceitos teóricos da teoria antropológica do didático que trataremos no capítulo referente a essa teoria: técnicas e tecnologias didáticas.
[8] Demonstração: Evaristo, Perdigão, 2012, p. 30.

iii. Se a equação $n + x = m$ possuir solução, então $s(n) = m$ ou a equação $s(n) + x = m$ terá solução.

iv. Se a equação $n + \mathrm{x} = s(m)$ não possuir solução, então a equação $n + \mathrm{x} = m$ também não terá solução.

v. Se a equação $n + \mathrm{x} = m$ não tiver solução, então $n = m$ ou a equação $m + \mathrm{x} = n$ possuirá solução.

<u>*Definição*</u>

Dados os números naturais *m, n*, definimos em ℕ, uma relação de ordem, ≤, chamada "menor do que" ou "igual a". Diremos que *m* é menor do que *n*, e escreveremos $m < n$, para significar que existe p ∈ ℕ tal que $n = m + p$. Neste caso, diz também que *n* é maior do que *m* e escreve-se $n > m$ para exprimir que se tem $m < n$. A notação $m \leq n$ significa que $m < n$ ou $m = n$. Por definição, tem-se, portanto $m < m + p$, para quaisquer m, p ∈ ℕ.

<u>*Proposição 5*</u>

A relação ≤ é reflexiva, antissimétrica, transitiva e total.

<u>*Demonstração*</u>*:*

<u>*Reflexiva*</u>*:* Sejam *a, b* e *c* ∈, pela definição da relação de ordem, se $a = b$, logo $a \leq b$ e $a \leq a$ e a relação é reflexiva.

<u>*Antissimétrica*</u>*:* Supõe-se que $a \leq b$ e $b \leq a$, logo pela proposição 4, umas das equações teria solução, $a + x = b$ ou $b + x = a$, se *a* e *b* fossem diferentes, fato que contradiz a proposição 4 item ii. Assim, *a* é igual a *b* e a relação é antissimétrica.

<u>*Transitiva*</u>*:* Se $a \leq b$ e $b \leq c$, temos $a = b$ ou existe um natural *p* tal que $a + p = b$ e $b = c$ ou existe um natural *r* tal que $b + r = c$. Daí, $a = c$ ou $a + (r + p) = c$, o que mostra que $a \leq c$. Assim, ≤ é *transitiva*.

<u>*Total*</u>: A proposição 4 garante que $a = b$ ou $a + \mathrm{x} = b$ tem solução ou $b + \mathrm{x} = a$ e solúvel. Ou seja, $a \leq b$ ou $b \leq a$ e ≤ é total.

<u>*Proposição* 6</u>

Sejam *n, m* ∈ ℕ tais que $n \leq m$. Então, para todo natural *p*, $n + p \leq m + p$ e $n.\, p \leq m.\, p$.

Demonstração:

I: $n + p \leq m + p$: Da hipótese $n \leq m$, temos que $n = m$ ou existe r natural que satisfaça a equação $n + r = m$. Da primeira implicação, tem-se que $n + p = m + p$ e $n \cdot p = m. p$. Da segunda, tem-se $n + (r + p) = m + p$ e $n.p + r.p = m.p$. Daí segue que $(n + r) + p = m + p$, ou seja, $(n + r) \leq m + p$, bem como, $n.p \leq m.p$

Proposição 7

Sejam n e m números naturais[9]. Se $m > n$, então $m \geq n + 1$.

Proposição 8

Sejam $n, m \in \mathbb{N}$. Então

i. $1 \leq n$;
ii. $n < s(n)$;
iii. Se $n < s(m)$, então $n \leq m$.

A próxima proposição nos garante que, para o conjunto dos naturais existe um menor elemento, o número natural 1. Essa proposição é decorrente da relação de ordem que foi definida para esse conjunto, assim como das proposições 7 e 8. Dessa forma, para justificar a comparação de dois inteiros e a extensão das proposições 7 e 8 ao conjunto dos números inteiros, necessita-se de conhecimentos matemáticos não estudados nesses anos escolares. Essas justificativas, mais uma vez, não são tratadas como apresentamos anteriormente, pois se trabalham algumas abstrações que, como já foi exposto, não cabem a essa etapa de escolaridade. Mas as proposições 7 e 8 poderiam ser estudadas por meio de exemplos, nos quais o professor favoreça situações aos seus alunos situações que os levem a conjecturar esses resultados.

Geralmente, a comparação de inteiros é tratada com o estudo das retas, que envolvem conceitos de temperaturas, altitudes e saldos bancários. Por exemplo, para a comparação de um número negativo e de um positivo, estabelece-se que os positivos são sempre maiores que os negativos, pois, ao observar-se a reta numérica, definiu-se que os negativos estão à esquerda e os positivos à direita. Logo, essa regra é deduzida do primeiro fato. É possível estabelecer uma relação entre os números dados e um termômetro. Assim, o número negativo estaria abaixo do positivo, que em um termômetro

[9] Demonstração das proposições 7 e 8: Evaristo, Perdigão, 2012, p. 31.

representa uma temperatura menor. Logo, em um livro em que se realiza esse trabalho, a comparação de dois inteiros é dada de forma pragmática.

Vejamos a seguir a proposição que trata do princípio da boa ordenação.

Proposição 9 (Princípio da boa ordenação (PBO))

Seja M um subconjunto dos números naturais. Se $M \neq \emptyset$, então existe $p \in M$ tal que $p \leq m$ qualquer que seja $m \in M$.

Demonstração:

Consideremos o conjunto $L = \{x \in \mathbb{N} | m \in M \Rightarrow x \leq m\}$. Observe que o item (i) do lema anterior implica que $1 \in L$. Além disso, como pelo item (ii) do lema anterior $s(k) > k$, para todo natural k, temos que se $m \in L$, então $s(m) \notin L$. Isso mostra que $L \neq \mathbb{N}$ e, então, a proposição 1 garante que existe $x \in L$ tal que $s(x) \notin L$. Logo, existe $t \in M$ tal que $t < s(x)$. Como o último item do lema anterior garante que $t \leq x$ e as condições $x \in L$ e $t \in M$ implicam $x \leq t$, temos $x = t$. Assim, $x \in M$ e $x \leq m$, qualquer que seja $m \in M$, já que $p \in L$.

Para o fechamento da construção do conjunto dos números naturais, prova-se que esse conjunto é infinito. Dado $n \in \mathbb{N}$ considera-se a definição de um conjunto finito $I_n = \{x \in \mathbb{N} | x \leq n\}$. Assim, $\forall n \in I_n$, um conjunto será finito se ele for vazio ou estabelecer uma bijeção com I_n. Evidentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto I_n é finito, pois a identidade é uma bijeção de I_n em I_n. Vejamos o exemplo, o conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ é finito, pois para cada $n \in \mathbb{N}$, existe uma função bijetiva do conjunto $I_4 = \{1, 2, 3,4\}$ em A: $f = \{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$. Evidentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto I_n é finito, pois a identidade e uma bijeção de $\mathbf{I_n}$ em $\mathbf{I_n}$. Se um conjunto A não é *finito* dizemos que ele é *infinito*. Vamos mostrar que se A é finito, então o natural n é determinado pelo conjunto A e pela existência da bijeção de A em I_n. Esse fato decorre da seguinte propriedade dos conjuntos I_n.

Proposição 10

Seja $n \in \mathbb{N}$. Se A é um subconjunto próprio de I_n e f é uma função de A em I_n, então f não é bijetiva.

Seja $Y = \{x \in \mathbb{N} \mid$ existem $A \subset I_x$, $A \neq \mathbf{I_x}$, e uma bijeção f de A em $\mathbf{I_x}\}$. Devemos provar que $Y = \emptyset$. Por contradição, suponhamos que $Y \neq \emptyset$. Assim, pelo Princípio da Boa

Ordenação, Y tem um menor elemento *m* e, portanto, há um subconjunto próprio *A* de I_m tal que existe uma bijeção *f* de *A* em I_m. Se $m \in A$, por um lema[10] dos conjuntos infinitos, existe uma função bijetiva *g* de A em I_m, com $g(m) = m$ e a restrição *g* ao conjunto $A - \{m\}$ é uma bijeção de $A - \{m\}$ em I_{m-1}, o que contraria o fato de que *m* é o elemento mínimo de Y. Se $m \notin A$, seja $a \in A$ tal que $m = f(a)$. Assim, a restrição de *f* ao conjunto $A - \{a\}$ é uma bijeção de $A - \{a\}$ em I_{m-1}, o que contraria também fato de que *m* é o elemento mínimo de Y.

<u>*Corolário* 2</u>

Seja *A* um conjunto finito não vazio. Se existem naturais *n* e *m* e bijeções *f* de *A* em I_n e *g* de I_m em *A*, então $n = m$.

<u>*Demonstração*</u>*:*

Como *g* é função de I_m em *A* e *f* é função de *A* em I_n são bijetivas por hipótese, as funções $f \circ g$, de I_m em I_n, e $(f \circ g)^{-1}$, de I_n em I_m, são bijetivas. Suponhamos $m < n$, logo I_m é subconjunto próprio de I_n e a função (f o g) contrariaria a proposição anterior, pois se tem um subconjunto próprio e uma função bijetiva. Do mesmo modo, a função $(f o g)^{-1}$ contrariaria a citada proposição se $n < m$, pelas mesmas condições. Assim, $n = m$.

Vejamos as seguintes observações decorrentes das últimas proposições:

a) Se *A* é um conjunto finito não vazio, o único natural *n* definido pela existência do subconjunto I_n e da bijeção de I_n em *A* é chamado *cardinalidade* de *A* ou *número de elementos* de *A*, indicado por $|A|$ ou $n(A)$;

b) *A* tem *n elementos*, sendo a obtenção desse número uma *contagem* dos elementos de *A*. Na prática, a obtenção de *n* (ou seja, a contagem dos elementos de um conjunto finito) é feita associando-se o natural 1 a um dos elementos, 2 a outro elemento, 3 a um outro elemento e assim sucessivamente: 1, 2, 3 etc;

c) De modo semelhante, um conjunto finito não específico de cardinalidade *n* pode ser representado por $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$. Claramente, se *A* e *B* são dois conjuntos finitos *disjuntos* (isto é, $A \cap B = \emptyset$), $|A \cup B| = |A| + |B|$. Esse

[10] Lema: Se existe uma bijeção f: X → Y então, dados a ∈ X e b ∈ Y, existe também uma bijeção g: X → Y tal que g(a) = b.
Demonstração: Seja $b' = f(a)$. Como f é sobrejetiva, existe $a' \in X$ tal que $f(a') = b$. Vamos definir g: X → Y como $g(a) = b$, $g(a') = b'$ e $g(x) = f(x)$ se $x \in X$ é diferente de *a* e de *a'*. Dessa forma, g também é uma bijeção.

fato é utilizado para o ensino inicial de somas de números naturais para explicar que $2 + 3 = 5$.

A partir da proposição 10, surge como tema de estudo o conceito de infinito, cuja nossas análises preliminares não constataram indícios desse conteúdo no livro observado. Seguiremos agora com a construção dos inteiros, embasando-nos nas considerações trazidas nas coleções "Introdução à Álgebra" e "Curso de Álgebra", que também o fazem axiomaticamente por meio dos conceitos de *Anéis* e *Domínios de Integridade.*

Definição: Dado um conjunto qualquer D e as operações de adição (+) e de multiplicação (·). A terna $(D, +, \cdot)$, será denominada de Anel se as propriedades a seguir forem válidas: $\forall x, y \; e \; z \in \mathbb{Z}$,

1: Associativa da soma: $(x + y) + z = x + (y + z)$;

2: Comutativa da soma: $x + y = y + x$;

3: Existência do elemento neutro: $\exists\ 0 \in \mathbb{Z}$ tal que $x + 0 = 0 + x = x$;

4: Existência do inverso aditivo: $\exists - x \in \mathbb{Z}$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$;

5: Associativa da multiplicação: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$;

6: Comutativa da multiplicação: $x \cdot y = y \cdot x$;

7: Existência da unidade em $\mathbb{Z}$: $\exists\ 1 \in \mathbb{Z}$ tal que $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$;

8: Distributiva do produto em relação à soma: $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;

Definição: Um anel $(E, +, \cdot)$ será denominado de domínio de integridade se é válida a propriedade a seguir:

9: Se $x \cdot y = 0$ então $x = 0$ ou $y = 0$ (não existência de divisores de zero).

Assim, um anel é um conjunto munido de duas operações, no qual valem as *propriedades* 1, 2, 3, 4, 5 e 8. Quando também for válida a *propriedade* 7, ele será chamado de anel com unidade 1; se a *propriedade* 6 também for verificada, então ele será chamado de anel comutativo e, por fim, se a *propriedade* 9 for verificada, então se trata de um anel sem divisores de zero. Dessa forma, um domínio de integridade é um anel com unidade, comutativo e sem divisores de zero.

Para as nove propriedades apresentadas, algumas observações são necessárias:

1. O elemento neutro da adição é único, sendo denominado *zero*.

Demonstração: Para a prova dessa afirmação, suponhamos que existam 0 e 0', neutros da adição. Temos então que, $0 = 0 + 0'$ e $0' = 0' + 0$. Segue que, valendo-se da associatividade da adição, 0 + 0' = 0' + 0. Logo, 0 = 0' + 0 = 0'. Conclui-se que 0 = 0', e que o elemento neutro da adição é único.

2. <u>O elemento neutro da multiplicação é único, denominado *unidade*, indicado por 1</u>.

<u>Demonstração</u>:

Suponhamos que existam 1 e 1', neutros da multiplicação. Segue que 1 = 1. 1' e 1' = 1'. 1. Por meio de m_2, podemos escrever que 1 = 1'. 1 = 1'. Portanto, 1 = 1' e fica assim provado que o elemento neutro da multiplicação é único.

3. <u>Em um anel ou em um domínio de integridade, o simétrico de um elemento é único.</u>

<u>Demonstração</u>:

Suponhamos que existam $-a$ *e* $-a'$ simétricos de $a \in D$ (domínio de integridade). Usando as propriedades 1 e 2, segue que:

- $-a' = 0 + (-a') = [(-a) + a] + (-a') = -a + [a + (-a')] = -a + 0 = -a$, ou seja, $-a' = -a$. Portanto, o simétrico de um elemento, em um domínio de integridade, é único.

Dessa última observação, podemos notar que a escrita, por exemplo, $a + (-a')$, poderia ser denotada por $a - a'$, ou seja, dados x e y, $x - y = x + (-y)$. Dessa forma, definimos a operação de subtração para um domínio de integridade. Nota-se que, como $a + (-a) = 0$, o elemento simétrico de $-a$ é a, isto é $-(-a) = a$. Observa-se também que, se a for igual a b, isso implica que $a + c$ também será igual a $b + c$, qualquer que seja o elemento c do anel. Sendo assim, se $a = b$, vale a seguinte sequência de igualdades:

i. $a + (-b) = b + (-b)$;
ii. $a + (-b) = 0$;
iii. $a - b = 0$.

Tais igualdades mostram que em todo anel vale a regra "muda de membro, muda de sinal". Observe que dessa propriedade decorre que se k é um elemento de um anel tal que $k + k = k$, então $k = 0$" (EVARISTO, PERDIGÃO, 2012, p. 39).

A partir da observação 2 (o elemento neutro da multiplicação é único), definiremos os conceitos de elementos invertíveis e de inverso desses elementos. Um elemento $z \in D$ será invertível se existir $y \in D$, seu inverso, tal que $z \cdot y = 1$. Existindo tal inverso ele deverá ser único e o denotaremos por y^{-1}.

Sejam y^{-1} e s^{-1} inversos de z. Logo, $y^{-1} = y^{-1} \cdot 1 = y^{-1} \cdot [z \cdot s^{-1}] = [y^{-1} \cdot z] \cdot s^{-1} = 1 \cdot s^{-1} = s^{-1}$, ou seja, $y^{-1} = s^{-1}$. Portanto, o inverso de z é único.

O trabalho realizado sobre essas estruturas algébricas gera algumas propriedades que veremos a seguir:

<u>Proposição</u> 11

Seja A um anel. Para todo $a \in A$, tem-se $a.0 = 0$.

<u>Demonstração</u>:

Valendo-se da propriedade 8: $a.0 = a.(0 + 0) = a.0 + a.0$.

Valendo-se da propriedade 4: $a.0 = a.0 + a.0 \rightarrow -(a.0) + (a.0) = -(a.0) + (a.0 + a.0)$;

Valendo-se das propriedades 1 e 2: $0 = (-(a.0) + a.0) + a.0 = 0 + a.0 \rightarrow 0 = a.0$.

Portanto, $a.0 = 0$. ■

A proposição 12, a seguir, refere-se à definição de algumas das regras de sinais da multiplicação. Observamos que suas demonstrações podem ser exemplificadas e, consequentemente, os alunos podem ser conduzidos a conjecturarem e compreenderem tais regras. E não simplesmente estabelecendo procedimentos que demandam decorar, sem compreensão desses fatos matemáticos.

O item b dessa proposição refere-se ao fato de que multiplicar um negativo por um positivo equivale ao cálculo do simétrico da multiplicação dos módulos desses números. O item c remete ao fato de que a multiplicação de dois negativos resulta em um número inteiro positivo. Vejamos o exemplo prático do item *a*, que trata do fato de que quando se multiplica *um número positivo* por *menos um* resulta em seu simétrico:

$(-1).\ 2 = -2$	(Somando-se +2 em ambos os membros)
$(-1).\ 2 + 2 = 0$	($2 = 1.2$)
$(-1).\ 2 + 2 = (-1).\ 2 + 2.1.$	(Propriedade 8)
$(-1).\ 2 + 2 = 2.\ [(-1) + (+1)]$	($(-1) + 1 = 0$)
$(-1).\ 2 + 2 = 2.\ 0$	(Todo número multiplicado por zero é zero)
$(-1).\ 2 + 2 = 0$	(Somando-se –2 em ambos os membros)
$(-1).\ 2 = -2.$	

<u>Proposição</u> 12

Seja A um anel. Para todos $a, b \in A$,

i. $(-1).\ a = -a$.

ii. $(-a).\,b = a.\,(-b) = -\,(a.b)$.

iii. $(-a).\,(-b) = a.b$.

<u>*Demonstração*</u>*:*

i.	$(-1).\,a = -a$	*(Propriedade* 4*)*
	$(-1).\,a + a = 0$	(a = 1.a)
	$(-1).\,a + a = (-1).\,a + 1.\,a$	*(Propriedade* 8*)*
	$(-1).\,a + a = a\,.\,((-1) + 1)$	*((–1) + 1 = 0)*
	$(-1).\,a + a = a\,.0$	*(proposição* 11*)*
	$(-1).\,a + a = 0$	*(Propriedade* 4*)*
	$(-1).\,a = -\,a$. ■	

ii.	$(-a).\,b = ((-1).a)\,.\,b$	(Proposição 12a)
	$(-a).\,b = (-1).\,(a.b)$	(Propriedade 5)
	$(-a).\,b = -(a.b)$	(Proposição 12a)

Ou,

$(-a).\,b = b.\,(-a)$	(Propriedade 6)
$(-a).\,b = b.\,(-1).a$	(Proposição 12a)
$(-a).\,b = (b.\,(-1)).a$	(Propriedade 5)
$(-a).\,b = ((-1).b).a$	(Propriedade 6)
$(-a).\,b = (-b).a$	(Proposição 12a). ■

iii.	$(-a).\,(-b) = -(a.(-b))$	(Proposição 12b)
	$(-a).\,(-b) = -(-(a.b))$	(Proposição 12b)
	$(-a).\,(-b) = a.b$	(Simétrico de $-a$ é a). ■

<u>*Proposição* 13</u> (Lei do cancelamento)

Seja D um domínio de integridade. Quaisquer que sejam $a, b, c \in D$, se $a \neq 0$ e $a.b = a.c$, então $b = c$.

<u>*Demonstração*</u>*:*

Dada a igualdade $a.b = a.c$, para quaisquer $a, b, c \in$ D, somando-se aos membros da igualdade o simétrico de $a.b$, obtém-se $a.b + (-\,(a.b)) = a.c + (-\,(a.b))$.

Utilizando as propriedades distributivas do produto em relação à adição e à subtração, tem-se $0 = a. (c - b)$. Logo, pela *propriedade* 9, tem-se que $a = 0$ ou $c - b = = 0$. Como $a \neq 0$, conclui-se que $b = c$. ■

Até esse momento da construção dos inteiros, trabalhamos com alguns conceitos importantes, que são utilizados no ensino superior e não podem receber esse mesmo procedimento matemático no ensino fundamental. Esse tratamento por meio das estruturas algébricas foi importante para a finalização da construção dos inteiros. Diferentemente do estudo de outros conceitos matemáticos dessa etapa de escolaridade, fatos importantes sobre os inteiros estão distantes da realidade dos alunos. E, como vimos nas leituras das pesquisas de Pommer (2010), Anjos e Sá (2011) e Queiroz (2006) acerca das dificuldades de aprendizagem, as tentativas de amenizar esses problemas podem gerar outras dificuldades.

Para o fechamento dessa construção, têm-se outros conceitos, que geram definições, proposições e corolários, tais como os itens a seguir:

1. ***Definição:*** Um anel A é dito *anel ordenado* se nele for definida uma relação de ordem (ou seja, uma relação binária *reflexiva*, *antissimétrica*, *transitiva* e *total*), simbolizada por $\leq$, que satisfaz as seguintes propriedades:

   a) *Compatibilidade com a adição;*

   Quaisquer que sejam $a, b, c \in A$, se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$;

   b) *Compatibilidade com a multiplicação;*

   Quaisquer que sejam $a, b, c \in A$, se $a \leq b$ e $0 \leq c$, então $a. c \leq b. c$.

2. ***Proposição 14:*** Sejam A um anel ordenado e a e b dois elementos de A.

   a) Se $a \geq 0$, então $-a \leq 0$;

   b) Se $a \leq 0$, então $-a \geq 0$;

   c) Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $a. b \geq 0$;

   d) Se $a \geq 0$ e $b \leq 0$, então $a. b \leq 0$;

   e) Se $a \leq 0$ e $b \leq 0$, então $a. b \geq 0$.

3. ***Definição:*** *Princípio da boa ordenação* (PBO): Todo subconjunto não vazio limitado inferiormente possui elemento mínimo.

4. ***Proposição 15:*** Num domínio bem ordenado D, se $x > 0$, então $x \geq 1$.

5. ***Corolário 5:*** Num domínio bem ordenado D, se $x > y$ então $x \geq y + 1$.

6. ***Definição:*** O *valor absoluto* ou *módulo* de um inteiro z definido por:

$$|z| = \begin{cases} z, se\ z > 0 \\ -z, se\ z \leq 0 \end{cases}$$

7. **<u>Proposição 16</u>:** Sejam $z, y \in \mathbb{Z}$. Então:

a) $|z| \geq 0$ e $|z| = 0$ se, e somente se, $z = 0$;

b) $|z.\, y| = |z|.\, |y|$;

c) $-|z| < z < |z|$;

d) $|z| < y$ se, e somente se, $-y < z < y$.

Alguns conceitos dessa lista já foram estudados e, consequentemente demonstrados para os naturais, a saber, os conceitos 1, 2a, 2b e 3. Os demais são importantes para a construção desse conjunto, mas nos ateremos aos conceitos 2c, 2d, 2e, 6, 7, 8 e 10, que atendem à demanda das propostas de ensino dos inteiros do ensino fundamental. Assim, buscamos entender como os principais conceitos ensinados no sétimo ano são tratados matematicamente para, então, irmos ao livro didático, a fim de compreender como os autores lidam com as transformações necessárias para alguns conceitos desse conjunto.

Assim, para fecharmos esta seção, iremos às demonstrações dos itens citados anteriormente da lista das definições, proposições e corolários.

Os itens 2c, 2d e 2e, dados na proposição 14, complementam o estudo das regras de sinais iniciado na proposição 12; por exemplo, o item *c* traz uma discussão acerca do fato de se multiplicar dois números inteiros positivos e se obter como resposta um inteiro positivo. Já o item *d* traz o fato de se multiplicar um número positivo por um negativo e se obter um negativo. Esse item se assemelha à ideia dada no item b da proposição 12, que dá como resposta o simétrico dos módulos dos inteiros. Vejamos que essa sequência de ensino é utilizada também em sala de aula, pois, se trabalha com a ideia de simétrico, por exemplo, para eliminar parênteses nas adições e subtrações e, depois, na multiplicação, formaliza-se a regra dos sinais. Semelhantemente, no item iii da proposição 12, afirma-se que multiplicar dois números negativos é o mesmo que multiplicar os simétricos desses números e, no item *e* da proposição 14, afirma-se que esse resultado é positivo.

<u>Proposição 14</u>: Seja A um anel ordenado e a e b dois elementos de A.

c) Se $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então $a.\, b \geq 0$. A demonstração dessa propriedade decorre do item 1b, da lista anterior, isto é, como $0.\, b = 0$ e $a.\, b \geq 0.\, b$, implica que $a.\, b \geq 0$;

d) Se $a \geq 0$ e $b \leq 0$, então $a.\, b \leq 0$. Seguiremos o mesmo raciocínio, ou seja, $0.\, a = 0$ e $a.\, b \leq 0.\, a$, implicando que $a.\, b \leq 0$.

e) Se $a \leq 0$ e $b \leq 0$, então $a.\ b \geq 0$. Pelo item a dessa proposição, se $a \leq 0$, então $-a \geq 0$, aplicando a definição do item 1b a $b \leq 0$ e $-a \geq 0$, temos que $b.\ (-a) \leq 0.\ (-a)$, implicando $-(b.\ a) \leq 0$. Aplicando o item b dessa proposição temos que $-(-(b.\ a) \geq 0$. Logo, $a.\ b \geq 0$.

Na definição a seguir, no ensino fundamental, não são exploradas as propriedades do valor absoluto. Define-se o que é módulo valendo-se de distâncias entre um número dado e o zero e, são dados vários exemplos de aplicação da regra exemplificada. Um exemplo de exercício que envolve várias discussões e que propicia aos alunos o trabalho de criar hipóteses acerca do comportamento dessas propriedades seria a troca das variáveis por números. Assim, o estudo do módulo não ficaria no nível de aplicação de uma regra e passaria ao nível de verificação de possibilidades de aplicação do conceito em outras situações.

Definição: (item 6).

O *valor absoluto* ou *módulo* de um inteiro *x é* definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, se\ x > 0 \\ -x, se\ x \leq 0 \end{cases}$$

Logo, valem as seguintes propriedades:

Proposição 16 (item 7)

Sejam $z, y \in \mathbb{Z}$. Então,

a) $|z| \geq 0$ e $|z| = 0$ se, e somente se, $z = 0$;

b) $|z.\ y| = |z|.\ |y|$;

c) $-|z| \leq z \leq |z|$;

d) $|z| < y$ se, e somente se, $-y < z < y$[11].

Demonstração:

a) A prova dessa propriedade segue imediatamente da definição de módulo. Vejamos para $z > 0$, $|z| = z \geq 0$ e $z < 0$, $|z| = -z \geq 0$;

b) Para a prova desse item, são utilizados os quatro casos possíveis quando associamos dois números e observamos sua positividade e negatividade, isto é, os dois positivos ou os dois negativos, o primeiro positivo e o segundo

[11] Demonstração: Evaristo, Perdigão, 2012, p. 48.

negativo ou, reciprocamente. Mas apresentaremos apenas os casos com ambos negativos e, um com os sinais trocados.

1. Se $z \geq 0$ e $y \leq 0$, temos, pela proposição 14, $z \,.\, y \leq 0$ e então
   i. $|z.\, y| = -\,(z.\, y)$ (definição de valor absoluto)
   ii. $|z.\, y| = z.\,(-y)$ (item (b) da proposição 12)
   iii. $|z.\, y| = |z|.\,|y|$ (definição de valor absoluto)
2. Se $z \leq 0$ e $y \leq 0$, temos $z.\, y \geq 0$ e $|z.\, y| = z.\, y = (-z).\,(-y) = |z|.\,|y|$.

c) Se $z \geq 0$, então $|z| = z \geq -|z|$, pois $-|z|$ é sempre negativo. Daí, $|z| \geq z \geq -|z|$. Se $z \leq 0$, então $|z| = -z$, $-|z| = z \leq |z|$, pois $|z|$ é sempre positivo e como z é negativo. Segue então a afirmação.

Observa-se também, como demonstrado para a proposição 12, que da propriedade 8 (distributiva do produto em relação à soma) mostra-se que a “regra dos sinais”, por exemplo $(-1).\,(-1) = +\,1$, é uma recorrência direta desta. Ou ainda, para o caso geral que $(-a).\,(-b) = ab$.

Com esta última observação, podemos verificar que esse estudo nos proporcionou organizar várias reflexões sobre a atual organização do conjunto dos números inteiros, bem como, sobre os processos de transposição didática: as adaptações que encontramos no livro didático decorrentes dos vários conceitos presentes nos livros que trazem a construção dos inteiros. E, para a continuação de nossa pesquisa e para uma melhor compreensão do nosso objeto matemático, realizaremos a seguir uma breve descrição de alguns aspectos epistemológicos e históricos referentes aos números inteiros, pois, observamos como atualmente esse conjunto é definido, para na sequência, verificarmos como historicamente esses números passaram por diversas modificações e confusões conceituais. E, como somente ao final do século XIX foram organizados com a atual estrutura já estudada.

2 ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS E HISTÓRICOS DO CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

Neste capítulo, realizaremos um estudo sobre os números inteiros, buscando compreender o desenvolvimento histórico desse conjunto e alguns elementos epistemológicos, que possam estar vinculados às possíveis dificuldades relativas ao ensino desse conjunto numérico no livro didático, como o uso dos sinais "mais" e "menos" em algumas situações como operação e em outras denotando sentido positivo e negativo, os contextos com temperaturas, principalmente com o uso do ar condicionado e a utilização de palavras: "atraso", "dívida", "profundidade".

2.1 ELEMENTOS EPISTEMOLÓGICOS E O RETRATO HISTÓRICO

"Os alunos, em geral, não assimilam um novo conhecimento ensinado diretamente e integralmente, mas, pelo contrário, há interações do novo conhecimento com o saber já existente, que podem se desenvolver na forma de conflitos" (SCHUBRING, 2012, p.20). Tais conflitos fizeram parte de alguns questionamentos que nos instigaram a construir nosso objeto de pesquisa e compõem algumas dificuldades com o trabalho com esses números. As escolhas didáticas podem gerar outras dificuldades além daquelas que são inerentes ao conjunto dos inteiros, o que nos levou à leitura de duas pesquisas que tratam do conceito de números inteiros: Anjos e Sá (2011) e Pommer (2010). A seguir, apresentamos um panorama resumido das pesquisas, pois, por opção de organização, os pontos importantes de cada uma dessas pesquisas estão "diluídos" em nossa escrita.

Anjos e Sá (2011) buscaram, entre outras coisas, compreender as regras operatórias com os inteiros, principalmente em relação à operação de multiplicação.

Pommer (2010) tratou dos aspectos epistemológicos e didáticos do ensino das operações com inteiros, trazendo algumas discussões acerca dos obstáculos epistemológicos sob a ótica de Gaston Bachelard (1996) e Brousseau (1997), assim como o trabalho realizado por Glaeser (1981), que trouxe também várias abordagens acerca do processo de ensino e dos procedimentos de construção dos inteiros e suas operações.

Organizamos, também, um retrato histórico desse conjunto, na tentativa de estabelecer paralelos entre essas pesquisas e o trabalho realizado por Schubring (2012), partindo do mundo antigo, com os gregos e os chineses, passando pela Idade Média, com os estudos realizados pelos hindus, finalizando com os estudos de alguns matemáticos tanto da Idade Moderna quanto da Idade Contemporânea. Esse paralelo entre as pesquisas surgiu da discussão de Schubring (2012) sobre obstáculo epistemológico acerca de como essa ideia tem sido utilizada em pesquisas relativas ao conjunto do números inteiros. Para Schubring (2012),

> A história "social" dos números negativos nos oferece exemplos em que a escolha de uma epistemologia parece ter sido feita (como decisão "coletiva", e não somente de alguns indivíduos!) com um pleno conhecimento das epistemologias concorrentes. Para o estudo de tais casos, não podemos recorrer à noção de obstáculo, que supõe, ao contrário, uma certa incapacidade, intelectual ou não. Então, se uma escolha é feita com conhecimento das diversas possibilidades, não se pode desqualificar a epistemologia que sustenta esta posição, rotulando-a como "obstáculo" (SCHUBRING, 2012, p.17).

A noção de obstáculos trazida pelas outras pesquisas pauta-se nos pensamentos de Bachelard (1996), Brousseau (1997) e Glaeser (1981). Para Bachelard, (1996) no progresso das ciências não há rupturas, e sim, alguns pequenos recuos temporários e pontuais. Os obstáculos são "as expressões das 'sonolências' individuais do saber em alguns indivíduos, não representando uma escolha deliberada" (SCHUBRING, 2012, p.17). Por meio de uma analogia entre o desenvolvimento das ciências e os processos de aprendizagem, na "concepção de obstáculo epistemológico, o novo conhecimento não consegue integrar-se sistematicamente, o saber já existente não admite o novo - seja parcialmente, seja inteiramente" (SCHUBRING, 2012, p.20).

Para Brousseau (1997), "o conhecimento mostra-se eficaz quando aplicado [em] áreas restritas, mas revela-se como um obstáculo logo que aplicado a situações de um estado superior" (SCHUBRING, 2012, p.22). Dessa forma, um conhecimento já adquirido e bem estruturado pode ter papel de obstáculo quando aplicado nos processos e no progresso em estados posteriores.

E, para Glaeser, obstáculos "consistem em 'dificuldades' de compreender conceitos matemáticos" (SCHUBRING, 2012, p.25 grifo do autor). Glaeser (1981) realizou um estudo acerca das dificuldades de ensino e aprendizagem, em um período de 1500 anos, elencando dez matemáticos, partindo de Diofanto até os tempos atuais. Nesse trabalho, ele elencou seis obstáculos referentes aos números inteiros e suas propriedades: *1* – Inaptidão para manipular quantidades isoladas; *2* – Dificuldade em dar um sentido a quantidades negativas isoladas; *3* – Dificuldade em unificar a reta numérica; *4* – A ambiguidade dos dois zeros; *5* – Estagnação no estágio das operações concretas (em confronto com o estágio das operações formais); *6* – Desejo de um modelo unificador. Para esses matemáticos, o pesquisador apresentou um quadro que evidenciou o caráter parcial da compreensão adquirida por eles, pois, "ainda que manipulassem os números relativos com uma engenhosidade digna de admiração, enquanto todos os obstáculos não foram vencidos, subsistiram vastas áreas de incompreensão" (GLAESER, 1985, p.41). Nesse quadro esquemático, os matemáticos foram alocados em linhas e os obstáculos em colunas, assim, se o matemático tivesse superado o primeiro obstáculo, receberia nessa casa um sinal de "+" e, caso contrário, um sinal de "–". Havia também uma marcação com o sinal de "?", para o caso do texto analisado não evidenciar informações suficientes a respeito do obstáculo em questão. Nos estudos de Glaeser, apenas Hankel foi capaz de superar os seis obstáculos; matemáticos tais como Descartes, Euller, D'Alembert e Cauchy conseguiram superar apenas alguns deles.

Schubring (2012) afirma que as concepções de obstáculo epistemológico trazidas, por Bachelard, Brousseau e Glaeser, entre outros motivos, possuem certa fragilidade de fundamentação na "dimensão histórica [que] é compreendida como fixa, firme e determinada – as suas questões estão basicamente resolvidas" (SCHUBRING, 2012, p.27). Para a historiografia atual[12], não podemos fixar em alguns matemáticos famosos e, em alguns eventos dados como principais, necessita-se "estudar como os conceitos matemáticos foram apresentados, discutidos, recebidos e modificados na grande comunidade Matemática numa certa época e cultura – e mesmo, mais além, comparativamente, para culturas diferentes" (SCHUBRING, 2012, p.27).

Seguiremos então, com uma breve apresentação dos inteiros desde a Idade Antiga até os dias atuais. Na Idade Antiga, temos os pitagóricos que se baseavam "na suposição de que a causa última das várias características do homem e da matéria são os números inteiros" (ANJOS E SÁ, 2011, p.3). Diofanto anunciou, em um de seus livros, frases que remetem a algumas das regras das operações com inteiros com cunho prático. O que foi realizado por essas personagens nos leva a observar que nessa época os inteiros não eram tratados independentemente de outros conceitos já conhecidos, isto é, esses matemáticos não conseguiram perceber que estavam lidando com a construção de um novo conceito. Em uma observação universal, deve-se destacar que o "conceito principal e de base para a Matemática tradicional foi o de grandeza, como meio de medida. [...] Os valores

[12] Diante das transformações mundiais registradas em ritmos cada vez mais acelerados, diante da renovação das "permanências", dos valores e ações do homem, diante do resgate do tempo e do espaço, a escrita da história depara-se com um novo desafio e uma feliz proposta disposta a abordar as mais diversas intervenções do homem ou dos homens em diferentes períodos e circunstâncias, sem privilegiar personagens "ilustres". Existe uma tendência consciente e decidida em problematizar e considerar as relações estabelecidas também no passado das resistências, das manifestações, das personagens "iletradas". Essa tendência procura visitar o "instante" e o "momento", objetivando o sentido do tempo e das manifestações do homem neste mesmo tempo em relação à outros tempos. Disponível em:< http://www.historianet.com.br/conteudo/default.aspx?codigo=950>. Acesso em: 10 jan. 2016.

deveriam ser todos positivos e não houve lugar para um desenvolvimento ou aplicação de grandezas negativas" (SCHUBRING, 2012, p.34).

Na Matemática da China, no livro 'Nove capítulos da Arte Matemática', encontra-se o emprego de "grandezas *subtrativas* – durante os procedimentos de calcular, e não o uso de números negativos. [...] A Matemática clássica grega é de um caráter geométrico e não algébrico, o objetivo sendo de comparar grandezas, e não medi-las" (SCHUBRING, 2012, p.34).

A Matemática dos hindus foi a primeira a enunciar mais explicitamente os conceitos das operações com os inteiros (200 a 1200 d.C.), tanto com Brahmagupta, quanto com Bháskara. O primeiro foi sobre as ideias de débitos envolvendo algumas operações, enunciando regras aritméticas de adição e multiplicação e introduzindo os números negativos em termos de fortunas (números positivos) e débitos (números negativos), e o segundo apresentou soluções negativas para as equações quadráticas, afirmando que essas soluções não existiriam devido ao fato de não serem quadrados. Assim, nesses casos, observa-se que o tratamento desse conjunto é dado por meio de necessidades advindas da Matemática.

Na Matemática dos árabes, Al-Kwarizmi e outros matemáticos não aceitavam as raízes negativas. Influenciados por argumentos como os de Bháskara, os árabes não se preocuparam em expandir esses novos conceitos na Idade Média. Eles utilizavam a oralidade e a língua materna sem nenhum simbolismo matemático para o registro das suas notações. Percebe-se assim, que os inteiros estavam presentes nos trabalhos matemáticos dessas personagens, mas devido a algumas convenções esses números não foram mais estudados. (ANJOS e SÁ, 2011).

> Na Itália da Idade Média tardia, quando se adaptou intensivamente a matemática árabe, desenvolveu-se uma prática extensa de resolver sistemas de equações lineares, mas sempre subentendendo que as soluções deveriam ser positivas. E os sistemas foram construídos de tal maneira que os resultados conseguiam ser positivos. Foi num manuscrito em provençal, atribuído aproximadamente ao ano 1430, que se encontra pela primeira vez uma solução negativa admitida sem restrições: $-10\frac{3}{4}$ (ver Sesiano 1984). E no livro de Chuquet de 1484, já é exposto um cálculo operacional com grandezas positivas e negativas (SCHUBRING, 2012, p.35).

Para Anjos e Sá (2011), na Idade Moderna, os matemáticos que viveram na Europa entre os séculos XVI e XVII não demonstraram interesse pelos inteiros. Apesar de esses números aparecerem em seus trabalhos, eles eram considerados como erros de cálculo, como resultados impossíveis e falsos; não eram considerados como números ou entidades Matemáticas. Portanto, esses valores não poderiam fazer parte dos tratados daqueles matemáticos. Havia, também, matemáticos que utilizavam os inteiros como procedimentos de cálculo, sendo suficiente a sua eficiência como justificativas de sua utilização e de sua existência. A situação da construção desse conjunto começou a mudar com a interpretação geométrica como segmentos de direções opostas, como consideramos atualmente para a reta numérica, mas essas considerações eram aceitas e executadas em contextos de pesquisa, sendo que para o trabalho de ensino da Matemática não havia tratados que as formalizassem (ANJOS e SÁ, 2011).

Entre os matemáticos que se destacaram e evitaram os estudos desse conjunto, podemos citar François Viète (1540-1603), que, entre as muitas contribuições para a Matemática, introduziu o uso dos símbolos de mais, de menos e de igual para o trabalho com as operações. Ele não entendia "–3" como três unidades negativas, e sim como a subtração de três unidades (ANJOS e SÁ, 2011).

Descartes (1596-1650) desviou-se dos inteiros criando um método para transformar as raízes negativas em positivas[13], revelando incertezas e dificuldades com o trabalho com os números negativos. G. Leibniz (1646-1716) condicionou o uso desse conjunto, aceitando-os como se fossem semelhantes aos imaginários. Nesse contexto, esses números existiriam se fossem calculados e considerados como números imaginários.

Segundo Glaeser (1985, p. 54) Pierre de Fermat (1601-1665), "fez com que seu amigo Jacques de Billy redigisse conselhos sobre o comportamento a adotar diante de uma raiz "falsa" em uma equação diofantina", propondo como se obter uma solução aceitável a partir das falsas.

Percebe-se que alguns matemáticos desconsideravam totalmente os negativos, outros os utilizavam como ferramentas de cálculo, mas não os aceitavam como soluções de equações, considerando-os como raízes falsas ou imaginárias. Por meio de manipulações algébricas, os números negativos foram aparecendo cada vez mais nos trabalhos matemáticos desse período, mas nenhum matemático tentou realmente construir uma estrutura que explicasse tais números, algo que pudesse embasar os números negativos como números e que tornasse possível ensiná-los (ANJOS e SÁ, 2011).

---

[13] Para Descartes, o número de raízes verdadeiras é igual ao número de vezes que os sinais + e – se encontram trocados; e o número de raízes falsas é igual ao número de vezes em que se encontrem dois sinais + ou dois sinais – seguidos. Por exemplo, na equação $x^4 – 4x^3 – 19x^2 + 106x – 120 = 0$, $(+x^4)$ segue $(–4x^3)$, há uma variação de sinal de + para –; e depois de $(–19x^2)$ segue-se $(+10x)$ e depois de $(+106x)$ vem $(–120)$, o que corresponde a outras duas trocas, conclui-se que há três raízes verdadeiras; conclui-se também, que há uma falsa, pois temos dois sinais negativos seguidos para os termos $4x^3$ e $19x^2$. Para transformar as raízes falsas em verdadeiras basta trocar x por $(– x)$.

Segundo Schubring (2012), nos estudos do algebrista Girolamo Cardano (1501-1576), foram encontrados os primeiros vestígios e reflexões da legitimidade das operações com as quantidades negativas. Ele contestava o resultado positivo de uma multiplicação de duas quantidades negativas, por meio de uma prova geométrica utilizando um quadrado de lado 10. Realizando manipulações algébricas, concluiu que multiplicar menos por menos resulta em uma quantidade negativa. Um dos argumentos utilizados por Cardano foi que positivo e negativo faziam parte de "mundos diferentes". Como seria possível misturar esses dois mundos? Ou passar de um domínio para o outro? Descartes, Ouvres X, 662; trad.: G.S, apud Schubring (2012), afirma que

> A ruptura formulada na obra tardia de Cardano, de não mais aceitar a aplicação da regra dos sinais reside no conflito, tornado consciente pela primeira vez, entre as regras estendidas para a operação de subtração e sua conexão com a operação de multiplicação. Para Cardano, este conflito era de natureza epistemológica - a separação entre dois domínios separados - e ele não refletiu sobre uma extensão do conceito de multiplicação. [...] Porém, quando se presta atenção, acham-se bastantes vestígios do problema epistemológico apresentado pela multiplicação com resultado num outro domínio. Um tal vestígio encontra-se num manuscrito de Descartes, escrito cerca de 1638, resumindo as ideias do seu livro sobre o método e a geometria. Ele afirma que '*É necessário ter cuidado ao multiplicar por ela própria uma soma que sabemos ser menor do que zero, ou tal que os maiores termos têm o sinal –; pois o resultado da multiplicação seria o mesmo que se os termos tivessem o sinal de +. Como $a^2 - 2ab + b^2$ é, ao mesmo tempo, o quadrado de $a - b$ e de $b - a$; de tal maneira que se sabemos que a é menor do que b, não devemos multiplicar $a - b$ por ele mesmo, pois isso produziria uma soma verdadeira, em lugar de uma menor do que nada: o que acarretaria erro na equação*'. (SCHUBRING, 2012, p.37, grifo do autor).

Percebe-se que os estudos acerca das regras operatórias dos números negativos passaram por muitas modificações, pois, as ideias que parecem óbvias para adição e subtração não são para a multiplicação, e o fato de se trabalhar com quantidades (grandezas) levaram os matemáticos dessa época a considerarem apenas resultados positivos.

Outros dois personagens que protagonizaram os estudos dos inteiros foram Antoine Arnauld (1667) e Jean Prestet (1689). Eles travaram um embate sobre suas concepções acerca dos números negativos e os fundamentos das ciências. Arnauld, ao publicar o livro *Nouveaux Eléments de Géométrie*, "que constituiu praticamente o primeiro livro texto moderno da Matemática, que aplicou a algebrização desenvolvida por Descartes" (SCHUBRING, 2012, p.38), afirma que a regra de sinais para os inteiros é uma mera coincidência, sendo verdadeira por acaso – tal fato abala os demais pesquisadores, talvez por Arnauld se considerar um autor que superou Euclides no rigor matemático.

> Houve uma reação contemporânea a esta contradição: por Jean Prestet (1648-1691), um religioso, da ordem dos *Oratorianos*, protegido por Malebranche. Ele elaborou, já desde 1670, um manual de Matemática, segundo o novo estilo de Arnauld. Depois da publicação da obra, em 1675, a ordem dos *Oratorianos* deu-lhe, várias vezes, a incumbência de ensinar Matemática em seus colégios. Prestet faleceu pouco depois da publicação da segunda edição de seu manual, em 1689 (Robinet 1960). O título do manual foi ainda mais ambicioso do que o de Arnauld: "Eléments des Mathématiques". O subtítulo mostrava a intenção de Prestet de concentrar-se no conceito de grandeza: "ou Principes généraux de toutes les Sciences qui ont les Grandeurs pour Objet". O livro não continha partes de geometria - apesar do título abrangente. A contradição explica-se pelo fato de que, para Prestet, a geometria constitui uma aplicação dos princípios das grandezas. Tudo isto documenta que Prestet foi um propagador do programa de algebrização da Matemática (SCHUBRING, 2012, p.39, grifos do autor).

Nas publicações de Prestet (1689), o conceito de número negativo aparece com o mesmo *status* dos números positivos, com demonstrações algébricas e introdução aos conceitos de grandezas que poderiam ser positivas e negativas[14], sendo o seu ponto de partida o “zero”, que aparece sem o conceito de absoluto. Os debates entre esses dois autores iniciaram por meio da segunda edição das publicações de Prestet, em uma carta que relatava sobre as “dificuldades que mesmo pessoas inteligentes têm de entender bem a natureza das raízes e das quantidades negativas e ainda mais das quantidades imaginárias” (SCHUBRING, 2012, p.40).

Por sua vez, Arnauld (1667) respondeu expondo quatro justificativas ao fato de ter receio em admitir as quantidades negativas isoladas. A primeira justificativa foi referente às operações aritméticas, que apenas seriam verdadeiras se fossem executáveis como grandezas concretas. A segunda foi referente ao quadrado de quantidades de sinais opostos terem o mesmo resultado, ou seja, ao operar com quantidades negativas, semelhante ao pensamento de Cardano (1663), haveria a imposição de permanecer no domínio negativo. A terceira e a quarta referem-se às proporções, argumentando que se a “equação (-5) (-5) = (+5) (+5) é válida, a proporção 1: -4 :: -5: 20 deveria também ser válida” (SCHUBRING, 2012, p.41). Mas Arnauld esbarrou no fato de que se o primeiro termo da proporção é maior que o segundo, então, o terceiro termo também deve ser maior que o quarto, observando um fato válido para as proporções. Esse autor refletiu ainda que esse problema com as quantidades positivas e negativas poderia ser resolvido considerando essas quantidades sem os seus sinais, olhando para os seus valores absolutos. Descartou também a existência das quantidades negativas de forma isolada, ou

---

[14] Prestet explica que as grandezas compõem-se de dois domínios, um positivo e um negativo, cada um sendo infinitamente grande. O ponto de partida é a introdução do zero, que não tem de modo nenhum um caráter absoluto ou excepcional, mas que constitui uma grandeza relativa entre o domínio positivo e o negativo (SCHUBRING, 2012, p.39).

seja, elas só poderiam existir se estivessem vinculadas a uma quantidade positiva. O fato, por exemplo, de um homem dever certa quantia (- 10 000 reais) e por “sorte” ganhar tal quantia (+ 10 000 reais), representa uma relação da dívida como um valor positivo, mesmo que remota a chance de ganhar tal quantia. Assim, sem uma relação com um ‘mais’ não existiriam as quantidades negativas (SCHUBRING, 2012).

Prestet (1689), em resposta a Arnauld, reduziu os quatro apontamentos em dois, a saber, “a executabilidade da subtração e o argumento das proporções” (SCHUBRING, 2012, p. 41). Para se subtrair dois inteiros, deveríamos entendê-los como grandezas que são somadas ou subtraídas, fato que não implicaria grandezas “não harmonizantes”, ou de domínios contraditórios. Seria possível entender que – *2 reais*, por exemplo, seria compreendido como a falta de dois reais para se obter zero. Em relação às proporções, esse autor não respondeu de forma direta “a contradição com a definição de se ter sempre a mesma relação, seja maior ou seja menor, em ambos os lados da proporção” (SCHUBRING, 2012, p. 42). Em vez de responder, ele usou algumas afirmações utilizadas por Arnauld para provar suas conclusões.

Tais embates entre esses dois autores geraram consenso acerca do conceito de número negativo. Na França, temos alguns livros-texto baseados nas ideias divulgadas por Prestet e Arnauld. Como exemplo, Schubring (2012, p. 45) cita a obra de "Charles-René Reyneau (1656-1728), *La Science du Calcul des Grandeurs en Général, ou les Élémens des Mathématiques*, vol. 1: 1714, 2ª edição, 1739; vol. 2 póstumo de 1736". Reyneau afirma, segundo Schubring, que a aritmética e a álgebra elementar são os fundamentos para quem pretendia iniciar os estudos em Matemática. Acerca dos números negativos, Reyneau segue os ensinamentos de Prestet, dando ênfase a esses números como quantidades opostas e tratando como domínios positivos e negativos, sendo que o positivo não tinha privilégios sobre os negativos. Sua definição traz esses domínios como retas opostas, como quantidades de mesmo tamanho e que se anulam. No volume 2, esse autor realizou um estudo sobre geometria analítica e foi capaz de enunciar um sistema de coordenadas.

> O sistema das coordenadas nos quatro quadrantes do plano, que nos parece hoje por demais evidente, [...] nomeiam-se as que vão para a direita positivas e lhes é atribuído o sinal de mais, e nomeiam-se as que vão para à esquerda negativas e lhes é atribuído o sinal de menos (SCHUBRING, 2012, p.47-48).

Seguindo a mesma linha de conceituação de Prestet e Reyneau, temos nomes como Varignon e Rivard.

> Pierre Varignon (1654-1722) do grupo de “Malebranche e professor de Matemática no *Collège Mazarin* em Paris - o primeiro colégio com um ensino reforçado da Matemática -, com o livro texto *Eléments de Mathématique*, publicado postumamente em 1734 e Dominique-François Rivard (1697-1778) professor de Matemática no *Collège de Beauvais* em Paris, e o primeiro dos autores na França sem ligação com uma ordem religiosa. No seu livro *Eléments des Mathématiques* - publicado em 1732 e reeditado várias vezes -, ele aceitou grandezas negativas isoladas e explicou como operar com elas (SCHUBRING, 2012, p.48, grifo do autor).

Esses autores franceses baseavam-se em uma algebrização da Matemática e de uma abordagem analítica. Nessa mesma época existiam outros autores na França que se baseavam em uma visão geométrica dos conceitos matemáticos. Como exemplo, podemos citar Jacques Ozanam (1640-1717), Abbé Deidier (1696-1746) e Bernard Forest de Bélidor (1698-1761).

Por outro lado, não somente na França, percebia-se a aceitação dos números negativos como grandezas e da possibilidade de operá-los com os números positivos. Na Inglaterra, destacamos John Wallis (1616-1703), com os livros-texto *Mathesis Universalis* (1656) e *Treatise of Algebra* (1685), e Isaac Newton (1643- 1727), com suas lições sobre *Arithmetica Universalis*. Na Alemanha, citamos Christian Wolff (1679-1754), que aceitou operar com quantidades positivas e negativas, mas tratando-as como grandezas heterogêneas. Uma consequência lógica e, que gerou uma contradição em suas definições, é que não poderia operar essas grandezas quando estivessem, ao mesmo tempo, em uma operação. Também temos a obra *Elementa Matheseos* (1734) de Christian August Hausen (1693-1743), professor de Matemática da universidade de Leipzig, no qual este autor desenvolveu mais a noção de grandezas opostas (SCHUBRING, 2012).

O matemático Colin MacLaurin (1698-1746), em seu livro “Tratado da Álgebra”, trabalhou as definições das quantidades negativas, expondo os negativos como opostos dos positivos e aceitando aqueles como números, assim como as frações e os positivos. Entretanto, MacLaurin deixou algumas restrições, tal como o fato de não serem números que pudessem ser tratados de forma isolada, e sim, serem comparados a outros números. Em outra obra, MacLaurin valeu-se das ideias de proporção, mas agora como uma nova visão, a qualidade de seus termos não exerce influência, considerando apenas os valores absolutos das grandezas. Esses estudos compuseram os primeiros elementos de uma crise para a concepção dos números negativos (SCHUBRING, 2012).

Jean Le Rond D’Alembert (1717-1783), por ser também filósofo, contestava a natureza das grandezas negativas e criticava a visão algebrizante dadas as regras operatórias. Ele considerava o zero como uma grandeza absoluta, diferente de outros matemáticos que o viam como uma grandeza relativa e o comparava com o nada. D'Alembert criticou veemente a existência de qualquer grandeza menor do que zero de forma isolada e concebia os negativos encontrados como fruto de erros de hipótese, falsas posições dos positivos. D'Alembert deduziu também, que as razões "a:b" e "a:- b" são idênticas, desenvolvendo-as, aparentemente, para contradizer a concepção das grandezas negativas do seu colega da Academia de Ciências de Paris, Aléxis-Claude Clairaut (1713-1765) (SCHUBRING, 2012).

Desse modo, Clairaut causou algumas contradições ao apresentar a solução para um problema que consistia em encher certo recipiente em determinado tempo. Uma das soluções para tal problema resultava em um valor negativo. Em vez de descartá-la ou modificar a equação, ele interpretou esse valor negativo como se a fonte de água estivesse "roubando" tal líquido do recipiente (SCHUBRING, 2012). Tal interpretação foi que causou em D'Alembert contrariedade, levando-o a afirmar que o problema não estava em operar as quantidades negativas, mas estava na natureza da concepção dessas grandezas. D'Alembert ainda negou a perspectiva que se baseava na álgebra para fundamentar as considerações das soluções negativas. Assim, para ele, seria inconveniente buscar mais soluções do que as necessárias. Os números negativos seriam soluções de outro problema, e os sinais das expressões apenas representavam a posição, numa visão geométrica, sem nenhuma influência sobre o seu valor (SCHUBRING, 2012).

> Com a sua visão dos números negativos d'Alembert exerceu uma grande influência - muito maior que autores anteriores de livros didáticos, por causa de sua disseminação pela *Encyclopédie*, a obra chave do Iluminismo. No entanto, haja vista as suas observações não sistemáticas e também não operativas - falando deste tipo de números em termos de serem uma denominação, ou de estarem em uma outra posição, diferentes das que ocorrem com os positivos - não ficou evidente como integrar tais formulações vagas num livro texto de álgebra (SCHUBRING, 2012, p.53).

Étienne Bézout (1730-1783) sucedeu a D'Alembert na hegemonia dos livros--texto de Matemática na França, no período Pós-Revolução Francesa. Bézout influenciou tanto o meio militar quanto fora dele, admitindo os números negativos, afirmando que "as grandezas negativas têm uma existência tão real quanto as positivas, [...] e elas somente diferiram por ter um significado (SCHUBRING, 2012, p.53). Mas, na prática, as intenções por detrás das definições eram a exclusão das grandezas negativas e a volta das grandezas subtrativas. A ruptura iniciada por D'Alembert foi incorporada como uma prática de ensino por Bézout, e as adaptações realizadas nas equações, para que as respostas fossem apenas positivas, convergiam com as abordagens realizadas na

Inglaterra (SCHUBRING, 2012).

O filósofo Étienne Bonnot de Condillac (1715-1780) apresentou uma das primeiras teorizações do nascimento do conceito de número. Ele descreveu quatro etapas no processo dessa conceitualização. A primeira etapa é fixada na contagem com os dedos e no consequente aparecimento das operações de adição e subtração, considerada a operação que "desfaz" uma adição. A segunda etapa consiste na substituição da contagem com os dedos pela necessidade de dar nomes aos números, sendo uma das condições para a aparição da álgebra. A terceira etapa consiste na criação de símbolos para os números, principalmente quando se tratava de números grandes e diferenciando quando temos operações com grandezas ou com números. Finalmente, a quarta refere-se ao aparecimento da álgebra, ou seja, as operações com expressões literais e o aparecimento dos números abstratos (SCHUBRING, 2012).

Nessa última etapa, Condillac analisa o conceito de número negativo, trazendo como definição a subtração como extensão da adição. Ele trata uma quantidade precedida do sinal de "+", como um acréscimo, e as precedidas pelo sinal de "–", como uma quantidade subtraída. Esse tratamento vale tanto para os números, quanto para as letras que representam quantidades. Para as expressões literais, as quantidades a mais ou a menos sempre seriam quantidades. Condillac refuta os pensamentos de D'Alembert acerca das quantidades negativas, enunciando sua própria concepção sobre os negativos para um tratado acerca das equações do segundo grau. Infelizmente, essa obra não foi concluída, e não há "nenhum vestígio de continuação dessas reflexões sobre as operações e sobre os números negativos" (SCHUBRING, 2012, p.58).

Na virada do século XVIII para o XIX, houve uma mudança de pensamento sobre a "Matemática entre os filósofos franceses, principalmente no que diz respeito à sua 'arquitetura'. A Álgebra é colocada num segundo plano, e a Geometria passa a ser escolhida como fundamental" (SCHUBRING, 2012, p. 59, grifo do autor).

> Esta mudança de concepção epistemológica foi transmitida da Filosofia à Matemática e é responsável por mudanças de "mentalidades" e de prática (Matemática e didática). O primeiro a transmitir esta nova visão epistemológica à Matemática foi Lazare Carnot, inicialmente em 1801 e depois, em 1803, sob uma forma mais desenvolvida. Carnot fez assim uma dupla escolha: estar convencido da predominância da Geometria sobre a Álgebra e só admitir o estatuto de seres matemáticos para os números absolutos, ou seja, os números que possam ser relacionados a substâncias. Assim, Carnot retém a subtração apenas para a Aritmética, e não a considera jamais como uma operação algébrica. Ele tenta substituir a Álgebra pela Geometria, ou melhor, por um novo tipo de Geometria: a geometria das correlações. Restringe as operações algébricas aos casos "executáveis"; por exemplo, a equação $(a - b). c = ac - bc$ é restrita ao caso onde a > b. Ele

> contorna em parte essas restrições, transformando a Álgebra em um cálculo efetuado a partir de linhas orientadas (SCHUBRING, 2012, p. 59-60, grifo do autor).

Dessa forma, há uma grande recusa em relação à concepção de quantidades negativas e um dos responsáveis pela aceitação e disseminação da recusa é o matemático Sylvestre-François Lacroix (1797), afirmando que um conceito tão difícil de compreender não poderia ser colocado no início dos livros-texto em álgebra (SCHUBRING, 2012).

Por outro lado, na Alemanha, desde 1799, tal rejeição observada na França e na Inglaterra tomou caminhos diferentes. Houve grandes estudos buscando a separação entre grandezas e números. Assim, operações com novas grandezas necessitavam de novas concepções, baseando-se em redefinições e extensões das operações aritméticas. O autor Wilhelm A. Förstemann (1791-1836) criticou as definições de quantidades, que davam uma visão mais geral, substituindo-as pelos conceitos de números e grandezas, sendo que apenas com os números que podemos operar algebricamente. Tal concepção era baseada na ideia que grandezas poderiam ser exemplificadas por conjuntos, sólidos, tempo, entre outros e os números são as expressões das relações entre grandezas de mesma natureza. Fõrstemann tratou do conceito de oposto na operação de multiplicação, bem como da distributividade da multiplicação em relação à adição, sendo o primeiro a formular o princípio da permanência. Para Schubring (2012, p.63), Förstemann "impôs como um postulado que as regras para as operações estendidas deveriam corresponder às regras nos casos originais. Assim, por exemplo: $(a+\bar{b}).\ c = ac + \bar{b}.\ c$ com a consequência: $ac + \bar{b}.\ c = ac - bc$ e $\bar{b}.\ c = b.\ \bar{c} = -bc$. E, em particular, segundo o princípio: $\bar{b}.\ \bar{d} = b - d$.

Um famoso artigo de Carl Friedrich Gauss (1831) auxiliou na disseminação das ideias de Förstemann. Tal artigo tratava "sobre a metafísica da Matemática" afirmando que "o conceito da oposição entre números reside na epistemologia e que na Matemática não se lida com substâncias, mas com relações entre grandezas" (SCHUBRING, 2012, p. 64).

As ideias de Förstemann e as concepções de Gauss tornaram-se conhecidas com a publicação da obra de "*Hermann Hankel* '*Theorie der complexen Zahlensysteme'* [estabelecendo] um tratamento [...] axiomático dos fundamentos da aritmética (SCHUBRING, 2012, p. 64), assumindo os conceitos de oposto e expôs de maneira mais clara o princípio da permanência, que historicamente está vinculado apenas ao seu nome. Ele explicitou que esse tratamento das regras de sinais com os números negativos eram convenções e, por consequência, não poderiam ser demonstradas. Schubring (2012, p. 65) afirma que

> Podemos constatar que a solução Matemática do problema de fundamentar as operações no campo numérico ampliado dos números inteiros foi proposta pela primeira vez em 1817, por um professor do secundário, a qual recebeu uma aceitação na comunidade Matemática somente muito depois, mesmo com o apoio de Gauss. A aceitação definitiva pela comunidade dos matemáticos profissionais - mesmo na Alemanha - aconteceu somente com a publicação do livro de Hankel em 1867.

Dessa forma, percebe-se que aceitação dos números negativos deu-se por meio do tratamento e dos textos de Hankel, mas tal disseminação não foi unanimidade entre os matemáticos da época. As grandes discussões giravam em torno do fato de não terem apresentado demonstrações para as regras de sinais, “alegando que se tratavam de questões didáticas, do ensino - enquanto o foco do debate eram convicções sobre os fundamentos da Matemática” (SCHUBRING, 2012, p. 70). Muitos dos que contestavam essa nova abordagem dos números negativos afirmavam que seus idealizadores estavam valendo-se das ideias de suas aulas e implantando-as no meio da Matemática formal.

A consulta desses diversos trabalhos e pesquisas de cunho epistemológico levou-nos à conclusão de que “os números negativos, os irracionais e os complexos têm sua trajetória originada nas necessidades da própria Matemática, mais particularmente das manipulações algébricas” (ANJOS E SÁ, 2011, p.2). Concluímos que os números inteiros, no transcorrer da história da Matemática, foram estudados por meio de questões relacionadas ao desenvolvimento interno da Matemática, e não necessariamente, por motivos práticos, ligados ao cotidiano das civilizações.

2.2 SOBRE OS NÚMEROS INTEIROS

Compreendemos que as dificuldades dos alunos em assimilar as regras de sinais, a reta numérica com os negativos, o sinal de menos representando quantidades negativas, o sinal da operação de subtração e o oposto de uma quantidade positiva, podem acarretar, entre outros fatores, em adversidades em que os alunos não reconheçam os inteiros como extensão dos naturais e, “apesar de memorizarem as regras de cálculo, não as conseguem aplicar adequadamente por não terem desenvolvido uma maior compreensão do que seja o número negativo” (QUEIROZ, 2006, p. 10). Além desses fatores, os processos de adaptações do saber acadêmico em saber que deve ser ensinado, podem gerar dificuldades nos processos de ensino e de aprendizagem. Essas adaptações devem ser estruturadas de forma que o ensino propicie aos alunos compreenderem os conceitos, possibilitando que tenham acesso a esses conteúdos. Sendo assim, o uso de modelos de ensino que utilizem situações práticas do cotidiano, são válidos, mas algumas considerações devem ser apontadas. Discutiremos esses fatos na continuidade dessa pesquisa, buscando como esse conceito é tratado desde sua construção até as adaptações realizadas em seu ensino na educação básica.

As múltiplas abordagens relativas às regras de sinais podem contribuir com a aprendizagem dos números inteiros, que historicamente se constituíram em um campo com diversos debates, com possíveis repercussões no atual ensino de Matemática.

> Também, acrescentamos como possibilidade a utilização da temática das regras de sinais nas operações elementares nos Inteiros, como oportunidade de exploração das várias linguagens Matemáticas, que articuladas permitem um enredar com diversos temas, ou ainda ampliar a rede de significados internamente ao próprio conhecimento matemático (POMMER, 2010, p.1).

Um conceito trazido por Pommer (2010) é o princípio da extensão da operação de subtração (inversa da adição) aos inteiros. Nessa operação[15], é feita a restrição $b \geq a$, para $b - a$ no conjunto dos números naturais: para que o resultado de uma subtração seja também um natural, o primeiro termo deve ser maior que o segundo. Esse princípio prevê que, para construir novas definições e conceitos, deve haver adequações das definições antigas para que não haja conflitos com as precedentes, bem como entre os axiomas e os teoremas que fundamentam a teoria. Pommer (2010) delineou alguns modelos como possibilidades para o estudo dos inteiros relativos na educação básica.

Para as operações de adição e subtração, são trazidos os modelos:

a) <u>Aritmético</u>: neste modelo, os estudos partem do conjunto dos naturais, na tentativa de mostrar seus limites e restrições. Usam-se para o ensino conjunturas vinculadas a situações cotidianas, como perdas e ganhos, temperaturas positivas e negativas, que servirão como aporte para futuras conceitualizações. Os exemplos, monetário e temperatura são muito comuns

[15] Vale destacar que as regras de sinais <u>*não*</u> podem ser provadas, mas sim <u>justificadas</u>. É importante que os alunos do ciclo básico saibam que tais regras não foram simplesmente inventadas, mas decorrem da necessidade de manter coerência nos princípios ou fundamentos da Matemática. Assim, levou alguns séculos para que os matemáticos percebessem que a regra de sinais, conjuntamente com todas as outras definições que governam os números inteiros e as frações <u>não podem ser provadas</u>. Elas são criadas por nós para nos darem liberdade operatória, pelo fato de preservarem as propriedades fundamentais da Aritmética. O que pode – e deve – ser *provado* é, unicamente, com base nestas definições, que as propriedades comutativa, associativa e distributiva são preservadas (COURANT; ROBBINS, 1941, p.55, apud POMMER, 2010, p.3, grifo nosso).

em alguns livros didáticos, porém, sua utilização deve ser realizada com moderação.

b) Algébrico: “a partir da equação x + a = b, em N, existe solução se $b \geq a$. Por um largo período de tempo, houve dificuldades por parte da comunidade de filósofos em considerar os números negativos como solução” (POMMER, 2010, p.7). Neste modelo, usam-se os inteiros como solução da equação $x + a = b$. O ambiente algébrico é favorável aos problemas aditivos, “permite redução do obstáculo, inserindo um hábitat natural para os problemas aditivos. Acrescenta-se a isso, [...] oportunidade de trabalho das linguagens gráfica, aritmética e algébrica, que constitui [...] passagem da Aritmética para a Álgebra” (POMMER, 2010, p. 7).

a) Geométrico: neste modelo, parte-se do uso da reta real, realizando deslocamentos, determinando a origem, o sentido positivo e o negativo e as distâncias entre cada abscissa. Para o ensino, a reta terá ideia de deslocamento vinculada à ideia geométrica, pois, se partirmos do ponto de abscissa +2 e caminharmos três unidades no sentido negativo, podemos descrever esse deslocamento pela adição algébrica: (+ 2) + (-3);

Pommer, ao descrever esses modelos de apresentação para os inteiros, realizou um trabalho epistemológico desses números, discutindo algumas formas de ensino e apresentando algumas dificuldades de aprendizagem decorrentes desse ensino. Identificamos também elementos que vão nos ajudar na categorização das propostas dos livros didáticos dentro dos modelos descritos por Pommer.

Para as operações de multiplicação e divisão, são trazidos os modelos:

a) Aritmético: neste modelo, são utilizadas metáforas ilustrativas para essas operações, isto é, por meio de historinhas, tentam-se justificar as regras operatórias. Ou, ainda, vale-se das definições das operações para construir tais regras. Por exemplo:

   - (+2). (– 3) = (– 3) + (– 3) = – 6 (Nesse caso, usou-se a ideia de adição de parcelas iguais, partindo do pressuposto que o primeiro termo representa quantas parcelas do segundo será somada);
   - (– 2). (+3) = (+3). (– 2) = (– 2) (– 2) (– 2) = – 6 (Nesse caso, como não podemos aplicar diretamente a soma reiterada, usa-se a comutatividade e, a partir daí, as somas de parcelas iguais);

- $(-2).(-3) = (-1)(+2).(-3) = -[(+2).(-3)] = -[-6] = +6$ (Nesse caso, usa-se a distributividade e a propriedade de que todo inteiro multiplicado por *um* negativo dá como resultado seu simétrico. Em seguida, utiliza-se a soma reiterada, finalizando com o cálculo do simétrico da adição).

b) Físico/Geométrico: neste modelo, utilizam-se materiais de apoio, como o trabalho que os chineses realizaram com barrinhas coloridas para as operações de multiplicação e divisão. Esse material foi expandido para uma espécie de ábaco dos inteiros, que consiste em duas hastes verticais, uma com valores positivos e outra com valores negativos. Para o exemplo do modelo anterior, (+2). (– 3), na haste de valores negativos, acrescentam-se dois grupos de três argolas vermelhas, o que representaria (– 3) + (– 3) = – 6; tem-se assim o mesmo raciocínio, mas organizado em um modelo físico;

c) Funcional: neste modelo, utilizam-se padrões matemáticos, por exemplo, em tabuadas.

Figura 1 – Modelo Funcional: padrões matemáticos.

Operação	Resultado		Operação	Resultado
2*3 =	6		2*(-3) =	-6
1*3 =	3		1*(-3) =	-3
0*3 =	0		0*(-3) =	0
(-1)*3 =	-3		(-1)* (-3) =	3
(-2)*3 =	-6		(-2)* (-3) =	6
Tabela 1			Tabela 2	

Fonte: Pommer, 2010, p. 11.

A figura 1 revela uma recorrência a padrões: no quadro à esquerda, os resultados estão decrescendo de três em três, já os da direita estão crescendo de três em três. Para esse exemplo, não se tem garantia que necessariamente o próximo deveria ser três unidades maiores ou menores. Logo, o professor deve garantir que exista um padrão e que ele é único, podendo ou não apresentar justificativas. Caso esse padrão seja apresentado, uma possível justificativa seria um trabalho sobre as respostas serem ou não múltiplos de três.

d) Conjuntista: neste modelo, pode-se justificar as regras da multiplicação, por meio da definição de pares ordenados, pautando-se nos conceitos de estruturas algébricas, especificamente, as ideias de anel abeliano. Nessa organização, podemos associar cada número inteiro a um par ordenado, ou seja, o inteiro ***a*** está associado ao par (***a***; 0) e – ***a*** ao par (0; *a*).

Dados os inteiros *a* e – *a*, definem-se as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com esses inteiros. Apresentaremos esse trabalho para o produto de dois números inteiros.

Dados *x* e *y inteiros, x.y = (a; b). (c; d) = (a.c + b.d; a.d + b.c).* Por exemplo, as multiplicações entre (+2). (– 3) e (– 3). (+2):

- (2; 0). (0; 3) = (2.0 + 0.3; 2.3 + 0.0) = (0;6) = – 6 e;
- (0;3). (2;0) = (0.2 + 3.0; 0.0 + 3.2) = (0; 6) = – 6.

Assim, a regra para a multiplicação de dois inteiros de sinais contrários apresenta sinal negativo:

- *(– a). (+b) = (0; a). (b; 0) = (0.b + a.0; 0.0 + a.b) = (0; a.b) = – a.b* e;
- *(+ a). (– b) = (a; 0). (0; b) = (a.0 + 0.b; a.b + 0.0) = (0; a.b) = – a.b.*

Vemos, assim, que se podem definir as demais regras de sinais da multiplicação, ou seja, quando ambos os inteiros são positivos ou negativos. Esse trabalho poderia ser desenvolvido com os alunos do sétimo ano do ensino fundamental, como um recurso metodológico a mais para a construção dos conceitos dos números inteiros – haja vista que a execução desse procedimento exige do aluno aplicação da regra para multiplicar pares ordenados.

Com a utilização do maior número de recursos possível, os alunos terão a oportunidade de vivenciarem mais situações de aprendizagem e, consequentemente, vencerem as dificuldades oriundas dos processos de ensino. As retomadas e os esclarecimentos das escolhas para a construção dos inteiros são válidos, sendo que algumas dessas dificuldades de ensino e de aprendizagem estão vinculadas à própria impossibilidade do estudo de alguns conceitos que não fazem parte do rol dos conteúdos para o sétimo ano. Portanto, a contextualização e o uso dos diversificados recursos, tanto manipuláveis quanto tecnológicos, podem ser caminhos para contornar algumas dessas dificuldades. Nos Parâmetros Curriculares Nacionais é sugerido que haja na introdução dos estudos desses números contextos cotidianos, visando propiciar a formalização e abstração desses conceitos, conclui-se que muitas das justificativas Matemáticas não são possíveis de serem abstraídas nessa etapa de escolaridade.

No próximo capítulo apresentamos algumas considerações a respeito da teoria antropológica do didático.

NOSSO OBJETO MATEMÁTICO NO LIVRO DIDÁTICO

3 TEORIA ANTROPOLÓGICA DO DIDÁTICO

A teoria antropológica do didático se enquadra num rol de teorias da Didática da Matemática que toma como foco de suas investigações os processos de ensino e aprendizagem dos saberes matemáticos. Um exemplo de estudo dessa teoria é o da *problemática ecológica* (CHEVALLARD, 1999), que trata das condições de existência de um *objeto* em uma determinada instituição. Estuda-se também, os objetos que podem vir existir em uma instituição. Permite ainda, observar as práticas e os materiais didáticos nas *instituições*, estabelecendo “inter-relações hierárquicas que permitem visualizar as estruturas ecológicas relativas aos objetos” (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p.3, grifos dos autores, tradução nossa).

Para a teoria antropológica do didático, podemos considerar como *Instituição*[16], a escola, as salas de aulas, o livro didático, a prática de um professor de Matemática, o trabalho em sala de um aluno, entre outros.

O campo da antropologia do conhecimento tem foco no objeto do saber, mas com ênfase nos tipos de objetos: instituições, indivíduos e as posições que ocupam os indivíduos nas instituições, bem como sobre as relações[17] que podem existir entre esses objetos (BOSCH e CHEVALLARD, 1999).

Esse referencial traz as atividades Matemáticas para os contextos das atividades humanas, e são as atividades propostas pelos autores de um livro didático – portanto, atividades humanas –, referentes ao estudo do conjunto dos números inteiros, que serão um dos nossos objetos de investigação. Para a análise e descrição dessa ou de outra proposta de ensino, ou ainda de uma prática de ensino, a teoria antropológica do didático nos propicia “instrumentos claramente operatórios” (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p. 4, tradução nossa). Os tipos de tarefa estão no centro da discussão sobre a construção do modelo analítico proposto por essa teoria. Esse modelo denominado de organização

[16] Chevallard (1999) considera que uma instituição (I) é um dispositivo social total que pode ter apenas uma extensão muito reduzida no espaço social, mas que permite – e impõe – a seus sujeitos (...) maneiras próprias de fazer e de pensar. Sob a ótica da TAD cada saber é saber de pelo menos uma instituição; um mesmo objeto do saber pode viver em instituições diferentes e para viver em uma instituição; um saber necessita submeter-se a certas imposições, o que o conduz a ser transformado. O conhecimento entra em cena na TAD com a noção de relação. Um objeto existe se existe uma relação com este objeto, ou seja, se um indivíduo ou uma instituição o (re)conhece como objeto. É a partir das práticas que se realizam com o objeto que se define RI (O) (a relação institucional a O em I) (BARBOSA E LINS, 2013, p.344)

[17] Dado um objeto, um saber, por exemplo, e uma instituição, a noção de relação remete às práticas sociais realizadas no contexto da instituição e que colocam em jogo o objeto em questão e as atividades que podem ser feitas na instituição com esse objeto. (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p.4, tradução nossa).

praxeológica é composto por quatro elementos: *tipo de tarefa, técnica, tecnologia* e *teoria,* que constituem a anatomia (CASABÒ, 2001) dessas propostas de ensino.

Em nossa pesquisa, o conhecimento e o saber são referentes à Matemática; estamos preocupados com a proposta de ensino de um livro didático aprovado pelo PNLD/2014 e com a construção axiomática de alguns conceitos do conjunto dos números inteiros. A análise do objeto Números Inteiros nessas duas instituições permitirá identificar e analisar elementos de uma transposição didática.

Nesse contexto, um método de categorização das práticas sociais, mais especificamente das práticas e das atividades Matemáticas propostas pelos autores desse livro, faz-se necessário. Para isso, cremos que a TAD oferece ferramentas teóricas e metodológicas apropriadas, pois ela postula "que toda atividade humana regularmente realizada pode descrever-se como um modelo único, que se resume aqui com a palavra praxeologia" (CHEVALLARD, 1999, p.1). Reiterando, entende-se por praxeologia o conjunto formado por tipos de tarefas, técnicas, tecnologia e teoria. O estudo dessas praxeologias é realizado por meio das organizações matemáticas (OM) e das organizações didáticas (OD).

Buscamos categorizar os tipos de tarefa (T) que os autores trazem para a construção dos conceitos das operações com os inteiros. Essas tarefas necessitam de uma técnica (τ) que permita resolvê-las. Essa técnica, por sua vez, deve ser justificada por algumas propriedades, definições ou conceitos matemáticos, o que na TAD é chamado de discurso tecnológico (θ) ou tecnologia. Todavia, esses elementos têm que ser justificados por um discurso teórico (Θ), por exemplo, a teoria dos números. Este último elemento da praxeologia "possui as mesmas funções da tecnologia, porém, com um aspecto mais abrangente" (KASPARY, p.42, 2014).

Nosso objetivo é, assim, modelar a organização praxeológica, a partir das atividades Matemáticas desse livro, partindo do postulado segundo o qual "toda prática institucional pode ser analisada de diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras por meio de um sistema de tarefas relativamente bem circunscritas que são realizadas no fluxo das práticas sociais" (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p.4, tradução nossa).

Para ilustrar a forma de trabalho que a TAD propõe, consideremos um exemplo de tarefa Matemática contida nas propostas de ensino do conjunto dos números inteiros: calcular (+2) + (–3). "A realização de toda tarefa resulta da aplicação de uma técnica [τ]" que a resolve (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p.5, tradução nossa). Entre as possíveis técnicas presentes de alguma forma nos livros, podemos distinguir duas:

1) Calcular os módulos de +2 e –3, subtrair esses resultados e, para a resposta, conservar o sinal do maior módulo;
2) Trabalhar com a reta numérica, que consiste em, partir da abscissa 2 e deslocar para a esquerda, negativamente, três unidades. Para esse nível de ensino, o trabalho com as propriedades e com a definição do módulo pode ser visto como as justificativas das técnicas utilizadas.

Ressaltamos também a possibilidade de um tipo de tarefa tornar-se técnica na sequência dos estudos de um determinado conceito. Em certa etapa de estudo, utilizamos um conceito como uma tarefa a ser realizada e, em decorrência da organização praxeológica, esse conceito será utilizado posteriormente como técnica.

Exemplificando essa situação de expansão de tarefa em técnica, pode-se mencionar o cálculo do valor absoluto. Ensinam-se os conceitos de módulo e as técnicas que possibilitam resolver os seguintes tipos de tarefas: determinar o módulo de um inteiro; identificar entre dois inteiros qual tem maior módulo; somar o módulo de dois ou mais inteiros; determinar a representação gráfica do valor absoluto de um inteiro dado, entre outros. Esses tipos de tarefas, principalmente os que envolvem operar esse conceito, são conhecimentos prévios para os estudos das operações de adição e subtração com os números inteiros, pois a construção dos procedimentos de soma e subtração é estudada a partir dos conceitos de módulo e de distâncias na reta.

A função de uma técnica consiste em como realizar, responder, efetuar uma certa tarefa e que em algumas situações, essas técnicas podem fracassar. Denomina-se como "alcance da técnica" os tipos de tarefa que essa técnica permite resolver. Pode-se também discutir o alcance na perspectiva de ser capaz, ou não, utilizar tal técnica. Para exemplificar, considera-se a técnica para a contagem dos andares percorridos por um elevador, para um prédio que tenha dez andares, dos quais dois sejam subterrâneos. Uma tarefa possível de ser encontrada nos livros didáticos é: Uma pessoa que estacionou no segundo piso abaixo do nível da rua, necessita subir cinco pisos até chegar ao andar em que mora. Que andar é esse? Uma técnica consistiria em contar por quantos andares o elevador subiu, ou seja, do andar – 2 até o andar – 1, esse morador subiu um andar. Continuando essa contagem, do – 1 até o térreo, mais um andar, até chegar ao terceiro andar, totalizando a subida de cinco andares. Supondo a existência de um prédio com 1000 andares, a eficiência dessa técnica estaria comprometida, ou seja, o "alcance" dessa técnica é limitado.

Vale ressaltar que existem técnicas “institucionalmente reconhecidas” (CHEVALLARD, 1998, p. 3, tradução nossa), que são postas em prática de forma natural pelos sujeitos da instituição. Consequentemente, existem outras técnicas alternativas que são questionadas e descartadas devido às paixões institucionais a certo grupo de técnicas. Essa escolha por determinada técnica em detrimento de outras, se dá pela suposta eficiência que cada técnica propiciou aos sujeitos, e, por algumas vezes aquela técnica ter sido a única a ser ensinada. Assim, questiona-se o porquê de se utilizar outras em substituição às primeiras (CHEVALLARD, 1998).

Com a evolução das praxeologias, em uma mesma instituição algumas técnicas que antes eram questionadas e/ou descartadas tornam-se necessárias. E, dependendo da Matemática estudada e construída, algumas técnicas mostram-se mais adequadas para o contexto de estudo em que se está vivendo, podendo serem substituídas por outras que demandariam, num primeiro momento, um grande trabalho cognitivo e de investigação para resolução das atividades propostas. Essas substituições são válidas devido à evolução das praxeologias, propiciando que determinada técnica possa ser mais adequada. As técnicas podem tornar-se rotineiras, o que deixará de requerer esforços cognitivos para sua resolução (KASPARY, 2014). Para exemplificar, podemos pensar na resolução das adições algébricas com a utilização de “tracinhos” azuis e vermelhos, que representam quantidades positivas e negativas ou o uso do algoritmo formal. Para números pequenos o uso dos tracinhos se configura como a técnica inicial, e no decorrer dos estudos há necessidade de se utilizar números maiores, que exigirá o uso do algoritmo, tanto pela quantidade de tracinhos usadas quanto pela economia de tempo e pela eficácia. Nesse contexto de evolução das praxeologias vemos “tarefas problemáticas, que carecem de trabalho intelectual e exploratório para serem resolvidas, se tornarem tarefas rotineiras, que não necessitam de esforços para serem resolvidas por possuírem técnicas bem adaptadas e, por vezes, mecanizadas” (KASPARY, 2014, p.42).

Em uma instituição e para os sujeitos que nela se encontram, uma técnica só existirá se for possível descrever justificativas para que ela seja compreendida. A tecnologia, denominação dessas características que assumem papel de “discursos racionais sobre a técnica” (CHEVALLARD, 1999, p. 3), garante que se realizarmos uma tarefa seguindo determinada técnica, iremos obter uma solução, e garante também, ao menos naquela instituição, a correção dessa técnica.

Tradicionalmente, a função de justificação é mais utilizada do que a função de explicação, devido ao caráter axiomático da Matemática. Esses discursos podem ser mais formais dependendo da instituição, pois há possibilidade de existirem técnicas "autotecnológicas". Essas técnicas são aceitas como uma boa maneira de realizar a tarefa, sem necessidade de serem justificadas. Por serem aceitas de forma natural, os discursos tecnológicos são deixados para as técnicas mais elaboradas, pois essas técnicas se justificam por si mesmas. Calcular a distância entre um ponto de coordenadas inteiras e o zero, na reta, tem essa característica de autotecnologia, pois, basta contar quantas unidades há entre as abscissas zero e do número dado, ou seja, o próprio número inteiro. Uma explicação parece fora de contexto, pois, ao realizarmos dessa forma, é obvio que dará certo. Nesse contexto do ensino dos números inteiros, as técnicas autotecnológicas são raras, pois o nível de abstração será cada vez maior.

As tecnologias também necessitam de serem compreendidas e justificadas. O discurso tecnológico contém "afirmações mais ou menos explícitas, acerca das quais podemos investigar as razões do que? Passa-se então a um nível superior de justificação--explicação-produção, o da *teoria*, Θ" (CHEVALLARD, 1999, p.4).

> A teoria, terra para a eleição de demonstrações, tautologias e outra provas, é sobretudo evanescente: a justificação de uma dada tecnologia é, em muitas instituições, tratada por simples reenvio a outra instituição, real ou suposta, pensada como possuidora de uma tal justificação. Este é o significado do clássico: "Se demonstra em matemática ..." do professor de física, ou então "Já se viu em geometria..." do professor de matemática do passado (CHEVALLARD, 1999, p.4).

Para a organização didática, Chevallard (1999) propõe, como uma das possibilidades, o estudo das realidades Matemáticas por meio da descrição de tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias didáticas ou por meio dos momentos didáticos. Em relação ao quarteto didático, podem-se ter tarefas de ensino ou de estudo, por exemplo, ensinar o algoritmo da adição, em que uma das técnicas seria registrar no quadro dois números e, por meio de exposição oral, mostrar como "armar" e "efetuar" essa soma. Tal escolha pode ser justificativa pela forma que o professor entende a aprendizagem de seus alunos, que será embasada em alguma teoria de aprendizagem. Aprofundaremos o estudo desse quarteto didático no próximo capítulo.

Os momentos didáticos que remetem, "apenas aparentemente, à estrutura temporal de uma organização matemática, [pois] [...] primeiramente, [são] uma realidade funcional de estudo, antes de ser uma realidade cronológica" (ALMOULOUD, 2010, p.124), fundamentarão nossa análise quando nos referirmos à organização didática. Os momentos didáticos são seis e permitem analisar como os autores desenvolvem a proposta de ensino da Matemática, pois, eles nos possibilitam identificar suas escolhas metodológicas e de ensino. Ao se observar o desenvolvimento dessas propostas ou os caminhos que se devem percorrer, algumas situações sempre estarão presentes. Os *momentos didáticos* são apresentados em uma ordem progressiva, mas, nos livros ou nas aulas, eles não seguem necessariamente essa ordem.

O *primeiro encontro com a organização matemática* é o momento em que é apresentado ao aluno ao menos um tipo de tarefa que compõe a praxeologia. Esse (re)encontro pode ocorrer de várias maneiras, por exemplo, em uma dada situação cotidiana que possui elementos da praxeologia ou que permite articular essa situação com o conceito em jogo. Dizemos reencontro, pois o conteúdo pode ser retomado sob outros aspectos e em diferentes graus de aprofundamentos a cada vez que é estudado. Esse *momento de estudo* não tem a pretensão de explorar todos os aspectos do objeto matemático.

O segundo momento, *exploração dos tipos de tarefas* T_i *e da elaboração de uma técnica* τ_i, trata da construção de uma forma de resolver aquela situação, por exemplo. Será apresentado um dos tipos de tarefas e pelo menos uma técnica que permita resolvê-la. Para a constituição da praxeologia, temos que identificar as tarefas que vivem naquela instituição. Assim, iremos buscar condições determinadas para estudar esses conceitos nessa etapa escolar, bem como as técnicas que as resolvem e as justificativas para essas formas de resolver. O segundo *momento* tem por objetivo explorar esses tipos de tarefas e desenvolver suas técnicas. Mas, para a TAD, não se pretende detalhar toda a praxeologia desenvolvida, e sim deixar vários pontos importantes da tarefa, da técnica, da tecnologia e da teoria.

O terceiro *momento*, a *constituição do entorno tecnológico-teórico* $[\theta/\Theta]$ *relativo a* τ_i está inter-relacionado com os demais, pois, a partir do início da construção da organização matemática, podem-se identificar elementos que as justificam, elementos que foram estudados anteriormente e, que articulados ao segundo *momento*, ajudam na construção das tecnologias e das teorias que irão embasar tal organização. Em algumas abordagens, esse momento é trabalhado de forma a iniciar os estudos da praxeologia, isto é, apresentam-se as justificativas, para então, estudar os tipos de tarefas que podem ser subsidiados por esse entorno tecnológico-teórico. “Trata[-se] de uma perspectiva de ensino que secundariza as tarefas Matemáticas. O aluno é guiado, gradualmente, por meio de conceitos simples até a elaboração de obras teóricas complexas” (KASPARY, 2014, p.45).

O quarto *momento, o trabalho com a técnica*, será a situação de aperfeiçoamento da técnica por meio de sua aplicação a um conjunto de tarefas representativas do objeto matemático em estudo. Nesse momento são dadas algumas tarefas e a essas são aplicadas suas respectivas técnicas, ou a técnica, para, em seguida, serem trabalhadas em uma lista de exercícios e problemas semelhantes. Uma abordagem que prioriza esse momento, privilegiando-o em detrimento dos outros momentos, pode ser entendida como tecnicista, que "parte de certas técnicas algorítmicas e se propõe unicamente aqueles exercícios que sirvam como 'treinamento' para que se possa dominá-las" (GASCÓN, 2003, p.24). Agindo assim, o autor de um livro didático, ou o professor, não permitem que seus aprendizes possam trabalhar, “testar técnicas diversas, aplicar algum resultado conhecido, buscar problemas semelhantes, formular conjecturas, buscar contraexemplos [...]” (GASCÓN, 2003, p.25), isto é, que esse aprendiz possa ser ativo em seu processo de aprendizagem e simplesmente não reproduza fatos prontos e conteúdo sem significado para ele.

O quinto momento, *a institucionalização*, é o momento de definição da organização matemática, de explicitação do objeto de estudo, inserindo e retirando os elementos que fizeram parte do trabalho. Podemos dizer que é o momento da formalização do conteúdo, em que o aluno irá ser apresentado às definições, aos procedimentos e aos algoritmos que fazem parte daquele conteúdo, de forma sistematizada.

O sexto momento, referente *à avaliação* da praxeologia, é a ocasião em que o que foi produzido durante o processo será objeto de estudos, em que será verificado o "quanto vale, de fato, a organização matemática que foi construída e institucionalizada" (CHEVALLARD, 1999, p. 23, tradução nossa). Há oportunidade de verificar as relações institucionais, pois, esse momento deve ir além da avaliação das relações pessoais, das pessoas e, buscar o quanto vale a organização matemática construída e institucionalizada. Tal busca permite analisar e, possivelmente, reorganizar os momentos de estudo. Portanto, pode-se criar também uma "interrogação sobre a *técnica em si mesma* – é potente, manejável, segura, robusta?" (CHEVALLARD, 1999, p. 23, tradução nossa). Isso irá colaborar com a construção da praxeologia e, consequentemente, dos processos de institucionalização, funcionando como formadora, pois, renova e irá "revitalizar o estudo, suscitar a reposição de tal ou qual momento, e talvez do conjunto do trajeto didático”. (CHEVALLARD, 1999, p. 23, tradução nossa).

Assim, os *momentos* são apresentados por Chevallard (1999) dentro de uma sequência que, não segue necessariamente uma ordem de acontecimentos, permitindo compreender como é feito o estudo, como é organizado. Podemos ter momentos concomitantes e retomados na praxeologia em questão. Esse ordenamento é didático e pode ser observado na atividade Matemática aleatoriamente, e possui dois tipos de uso. “Em primeiro lugar, constitui um método para a análise dos processos didáticos. Em seguida, permite colocar claramente o problema da realização dos diferentes momentos de estudo” (CHEVALLARD, 1999, p.23).

O trabalho com os momentos não é uma mera classificação, pois, ele nos fornece elementos para entendermos como uma determinada praxeologia Matemática foi constituída. Quando Chevallard fala em lente, nos vem à mente a “lente de aumento”. Essa maneira de análise amplia o quanto quisermos o processo em que foi pensada tal praxeologia. Dessa forma, podemos melhor compreender as escolhas relacionadas ao processo de ensino e, consequentemente, de ter alguns elementos para compreender a aprendizagem.

Pretendemos em nossas análises identificar as organizações matemáticas propostas, descrevendo o quarteto praxeológico matemático, bem como as organizações didáticas, que consistem em identificar os caminhos escolhidos pelos autores para organizarem os estudos, como eles pensaram e articularam os modos de ensinar o conjunto dos inteiros relativos, por meio dos seis momentos didáticos.

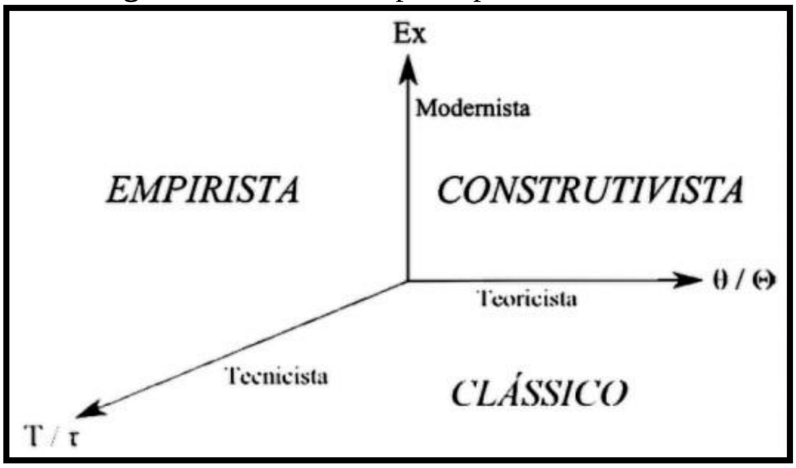
A TAD descreveu um modelo teórico para "investigar as formas de organizar o estudo das Matemáticas nas instituições escolares, isto é, as *organizações didáticas* possíveis" (GASCÓN, 2003, p. 11, tradução nossa). Ao identificarmos as OD por meio dos momentos didáticos, utilizamos esse modelo descrito por Gascón para o aprofundamento e entendimento daquilo que foi colocado em destaque no livro didático, pois alguns autores podem dar ênfase ao ensino por meio do terceiro momento – construção do entorno tecnológico-teórico, outros podem enfatizar o quarto – trabalho com a técnica, outros ainda podem evidenciar o segundo momento – exploração dos tipos de tarefas e de suas respectivas técnicas). Esse modelo de estudo não se restringe apenas a classificar as organizações didáticas, pois

> Das maneiras possíveis de se organizar os processos de ensino e aprendizagem das matemáticas em uma instituição docente, necessitamos de um ponto de vista que nos proporcione critérios do que devemos olhar e com que noções primitivas descreveremos o que está sendo observado (GASCÓN, 2003, p.19, tradução nossa).

Essas organizações didáticas descritas, na verdade, são o ponto de partida para entender as organizações didáticas postas em prática, nos fornecem elementos que permitem destacar fatos importantes, bem como nos orientam a como detectarmos tais fatos e a como trabalharmos com eles. Lembrando que tal "descrição é uma forma particular e relativamente precisa de interpretar e descrever as organizações matemática escolar considerada como um todo" (GASCÓN, 2003, p.21, tradução nossa).

O modelo proposto por Gascón consiste em organizar em um espaço tridimensional as possíveis variações das OD que podem emergir de uma praxeologia.

Figura 2 – Modelo Proposto por Gascón 2003.



Fonte: Gascón, 2003, p.21.

A figura 2 revela seis tipos de organizações didáticas, sendo três delas pautadas nos eixos teoricista, tecnicista e modernista; e três formadas pela junção dessas primeiras, representadas em planos: construtivista, empirista e clássica.

A OD teoricista é pautada no ensino que enfatiza as teorias. Nessa perspectiva, o ensino é conduzido por meio de estruturas axiomáticas da mesma forma como as teorias matemáticas são desenvolvidas, sendo deduzidas a partir de alguns conceitos aceitos como verdadeiros. Portanto, os axiomas são a base dos teoremas e resultados que formam o corpo da teoria Matemática. Para essa OD, Gascón (2003) descreve o seguinte silogismo: a estruturação das teorias é deduzida a partir de um conjunto de axiomas trivialmente verdadeiros e como ensinar Matemática é mostrar essas teorias, logo, o processo de ensino e de aprendizagem Matemática, também deverá ser um processo trivial. Gascón (2003) elucida que existem vários dados empíricos que contradizem essa conclusão, citando a dificuldade dos alunos, que fazem parte dessas instituições, em "aplicar uma técnica Matemática e comprovar se um objeto matemático cumpre os termos de uma definição” (GASCÓN, 2003, p.22), bem como utilizar de forma adequada os teoremas ensinados.

Sendo assim, momentos de exploração de conceitos, de prática das técnicas ou de debates de conceitos não existem ou são raros (GASCÓN, 2003). Portanto, nessa OD, o momento de estudo valorizado é o momento da *constituição do entorno tecnológico-teórico*, que figura como *o primeiro encontro com a organização* e, muitas vezes, também é o momento *da institucionalização* dos conceitos em jogo. Logo, temos um ensino "mecânico e completamente controlado pelo professor", vinculado às atividades determinadas pelas teorias (GASCÓN,2003, p. 23). Tal OD pode acarretar em prejuízo ao ensino, pois, em situações em que as teorias não se aplicam de imediato, tais problemas são decompostos em situações rotineiras, banalizando as atividades Matemáticas e dificultando aos alunos utilizarem de forma correta os teoremas ou aplicarem as técnicas, ou ainda comprovarem se determinado objeto de estudo está satisfazendo as condições da teoria.

A organização didática tecnicista é pautada no ensino das técnicas algorítmicas, em que o ensino da Matemática é restrito aos treinamentos das técnicas ensinadas pelo professor, que mais uma vez é o detentor do conhecimento e responsável por transmiti-lo. Essa tendência tecnicista surge com o movimento Matemática Moderna, em um período de aumento do fracasso do ensino da Matemática. Nas organizações didáticas tecnicistas, o momento do *trabalho com a técnica* é o principal, pois, o ensino é relativo à reprodução das técnicas trabalhadas. Esse "treino" é realizado por meio de atividades que não demandam "pensar" para se aplicar os conhecimentos aprendidos. Atividades de resolução de problemas, em que se tem de escolher técnicas adequadas para a solução, não estão presentes nessas organizações, bem como "se excluem do repertório das técnicas as estratégias de resolução que não são algorítmicas, [...] e uma fixação nas técnicas elementares e algorítmicas que impede tomar em considerações problemas matemáticos não rotineiros" (GASCÓN, 2003, p. 24, tradução nossa).

Ambas as organizações didáticas, teoricista e tecnicista, são compreendidas como reducionistas; os processos de ensino são totalmente pensados e controlados pelo professor, e os alunos reproduzem o que lhes foi lecionado. Cada qual com suas especificidades: na teoricista os alunos são como "caixas vazias" que devem ser preenchidas por conceitos, dos mais simples aos mais complexos, de forma gradual. Em contrapartida, na tecnicista, os alunos aprendem à medida que são treinados, melhorando, assim, o domínio das técnicas por meio de repetições de exercícios do tipo "siga o modelo". E, a junção dessas organizações é conhecida como modelos clássicos.

Essa forma reducionista de se pensar o ensino propiciou o fracasso desse modelo de ensino, por "enfatizar uma única dimensão das atividades Matemáticas, ignorando os restantes" (GASCÓN, 2003, p.26). Dessa forma, diante de situações Matemáticas de resoluções de problemas, os alunos não conseguem escolher as técnicas que as solucionam.

Na busca de reverter esse quadro de insucesso referente à aprendizagem, surge a OD modernista, "que tende a identificar a atividade Matemática como a *exploração de problemas não triviais*" (GASCÓN, 2003, p.25, grifo do autor, tradução nossa). Essa organização parte de algumas situações em que o aluno não resolve a tarefa de imediato, quando ele não conhece a resolução e, nesse caso, ele vai "testar várias técnicas, aplicar algum resultado conhecido, buscar problemas semelhantes, formular conjecturas, buscar contraexemplos ou tentar resolver o problema um pouco diferente" (GASCÓN, 2003, p.25, tradução nossa).

As organizações didáticas teoricista, tecnicista e modernista estão vinculadas, respectivamente, ao "momento tecnológico-teórico, θ/Θ, o momento de trabalho com a técnica, T/τ, e o momento exploratório, Ex." (GASCÓN, 2003, p. 19, tradução nossa), bem como ao olharmos o modelo tridimensional são OD fixadas em um dos eixos.

O plano formado pelos eixos tecnicista e teoricista, constitui o modelo clássico. Nesse plano, a postura de ensino é pautada na construção das justificativas teóricas e na exploração de atividades de aplicação imediata, tendo como característica a "valorização de aspectos teóricos e tecnológicos" (BITTAR, FREITAS e PAIS, 2013, p.19). A combinação dos eixos tecnicista e modernista dá origem ao modelo empirista, que, por sua vez, enfoca as partes práticas e técnicas dos conteúdos matemáticos, exemplos práticos e a exploração do trabalho com as resoluções de tais situações, que atribui "maior valorização aos aspectos práticos ou técnicos do estudo da Matemática" (BITTAR, FREITAS e PAIS, 2013, p.19). E, por último, temos a junção dos eixos modernista e teoricista, que formam o modelo construtivista, "consiste em priorizar atitudes mais exploratórias ou construtivistas da atividade Matemática escolar". (BITTAR, FREITAS e PAIS, 2013, p. 19). Nesse caso, é apresentado um problema e desenvolvida toda a proposta por meio de discussões, explorando o momento da elaboração dos tipos de tarefas e das técnicas, e os exemplos práticos. O aluno constrói seus conhecimentos por intermédio do auxílio de bons questionamentos trazidos pelo professor e, as atividades de memorização perdem espaço nesse plano das organizações didáticas.

As análises preliminares nos fizeram expandir os estudos acerca da TAD, permitindo-nos recorrer a outros elementos dessa teoria. Assim, discorreremos, a seguir, sobre os conceitos das organizações didáticas vistas sob o olhar de uma praxeologia didática. Inicialmente nos propomos a olhar as OD por meio apenas dos momentos, mas alguns dados nos propiciaram uma investigação por meio dos quartetos didáticos.

3.1 TÉCNICAS E TECNOLOGIAS DIDÁTICAS

As técnicas e as tecnologias didáticas são dois elementos de uma organização didática que estão vinculados às tarefas de estudo ou de ensino. Tarefas do tipo "ensinar algo" apresentam ideias e características relacionadas às metodologias e às abordagens de ensino e, para realizá-las, o professor deve "lançar mão" de metodologias e de algumas escolhas para ensinar.

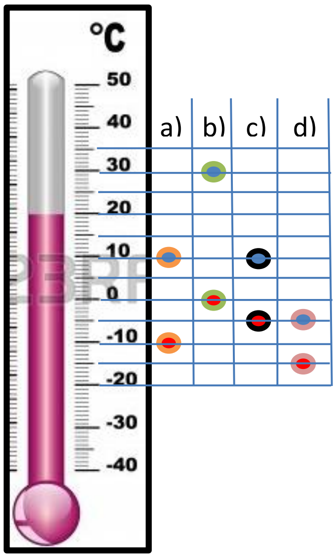
Para Gascón (2003), as organizações matemáticas e didáticas caminham paralelamente. Para a Matemática, têm-se as tarefas, técnicas, tecnologias e as teorias Matemáticas e, para as didáticas, tem-se um quarteto dito didático. "A noção de *organização* – ou *praxeologia* – *didática*, OD, [possui] duas faces: 'práxis' – formada por *tarefas e técnicas didáticas* – e o discurso racional o 'logos' sobre a prática – formado por *tecnologias e teorias didáticas.*" (GASCÓN, 2003, p.17, tradução nossa). As justificativas do uso desta ou daquela forma de ensinar determinam o bloco tecnológico-teórico, que consiste em compreender as formas com que os professores entendem como seus alunos aprendem. A análise da metodologia escolhida nos possibilita inferir o modelo epistemológico de aprendizagem adotado: empirista, clássico ou construtivista (GASCÓN, 2003).

Tomemos o ensino da soma de números inteiros como exemplo de uma tarefa didática. Uma primeira ação de ensino poderia ser a exposição de uma situação-problema seguida de sua exploração coletiva, finalizada pela construção das técnicas de resolução de tal soma. Uma segunda ação de ensino consistiria de um roteiro de escolha e exploração de exemplos de aplicação do algoritmo. Assim, o algoritmo da soma consiste na técnica Matemática e, como se ensina esse algoritmo, a técnica didática. Logo, expor uma situação-problema e, em seguida, construir a técnica Matemática ou quando se aplica o algoritmo por meio de vários exemplos são técnicas didáticas para se resolver a tarefa didática para o ensino da soma de inteiros. Ambas as técnicas didáticas estão pautadas na forma em que se acredita que os alunos aprendem.

Para melhor compreensão dessas ideias, levemos agora esse fato à sala de aula, simulando uma segunda situação em que um professor propõe determinada atividade a seus alunos. Pretende-se nessa atividade ensinar a comparação de inteiros sem poder utilizar-se dos conceitos de anel e de domínio de integridade e suas propriedades, tais como: relação de ordem, princípio da boa ordenação, lei do cancelamento, entre outras. Essas propriedades terão o papel de justificar e ajudar na construção da comparação dos números inteiros. Diante desse cenário, um possível procedimento de resolução, técnica Matemática, poderia ser: dados dois números inteiros o número que estiver localizado num ponto mais alto será o maior e, de forma semelhante, o que estiver na posição mais baixa será o menor. Vejamos:

Entre os dois números inteiros dados, o primeiro é maior ou menor em relação ao segundo?

a) + 10 e – 10.
   R: + 10 é o maior, pois está acima de – 10;
b) + 30 e 0.
   R: + 30 é o maior, pois está acima de 0;
c) – 5 e +10.
   R: – 5 é menor, pois está abaixo de +10;
d) – 15 e – 5.
   R: – 15 é menor, pois está abaixo de – 5.



Nesse exemplo, utilizou-se bolinhas para determinar a altura dos valores. Essa representação auxilia na comparação que será realizada, pois é preciso apenas observar se o número está acima ou abaixo do outro. Vemos que, para realizar a tarefa Matemática de comparar os inteiros, é aplicada uma técnica Matemática, que propiciou o ensino do procedimento de comparar, ou seja, a técnica didática consistiu na apresentação de exemplos da aplicação e do treinamento da técnica Matemática "se + 10 está acima de – 10, na representação do termômetro, então + 10 é maior que – 10".

A técnica Matemática poderia consistir ainda em localizar e comparar os números por meio das seguintes observações: os números positivos são maiores do que o zero e do que os negativos; o zero é maior do que os negativos; entre dois números negativos, o menor será o mais distante do zero, valendo-se do fato da sequência dos números negativos ser decrescente.

Para a descrição do bloco tecnológico/teórico que embasa a comparação de dois inteiros positivos, podem-se utilizar proposições como a da relação de ordem no conjunto dos números naturais: como já vimos, para os inteiros positivos n, m, se $n \leq m$ então $n + x = m$ tem solução ou $n = m$. E a relação de ordem deve ser compatível com a adição, ou seja, se $n \leq m$, então $n + c \leq m + c$, para quaisquer n, m e c inteiros e compatível com a multiplicação, ou seja, se $n \leq m$, então $n.\ c \leq m.\ c$, para quaisquer n, m e c inteiros e c positivo.

Tais conceitos tornam mais claro o fato de os autores de livros didáticos utilizarem metodologias de ensino que envolvam algumas técnicas Matemáticas sem justificá-las. Requer-se dos alunos que memorizem a técnica, sem compreenderem os passos para a resolução ensinados. Um questionamento possível seria: Como utilizar as ideias de soma e multiplicação com inteiros, se geralmente essas operações são posteriores, no ensino fundamental, ao ensino da comparação? Ou ainda, como poderiam utilizar as ideias de resolução de equações e os encadeamentos lógicos da construção dos anéis e dos domínios de integridade, sem os alunos possuírem outras estruturas conceituais necessárias ao ensino da relação de ordem, que está contido no trabalho com essas estruturas algébricas?

Vemos que a ordem de apresentação dos conceitos tem influência sobre as possíveis justificativas, pois, os elementos tecnológicos podem ser buscados nos conceitos ensinados anteriormente, como algumas propriedades ou como a compatibilidade da relação de ordem para a adição. Se para a organização didática, alguns conceitos forem excluídos e, estes forem tecnologias dos que foram ensinados, essas escolhas irão influenciar nas justificativas que serão trabalhadas.

Além das escolhas, a forma como se procede o ensino também é fator de influência para a aprendizagem dos alunos. Por exemplo, debater com os alunos algumas regularidades nas operações que estão executando, encaminhando as discussões a estabelecer algumas conjecturas.

Assim, a ordem de condução desses trabalhos é fator determinante no ensino, pois, no livro didático, alguns conceitos são antecipados em relação ao estudo da construção dos inteiros. Para se justificar ou trabalhar de maneira formal, alguns conceitos apenas serão ensinados em anos posteriores. Portanto, numa técnica didática “devido à ausência de uma técnica Matemática, o professor ensina, sugerindo que o aluno pegue, manipule e manuseie o objeto (ostensivo)” (ALMEIDA, 2015, p. 54), ou que observe, risque, meça, mude de lugar, entre outras ações que, não necessariamente, são Matemáticas.

Para o caso das tecnologias didáticas, seguem-se orientações semelhantes, pois como justificar os procedimentos de ensino de um conceito matemático que não está ao alcance cognitivo dos alunos? Para o exemplo das comparações utilizamos um excerto do livro Praticando Matemática:

> A reta numérica também nos ajuda a comparar números. Entre dois números, qual é o maior? Basta observar qual tem representação mais à direita na reta numérica: esse será o maior: Vimos que – 3 < – 1 (Lembra-se das temperaturas?). Isso se confirma na reta numérica, pois a representação de – 1 está à direita da representação de – 3. (ANDRINI, VASCONCELLOS, 2014, p.60).

Como descrever uma tecnologia didática para a técnica de observar a representação mais à direita na reta? A tecnologia Matemática permeia os conceitos que enunciamos anteriormente, mas para essa etapa de escolaridade como descrever e justificar essa técnica de ensino? No Livro Praticando Matemática é proposta uma justificativa para a abordagem didática, pois, seus autores valem-se da seguinte regra ao tratarem da construção da reta numérica:

> Os números negativos também podem ser associados a pontos de uma reta. Traçamos uma reta e escolhemos um ponto para representar 0 zero; usando sempre a mesma unidade, marcamos os pontos que representam os números inteiros positivos à direita do zero e os pontos que representam os números inteiros negativos à esquerda do zero (ANDRINI, VASCONCELLOS, 2014, p.61).

Dessa forma, a justificativa da representação mais à direita ou mais à esquerda pauta-se na construção da reta numérica, ou seja, colocamos os negativos à esquerda e, anteriormente nesse livro, afirmou-se que os positivos são maiores que os negativos, e essas são as tecnologias utilizadas pelos autores. Os autores contornam o fato de tratarem de um conceito que, por um lado, segundo o currículo, pode ser ensinado no sétimo ano do ensino fundamental, mas que, por outro lado, muitos dos conceitos não estão no nível cognitivo desses alunos.

Em nossas primeiras análises, nos deparamos com uma frequência considerável de figuras, gráficos, tabelas, entre outras formas de representar as ideias e os conceitos acerca dos números inteiros. Tal fato nos motivou a estudarmos a ideia de ostensivo e de não ostensivo, presente na teoria antropológica do didático.

3.2 OSTENSIVOS E NÃO OSTENSIVOS

Segundo Bosch e Chevallard (1999), podem ser denominados de objetos ostensivos não apenas as figuras, mas tudo aquilo que é perceptível aos nossos sentidos e que pode ser utilizado, tais como: os sons, os registros gráficos, a escrita, o material dourado, os risquinhos, as notações Matemáticas, entre outros.

O estudo desses objetos fez-se necessário, pois os consideramos parte integrante da praxeologia Matemática descrita nos livros de nossa pesquisa. Eles “constituem a parte perceptível da atividade, [...] na realização da tarefa esses objetos podem ser vistos tanto pelos observadores como pelos atores” (CASABÓ, 2001, p. 11, tradução nossa). Esses objetos são, portanto, partes constitutivas da atividade Matemática. Eles são instrumentos e ferramentas que possibilitam o acesso aos conceitos matemáticos presentes nos livros didáticos. Nesse caso, quais as influências que tais objetos podem ou não suscitarem nos processos de ensino? São objetos de naturezas e significados distintos? Podem agir como "facilitadores" da aprendizagem? Ou não têm participação efetiva nessas praxeologias?

O uso de figuras é o principal exemplo de objeto ostensivo que temos no livro didático. Por exemplo, na operação + 3 – 5, podemos utilizar a técnica, substituiem-se as quantidades positivas pelos sinais de “+” e as negativas pelos de “–”, em seguida, para cada sinal de “+” elimina-se um de “–”, por fim, o número de sinais que restarem, serão a solução da operação, ou seja, obtém-se – 2:

Quadro 2 – Exemplo do uso da técnica com ostensivos gráficos.

Substituímos os valores positivos pelos sinais de "+" e os negativos pelo de "–";

$$\begin{array}{cc} +3 & -5 \\ \downarrow & \downarrow \\ +\,+\,+ & -\,-\,-\,-\,- \end{array}$$

Um sinal positivo anula um sinal negativo e o que resta será a solução;

$$\cancel{+}\cancel{+}\cancel{+}\cancel{-}\cancel{-}\cancel{-}\,-\,-$$

Logo, + 3 – 5 = – 2.

Fonte: Elaborado pelos autores da pesquisa.

Percebemos que ambas as representações da operação são objetos ostensivos, pois elas são perceptíveis ao sentido da visão e passíveis de serem trabalhadas. E, nesse caso, também podemos afirmar que são ferramentas importantes para a aprendizagem do conceito de somar inteiros, pois são por meio desses objetos que temos acesso aos conceitos dessa operação.

Discorremos até aqui sobre as formas de representar os conceitos e, para Bosch e Chevallard (1999), os conceitos são denominados de objetos não ostensivos. Com o exemplo do quadro 2, identifica-se que os objetos não ostensivos, nesse exemplo, representados pela noção de adição com números inteiros, estão sendo manuseados por meio dos ostensivos. Mas, na realidade, estamos manuseando os sinais de adição, subtração, os algarismos e os tracinhos, e que, intencionalmente ou não, são gerenciados pelos conceitos de adição. Pode-se, ainda, realizar esse exemplo mentalmente, o que determinaria um outro trabalho, interiorizado, dos ostensivos (BOSCH & CHEVALLARD, 1999). Diante desse contexto do uso de objetos ostensivos e não ostensivos, e segundo Bosch e Chevallard (1999, p. 11, tradução nossa), "toda atividade humana pode ser escrita, no aspecto aparente, como um manuseio de objetos ostensivos" orientada pelos objetos não ostensivos. Ressalta-se que, não podemos entender os objetos não ostensivos “como entidades mentais, pessoais e individuais, que existiriam somente nas cabeças ou no nosso espírito, [...] são sempre objetos institucionais onde a existência depende muito raramente da atividade de uma única pessoa” (BOSCH, CHEVALLARD, 1999, p.10).

Em nosso exemplo, a "aplicação de uma técnica se traduz por uma manipulação de ostensivos reguladas por não ostensivos" (BOSCH, CHEVALLARD, 1999, p.11, tradução nossa), pois a ação de trocar o número +3 por +++, ou quando se cancela um sinal de + com um –, estamos além do trabalho com os objetos, acionando alguns conceitos, mesmo sem ter consciência disso, de número, de subtração, da propriedade da existência do elemento neutro, entre outros.

Assim os não ostensivos permitem um trabalho com os ostensivos, pois, para realizarmos a tarefa das trocas ou do cancelamento, alguns conceitos são postos em prática e permitem a aprendizagem de outros. Não se pode conceber os não ostensivos como algo que já existia, que exista em nossas mentes ou na mente de uma pessoa. Objetos ostensivos são construídos por um grupo de pessoas, que organizaram e estruturaram formas de acessar tais objetos.

Dessa forma, não é possível dizer quem é acessado primeiro, pois esse trabalho é simultâneo, ou seja, há uma ativação dos objetos ostensivos e não ostensivos na realização das atividades. Outro fato importante é que, ao representarmos ostensivamente “+ 3 – 5 = – 2”, existem duas possibilidades, se somos capazes de efetuar essa operação, provavelmente o não ostensivo – noção de adição algébrica com inteiros – está sendo usado, ou, se apenas foi realizada uma cópia, o não ostensivo – noção de cópia ou reprodução – foi ativado. O trabalho com os ostensivos ou sua identificação, é fruto da aprendizagem, consequentemente, das ações institucionais que o sujeito vivenciou. Portanto, só teremos objetos ostensivos, se estes estiverem vinculados a objetos não ostensivos, pois necessitamos deles para regular as ações de identificar e utilizar os ostensivos. Os objetos ostensivos são ensinados, pois, de outra maneira, bastaria apresentá-los para que simplesmente fossem manuseados ou no mínimo percebidos. Assim, esses objetos fazem parte de um contexto que não depende da atividade de uma pessoa, e sim, do resultado de uma ação institucional. "Os objetos ostensivos e os objetos não ostensivos estão unidos por meio de uma dialética que considera os segundos emergentes da manipulação dos primeiros e, ao mesmo tempo, como meios de guiar e controlar essa manipulação" (BOSCH, CHEVALLARD, 1999, p.10, tradução nossa).

Diante desse cenário, os objetos ostensivos são fundamentais para a atividade Matemática, pois é por meio deles que é possível realizar tal atividade. Consideramos esses objetos como partes integrantes das organizações matemáticas, sem os quais seria impossível de realizar as atividades matemáticas. Por exemplo, uma criança, ao ser apresentada ao algarismo três, no caso aos ostensivos "3" e "três", necessita aprender as formas e os contextos em que podemos utilizar esse símbolo, da mesma forma como deve aprender os possíveis significados que esse símbolo possui. Se estiver em: número da residência, número de telefone, quantidade recebida de mesada, valor das compras do supermercado, na nota "tirada" em uma avaliação, representação por risquinhos e balõezinhos, representação da quantidade de cadeiras, ou quando for substituí-la por sinais de "+". Inicialmente, dependendo da forma de ensino, a criança pode identificar o símbolo, reproduzindo que é o algarismo 3, mas sem compreender seu significado. A professora mostra o símbolo e diz que se chama três, mostra que três risquinhos, três cadeiras, três alunos ou três "objetos quaisquer" podem ser substituídos por 3. Assim, a partir do trabalho com ostensivo é que haverá possibilidade de acesso ao significado do símbolo, em que a criança apreenda os conceitos que permitem trocá-lo por três sinais de mais – não ostensivos.

No decorrer das atividades Matemáticas, é natural a evolução das praxeologias exigindo níveis de abstrações maiores, em que alguns ostensivos vão sendo substituídos por outros ou abandonados. Em alguns casos, necessita-se reduzir ou compactar os elementos que fazem parte da atividade; faz-se necessário o uso de um ostensivo mais econômico, mais eficiente. A troca dos algarismos, em uma adição, por sinais de mais e de menos é um exemplo de ostensivos que são abandonados quando se tem quantidades grandes para serem representadas, haja vista que a criança deverá, nesse contexto, ter internalizado os conceitos mobilizados no ato das trocas e dos cancelamentos. Assim, alguns ostensivos são necessários e fundamentais quando da introdução de um determinado conceito ou algoritmo e, conforme o estudo evolui, os ostensivos são reduzidos, substituídos ou abandonados.

A teoria antropológica do didático nos auxiliará assim, na caracterização do ensino introdutório dos inteiros por meio da descrição das organizações matemáticas, tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, bem como por meio das organizações didáticas, os modos como são construídas e organizadas as propostas de ensino utilizadas no livro didático. Com os estudos acerca das construções dos inteiros e com o detalhamento das organizações praxeológicas, analisaremos aspectos das transposições didáticas desse conceito que apresenta conteúdos acima do nível cognitivo dessa etapa de escolaridade. A teoria antropológica do didático propicia que seja "dissecado" os processos de ensino, pois, para cada atividade Matemática será possível observar por meio das tarefas propostas, quais foram as estratégias e os materiais de apoio usados no ensino das técnicas e das justificativas tecnológicas e teóricas, bem como, quais foram os momentos de estudos foram priorizados. Em outras palavras, ao estudarmos as tarefas e as técnicas que as resolvem podemos modelar as escolhas metodológicas dos autores, que favorecem a identificação do processo de transposição.

Para o desenvolvimento da nossa investigação, fez-se necessário estabelecer um panorama de algumas pesquisas que discutem a análise de livro didático sob o viés da teoria antropológica do didático. Dessas pesquisas, apresentamos algumas contribuições e considerações sobre a teoria antropológica do didático, que nos orientaram em nossas análises.

3.3 ANÁLISE DE LIVRO DIDÁTICO COM A TAD

Nesta seção, apresentaremos quatro dissertações que tratam, respectivamente, da passagem da aritmética à álgebra, da formação inicial e do início de docência, da análise de propostas de ensino do campo aditivo e de polígonos e figuras espaciais.

Nogueira (2008) investigou a introdução formal da álgebra em três livros didáticos do 7º ano do ensino fundamental, tendo foco na caracterização desse ensino introdutório e como se dá a passagem de algumas resoluções aritmética para resoluções algébricas. Para o estudo de Nogueira, a Teoria Antropológica do Didático (CHEVALLARD, 1999) foi utilizada para analisar aspectos matemáticos e didáticos desses livros didáticos e o principal tipo de tarefa abordada nessas coleções foi a resolução de equações. As atividades propostas nos livros didáticos apareciam tanto de forma direta – o enunciado dava uma equação e pedia que se encontrasse a solução – quanto de forma indireta, como por exemplo, da transcrição da linguagem natural para a linguagem Matemática (algébrica).

Em sua síntese, Nogueira (2008) revela dois objetivos do trabalho introdutório do atual 7º ano com a álgebra: "preparar o educando para compreender que existem meios mais econômicos e igualmente eficazes para resolver certos tipos de situações além dos procedimentos aritméticos" (NOGUEIRA, 2008, p.102); "apresentar técnicas que envolvem raciocínios exclusivamente algébricos para desenvolver e chegar à resposta procurada" (NOGUEIRA, 2008, p.103).

Nas três coleções analisadas, os principais tipos de tarefas identificados para esse estudo introdutório são referentes às resoluções das equações do 1º grau, quando o ensino é pautado em apresentar formas de resolver tais equações e em propiciar o treino dessas formas por meio de um “passo a passo”. Nogueira também comparou as escolhas de apresentação do tema equação nos três livros, revelando que mesmo fazendo uso de diferentes organizações matemáticas e didáticas, as três coleções parecem visar um objetivo comum: uma mesma praxeologia Matemática para a resolução das equações. Entretanto, as diferentes abordagens adotadas pelos autores devem implicar em diferentes aprendizagens.

Oliveira (2010) investigou as relações entre os conhecimentos adquiridos na formação inicial por um professor de Matemática em início de docência, e os conhecimentos utilizados por ele em suas aulas sobre o tema funções. Para identificação dessas relações, a autora analisou planejamentos do professor, o livro didático adotado por ele, além de entrevistas realizadas com o professor. Para organizar o estudo Oliveira buscou identificar as organizações matemática e didática mobilizadas pelo professor o que fez com o apoio da teoria antropológica do didático. Outra teoria utilizada no estudo para discutir as relações entre os conhecimentos adquiridos na formação inicial e os colocados em práticas durante as aulas foi a Base de Conhecimentos para o Ensino, definida por Shulman (1986), Wilson, Shulman & Richert (1987), Grossman, Wilson & Shulman (1989).

Como conclusão do estudo realizado, Oliveira (2010) destacou duas grandes influências na prática do professor: o livro didático e as práticas vivenciadas na formação inicial e na educação básica. De suas considerações finais, destacamos os seguintes pontos:

a) "A análise do livro didático contribuiu para um melhor entendimento da prática desenvolvida pelo professor, pois, pudemos compreender seus procedimentos em determinadas situações" (OLIVEIRA, 2010, p.139). A autora concluiu que o professor estruturou suas aulas valendo-se do livro didático, mas por diversas ocasiões sentiu-se à vontade para mudar, adaptar e trocar exemplos e exercícios;
b) O professor revelou fortes traços de sua formação inicial quando, ao prever possíveis dificuldades na aprendizagem, realizou algumas adaptações metodológicas, utilizando atividades vivenciadas durante o período de estágio supervisionado, substituindo variáveis pouco utilizada: *v, d, t;* pelas mais conhecidas: *x, y;* e trocando números racionais fracionários por naturais. Sendo assim, Oliveira (2010) evidenciou que "não basta a um professor dominar os conteúdos de sua especialidade, [...] (ou) prover de todas as técnicas e procedimentos relativos ao ensino. É necessário que haja articulação entre essas áreas do conhecimento” (OLIVEIRA, 2010, p.140).

A autora conclui sua dissertação chamando a atenção para a necessidade de estudos voltados à análise de livro didático, pois, sua pesquisa permitiu evidenciar que, para a prática do professor sujeito de sua pesquisa, o livro foi ferramenta fundamental.

Kaspary (2014) e Almeida (2015) investigaram propostas de ensino contidas em livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental. Em suas dissertações, ambas valerem-se da Teoria Antropológica do Didático para a descrição da organização matemática e da organização didática propostas nos livros didáticos que analisaram. As duas investigações pautaram-se na coleção mais adotada entre as que foram aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático de 2013, que avaliou coleções de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental. Ambas as pesquisas voltaram seus olhares para todos os 5 volumes dessa coleção.

Kaspary (2014) investigou a estrutura aditiva delimitando como objetivo a caracterização das propostas de ensino dessas operações com os números naturais. Esse foco de pesquisa aproxima-se do nosso, que é o estudo das operações de adição e subtração dos números inteiros e, para tal, utilizaremos a teoria antropológica do didático.

Assim, a leitura dessa dissertação nos auxiliará no entendimento da utilização dessa teoria aplicada a um objeto semelhante ao nosso.

Kaspary (2014) fez uso também da Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (VERGNAUD, 1990). A autora definiu como tipos de tarefa, *a priori*, os tipos de situações identificadas pela TCC no estudo do campo aditivo. Essa praxeologia foi complementada no transcorrer das análises dos livros didáticos com os tipos de tarefas presentes nos livros didáticos e que não são contemplados pela classificação de Vergnaud. Com a análise da coleção outros tipos de tarefa foram acrescentados à classificação inicial. Assim, a autora pôde identificar as praxeologias Matemáticas e didáticas presentes nos 5 volumes da coleção atingindo, com isso, seus "dois objetivos específicos que se resumem em investigar *que conteúdo* de Matemática é abordado e *como* essa Matemática é trabalhada" (KASPARY, 2014, p.133).

Em suas considerações finais, Kaspary, dentre outros pontos, mostra que "fica evidente a valorização do ensino pelas técnicas de resolução, haja vista que tarefas [...] (não contextualizadas) empregadas, geralmente, em momentos posteriores ao da apresentação da técnica com o intuito de promover a sua prática (KASPARY, 2014, p.134) são mais utilizadas as técnicas do tipo contextualizadas.

Almeida (2015) analisou a proposta de ensino de polígonos e figuras espaciais formados por polígonos, investigando a articulação entre o ensino de polígonos e poliedros. Na pesquisa de Almeida (2015), encontramos aspectos do ensino e do histórico da geometria, bem com a geometria na educação matemática. Encontramos também, aspectos da formação de professores e da importância do livro didático. A pesquisadora descreve que "a construção do pensamento geométrico espacial é atendida de forma parcial nos livros didáticos analisados, uma vez que há poucas atividades que exploram o desenvolvimento da visualização" (ALMEIDA, 2015, p. 20); ou que "as coleções [...] analisadas contemplaram parcialmente as discussões apresentadas pelos estudos da didática da Matemática" (ALMEIDA, 2015, p. 20).

Almeida (2015, p. 99) relata que

> Para a definição da praxeologia matemática, segundo Chevallard (1999), é necessário que modelemos a atividade matemática por meio do quarteto [T/τ/θ/Θ], no entanto, ao término da modelagem das atividades propostas na coleção analisada, observamos que os elementos relacionados ao bloco do saber [θ/Θ], ou bloco teórico, raramente aparecem, e quando isso acontece é de modo implícito, o que é compreensível devido ao nível de ensino, dificultando, assim, sua identificação.

Dessa forma, nos livros analisados os autores priorizam o ensino das técnicas dos tipos de tarefas propostos, sem apresentar as tecnologias e a teoria que justificam as *técnicas* de resolução. Essas considerações aproximam-se de uma de nossas hipóteses, pois, no estudo dos inteiros alguns conceitos estão “alocados” em níveis cognitivos que não fazem parte da realidade do sétimo ano do ensino fundamental. Essa postura de contornar alguns obstáculos de estudo e aprendizagem é reflexo do ano de escolaridade a que o livro didático se destina. Assim, iremos investigar se nos livros do sétimo ano tal fato ocorre e como ocorre, e se essas escolhas metodológicas comprometem ou não a organização das propostas de ensino.

Todas as pesquisas que analisamos trouxeram caracterizações da Matemática contidas nos livros investigados, bem como as formas como os autores pensam e articulam (ou não) essa Matemática para organizarem as propostas de ensino dos conteúdos escolhidos. Tais pesquisas possibilitam o entendimento de algumas questões referentes às dificuldades que as escolhas metodológicas podem gerar, bem como os aspectos que exercem influências na prática dos professores. A seguir, organizamos a nossa análise referente ao livro didático mais adotado no Programa Nacional do Livro Didático de 2014. Nele buscamos elementos que apontem para as possíveis transposições didáticas realizadas para o ensino dos números inteiros.

4 ANÁLISE DO LIVRO PRATICANDO MATEMÁTICA

Nossa análise pautou-se em um volume de uma coleção aprovada pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD/2014. Segundo o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação – FNDE[18] foram distribuídos 2 831 411 exemplares para os anos finais do ensino fundamental, entre manuais do professor[19] e livros do aluno. Investigamos o livro do 7º ano da coleção "Praticando Matemática - Edição Renovada[20]", cujos autores são Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos. Essa coleção, com uma distribuição de 717.019 exemplares, constitui aquela com maior adesão no PNLD/2014. Voltamo-nos, especificamente, para o capítulo 3 do livro do 7º ano, que trata da introdução aos números inteiros e das operações de adição e subtração nesse conjunto. Essa unidade denominada pelos autores de "Números Negativos", é composta das seguintes seções: 1 - *Onde encontramos os números negativos? 2 - Comparando números;* 3 - R*eta numérica;* 4 - *Distâncias na reta numérica;* 5 - *Adição envolvendo números negativos;* 6 - S*ubtração envolvendo números negativos;* 7 - *Simplificando registros.*

Buscamos inicialmente, compreender como os autores organizaram esse livro, estabelecendo um panorama geral desse volume. Segundo os autores desse livro,

> O primeiro passo é criar um ambiente de aprendizado que permita dar significado ao que se aprende, aproximando a Matemática do dia a dia do aluno. Nesse sentido, a contextualização de conteúdos exerce papel de destaque e deve ser explorada. Na obra, a contextualização de conteúdos está presente, mas de forma criteriosa, cuidando para não levar à banalização e à perda de consistência. O aluno deve conhecer e aplicar conhecimentos da Matemática na vida prática, mas há outro objetivo também importante: desenvolver nele o gosto pelo desafio, presente em situações da própria Matemática, de maneira que as abstrações não constituam o início ou o fim do processo, e sim mediações indispensáveis para a construção do conhecimento

---

[18] Disponível no site: http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/livro-didatico-dados-estatisticos. Acesso em: 02 de Maio de 2014.

[19] O Manual do Professor, em geral, é dividido em duas partes, a saber, a parte destinada ao professor e o livro do aluno. O manual visa orientar e justificar as escolhas do autor e nele há sugestões de atividades, explanações tecnológicas e teóricas acerca dos conteúdos explorados, bem como orientações que visam embasar os processos de ensino organizados pelos autores, o que fornece pistas para a modelagem das organizações didáticas.

[20] No livro analisado, a parte destinada ao aluno contém 288 páginas, distribuídas em unidades, "que tratam predominantemente de um dos campos da matemática escolar. Cada unidade e subdividida em itens dedicados a tópicos do conteúdo, nos quais há, sempre, explanações acompanhadas de exemplos e de exercícios propostos" (BRASIL, 2013, p.59). Temos também, ao final desse volume cinco seções referentes às *sugestões de algumas leituras* e a *sites aos alunos*, às *referências bibliográficas*, aos *moldes e* às *malhas para as atividades* e *às respostas aos exercícios propostos*. Além do que foi descrito acima, encontramos no Manual do Professor mais 128 páginas, distribuídas em nove seções que tratam de vários temas de muita relevância ao professor, como ideias sobre avaliação, temas sobre práticas metodológicas, informações diversas sobre os conteúdos abordados no livro e sugestões de leituras.

> matemático. Visando ao equilíbrio destes dois aspectos que se complementam, sempre que possível a obra apresenta os temas e sua exercitação por meio de problemas, valorizando estratégias diversificadas de resolução, a compreensão e a aplicação de conceitos, o uso adequado de procedimentos e a análise da solução obtida. (ANDRINI, VASCONCELLOS, MANUAL DO PROFESSOR, 2013, p. 5).

Os autores anunciam dois aspectos: aplicar conhecimentos matemáticos na vida cotidiana e aplicar os conhecimentos matemáticos em situações da própria Matemática. Pretendemos, assim, identificar esses aspectos destacados no Manual do Professor, pois eles revelam algumas das escolhas didáticas desse volume.

Investigamos alguns elementos que possibilitassem descrever a organização matemática (OM) e a organização didática (OD), ou seja, a estruturação da sequência de ensino dos inteiros, que expomos por meio dos tipos de tarefas, de suas técnicas e respectivas tecnologias e teorias, ou seja, a praxeologia desse livro. Para esses estudos poderíamos escolher fazê-la para cada capítulo que compõe a parte dos números inteiros ou fazê-la para o estudo dos números inteiros como um todo. Teríamos, assim, com a primeira escolha, as seguintes praxeologias: introdução aos estudos dos números inteiros; reta numérica; comparação entre inteiros; cálculo do módulo; adições e subtrações com inteiros, e, se optássemos pela segunda escolha, teríamos a praxeologia dos números inteiros, que trataria todas as anteriores compondo uma única praxeologia.

Nossa escolha foi descrever uma praxeologia para cada uma das sete seções analisadas, pois elas são apresentadas de forma isolada. Para a construção da adição com inteiros identificamos alguns conceitos anteriores, sendo articulados entre si para compor essa operação.

Para esse estudo, dividimos nossa análise em três partes, que contemplam as sete seções. Devido à complexidade de analisarmos pontos fundamentais desse primeiro contato com os números inteiros e por buscarmos o nível de detalhamento requerido pela teoria antropológica do didático, organizamos as primeiras cinco seções, em uma parte denominada *introdução aos números inteiros*. Procedemos assim, por algumas tarefas dessa primeira parte, tornam-se técnicas ou elementos tecnológicos nas demais. As outras duas foram chamadas *das adições com os números negativos* e *das subtrações com os números negativos*, por contemplarem ambas as operações.

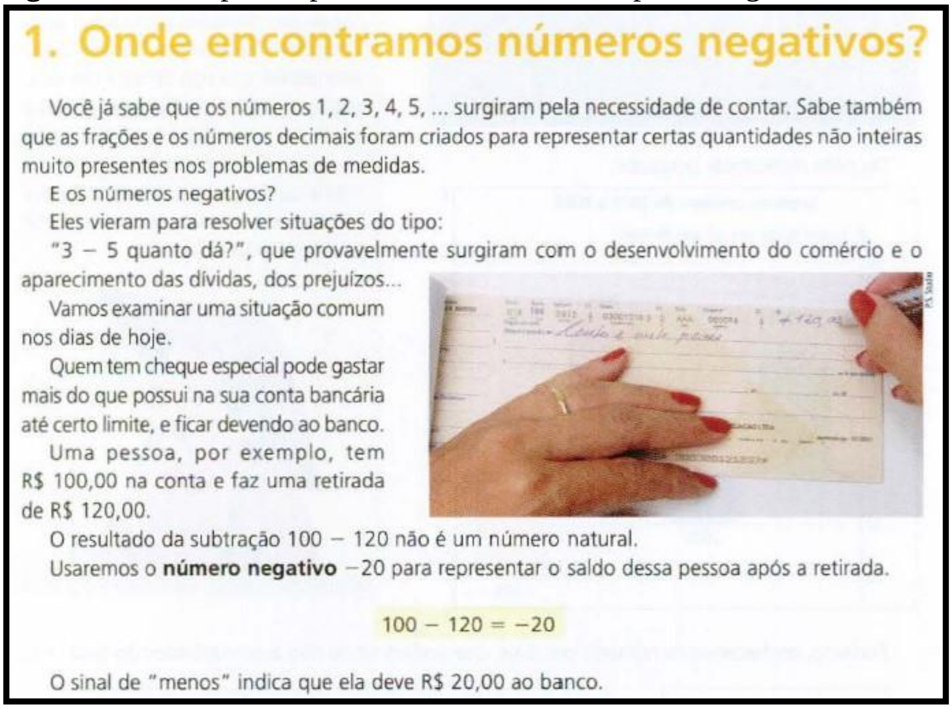
Ressaltamos que, para a escrita dos tipos de tarefas e das técnicas, conservamos a ordem cronológica do livro, pois, queremos identificar as abordagens utilizadas pelos autores, além dos conceitos e procedimentos presentes no livro. Sendo assim, tanto nos tipos de tarefas (T_j) quanto nas técnicas (τ_j), $j \in \mathbb{N}$ indicam a ordem em que estão dispostos nesse livro. Esses elementos praxeológicos nos auxiliaram a identificar fundamentos de transposição didática dos conceitos da construção dos inteiros para a organização da proposta de ensino desse livro didático.

4.1 INTRODUÇÃO AOS NÚMEROS INTEIROS

Realizamos a análise desse livro buscando pontos de aproximações, distanciamentos e possíveis articulações entre esse livro e alguns estudos realizados com a matemática do ensino superior – fatos que serão expostos nas considerações apresentadas ao final dessa análise. O intuito é de revelar como o ensino dos números inteiros, tanto das seções introdutórias quanto das operações de adição e subtração, desenvolve-se nesse volume.

Os estudos do conjunto dos números inteiros é iniciado com o tópico "Onde encontramos os números negativos?" (Figura 3). Chevallard (1999) denomina esse contexto de *primeiro momento*, ou seja, a forma como esses autores escolheram para discutir o tipo de tarefa que permite identificar quando um número representa ideias negativas.

Figura 3 – Exemplo do primeiro encontro com a praxeologia dos Inteiros.



1. Onde encontramos números negativos?

Você já sabe que os números 1, 2, 3, 4, 5, ... surgiram pela necessidade de contar. Sabe também que as frações e os números decimais foram criados para representar certas quantidades não inteiras muito presentes nos problemas de medidas.

E os números negativos?

Eles vieram para resolver situações do tipo:

"3 − 5 quanto dá?", que provavelmente surgiram com o desenvolvimento do comércio e o aparecimento das dívidas, dos prejuízos...

Vamos examinar uma situação comum nos dias de hoje.

Quem tem cheque especial pode gastar mais do que possui na sua conta bancária até certo limite, e ficar devendo ao banco.

Uma pessoa, por exemplo, tem R$ 100,00 na conta e faz uma retirada de R$ 120,00.

O resultado da subtração 100 − 120 não é um número natural.

Usaremos o **número negativo** −20 para representar o saldo dessa pessoa após a retirada.

100 − 120 = −20

O sinal de "menos" indica que ela deve R$ 20,00 ao banco.

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p.55.

Nesse primeiro encontro com a ideia de números negativos é apresentado elementos do modelo aritmético, pois percebemos o uso, mesmo que implicitamente, dos sinais de *mais* e de *menos* como indicativos de falta e de excesso. Para esse método de se iniciar os estudos dos números negativos, algumas ponderações devem ser consideradas, pois, para as operações de multiplicação e divisão, o uso dessas metáforas de ganho e perda não funcionam muito bem. Para as adições algébricas quando somamos duas quantidades negativas, o resultado será uma dívida maior. Mas, se multiplicarmos dois números negativos, obteremos uma solução positiva. Esse fato pode gerar algumas confusões conceituais aos alunos que estão estudando esses números. Uma das primeiras aparições desses contextos monetários foi realizada pelos hindus (200 a 1200 d.C.), com a figura de Brahmagupta, que utilizou as ideias de débitos e dívidas para explicar as operações com os inteiros.

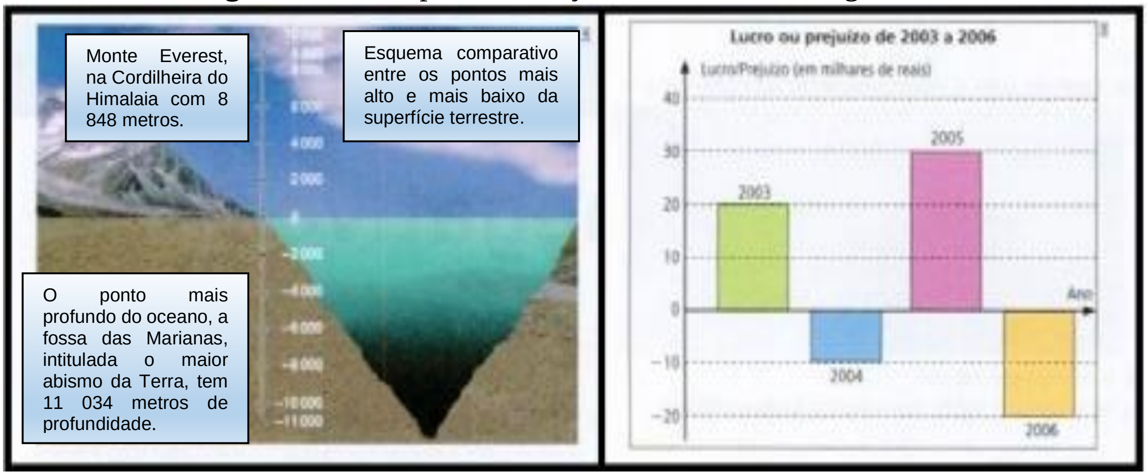
O estudo dos números inteiros emerge de um contexto em que os alunos não conseguiriam resolver uma subtração com o conhecimento sobre números naturais de que dispunham até essa etapa de escolaridade. O fato de trabalhar com conceitos anteriores, partindo do pressuposto que apenas o conjunto dos naturais não é suficiente para resolver operações, tais como "8 – 10" ou "3 – 7", também se configura como um elemento do modelo aritmético de ensino. E, para os contextos das operações, nessa fase inicial, as ideias de "grandezas subtrativas" são utilizadas, como por exemplo, interpretando "– 2" como a subtração de duas unidades. Essa abordagem será modificada a partir da construção das operações de adição e subtração.

Nesse ensino é comum a criação de metáforas como um dos recursos utilizados para contornar algumas dificuldades de compreensão – fato que revela algumas características da transposição didática realizada pelos autores, conforme será evidenciado na análise que faremos. A situação com cheque especial, dada na figura 3, é um contexto real modelado com intuito de dar sentido a essa aprendizagem e trazer algo que justifique o estudo desse conceito, evidenciando articulações com a realidade e com possíveis conceitos internos à Matemática. Assim, os autores aplicam a Matemática em situações cotidianas, não necessariamente do cotidiano dos alunos, atendendo aos pressupostos do modelo aritmético.

A figura 3 revela também, aspectos que serão trabalhados no decorrer desse capítulo do livro, tais como traduzir dados para a linguagem Matemática, identificar quando uma situação pode ser representada por números negativos e como operar com esses números. A situação trazida na figura permite-nos compreender que uma das ideias utilizadas é a de gasto superior ao que se tem. Para representar essa falta, utiliza-se o sinal de menos (–). Assim, novos significados são acrescidos a esse sinal, como o de representar: dívidas, temperaturas abaixo de zero, altitudes abaixo do nível do mar e saldos de gols negativos, que serão estudados em situações posteriores.

Exemplificamos a seguir outras situações que foram modeladas na coleção e que retratam contextos de aplicações dos números negativos.

Figura 4 – Exemplo de situações com números negativos.



Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 56.

Nesse exemplo, são trazidos pequenos textos que informam aos alunos que a profundidade abaixo do nível do mar (altitude zero) é representada por números negativos, assim como os prejuízos mostrados no gráfico dos balanços financeiros referentes a uma empresa. Percebem-se, nesses dois exemplos, elementos do modelo de ensino geométrico, pois, os autores utilizam eixos orientados para demonstrarem comparativos entre altitudes e os faturamentos.

Dessa forma, a altitude ou o faturamento *zero* é que determinam os maiores e menores valores, que podem ser percebidos por meio de sucessivos deslocamentos num eixo numerado. Esses deslocamentos são possíveis devido à determinação de unidades de medidas, no caso das altitudes de 2000 em 2000 metros e dos faturamentos de 10 em 10 milhares de reais.

A apresentação do que são os números negativos e positivos, e dos contextos em que podem ser aplicados, foi realizada por meio de três situações, dentre as quais temos a da figura 4. Os autores parecem acreditar que, por meio de situações reais, há oportunidade de construir um trabalho com os números negativos, mais preocupado com a exploração daquilo que os alunos trazem como conhecimentos sobre os inteiros. Não há ainda a preocupação de institucionalizar esses conceitos. No Manual do Professor, encontramos outras duas justificativas para o trabalho com situações do cotidiano que foram modeladas e representam o primeiro contato com a praxeologia dos inteiros.

> Os alunos conhecem informalmente os números negativos e conseguem perceber mais facilmente as relações de ordem entre esses números com situações envolvendo a variação de temperatura; a construção formal dos conjuntos Z e Q será feita no 8º ano. (ANDRINI, VASCONCELLOS, 2014, p.63. MANUAL DO PROFESSOR).

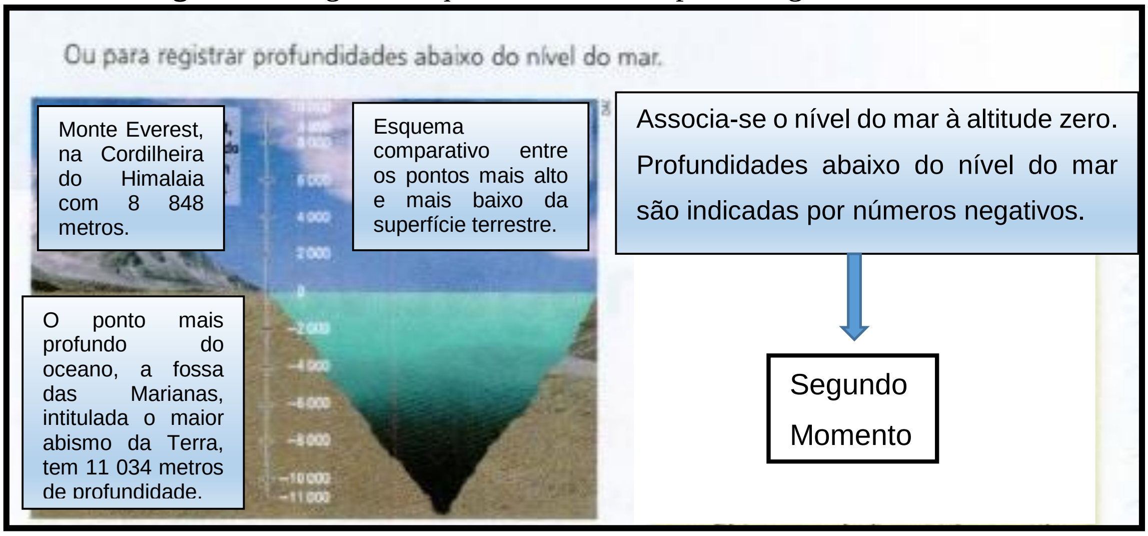
Assim, as situações cotidianas que foram modeladas podem ser a conexão entre os conceitos já estudados e os que serão desenvolvidos nessa etapa de escolaridade, atenuando o fato de que, nos estudos dos inteiros, alguns conceitos não podem ser trabalhados com toda a formalização Matemática que os caracterizam.

Para as adaptações realizadas, procedimentos não matemáticos formais são usados. No ensino da tarefa para se identificar se um número é positivo ou negativo, a técnica Matemática (τ_2) consiste em associar, à quantidade, situações de contextos: monetário, temperatura e reta numérica. Alguns contextos estão vinculados a outras áreas do conhecimento e, portanto, foram retiradas do rol das técnicas da Matemática escolar[21].

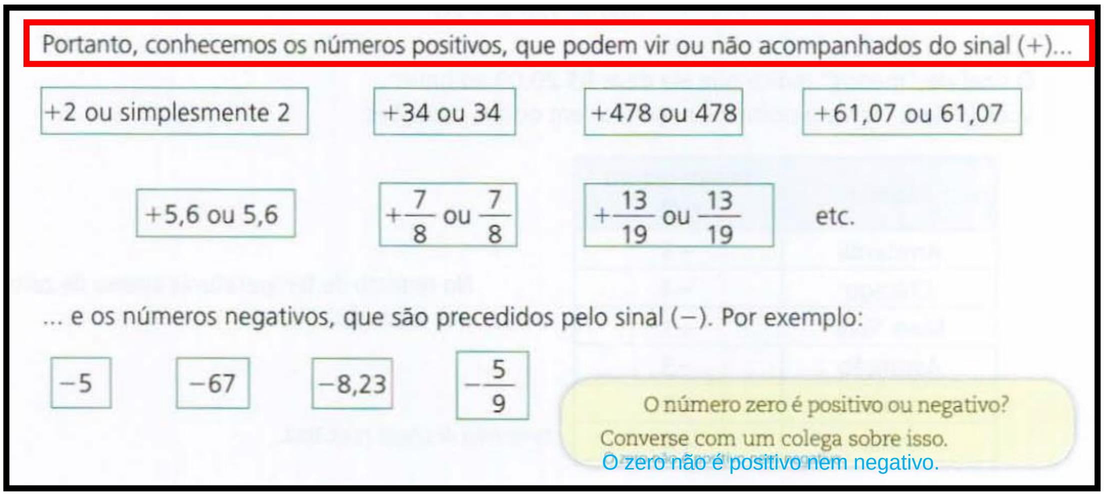
Há também, o caso de o contexto não ser de nenhuma das naturezas ensinadas, por exemplo, se uma pessoa nasceu 30 a.C. e faleceu 45 d.C., com quantos anos essa pessoa faleceu? Os estudos das ideias da linha do tempo podem ser transpostos para algum contexto conhecido, para então, ser resolvida de modo semelhante. A descrição dessa técnica (τ_2) será discutida posteriormente.

A figura 5 é um exemplo do segundo *momento de estudo*, que Chevallard (1999) denomina de *exploração de um tipo de tarefa (T) e da elaboração de uma técnica (τ).*

Figura 5 – Segundo e quinto momentos: praxeologia dos Inteiros.



[21] Consideramos matemática escolar aquela que é presente na escola e que varia conforme o nível escolar.



Portanto, conhecemos os números positivos, que podem vir ou não acompanhados do sinal (+)...

+2 ou simplesmente 2 | +34 ou 34 | +478 ou 478 | +61,07 ou 61,07

+5,6 ou 5,6 | $+\frac{7}{8}$ ou $\frac{7}{8}$ | $+\frac{13}{19}$ ou $\frac{13}{19}$ | etc.

... e os números negativos, que são precedidos pelo sinal (−). Por exemplo:

−5 | −67 | −8,23 | $-\frac{5}{9}$

O número zero é positivo ou negativo?
Converse com um colega sobre isso.
O zero não é positivo nem negativo.

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 56.

Nessa figura são expostos contextos, que recorrem às imagens, aos ostensivos gráficos, "figura de uma montanha", que conduzem os leitores para compreensão do uso do eixo vertical em que se determina o nível do mar como sendo altitude zero e tudo que estiver abaixo dele negativo. A partir da afirmação, “as profundidades abaixo do nível do mar”, é descrito como identificar se um número representa ideias positivas ou negativas, que representa um dos tipos de tarefas desse livro.

Nessa parte do livro, não foi possível identificar muitos conceitos e/ou definições; nele são apresentados alguns contextos que conduzem a conjecturas e a algumas formulações do conjunto dos números negativos, como visto nas figuras 3, 4 e 5. A figura 5 revela também, além das características do segundo momento, elementos do *quinto momento*, *a institucionalização* da organização matemática, pois, é anunciado que, com as três situações manifestas, é possível conhecer os números positivos e negativos, precedidos de seus respectivos sinais.

O treino das técnicas que foram expostos, o *quarto momento didático*, é dado em uma lista de sete exercícios, sendo que alguns exigem conceitos que não foram trabalhados de maneira explícita no livro. Um exemplo é a atividade de associar um inteiro "ao atraso de quinze minutos".

Figura 6 – Exemplo do Quarto Momento de estudo.

2 Associe um número positivo ou um número negativo a cada uma das situações:

a) um lucro de R$ 10,70; +10,70.

b) um prejuízo de R$ 300,00; -300.

c) um avanço de 8 minutos; + 8

d) um atraso de 15 minutos; - 15

e) uma temperatura de 2 graus abaixo de zero; - 2

f) uma altitude de 527,3 m acima do nível do mar. + 527,3

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 56.

Tendo por base as ideias de positivo e negativo estudadas, dadas por contextos de temperaturas e da reta numérica, uma possível interpretação seria que a hora marcada estaria associada ao ponto zero. Qualquer minuto ou hora *após*, teria “conotação” positiva e, qualquer minuto/hora *antes*, negativa. Isso geraria, para a tarefa em questão, uma resposta +15, pois passamos da hora marcada 15 minutos. Mas a solução do exercício dada no livro é de – 15, considerando a expressão "atraso" com sentido negativo. Portanto, não foi utilizada a estratégia de transferir o problema para um eixo, por meio do modelo geométrico, em que se determinam os sentidos positivo, negativo e o zero, como no caso das altitudes. No livro, nesse caso, vinculou-se a conotação positiva ou negativa à palavra atraso. Isso gera uma nova estratégia de resolução, que é observar o significado que algumas palavras podem ter, trabalho que também pode ser considerado como uma técnica matemática de contexto escolar[22]. Essa nova estratégia integra o rol das adaptações e dos materiais de apoio para o ensino dos números negativos.

Ainda analisando esse exemplo, é foi fornecida apenas a resposta -15 e, ao buscarmos no Manual do Professor, não encontramos muitos exemplos semelhantes a esse. As justificativas, para essa nova estratégia, não permitem observarmos mais detalhes dos procedimentos utilizados para a solução almejada e nem evidências do surgimento dessas novas maneiras de resolução dos tipos de tarefas, ou ainda do anúncio das mudanças de percurso e dos detalhes de que se pretende com elas.

[22] Técnicas da matemática escolar: é um tipo de forma de resolução que sobrevive nas salas de aulas, valendo-se dos conceitos que estão ao alcance dos alunos dos níveis de ensino da educação básica.

Em relação às técnicas dessa tarefa, situações como a do *atraso,* nos causaram muitas dificuldades no momento de identificá-las, pois as análises revelaram que alguns elementos da organização matemática não são possíveis de serem descritos. Possivelmente, a “eficiência” do uso dessa técnica revela-se, para os autores, como justificativa para o seu ensino. Por isso, para a caracterização do quarteto praxeológico, iremos apresentar alguns dos elementos que não estão tão explícitos nesse livro, não na tentativa de completar a praxeologia do livro, e sim, de compreender a proposta de ensino. As análises indicam que, tanto a tecnologia quanto a teoria que justificam algumas técnicas, não estão aparentes para alguns conceitos no livro, ou seja, apresentaremos os possíveis conceitos pertinentes de serem discutidos nessa etapa de escolaridade. Nesse contexto, os *momentos didáticos* e as justificativas são fundamentais para a construção dessa praxeologia.

Até essa parte da coleção, nossa análise observou praticamente quatro momentos da organização didática, a saber, o *primeiro encontro com a organização*, realizado por meio de situações cotidianas modeladas para a linguagem Matemática; a *exploração de um tipo de tarefa e de sua técnica*, trabalhada de forma simultânea com o primeiro momento, ou seja, o primeiro contato com o conceito é dado pela exploração da tarefa que se pretende ensinar; o *trabalho com a técnica*, situações de aperfeiçoamento da técnica aplicada à tarefas representativas do que se estudou e; a *institucionalização* dessa organização, que é feita por meio de deduções realizadas a partir dos encadeamentos das ideias de algumas figuras e textos dispostos, muitas vezes, sem ter uma articulação entre elas ou uma sequência dada pelos autores. Para esse último caso, o professor deve organizar a aprendizagem verificando qual é a melhor sequência de leitura deve pôr em prática.

Para essa primeira seção de estudo do volume do 7º ano, descrevemos dois tipos de tarefas, T_1 e T_2, que são possíveis de serem identificadas em quase todas as seções do livro. Percebe-se ainda, que as situações apresentadas propiciam conjecturar alguns conceitos acerca dos números negativos. Nesse caso, os autores pretenderam dar um panorama geral dos contextos dos números negativos, onde são encontrados e como as ideias podem ser trabalhadas, pois se trata do primeiro contato com a praxeologia que se pretende ensinar.

A seguir, descrevemos os tipos de tarefas T_1 e T_2:

Quadro 3 – Tipos de tarefa e técnicas: praxeologia adição.

Tarefas	Técnicas
T_1: Dado um problema enunciado na língua materna, converter as informações para linguagem Matemática.	τ_1: Associar as informações a uma das situações a seguir: i. Contextos Monetários (lucros - positivo e prejuízos - negativo); ii. Reta numérica: À direita de zero positivo e à esquerda negativo; iii. Temperaturas: acima de zero positivo e abaixo de zero negativo.
T_2: Dado um problema ou situação-problema, identificar se os valores, frases ou respostas são representados por números negativos ou positivos.	τ_2: Usar um ou mais passos: 1. Utilizar τ_1; 2. Escolher uma operação; 3. Resolver a operação; 4. Associar sinal à resposta;

Fonte: Elaborado pelos autores da pesquisa.

Na escrita de τ_1, foram suprimidos os contextos com saldo de gols e altitudes, pois, a descrição de tais técnicas demandaria conceitos de outras áreas do conhecimento e estamos considerando tarefas e técnicas de cunho matemático – Matemática escolar. Vemos que, apesar de a descrição da técnica não conter elementos matemáticos formais, esses são os procedimentos passíveis de serem ensinados nessa etapa de escolaridade. E, quando se fala em reta ou lucros, vários são os elementos matemáticos presentes, apesar de não estarem explícitos.

Vale ressaltar que a elaboração da T_1 foi necessária devido ao fato de que, em várias situações-problema, exige-se a tradução tanto da língua materna quanto de outra representação Matemática, para uma linguagem Matemática adequada ao problema. Salientamos ainda que algumas tarefas exigem certo grau de interpretação do problema, e as classificamos nesse tipo de tarefa. Nós o fizemos, pois, para quem realiza as mudanças, carece de compreensão dos dados e daquilo que se solicita para a solução do problema. Lembremos que para esse tipo de tarefa, a de modelar um problema, a descrição de uma técnica é muito difícil. Temos nesse caso a apresentação de algumas ações propostas pelos autores, que são inerentes a esse tipo de tarefa. Os autores não enunciaram que o aluno deveria converter o problema da língua materna para a Matemática, mas essa tarefa foi executada durante muitas das resoluções das atividades propostas. O tipo de tarefa T_2 é utilizado em atividades que é necessário além de saber reconhecer se a informação dada pode ser associada ao número positivo ou negativo, determinar se o resultado de uma operação é positivo ou negativo.

A produção de tipos de tarefas e a exploração de técnicas sobre as comparações de números inteiros, iniciaram-se no tópico 2. A escolha dos autores foi apresentar os conceitos por meio de alguns objetos ostensivos: figuras, quadros e algumas frases. Esses elementos apontam as escolhas e a organização do ensino desse conceito e de sua definição; são, portanto, os elementos usados para transpor essas ideias para esse nível de escolaridade. Observado essas características, podemos classificar essa organização como empirista. Outras características que permitiram classificar essa organização como tal serão descritas na sequência de nossa escrita.

O tópico 2 trabalha com temperaturas negativas com intuito de identificar, entre dois números, qual é o menor ou o maior. Enunciamos no quadro 4 o tipo de tarefa T_3 e a técnica $\tau_{3.1}$:

Quadro 4 – Tipos de tarefa e técnicas: primeira praxeologia comparação[23].

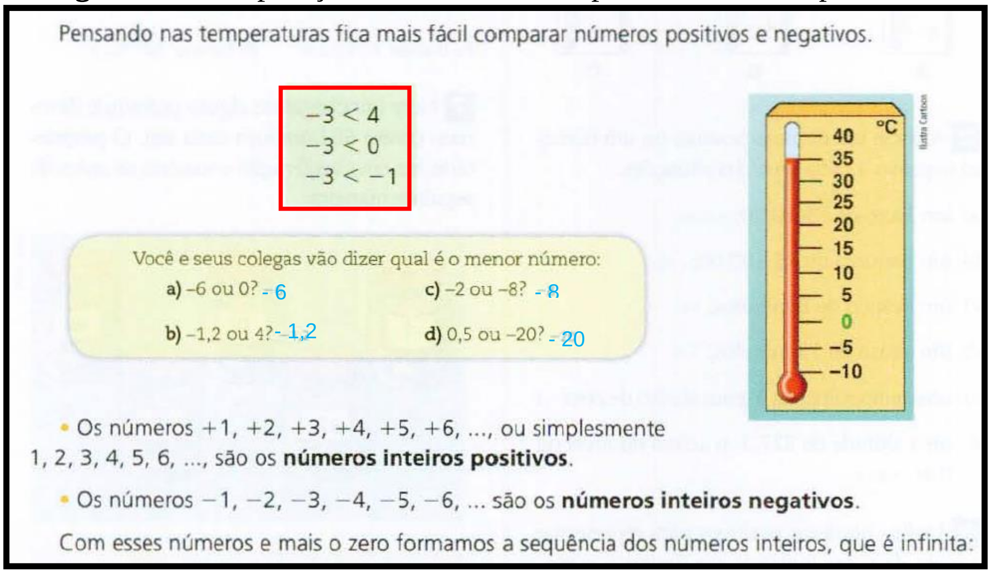
T_3 - Dados *a, b* $\epsilon\ \mathbb{Z}$. *Determinar* as condições para que se tenha $a > b$.
$\tau_{3.1}$ – ***Temperaturas:*** 1. Associar os números *a, b* $\epsilon\ \mathbb{Z}$, à temperaturas. 2. Observar qual dessas temperaturas é a mais baixa. 3. Se *a* for a mais baixa, será a menor temperatura, caso contrário, *b* será a menor.

Fonte: Elaborado pelos autores da pesquisa.

O destaque da figura 7 é a “reta das temperaturas”, que traz consigo a ideia de acima de zero – positivo e abaixo de zero – negativo, bem como nos indica características do modelo geométrico de ensino. Mais uma vez, o conceito de reta numérica é usado para frisar deslocamentos e a determinação do sentido positivo à direita e negativo à esquerda.

[23] Para o tipo de tarefa T_3 foram apresentadas duas técnicas: $\tau_{3.1}$ e $\tau_{3.2}$.

Figura 7 – Comparação de dois números: pensando nas temperaturas.



Pensando nas temperaturas fica mais fácil comparar números positivos e negativos.

$-3 < 4$
$-3 < 0$
$-3 < -1$

Você e seus colegas vão dizer qual é o menor número:

a) –6 ou 0? - 6 **c)** –2 ou –8? - 8

b) –1,2 ou 4? -1,2 **d)** 0,5 ou –20? - 20

• Os números +1, +2, +3, +4, +5, +6, ..., ou simplesmente 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., são os **números inteiros positivos**.

• Os números –1, –2, –3, –4, –5, –6, ... são os **números inteiros negativos**.

Com esses números e mais o zero formamos a sequência dos números inteiros, que é infinita:

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 58.

Destacamos, em vermelho, as comparações entre –3 e 4 e, entre 0 e –1. Os autores apresentam as ideias das temperaturas como exemplos de comparação entre inteiros. Vejamos o modelo trazido por eles, referente a cidade de São Joaquim, que registrou a temperatura mais baixa em um inverno. “Uma temperatura de –3°C é menor do que uma temperatura de –1°C, e as duas temperaturas negativas são menores do que a temperatura de 0 °C em Curitiba e do que a temperatura positiva de 4 °C em Porto Alegre” (ANDRINI E VASCONCELLOS, 2012, p.58).

Com esses elementos, os autores mostram que 4 e 0 são maiores que – 3, mas não apresentam justificativas explícitas para esse fato. É possível de se observar ainda, que a sensação térmica, calor, das temperaturas +4 e 0 são maiores do que a negativa. Nesse estudo, têm-se poucas explicações explícitas acerca de como procedemos à comparação. O destaque em vermelho evidencia que "– 3" é o menor número, pois representa a menor temperatura, mas, na escala do termômetro, com exceção do zero, nenhum dos números comparados está marcado, revelando que os autores não operacionalizam o ostensivo termômetro. Esse primeiro contato com as comparações de dois inteiros utiliza a intuição e os conhecimentos prévios dos alunos.

Essa técnica revela que, para comparar dois números inteiros, o procedimento consiste em observar qual é a menor temperatura, revelando um recurso e uma adaptação para ensinar a comparar dois inteiros. Na Matemática do ensino superior a relação de ordem em uma estrutura algébrica não tem conotação de comparação, e sim de organizar e de ordenar os elementos desse conjunto. Na busca de elementos que evidenciassem o caso de os leitores não possuírem experiências anteriores com esse conteúdo, não encontramos orientações no Manual do Professor que enfatizassem o papel docente.

Na figura 7, encontramos também componentes da institucionalização dos conceitos de sequência numérica, pois nos é exposto que, com a sequência dos positivos e negativos mais o zero, teremos a sequência infinita dos inteiros. Dessa forma, os autores utilizaram o que expuseram no primeiro tópico: o trabalho com as temperaturas para formalizar o que são os números negativos e os números positivos. Os elementos acerca da sequência com os números negativos nos permitem expor a seguinte reflexão sobre como os autores estão encadeando tal ensino: eles trazem os positivos em ordem crescente e os negativos em ordem decrescente, logo após mostrarem que –3 é o menor dos números comparados. Essa forma de trabalho com os inteiros se aproxima da visão aritmética que vários matemáticos desenvolveram no transcorrer do desenvolvimento desses números.

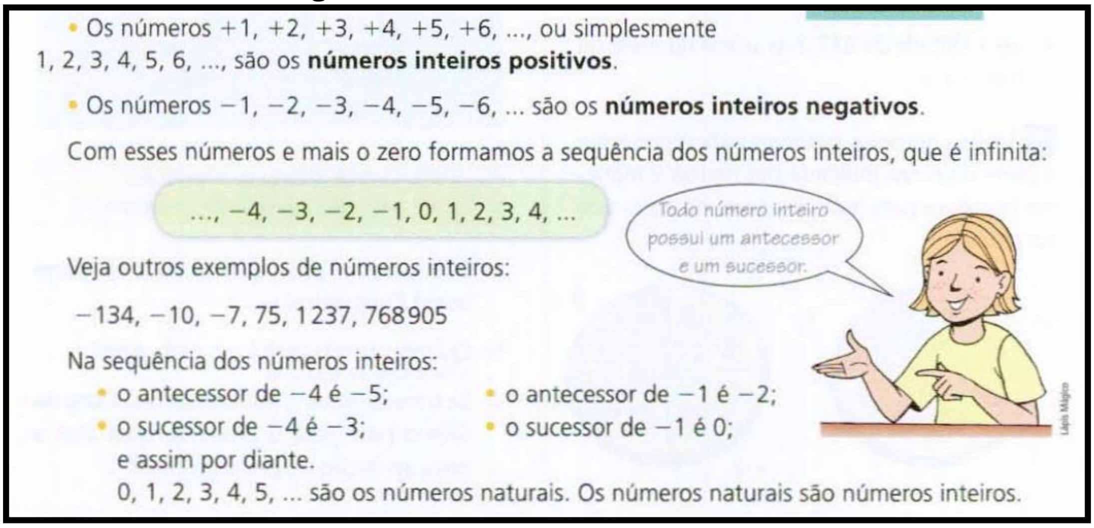
As escolhas dos autores, como já mencionado, seguem algumas orientações empiristas. Apresentam-se afirmações e ostensivos gráficos, e esses são elementos que justificam e dão origem as técnicas ensinadas. Mas esses elementos nem sempre estão em sequência, apenas estão dispostos, cabendo ao professor definir tal sequência para o ensino que proporá. O modelo de ensino predominante é o aritmético, pois são usadas metáforas das menores temperaturas, ou seja, ao compararmos dois números inteiros e pensando nas temperaturas, o menor número será aquele que pode ser associado a menor temperatura.

Retomando os estudos acerca da construção dos números inteiros, percebe-se que, por detrás dos conceitos de comparar dois números inteiros, encontramos algumas das proposições estudadas. Por exemplo, a proposição 5, apresentada anteriormente, que trata da relação de ordem em $\mathbb{N}$ e que, depois, é estendida aos inteiros, é regulada por três propriedades: antissimétrica, transitiva e reflexiva. Para a demonstração dessa proposição, usam-se os conceitos das equações em $\mathbb{N}$ e que, por sua vez, utiliza um dos axiomas de Peano e a lei do corte.

Uma das consequências dessa proposição é o fato que, para n, m e $p \in \mathbb{N}$, $n \leq m$, pode-se somar ou multiplicar p em ambos os lados que a relação de ordem permanece. Ou seja, para o encadeamento matemático do conceito de comparar dois números inteiros, são exigidos muitos conhecimentos que não fazem parte do currículo dos alunos do sétimo ano.

Na próxima figura são apresentados conceitos de sucessor e antecessor, bem como mais alguns exemplos de números inteiros.

Figura 8 – Antecessores e sucessores.



- Os números +1, +2, +3, +4, +5, +6, ..., ou simplesmente 1, 2, 3, 4, 5, 6, ..., são os **números inteiros positivos**.
- Os números −1, −2, −3, −4, −5, −6, ... são os **números inteiros negativos**.

Com esses números e mais o zero formamos a sequência dos números inteiros, que é infinita:

..., −4, −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4, ...

Todo número inteiro possui um antecessor e um sucessor.

Veja outros exemplos de números inteiros:

−134, −10, −7, 75, 1237, 768905

Na sequência dos números inteiros:

- o antecessor de −4 é −5;
- o sucessor de −4 é −3;
- o antecessor de −1 é −2;
- o sucessor de −1 é 0;

e assim por diante.

0, 1, 2, 3, 4, 5, ... são os números naturais. Os números naturais são números inteiros.

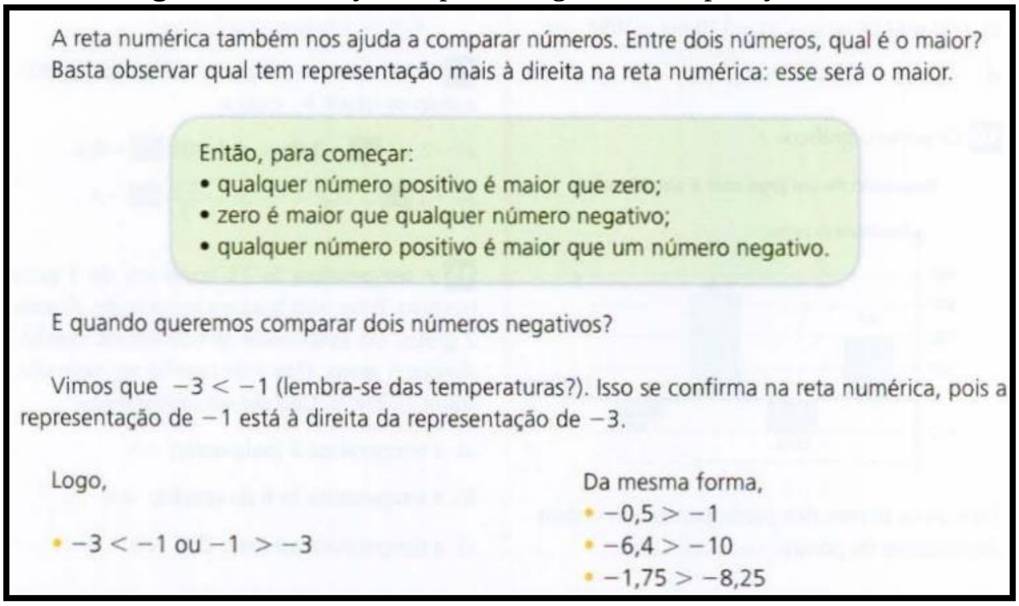
Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 58.

Os conceitos de sucessor e antecessor são estendidos aos inteiros por meio de quatro exemplos. Nesse trabalho, para se ensinar a determinar os sucessores e antecessores é utilizada a sequência dos inteiros: –5, –4, –3, –2, –1, 0, ...; Para esse conteúdo não foi determinado nenhum tipo de tarefa, pois, nas atividades propostas não identificamos problemas para eles. Esse excerto, aparentemente, é um informativo aos alunos – para os inteiros também é possível determinar quem é o seu sucessor e o seu antecessor.

Ressaltamos que, tanto para o trabalho com a praxeologia que introduziu os números negativos, quanto com a praxeologia que tratou das comparações, no livro foram utilizadas a mesma sequência de apresentação dos conceitos: após o primeiro encontro com a organização matemática, seguiu-se com a exploração dos tipos de tarefas e da elaboração de pelo menos uma técnica, passando pela institucionalização do saber em jogo. Finalizando com o trabalho com a técnica, denominado por Chevallard (1999) de quarto momento didático, enfatizado nas listas de exercícios. Segundo os autores as "atividades surgem ao longo do texto como forma de levantar conhecimentos prévios e de checar o progresso da leitura" (ANDRINI, VASCONCELLOS, MANUAL DO PROFESSOR, 2013, p.6). Outra situação que ocorre com grande constância nesse livro é o fato de que para solucionar um problema, poucas foram as vezes, que se utilizou mais de uma técnica.

O tópico 3 (*reta numérica*) nos traz uma nova técnica, em que se pretende ensinar a maneira de associar e representar os negativos a pontos de uma reta. No entanto, antes desse trabalho, os autores institucionalizam a comparação de números inteiros, descrevendo a seguinte forma de resolver essa tarefa: "*qualquer número positivo é maior que zero; zero é maior que qualquer número negativo; qualquer número positivo é maior que um número negativo"* (PRATICANDO MATEMÁTICA, p.60). Essa forma de apresentação da técnica, permite comparar números inteiros, mostra um aperfeiçoamento dessa praxeologia, que inicialmente era pautada nas ideias de temperaturas e algumas ideias empíricas; agora, observamos a presença de elementos da Matemática explícitos, conforme vemos na figura 9.

Figura 9 – Evolução da praxeologia das comparações.



A reta numérica também nos ajuda a comparar números. Entre dois números, qual é o maior? Basta observar qual tem representação mais à direita na reta numérica: esse será o maior.

Então, para começar:
- qualquer número positivo é maior que zero;
- zero é maior que qualquer número negativo;
- qualquer número positivo é maior que um número negativo.

E quando queremos comparar dois números negativos?

Vimos que $-3 < -1$ (lembra-se das temperaturas?). Isso se confirma na reta numérica, pois a representação de -1 está à direita da representação de -3.

Logo,
- $-3 < -1$ ou $-1 > -3$

Da mesma forma,
- $-0{,}5 > -1$
- $-6{,}4 > -10$
- $-1{,}75 > -8{,}25$

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 58.

No exemplo apresentado, – 1 > – 3, pois se usarmos $\tau_{3.1}$ "– 3" é associado à uma temperatura mais baixa do que o primeiro número. E, se utilizarmos esse novo ensino, o último número está à esquerda do primeiro. Assim, esse contexto nos permitiu descrever uma nova técnica para T_3. A técnica $\tau_{3.2}$ representa a segunda forma de resolução para esse tipo de tarefa, uma evolução da praxeologia das comparações. Apresentamos a seguir a escrita dessa técnica:

Quadro 5 – Tipos de tarefa e técnicas: segunda praxeologia comparação.

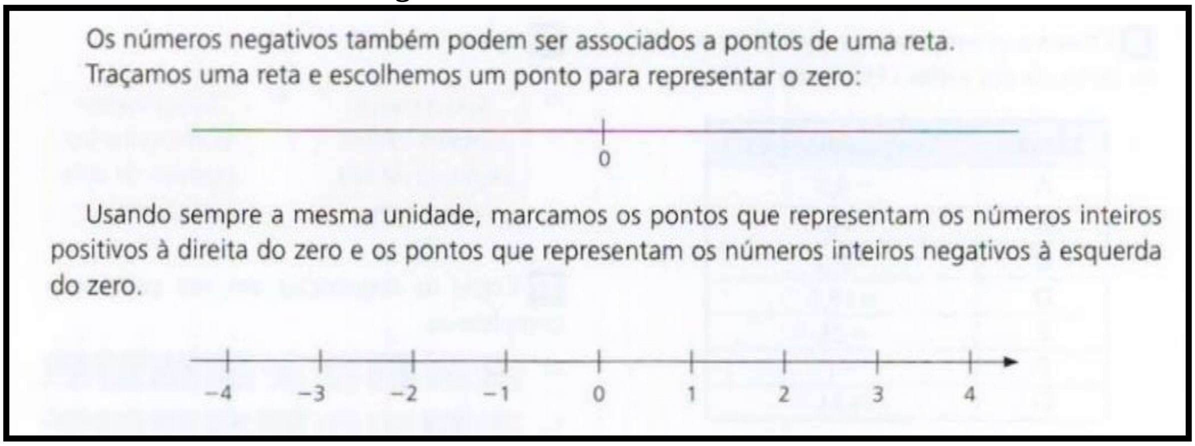
T_3 - Dados $a, b \in \mathbb{Z}$. Determinar as condições para que se tenha $a > b$.
$\tau_{3.2}$ – R***eta numérica:*** • Se $a, b < 0$ e b estiver à esquerda de a, então a será maior que b. • Se a for positivo e $b = 0$, então $a > b$; • Se $a = 0$ e b for negativo, então $a > b$; • Se a for positivo e b for negativo, então $a > b$.

Fonte: Elaborado pelos autores da pesquisa.

Na redação da técnica $\tau_{3.2}$, para o caso de compararmos dois negativos usamos algumas das ideias da técnica $\tau_{3.1}$ e, alguns conceitos dos números naturais para o caso de compararmos dois positivos ou um número positivo e o zero. Um exemplo dessa tarefa foi a atividade em que se tem que calcular o módulo de um inteiro e verificar se esse resultado é maior do que outro número fornecido. No Manual do Professor, não temos qualquer indicação de qual técnica pode-se utilizar, se usaremos $\tau_{3.1}$, mais empírica e pautada em ostensivos, ou se utilizaremos $\tau_{3.2}$, a técnica com elementos da Matemática escolar.

Na sequência da proposta de ensino, identificamos a institucionalização para associarmos números inteiros a pontos na reta numérica. Vejamos a figura 10:

Figura 10 – Reta Numérica.


Os números negativos também podem ser associados a pontos de uma reta.
Traçamos uma reta e escolhemos um ponto para representar o zero:

Usando sempre a mesma unidade, marcamos os pontos que representam os números inteiros positivos à direita do zero e os pontos que representam os números inteiros negativos à esquerda do zero.

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 60.

Nessa figura identificamos que a sequência de ensino está definida de forma explícita no livro, apresentou-se uma institucionalização de como marcarmos números inteiros na reta. Dessa forma, os autores, a depender de seus objetivos, "aplicam" metodologias diferentes. Em exemplos anteriores, cabia ao professor a organização da sequência de ensino, pois os autores propuseram que a praxeologia em jogo evoluísse com o desenvolver do ensino, até que eles, institucionalizassem o saber. Nesse contexto retratado pela figura 10, eles apresentaram o conceito "pronto", sem ideias empíricas. Os frutos dessa institucionalização e outros contextos iniciados nessa figura são os tipos de tarefa T_4, T_5 e T_6 e suas respectivas técnicas τ_4, τ_5 e τ_6. Vejamos a seguir a escrita dessas tarefas e de suas técnicas:

Quadro 6 – Tipos de tarefa e técnicas: praxeologia reta numérica.

Tarefas	Técnicas
T_4: Dados n números inteiros, escrevê-los em ordem crescente ou decrescente.	τ_4: Valendo-se de $\tau_{3.2}$, identificar qual dos inteiros é o maior. Em seguida, identificar o segundo maior e, assim, sucessivamente.
T_5: Dada a sequência de inteiros x = $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...$, Determinar a_n.	τ_5: Seja b o resultado de $a_2 - a_1$ e a razão da sequência x e seja b o resultado de $a_k - a_{k-1}$, também a razão dessa sequência; Logo, $a_n = a_{n+1} - b$ Ou $a_n = a_{n-1} + b$.
T_6: Associar um nº inteiro a pontos de uma reta numérica.	τ_6: 1. Desenhar uma reta e determinar um ponto que represente o zero; 2. Determinar uma unidade de medida; 3. Observar a sequência positiva: 1, 2, 3, 4, …, 100, ..., 4. Observar a sequência negativa: ..., - 100, ..., - 4, -3, -2, -1. 5. Marcar os pontos positivos à direita e os negativos à esquerda;

Fonte: Elaborado pelos autores da pesquisa.

Para identificarmos os tipos de tarefas, nossas descrições seguem a ordem cronológica da coleção. Em poucas situações, as tarefas emergem das listas de exercícios e problemas, caso do tipo de tarefa T_6. E, na maioria das ocasiões, as tarefas proveêm do corpo das explanações, caso dos tipos de tarefas T_4 e T_5.

A teoria antroplógica do didático, nos permite compreender que em algumas praxeologias um tipo de tarefa, por exemplo T_3 e T_6, sendo aplicado como técnica em outro contexto. Como exemplos[24] desse fato, pode ser dada uma sequência de números e solicitar que sejam colocados em ordem crescente: usa-se como técnica os conhecimentos utilizados para os tipos de tarefas T_3, pois há necessidade de comparar os números dados; ou dados alguns números inteiros, pedir que se determine um elemento a_n: utiliza-se T_6 como técnica, pois é necessário utilizar vários conceitos ensinados para os estudos da reta.

[24] Um outro exemplo desse fato, fora do contexto desse livro didático, pode figurar nos estudos de fatoração, pois, em determinado bimestre, ensinam-se técnicas para fatorar expressões algébricas, tais como agrupamento de fatores comuns, colocar em evidência alguns fatores, trinômios quadrados perfeitos, entre outros. Na sequência dos estudos, pode-se ensinar equações do segundo grau incompletas; nesse caso, uma das técnicas para encontrar as soluções de uma equação passa pela utilização da fatoração, ou seja, fatorar a equação do segundo grau é a técnica para determinar as soluções. A solução da equação $x^2 + x = 0$, seria a seguinte:

$x^2 + x = 0$------------------------(x é o fator comum)

$x (x + 1) = 0$--------------------(propriedade 9: não existência de divisores de zero)

$x = 0$ ou $x + 1 = 0$. Logo, $x = 0$ e $x = -1$.

Assim, em um determinado momento, fatorar era a tarefa a ser resolvida, passando em seguida a ser considerada como técnica para resolver uma equação do segundo grau incompleta.

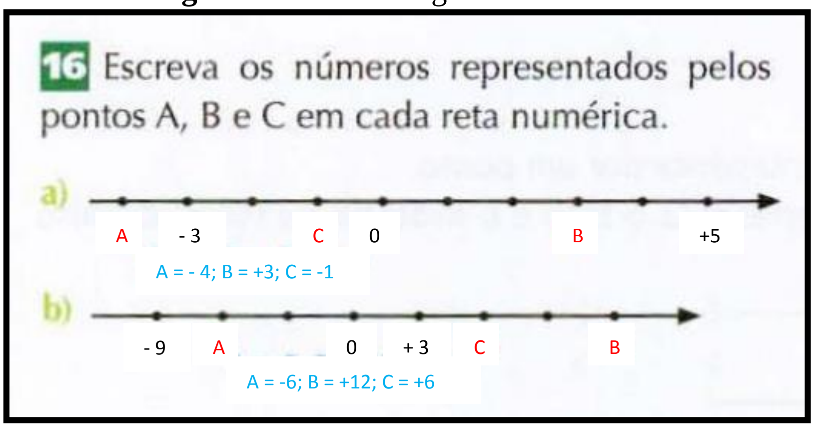
Ainda sobre os tipos de tarefas T_4, T_5 e T_6, encontramos em seus estudos os conceitos de distância entre pontos e de unidade. Salientamos assim, que o conceito de unidade não foi explorado, apenas citado, bem como os autores não realizaram nenhum tipo de associação entre esses conceitos, pois, nesse caso, utiliza-se para a construção da reta uma unidade de gradação. Essa unidade pode variar em relação aos objetos de estudo, pois, ao considerar determinados números dispostos na reta é necessário determinar a unidade para resolução de um problema. Portanto, para o ensino do conceito reta numérica, as atividades podem ser diversas para evitar equívocos por parte dos alunos. Ao trabalhar com construção de várias retas com diferentes unidades de gradação ou, ao apresentar várias retas, determinando as unidades utilizadas, são exemplos de precaução para que alguns alunos não associem que a única unidade de gradação válida é o 1.

Posto isto, a descrição de alguns detalhes foi feita por meio de inferências, principalmente, nas ocasiões, em que os autores não declaram alguns pormenores fundamentais para a compreensão da técnica, como o conceito de unidade.

Os tipos de tarefas T_4 e T_5 foram identificadas poucas vezes nessa coleção, sendo que T_4 foi encontrada apenas uma vez e o tipo de tarefa T_5 foi encontrada três vezes, das quais uma associada, além da técnica τ_5, à técnica τ_9, que será apresentada mais adiante. Apesar de serem identificadas poucas vezes, poderíamos ter realizado um exercício de adaptar essas tarefas num outro tipo mais abrangente, mas decidimos deixá-las devido à importância delas nessa organização de comparar e associar números inteiros a seus representantes na reta.

O tipo de tarefa T_6 foi identificado nove vezes, que representa 4,63% das tarefas identificadas. Para as tarefas do tipo T_6, os autores não exigiram que fosse utilizada outra técnica senão a prória τ_6 . Vejamos um exemplo dessa tarefa na figura 10.

Figura 11 – Praxeologia reta numérica.



Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 62.

Nessa figura, são dadas duas retas numeradas, cujas abscissas dos pontos da reta do item *b* não distam uma unidade. Propõe-se que identifique as abscissas dos pontos A, B e C em ambas as retas. No item *a,* basta que se contem as distâncias de cada ponto em relação ao zero e, no item *b,* essas distâncias deverão ser multiplicadas por 3.

Para um melhor entendimento, recapitulamos que para cada um dos estudos, foi possível descrever uma praxeologia que, unidas às praxeologias das operações de adição e subtração, que serão apresentadas posteriormente, nos propiciará um panorama da proposta de ensino empregada pelos autores para esse conteúdo.

No tópico 4 (*distâncias na reta numérica*), identificamos novos tipos de tarefas, cujas técnicas foram organizadas a partir das definições trazidas na coleção:

Módulo de um número inteiro é “a distância entre um ponto e o ponto que representa o zero”;

Dois inteiros são *simétricos* se são "números diferentes e possuem o mesmo módulo"; e;

Para calcularmos a *distância entre dois pontos*, calculam-se as distâncias de cada ponto em relação à origem e, se os sinais dos números forem diferentes, somam-se os resultados e, se os sinais forem iguais, subtraem-se os módulos (ANDRINI e VASCONCELLOS, 2012). Segue a descrição dessas tarefas:

Quadro 7 – Tipos de tarefa e técnicas: praxeologias módulo e simétrico.

Tarefa	Técnica
T_7: Determinar o Valor absoluto de um inteiro *b*, isto é, $\|b\|$.	τ_7: Calcular a distância entre um inteiro b e o ponto que representa o zero.
T_8: Determinar o Simétrico de um inteiro *c*.	τ_8: Dois números são simétricos, se: 1. São diferentes e; 2. Têm o mesmo módulo;

Fonte: Elaborado pelos autores da pesquisa.

Ambos os tipos de tarefas são associados ao conceito de distância entre pontos na reta numérica e, posteriormente, serão utilizados como parte das técnicas para se realizar adições algébricas com inteiros. Vejamos que uma possível tecnologia palpável para esse ano de escolaridade seria, para o módulo, descrever como calcular a distância entre os pontos representantes dos números inteiros dados.

Matematicamente teríamos: dado $b \in \mathbb{Z}$, $|b| = d(b, 0)$. Se $b \geq 0$, então $d(b, 0) = b - 0 = b$, i.e, $|b| = b$. Se $b < 0$, então $d(b, 0) = 0 - b = -b$, i.e, $|b| = -b$.

Logo, $|b| = \begin{cases} b \; se \; b \geq 0 \\ -b \; se \; b < 0 \end{cases}$.

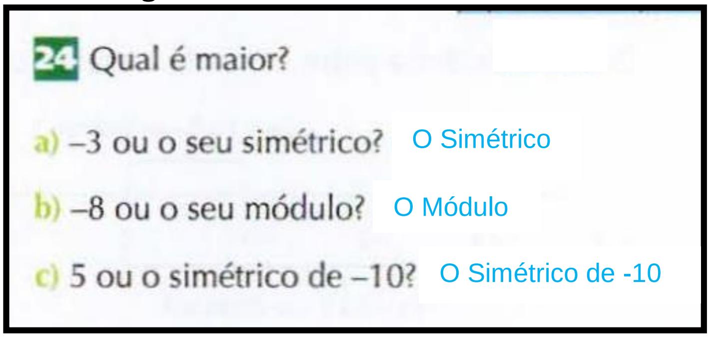
A descrição para a Matemática escolar ficaria assim: *o módulo de um número positivo será ele mesmo* – pois iremos subtraí-lo por zero; e *o módulo de um número negativo será seu simétrico* – pois devemos subtrair de zero esse número, ou seja, zero subtraído de um número negativo, resultará um número positivo.

A forma com que descrevemos a tecnologia poderia ser redigida com um nível de formalidade Matemática maior. Além da definição de módulo – que foi adaptada pelos autores –, exige-se a dedução e prova de algumas propriedades do módulo. Assim é compreensível a supressão dos elementos praxeológicos, tecnologia e teoria – Matemática formal –, em algumas partes do estudo dos números inteiros, substituídas por elementos tecnológicos e teóricos – Matemática escolar –, por meio de adaptações desses conceitos, como foi o caso do valor absoluto.

Todo esse movimento de escolhas, aparentemente, representam uma necessária determinação de prioridades na condução dos procedimentos de ensino e que visam "recontextualizar o conteúdo, tentando relacioná-lo a uma situação que seja mais significativa para o aluno. Todavia, o contexto reconstituído nunca é o mesmo daquele em que o saber foi elaborado" (PAIS, 2012, p.31)

A figura 12 exemplifica os tipos de tarefas T_7 e T_8.

Figura 12 – Módulo e Simétrico.


24 Qual é maior?

a) –3 ou o seu simétrico? O Simétrico

b) –8 ou o seu módulo? O Módulo

c) 5 ou o simétrico de –10? O Simétrico de -10

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 61.

Identificamos esses dois tipos de tarefas, quatro vezes cada, sendo que três delas estão associadas entre si para solucionar uma mesma atividade. Um exemplo dessa situação é a atividade proposta no livro representada pela figura 12: primeiro é pedido que calcule o valor absoluto por meio de sua respectiva técnica – distâncias entre pontos na reta – ou que se calcula o simétrico de um inteiro por meio de sua técnica. Em seguida, é necessário que se compare o número e seu módulo (simétrico).

As investigações das razões dos estudos dessas tarefas, reforçam o fato de que a eficiência da técnica ensinada serve como justificativa de seu uso, ou seja, uma técnica que funciona, aparentemente, para todas as tarefas propostas não necessita de explicação do seu funcionamento. A sua eficiência toma o papel de “tecnologia” e, para os exemplos de módulo e simétrico essas foram as únicas formas de resolver essas tarefas, reforçando o caráter auto tecnológico, pois, por conhecer uma única técnica que sempre funciona, não há motivo de se tentar justificá-la. Por esse motivo aparente, o livro apresenta apenas os tipos de tarefas e as técnicas de algumas das praxeologias.

Os autores usaram distâncias para definir simétrico e módulo de inteiros, antes de definir o que são distâncias entre pontos na reta. E, quando se propuseram a realizar esse trabalho, valeram-se do que já havia feito, isto é, utilizaram as ideias de módulo e simétrico, caracterizando uma definição circular[25]. Sendo assim, não foi possível identificar um motivo de essa organização ser trazida nesse momento. Esses conteúdos são importantes e devem ser justificados e articulados para que o aprendiz consiga estabelecer relações entre os conteúdos ensinados. Percebemos, mais uma vez, que os autores desse livro apresentam algumas informações, ficando a cargo do professor organizá-las e, como em um quebra-cabeças, montar o ensino dos conceitos em questão.

Enfatizamos, que em algumas situações problemas, que envolviam subtrações, para a sua resolução não foi preciso dos inteiros, sendo utilizados apenas nas respostas. Situações do tipo subir 3º C a partir de uma certa temperatura ou prejuízo de R$ 2,30 ao vender um produto por R$ 8,40 geraram expressões tais como 12 + 3 = + 15 ou 8,40 – 10,70 = – 2,30, em que os sinais de “+” e “–” representam operações e apenas, nos resultados, significam que os números são negativos ou positivos. Informalmente esse fato mudou nas seções 5 – Adição envolvendo números negativos e 6 – Subtração envolvendo números negativos, em que todas as situações os sinais de “+” e “–”, além de indicarem a operação, foram utilizados para representarem se os números eram negativos ou positivos.

4.2 DAS ADIÇÕES COM OS NÚMEROS NEGATIVOS

Um dos nossos objetivos é de investigarmos os capítulos introdutórios ao ensino dos inteiros e, a parte inicial de como se soma ou se subtrai dois inteiros. Dessa forma, os

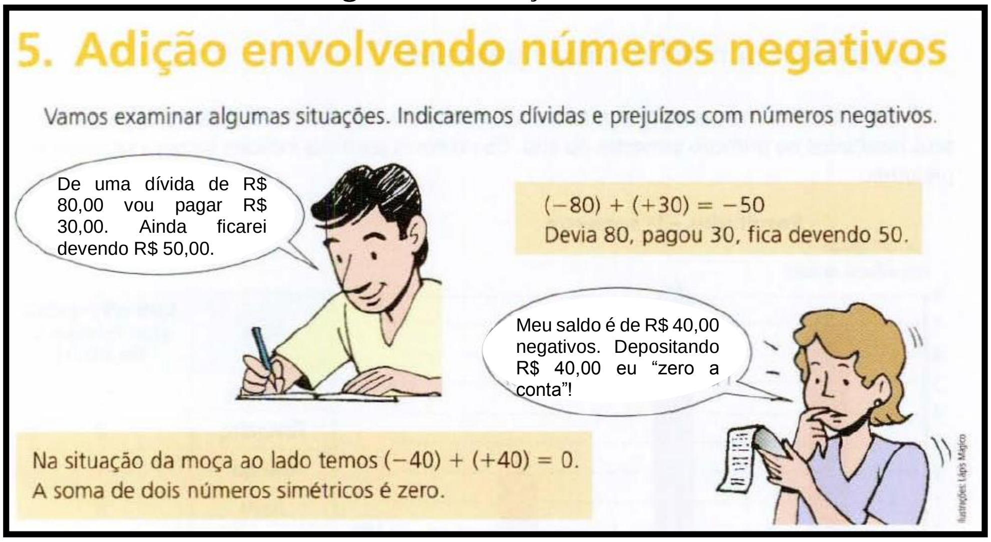
[25] Definição Circular: definição que utiliza o termo a ser definido em sua descrição. Há casos que se valem de um segundo conceito que é definido com os termos do primeiro que se deseja definir.

últimos tópicos analisados foram os referentes a essas duas operações. Assim como nas seções anteriores desse volume do 7º ano, pautando-se nos momentos didáticos descritos por Chevallard (1999), as operações de adição e subtração são iniciadas pelo reencontro com o estudo dessas operações, pois, em alguns exercícios propostos as operações de adição e de subtração foram usadas sem ainda se ter institucionalizado esse estudo para os inteiros.

Dizemos reencontro, pois, no decorrer desse livro, em várias oportunidades, tivemos tarefas em que se efetuou adições e subtrações com inteiros positivos ou que a primeira parcela fosse maior que a segunda. Observamos uma “retomada [...] das noções já estudadas, [não] sendo as mais variadas, [mas procurando] novos níveis de formalização das atividades realizadas” (PAIS, 2012, p.34). Nesses dois tópicos, identificamos três tipos de tarefas e quatro técnicas, pois, para a praxeologia da soma, foram descritas três técnicas para o tipo de tarefa T_9 que, como será descrito posteriormente, trata das adições de dois números inteiros.

Tomemos a figura 13 como exemplo dessa nova organização praxeológica, que permitiu descrever o reencontro de alguns elementos dos procedimentos de soma com os números inteiros.

Figura 13 – Adição com Inteiros.



Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 63.

Na seção 5, semelhantemente à introdução da seção 3, discutida anteriormente, temos um problema envolvendo ideias monetárias: dívidas e lucros. Mas para esse problema as representações das operações de adição e subtração são passadas da língua materna para a linguagem Matemática. Vejamos o quadro:

Quadro 8 – Exemplo de situação problema envolvendo ideias monetárias.

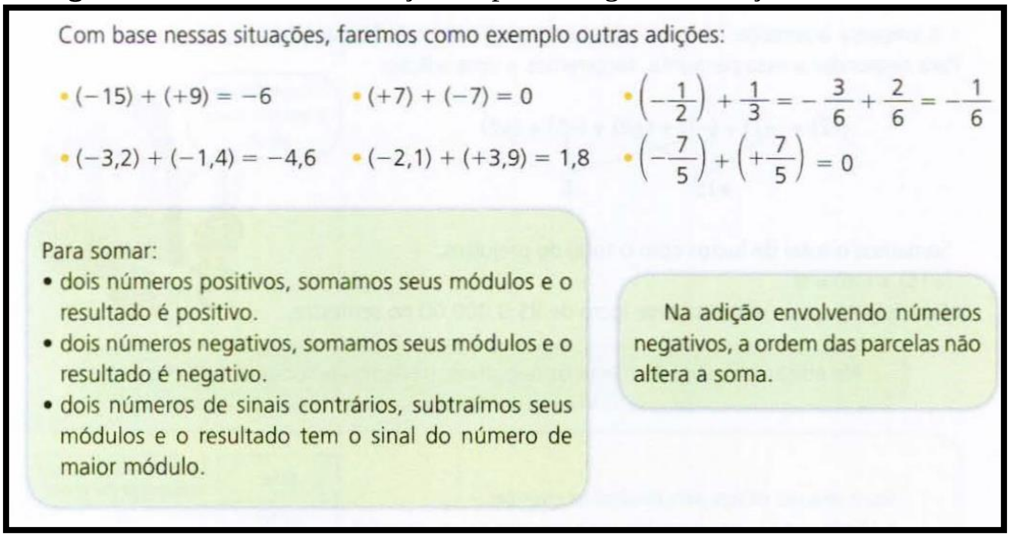
"De uma dívida de R$80,00 vou pagar R$ 30,00. Ainda ficarei devendo R$50,00"
(–80) + (+30) = –50, Devia 80, pagou 30, fica devendo 50.

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 63.

Essa é a primeira situação de um total de três que trata dessa operação e das ideias de dívidas e lucros. As justificativas para a descrição do quadro 8 orientam-se no fato de que, quando se deve uma quantia superior à que se tem, continua-se devendo. Ou, quando se tem uma quantia igual à que se deve, o resultado é zero. Ou ainda, quando se tem uma dívida e contrai-se outra, obviamente, a dívida aumenta. Esses "conceitos" estão implícitos e servem de *justificativas* para o fato, por exemplo, de somar o módulo e conservar o sinal, pois, nos casos de possuir apenas dívidas, somam-se essas quantidades e o sinal será negativo.

A metodologia de ensino das adições é exemplificada por meio de seis exercícios resolvidos, em que as explicações e os detalhes das resoluções são suprimidos, isto é, os autores apresentam a "conta" e, somente, a solução é dada, como pode ser observado na figura 14.

Figura 14 – Institucionalização da praxeologia das Adições com Inteiros.


Com base nessas situações, faremos como exemplo outras adições:

- $(-15) + (+9) = -6$
- $(+7) + (-7) = 0$
- $\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} = -\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = -\frac{1}{6}$
- $(-3{,}2) + (-1{,}4) = -4{,}6$
- $(-2{,}1) + (+3{,}9) = 1{,}8$
- $\left(-\frac{7}{5}\right) + \left(+\frac{7}{5}\right) = 0$

Para somar:
- dois números positivos, somamos seus módulos e o resultado é positivo.
- dois números negativos, somamos seus módulos e o resultado é negativo.
- dois números de sinais contrários, subtraímos seus módulos e o resultado tem o sinal do número de maior módulo.

Na adição envolvendo números negativos, a ordem das parcelas não altera a soma.

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 63.

Essa figura revela os outros seis exemplos, bem como a institucionalização da adição entre números inteiros. Vejamos: para a adição (–15) + (+9), é mostrado no livro que (–15) + (+9) = – 6, cuja a "dica" é utilizar as ideias de dívida, para se ter uma melhor compreensão de como se chega em "– 6". Trata-se do momento de *institucionalização,* que é o fechamento do procedimento para se encontrar as soluções de uma adição. No livro é pretendido um trabalho com noções objetivas, talvez mais abstratas e gerais do que se havia destinado.

Assim, podemos identificar alguns elementos tecnológicos, que assumem o papel de técnicas. Dizemos que são técnicas, pois, nos dão uma maneira de somarmos dois inteiros, o procedimento de como realizarmos a tarefa. Esse procedimento também nos assegura o que foi pedido, uma das características de uma tecnologia. Assim, nessa organização matemática, vários são os elementos tecnológicos apresentados, por exemplo, os conceitos de distância entre pontos, de módulo e de simétrico, sendo também a primeira vez que os autores utilizam conceitos da Matemática formal para *justificar* suas formas de resolver as tarefas. Eles sempre haviam apresentado justificativas em nível empírico, utilizando situações do cotidiano e conceitos da Matemática escolar para fundamentar algumas escolhas, fatos que revelam a evolução da organização praxeológica proposta pelos autores.

Os dados nos permitiram inferir que os autores se fundamentaram nos contextos apresentados, ou seja, em suas explanações anteriores e nos conhecimentos das operações com os naturais. Assim, foram propiciadas oportunidades para que houvesse, por parte dos alunos, compreensão dos procedimentos utilizados. Outra interpretação seria que os leitores já possuíam elementos suficientes para organizar as informações e poderiam compreender os conceitos explanados.

Assim, o papel do professor que irá manusear este material, subentende-se que será fundamental para desenredar os objetivos traçados no livro, pois, ele pode seguir o roteiro dado pelos autores ou pode elencar exemplos envolvendo a reta numérica e as ideias monetárias, que podem auxiliar nas justificativas e na compreensão das regras que foram anunciadas na figura 14.

Ainda nessa praxeologia das adições com inteiros, verificamos a utilização de outra técnica já estudada: a interpretação se um dado número representa uma quantidade positiva ou negativa, valendo-se nesse caso, dos tipos[26] de tarefa T_1 e T_2. Para esse trabalho, acrescenta-se um novo uso aos parênteses. Eles servem para separar os sinais em situações onde temos noções "operatórias e predicativas. Os primeiros designam uma

---

[26] T_1: Dado um problema enunciado na língua materna, converter as informações para linguagem matemática;
T_2: Dado um problema ou situação-problema, identificar se os valores, frases ou respostas são representados por números negativos ou positivos.

ação (aumentar, diminuir) e os segundos qualificam um estado (positivo, negativo)" (GLAESER, 1985, p. 100).

Nesse contexto da seção 5, emergiram os seguintes tipos de tarefas e suas respectivas técnicas, que atendem aos exercícios nos quais o subtraendo é maior que minuendo:

Quadro 9 – Tipos de tarefa e técnica de adição: algoritmo.

<table>
<tr><td colspan="2">T_9: $\forall a, b \in \mathbb{Z}$ Determinar o resultado da operação $a + b$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\tau_{9.1}$:</td></tr>
<tr><td>Quantidades de mesmo sinal:
- Calcular o $|a|$ e o $|b|$;
- Calcular $|a| + |b|$;
- Ao resultado da adição dos módulos, associar o sinal dos inteiros a e b;</td><td>Quantidades de sinais contrários:
- Calcular o $|a|$ e o $|b|$;
- Calcular $|a| - |b|$;
-Ao resultado da subtração dos módulos associar o sinal do inteiro de maior módulo;</td></tr>
</table>

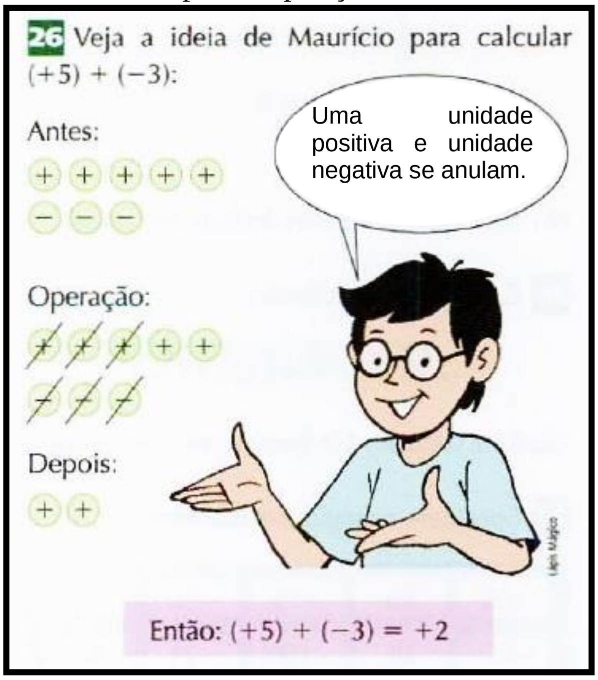
Fonte: Elaborado pelos autores da pesquisa.

O quadro 9 revela que o conceito de módulo é fundamental para a compreensão e para a execução desse tipo de tarefa, pois, quando os autores usam as ideias de dívidas para a resolução das subtrações, essas ideias são posteriormente traduzidas na técnica descrita para quantidades de sinais iguais ou diferentes.

Na sequência dessa organização, propõe-se o treino das técnicas por meio de exercícios e problemas. Identificamos, assim, aspectos do quarto momento, *trabalho com a técnica*, onde esse *momento didático* é explorado em listas de exercícios com intuito de fixar as técnicas propostas.

No decorrer da lista de exercícios, os autores construíram uma nova técnica, a técnica $\tau_{9.2}$, que pode ser ilustrada com a figura 15.

Figura 15 – Exemplo da aparição de uma nova técnica.



Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 65.

Nesse exercício resolvido pelos autores, a partir da resolução da soma (+ 5) + (– 3), pudemos descrever $\tau_{9.2}$. Assim, as quantidades negativas são representadas pelo sinal de "menos" e as positivas pelo sinal de "mais", e uma quantidade negativa anula uma positiva. Então, para o caso de termos cinco sinais de mais e três de menos, esses últimos anularam três positivos, restando-nos dois, representado por +2, ou seja, o resultado da soma de (+5) e (–3) é +2. Vejamos os enunciados de T_9 e $\tau_{9.2}$.

Essa técnica foi apresentada no decorrer da lista de exercícios, sem uma aparente valorização. Esse fato pode ser entendido pela baixa valência instrumental desempenhada pelos ostensivos para resolver a tarefa proposta, utilizados para compor essa técnica. Por exemplo, se a operação for (+526) + (–738), a valência pode ser vista pela possibilidade dessa técnica ser empregada ou não. Do ponto de vista de resolver essa tarefa, seria possível, mas demandaria tempo e trabalho que, facilmente, poderiam ser economizados por meio do algoritmo.

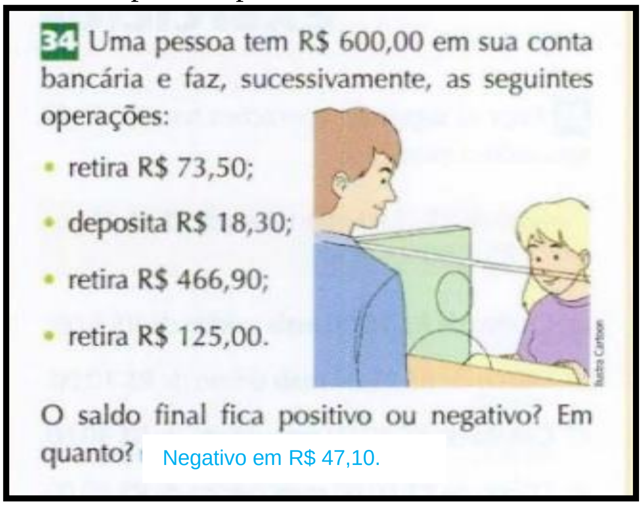
Quadro 10 – Tipos de tarefa e técnica de adição: ostensivo.
T_9: $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$, determinar o resultado da operação $a + b$.
$\tau_{9.2}$: Dado $a \in \mathbb{Z}$. Representamos as quantidades de elementos positivos e negativos por sinais de "+" e de "−". Em seguida, anulam-se, um a um, esses elementos. • Sejam a, $b > 0$, somam-se as quantidades, resultando num valor positivo; • Sejam a > 0 e b < 0 e $\|a\| > \|b\|$, anulando-se os elementos, resultará em uma diferença positiva; • Sejam a > 0 e b < 0 e $\|a\| < \|b\|$, anulando-se os elementos, resultará em uma diferença negativa; • Sejam a, b < 0, somam-se as quantidades, resultando num valor negativo;

Fonte: Elaborado pelos autores da pesquisa.

Comumente são empregadas em coleções que trabalham com os inteiros, técnicas que envolvem as operações com números inteiros e o uso de materiais para manipulação como recursos, que visam "facilitar" a compreensão dos conceitos que requerem níveis de abstrações mais elaborados. Assim, tem-se mais uma forma de desenvolver e resolver adições com inteiros, utilizando-se de objetos ostensivos gráficos. Esse fato não diverge do que se havia ensinado. Portanto, é propiciado algumas opções de resolução que, por sua vez, seguem uma linha de aumento gradativo de dificuldades.

O tipo de tarefa T_9 e suas técnicas $\tau_{9.1}$ e $\tau_{9.2}$, em algumas situações, são utilizados conjuntamente com os tipos de tarefas T_1 e T_2. Nesse caso, vemos que a solução do exercício requer o uso de três técnicas. Vejamos tal atividade:

Figura 16 – Exemplo de tipos de tarefas com mais de uma técnica.



34 Uma pessoa tem R$ 600,00 em sua conta bancária e faz, sucessivamente, as seguintes operações:

- retira R$ 73,50;
- deposita R$ 18,30;
- retira R$ 466,90;
- retira R$ 125,00.

O saldo final fica positivo ou negativo? Em quanto? Negativo em R$ 47,10.

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 66.

Para se obter a resposta desejada, o exercício é dividido em três partes: o problema é modelado obtendo uma expressão numérica com os inteiros fornecidos no problema; essas quantidades necessitam ser associadas às ideias positivas ou negativas; e, por último, a expressão numérica encontrada é resolvida.

Esse exercício exigiu vários conceitos anteriormente trabalhados e, consequentemente, um grau de dificuldade superior aos anteriores. Vejamos a solução dessa atividade:

1) [(−73,50)] representa a retirada de R$ 73,50;
2) [(+18,30)] representa o depósito de R$ 18,30;
3) [(−466,90)] representa a retirada de R$ 466,90;
4) [(−125,00)] representa a retirada de R$ 125,00.

Logo, a expressão numérica que representa esse problema é:

(+600) + ($-$73,50) + (+ 18,30) + ($-$466,90) + ($-$125,00)

Somando-se os positivos com positivos e os negativos com negativos, obtemos:

(+618,30) + ($-$665,40)

Portanto, o resultado é $-$ 47,10.

Outra solução possível, sem empregar os estudos das expressões numéricas, seria retirar 73,50 de 600, depois somar 18,30 e, assim, até finalizar o cálculo para ter-se a solução do problema, ou seja, $-$ 47,10. O saldo será negativo, pois, houve um gasto superior ao valor que se tinha de posse, isto é, a soma das retiradas é maior que a soma dos depósitos. Lembramos também, que os autores não anunciam uma lista de problemas ou de desafios, sendo trabalhados exercícios, problemas e desafios em uma mesma lista.

Os autores desse livro escolheram primeiro desenvolver o trabalho com somas com dois números, para, num próximo estágio, tratar as adições que envolvam várias parcelas e o uso da propriedade associativa da adição. Na situação modelada para o trabalho com esse tipo de tarefa foram utilizados um gráfico e uma tabela que revelam os lucros e os prejuízos de uma empresa. Esse problema nos permitiu descrever a técnica $\tau_{9.3}$ responsável pela resolução das adições com mais de duas parcelas. Vejamos:

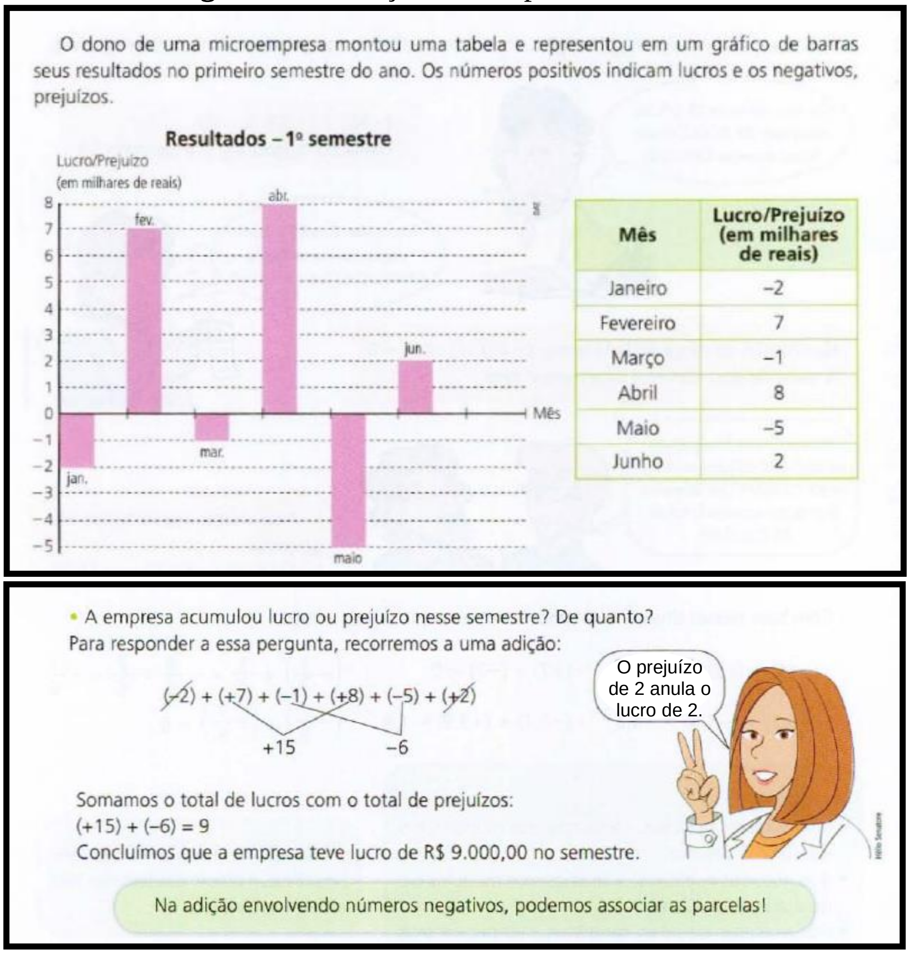
Quadro 11 – Técnica: praxeologia das adição.

$\tau_{9.3}$:
1.Separar as parcelas positivas das negativas, criando dois grupos; 2.Somar as parcelas dos inteiros positivos, i.e, soma-se a primeira com a segunda, esse resultado à terceira, e assim sucessivamente; 3.Somar as parcelas dos inteiros negativos, i.e, soma-se a primeira com a segunda, esse resultado à terceira, e assim sucessivamente; 4.Somar os resultados das duas primeiras adições.

Fonte: Elaborado pelos autores da pesquisa.

Na figura 17, é apresentado um texto que também propiciou a descrição da técnica $\tau_{9.3}$.

Figura 17 – Adição com n parcelas inteiras.



O dono de uma microempresa montou uma tabela e representou em um gráfico de barras seus resultados no primeiro semestre do ano. Os números positivos indicam lucros e os negativos, prejuízos.

Mês	Lucro/Prejuízo (em milhares de reais)
Janeiro	−2
Fevereiro	7
Março	−1
Abril	8
Maio	−5
Junho	2

• A empresa acumulou lucro ou prejuízo nesse semestre? De quanto?

Para responder a essa pergunta, recorremos a uma adição:

$$(\cancel{-2}) + (+7) + (-1) + (+8) + (-5) + (\cancel{+2})$$

$+15$ $\quad$ -6

Somamos o total de lucros com o total de prejuízos:

$(+15) + (-6) = 9$

Concluímos que a empresa teve lucro de R$ 9.000,00 no semestre.

Na adição envolvendo números negativos, podemos associar as parcelas!

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 64.

Nessa figura encontramos elementos do *segundo*, *quarto e quinto* momentos, pois se explora o tipo de tarefa das adições com várias parcelas, por meio da modelagem de um problema com os resultados de lucros e prejuízos de uma empresa fictícia. Trabalha-se uma nova técnica, pois, para obter-se o balanço dessa empresa, somam-se os valores de todos os meses e, por meio do uso da propriedade associativa da adição, somam-se os valores positivos com os positivos e os negativos com os negativos, para realizar uma soma final com esses dois resultados.

O uso dessa técnica é ilustrado por meio da resolução de dois exemplos, como visto na figura. O modelo de ensino predominante usado pelos autores foi o aritmético. Não seria diferente para essa parte do livro, pois, vários são os elementos que caracterizam tal abordagem, por exemplo, o uso dos termos lucros e prejuízos.

Há ainda, ao final, elementos de uma parcial institucionalização dessa nova técnica, exemplificada pela frase "na adição envolvendo números negativos, podemos associar as parcelas" (PRATICANDO MATEMÁTICA, p.64). Dessa forma, o momento da institucionalização deu-se pela modelagem de uma situação fictícia e implicitamente temos alguns elementos tecnológicos, tais como a propriedade associativa da adição, os conceitos de módulo, simétrico, entre outros.

Várias foram as situações em que o tipo de tarefa T_9 foi resolvido com a combinação de algumas técnicas; por exemplo, em alguns exercícios foram associados a técnica $\tau_{9.3}$ com as técnicas $\tau_{9.1}$ ou $\tau_{9.2}$. Essa articulação era previsível, pois envolveu apenas as ideias de adição, que os autores trabalharam separadamente.

Traremos a seguir algumas considerações a respeito do último tópico que analisamos desse volume. A seção 6 trata das propostas de ensino acerca das subtrações com inteiros. Os autores utilizam todos os conceitos trabalhados até então para institucionalizarem a técnica de como subtraímos os números negativos.

4.3 DAS SUBTRAÇÕES COM NÚMEROS NEGATIVOS

A seção 6, denominada "subtrações envolvendo números negativos", fecha nossas análises referentes a esse livro. A partir da figura 18, percebe-se que esse estudo foi iniciado com uma tabela com temperaturas de três cidades europeias em que se observaram as variações de temperatura. Vejamos tal situação:

Figura 18 – Subtração com inteiros relativos.

Navegando na internet, Maurício encontrou uma tabela com as temperaturas mínimas registradas em três cidades da Europa num fim de semana:

Temperatura mínima (°C)		
Cidade	**Sábado**	**Domingo**
Roma	+2	+6
Paris	+3	−1
Viena	−7	−4

Ele percebeu que houve variação nas temperaturas. Em algumas cidades a temperatura baixou e em outras, subiu.

A diferença de temperaturas em cada cidade pode ser calculada efetuando uma subtração:

temperatura do domingo – temperatura de sábado

Vamos fazer os cálculos com Maurício?

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 67.

Notemos que o cálculo das diferenças está relacionado ao fato de as temperaturas aumentarem ou diminuírem. O cálculo realizado é referente a uma subtração entre os valores das temperaturas de domingo pelos valores das temperaturas de sábado. Assim, as temperaturas de domingo são comparadas com as de sábado. Essa comparação se dá por meio da observação se a primeira é maior ou menor que a segunda. Esse contexto determinou o *primeiro encontro* com a praxeologia das subtrações com os números inteiros, pois até então o sinal de "menos" estava sendo usado para determinar que certas quantidades representavam ideias negativas. Ou para uma subtração em que o subtraendo (positivo) é menor que o minuendo. Vemos mais uma vez características do modelo aritmético, pois são criados contextos para se representarem alguns conceitos dos números negativos.

As informações, explanações e os conteúdos representados na figura 18, permitiram-nos descrever o tipo de tarefa que segue:

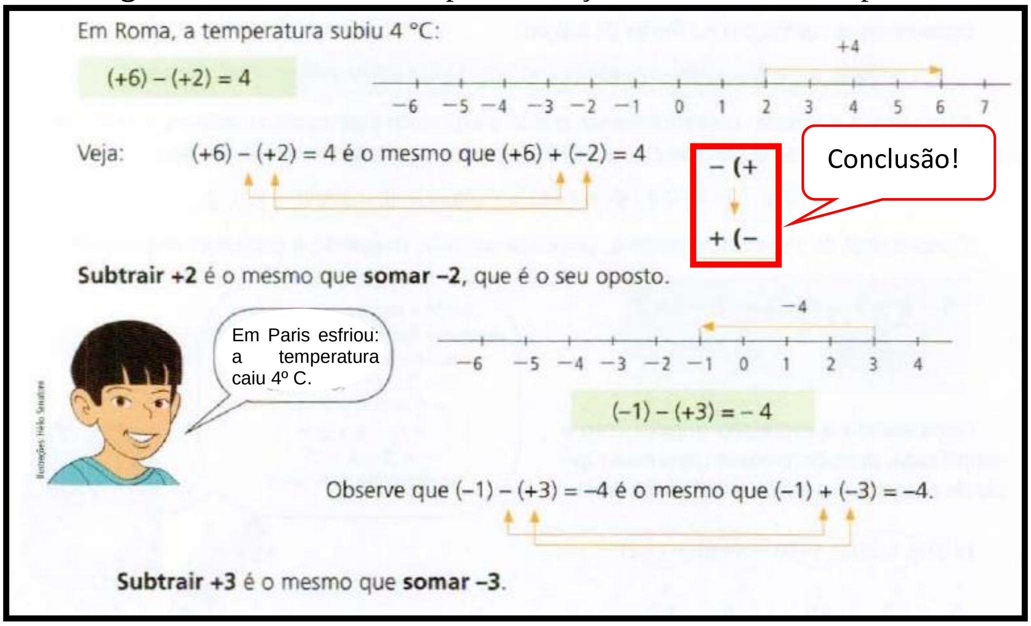
Quadro 12– Tipos de tarefa e técnicas: praxeologia subtração

T_{10}: $\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$. Determinar o resultado da operação $a - b$.
τ_{10}: Substituímos operação de subtração pela de adição (operação inversa), e b pelo seu oposto *(– b)* e aplicamos $\tau_{9.1}$ ou $\tau_{9.2}$;

Fonte: Elaborado pelos autores da pesquisa.

Nesse tipo de tarefa, a reta numérica é utilizada como elemento integrante da técnica descrita, que é a ferramenta que favorece o cálculo das diferenças entre as temperaturas de domingo e as de sábado (figura 18). As respostas são representadas na reta numérica, em que são marcadas as abscissas que demonstram as temperaturas de domingo e as de sábado. Em seguida, uma seta indicando se a temperatura aumentou ou diminuiu é desenhada, marcando a diferença das temperaturas. A operação efetiva é determinada por meio das trocas de sinais, que não se relacionam com o uso da reta numérica e das setas, pois, a partir da temperatura de domingo conta-se as unidades para se chegar a sábado. Assim, se a temperatura aumentou, a resposta é positiva e vice-versa. Salientamos que, a operacionalização do ostensivo reta numérica foi dada por meio da validação da técnica empregada, ou seja, conforme a evolução da organização matemática algumas tarefas tornam-se mais antigas e, portanto, mais rotineiras, auxiliando na legitimação de novas técnicas. A figura 19 exemplifica essa praxeologia:

Figura 19 – Primeiro exemplo Subtração: reta numérica e oposto.



Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 67.

No exemplo de Roma, temos que a temperatura no sábado estava em 2º C, subindo para 6º C no domingo. Portanto, um aumento de 4º C. Essa ideia foi exposta na reta, a “caminhada” começou em "+2" terminando em "+6". Houve um deslocamento de 4 unidades para o sentido positivo, indicado com o sentido da semirreta laranja e o número +4 acima dela. A representação numérica dessa explanação foi dada por meio da escrita da subtração entre as temperaturas de domingo e de sábado.

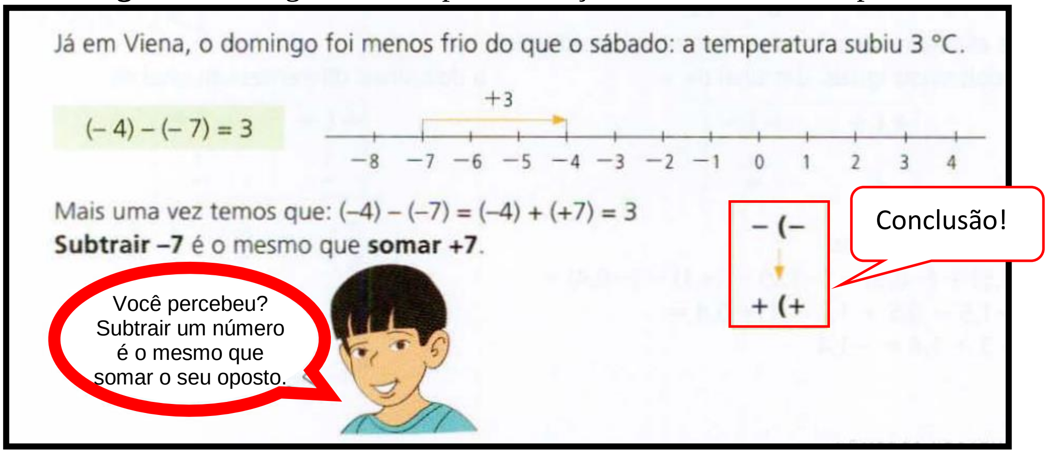
Continuando a construção dessa praxeologia, os autores utilizam a ideia de oposto[27] para explanar que “subtrair um número é o mesmo que somar seu oposto” (PRATICANDO MATEMÁTICA, p.67). Para tal, eles comparam os resultados de duas subtrações, verificando que ambas resultam em +4. Essa sequência utiliza as técnicas $\tau_{9.n}$, pois, ao utilizar a troca de uma subtração pela adição do oposto, implicitamente o tipo de tarefa T_9 torna-se uma técnica auxiliar e complementar a τ_{10}, pois, após as trocas, é necessário que se encontre a solução dessa nova adição, o que justifica a aplicação da técnica $\tau_{9.n}$.

[27] Cada elemento *a* possui um simétrico (ou inverso aditivo) *-a*, o qual cumpre a condição *-a+a=a+(-a) = =0*. Daí resulta que o simétrico *-a* e caracterizado por essa condição. Mais explicitamente, se *b + x* = 0, então x = *-b*, como se vê somando *-b* a ambos os membros. Em particular, como *-a + a = 0*, concluímos que *a= -(-a)*, ou seja, que o simétrico de *-a* é *a*. Uma primeira consequência da distributividade da multiplicação é o fato de que *a. 0 = 0*, seja qual for o número *a*. Com efeito, *a+a.0=a.1+a.0=a(1+0) =a.1= a =a + 0*. Assim, *a + a*. 0 = *a + 0*, logo *a·0 = 0*. Agora podemos mostrar que *(-1). a = -a* para todo número *a*. Com efeito, *a+(-1).a = 1·a+(-1)·a = [1 +(-1)].a = 0 . a = 0*, logo (-1).*a* é o simétrico de *a*, ou seja, (-1).*a* = *-a*. Em particular, (-l)(-1) = -(-1) = 1. Daí resulta, em geral, que *(-a). (-b) = a.b*, pois *(-a). (-b) = [(-1) a]. [(-1) b] =(-1) (-1) a.b* = ab. *(LIMA, 2008, p. 78).*

Em geral, as praxeologias da adição e da subtração com inteiros utilizam a reta para auxiliar no processo de construção desses conceitos. Mas não temos indícios explicitado pelos autores da articulação dessa representação gráfica na reta com a técnica dada pelos autores. Os modelos geométricos e aritméticos são usados de forma isolada sem nenhuma associação aparente. Percebemos que o uso da reta foi dado como um tipo de instrumento direto de validação, de uma forma de mostrar uma solução, e o processo para se obter tal resposta foi realmente expresso técnica para a subtração para, em seguida, ilustrar as ideias expostas e trabalhadas no momento de realizarmos a adição do oposto.

Vejamos a figura 20, uma propriedade matemática que é utilizada de maneira adaptada, pois tal conceito não poderia ser exposto formalmente.

Figura 20 – Segundo exemplo Subtração: reta numérica e oposto.



Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 67, grifos dos autores.

Os autores utilizaram a reta numérica, a comparação de temperaturas e o cálculo de diferenças para tratarem do fato da existência do elemento simétrico e das propriedades que podem ser deduzidas a partir dele. Percebemos, assim, algumas das adaptações realizadas pelos autores referentes aos conceitos a serem ensinados, que nos permitem observar a transposição didática realizada.

Durante a exposição das listas de exercícios e do *trabalho com a técnica*, dois fatos novos foram apresentados. O primeiro foi no exercício 45 da página 70, em que foram resolvidos seis exercícios, que no caso ficaram como exemplos. Mas foram as respostas que trouxeram realmente o novo fato, pois nelas foram acrescentadas “carinhas” alegres, tristes e sem expressão, que representavam, respectivamente, ideias positivas, negativas e nulas. O apelo aos ostensivos gráficos para essa fase final da praxeologia das operações de adição e subtração foi mais evidente. Esse episódio é *justificado* no Manual do Professor, onde se relata que o ensino será intuitivo, valendo-se dos conhecimentos que os alunos já possuem e, a partir desses conhecimentos, é possível organizar as primeiras ideias dos inteiros relativos, justificados pelo uso do modelo aritmético e pela criação de materiais de apoio, característico dos processos de transposição didática.

O segundo fato foi a exploração do uso dos parênteses, que até então haviam sido utilizados sem nenhuma orientação de sua finalidade, dos procedimentos para eliminá-los ou de quando usá-los. Há, assim, um condicionamento do uso desse recurso no trabalho com os inteiros relativos.

O uso dos ostensivos foi dado no decorrer da lista de exercícios. Mais uma vez, foram utilizados sem que os autores lhes dessem um destaque, que talvez, fosse maior se estivesse no corpo das explicações. A valência dos ostensivos tem forte influência para essas ações, pois, quanto maior forem os números menor será a valência. Observamos também, que foram utilizados como validação da técnica ensinada, pois para pequenos valores a aplicação desses ostensivos pode ser um tipo de “prova real” da solução encontrada.

5 CARACTERIZAÇÃO DA PROPOSTA DE ENSINO DO LIVRO PRATICANDO MATEMÁTICA

Nesse capítulo realizamos uma síntese com os principais dados produzidos, destacando os tipos de tarefas, suas técnicas e as quantidades que foram identificadas. Essas informações nos permitiram analisar a proposta de ensino dos números inteiros nesse volume do livro Praticando Matemática.

5.1 SÍNTESE DOS DADOS PRODUZIDOS

Organizamos a seguir os principais dados que emergiram das análises e aspectos que caracterizam a proposta de ensino do volume analisado do livro do 7º ano da coleção Praticando Matemática.

Vejamos o quadro que traz a descrição dos tipos de tarefas identificados nessa coleção:

Quadro 13 – Tipos de tarefas da coleção Praticando Matemática.

Tipo de Tarefa	Descrição
T_1:	Dado um problema enunciado na língua materna, converter as informações para linguagem matemática.
T_2:	Dado um problema ou situação-problema, identificar se os valores, frases ou respostas são representados por números negativos ou positivos.
T_3:	Dados a e $b \in \mathbb{Z}$, determinar as condições para que se tenha $a > b$;
T_4:	Dados n números inteiros, escrevê-los em ordem crescente ou decrescente;
T_5:	Dada a sequência de inteiros x = $a_1, a_2, a_3, \ldots, an_{-1}, a_n, an_{+1} \ldots$, determinar a_n;
T_6:	Associar um número inteiro a um ponto da reta numérica;
T_7:	Determinar o valor absoluto de um inteiro b, isto é, $\|b\|$;
T_8:	Determinar o simétrico de um inteiro c;
T_9:	$\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$. Determinar o resultado da operação $a + b$.
T_{10}:	$\forall\ a, b \in \mathbb{Z}$. Determinar o resultado da operação $a - b$.

Fonte: Elaborado pelos autores da pesquisa.

Os dois primeiros tipos de tarefas foram identificados em quase toda a coleção, pois, as situações-problema necessitam de interpretação, bem como conversão de dados. Nesse contexto, há necessidade de identificar se os números são positivos ou negativos. Os demais tipos foram identificados em suas partes específicas, exceto quando foi utilizado mais de um tipo de tarefa para a situação-problema dada. Por exemplo, no caso de solicitar que se resolvam algumas adições e depois que se comparem os resultados. Outra exceção foi para o caso das adições, em que nessa praxeologia é utilizado quase todos os conceitos já estudados no livro. Algumas tarefas estão sendo utilizadas nesse contexto como técnicas ou como tecnologias, no caso das justificativas.

Na tabela a seguir, são descritas as técnicas para os tipos de tarefas que elencamos anteriormente:

Quadro 14 – Técnicas Coleção Praticando Matemática.

Técnica	**Descrição**
τ_1:	τ_1: Associar as informações a uma das situações a seguir: i. Contextos Monetários (lucros - positivo e prejuízos - negativo); ii. Reta numérica: À direita de zero positivo e à esquerda negativo; iii. Temperaturas: acima de zero positivo e abaixo de zero negativo.
τ_2:	Usar um ou mais passos: 1. Utilizar τ_1; 2. Escolher uma operação; 3. Resolver a operação; 4. Associar sinal à resposta;
$\tau_{3.1}$:	***Pensando em temperaturas:*** 1. Associar os números a, $b \in \mathbb{Z}$, à temperaturas. 2. Observar qual dessas temperaturas é a mais baixa. 3. Se a for a mais baixa, será a menor temperatura, caso contrário, b será a menor.
$\tau_{3.2}$:	***Pensando na reta numérica:*** Para a sequência... *–3, –2, –1, 0, +1, +2, +3, ...*, Localizamos na reta os inteiros *a* e b, valendo--se de τ_6. 1. Se *b* estiver à esquerda de *a*, então *a* será maior que *b*. 2. Se *a* for positivo e *b = 0*, então a > *b*; 3. Se *a* = 0 e *b* for negativo, então *a* > *b*; 4. Se *a* for positivo e *b* for negativo, então *a* > *b*.
τ_4:	Valendo-se de $\tau_{3.2}$, identificar qual dos inteiros é o maior. Em seguida, identificar o segundo maior e, assim, sucessivamente.
τ_5:	1. Seja *b* o resultado de $a_2 - a_1$ e a razão dessa sequência; 2. Seja *b* o resultado de $a_k - a_{k-1}$ e a razão dessa sequência; 3. Logo, $a_n = a_{n+1} - b$ Ou $a_n = a_{n-1} + b$.
τ_6:	1. Desenhar uma reta e determinar um ponto que represente o zero; 2. Determinar uma unidade de medida; 3. Observar a sequência positiva: 1, 2, 3, 4, …, 100, ..., 4. Observar a sequência negativa: ..., - 100,..., - 4, -3, -2, -1. 5. Marcar os pontos positivos à direita e os negativos à esquerda;
τ_7:	Calcular a distância entre um inteiro *b* e o ponto que representa o zero.
τ_8:	Para que dois números sejam simétricos, precisam serem diferentes e terem o mesmo módulo;
$\tau_{9.1}$:	❖ **Quantidades de mesmo sinal:** - Calcular o $\lvert a \rvert$ e o $\lvert b \rvert$; - Calcular $\lvert a\rvert + \lvert b\rvert$; - Ao resultado da adição dos módulos, associar o sinal dos inteiros *a* e *b;* ❖ **Quantidades de sinais contrários:** -Calcular o $\lvert a \rvert$ e o $\lvert b \rvert$; - Calcular $\lvert a\rvert - \lvert b\rvert$; - Ao resultado da subtração dos módulos, associar o sinal do inteiro de maior módulo;

$\tau_{9.2}$:	Dado $a \epsilon \mathbb{Z}$. Representamos as quantidades de elementos positivos e negativos por sinais de "+" e de "−". Em seguida, anulam-se, um a um, esses elementos. • Sejam *a, b* > 0, somam-se as quantidades, resultando num valor positivo; • Sejam a > 0 e b < 0 e $\lvert a \rvert > \lvert b \rvert$, anulando-se os elementos, resultará em uma diferença positiva; • Sejam a > 0 e b < 0 e $\lvert a \rvert < \lvert b \rvert$, anulando-se os elementos, resultará em uma diferença negativa; • Sejam a, b < 0, soma-se as quantidades, resultando num valor negativo;
$\tau_{9.3}$:	1.Separar as parcelas positivas das negativas, criando dois grupos; 2.Somar as parcelas dos inteiros positivos, i.e, soma-se a primeira com a segunda, esse resultado à terceira, e assim sucessivamente; 3.Somar as parcelas dos inteiros negativos, i.e, soma-se a primeira com a segunda, esse resultado à terceira, e assim sucessivamente; 4.Somar os resultados das duas primeiras adições
τ_{10}:	Substituímos operação de subtração pela de adição (operação inversa), e *b* pelo seu oposto *(– b)* e aplicamos $\tau_{9.n}$;

Fonte: Elaborada pelos autores da pesquisa.

As tabelas 1 e 2 trazem o quantitativo das técnicas e dos tipos de tarefas, que nos permitem observar as escolhas dos autores e perceber quanto à valorização de determinados elementos praxeológicos nessa coleção.

Tabela 1 – Tipos de Tarefas Coleção Praticando Matemática.

Tipos de Tarefas - Praticando Matemática										
T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	*TOTAL*
22	24	27	1	3	9	4	4	85	15	194

Fonte: Elaborada pelos autores da pesquisa.

Tabela 2 – Técnicas Coleção Praticando Matemática.

Técnicas - Praticando Matemática												
τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8	$\tau_{9.1}$	$\tau_{9.2}$	$\tau_{9.3}$	τ_{10}	*TOTAL*
44	35	33	1	4	9	9	10	35	35	42	19	277

Fonte: Elaborada pelos autores da pesquisa.

O quantitativo dos tipos de tarefas e das técnicas são diferentes, pois, para a contagem do uso das técnicas houve casos que foram usadas duas para a resolução de uma única tarefa.

Com 85 proposições, o tipo de tarefa T_9, que se refere a situações-problema com adições de inteiros, foi o mais utilizado nesse livro, seguido de T_3 (comparação de inteiros, 27 vezes) e T_2 (24 vezes). Assim, nesse livro há uma valorização do trabalho para operar com inteiros, ou seja, construíram-se praxeologias que prepararam para os estudos das adições com ostensivos gráficos. Todos os conceitos estudados foram destinados à construção dos procedimentos para se somar inteiros. A próxima figura reforça essa informação, pois, são traçados apenas três objetivos, que coincidem com os tipos de tarefas mais identificados.

Figura 21 – Objetivos acerca dos estudos dos Inteiros.

Unidade 3 – Números negativos

I. Objetivo geral

- Dar significado aos números negativos e às operações envolvendo esses números.

II. Objetivos específicos

- Identificar e registrar números negativos – inteiros, fracionários e decimais.
- Comparar números negativos e representá-los na reta numérica.
- Efetuar operações e resolver problemas que envolvem números negativos.

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 62.
Manual do Professor.

A análise das duas tabelas e da figura 21 também evidenciou que os tipos de tarefas valorizados foram os referentes às operações, às comparações e aos tipos de tarefas que permearam quase todo o livro: as tarefas de *converter* e de *identificar*, que, por sua vez, atendem ao primeiro objetivo determinado para essa parte do livro.

Para finalizar esta seção, analisaremos o próximo quadro, que trata dos encadeamentos entre os tipos de tarefas e as técnicas utilizadas, bem como o quantitativo de cada uma dessas articulações.

Quadro 15 – Quantitativo-Tipos de tarefas x Técnicas.

Tipo de Tarefa[28]	Técnica	Total[29]
T_1	τ_1	22
T_1	τ_1 e τ_2	10
T_2	τ_2	24
T_3	τ_3	27
T_3	τ_3 e τ_7	3
T_3	τ_3 e τ_8	3
T_4	τ_4	1
T_5	τ_5	3
T_5	τ_5 e $\tau_{9.n}$	1
T_6	τ_6	9
T_7	τ_7	4
T_7	τ_7 e τ_8	3
T_8	τ_8	4
T_9	$\tau_{9.1}$	17
	$\tau_{9.2}$	35

[28] O destaque em vermelho representa os tipos de tarefas que são resolvidos por um única técnica.
[29] O total é referente a quantidade de vezes que uma técnica foi utilizada para resolver um tipo de tarefa.

	$\tau_{9.3}$	33
T9	$\tau_{9.n}$ e τ_1	8
T9	$\tau_{9.n}$ e τ_2	1
T10	τ_{10}	15
T10	τ_{10} E τ_1	4

Fonte: Elaborado pelos autores da pesquisa.

A leitura desse quadro reforça o tipo de proposta de ensino exposta nesse livro, pois foram encontrados poucos encadeamentos entre as técnicas ensinadas. Para os casos em que são necessárias duas técnicas o quantitativo é menor. A única exceção é a técnica das adições, cuja descrição contempla quase todos os conceitos já estudados. Vejamos algumas características dessa tabela:

1. O tipo de tarefa T_2 e sua respectiva técnica foram reconhecidos 25 vezes. Em 36% desses casos, ao resolver o exercício, além de utilizar τ_2, utiliza-se τ_1, ou seja, associou as informações do problema a situações monetárias ou com a reta numérica para traduzi-lo da língua materna para a Matemática. O problema necessita ser interpretado corretamente para se montar uma expressão que o represente. Por último os sinais de "+" ou de "–" são associados à solução do problema. Em um desses problemas, os autores deixam algumas "dicas" para a sua modelagem, pois, para o contexto que estava inserido, esse exercício se configura como um problema de alta complexidade.
2. O tipo de tarefa T_3 foi identificado vinte e sete vezes, entre as quais três vezes além da técnica τ_3 foi utilizada a técnica τ_7, em que os autores, possivelmente, planejaram articular dois conceitos em um único exercício. Além, é claro, de realizar uma retomada sobre as comparações.
3. O tipo de tarefa T_9 representa 43,81% das 194 tarefas identificadas nesse livro. Dessas oitenta e cinco tarefas, oito exigiram em suas soluções o uso de duas técnicas, $\tau_{9.n}$ e τ_1; Um exemplo de articulação entre essas técnicas foi o exercício 27, que, em suma, propôs que se descobrisse com os dados de uma conta bancária se houve depósito ou retirada. Nesse exercício, o saldo passou de R$43,00 para R$ – 6,00. Assim, para se obter a resposta de uma retirada de –R$ 49,00, primeiro é usado a técnica de conversão, segundo monta-se a operação e, por último, essa conta é resolvida com a ajuda de $\tau_{9.n}$.

4. O tipo de tarefa T_{10} foi identificado 15 vezes, das quais 4 foram associadas ao tipo de tarefa T_1. Esse agregamento de técnicas foi utilizado para resolução de problemas, em que o aluno terá que interpretá-lo e modelá-lo em uma expressão Matemática que represente a tradução dos dados fornecidos para obter a solução.

A seguir, tecemos algumas discussões que visam expor nossas considerações a respeito da Matemática estudada e de como foi proposta na coleção Praticando Matemática, visando evidenciar alguns pontos marcantes da coleção destacados no Manual do Professor, ou que emergiram dos estudos da teoria antropológica do didático e de nossas análises.

5.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE O LIVRO PRATICANDO MATEMÁTICA

Em quase todas as páginas analisadas, evidenciamos que a forma de condução dos estudos nesse livro segue uma mesma ordem. As organizações praxeológicas são semelhantes, pois, tanto a organização matemática quanto a organização didática revelam muitas características que se aproximam. O terceiro momento – constituição do entorno tecnológico/teórico – é trabalhado de maneira superficial nas seções que introduziram os inteiros, sendo que as justificativas para as técnicas foram realizadas de forma pragmática. Nas seções que trataram das operações de adição e subtração, percebe-se o uso dos conceitos matemáticos ensinados inicialmente, apontando que alguns tipos de tarefas se tornaram técnicas, para algumas técnicas os elementos pragmáticos foram substituídos por matemáticos, bem como algumas tornaram-se rotineiras, sendo utilizadas como ferramenta de validação para as novas técnicas, como foi o caso da técnica para os estudos da reta numérica.

As tecnologias permearam o campo das figuras e das explanações pragmáticas, Matemática escolar, com poucos fundamentos da Matemática formal. Essa foi a metodologia utilizada pelos autores para transporem conceitos que requerem conhecimentos que os alunos dessa etapa de estudo ainda não possuem.

Pequenos esboços formais, de caráter matemático *do terceiro momento,* são observados no Manual do Professor, além de alguns excertos dos axiomas dos inteiros – propriedade do fechamento, da comutatividade, da associatividade, do elemento neutro e existência do inverso. Essas propriedades estão vinculadas às técnicas trabalhadas e, muitas delas, não são expressas explicitamente. Tal fato é compreensível, pois o trabalho com essas propriedades, que caracterizam algumas estruturas algébricas, exige um elevado grau de abstração.

Para o tipo de tarefa comparar inteiros foram apresentadas duas técnicas. A primeira foi pautada em ostensivos gráficos e em ideias empíricas. E, a partir das ideias da técnica inicial, os autores formalizaram a segunda apresentando conceitos matemáticos, revelando uma evolução praxeológica.

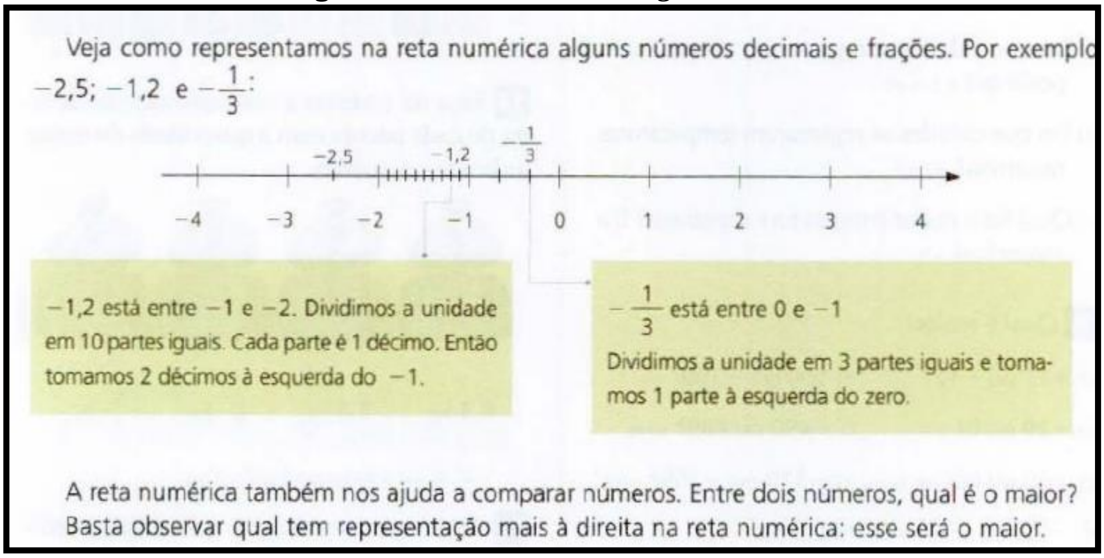
Nesse volume analisado, estudou-se inicialmente situações com ideias positivas e negativas, simétricos, módulos, reta numérica, comparações, para então avançar aos estudos das operações com os inteiros. E os conceitos já trabalhados, para as praxeologias das operações, tornaram-se ferramentas auxiliares à compreensão das formas de somar e subtrair inteiros. Assim, praticamente todos os tipos de tarefas da primeira etapa de estudo foram técnicas, ou compuseram as técnicas, relativas aos estudos das adições algébricas com os negativos. Observamos os estudos dos inteiros com o objetivo de "dar significado aos números negativos e às operações envolvendo esses números" (ANDRINI; VASCONCELLOS; MANUAL DO PROFESSOR, 2012, p. 62)

O fato de se apresentarem poucos exemplos no decorrer das explanações dos conteúdos, permite-nos inferir que o professor que estiver utilizando o livro deverá complementá-lo, pois, para o encadeamento dos conceitos, "o aluno deve conhecer e aplicar conhecimentos da Matemática na vida prática, [...] desenvolver [...] gosto pelo desafio, presente em situações da própria Matemática, de maneira que as abstrações não constituam o início ou o fim do processo". ANDRINI; VASCONCELLOS, MANUAL DO PROFESSOR, 2013, p.5).

> É importante o professor incluir em seu planejamento situações que exijam momentos de ação e reflexão por parte dos alunos. A leitura dos textos complementares disponíveis no *Manual do Professor* contribui para enriquecer as aulas. O incentivo a interação entre os alunos é outro aspecto pouco presente na obra, [...]. Também nesse caso, é importante que o professor planeje situações que estimulem a troca de ideias entre os alunos. (BRASIL, 2013, p.65).

No momento da *construção do entorno tecnológico/teórico* – terceiro momento, pode-se observar que uma tecnologia pode assumir três papéis: assegurar o que foi pedido; justificar determinada técnica e produzir novas técnicas. Destacamos nesse livro as duas primeiras, pois conseguimos encontrar características de ambas. Posto isso, vários elementos tecnológicos são concentrados no Manual do Professor, nas orientações destinadas a eles, e para a parte destinada ao aluno, as encontramos nas seções que ensinaram as operações. No decorrer do material destinado aos alunos, percebe-se também, a característica de assegurar o que foi pedido, o que faz chegarmos ao resultado esperado, expressando uma preocupação em justificar algumas escolhas de apresentação e sugestões ao trabalho com o material. A figura a seguir retrata esse fato:

Figura 22 – Entorno tecnológico/teórico.


Veja como representamos na reta numérica alguns números decimais e frações. Por exemplo $-2{,}5$; $-1{,}2$ e $-\frac{1}{3}$:

$-1{,}2$ está entre -1 e -2. Dividimos a unidade em 10 partes iguais. Cada parte é 1 décimo. Então tomamos 2 décimos à esquerda do -1.

$-\frac{1}{3}$ está entre 0 e -1
Dividimos a unidade em 3 partes iguais e tomamos 1 parte à esquerda do zero.

A reta numérica também nos ajuda a comparar números. Entre dois números, qual é o maior? Basta observar qual tem representação mais à direita na reta numérica: esse será o maior.

Fonte: Andrini e Vasconcellos, 2012, p. 60.

O modo de representar alguns números na reta numérica assume, nesse caso, a função de técnica, pois ensina como fazer. Mas, concomitantemente, assegura que realizando dessa maneira é possível responder à tarefa solicitada, pois a reta numérica foi construída com os negativos à esquerda do zero e os positivos à direita, assim, se sempre proceder como ensinado na figura 22, conseguiremos marcar um número na reta.

Nesse livro identificamos uma característica marcante, ao iniciar os estudos de um conteúdo, apresenta-o brevemente, seguido de alguns exemplos e finalizando com exercícios. Em poucas situações, os alunos são levados a investigarem e conjecturarem. Esses dados nos permitem, segundo Gascón (2003), identificar elementos do modelo tecnicista. O foco está no treino das técnicas, a apresentação e o ensino dos conteúdos, que se dá de forma resumida, sendo destinado um maior espaço de tempo e de trabalho às listas de exercícios que se destinam a reproduzir e treinar o que foi ensinado.

Se olharmos para o esquema tridimensional, tem-se uma abordagem empirista, principalmente quando os autores utilizam os objetos ostensivos gráficos, sem que haja um encadeamento entre eles e os demais ostensivos, pois, as tabelas, os gráficos, os textos estão compondo a organização matemática, mas as orientações para qual caminho seguir não são apresentadas. Assim, simplesmente a leitura e observação desses objetos ostensivos propiciará a aprendizagem.

Comparando a sequência de apresentação realizada na Matemática para se construírem os inteiros e a realizada nesse livro, percebe-se que as ordens do ensino dos conceitos são diferentes. Para a construção dos inteiros é utilizado uma estrutura algébrica – definição de duas operações e suas propriedades, deduz a operação de subtração, as relações de ordem, o jogo de sinais para a multiplicação, a lei do cancelamento e o princípio da boa ordenação, o valor absoluto e as sequências estritamente crescentes e decrescentes. E, para a educação básica, – há uma apresentação dos inteiros por meio de situações cotidianas, reta numérica, comparação, sucessores, sequências crescentes, valor absoluto, simétrico e as operações.

Além da diferença de apresentação, no ensino superior, todos os conceitos são deduzidos e ligados logicamente, o que nem sempre acontece na educação básica, em que os conceitos são adaptados para encadear uma sequência que se aproxime do nível cognitivo dos alunos. Apesar de as sequências terem ordens diferentes, quase todos os conceitos são trabalhados em ambos os ensinos. Por exemplo, a comparação de números inteiros provém da relação de ordem e do princípio da boa ordenação. Mas as intenções se afastam nesse estudo, uma vez que um tem conotação de saber quem é maior e, outro de organizar e ordenar os elementos de um conjunto.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com o objetivo geral de compreender distanciamentos e aproximações entre a Matemática do ensino superior e propostas de ensino das operações de adição e subtração dos números inteiros em um livro didático do 7º ano do ensino fundamental, escolhemos analisar a coleção mais adotada do PNLD/2014. Utilizamos como aporte teórico e metodológico a teoria antropológica do didático, que nos permitiu descrever praxeologias relativas aos principais conteúdos que fazem parte dos estudos desse conjunto numérico.

Os conceitos matemáticos podem ser trabalhados a partir de materiais de apoio, de jogos e situações reais como motivadoras para oportunizar a formalização de conhecimentos empíricos em matemáticos, compondo assim, os elementos da transposição didática realizada pelos autores. Mas nem todos esses conceitos receberão um tratamento formal, os aprofundamentos e o rigor matemático, necessários, ficam em níveis mais superficiais e, no decorrer da escolarização, vão "ganhando" o rigor necessário.

Nossos dados apontaram para dificuldade de justificar matematicamente conceitos tais como: módulo, simétrico, ordem no conjunto dos inteiros e, principalmente, as operações e os seus elementos. Esse fato se assemelha ao ocorrido nos anos iniciais do ensino fundamental, pois, além desses elementos serem trabalhados em anos posteriores e alguns apenas em nível de graduação, eles foram ensinados por meio de adaptações ao nível cognitivo dos alunos. Alguns conteúdos estão além desse nível, por isso necessitam de adaptações e materiais de apoio. Tais conceitos sobrevivem em ambos os contextos – Matemática escolar e a Matemática dos matemáticos, mas, como veremos a seguir, suas abordagens diferem em vários aspectos.

O desenvolvimento desses conceitos visa atender tanto contextos do cotidiano quanto da própria Matemática. Historicamente, percebe-se que por diversas ocasiões o interesse em construir um novo saber estava vinculado apenas a questões Matemáticas. Muitos matemáticos consideravam os inteiros apenas como unidades a serem subtraídas ou como grandezas subtrativas, sempre ligando a existência de um número negativo a um número positivo.

Além da dificuldade de trabalhar com conceitos, tais como, anéis e domínios de integridade, a ordem de apresentação também é um fator que interfere na formalização de conceitos que poderiam ser realizadas nesse momento, e não o são. Todo esse movimento de adaptação revela características da transposição didática realizada pelos autores desse livro.

As análises revelaram que todo o trabalho introdutório está voltado à preparação do ensino da operação de adição, em que muitas das tarefas foram utilizadas para compor as técnicas de somar e subtrair. Ao analisar o quantitativo dos tipos de tarefas, as tarefas referentes à soma atingem 85 descrições num total de 194. Para a construção dos conceitos de módulo, oposto e comparação usam-se reta numérica e distâncias entre pontos, abordagem que se assemelha à visão geométrica que, historicamente, muitos matemáticos atribuíram aos inteiros. Para o trabalho de somar inteiros, o principal algoritmo está vinculado ao cálculo dos módulos desses inteiros e a subtração está sendo tratada como inverso da adição. Logo, as técnicas referentes a esses conceitos são base para a descrição das técnicas de somar e subtrair.

Outro fato verificado pode ser associado ao que Gascón diz sobre a evolução das praxeologias, em que algumas técnicas são substituídas à medida que novos conteúdos são ensinados. Por exemplo, para a tarefa de comparar inteiros, a primeira técnica continha ostensivos gráficos e algumas ideias empíricas e, a seguir, ao institucionalizar esse estudo os autores apresentaram uma técnica com mais elementos da Matemática escolar. Para alguns contextos foi verificado que o uso dos ostensivos não foi operacionalizado, ou seja, foram apresentados mas não tinham nenhuma articulação Matemática com aquilo que estava sendo ensinado. Por vezes, aparentemente, estavam apenas encenando o contexto de ensino, por exemplo, “Se estou falando de temperaturas, então uso termômetros”. Mas, em alguns casos, salientamos que, a operacionalização dos ostensivos, por exemplo, da reta numérica, foi dado para validar a técnica empregada. Conforme a evolução da organização matemática algumas tarefas mais rotineiras auxiliaram na legitimação de novas técnicas, por exemplo, as tarefas para se determinar o módulo e as para o cálculo das adições algébricas.

Dessa forma, percebemos que o principal modelo de ensino utilizado é o aritmético, com algumas “pinceladas” do modelo geométrico. As adaptações que se fizeram necessárias pautaram-se nas criações de contextos de perdas e ganhos, de altitudes e profundidades, de lucros e prejuízos, entre tantas outras metáforas utilizadas. Criou-se, assim, um ambiente de ensino que pudesse introduzir números que fossem respostas de operações do tipo 3 – 5, que os naturais não são mais suficientes.

O modelo algébrico não foi identificado nessa parte do livro didático, um dos motivos está vinculado às próprias adaptações realizadas pelos autores. Não encontramos justificativa para esse episódio, mas os dados nos levam ao fato que se os autores utilizassem incógnitas e variáveis para introduzir os números negativos, poderia criar outras dificuldades para esse ensino. Mas os vários contextos a que esse conjunto numérico está vinculado pode auxiliar na aprendizagem e propiciar que algumas confusões conceituais não façam parte do rol das dificuldades dos alunos.

Os exemplos do cotidiano são utilizados, como dito anteriormente, para motivar o tipo de tarefa de identificação, quando uma quantidade é positiva ou negativa. Contudo, se os estudos ficarem presos a esses contextos apenas, podem causar outras dificuldades de aprendizagem, por exemplo, situações monetárias são boas para as operações de adição e subtração, mas para multiplicação e divisão podem gerar outras dificuldades à aprendizagem.

Essas dificuldades podem ser somadas às relativas ao ensino das ideias que envolvem noções negativas; ao uso dos sinais "+" e "–", ora como operação, ora como sentido positivo e negativo; à interpretação de contextos valendo-se de temperaturas (ar condicionado); à utilização de palavras: "atraso", "dívida", "profundidade"; entre outras, que podem não favorecer as justificativas ao trabalho com os inteiros, sem que gerem outras confusões conceituais, além daquelas que são inerentes a esse conjunto.

Se o ensino dos inteiros ficar limitado aos contextos cotidianos poderá proporcionar maiores impedimentos à aprendizagem, gerando problemas para a ação de atribuir significado ao sinal de menos. Os alunos podem vincular um número negativo somente se estiver acompanhado de um positivo, deixando de perceber as quantidades negativas em situações que estão “isoladas”, assim como alguns matemáticos da antiguidade os compreendiam.

A tarefa é delicada, tem-se que ensinar um conteúdo em que alguns termos estão distantes dos alunos e, por isso, as adaptações realizadas devem ser bem pensadas e postas em prática com a preocupação de não gerarem novos problemas à aprendizagem. Um exemplo dessa dificuldade pode ser expresso por uma alusão às temperaturas dos condicionadores de ar, diz-se: *aumenta pra mim*. A expressão *aumenta* pode significar aumentar a temperatura, isto é, está muito frio, de 18ºC para 24ºC. Pode significar também aumentar o frio, isto é, tem-se que diminuir a temperatura, de 24ºC para 18ºC. Nessa situação, o que traduz a ideia negativa para as temperaturas segue o referencial da reta numérica, para esquerda, negativo e, para direita, positivo. Agora para aumentar/diminuir o "frio" (sensação térmica), esse referencial será invertido, isto é, aumento a climatização do ambiente diminuindo a temperatura, ou diminuo a climatização aumentando a temperatura. Vejamos que essas estratégias introduzem o capítulo em que os inteiros estão sendo vistos pela primeira vez. Na Matemática que é utilizada para se construírem os inteiros, esse primeiro contato é dado pela exemplificação de uma estrutura algébrica.

Outra situação dá-se com o sinal de menos quando é utilizado com as ideias de oposto, isto é, para a operação (+2) – (– 3), pode-se substituí-la por +2 + 3, ou seja, a segunda parcela foi considerada como o oposto de – 3, fato que decorre da existência do inverso aditivo e de outras propriedades, tais como (-1). $a = -a$; $(–a). (–b) = a.b$; se $a \leq 0$ e $b \leq 0$, então $a. b \geq 0$, entre outras. Portanto, o sinal de menos pode representar operação: 2 – 1 = 1; sinal: – 1 e; simétrico: – (– 1) = + 1. Daí as confusões que os alunos podem vir a estabelecer com os conceitos dos inteiros, que permeiam todo esse conjunto. Quando se estabelecem regras e não há compreensão, quando os conceitos forem aplicados simultaneamente, as dificuldades surgirão nos processos de resolução de problema.

O ensino dos números inteiros na educação básica contempla alguns conceitos que fazem parte dos estudos no ensino superior, porém, em ordem de apresentação e com alguns significados diferentes, que proporcionam maiores dificuldades para se determinarem as justificativas Matemáticas. As tecnologias dessas praxeologias são de ordem mais pragmática, características da Matemática escolar, pois, ferramentas Matemáticas mais formais não são acessíveis a alunos dessa etapa de escolaridade devido à sua maturidade cognitiva. Sendo assim, as adaptações e os exemplos vindos do cotidiano são mais frequentes, e as articulações com outras áreas da Matemática e os encadeamentos lógicos deixados para outras etapas de escolarização.

Tanto o exercício de organizar os tipos de tarefas e suas técnicas quanto o trabalho em organizar os momentos didáticos foram fundamentais para se estabelecer os elementos de transposição didática utilizados pelos autores. Com os estudos realizados sobre a construção dos inteiros, criamos um panorama dos principais conceitos, que possivelmente necessitariam de adaptações. Consequentemente, ao utilizarmos os elementos teóricos da teoria antropológica do didático foi possível identificar as diferenças de abordagens em cada um desse contextos – Matemática formal e Matemática escolar – e, realmente as transformações dos saberes realizadas pelos autores. Com a abordagem metodológica proposta pela teoria antropológica do didático foi possível identificar a seleção de conteúdos, de materiais e procedimentos de resolução e de exercícios utilizados nas propostas de ensino. Dentro dos ato de transposição, temos dentre outros o saber a ensinar, o saber escolar, o saber ensinado e o saber aprendido. Para nossa dissertação olhamos a transposição do saber a ensinar para o saber escolar.

Como último exercício analítico, apontamos alguns temas que não foram possíveis de serem estudados: as adaptações realizadas e a consequente praxeologia proposta pelo professor, pois, em alguns momentos abordamos o papel desse profissional; diante de outras abordagens – construtivista e clássico – os possíveis elementos de transposição didática utilizados pelos autores; se existem outros elementos teóricos da teoria antropológica do didático que poderiam observar a existência ou não de influências e de restrições para a organização das praxeologias dos inteiros. Existem outros pontos que poderiam ser elencados, mas os caminhos que percorremos no mestrado, nos dão conforto de aguardarmos um amadurecimento teórico para voltarmos a esses estudos.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Márcia Santos Melo. A *articulação entre o ensino de polígonos e de poliedros em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental*. (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Campo Grande. 2015.

ALMOULOUD, Saddo Ag. *Fundamentos da Didática da Matemática.* Paraná: Editora UFPR, 2007.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. *Praticando Matemática,* 7. 3. ed. renovada. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BARBOSA, Edelweis José Tavares; LINS, Abigail Fregni. *Equações polinomiais do primeiro grau em livros didáticos: organizações matemática e didática*. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, v.15, n.2, 2013. p. 337-357. Disponível em: < http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/download/15062/pdf.> Acesso em: 7 jul. 2016.

BIRKHOFF, Garrett & MACLANE, Sanders. *A Survey of modern algebra*. ed. rev. New York: Macmilan Company, 1953.

______ . *Álgebra moderna básica*. Tradução por Carlos Alberto Aragão de Carvalho. 4. ed. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1980.

BITTAR, M. A Escolha do software educacional e a proposta didática do professor: Estudo de alguns exemplos em Matemática. In: BELINE, Willian; COSTA, Nielce Meneguelo Lobo Da. (Org.). *Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores*: Algumas Reflexões. Campo Mourão: FECILCAM, 2010. p. 215-242.

BITTAR, Marilena, FREITAS, José Luiz Magalhães de, e PAIS, Luiz Carlos. Técnicas e tecnologias com as operações aritméticas nos anos iniciais do ensino fundamental. In: SMOLE, Katia Stocco, e MUNIZ, Cristiano Alberto (Org.). *A Matemática em sala de aula: reflexões e propostas para os anos iniciais do ensino fundamental*. Porto Alegre: Penso, 2013. p. 7 ‑ 48.

BRASIL. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica I. *Guia de Livros Didáticos,* PNLD/2014. Brasília: MEC/SEF, 2013.

BOSH, Marianna, CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l’activité mathématique aux ostensifs. Objet d’estude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques. Grenoble*: La Pensé Sauvage-Éditions. v.19, n.1, p. 77 – 124, 1999. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=35> Acesso em: 2 jun. 2014.

BROUSSEAU Guy. Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions, v. 7, p. 33-115, 1986.

CASABÓ, Marianna Bosch. Un punto de vista antropológico: la evolución de los “instrumentos de representación” en la actividad Matemática. In: *Cuarto Simpósio* de La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Huelva: Universidade de Huelva, 2001. p. 15 – 28.

CHEVALLARD, Yves. Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathematiques: L´approche antropologique. Publicado em: *Recherches en Didactique* *des Mathématiques*, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/>. Acesso em: 2 jun. 2014.

_________. *La transposition didactique*, Grenoble: La pensée Sauvage, 1991.

EVARISTO, Jaime; PERDIGÃO, Eduardo. *Introdução à Álgebra Abstrata*: Aplicações à Ciência da Computação e o estudo do Sistema de Criptografia RSA. 2. ed. formato digital, versão 02/2012. Maceió, 2012. Disponível em: http://www.ic.ufal.br/professor/jaime/livros/Introducao%20a%20Algebra%20Abstrata.pdf. Acesso em: 24 fev. 2015.

FRISON, Marli Dallagnol. et al. *Livro didático como instrumento de apoio para construção de propostas de ensino de ciências naturais*. VII Enpec, Florianópolis, 2009.

GASCÓN, Josep. *La necessidade de utilizar modelos em didáctica de las Matemáticas*. Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v. 5, n. 2, p. 11 – 37, 2003.

GLAESER, Georges. Epistemologia dos números relativos. *Boletim do GEPEM* - Grupo de estudos e pesquisas em educação Matemática. Rio de Janeiro: UFRJ, n. 17, 1985.

GONÇALVES, Adilson. Introdução à álgebra. 5.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

HEFEZ, Abramo. *Curso de Álgebra*. 3.ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, v.1, 2002.

KASPARY, Danielly Regina dos Anjos. *Uma análise praxeológica das operações de adição e subtração de números naturais em uma coleção de livros didáticos dos anos iniciais do ensino fundamental*. (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Campo Grande. 2014.

LIMA, Ellon Lages. *Porque (-1) (-1) = 1?* Coleção explorando o ensino da Matemática - Artigos, Brasília: MEC - Secretaria de Educação Básica, v.1. p. 76-78, 2004.

NOGUEIRA, Rosane Corsini Silva. *A álgebra nos livros didáticos do ensino fundamental: uma análise praxeológica*. (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Campo Grande. 2008.

OLIVEIRA, Adriana Barbosa de. *Prática pedagógica e conhecimentos específicos: um estudo com um professor de Matemática em início de docência*. (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da UFMS. Campo Grande. 2010.

PAIS, Luiz Carlos. Transposição Didática. In: MACHADO, Silvia Dias A. *Educação Matemática*: uma (nova) introdução. 3. ed. São Paulo: EDUC, 2012. p. 11-48.

POMMER, Wagner Marcelo. *Diversas abordagens das regras de sinais s elementares em Z*. São Paulo: USP, 2010. Disponível em: <http://www.uems.br/eventos/encontromatematica/arquivos/44_2012-08-26_18-35-53.pdf>. Acesso em: 01 jun. 2014.

QUEIROZ, Flávia da Costa. *Números relativos: uma análise de natureza epistemológica de alguns livros didáticos nacionais do terceiro ciclo do ensino fundamental*. Universidade Federal Fluminense, 2006.

SÁ, Pedro Franco de, ANJOS, Luis Jorge Souza dos. Números Negativos: Uma trajetória Histórica. *Anais...* IX Seminário Nacional de História da Matemática, 2011.

SCHUBRING, Gert. *Os números negativos* – exemplos de obstáculos epistemológicos? Rio de Janeiro: LIMC-UFRJ, 2012.