UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE NÚMEROS RACIONAIS SOB O OLHAR DE UM GRUPO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

KEYLA RIBEIRO DE ANDRADE

Campo Grande – MS

2016

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE NÚMEROS RACIONAIS SOB O OLHAR DE UM GRUPO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

KEYLA RIBEIRO DE ANDRADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Educação Matemática.**

Orientador: **Prof. Dr. José Luiz Magalhães de Freitas.**

Campo Grande - MS

2016

a553n Andrade, Keyla Ribeiro de

Representações semióticas de números racionais sob o olhar de um grupo de professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental / Keyla Ribeiro de Andrade; orientador Dr José Luiz Magalhães de Freitas. – Campo Grande, 2016.
185 f.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul. Instituto de Matemática.

1. Números Racionais. 2. Registros Representação Semiótica. 3. Anos Finais do Ensino Fundamental.

REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE NÚMEROS RACIONAIS SOB O OLHAR DE UM GRUPO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

KEYLA RIBEIRO DE ANDRADE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Curso de Mestrado em Educação Matemática da Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Educação Matemática.

BANCA EXAMINADORA

____
Professor Dr. José Luiz Magalhães de Freitas
(orientador)
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

____
Professora Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba
Universidade Federal de Pernambuco

____
Professora Dra. Marilena Bittar
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

____
Professor Dr. Luiz Carlos Pais
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

Campo Grande, ____de ________de 2016.

A minha família, meu porto seguro.

AGRADECIMENTOS

Não poderia construir um aprendizado sem a ajuda de parceiros, com eles decidi caminhos, aprendi uma Matemática que pensava já conhecer... As teorias que conheci neste estudo agora alçam voos sem pouso, como me ensina Mario Quintana “alimentam-se um instante em cada par de mãos e partem” para continuar, após essa formação de pesquisadora, voltar para a escola e trabalhar com meus alunos. Foram vocês que me proporcionaram esse voo. Meus agradecimentos são para vocês: amigos e parceiros:

A Deus em primeiro lugar, que sempre me protegeu e me deu coragem para eu persistir e enfrentar todos os desafios para chegar até aqui. Minha Fortaleza.

Ao professor José Luiz Magalhães de Freitas, pela acolhida no PPGEduMat/UFMS como meu orientador, pela atenção disponibilizada, sugestões e correções, as quais contribuíram para o desenvolvimento e conclusão da pesquisa.

Aos professores Marilena Bittar, Rute Elizabete de Souza Rosa Borba e Luiz Carlos Pais por aceitarem fazer parte da banca e pelas contribuições valiosas dadas para a pesquisa.

Aos professores doutores do PPGEduMat/UFMS, por meio dos quais tive a oportunidade de aprendizado nas disciplinas cursadas: João Ricardo Viola dos Santos, João Bosco Pitombeira F. Carvalho, José Luiz Magalhães de Freitas, Luiz Carlos Pais, Luzia Aparecida de Souza, Márcio Antônio da Silva, Marilena Bittar, Neusa Maria Aparecida de Souza, Suely Scherer e Tiago Pedro Pinto.

Aos colegas da turma de 2014, em especial, aqueles que se fizeram presentes compartilhando ideias e palavras amigas: Edvagner, Kleber, Luana e Patrick.

A minha mãe, estrela guia, exemplo de força e determinação: Maria Celeste. Sem ela nada disso seria possível.

Aos manos queridos: Pedro Antônio, Kelly e Leila Aparecida, ainda que de longe, a presença de vocês sempre esteve por perto, com conselhos e palavras de incentivo.

À Deise, incentivadora e amiga em todas as horas nesta caminhada.

Às amigas Fabiana, Lilian, Deise e Amanda, que sempre me ouviram e me aconselharam nas horas difíceis.

À Secretaria Municipal de Educação de Campo Grande/MS, em especial, aos colegas do Núcleo de Matemática: Deise, Iraci, Rosa, Adriano e Agnaldo, pelo incentivo aos estudos, enquanto, eu fiz parte deste grupo.

À Kélita e à Cristina por fazerem, ainda que indiretamente, parte deste estudo ao autorizarem os encontros na escola. Sem o apoio de vocês haveria outros enfrentamentos.

Aos colegas professores de Matemática que participaram da pesquisa: Diana, João, Rafaela e Suzy e que, ainda hoje possibilitam a troca de aprendizados sobre o ensino de números racionais. Agora somos um grupo!

Lá bem no alto do décimo segundo andar do
Ano
Vive uma louca chamada Esperança
E ela pensa que quando todas as sirenas
Todas as buzinas
Todos os reco-recos tocarem
Atira-se
E
— ó delicioso vôo!
Ela será encontrada miraculosamente incólume
na calçada,
Outra vez criança...
E em torno dela indagará o povo:
— Como é teu nome, meninazinha de olhos
verdes?
E ela lhes dirá
(É preciso dizer-lhes tudo de novo!)
Ela lhes dirá bem devagarinho, para que não
esqueçam:
— O meu nome é ES-PE-RAN-ÇA...
(QUINTANA, 1998, p. 118).

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo analisar manifestações verbais e escritas de um grupo de professores de Matemática, dos anos finais do Ensino Fundamental, sobre possíveis dificuldades de alunos na mobilização de registros de representação semiótica de números racionais, em atividades matemáticas. As análises se fundamentaram na Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Para o seu desenvolvimento foram realizadas sessões de estudos com um grupo composto por quatro professores de Matemática. Por meio de um conjunto de atividades matemáticas foi possível investigar, sob a ótica dos professores participantes, como os registros de representação semiótica de números racionais são utilizados e coordenados nas salas de aula. As análises indicam uma predominância no uso de regras nos tratamentos e conversões de diferentes representações semióticas de números racionais, localizando as dificuldades de alunos, evidenciadas pelo grupo de professores, em compreender conceitos matemáticos envolvidos. O estudo realizado em grupo levou os professores, por meio das discussões nas atividades analisadas, a perceber a necessidade de utilizar e mobilizar diferentes registros de representações semióticas de números racionais para a aquisição do conhecimento envolvido.

Palavras-chave: Números Racionais. Registros Representação Semiótica. Anos Finais do Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This research aims to analyze written and verbal manifestations from a group of mathematics teachers, from the final years of primary school, about possible difficulties of students in mobilizing semiotic representation registers numbers rational in mathematical activities. The analyzes were based on the Theory of Semiotics Representation Registers of Raymond Duval. For its development study, sessions were held with a group of four mathematics teachers. Through a set of mathematical activities was possible to investigate from the perspective of participating teachers, how semiotic registers of representation of rational numbers are used and coordinated in classrooms. The analyses indicate predominance in the use of rules on treatments and conversions of different semiotic representations of rational numbers, locating the difficulties of students, evidenced by the group of teachers on understand of mathematical concepts involved. The study in group led the teachers through the discussions in the activities analyzed to realize the need to use and mobilize different registers of semiotic representations of rational numbers, for the acquisition of knowledge involved.

Keywords: Rational Numbers. Registers Semiotic Representations. Final years of Junior School.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Sumário 1. 58

Figura 2 – Representações de um mesmo número racional. 59

Figura 3 – Representações de números racionais no registro fracionário e na língua natural...60

Figura 4 – Fração de uma quantidade..61

Figura 5 – Número misto e fração imprópria 61

Figura 6 – Transformação de uma fração imprópria na forma de um número misto 62

Figura 7 – Tratamento numérico de multiplicação para obter frações equivalentes.63

Figura 8 – Tratamento numérico de divisão para obter frações equivalentes 63

Figura 9 – Adição e subtração de frações com denominadores iguais 65

Figura 10 – Adição de frações com denominadores diferentes................................66

Figura 11 – Adição de frações, a partir de uma representação figural 67

Figura 12 – Operações: conversão da representação decimal, número natural, para a representação fracionária..68

Figura 13 – Multiplicação de frações...69

Figura 14 – Divisão de frações..70

Figura 15 – Tratamento numérico: multiplicação de frações 70

Figura 16 – Utilização da reta graduada para representar frações...........................72

Figura 17 – Sistema de numeração decimal posicional 72

Figura 18 – Representações de ordens de uma unidade...73

Figura 19 – Representações de um número racional...73

Figura 20 – Notação decimal por meio de figuras 75

Figura 21 – Números decimais na forma de fração..75

Figura 22 – Adição e subtração de números decimais...77

Figura 23 – Subtração de números decimais 78
Figura 24 – Quanto é 10 . 0,01? E quanto é 10 . 0,1?..79
Figura 25 – Usando frações: quanto é 10 . 0,01? E quanto é 10 . 0,1?...................79
Figura 26 – Multiplicação de números decimais por 10 utilizando sua forma fracionária...80
Figura 27 – Divisão de números decimais por 100 utilizando sua forma fracionária 81
Figura 28 – Divisão de números decimais, utilizando sua forma fracionária: tratamentos e conversões. 81
Figura 29 – Operações com apenas representações decimais...............................82
Figura 30 - Sumário 2...83
Figura 31 – Frações equivalentes na sua forma decimal 84
Figura 32 – Frações que representam números naturais.......................................85
Figura 33 – Atividades cognitivas não espontâneas..86
Figura 34 – Números racionais representados na reta numérica............................86
Figura 35 – Atividade 1...104
Figura 36 – Caminhos: impossibilidade de ‘evitar frações’...................................105
Figura 37 – Possíveis dificuldades na resolução da atividade 1............................108
Figura 38 – Possíveis dificuldades na resolução da atividade 1............................109
Figura 39 – Comparação: tratamentos e conversões entre as representações 110
Figura 40 – Comparação entre duas representações do mesmo registro.............111
Figura 41 – Não reconhecimento que 0,62 é menor que 0,9 116
Figura 42 – Dificuldades na comparação entre representações decimais e fracionárias...116
Figura 43 – Um possível caminho 118
Figura 44 – Possível caminho na horizontal 119
Figura 45 – Um possível caminho 121

Figura 46 – Conversão da representação fracionária para a decimal pelo algoritmo da divisão 127
Figura 47 – Possíveis ‘passos’ que alunos tomariam para resolver a atividade 2..128
Figura 48 – Dificuldades de alunos na comparação de representações distintas ..128
Figura 49 – Utilização de representações distintas para compará-las 130
Figura 50 – Justificativa para mostrar a equivalência...132
Figura 51 – Possível dificuldade de alunos no tratamento numérico de simplificação...132
Figura 52 – Comparação entre as ordens das representações decimais...............133
Figura 53 □ Conversão utilizando regras e comparação entre as representações fracionárias..135
Figura 54 – Possível comparação entre representações decimais 137
Figura 55 – Utilização da reta graduada para comparar representações decimais 138
Figura 56 – Como reconhecer que 0,2 é 0,20 140
Figura 57 – Como comparar 0,2 e 0,12..141
Figura 58 – Contar quantidade de algarismos após a vírgula 142
Figura 59 – Não reconhecimento de duas representações fracionárias de um mesmo número racional...143
Figura 60 – Não reconhecimento de duas representações fracionárias de um mesmo número racional...143
Figura 61 – Comparação de representações fracionárias: utilização do ‘modo prático’ para obter frações equivalentes..144
Figura 62 – Dificuldades na conversão para representações decimais..................145
Figura 63 – Localização de representações decimais e na forma mista de números racionais...147
Figura 64 – Localização de representações na forma mista de números racionais na reta numérica 149

Figura 65 – Representação de $3\frac{1}{2}$ por meio de desenhos....................................151

Figura 66 – Possíveis estratégias para representar $3\frac{1}{2}$ na forma decimal e na forma fracionária 151

Figura 67 – Outras possíveis estratégias para representar $3\frac{1}{2}$ 153

Figura 68 – Dificuldades em compreender as equivalências entre décimos, centésimos e milésimos 159

Figura 69 – Associação da quantidade de décimos e centésimos contidos no número 8,512 com suas ordens...160

Figura 70 – Localização de representações fracionárias na reta graduada 162

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática). 32

Quadro 2 – Registros de representação dos números racionais. 36

Quadro 3 – Representações semióticas de um número racional. 37

Quadro 4 – Coordenação de representações semióticas de um número racional 44

Quadro 5 – Identificação e caracterização do grupo de professores participantes 53

Quadro 6 – Período de sessões de estudos. 54

Quadro 7 – Atividade 2: comparação entre uma representação fracionária e uma decimal de números racionais. 126

Quadro 8 – Atividade 3: comparação entre representações decimais de números racionais. 131

Quadro 9 – Atividade 4: comparação entre representações decimais de números decimais 139

Quadro 10 – Atividade 5: comparação entre representações fracionárias de números racionais 142

Quadro 11 – Atividade 6: representações de números racionais na reta graduada 145

Quadro 12 – Atividade 7: possíveis formas de representar números racionais. 150

Quadro 13 – Atividade 8: decomposição de 8,512 e representações na língua natural 156

Quadro 14 – Atividade 9: associação de pontos na reta graduada aos números racionais 161

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 18
1 UMA ESCOLHA TEÓRICA...28
1.1. Representação Semiótica 29
1.2. Registros de Representação Semiótica 31
1.3. Fenômenos intrínsecos aos registros de representação e suas influências 35
1.3.1. A diversificação dos registros de representação semiótica 35
1.3.1.1. Representação decimal 37
1.3.1.2. Representação fracionária 38
1.3.1.3. Representação figural 40
1.3.1.4. Representação na língua natural 40
1.3.1.5. Representação algébrica 41
1.3.1.6. Representação geométrica 41
1.3.2. A diferenciação entre o objeto representado e seus representantes .42
1.3.3. Coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica 42
1.3.3.1. Tratamentos...43
1.3.3.2. Conversões..43
1.4. Fenômenos característicos da operação de conversão das representações 45
2 UMA ESTRATÉGIA METODOLÓGICA...48
2.1 O grupo de professores 49
2.2 Nossos estudos 54
2.2.1 Um estudo preliminar de representações semióticas de números racionais no livro didático...55
2.3 Coleção estudada 57
2.3.1 Coleção Praticando Matemática - L1: 6º ano.......................................57
2.3.2 Coleção Praticando Matemática – L2: 7º ano.......................................83
2.4 As atividades matemáticas 87

2.5 A coleta de dados 90
3 ANÁLISE DO MATERIAL COLETADO DURANTE AS SESSÕES DE ESTUDOS..........93
3.1 Primeira sessão: uma questão motivadora..........94
3.2 Comparação e ordenação entre representações fracionárias e decimais de números racionais..........104
3.2.1 Conversões de diferentes representações 111
3.3 Comparações entre representações fracionárias e decimais 126
3.3.1 Representações fracionária e decimal..........126
3.3.2 Comparação de representações decimais de um mesmo número racional 131
3.6 Comparação de representações decimais de números racionais 139
3.7 Comparação de representações fracionárias equivalentes 143
3.8 Representações de números racionais na reta graduada 146
3.9 Possíveis formas de representar $3\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{10}$ e $\frac{7}{3}$ 151
3.9 Decomposição de 8,512 e representações na língua natural..........157
3.10 Representações de números racionais associados como pontos na reta 161
CONSIDERAÇÕES FINAIS 166
REFERÊNCIAS..........171
APÊNDICES..........175
APÊNDICE A - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 1 PARA A SEGUNDA SESSÃO 175
APÊNDICE B - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 1 PARA A SEGUNDA SESSÃO 177
APÊNDICE C - PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES 2 E 3 PARA A TERCEIRA SESSÃO 178
APÊNDICE D - PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES 2 E 3 PARA A TERCEIRA SESSÃO 179
APÊNDICE E - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 4 PARA A QUARTA SESSÃO. 180
APÊNDICE F - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 5 PARA A QUINTA SESSÃO.181
APÊNDICE G - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 6 PARA A SEXTA SESSÃO.182

APÊNDICE H - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 7 PARA A SÉTIMA SESSÃO. 183
APÊNDICE I - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 7 PARA A SÉTIMA SESSÃO.184
APÊNDICE J - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 8 PARA A OITAVA SESSÃO.185
APÊNDICE K - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 9 PARA A NONA SESSÃO. 186

INTRODUÇÃO

Após concluir o curso de graduação em Matemática, em 2004, na Universidade Federal de Mato Grosso do Sul/UFMS, logo iniciei minha prática docente em escolas da Rede Municipal de Ensino/REME, de Campo Grande/MS, em turmas de 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. Ao longo desta trajetória profissional, pude perceber algumas dificuldades dos alunos em resolver atividades propostas em sala de aula, que envolviam números racionais. Além disso, por meio de trocas de experiências com professores da área de Matemática da REME, sempre questionei, nos momentos de planejamento, por que os alunos dos 8º e 9º anos apresentavam tantas dificuldades em operar e representar números racionais, tanto na representação decimal quanto na representação fracionária.

Dificuldades decorrentes da aprendizagem de números racionais na representação decimal e na representação fracionária são citadas nas Orientações Didáticas dos PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais, para os terceiro e quarto ciclos[1] do Ensino Fundamental, onde observam que

> [...] embora as representações fracionárias e decimais dos números racionais sejam conteúdos desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial os que envolvem os racionais na forma decimal. Uma explicação para as dificuldades encontradas possivelmente deve-se ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com ideias construídas para os números naturais (BRASIL, 1998, p. 100-101).

Pressuponho que para realizar um trabalho visando superar dificuldades de aprendizagem de alunos com atividades que envolvem números racionais, faz-se necessário que o professor de Matemática, em seu processo de formação inicial ou continuada, tenha a oportunidade de realizar estudos e experimentações que possam propiciar aos alunos compreender diferentes significados associados aos

---

[1] Terceiro e quarto ciclos referem-se ao 6º e 7º, 8º e 9º anos, respectivamente.

números, superando dificuldades na apreensão de conhecimentos. Acredito que essas superações dependem do trabalho do professor em sala de aula - dos recursos didáticos utilizados no processo de ensino e de aprendizagem de números racionais, das atividades propostas e, ainda, da organização dinâmica entre o professor e seus alunos.

Em 2013, ao assumir a função de técnica na equipe de Formação Continuada em Serviço na Secretaria Municipal de Educação/SEMED de Campo Grande, MS, tive a oportunidade de realizar um contato mais próximo com professores de Matemática, nos encontros de Formação Continuada, em que pude constatar que as questões que me inquietavam eram também de outros professores.

Segundo os PCN,

> [...] ao longo do ensino fundamental o conhecimento sobre os números é construído e assimilado pelo aluno num processo em que tais números aparecem como instrumento eficaz para resolver determinados problemas, e também como objeto de estudo em si mesmos, considerando-se, nesta dimensão, suas propriedades, suas inter-relações e o modo como historicamente foram constituídos (BRASIL, 1998, p. 50).

Nesse sentido, considerando alguns resultados de pesquisas na Educação Matemática que concernem ao ensino e à aprendizagem de números racionais, as pesquisas nesta temática revelam-se pertinentes, com enfoque nos diversos registros de representação semiótica de números racionais, tratamentos e conversões neles envolvidos.

A busca por respostas para essas questões e outras, que me desse suporte para uma possibilidade real de estudos referentes ao ensino e a aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental, trouxe-me ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEduMat).

A partir da aproximação com pesquisas na área de Educação Matemática, na temática de estudos com números racionais, percebi a importância de discussões e pesquisas que aproximam professores de Matemática com o ensino e a aprendizagem.

Para tanto, serão analisadas pesquisas de Catto (2000); Soares (2007); e Silva (2008), que tiveram seus estudos fundamentados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), de Raymond Duval e que apresentam a importância e a necessidade da utilização de sistemas semióticos para apreensão conceitual de objetos matemáticos e para representá-los.

Apresentaremos, ainda, Miola (2011) e Souza (2013), por meio das quais, pode-se observar a busca em investigar concepções que professores possuem sobre o ensino de números racionais e suas práticas docentes. Entretanto, as pesquisadoras, apesar de analisarem algumas representações do objeto em estudo, não se embasaram na Teoria de Registros de Representação Semiótica, na qual entende-se que seja relevante sua utilização para quem busca analisar a apreensão de objetos matemáticos.

Catto (2000) analisou duas coleções de livros didáticos de 1ª a 8ª séries, cuja escolha foi em função de apresentarem abordagens de conteúdos com características distintas, uma de forma compartimentalizada e a outra em espiral.

Suas análises se fundamentaram na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, tendo como objetivo principal investigar como são apresentados os diversos registros de representações do número racional e ainda, como são trabalhados os tratamentos e possíveis conversões entre dois registros distintos. Para a decisão desses estudos, a pesquisadora aplicou um teste em uma turma do ensino médio, que envolvia potências de representações de números racionais, por meio do qual, foram percebidas dificuldades dos alunos na utilização e articulação entre representações fracionárias e decimais.

Um estudo preliminar[2] de unidades (capítulos) específicas, sobre números racionais dos livros didáticos dos 6º e 7º anos, da coleção Praticando Matemática, foi realizado. Assim, como fez Catto (2000), as representações semióticas dos números racionais como são apresentadas e utilizadas, em termos de tratamento e conversões, foram enfocadas. Cabe ressaltar, que esse estudo não foi o objetivo desta pesquisa, mas, um dos procedimentos metodológicos para se planejar atividades matemáticas que seriam levadas para sessões de estudos

[2] Este estudo será apresentado no Capítulo 2, no item 2.2.1.

com um grupo de professores. Ressalta-se, ainda, que a decisão de se realizar este estudo ocorreu por considerarmos o livro didático um dos recursos mais utilizados pelo professor nos seus planejamentos e na sala de aula e, junto a esta razão, justifica-se a escolha da coleção Praticando Matemática, por ser a mais adotada pelas escolas da REME e utilizada pelos professores que partícipes da pesquisa.

Catto (2000), em suas análises, constatou que uma das coleções privilegia tratamentos realizados no registro numérico, enquanto a outra os realiza no registro figural. Foi observado que uma das coleções apresenta conversões entre registros: figural e simbólico e, entre registros: numéricos, fracionário e decimal. Observou ainda, que na outra coleção também aparecem essas conversões, porém, de maneira menos significativa. A pesquisadora também percebeu, que nas duas coleções, as conversões, geralmente, eram priorizadas num só sentido.

Soares (2007) analisou os planejamentos dos 5º aos 9º anos, elaborados por uma professora sobre números racionais, tomando como fundamentação teórica a TRRS. Assim, os dados de sua pesquisa foram coletados, por meio das análises dos planejamentos e entrevistas sistemáticas realizadas.

A pesquisadora apresenta, em seus resultados, a organização do planejamento de uma professora para ensinar o número racional, em que revelou confusão em diversas situações entre o objeto matemático e representação, por exemplo, quando utiliza terminologias: fração, número fracionário, número decimal, como sendo objetos diferentes e não representações do número racional.

Soares (2007) constatou, no 5º ano e no início do 6º ano, uma ênfase no uso de registros figural e numérico fracionário, bem como transformações por conversões. Já nos anos finais, foi constatado a utilização predominante de regras e de registros de representação simbólico numérico fracionário e decimal, porém, raros exemplos de conversões entre esses registros foram abordados. Ressalta-se ainda que, geralmente, as conversões eram trabalhadas em um só sentido.

Silva (2008, p. 20), embasado na TRRS e nas pesquisas dos franceses Adjiage & Pluvinage (2000), desenvolveu seu trabalho considerando a reta graduada como um registro de representação semiótica geométrico dos números racionais, em que buscou responder duas questões: “se a introdução da reta graduada como um registro semiótico para os racionais de fato amplia a possibilidade de enfrentamento das dificuldades consagradas da aprendizagem dos racionais e se ela se configura como um elemento de auxílio para o ensino brasileiro”.

Para responder suas questões, Silva (2008) analisou os PCN do segundo e terceiro ciclos, bem como volumes de duas coleções de livros didáticos dos 4º aos 7º anos. A partir de suas análises, concluiu que o registro da reta graduada ou registro geométrico de dimensão 1 oferece potencialidades que podem favorecer a aprendizagem, pois, o considera um registro semiótico rico em signos e mais adaptado ao desenvolvimento de um conjunto de competências.

Em concordância com Silva (2008), a reta graduada como um registro de representação geométrico de números racionais, também, será considerada em nossos estudos, e levada ao grupo de professores para discussão.

Souza (2013, p. 19), buscou responder “que concepções e conhecimentos profissionais os professores utilizam ao ensinar números racionais e que relações eles têm com o livro didático adotado e a sua prática docente?” Teve como aporte teórico as ideias de Ponte (1992; 1993) e Shulman (1986; 1987; 1989) e como sujeitos da pesquisa, três professores que atuavam nos anos finais do ensino fundamental. Sua investigação foi desenvolvida por meio de questionários, observação da prática docente, entrevista e análise documental, que se referem aos planejamentos anuais, cadernos de alunos e livro didático adotado.

Em seus resultados, quanto às concepções desses professores investigados sobre o ensino de números racionais, constatou que eles possuem uma concepção da relação parte-todo para o ensino de frações. Todavia, suas analogias ficaram restritas à representação geométrica, utilizando, em sua maioria, figuras geométricas como retângulos e círculos.

Ainda em relação aos resultados da pesquisa de Souza (2013), dois dos professores observados valorizavam o significado quociente, usando a calculadora constantemente, porém, apenas um desses priorizou a representação decimal de números racionais. Observou-se, ainda, que um dos professores participantes desprezava esse tipo de representação, conforme descrito no seu planejamento anual de turmas dos 6º, 7º e 8º anos.

Com base nos conhecimentos matemáticos sobre o ensino de números racionais, a pesquisadora ainda aponta, em suas considerações, dificuldades conceituais sobre os números racionais, na identificação dos significados, na representação gráfica desses números, nas definições e na utilização da linguagem. Isso é preocupante, tendo em vista que os sujeitos da pesquisa são professores de Matemática, responsáveis pelo ensino nos anos finais do ensino fundamental.

Miola (2011) objetivou analisar as práticas docentes elaboradas e os conhecimentos mobilizados por um grupo de seis professores durante a realização de seis encontros, visando o ensino de números decimais no sexto ano do Ensino Fundamental. Nos encontros, o grupo de professores e a pesquisadora discutiram e elaboraram uma sequência de atividades com a utilização de materiais didáticos manipuláveis. Para a organização e análises dos dados, assim como Souza (2013), Miola (2011) utilizou o modelo teórico de Shulman (1986; 1987; 1989) sobre a base de conhecimentos para o ensino.

Em seus resultados, Miola (2011) observou que o ensino das representações: fracionária e decimal de números racionais é realizado por professores, separadamente. Foi observado ainda pela pesquisadora, dificuldades dos professores com relação aos conhecimentos sobre números decimais, justificando, talvez, a maior ênfase no trabalho com a representação fracionária.

Desse modo, entende-se que no ensino, uma abordagem de números racionais, sem articular suas representações, pode dificultar ou impossibilitar que o aluno reconheça um mesmo objeto matemático por suas diferentes representações, já que é na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ou nas possíveis e constantes trocas de registro de representação que está a originalidade da atividade matemática (DUVAL, 2011a, p. 14).

Pode-se observar, por meio dos resultados dos estudos de Souza (2013) e Miola (2011), que há uma convergência para uma possível dificuldade dos professores em transitar, simultaneamente, por diferentes registros de representação, nos quais os números racionais assumem, nos diversos contextos: relação parte/todo, operador, quociente e razão, além desses contextos com outras representações, como por exemplo, reta numérica e números decimais.

Assim, enfatiza-se que um trabalho compartimentalizado de representações de números racionais poderá trazer futuramente aos alunos a não conexão entre elas, dessa forma, o papel do professor como mediador nesse processo de aquisição dos números racionais é considerado fundamental, ainda que

> [...] a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil para a grande maioria dos alunos. Não somente a mudança de registros levanta obstáculos que são independentes da complexidade do campo conceitual no qual se trabalha, mas além disso a ausência de coordenação entre diferentes registros cria muito frequentemente uma deficiência para as aprendizagens conceituais (DUVAL, 2009, p. 63).

A partir disso, evidencia-se a necessidade de o professor submeter seus alunos a diversas situações, nas quais demandem a coordenação de vários registros de representação, pois, a capacidade de converter implica a coordenação de registros mobilizados e os fatores de não congruência mudam de acordo com os tipos de registros de representação, entre os quais a atividade cognitiva de conversão é ou deve ser efetuada (DUVAL, 2011a, p. 24).

Considerando esse contexto, Sánchez Acero (2012, p. 16) destaca a importância das mudanças de representações, pontuando que

> [...] o professor não deve perder esses tipos de mudanças entre os registros fracionários e decimais, porque se você está ciente do grau de complexidade dada no processo, é capaz de entender melhor o processo de ensino a ser exercido em seus alunos para o uso adequado dos números racionais. O processo não consiste

> apenas em ensinar um algoritmo (divisão ou equações), este processo de mudança deve ser acompanhado das implicações (operações) que tem o registro, seja fracionário ou decimal[3] [*tradução nossa*].

Estabelecer relações entre representações de um mesmo objeto matemático, não é tão óbvio como parece ser, por isso, faz-se necessário que o professor intervenha continuamente no processo de conceitualização, aquisição de conhecimentos, trazendo para discutir em suas aulas “perguntas boas” e atividades que levem os alunos a reconhecerem e articularem as diversas representações de números racionais.

Dessa forma, “o ir e vir entre os tipos de representações presentes nos questionamentos entre professor e aluno levará à necessidade de utilização dessas representações, visando à compreensão de suas noções básicas de funcionamento cognitivo” (BUEHRING; MORETTI, 2009, p. 20), pois, segundo Duval (2009, p. 63), “uma aprendizagem especificamente centrada na mudança e na coordenação de diferentes registros de representação produz efeitos espetaculares nas macro-tarefas de produção e de compreensão.

A partir dessas considerações, e com base nessas pesquisas, grupos de estudos foram propostos[4] com professores de Matemática, dos 6º aos 9º anos do ensino fundamental, por entendermos a importância da figura do professor de Matemática, como aquele que está à frente do processo de ensino, podendo assim, discutir dificuldades dos alunos na aprendizagem de números racionais e a mobilização de suas representações em atividades matemáticas.

Estudos foram realizados, por meio de atividades matemáticas, utilizando diferentes registros de representação semiótica de números racionais, que pudessem possibilitar trocas de experiência entre professores regentes e pesquisadora, no contexto de possíveis dificuldades, nas quais alunos possam

---

[3] *[..] el docente no debe echar de menos este tipo de cambios entre los registros fraccionario y decimal, ya que si se es consciente del grado de complejidad dado en el proceso, es capaz de comprender de mejor manera el proceso de enseñanza que debe ejecer en sus estudiantes para el correcto uso de los números racionales. Ahora bien el processo de cambio debe ir acampañado de las implicaciones (operaciones) que tiene el registro, ya sea como fracción o como decimal* (ACERO, 2012, p. 16).

[4] A partir deste momento, será considerada a orientação do professor Dr. José Luiz Magalhães de Freitas referente à pesquisa.

encontrar, sob a ótica dos professores participantes da pesquisa. Pressupõe-se que à medida que os professores têm a oportunidade de ressignificar seus conhecimentos, um novo olhar para o ensino e a aprendizagem dos números racionais pode ser constituído.

Portanto, esta pesquisa foi desenvolvida, na busca de encontrar elementos que respondam a questão-norteadora: como professores de Matemática, dos anos finais do ensino fundamental, se manifestam verbalmente ou por escrito sobre as dificuldades dos alunos em mobilizar diferentes sistemas semióticos de representação de números racionais em atividades matemáticas, durante sessões de estudo, visando o aprimoramento do trabalho em sala de aula?

Desse modo, a Teoria dos Registros de Representações Semióticas foi utilizada a fim de fundamentar as análises e, assim, responder a questão de pesquisa, cujo objetivo geral é analisar manifestações verbais e escritas de um grupo de professores de Matemática, dos anos finais do ensino fundamental, sobre possíveis dificuldades de alunos na mobilização de registros de representação semiótica de números racionais, em atividades matemáticas. Para tanto, este estudo tem como objetivos específicos: a) Investigar como professores analisam possíveis tratamentos e conversões de registros de representação semiótica de números racionais, que alunos poderão mobilizar em atividades matemáticas; b) Investigar escolhas de professores de Matemática, com relação à abordagem de diferentes registros de representação semiótica de números racionais, em atividades matemáticas para a sala de aula; c) Identificar elementos presentes no livro didático de Matemática do Ensino Fundamental, com relação à abordagem de diferentes registros de representação semiótica de números racionais.

Desta forma, esta dissertação foi estruturada em três capítulos. Assim, o Capítulo I, apresenta o aporte teórico desta pesquisa, alguns pontos relevantes sobre a Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (1993; 2006; 2009; 2011a; 2011b; 2012a; 2012b; 2013), que fundamentaram as análises, considerações iniciais sobre as representações dos números racionais, objeto matemático em estudo, e ainda, pesquisas relacionadas ao seu ensino e aprendizagem nos anos finais do ensino fundamental.

No Capítulo II, descreve o caminho metodológico percorrido ao longo desta investigação. Para isso, os professores participantes foram identificados, bem como a condução e os instrumentos de coleta de dados da pesquisa, a descrição dos encaminhamentos para a organização das sessões de estudos com os professores participantes e o planejamento das atividades matemáticas discutidas com o grupo e pesquisadora.

Enquanto, o Capítulo III concerne às análises sobre o material coletado nas sessões de estudos realizadas, sempre tomando como base a Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval (1993; 2006; 2009; 2011a; 2011b; 2012a; 2012b; 2013). Por fim, têm-se as considerações finais da pesquisa.

1 UMA ESCOLHA TEÓRICA

Consideramos, neste estudo, que a apreensão de conceitos envolvendo os números racionais, ocorre, segundo Duval (2009), por meio de representações semióticas, mais precisamente pela mobilização de pelo menos dois de seus diferentes registros de representação semiótica. O autor pontua que, “não é possível estudar os fenômenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação” (DUVAL, 2009, p. 29), pois, “[…] não há conhecimento de que não possa ser mobilizado por um sujeito sem uma atividade de representação”, o que indica possíveis caminhos para o estudo de representações de números racionais para a compreensão em Matemática.

Assim, em concordância com o autor, Damm (2012, p. 169) afirma que a representação semiótica “se revela o instrumento mais forte para estudar os problemas de aquisição dos conhecimentos matemáticos”.

Nesta perspectiva, a fim de fundamentar as análises de como os professores de Matemática, dos anos finais do ensino fundamental, se posicionam perante as dificuldades dos alunos, em mobilizar diferentes sistemas semióticos de representação de números racionais em atividades matemáticas, durante sessões de estudos, visando o aprimoramento do trabalho em sala de aula, utilizaremos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) desenvolvida por Raymond Duval (2009).

Segundo Duval (209), há a necessidade de uma abordagem cognitiva no ensino da Matemática, em formação inicial para todos os alunos, a qual pode contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, de análises e de visualização (DUVAL, 2011a, p. 11), uma vez que esta abordagem “diz respeito ao processo de compreensão e aquisição de conhecimentos” (DUVAL, 2013, p. 19).

Dessa forma, serão apresentados, neste Capítulo, alguns elementos essenciais da TRRS para situar o leitor nas análises realizadas no Capítulo III.

1.1. Representação Semiótica

A TRRS se pauta numa abordagem voltada para aspectos do funcionamento cognitivo do pensamento humano, relacionados à aquisição matemática.

A originalidade desta abordagem, segundo Duval (2011a, p. 12), está em buscar, a princípio, descrever o funcionamento cognitivo implicado, sobretudo, na atividade matemática, que possibilite aos alunos compreenderem, efetuarem e controlarem, eles próprios, a diversidade dos processos matemáticos que lhes são propostos em momentos de ensino e aprendizagem. Portanto, não se trata de uma teoria que busca, nos erros de alunos, determinar suas “concepções” e a origem de suas dificuldades em conceitos em álgebra, em decimais etc. Mas, em entender as dificuldades dos alunos na compreensão em Matemática e sua natureza, relacionadas às representações semióticas.

No ensino e na aprendizagem, as variadas formas abstratas de um mesmo objeto (conceitos, estruturas, propriedades e relações) são chamadas a atenção para a compreensão em Matemática. Suas diferentes representações são essenciais ao funcionamento e ao desenvolvimento de conhecimentos.

Nesse sentido, vale ressaltarmos que as representações semióticas “são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, os quais têm suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento” (DUVAL, 2012a, p. 269). Assim, é fundamental que não se faça confusão entre objeto matemático e sua representação.

O autor salienta que essas representações não são apenas indispensáveis para se comunicar, mas, também, necessárias ao desenvolvimento da atividade matemática, pois são elas que possibilitam efetuar funções cognitivas precípuas do pensamento humano. Sendo considerada parte do pressuposto,

> a análise dos problemas de aprendizagem de matemática e dos obstáculos contra os quais os alunos chocam-se regularmente conduz a reconhecer [...] uma lei fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento: Não há *noésis* sem *semiósis*, quer dizer, não há *noésis* sem o recurso a uma pluralidade ao menos potencial de sistemas semióticos, recurso que implica sua coordenação para o próprio sujeito.[...] É a *semiósis* que vai

> determinar as condições de possibilidade e de exercício da *noésis* (DUVAL, 2009, p. 17-18).

Duval (2012a, p. 270) considera que "*noésis*" são atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, por outro lado a "*semiósis*" é a apreensão ou a produção de uma representação semiótica.

Nesta perspectiva, tanto "*noésis*" como também a "*semiósis*" têm papel fundamental na aprendizagem da Matemática, pois qualquer forma de atividade matemática demanda a apreensão de seus conceitos, que por sua vez, seja impossível estudá-la sem se referir a sistemas semióticos.

Desse modo, os objetos matemáticos são dependentes de sistemas de representações que permitem o acesso a eles. Um exemplo disso são as operações numéricas, cujos procedimentos e seus custos cognitivos dependem do sistema escolhido: escrita binária, decimal e fracionária.

Neste estudo, foi utilizada a expressão 'custo' por uma aproximação com Duval (2009, p. 16) e em referência a 'esforço'. Desta forma, 'custos cognitivos' estão relacionados ao esforço empreendido no trabalho com problemas de natureza matemático, "e, mais fortemente, o do funcionamento do pensamento em matemática. Eles consistem na mobilização de "conceitos" e na utilização das capacidades comuns de raciocínio" (DUVAL, 2011b, p. 40). Assim, "em outros termos, a questão cognitiva é considerada sobre os gestos intelectuais desenvolvidos no trabalho matemático, antes mesmo que tenhamos a mínima ideia da solução procurada" (ib., p. 41).

As representações semióticas têm dois aspectos a considerar: sua *forma*, o representante, que muda conforme o sistema semiótico utilizado, e o seu conteúdo ou objeto, que é o representado.

Duval (2013, p. 16) distingue os sistemas semióticos empregados na Matemática de outros sistemas semióticos utilizados fora dela, nomeando os diferentes tipos de sistemas de representações semióticas como "registros" de representação.

O autor ainda ressalta que

> [...] um registro é, evidentemente, um sistema semiótico, mas um sistema semiótico particular que não funciona nem como código, nem como sistema formal. Ele se caracteriza essencialmente, pelas operações cognitivas específicas que ele permite efetuar. (DUVAL, 2011b, p. 70).

Para Duval (2009), existem três atividades cognitivas fundamentais inerentes a toda representação que os sistemas semióticos devem permitir cumpri-las:

> - constituir um traço ou um ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como *uma representação de alguma coisa* em um sistema determinado;
> - transformar as representações apenas pelas regras próprias ao sistema, de modo a obter outras representações que possam constituir uma relação de conhecimento em comparação às representações iniciais;
> - converter as representações produzidas em um sistema em representações de um outro sistema, de tal maneira que estas últimas permitam explicar outras significações relativas ao que é representado (DUVAL, 2009, p. 36-37).

Para Duval (2009), os registros de representação semiótica são sistemas semióticos que cumprem essas três atividades de representação, os quais dizem respeito a questão da relação entre "semiósis" e "noésis", por exemplo, a língua natural, as linguagens simbólicas, os gráficos, as figuras geométricas etc.

Dessa forma, do ponto de vista cognitivo, registro e código se diferem pelo fato que "os registros abrem possibilidades de transformação de conteúdo das representações produzidas, o que os códigos não permitem" (DUVAL, 2011b, p. 73).

1.2. Registros de Representação Semiótica

Há diversos registros de representação semiótica para o mesmo objeto matemático, sendo que cada um desses registros corresponde a um tipo distinto de "tratamento", definido por Duval (2011a, p. 16) como "transformação de representações dentro de um mesmo registro", por exemplo, a realização de um cálculo com frações permanecendo no mesmo sistema de representação fracionária.

Duval (2011a) define e distingue quatro tipos de registros mobilizáveis no funcionamento matemático, descritos no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1 – Classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático (fazer matemático, atividade matemática)

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	**REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA**
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, crenças…; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária…); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • Mudanças de sistema de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: (DUVAL, 2011a, p. 14)

Os tratamentos, para serem efetuados sobre objetos matemáticos, dependem de um sistema semiótico de representação em jogo. Pode-se tomar como exemplo as operações com representações fracionárias de números racionais.

Bittar e Freitas (2005, p. 160) apresentam a definição de número racional como:

> todo número que pode ser escrito sob forma de fração, ou seja, um número r é racional se existem números inteiros p e q, q diferente de zero, tal que $r = \frac{p}{q}$. (Se q for igual a zero a divisão de p por q não tem sentido algum).

Todo tratamento está subordinado ao sistema semiótico adotado:

$\frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ → tratamento no registro de representação fracionária;

$0{,}75 + 0{,}75 = 1{,}50 = 1{,}5$ → tratamento no registro de representação decimal.

Ainda com base no exemplo apresentado, percebe-se que há diferentes representações do mesmo número racional, porém requerem tratamentos matemáticos bem distintos um do outro, o tratamento fracionário e o tratamento decimal, o que implica dizer, que ambos os registros de representação têm significações operatórias diferentes, já que as regras de atividades de tratamento utilizadas para calcular a soma são próprias de cada registro.

Os PCN indicam que

> o estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, merecem especial atenção no terceiro ciclo, partindo da exploração de seus significados, tais como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador. A resolução de situações-problema com números naturais, racionais e inteiros permite, neste ciclo, a ampliação do sentido operacional, que se desenvolve simultaneamente à compreensão dos significados dos números (BRASIL, 1998, p. 66-67).

Assim, considera-se que uma abordagem sobre números racionais e a exploração de significados desses números, na sala de aula, depende da compreensão dos professores a respeito desse campo numérico, pois,

> [...] se os professores querem desenvolver uma compreensão em seus alunos, eles devem estar preocupados com as representações que os alunos desenvolvem em seus esforços para a compreensão da instrução do conteúdo. Para facilitar o desenvolvimento de representações poderosas e apropriadas, os professores precisam avaliar sua própria compreensão do conteúdo. […] eles mesmos devem entender os meios de representar os conceitos para os alunos. Eles devem ter conhecimento sobre as maneiras de transformar o conteúdo com o objetivo de ensinar[5] (WILSON, SHULMAN, RICHERT, 1986, p. 109-110, *tradução nossa*).

Desse modo, é importante estar bem claro para o professor que ensinar números racionais perpassa pelo trabalho com suas diferentes representações e articulação entre elas, em referência a esse objeto matemático, e que ao utilizar

---

[5] *If teachers want to develop understanding in their students, they must be concerned with the representations students develop in their effort to comprehend the content of instruction. To facilitate the development of powerful, appropriate representations, teachers need to evaluate their own understanding of the subject matter. […] they must themselves understand ways of representing the concept for students. They must have knowledge of the ways of transforming the content for the purposes of teaching* (WILSON, SHULMAN, RICHERT, 1986, p. 109-110).

diferentes registros de representação desses números, exigir-se-ão tratamentos bem distintos, o que implica para os alunos custos cognitivos diferentes para compreendê-los, construí-los e estabelecer relações entre eles para a sua utilização, e isso não ocorre espontaneamente.

Considerando esse contexto, Duval (1993) destaca que as diferentes representações de um mesmo objeto,

> [...] não têm evidentemente o mesmo conteúdo. Cada conteúdo é comandado por um sistema pelo qual a representação foi produzida. Daí a consequência de que cada representação não apresenta as mesmas propriedades ou as mesmas características do objeto. Nenhum sistema de representação pode produzir uma representação cujo conteúdo seja completo e adequado ao objeto representado (DUVAL, 1993, p. 18).

Duval (2011a) justifica a importância primordial das representações semióticas para a Matemática, por meio de duas razões: uma, é que as possibilidades de tratamento sobre os objetos matemáticos se estabelecem por meio de um sistema de representação, assim como as operações de cálculo. A outra razão se apoia no fato de que os objetos matemáticos não são observáveis aos nossos olhos, de onde vem a necessidade de representá-los.

A Matemática é uma ciência abstrata, diferente de outras ciências como, por exemplo, a Biologia e a Física em que o acesso ao objeto se dá por meio perceptível ou experimental, sendo assim, segundo Duval (2011a), não há acessibilidade ao objeto matemático, senão, necessariamente, por meio de suas representações, que são

> [...] epistemologicamente ambivalentes, porque de um lado não se deve jamais confundi-las com os próprios objetos, mas de outro elas são, por causa de sua diversidade, sempre necessárias para que se tenha acesso aos objetos. Pois, elas estão “no lugar dos” objetos ou os “evocam”, quando esses não são imediatamente acessíveis (DUVAL, 2011b, p. 23).

O autor ainda pontua que é imprescindível, na atividade matemática, mobilizar diferentes registros de representação semiótica de um mesmo objeto matemático, para acessá-lo. Desse modo, o acesso aos números racionais está intrinsecamente ligado à utilização de um sistema semiótico que os permite designar.

Para Duval (2011a, p. 15), “a compreensão em matemática supõe a coordenação de ao menos dois registros de representação semiótica”, tendo em vista que os alunos não adquirem de forma natural essa coordenação. Assim, uma atividade matemática deve propiciar possibilidades de uso de diferentes registros de representação, para que eles se familiarizem com o objeto representado.

Dentre a variedade de representações semióticas, pode-se destacar as representações gráficas, os sistemas de numeração, as escritas algébricas e formais, as figuras geométricas e a língua natural.

1.3. Fenômenos intrínsecos aos registros de representação e suas influências

Na TRRS, Duval (2009, p. 37-38) destaca que a análise do desenvolvimento cognitivo e as dificuldades encontradas na aprendizagem estão confrontadas com três fenômenos intrínsecos aos registros de representação, que consideramos influenciarem a aprendizagem de números racionais, como organizado em nosso estudo a seguir.

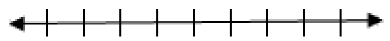
1.3.1. A diversificação dos registros de representação semiótica

Segundo Maranhão e Igliori (2011, p. 58), no ensino dos números racionais, são apresentados os registros de representação: simbólico numérico fracionário e numérico decimal; simbólico algébrico; registro na língua natural ou materna; e incluímos em nossos estudos o registro geométrico, considerando a reta graduada.

Assim, no Quadro 2, registros de representação dos números racionais são apresentados.

Quadro 2 – Registros de representação dos números racionais.

REGISTRO SIMBÓLICO		**REGISTRO NA LÍNGUA NATURAL**
NUMÉRICO	ALGÉBRICO	
Fracionário Ex: $\frac{1}{8}$	$\frac{a}{b}$, $a, b \in Z$, $b \neq 0$	Um número racional escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a e b inteiros e $b \neq 0$, está representado por uma fração.
Decimal Ex: 0,7 ou dízima periódica Ex: 0,333...	$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n x^0$	Um número racional pode ser escrito seguindo as regras e convenções do Sistema Decimal de Numeração.
Potência de 10 ou notacão científica	$a.10^n$ ou $a.10^{-n}$	**REGISTRO GEOMÉTRICO**

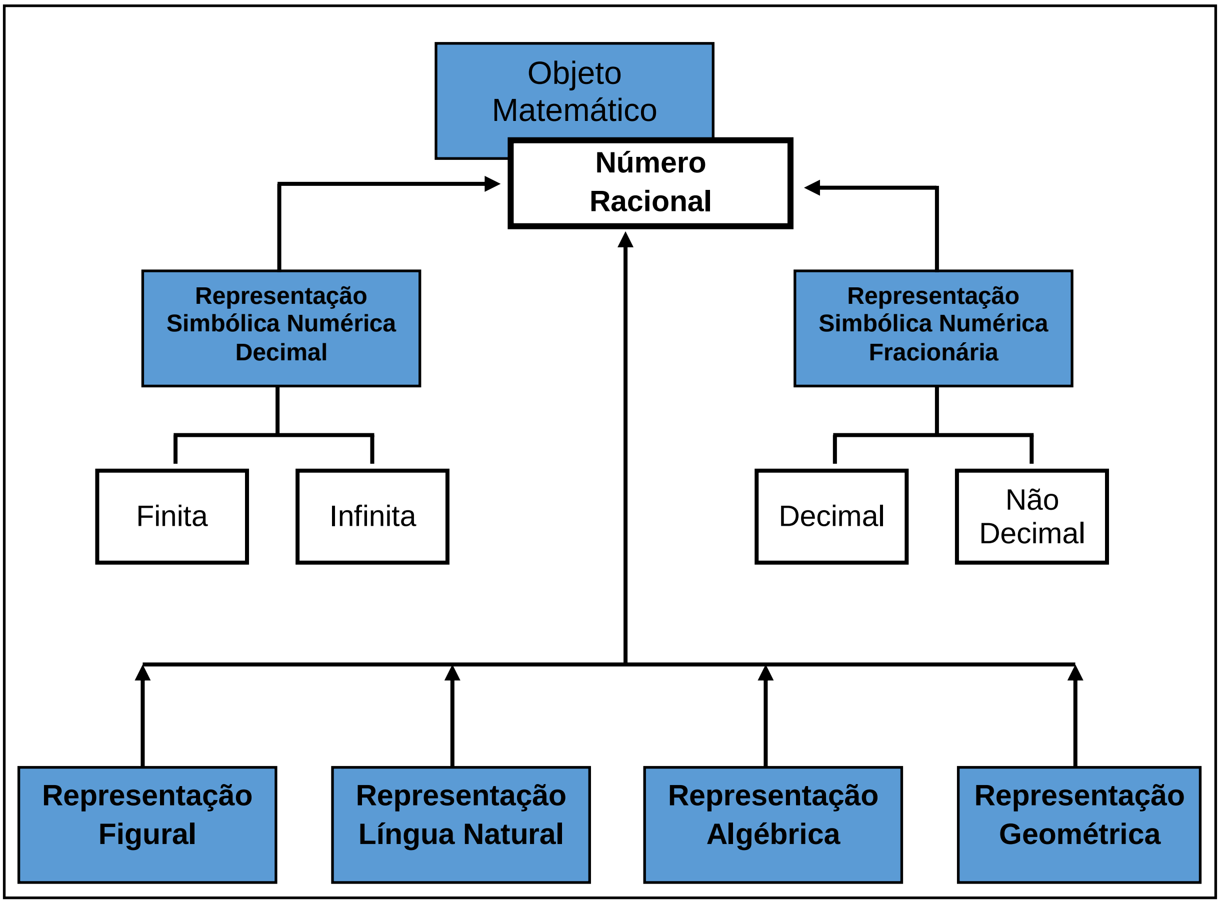


Fonte: Maranhão, Igliori (2011, p. 59, adaptado).

Corroboramos com a Teoria de Duval (2011a, p. 21), a qual defende que "o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas". Nessa perspectiva, e a partir dos estudos de Maranhão e Igliori (2011), um esquema de representações semióticas, que podem possibilitar o acesso ao objeto matemático, número racional (Quadro 3), foi organizado.

Na sequência, algumas considerações sobre as representações semióticas de um número racional, conforme apresentado no Quadro 3, serão realizadas.

Quadro 3 – Representações semióticas de um número racional.



Fonte: Autores da pesquisa.

1.3.1.1. Representação decimal

Segundo Niven (1984, p. 34), o número racional $\frac{1}{2}$ pode ser representado de formas diferentes destas: $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ etc., e também por meio de uma representação decimal: 0,5.

Em seus estudos, o autor afirma que há duas formas de representação decimal de um número racional: a finita e a infinita.

I – Finita

O autor define como representação decimal finita aquela que tem um número finito de casas decimais. Seguem alguns exemplos: 2,5; 0,6; 0,0125; 0,75; 3,0; 8.

II – Infinita periódica

A representação decimal infinita periódica tem um número infinito de casas decimais periódicas como: 0,333…; 0,1666…

1.3.1.2. Representação fracionária

Um número racional pode ser representado na forma fracionária, ou seja, por frações decimais ou não-decimais.

I – Fração decimal

De acordo com Pérez (2009, p. 67), uma fração decimal pode ser escrita como:

> $f = z + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + ... + a_n 10^{-n}$ onde z é inteiro e os números, a_1, a_2 ..., a_n pertencem ao conjunto { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 } e indicam os décimos, centésimos, etc. O número f é representado no sistema decimal na forma abreviada $z, a_1 a_2 a_3 a_4 ... a_n$ e pode também ser escrito na forma de fração $\frac{p}{q}$, sendo q uma potência de 10. Por exemplo, o número: $2{,}347 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000} = \frac{2347}{1000}$. Se p e q têm divisores comuns, pode obter-se uma fração equivalente cujo denominador não será uma potência de 10, mas será sempre divisor de 10^n[6] [*tradução nossa*].

[6] " $f = z + a_1 10^{-1} + a_2 10^{-2} + ... + a_n 10^{-n}$ donde z es um enterro y las cifras $a_1, a_2, ..., a_n$ pertencen al conjunto {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9} e indicam las décimas, centésimas, etc. El número f se representa em el sistema decimal em la forma abreviada $z, a_1 a_2 a_3 a_4 ... a_n$ y puede también escribirse em forma de fracción p/q, siendo q uma pontencia de 10. Por ejemplo, el número: $2{,}347 = 2 + \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{7}{1000} = \frac{2347}{1000}$. Se p y q tienen divisores comunes, puede obtenerse uma fracción equivalente cuyo denominador no sea una potencia de 10, pero será siempre divisor de 10^n".

Pérez (2009) ressalta que qualquer fração irredutível pode ser representada por uma fração decimal, contanto que seu denominador não tenha fatores distintos de 2 e 5.

Para Niven (1984, p. 36), “qualquer fração decimal finita[7] pode ser escrita na forma de fração ordinária com denominador igual a 10, 100 ou alguma potência de 10”. Além disso, afirma que “uma fração irredutível $\frac{a}{b}$, cujos fatores primos do denominador *b* podem ser 2 ou 5” somente. Entretanto, ressalta que não é necessário que *b* obtenha os dois fatores primos na sua decomposição, ou seja, poderá conter apenas um deles, 2 ou 5, como exemplificado a seguir:

- $\frac{1}{8}$, cuja representação decimal 0,125 é finita. O 8 é o valor de b, que pode ser decomposto no forma 2^3. Observa-se que na decomposição não aparece o fator primo 5.
- $\frac{9}{25}$, onde sua representação decimal é finita: 0,36. Tem-se que 25 é o valor de b, cuja decomposição é 5^2, percebe-se que apareceu apenas o fator 5.
- os números racionais, $\frac{3}{2}$ e $\frac{4}{5}$, já estão na forma irredutível, nestes exemplos, os valores de b são 2 e 5.

II – Fração não decimal

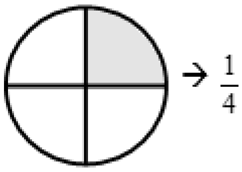
O número racional, também, pode ser representado por uma fração não decimal. Por exemplo, a fração $\frac{1}{3}$ como uma fração não decimal, pois, se assim fosse, tería $\frac{1}{3} = \frac{b}{10^n} \Rightarrow 10^n = 3b$, o que é um absurdo, pois, 3 não divide nenhuma

[7] O autor utiliza o termo “fração decimal finita” para designar aquela cuja representação decimal é finita (p. 34).

potência de 10, logo não existe na família das frações nenhuma fração decimal equivalente a $\frac{1}{3}$.

1.3.1.3. Representação figural

Podemos recorrer à utilização da representação figural para representar um número racional, por exemplo, $\frac{1}{4}$ ou $\frac{7}{4}$:



Chamamos a atenção para as representações figurais dos números racionais acima exemplificadas, que não são caracterizadas como registros de representação semiótica, pois não funcionam como um sistema semiótico constituídos de operações cognitivas específicas que um registro permite efetuar.

1.3.1.4. Representação na língua natural

Representações no registro da língua natural são empreendidas, concomitante, ao ensino da Matemática, “esse registro é constituído de um léxico próprio de uma cultura, e não cabe ao indivíduo a criação de símbolos, mas sim, seu uso adequado de modo que lhe permita comunicar e expressar-se corretamente” (CATTO, 2000, p. 40).

Geralmente, no ensino de Matemática, a língua é reduzida à função de comunicação, considerando-a como um código. Entretanto, “a língua constitui o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento” (DUVAL, 2011b, p. 83).

1.3.1.5. Representação algébrica

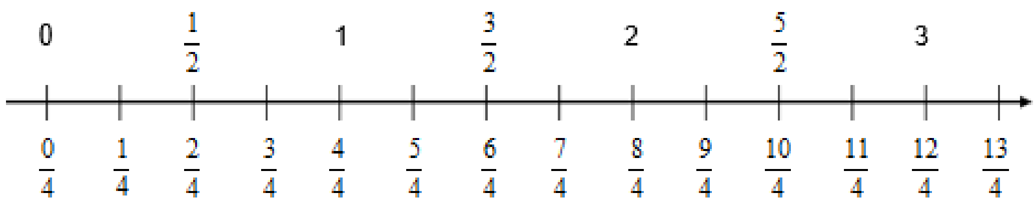
O número racional pode ser representado algebricamente, como $\frac{a}{b}$, $b \neq 0$ com *a* e *b* $\in Z$.

A representação algébrica se faz presente, por exemplo, na obtenção de representações fracionárias equivalentes como:

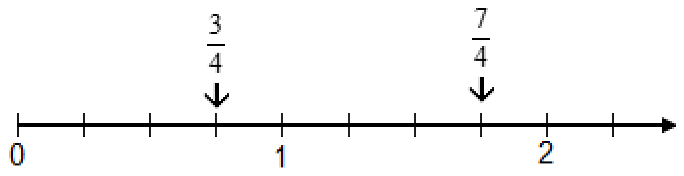
$$\frac{1}{4} = \frac{x}{8} \Rightarrow \frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

1.3.1.6. Representação geométrica

Giménez e Bairral (2005, p. 15) sugerem um trabalho com frações equivalentes, utilizando o registro de representação geométrico, pois, “o uso de representação na reta numérica é muito poderoso para o reconhecimento da equivalência, e contribui para melhorar o conhecimento formal de fração”. Além disso, o aluno poderá estabelecer relações, como por exemplo, que $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$:



Assim, utilizar o registro geométrico unidimensional, a reta graduada, “para representar as frações pode potencializar a conexão com a noção de medida e o desenvolvimento da relação de ordem entre as frações”, podendo ainda favorecer ao aluno a ampliação de noção de frações, com a ideia de números e não apenas com o significado parte-todo, como por exemplo, o $\frac{3}{4}$ é um número entre o zero e o um, e o $\frac{7}{4}$ é um número entre o um e o dois (CISCAR; GARCIA, 2009, p. 129, *tradução nossa*[8]).



1.3.2. A diferenciação entre o objeto representado e seus representantes

O fenômeno da diferenciação entre o objeto representado e seus representantes, em geral, está associado "à compreensão do que uma representação representa e, então, à possibilidade de associar a ela outras representações e de integrá-la nos procedimentos de tratamento" (DUVAL, 2009, p. 38).

1.3.3. Coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica

Atividades cognitivas referem-se a um fenômeno analisado por Duval (2009), como transformações definidas, as quais serão abordadas, neste estudo, como *tratamentos* e *conversões* de representações semióticas em diferentes registros.

De acordo com Duval (2011a), para analisar a atividade matemática em uma perspectiva de aprendizagem e de ensino, faz-se necessário distinguir tratamento e conversão. Para tanto, seguem algumas considerações essenciais concernentes a essas transformações.

8 [...] *para representar las fracciones puede potenciar la conexión con la noción de medida, y el desarrollo de la relación de orden entre las fracciones* (CISCAR; GARCIA, 2009, p.129).

1.3.3.1. Tratamentos

Duval (2009, p. 39) define os tratamentos como atividades cognitivas internas, ou seja, os tratamentos mobilizam apenas um registro de representação, onde as regras de funcionamento próprias a cada um deles são utilizadas.

Pode-se exemplificar, por meio da expressão numérica $\frac{1}{5}+\frac{1}{2}$ como:

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{2}=\frac{2}{10}+\frac{5}{10}=\frac{7}{10}$$

Nesse exemplo, observa-se que as transformações $\frac{1}{5}$ para $\frac{2}{10}$ e $\frac{1}{2}$ para $\frac{5}{10}$ produziram outra representação no mesmo registro, ou seja, as representações se mantiveram no mesmo registro simbólico numérico fracionário. Neste caso, o registro de partida é o mesmo de chegada.

Nesse ponto, não houve mudança na forma de representação do objeto de referência, mas mudança de conteúdo, pois, de acordo com Moretti e Thiel (2012, p. 384), "o que se quer dizer com esta mudança de conteúdo é em relação à informação que de modo mais imediato o registro apresenta por conta da sua forma – é o conteúdo explícito".

Ressalta-se que, os tratamentos estão relacionados fundamentalmente aos representantes dos objetos. Em outras palavras, os tratamentos estão mais ligados às representações do que aos objetos matemáticos representados que, no caso exemplificado, são os números racionais.

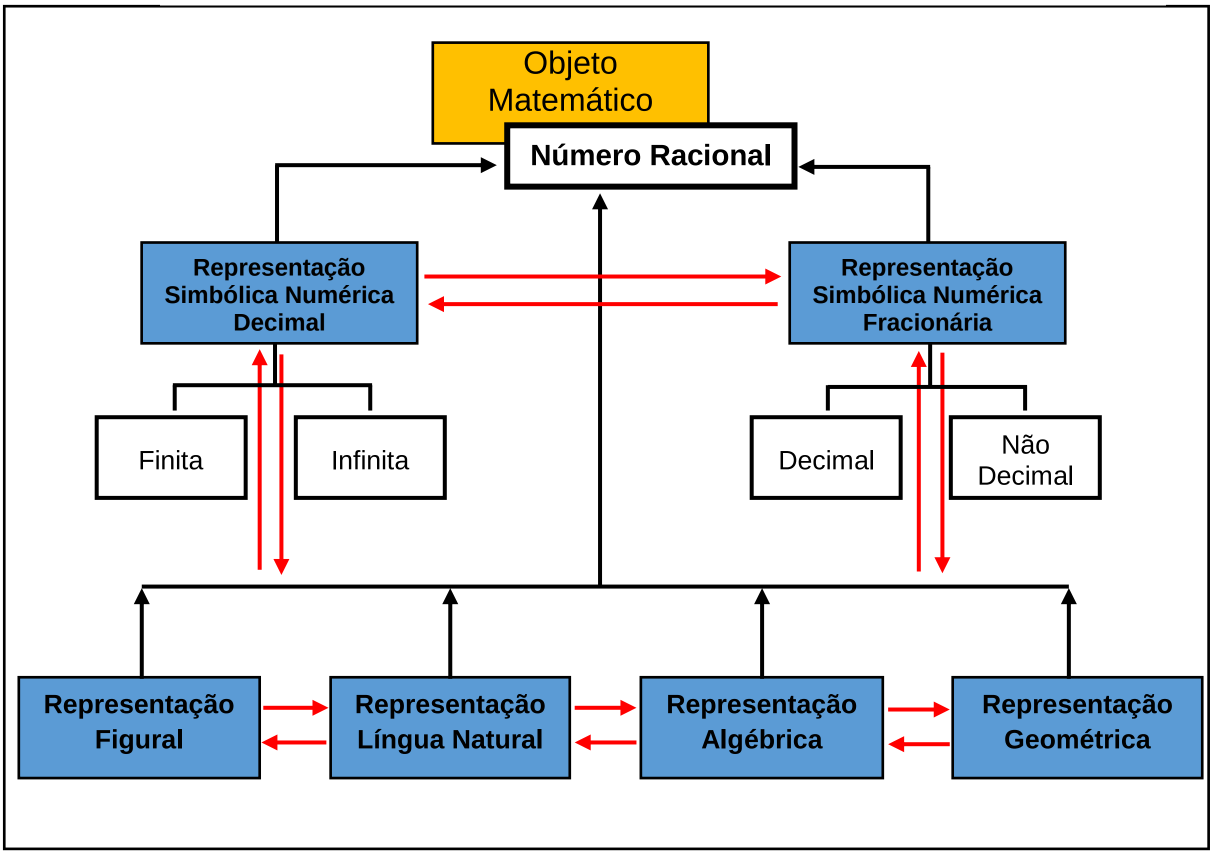
1.3.3.2. Conversões

A conversão de uma representação é diferente e independente do tratamento, pois diz respeito a uma atividade cognitiva produzida na mudança de um registro de representação para outro registro, porém se referenciando ao mesmo objeto.

Apresentamos, no Quadro 4, um esquema que indica a possibilidade da coordenação de várias representações de um número racional, onde as setas vermelhas indicam atividades cognitivas de conversões de dois registros nos dois sentidos, e os retângulos azuis implicam a possibilidade de tratamentos nas representações indicadas.

Ao se falar em conversão de uma representação, é observado que se trata de converter uma representação à outra equivalente, porém pertencente a outro sistema semiótico. Assim, converter é mudar a forma, ou seja, mudar o representante a que se refere o conteúdo**,** contudo, "passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto" (DUVAL, 2011a, p. 22).

Quadro 4 – Coordenação de representações semióticas de um número racional.



Fonte: Autores da pesquisa.

1.4. Fenômenos característicos da operação de conversão das representações

A conversão se refere à atividade cognitiva de mudança de registro de representação semiótica de um determinado objeto matemático. Sendo assim, é o sentido do registro de partida para o registro de chegada que irá determinar o grau de dificuldade que o aluno poderá apresentar para realizar essa transformação.

Duval (2011a, p.19) apresenta dois tipos de fenômenos característicos da atividade de conversão, o fenômeno das variações de congruência e de não congruência e o fenômeno da heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. Segundo Duval (2009), a mudança de uma representação para outra se realiza naturalmente quando as duas representações são congruentes, ou seja, quando as três condições a seguir são preenchidas, caso contrário a conversão não é mais imediata.

> Correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem, mesma ordem possível de apreensão dessas unidades nas duas representações, e conversão de uma unidade significante da representação de partida em uma só unidade significante na representação de chegada (DUVAL, 2009, p.18).

O autor destaca que para analisar a atividade de conversão, basta fazer a comparação entre a representação no registro de partida e a terminal no registro de chegada. Desse modo, duas situações poderão ocorrer: há congruência se a representação terminal transparece na representação de saída, e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação ou não há congruência se a conversão não transparece absolutamente. “As representações semióticas só são transparentes quando existe reconhecimento imediato e espontâneo do que elas representam" (DUVAL, 2011b, p. 101).

O fenômeno da heterogeneidade, dos dois sentidos de conversão, refere-se a importância do sentido de conversão, pois, “nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada” (DUVAL, 2011a, p. 20), uma vez que o conhecimento das regras de correspondência entre dois registros pode não ser suficiente para mobilizá-lo e utilizá-lo, simultaneamente, em determinado sentido de conversão.

Podemos exemplificar o seguinte: quando o aluno transforma a representação $\frac{1}{2}$, registro fracionário, para a representação 0,5, registro decimal, ele estabelece uma conversão, ou seja, muda a forma de representar o conteúdo, que pode ser por meio da divisão de 1 por 2, a fim de obter a representação 0,5. Esse sentido de conversão $\frac{1}{2} \rightarrow 0{,}5$ implica no fenômeno da congruência.

Entretanto, realizar a conversão inversa (a volta) de $0{,}5 \rightarrow \frac{1}{2}$ pode não ocorrer espontaneamente, pois, a transformação nesse sentido não ocorre a partir de um cálculo imediato, ou seja, as regras de conversão não são as mesmas empregadas no sentido $\frac{1}{2} \rightarrow 0{,}5$. Assim, no sentido de conversão $0{,}5 \rightarrow \frac{1}{2}$, ocorreria o fenômeno da não congruência, pois, a conversão já não é mais natural. Nessa direção, Leme e Igliori (2013, p. 18) reiteram que

> [...] no ensino de um conceito matemático, há em geral, a predominância do uso de uma das representações. Não são comuns investimentos em atividades direcionadas às mudanças de registros (em ambos os sentidos). Parece mesmo haver uma concepção de que a passagem de um registro a outro é uma ação que o aluno adquire naturalmente, o que de fato não ocorre. É necessário levar o aluno a compreender que um conceito em dois registros diferentes não são dois conceitos diferentes.

Pode-se, então, salientar que no ensino, ao privilegiar um sentido de conversão entre representações de números racionais, não implica que alunos automaticamente serão capazes de converter no sentido inverso. Esse fato mostra a necessidade de transitar pelas variadas representações de números racionais nos dois sentidos, para que as mesmas sejam reconhecidas como representações do mesmo número racional e, assim, não confundi-las com o objeto representado.

É nesse sentido, que Duval (2011a, p. 21) apresenta o paradoxo da compreensão em matemática: “como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?" Portanto, é a articulação de diferentes registros de representação semiótica na atividade matemática que dará acesso à compreensão matemática.

Moretti, Cordeiro e de Souza (2004, p. 1) enfatizam que

> [...] o aprendizado da matemática e, portanto, a formação dos conceitos ligados a ela, pressupõe que o aluno possa atribuir significado a sua linguagem. Os registros e/ou formas de representação dos conceitos possibilitam que o mesmo possa comparar, diferenciar, relacionar, visualizar, interpretar, substituir, construir e analisar soluções de problemas ligados aos diferentes objetos matemáticos, dentro de um sistema de comunicação comum a este conhecimento.

Nesse sentido, ensinar e aprender Matemática, é apropriar-se de diferentes representações semióticas para reportar-se aos conceitos.

O próximo capítulo, apresenta o caminho metodológico percorrido para o desenvolvimento desta pesquisa.

2 UMA ESTRATÉGIA METODOLÓGICA

O processo de organizar um caminho metodológico da pesquisa é pensado e planejado como um modo de iniciar o trabalho investigativo, e da constituição de uma pesquisadora que inicia nessa tarefa.

Assim, neste trabalho, uma abordagem qualitativa é assumida, a qual, segundo Bogdan e Biklen (1994), possui as seguintes características:

> 1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal;
> 2. A investigação qualitativa é descritiva;
> 3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos;
> 4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva;
> 5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (p. 47-51).

Além disso, métodos a serem seguidos e cumpridos não foram pré-definidos, uma vez que o modo subjetivo de pesquisar foi posicionado, conforme Bicudo (2006),

> [...] o qualitativo engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões. O significado atribuído a essa concepção de pesquisa também engloba noções a respeito de percepções de diferenças e semelhanças de aspectos comparáveis de experiência (2006, p. 104).

A autora ainda afirma, que numa pesquisa qualitativa

> [...] privilegiam-se descrições de experiências, relatos de compreensões, respostas abertas a questionários, entrevistas com sujeitos, relatos de observações e outros procedimentos que deem conta de dados sensíveis, de concepções, de estados mentais, de acontecimentos etc (BICUDO, 2006, p. 107).

É nesse caminho, que uma possível articulação com a presente pesquisa foi estabelecida, por meio de posturas assumidas e intencionadas durante a participação na pesquisa de uma professora de Matemática, que se intenciona pesquisadora, juntamente com outros professores.

Os autores Bogdan e Biklen ressaltam que

> Os investigadores qualitativos em educação estão continuamente a questionar os sujeitos de investigação, com o objetivo de perceber "aquilo que *eles* experimentam, o modo como *eles* interpretam as suas experiências [...] Os investigadores qualitativos estabelecem estratégias e procedimentos que lhes permitam tomar em consideração as experiências do ponto de vista do informador. O processo de condução de investigação qualitativa reflete uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos [...] (BOGDAN;BIKLEN, 1994, p. 51).

Uma aproximação com a abordagem da pesquisa qualitativa possibilitou enfatizar nossa preocupação com os significados que os professores participantes atribuíam às dificuldades dos alunos nos tratamentos e conversões de representações de números racionais. Assim, nas análises, o pesquisador deve se aproximar o quanto possível, da maneira como os participantes interpretam suas experiências, para retratar essa visão, reconstruindo os dados descritivos, que são "em forma de palavras ou imagens e não de números", portanto, "[...] os dados incluem transcrições de entrevistas, notas de campo, fotografias, vídeos, documentos pessoais [...]" (BOGDAN; BIKLEN,1994, p. 48).

As atividades matemáticas planejadas para as sessões de estudos com o grupo de professores foram, constantemente, revistas a partir das observações do pesquisador, no desenrolar durante os estudos no grupo, uma vez que houve interesse pelo processo, no qual a pesquisa foi desenvolvida, do que meramente em seus resultados.

Nessa perspectiva, e por meio de estudos realizados na disciplina de Metodologia de Pesquisa durante o mestrado, sobre procedimentos utilizados por pesquisadores de Didática da Matemática, ocorreu inspiração e construção de procedimentos metodológicos, que dessem conta dos dados desta investigação, os quais serão apresentados a seguir.

2.1 O grupo de professores

Durante a experiência da pesquisadora, como professora regente em turmas de 8º e 9º anos, foram percebidas dificuldades e até mesmo certo "temor" de alunos com relação aos números racionais, suas representações e operações.

Assim, surgiam sempre indagações tanto da pesquisadora quanto de colegas, também, professores de matemática: por que a maioria dos alunos chega, nestes anos, com tantas dificuldades em trabalhar com números racionais?

Diante disso, delimitou-se o objeto de estudo desta pesquisa, focando na ótica de professores sobre dificuldades dos alunos, nos tratamentos e conversões de representações semióticas de números racionais, remetendo à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval. Pois, segundo Duval (2011a, p. 21), "o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas".

Os momentos de experiência da pesquisadora, como técnica da equipe de Matemática de Formação de professores da REME, foram determinantes para decidir constituir um grupo de professores como sujeitos da pesquisa, pois a partir disso, foi percebida a necessidade de dar oportunidade em discutir questões específicas sobre um tema matemático, os números racionais.

Consideramos este tema de grande importância para o ensino e aprendizagem dos anos finais do ensino fundamental, pois, nas atividades de formação, ele sempre era apontado pelos professores como um dos conteúdos que geravam mais dificuldades aos alunos em apreendê-lo, consequentemente, dificultando a aquisição de outros conhecimentos matemáticos.

Diante dessas considerações, comungamos com as ideias de Fiorentini (2006), que a opção em constituir um grupo é

> [...] influenciada pela sua identificação com os integrantes do grupo e pela possibilidade de compartilhar problemas, experiências e objetivos comuns. Tal identificação não significa a presença de sujeitos iguais a ele (com os mesmos conhecimentos ou do mesmo ambiente cultural), mas de pessoas dispostas a compartilhar espontaneamente algo de interesse comum, podendo apresentar olhares e entendimentos diferentes sobre os conceitos matemáticos e os saberes didáticos-pedagógicos e experienciais relativos ao ensino e à aprendizagem da matemática (FIORENTINI, 2006, p. 56).

Entendemos que promover estudos e discussões com um grupo de professores pode possibilitar experiências formativas[9] em um ambiente natural de trocas, angústias, pontos de vistas, podendo ainda desencadear reflexões, mudanças de atitudes, práticas e concepções, concernentes ao ensino dos números racionais e a mobilização de suas representações semióticas.

A possibilidade, de que os professores reflitam sobre uma experiência de estudos em um grupo, vai ao encontro com a afirmação de Miola (2011), pois,

> [...] a ideia de refletir está associada à possibilidade do professor enfrentar situações inesperadas, fazendo-o de forma positiva, com a certeza de estar aberto a novas hipóteses de trabalho, identificando-se, assumindo os problemas com que se depara, descobrindo novos caminhos, construindo e concretizando renovadas soluções (MIOLA, 2011, p. 68).

Nessa direção, analisar e discutir coletivamente sobre sucessos e insucessos de alunos na aquisição de números racionais, bem como na resolução de atividades matemáticas que envolvem tratamentos e conversões de representações de números racionais, poderá levar os participantes a reconhecerem as potencialidades que as transformações de representações semióticas oferecem para o ensino e a aprendizagem em Matemática. Dessa forma, “trata-se, de se investigar com os professores, em vez de se investigar sobre os professores” (PONTE, 1997).

Essa proposta é desenvolvida por meio de reflexões conjuntas, ao se debruçarem sobre a pluralidade de registros de representação semiótica de números racionais, sua utilização e articulação, que segundo Duval (2011a, p. 22) “é a articulação dos registros que constitui uma condição de acesso à compreensão em matemática, e não o inverso, qual seja, o “enclausuramento” de cada registro”.

No mês de junho de 2014, com o intuito de constituir um grupo de professores, inicialmente, uma escola municipal em que a pesquisadora havia trabalhado durante oito anos foi visitada, onde houve conversas com a diretora

---

[9] Expressão utilizada por Ponte (2014, p. 349) para indicar experiências e possibilidades que uma “perspectiva exploratória e investigativa podem dar um contributo fundamental ao desenvolvimento do conhecimento matemático, conhecimento didático”.

sobre a presente pesquisa, bem como o interesse de convidar seus professores para participarem dela. Nessa oportunidade, surgiu a possibilidade de colaborar com o desenvolvimento desta pesquisa, cedendo o espaço físico da sua escola para a realização das sessões de estudos com professores interessados em participar. Ela logo se mostrou disposta a ceder o espaço de sua escola, e assinou um termo de consentimento, deixando a pesquisadora à vontade para escolher o horário - definido pelos próprios professores convidados, no período vespertino após a aula.

Ao ser acordado o local de estudos, professores de outras escolas municipais, próximas ao *lócus*, foram convidados pessoalmente a participarem do grupo. Inicialmente, oito professores confirmaram sua presença, informando sua disponibilidade na semana, a fim de proceder as reuniões, quinzenalmente, nas quintas-feiras, a partir das 17h30min, num intervalo mínimo de uma hora. Ressalta-se que os professores aceitaram o convite, voluntariamente, no primeiro momento.

O início das sessões estava previsto para o mês de setembro de 2014, porém, observou-se a necessidade de um estudo e preparo maior, ocasionando na prorrogação do início das reuniões para novembro de 2014. Desse modo, todos os professores convidados foram avisados pessoalmente e por *e-mail*.

Inesperadamente, desencadeou-se uma greve de professores na REME, no que levou o grupo a aguardar o retorno às aulas, uma vez que se tornaria difícil reunir todos os professores num mesmo horário, como definir outro espaço físico de fácil acesso a todos, visto que as escolas estavam fechadas. A greve só foi suspensa no final de novembro de 2014. Dessa forma, inviabilizou o início dos estudos, por considerar próximo ao encerramento do ano letivo, como a necessidade dos professores retomarem e reorganizarem seu planejamento de aulas. Assim, eles sugeriram que remarcassem o início dos estudos para março de 2015, como foi combinado.

Entretanto, dos oito professores que anteriormente haviam confirmado sua participação, quatro ficaram impossibilitados de participarem por motivos justificados, como mudanças para escolas mais distantes, dificultando sua locomoção e horários planejados.

Será apresentado a seguir, os professores de Matemática participantes desta pesquisa (Quadro 5), caracterizados por eles mesmos com nomes fictícios, os quais dois deles são professores regentes da escola, *lócus* das sessões de estudos.

Os dados apresentados no Quadro 5 foram colhidos na primeira sessão de estudos, por meio de um pequeno questionário.

Ressaltamos que a participação dos professores, nesta pesquisa, foi voluntária, pois se mostraram interessados em estudar e discutir o tema proposto por sua relevância nos anos finais do ensino fundamental.

Quadro 5 – Identificação e caracterização do grupo de professores participantes.

Professor	Formação (Curso)	Ano de conclusão	Tempo de experiência	Anos que atuam
Diana	Licenciatura em Matemática	2012	9 anos	7º, 8º e 9º
João	Licenciatura em Matemática	1996	22 anos	6º ao 9º
Rafaela	Licenciatura em Matemática	2004	10 anos	7º, 8º e 9º
Suzy	Ciências: Habilitação em Matemática	1985	30 anos	6º e 7º

Fonte: Autores da pesquisa.

A primeira sessão de estudos teve início na primeira semana do mês de março de 2015, sendo que as reuniões foram agendadas para as segundas-feiras - a pedido dos quatro professores. Ao final de cada sessão, sempre era entregue, para cada um dos professores participantes, um convite para a próxima sessão, com data e horário especificados, e na véspera, era enviado um e-mail para confirmar presença, bem como receber um retorno com a confirmação de presença ou justificativa de ausência.

Assim, o Quadro 6 apresenta os dias em que ocorreram as nove sessões de estudos.

Quadro 6 – Período de sessões de estudos.

Mês	**Março**					**Abril**			**Maio**
Dias	2	9	16	24	30	6	13	27	11

Fonte: Autores da pesquisa.

Vale ressaltar que o cronograma sempre foi ajustado à disponibilidade de todos os professores, e os mesmos sempre demonstraram interesse em chegar a um consenso a fim de que pudessem estar presentes.

2.2 Nossos estudos

Nesse caminho, busca-se responder a questão de pesquisa: como professores de Matemática dos anos finais do ensino fundamental se manifestam verbalmente ou por escrito sobre dificuldades de alunos em mobilizar diferentes sistemas semióticos de representação de números racionais em atividades matemáticas, durante sessões de estudo, visando o aprimoramento do trabalho em sala de aula?

Assim, estudos teóricos sobre números racionais e suas representações semióticas foram adotados como procedimento metodológico inicial, como a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por Raymond Duval (1993, 2006, 2009, 2011a, 2011b, 2012a, 2012b, 2013), dando suporte para elaboração e escolhas conscientes de atividades matemáticas em função do que se pretendia investigar com os professores participantes.

Ainda foram buscadas pesquisas desenvolvidas, nesta temática, que articulam a TRRS ao ensino e aprendizagem de números racionais (CATTO, 2000; SOARES, 2007; SILVA, 2008). Estudos sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais também orientaram esta pesquisa (MIOLA, 2011; SOUZA, 2013), bem como documentos oficiais de educação, a saber os PCN (1998). Foi realizado um estudo preliminar de dois livros, dos 6º e 7º anos, de uma coleção[10] de livros didáticos de Matemática aprovada pelo Plano Nacional de Livro Didático/PNLD, de 2014, a qual foi a mais adotada pelas escolas municipais de Campo Grande/MS.

O estudo desses livros didáticos foi desenvolvido, enfocando como os autores propõem a abordagem das representações semióticas de números racionais, seus tratamentos e conversões. Dessa forma, nosso estudo se direcionou aos capítulos específicos desta temática.

2.2.1 Um estudo preliminar de representações semióticas de números racionais no livro didático

Segundo os PCN, possíveis dificuldades na aprendizagem encontradas pelos alunos, nos estudos dos números racionais, se originam devido aos conhecimentos adquiridos sobre a construção dos números naturais, por meio dos quais evidenciam-se rupturas diante de obstáculos como

> - cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$, ... são diferentes representações de um mesmo número;
> - a comparação entre racionais: acostumados com a relação $3 > 2$, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;
> - se o "tamanho" da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza (8345 > 83), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério;
> - se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;
> - se a sequência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre

[10] Em referência à coleção Praticando Matemática: 6º ao 9º ano.

> possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87 (BRASIL, 1998, p. 101).

É nesse contexto, que faz-se imprescindível um estudo quanto à abordagem de representações semióticas de números racionais em livros didáticos, uma vez que os consideramos como um dos recursos mais utilizados pelo professor de matemática. Entretanto, salientamos que estes recursos não falam por si só, eles são estáticos, prontos e acabados. O professor é a figura essencial que lhes dará “vida”, significado, podendo ainda buscar outros recursos e elaborar estratégias para complementar o conteúdo abordado, bem como sua ação pedagógica.

Nessa perspectiva, o guia de livros didáticos do Programa Nacional do Livro Didático/PNLD (2014), dos anos finais do ensino fundamental, pontua que,

> embora o livro didático seja um recurso importante no processo de ensino e aprendizagem, ele não deve ocupar papel dominante nesse processo. Assim, cabe ao professor manter-se atento para que sua autonomia pedagógica não seja comprometida. Nunca é demais insistir que, apesar de toda a sua importância, o livro didático não é o único suporte do trabalho pedagógico do professor. É sempre desejável buscar complementá-lo, a fim de ampliar as informações e as atividades nele propostas, para contornar deficiências ou, ainda, adequá-lo ao grupo de alunos que o utilizam (BRASIL, 2014, p. 13).

Entende-se que o livro didático não é um conjunto de sequências de conteúdos que deve ser devidamente seguido, porém, muitas vezes poderá ser um grande influenciador na abordagem didática de conteúdos exercida pelo professor em sala de aula, e ainda na aprendizagem de alunos, já que é uma de suas fontes permanentes de estudos.

Dessa forma, foi realizado um breve estudo de dois livros didáticos dos 6º e 7º anos, da coleção mais adotada[11] no município de Campo Grande/MS, tomando como foco as representações semióticas de números racionais, bem como os tratamentos e conversões propostos.

---

[11] Disponível em: < http://sites.google.com/site/livrodidáticosemedcgms.>. Acesso em: 18 jul. 2014.

2.3 Coleção estudada

Nesta pesquisa, foi optado por analisar os livros didáticos dos 6º e 7º anos, da coleção Praticando Matemática: 6º aos 9º anos, de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, São Paulo, Editora do Brasil, 2012, aprovada pelo Guia dos Livros Didáticos PNLD/2014, não só por ser a mais adotada nas unidades escolares municipais, mas, sobretudo, por ser uma das mais utilizadas pelos professores participantes desta pesquisa em seu trabalho docente.

Justifica-se ainda, a escolha dos livros nos referidos anos por apresentarem capítulos específicos sobre os números racionais e suas representações semióticas.

Cada livro da coleção será identificado, nesta pesquisa, como segue:

- L1 - livro do 6º ano;
- L2 - livro do 7º ano.

Nesta investigação, foram estudadas as unidades 11 e 12 do L1 e, a unidade 2 do L2, que enfatizam os números racionais, observando como as representações semióticas dos números racionais são abordadas em termos de possibilidades de tratamentos e conversões.

2.3.1 Coleção Praticando Matemática - L1: 6º ano

Nesta obra, correspondente ao 6º ano, os números racionais são apresentados na unidade 11 com o título “Frações” e na unidade 12 “Números Decimais”, conforme Figura 1.

Figura 1: Sumário 1.

SUMÁRIO

Unidade 8
Observando formas
1. As formas da natureza e as formas criadas pelo ser humano 117
2. Formas planas e não planas 119
3. Investigando os blocos retangulares 124
4. Perspectivas e vistas 127

Unidade 9
Ângulos
1. Falando um pouco sobre ângulos 135
2. Ângulos – elementos e representação 136
3. Medidas de ângulos 138
4. Utilizando o transferidor 141
5. Retas perpendiculares e retas paralelas 143
6. Os esquadros 145

Unidade 10
Polígonos e circunferências
1. Polígonos 151
2. Triângulos 154
3. Quadriláteros 155
4. Polígonos regulares 158
5. Perímetro 160
6. Circunferências 162
7. Simetria nos polígonos e no círculo 165

Unidade 11
Frações
1. Inteiro e parte do inteiro 171
2. Frações de uma quantidade 174
3. Números mistos e frações impróprias 176
4. Frações equivalentes 179
5. Comparação de frações 182
6. Operações com frações 185
7. Inversa de uma fração 190
8. Potenciação e raiz quadrada de frações 193

Unidade 12
Números decimais
1. A notação decimal 199
2. Números decimais e o registro de medidas 204
3. Números decimais na forma de fração 206
4. Comparando números decimais 206
5. Adição e subtração de números decimais 208
6. Multiplicando por 10, 100, 1 000 210
7. Multiplicação de números decimais 212
8. Divisão de números naturais com quociente decimal 215
9. Divisão de números decimais 216

Unidade 13
Porcentagens
1. O que é porcentagem? 225
2. Calculando porcentagens 228
3. A forma decimal das porcentagens 232

Unidade 14
Medidas
1. O que é medir? 237
2. Comprimentos no sistema métrico decimal 239
3. Medindo superfícies 244
4. A área do retângulo 245
5. Volumes 250
6. Quando usamos cada unidade? 253
7. Medidas de massa 255

Sugestões de leitura e de sites para o aluno 267
Referências bibliográficas 270
Moldes e malha para as atividades 271
Respostas dos exercícios 277

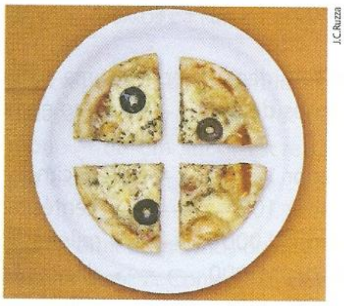
Fonte: Praticando Matemática, 6º ano.

Na unidade 11, os autores iniciaram o estudo de frações com a ideia de parte-todo, apresentando dois exemplos em que articulam simultaneamente as representações: língua natural, fracionária e figural para se referir ao número racional $\frac{1}{4}$, conforme Figura 2.

Figura 2 – Representações de um mesmo número racional.

1. Inteiro e parte do inteiro

Daniel vai se atrasar para o jantar. A mãe dele preparou uma pizza. Dividiu-a em 4 partes iguais e guardou uma delas para Daniel.



Para representar a parte da pizza reservada para Daniel, usamos uma fração: $\frac{1}{4}$.

Nas frações temos:

$$\frac{1 \longrightarrow \text{numerador}}{4 \longrightarrow \text{denominador}}$$

- O número que aparece embaixo (chamado **denominador** da fração) indica em quantas partes iguais o inteiro foi dividido.
- O número que aparece em cima (**numerador** da fração) indica quantas dessas partes foram tomadas.

Observe que $\frac{4}{4}$ da pizza correspondem à pizza inteira.

A fração $\frac{4}{4}$ indica uma quantidade inteira, ou seja, $\frac{4}{4} = 1$.

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 171.

Andrini e Vasconcellos (2012) representam frações na língua natural (Figura 3) e pontuam que para nomear uma fração, deve-se observar o seu denominador, pois, "é o denominador que dá nome à fração".

Figura 3 – Representações de números racionais no registro fracionário e na língua natural.

- As frações de denominador 2 são os meios.
- As frações de denominador 3 são os terços.

Fração	Leitura
$\frac{1}{2}$	um meio
$\frac{2}{3}$	dois terços

- denominador 10 → décimos
- denominador 100 → centésimos
- denominador 1 000 → milésimos
- denominador 10 000 → décimos de milésimos

Fração	Leitura
$\frac{3}{10}$	três décimos
$\frac{37}{100}$	trinta e sete centésimos
$\frac{131}{10\,000}$	cento e trinta e um décimos de milésimos

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 172.

Assim, seguem definindo frações decimais, como toda fração que tem “como denominador uma potência de base 10, como 10, 100, 1000 etc”.

Exemplificam ainda, na língua natural, frações não decimais e que tenham denominador maior que dez: “$\frac{7}{12} \rightarrow$ lê-se sete doze avos”.

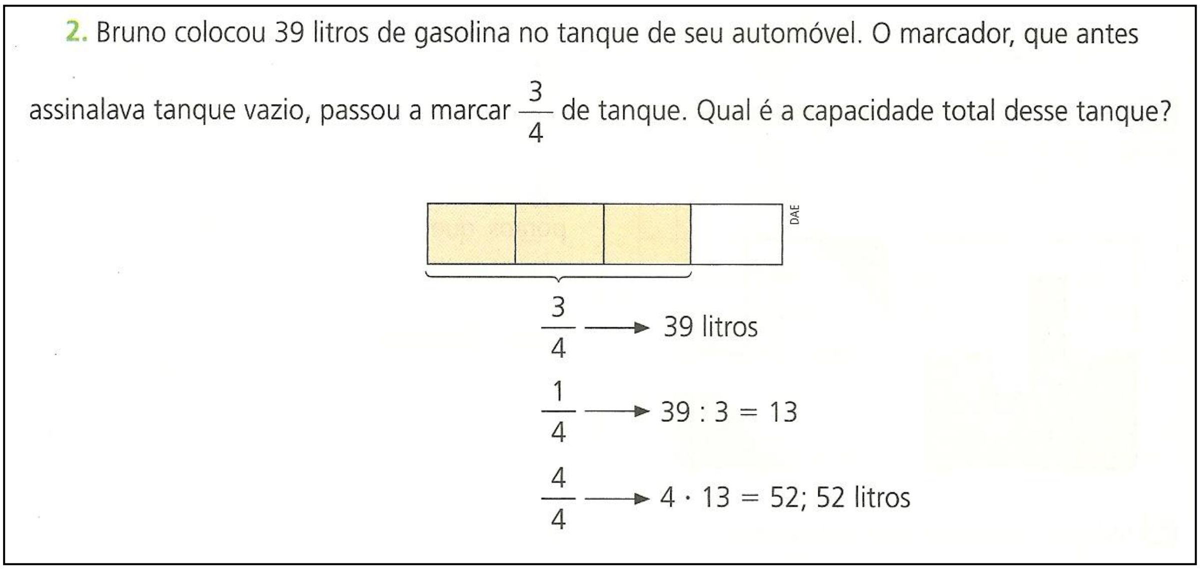
Constata-se, na página 173, o emprego de exercícios envolvendo frações no significado parte-todo, que propõem conversões nos sentidos:

- Representação figural → representação fracionária;
- Representação fracionária → registro na língua natural;
- Registro na língua natural → representação fracionária;
- Representação figural → registro na língua natural;
- Registro em língua natural → registro geométrico.

Assim, observa-se que não foram propostos exercícios solicitando conversões da representação fracionária para a representação figural, nem do registro na língua natural para a representação figural e, nem do registro geométrico para o registro na língua natural.

Andrini e Vasconcellos (2012) apresentam, com o título de “frações de uma quantidade”, uma situação em língua natural, sugerindo a ideia de fração como operador, conforme Figura 4, utilizando representação figural e representações fracionárias na sua resolução.

Figura 4 – Fração de uma quantidade.



2. Bruno colocou 39 litros de gasolina no tanque de seu automóvel. O marcador, que antes assinalava tanque vazio, passou a marcar $\frac{3}{4}$ de tanque. Qual é a capacidade total desse tanque?

$\frac{3}{4} \longrightarrow$ 39 litros

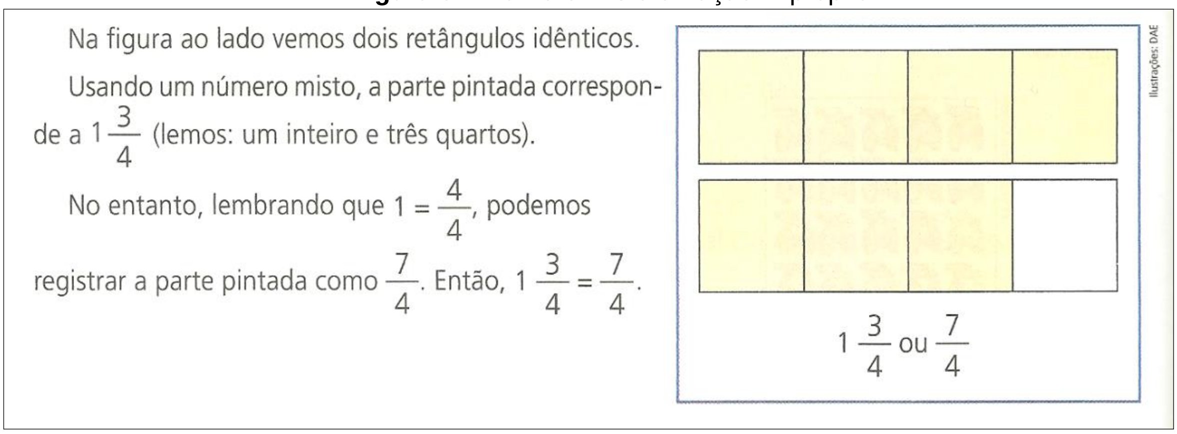
$\frac{1}{4} \longrightarrow 39 : 3 = 13$

$\frac{4}{4} \longrightarrow 4 \cdot 13 = 52$; 52 litros

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 174.

Representações como “números mistos” e “frações impróprias”, assim nomeadas pelos autores, são apresentadas e articuladas com a língua natural e sua representação figural, como exemplificado na Figura 5.

Figura 5 – Número misto e fração imprópria.



Na figura ao lado vemos dois retângulos idênticos.

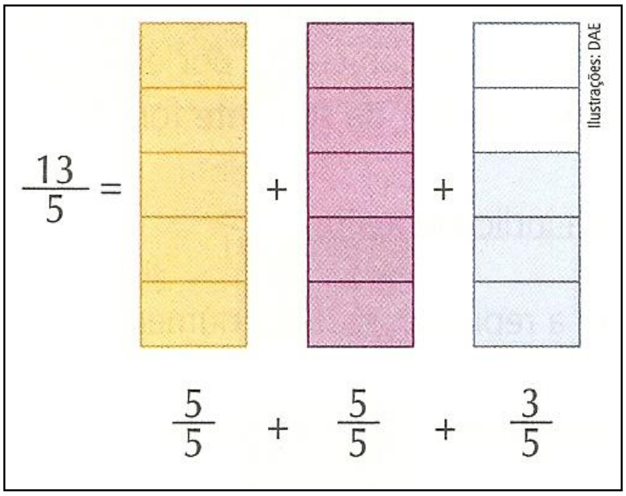
Usando um número misto, a parte pintada corresponde a $1\frac{3}{4}$ (lemos: um inteiro e três quartos).

No entanto, lembrando que $1 = \frac{4}{4}$, podemos registrar a parte pintada como $\frac{7}{4}$. Então, $1\frac{3}{4} = \frac{7}{4}$.

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 176.

Andrini e Vasconcellos (2012) propõem que para escrever uma fração imprópria na forma de um número misto, por exemplo, $\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}$, extrai-se os inteiros da fração, ou seja, verifica-se quantos inteiros *cabem* na fração imprópria". Para isso, sugerem utilizar representações figurais e fracionárias, como indicado na Figura 6.

Figura 6 – Transformação de uma fração imprópria na forma de um número misto.



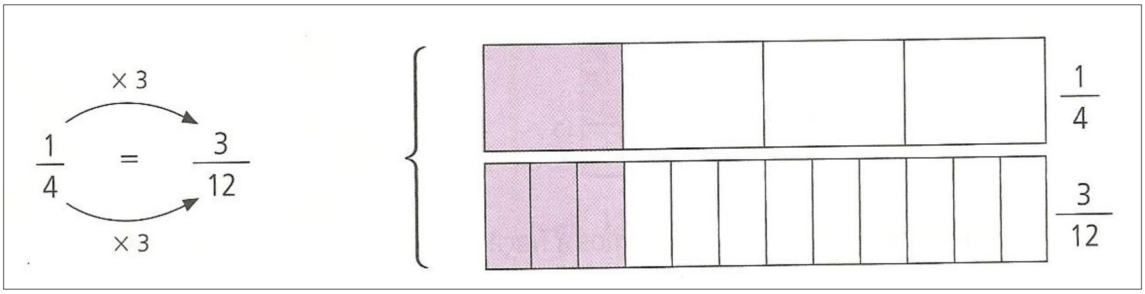
Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 177.

Os exercícios propostos, neste contexto, envolvem transformações de representações fracionárias e figurais, na forma de número misto.

Andrini e Vasconcellos (2012) definem frações equivalentes em língua natural: "se duas ou mais frações representam a mesma quantidade, então, elas são frações equivalentes".

As representações fracionárias de frações equivalentes são articuladas com sua representação figural (Figuras 7 e 8), mostrando diferentes representações de uma mesma parte da unidade, podendo possibilitar a compreensão dessa equivalência e assim, reconhecer as diferentes representações de um mesmo número racional.

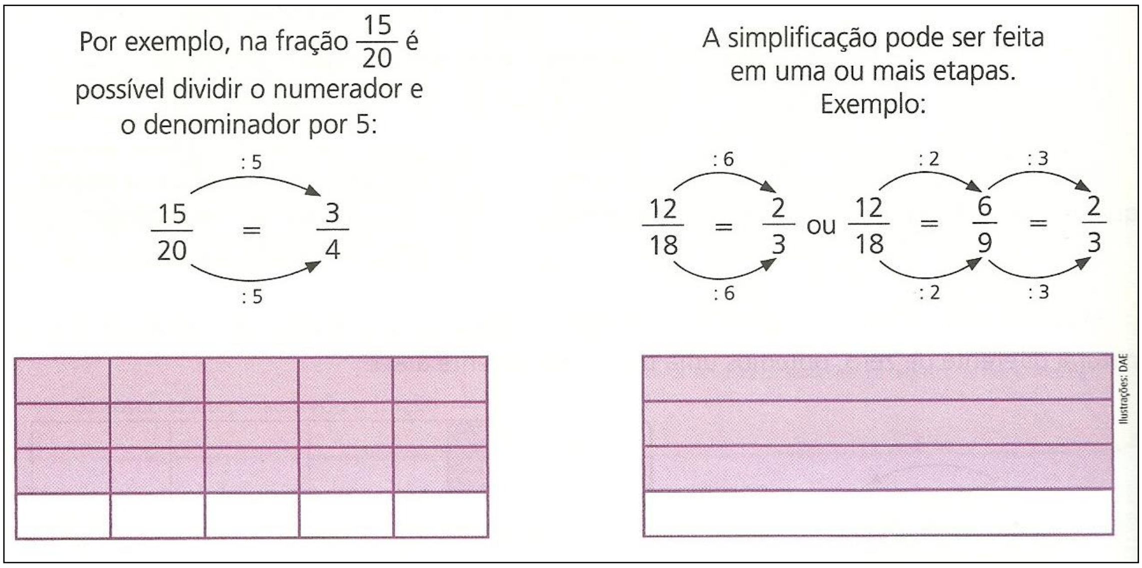
Figura 7 – Tratamento numérico de multiplicação para obter frações equivalentes.



Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 179.

Entretanto, observa-se que as representações figurais apresentadas na Figura 8, que se referem respectivamente às frações $\frac{15}{20}$ e $\frac{3}{4}$, estão dispostas de maneira confusa, uma vez que a segunda figura à direita foi colocada abaixo de um exemplo em que não há associação nenhuma com ele, o que poderá dificultar ao aluno estabelecer relações entre as representações figurais, e estas às representações fracionárias $\frac{15}{20}$ e $\frac{3}{4}$.

Figura 8 - Tratamento numérico de divisão para obter frações equivalentes.



Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 180.

Para obter frações equivalentes, foi utilizado o tratamento numérico de multiplicação ou divisão dos termos da fração por um mesmo número natural, diferente de zero, conforme exemplificado nas Figuras 7 e 8. Andrini e

Vasconcellos (2012) expressam esse tratamento, por meio de uma regra no registro em língua natural, “quando multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural diferente de zero, obtemos uma fração equivalente a ela”, complementando-a, ainda que seja possível encontrar uma fração equivalente a ela que tenha numerador e denominador menores: “faz-se necessário dividir o numerador e o denominador da fração por um mesmo número natural diferente de zero”.

Pode-se observar que Andrini e Vasconcellos (2012, p. 181) priorizam o tratamento fracionário, nos exercícios propostos para encontrar frações equivalentes, utilizando a regra apresentada. Foram dadas representações figurais apenas em dois exercícios, solicitando a escrita de frações equivalentes sugeridas pela parte colorida.

Na abordagem que se faz, concernente à comparação de frações com denominadores iguais, foi empreendida articulação entre representações fracionárias e figurais, explicitando em língua natural a seguinte observação: “quando comparamos frações de denominadores iguais, a maior fração é a que apresenta o maior numerador” (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 182).

Nessa perspectiva, apresentam o exercício 36, solicitando dizer “qual é maior?” dentre frações com numeradores iguais e denominadores diferentes. Na sequência, solicita que o aluno explique o que pensou. Aqui, os autores esperam[12] que os alunos respondam “com numeradores iguais, a fração que tiver menor denominador representa o maior número” (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 183).

Na comparação de frações com denominadores diferentes, propõe-se a obtenção de frações equivalentes de modo que tenham seus denominadores iguais, sugerindo encontrar o mmc (mínimo múltiplo comum) dos denominadores das frações a serem comparadas. É esperado pelos autores, ao compararem frações com denominadores iguais, que os alunos observem que “a fração que tiver maior numerador representa o maior número” (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 183).

[12] Utilizamos o termo “os autores esperam” e também “é esperado pelos autores” por encontrarmos comentários feitos pelos próprios autores sobre a resolução do exercício 36.

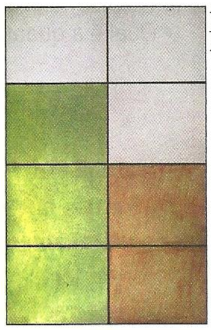
Observa-se que nos exercícios referentes à comparação de frações, foi solicitada apenas a utilização de representações do registro fracionário.

As operações de adição e subtração de frações com denominadores iguais são exemplificadas, a partir de um enunciado em língua natural, utilizando representações: fracionárias e figural, pintando com cores diferentes partes do todo (Figura 9).

Figura 9 – Adição e subtração de frações com denominadores iguais.

Adição e subtração de frações de denominadores iguais

Dividi uma cartolina em oito partes iguais. Ontem pintei três partes de verde e hoje, duas de laranja.



- Que fração da cartolina toda eu já pintei?
- Que fração da cartolina toda falta pintar?

Observe:

cartolina toda → $\frac{8}{8}$

fração pintada ontem → $\frac{3}{8}$

fração pintada hoje → $\frac{2}{8}$

Fração da cartolina já pintada: $\frac{3}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8}$.

Resta pintar $\frac{8}{8} - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$ da cartolina.

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 185.

A partir dessas representações, foi realizado o tratamento numérico fracionário de adição e subtração.

Nas operações de adição e subtração de frações, com denominadores diferentes, Andrini e Vasconcellos (2012) apresentam, implicitamente, tratamento numérico para encontrar frações equivalentes a cada uma das frações apresentadas nas operações, de maneira a obter denominadores iguais, como por exemplo na operação de adição $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$, conforme Figura 10.

Figura 10 – Adição de frações com denominadores diferentes.

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3} &= \frac{2}{6}\\[2ex] \frac{1}{2} &= \frac{3}{6}\end{aligned}\right\} \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}, \text{ então } \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p.186

Notamos que ao substituírem as frações $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ pelas suas respectivas frações equivalentes $\frac{2}{6}$ e $\frac{3}{6}$, Andrini e Vasconcellos (2012) encontram sua soma $\frac{5}{6}$ e, retomam as frações iniciais escrevendo $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$. Chamamos a atenção para a relevância desse procedimento, pois, a soma $\frac{5}{6}$ refere-se ao mesmo objeto matemático, de $\frac{2}{6}+\frac{3}{6}$ e de $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$.

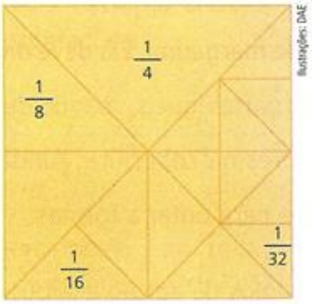
Andrini e Vasconcellos (2012) afirmam que o livro propõe

> […] temas e sua exercitação por meio de problemas, valorizando estratégias diversificadas de resolução, a compreensão e aplicação de conceitos, o uso adequado de procedimentos e análise da solução obtida e […] visam à constante retomada e ampliação de conceitos e maior facilidade na representação e nas operações com esses números (p. 5).

Contudo, percebe-se que alguns dos exercícios propostos não “valorizam estratégias diversificadas de resolução”, nem “a compreensão e aplicação de conceitos” pelo aluno, como o da Figura 11, por exemplo, pois, os autores ao apresentarem o tangram identificam algumas de suas partes por meio de frações, o que não oportunizou ao aluno por si só reconhecer e representar cada parte na sua representação fracionária.

Figura 11 – Adição de frações, a partir de uma representação figural.

45 Utilizando a figura, calcule e apresente cada um dos resultados na forma de uma fração simplificada:



a) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ | 1 e) $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ f) $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

c) $\frac{1}{16} + \frac{1}{16}$ $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ g) $\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$

d) $\frac{1}{32} + \frac{1}{32}$ $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ h) $\frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32} + \frac{1}{32}$

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p.185

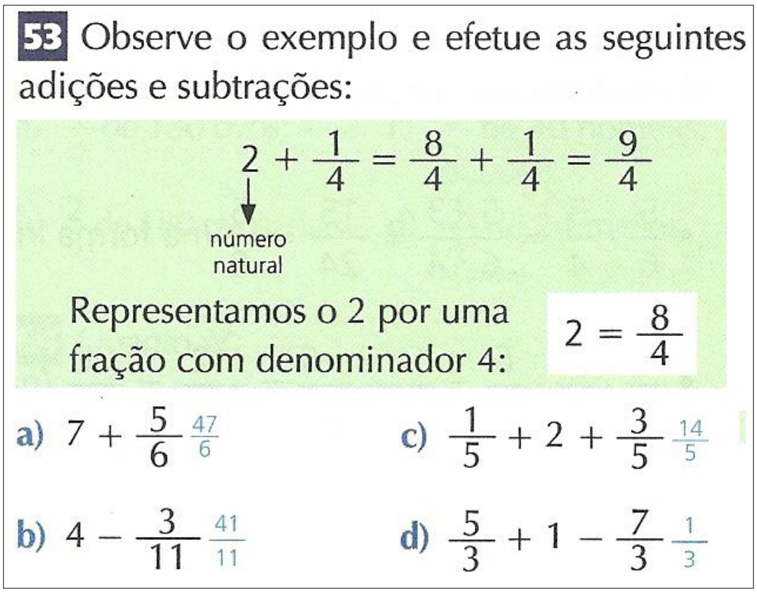
Entende-se que a utilização da língua natural e o manuseio de representações figurais concretas do tangram poderão levar os alunos a tirar suas próprias conclusões e, assim, efetuar as adições propostas.

Observa-se que nesse capítulo, a ideia de fração como um quociente não foi discutida, ainda que se tenha abordado $\frac{12}{3} = 4$, pois, os autores justificam as representações por meio da ideia parte-todo, ou seja, utilizando representação figural e, explicitando que a fração pode ser escrita como uma quantidade inteira, nesse caso, quatro inteiros, não se remetendo à utilização do algoritmo da divisão.

Sugerem, ainda, o caminho inverso, a partir do questionamento: “como você representaria 2 inteiros usando uma fração de denominador 5?”. Porém, a transformação de quantidades inteiras para a sua forma fracionária não foi explorada, neste capítulo.

Diante dessa observação, o exercício 53 (Figura 12) chama atenção ao propor operações de adição e subtração de frações com denominadores diferentes, sugerindo tratamento fracionário, realizando inicialmente atividade de conversão de representações decimais para sua representação fracionária, de maneira a obter frações com denominadores iguais, conforme exemplo dado.

Figura 12 – Operações: conversão da representação decimal, número natural, para a representação fracionária.



53 Observe o exemplo e efetue as seguintes adições e subtrações:

$$2 + \frac{1}{4} = \frac{8}{4} + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

2 ↓ número natural

Representamos o 2 por uma fração com denominador 4: $2 = \frac{8}{4}$

a) $7 + \frac{5}{6}$ $\frac{47}{6}$

b) $4 - \frac{3}{11}$ $\frac{41}{11}$

c) $\frac{1}{5} + 2 + \frac{3}{5}$ $\frac{14}{5}$

d) $\frac{5}{3} + 1 - \frac{7}{3}$ $\frac{1}{3}$

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 187

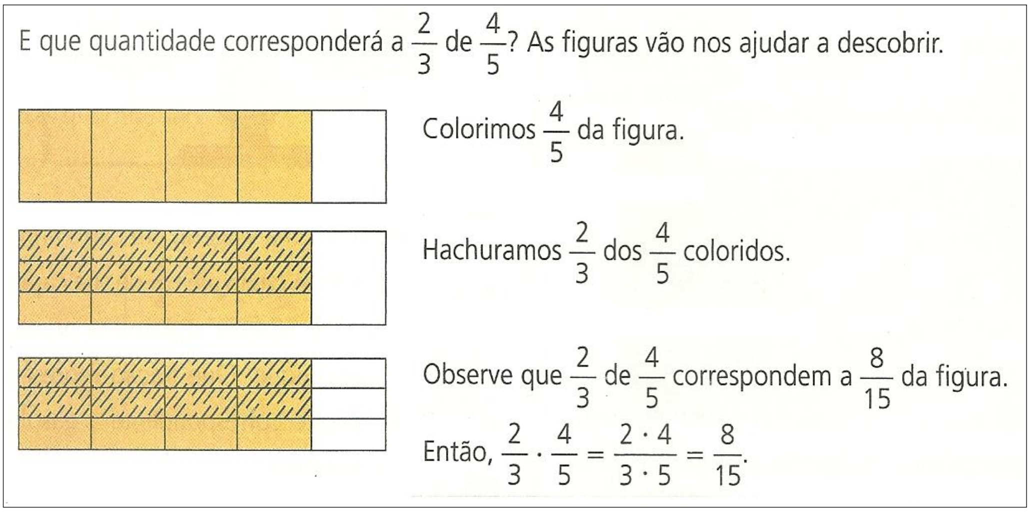
Para Andrini e Vasconcellos (2012), parece evidente que alunos não tenham dificuldades em “substituir” uma representação decimal, número natural, assim indicado em língua natural, no exemplo apresentado, por uma fração com o mesmo denominador de fração que aparece nas adições e subtrações. O que é enganoso, uma vez que “uma simples mudança na escrita é suficiente para exibir propriedades diferentes do objeto, mesmo se for mantida a mesma referência” (DUVAL, 2012b, p. 99). Assim, as representações 2 e $\frac{8}{4}$ têm natureza cognitiva distinta e, portanto, um “custo cognitivo” distinto para a atividade de transformação de conversão, de 2 para $\frac{8}{4}$.

Ressalta-se a consideração de que a execução de uma determinada atividade pode ser caracterizada em termos de "custo cognitivo". Assim, quando a atividade, ou uma parte dela, requer muitos recursos de processamento ou até a criação de esquemas mentais apropriados, considera-se que ela tem um custo cognitivo elevado. Por outro lado, se a execução de uma atividade é automatizada, exigindo pouco esforço mental, então, seu custo cognitivo é baixo.

Observa-se, ainda, que um trabalho metodológico, utilizando concomitantemente tais representações, pode favorecer a possibilidade de reconhecimento e substituição por outras representações, mas, não por meio de análise como empreendida no exercício pelos autores.

Ainda nesta obra, as operações de multiplicação e divisão de frações são abordadas utilizando, simultaneamente, representações em língua natural e figural (Figura 13 e 14).

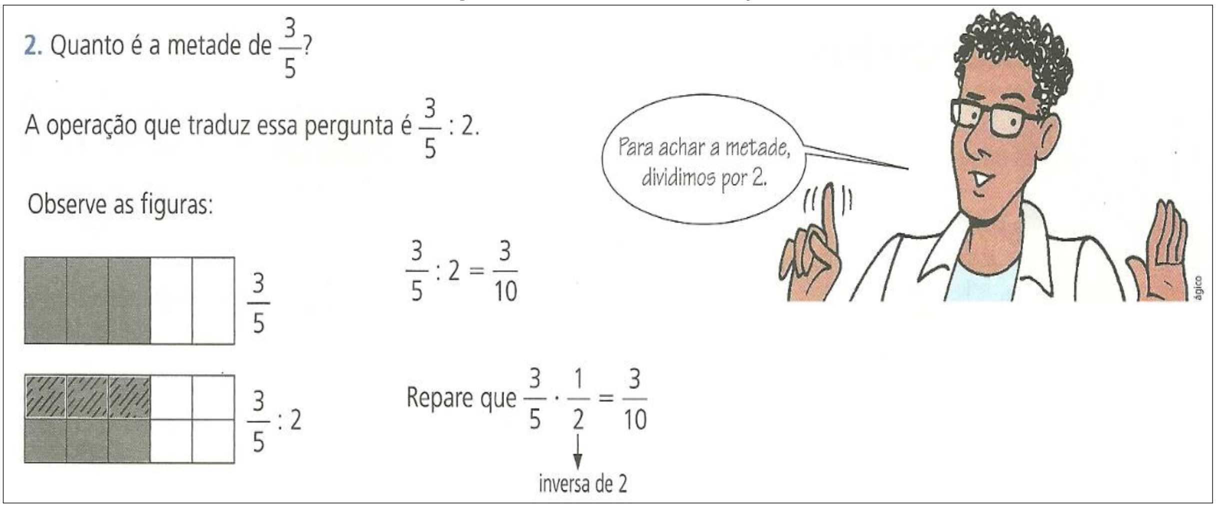
Figura 13 – Multiplicação de frações.



Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p.188.

Assim, regras em língua natural são apresentadas para realizar tratamento numérico: na multiplicação de frações, “multiplicamos os numeradores e multiplicamos os denominadores e ainda, para efetuar divisões envolvendo frações, multiplicamos o dividendo pela inversa do divisor” (Cf. ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 190-191).

Figura 14 – Divisão de frações.


2. Quanto é a metade de $\frac{3}{5}$?

A operação que traduz essa pergunta é $\frac{3}{5} : 2$.

Observe as figuras:

$\frac{3}{5}$

$\frac{3}{5} : 2$

$\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$

Repare que $\frac{3}{5} \cdot \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{inversa de 2}} = \frac{3}{10}$

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 191

Nos tratamentos numéricos que envolvem multiplicação de frações (Figura 15), Andrini e Vasconcellos (2012) sugerem que se encontre a fração irredutível da fração produto ou ainda, se possível, que se faça a simplificação antes de efetuar o produto, nomeando “esta técnica” de cancelamento.

Figura 15 – Tratamento numérico: multiplicação de frações.

- $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 6}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{12}{105} = \frac{4}{35}$ (na forma irredutível)

Também podemos fazer a simplificação antes de efetuar o produto:

- $\frac{18}{25} \cdot \frac{5}{12} = \frac{\cancel{18}^{3} \cdot \cancel{5}^{1}}{\cancel{25}_{5} \cdot \cancel{12}_{2}} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{3}{10}$

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 188.

Alguns exercícios propostos envolvendo operações de multiplicação de frações solicitam cálculo mental, e relacionam o “de” com a multiplicação, utilizando a língua natural e a representação numérica, como: “três caixas de vinte balas são 3.20 ou 60 balas”. Assim, neste contexto, representações figurais são apresentadas solicitando que sejam representadas por um produto de frações. No sentido inverso, encontramos apenas um exercício, o qual solicita que o aluno "mostre por meio de figuras que $\frac{1}{2}$ de $\frac{3}{4} = \frac{3}{8}$".

Com a finalidade de apresentar a regra de divisão de frações, "para efetuar divisões envolvendo frações, multiplicamos o dividendo pela inversa do divisor", Andrini e Vasconcellos (2012) trazem algumas situações em língua natural, articulando representações figurais e fracionárias, mostrando, por exemplo, que $\frac{1}{8}$ cabe 6 vezes em $\frac{3}{4}$, concluindo que "dividir $\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{8}$ é o mesmo que multiplicar por 8, que é a inversa de $\frac{1}{8}$".

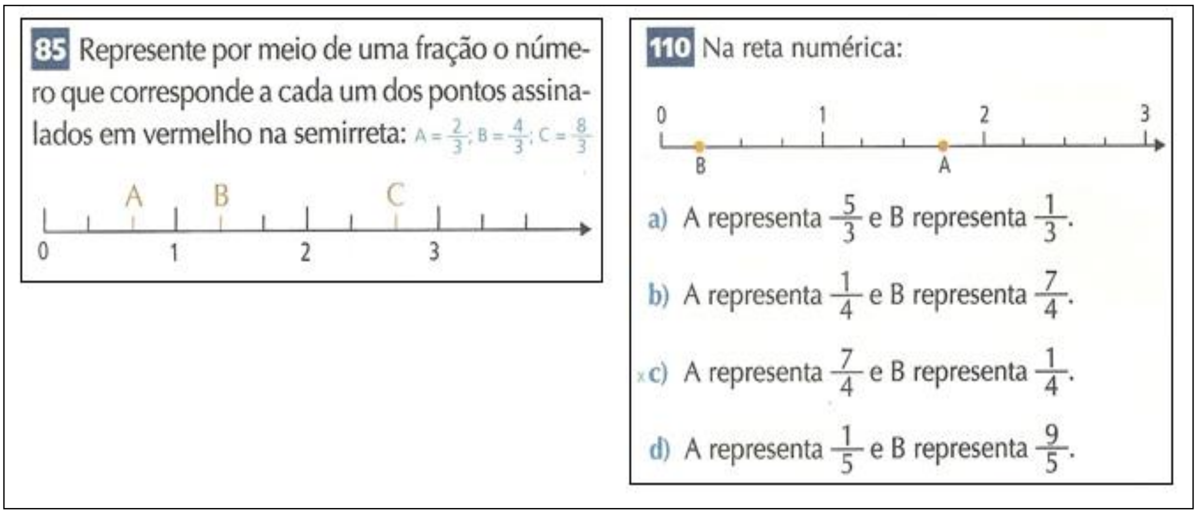
Nos demais exercícios que envolvem divisões de frações, solicitam que sejam resolvidos por meio de cálculo mental.

É requerido também que encontrem o quociente de divisões entre frações utilizando figuras. Exercícios em língua natural, por exemplo, "quantas metades há em cinco pizzas?", são investidos, nos quais solicitam por meio da expressão "faça um desenho", que utilizem representações figurais. Outros exercícios são empreendidos envolvendo multiplicação e divisão de frações, sugerindo tratamento fracionário (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 191-192).

Muitas vezes, os algoritmos das operações com frações são ensinados baseados unicamente em regras, sem dar importância aos tratamentos e, principalmente, às transformações de conversões de representações, passando despercebidas devido à ênfase dada aos processos mecânicos utilizados, não atentando para o que uma fração representa.

Ao longo da unidade 11, constata-se ainda que não foi abordada a utilização de representações de números racionais na reta graduada, entretanto, no final deste, são propostos os exercícios 85 e 110, conforme Figura 16, podendo levar alunos a apresentarem graus de dificuldades ou até a impossibilidade para resolvê-los (Cf. ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012).

Figura 16 – Utilização da reta graduada para representar frações.



85 Represente por meio de uma fração o número que corresponde a cada um dos pontos assinalados em vermelho na semirreta: $A = \frac{2}{3}$; $B = \frac{4}{3}$; $C = \frac{8}{3}$

A B C

0 1 2 3

110 Na reta numérica:

0 1 2 3

B A

a) A representa $\frac{5}{3}$ e B representa $\frac{1}{3}$.

b) A representa $\frac{1}{4}$ e B representa $\frac{7}{4}$.

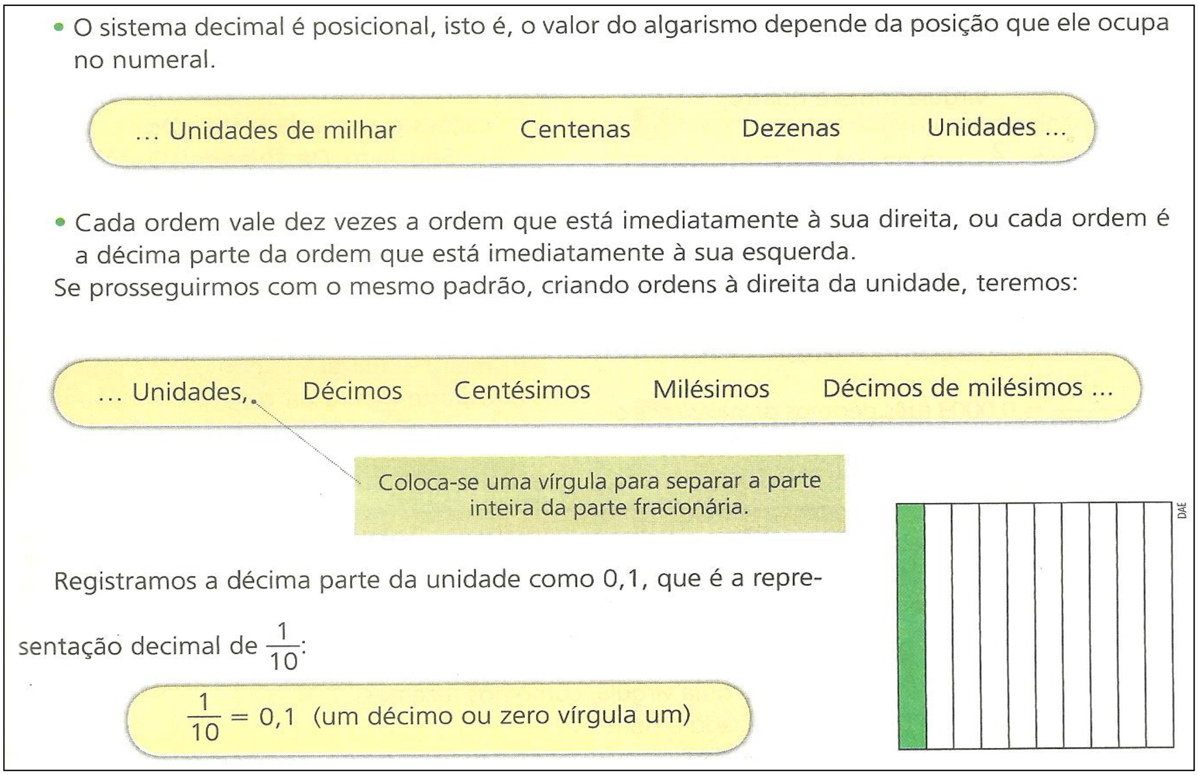
x c) A representa $\frac{7}{4}$ e B representa $\frac{1}{4}$.

d) A representa $\frac{1}{5}$ e B representa $\frac{9}{5}$.

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 194 e 197.

Na unidade 12, intitulado “Números decimais”, Andrini e Vasconcellos (2012) introduzem com o subtítulo “notação decimal”, indicando que o nosso sistema de numeração decimal, é posicional e de base dez. Utilizam a língua natural para indicar cada ordem, articulando com as representações, fracionária e figural, conforme a Figura 17.

Figura 17 – Sistema de numeração decimal posicional.



- O sistema decimal é posicional, isto é, o valor do algarismo depende da posição que ele ocupa no numeral.

… Unidades de milhar | Centenas | Dezenas | Unidades …

- Cada ordem vale dez vezes a ordem que está imediatamente à sua direita, ou cada ordem é a décima parte da ordem que está imediatamente à sua esquerda.

Se prosseguirmos com o mesmo padrão, criando ordens à direita da unidade, teremos:

… Unidades, | Décimos | Centésimos | Milésimos | Décimos de milésimos …

Coloca-se uma vírgula para separar a parte inteira da parte fracionária.

Registramos a décima parte da unidade como 0,1, que é a representação decimal de $\frac{1}{10}$:

$\frac{1}{10} = 0{,}1$ (um décimo ou zero vírgula um)

DAE

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 199.

Representam na sequência em língua natural, na forma fracionária e figural o 0,01 (Figura 18), mas não relacionam em nenhum momento com as representações indicadas anteriormente do 0,1, por exemplo, que 10 vezes 0,01 equivalem a 0,1, e, assim, seguem com outros exemplos.

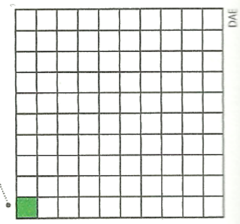
Figura 18 – Representações de ordens de uma unidade.

A centésima parte da unidade é representada, na notação decimal, por 0,01.

$\frac{1}{100} = 0{,}01$ (um centésimo ou zero vírgula zero um).

A milésima parte da unidade é representada, na notação decimal, por 0,001.

$\frac{1}{1\,000} = 0{,}001$ (um milésimo ou zero vírgula zero zero um).



Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 200.

Exemplificam a partir de frações decimais, sua representação decimal e em língua natural (Figura 19).

Figura 19 – Representações de um número racional.

$\frac{13}{10} = 1\frac{3}{10} = 1{,}3$ (um inteiro e três décimos ou um vírgula três)

parte inteira — parte fracionária

$\frac{249}{10} = 24\frac{9}{10} = 24{,}9$ (vinte e quatro inteiros e nove décimos ou vinte e quatro vírgula nove)

$\frac{34}{100} = 0{,}34$ (trinta e quatro centésimos ou zero vírgula trinta e quatro)

$\frac{302}{100} = 3\frac{2}{100} = 3{,}02$ (três inteiros e dois centésimos ou três vírgula zero dois)

$\frac{781}{1\,000} = 0{,}781$ (setecentos e oitenta e um milésimos ou zero vírgula setecentos e oitenta e um)

$\frac{3}{10\,000} = 0{,}0003$ (três décimos de milésimos ou zero vírgula zero, zero, zero, três)

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 200.

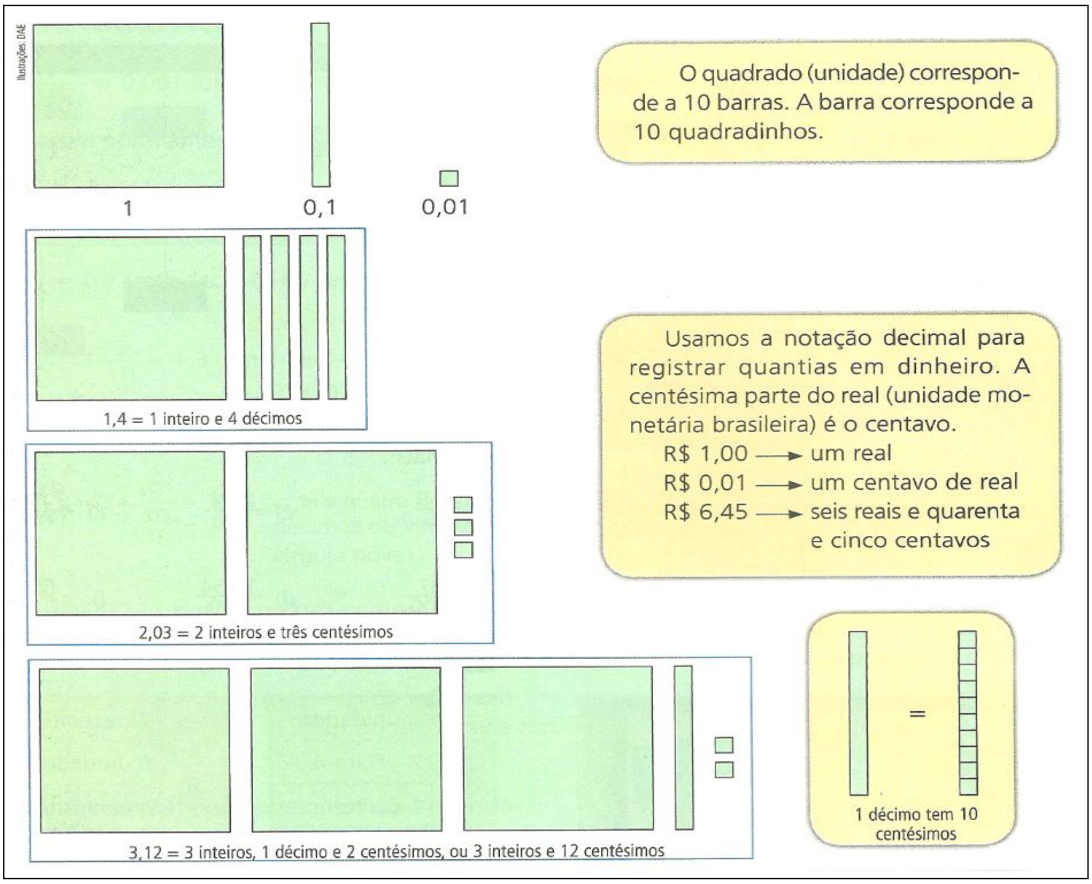
Entretanto, as igualdades apresentadas, nos exemplos da Figura 19, não são elementares para os alunos, como os autores parecem evidenciar. Ou seja, não há preocupação por parte dos autores de que os alunos compreendam o porquê, por exemplo, $\frac{13}{10} = 1\frac{3}{10}$, $\frac{249}{10} = 24\frac{9}{10}$ e $\frac{302}{100} = 3\frac{2}{100}$.

Na sequência, apresentam uma regra em língua natural para transformar frações decimais na sua forma decimal: “o número de casas à direita da vírgula é igual ao número de zeros da potência de dez que está no denominador da fração”.

A partir da página 202 do L1 é que os autores utilizam figuras para representarem “números decimais” (Figura 20), apresentando em língua natural, que o quadrado é a unidade, correspondente a 10 barras. E cada barra corresponde a 10 quadradinhos. Porém, a forma em que foram colocadas as representações figurais, representando 1, 0,1 e 0,01, poderá dificultar ao aluno estabelecer que a unidade equivale a dez décimos, que por sua vez equivalem a cem centésimos. Apenas a equivalência entre décimo e centésimo é explicitada, por meio de figura e em língua natural: “1 décimo tem 10 centésimos”.

Relacionam ainda, a notação decimal com o sistema monetário brasileiro.

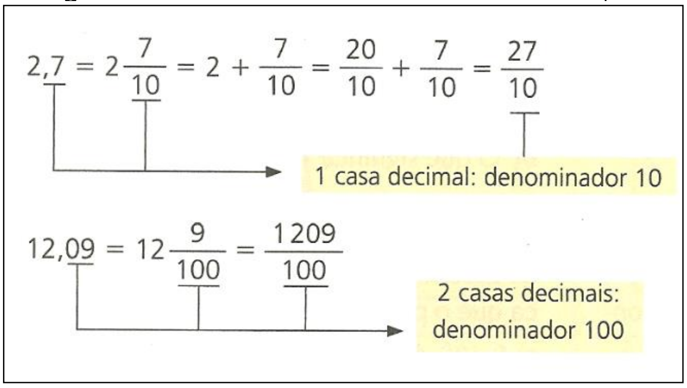
Figura 20 – Notação decimal por meio de figuras.



Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 202.

Andrini e Vasconcellos (2012), com o subtítulo “números decimais na forma de fração”, apresentam, por meio de tratamento numérico, como transformar, por exemplo, 2,7 e 12,09 em representações fracionárias, apresentando em língua natural uma regra quando se quer transformar uma representação decimal para sua forma fracionária: “o número de casas decimais é igual ao número de zeros do denominador da fração decimal” (Figura 21).

Figura 21 – Números decimais na forma de fração.



Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 206.

Ainda com base na Figura 21, observa-se, no primeiro exemplo, a conversão efetuada de 2 (dois inteiros) para $\frac{20}{10}$ (vinte décimos), no intuito de permanecer no registro fracionário, $\frac{20}{10}+\frac{7}{10}$, e assim justificar a equivalência entre a representação de partida 2,7 e a representação de chegada $\frac{27}{10}$.

No segundo exemplo, ficou implícita a transformação de 12 (doze inteiros) em $\frac{1200}{100}$ adicionados $\frac{9}{100}$, resultando $\frac{1209}{100}$.

Entende-se que para compreender tais transformações, antes de tudo, deve-se entender a estrutura do sistema de numeração decimal (SND). Contudo, Andrini e Vasconcellos (2012) parecem insistir em que os alunos realizem as transformações relacionando quantidade de casas decimais com denominadores 10, 100...

A equivalência entre as frações decimais $\frac{3}{10}$, $\frac{30}{100}$, $\frac{300}{1000}$, $\frac{3000}{10000}$,... é justificada pelos autores em língua natural: “multiplicando o numerador e o denominador de uma fração pelo mesmo número natural, obtem-se uma fração equivalente a ela.” Desse modo, concluem a equivalência também na forma decimal: 0,3 = 0,30 = 0,300 = 0,3000 = ... (Cf. ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012).

De fato, conforme a estrutura do SND (base dez e valor posicional), tem-se que 0,1 (um décimo) equivale a 0,10 (dez centésimos), que equivalem 0,100 (cem milésimos), e assim por diante. É nesse sentido, que os autores colocam: “podemos acrescentar ou retirar zeros à direita da parte decimal de um número decimal sem alterá-lo” (Cf. ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 206).

Para comparar números como 1,57 e 1,45, os autores propõem que se comparem as ordens das representações: “para descobrir qual entre dois números decimais é maior, comparamos primeiro a parte inteira: 1 = 1. Como houve igualdade, comparamos os décimos 5 > 4. Pronto! 1,57 > 1,45.”

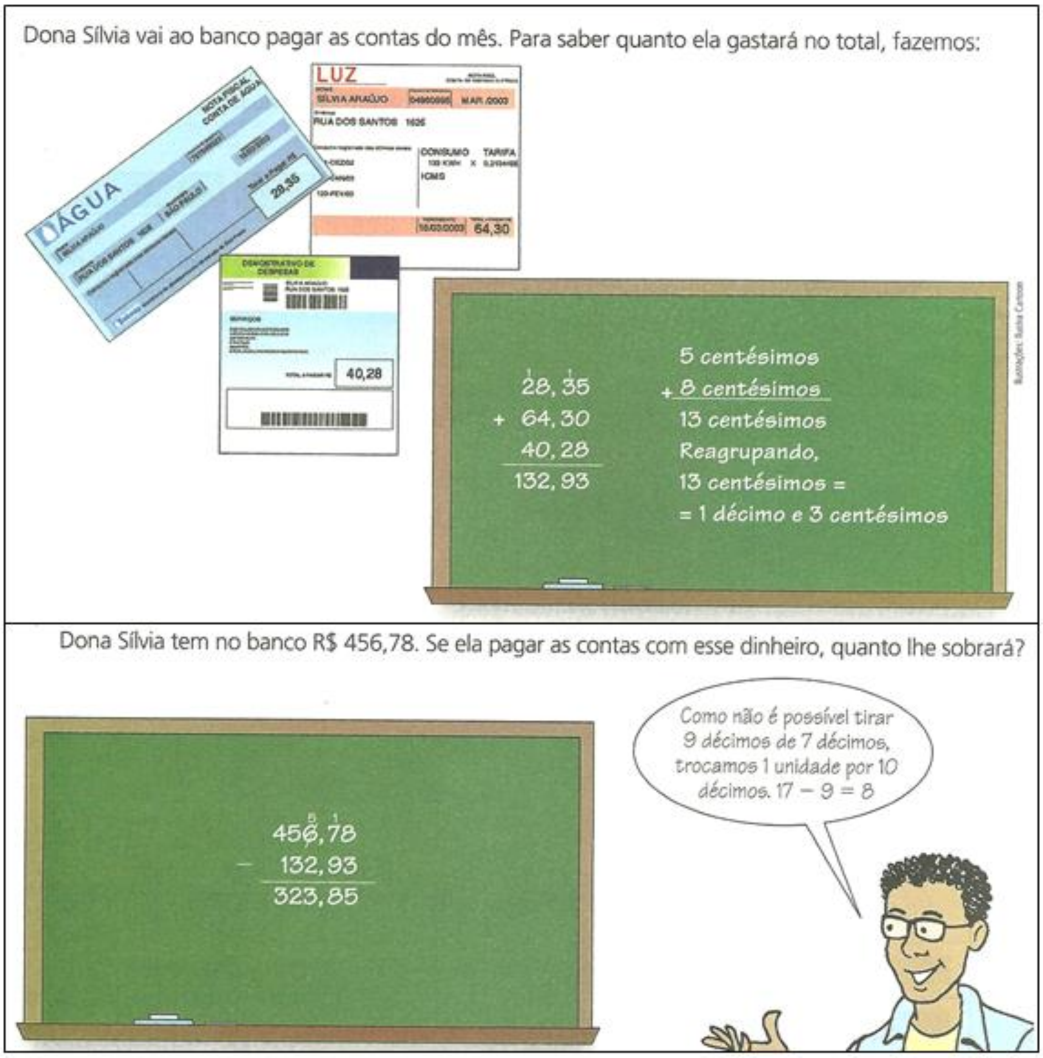
Observa-se, que a partir dessa proposta, um desprezo às regras do SND, pois, bastava comparar 57 centésimos com 45 centésimos, uma vez que as partes inteiras são iguais.

Vale destacar que, nesta unidade, não foram abordadas comparações entre representações decimais e fracionárias.

Na abordagem de "adição e subtração de números decimais", Andrini e Vasconcellos (2012) apresentam, em língua natural, que "devemos somar centésimos com centésimos, décimos com décimos, unidades com unidades e assim por diante", e acrescentam que "isso fica mais fácil se colocarmos vírgula embaixo de vírgula".

Dessa forma, exemplificam as operações por meio de duas situações, explicitando procedimentos de reagrupamentos entre as ordens para a realização da adição e da subtração (Figura 22).

Figura 22 – Adição e subtração de números decimais.



Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 208.

Observa-se, ainda, um exemplo envolvendo a subtração 8 – 0,94, apresentado pelos autores, que para realizá-la, sugerem que “podemos acrescentar zeros à direita da parte decimal, para visualizar melhor o que se passa nas adições ou subtrações” e descrevem (Figura 23):

Figura 23 – Subtração de números decimais.

$$8 - 0{,}94 = ? \qquad \begin{array}{r} 8{,}00 \\ -\ 0{,}94 \\ \hline 7{,}06 \end{array}$$

$$8 = 8{,}00$$

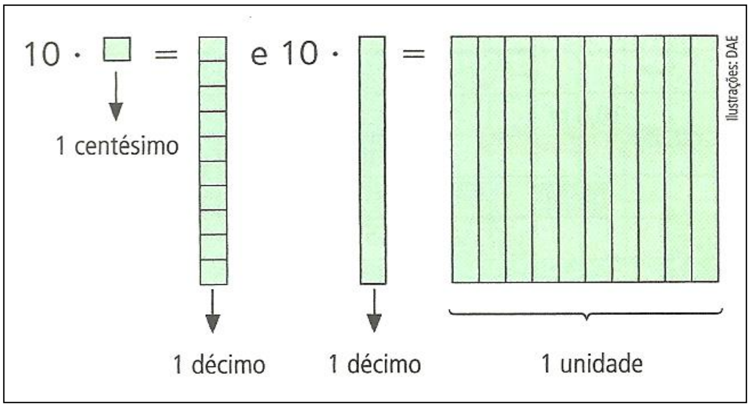
Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 208.

Fica evidente que Andrini e Vasconcellos (2012), na sua sugestão, se referem em acrescentar zeros à direita da “parte inteira”, pois, o 8 corresponde à parte inteira e, não à parte decimal. Este equívoco de linguagens poderá gerar aos alunos confusões, sobretudo, dificuldades em distinguir partes maiores ou menores que um.

Ainda com base na sugestão de Andrini e Vasconcellos (2012), considera-se que para justificar que 8 = 8,00, talvez seria relevante apresentar o valor posicional das unidades (8 unidades), dos décimos (0 décimo) e dos centésimos (0 centésimo), e não simplesmente justificar o “acréscimo” de zeros como um facilitador na visualização para realizar operações.

A abordagem da multiplicação de decimais é introduzida com o subtítulo “Multiplicando por 10, 100, 1000 ...”, apresentando as seguintes perguntas: “quanto é 10.0,01? E 10.0,1? Respondem realizando, inicialmente, a operação de multiplicação, utilizando representações decimais, figurais e a língua natural, conforme Figura 24.

Figura 24 – Quanto é 10 . 0,01? E quanto é 10 . 0,1?



Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 210.

Na sequência, efetuam as operações 10 . 0,01 e 10 . 0,1 “usando frações” (Figura 25), mas antes disso, convertem as representações 0,01 e 0,1 em $\frac{1}{100}$ e $\frac{1}{10}$, respectivamente, procedendo com tratamento fracionário. Todavia, finalizam tais procedimentos com representações decimais para assim justificar que 10.0,01 = 0,1 e que 10.0,1 = 1.

Figura 25 – Usando frações: quanto é 10 . 0,01? E quanto é 10 . 0,1?

Usando frações:

$$10 \cdot 0{,}01 = 10 \cdot \frac{1}{100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$10 \cdot 0{,}1 = 10 \cdot \frac{1}{10} = \frac{10}{10} = 1$$

Fonte: Praticando Matemática: 6º ano, p.210.

No L1, faz-se também menção ao nosso sistema de numeração que é decimal, explicitando em língua natural que “fazemos grupos de dez: 10 vezes 1 centésimo resulta 1 décimo”, da mesma forma 10 vezes 1 décimo resulta 1 unidade, e assim por diante.

Sugerem ainda, nessa seção (p. 210), que seja utilizada a calculadora para multiplicar um número decimal qualquer por 10, verificando “o que aconteceu com a posição da vírgula”. Andrini e Vasconcellos (2012) esperam que se responda: “deslocou-se uma posição para a direita”.

Assim, ressaltam que “quando multiplicamos por 10, os centésimos passam a ser décimos, e os décimos, a ser unidades. Na prática, isso equivale a deslocar a vírgula uma casa para a direita”.

A partir disso, explicitam uma regra geral, “que para multiplicar por: 100, deslocamos a vírgula duas casas para a direita; 1 000, deslocamos a vírgula três casas para a direita; 10 000, deslocamos a vírgula quatro casas para a direita, e assim por diante”.

Contudo, acrescentam outro procedimento para efetuar a multiplicação de números decimais por 10, por exemplo, conforme a Figura 26.

Figura 26 – Multiplicação de números decimais por 10 utilizando sua forma fracionária.

- $0{,}47 \cdot 10 = \dfrac{47}{100} \cdot 10 = \dfrac{47 \cdot \overset{1}{\cancel{10}}}{\underset{10}{\cancel{100}} \cdot 1} = \dfrac{47}{10} = 4{,}7$

- $18{,}5 \cdot 10 = \dfrac{185}{10} \cdot 10 = \dfrac{185 \cdot \cancel{10}}{\cancel{10} \cdot 1} = 185$

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 210.

Da mesma forma, trazem uma regra geral em língua natural, quando se quer efetuar divisões por 10, 100, 1000: “dividir por 10 equivale a deslocar a vírgula uma casa para a esquerda; por 100, deslocamos a vírgula duas casas para a esquerda; por 1000, deslocamos a vírgula três casas para a esquerda, e assim por diante”, pois “quando dividimos por 10, as unidades passam a ser décimos, décimos passam a ser centésimos e assim por diante”.

Apresentam outra forma de efetuar divisões de números decimais por 100, por exemplo, transformando 21,4 para sua forma fracionária (Figura 27).

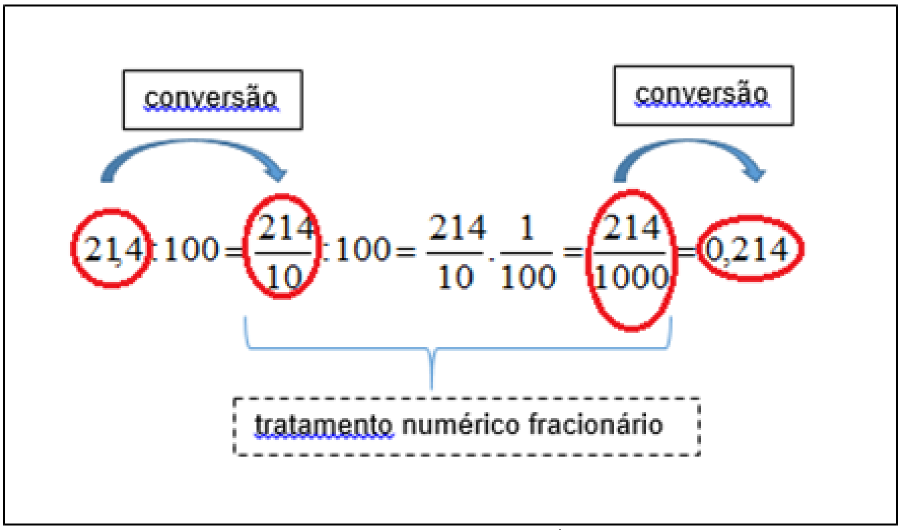
Figura 27 – Divisão de números decimais por 100 utilizando sua forma fracionária.

$$\bullet\ 21{,}4 : 100 = \frac{214}{10} : 100 = \frac{214}{10} \cdot \frac{1}{100} = \frac{214}{1\,000} = 0{,}214$$

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 211.

De acordo com a Figura 27, pode-se observar as seguintes transformações cognitivas realizadas (Figura 28):

Figura 28 – Divisão de números decimais, utilizando sua forma fracionária: tratamentos e conversões.



Fonte: Autores da pesquisa.

A partir dos procedimentos de resolução apresentados pelos autores, pode-se inferir a utilização de técnicas para efetuar a divisão 21,4 : 100, conforme apresentadas anteriormente.

A multiplicação entre representações decimais (p. 212) é apresentada por meio do exemplo: 1,6 **.** 9,64, donde ressaltam que deve-se contar quantas casas decimais tem cada fator (1,6 e o 9,64), indicando que o seu produto 15,424 deve ter três casas decimais, de acordo com a soma da quantidade de casas decimais dos fatores.

Andrini e Vasconcellos (2012) abordam a “divisão de números naturais com quociente decimal” (p. 215), apresentando em língua natural o seguinte enunciado: “suponha que tenhamos uma corda com 31 metros de comprimento e precisemos cortá-la em 5 pedaços de mesmo comprimento”. Representam o enunciado explicitando que “a operação a ser realizada é 31 : 5”, realizando o algoritmo da divisão.

Já na “divisão de números decimais” (p. 216), exemplificam 2,4 : 1,6, afirmando que “se multiplicarmos 2,4 por 10 e 1,6 por 10, o quociente não se altera e ficamos com uma divisão de números naturais”. Assim, 2,4 : 1,6 = 24 : 16 = 1,5, ou seja, o 16 “cabe” uma vez e meia em 24, o que ocorre também em 2,4 : 1,6 = 1,5, pois se observarmos 1,6 “cabe” uma vez e meia em 2,4.

Apresentam ainda, o exemplo 0,8 : 0,004 = 800 : 4 = 200, ressaltando que “o quociente de dois números decimais pode ser um número natural”, entretanto, tal afirmação não é discutida, por exemplo, que o 200 corresponde ao número de vezes que 0,004 cabe em 0,8. Vale esclarecer que não se trata de sempre ter que justificar procedimentos de resolução, mas sim, explicar, nesse caso, o que o 200 representa como resultado.

Finalizam este capítulo abordando, superficialmente, a representação decimal “dízima periódica”, por meio do algoritmo da divisão de 5 por 11, apresentando o resultado “5 : 11 = 0,454545...”.

Percebe-se que os exercícios que envolvem operações de adição, subtração, multiplicação e divisão são propostos apenas no registro de representação decimal, como por exemplo o da Figura 29. Dessa forma, não se propõem articulação com representações fracionárias, podendo levar o aluno a permanecer enclausurado num só registro, dificultando o reconhecimento e a coordenação de outras representações de um mesmo número racional.

Figura 29 – Operações com apenas representações decimais.

64 Calcule o valor das expressões:

a) $5{,}06 + 0{,}1 - 4{,}972$ 0,188

b) $3{,}5 : 0{,}2 - 0{,}08 : 0{,}8$ 17,4

c) $3{,}8 - 1{,}7 + 1{,}5 : 0{,}5$ 5,1

d) $5 \cdot 1{,}6 - (2{,}18 \cdot 0{,}4 - 0{,}36)$ 7,488

e) $(6 \cdot 1{,}2 - 5 \cdot 0{,}8) - (5 - 2 \cdot 1{,}9)$ 2

Fonte: Praticando Matemática, 6º ano, p. 217.

Constata-se, por meio desta pesquisa, que no L1 há uma predominância na utilização de técnicas mecânicas, tanto nos tratamentos como também nas conversões entre representações semióticas de números racionais.

2.3.2 Coleção Praticando Matemática – L2: 7º ano

Neste tópico, é apresentada a unidade 2, intitulada “Frações e números decimais”, conforme Figura 30.

Figura 30 – Sumário 2.

SUMÁRIO

Unidade 1
Números naturais
1. A sequência dos números naturais 7
2. Representação na reta e comparação de números naturais.......10
3. Leitura e escrita.................................10
4. Múltiplos e divisores..........................12
5. Mínimo múltiplo comum e máximo divisor comum 17

Unidade 2
Frações e números decimais
1. Fração e divisão 25
2. Frações equivalentes 31
3. Frações e números decimais na reta numérica 34
4. Expressões numéricas........................36
5. Potenciação e raiz quadrada de números decimais 39
6. O tempo e suas medidas...................42

Unidade 3
Números negativos
1. Onde encontramos números negativos? 55
2. Comparando números 58
3. Reta numérica...................................60
4. Distâncias na reta numérica................61
5. Adição envolvendo números negativos..63
6. Subtração envolvendo números negativos..67
7. Simplificando registros 68
8. Multiplicação com números negativos..71
9. Divisão envolvendo números negativos..74
10. Potenciação com base negativa..........76
11. Raiz quadrada 78
12. Expressões numéricas 80

Unidade 4
Proporcionalidade
1. O que é grandeza? 87
2. Escalas, plantas e mapas 92
3. Aplicações das razões........................96
4. Grandezas diretamente proporcionais...................................100
5. Grandezas inversamente proporcionais...................................104

Unidade 5
Razões e porcentagens
1. Porcentagens: representação e cálculo...115
2. Calculando o percentual 118
3. Da parte para o todo 120
4. Cálculo direto de descontos e acréscimos 122

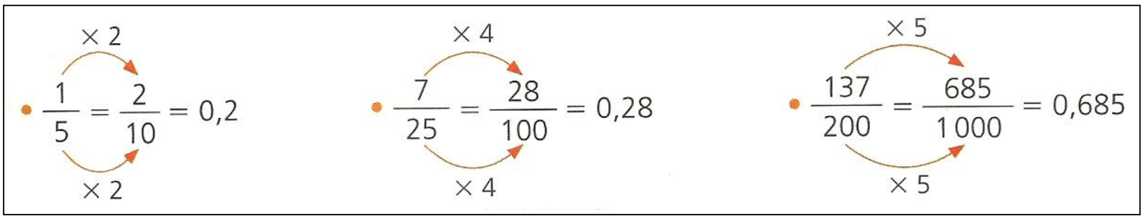
Fonte: Praticando Matemática, 7º ano.

Andrini e Vasconcellos (2012) iniciam essa unidade com o subtítulo “Fração e divisão”, abordando frações no significado quociente, trazendo formas de representar um mesmo número, como: $\frac{1}{8}=1:8=0{,}125$. E apresentam, ainda, o sentido de conversão inversa, $0{,}125=\frac{125}{1000}=\frac{1}{8}$, pontuando “você percebeu que transformamos o número decimal em fração decimal (denominador 10, 100, 1000 etc? Depois, como foi possível, simplificamos a fração.”, Aqui, parece que os autores estão se referindo à regra apresentada no volume 6, livro do 6º ano, em que faz menção à conversão de representações decimais em frações decimais, observando a quantidade de casas decimais. Parece ainda, que esperam que os alunos cheguem nesse ano, com essa regra mecânica memorizada.

Ainda nesta seção, sugerem descobrir qual das frações é a maior, $\frac{33}{25}$ e $\frac{49}{40}$, primeiramente, transformando cada fração, na sua forma decimal, 1,32 e 1,225, utilizando a calculadora, e, na sequência comparando as partes inteiras e os décimos: “como a parte inteira dos dois números decimais é igual a 1, vou comparar a parte decimal: 3 décimos é maior que 2 décimos. Então, 1,32 > 1,225”. E retomam as frações concluindo, $\frac{33}{25}>\frac{49}{40}$.

Nesta unidade, frações equivalentes são retomadas, apresentando em língua natural o tratamento numérico: “para obtê-las, basta multiplicar o numerador e denominador da fração pelo mesmo número natural diferente de zero” (p. 31). Nesta abordagem, Andrini e Vasconcellos (2012) trazem a representação decimal das frações equivalentes, conforme a Figura 31:

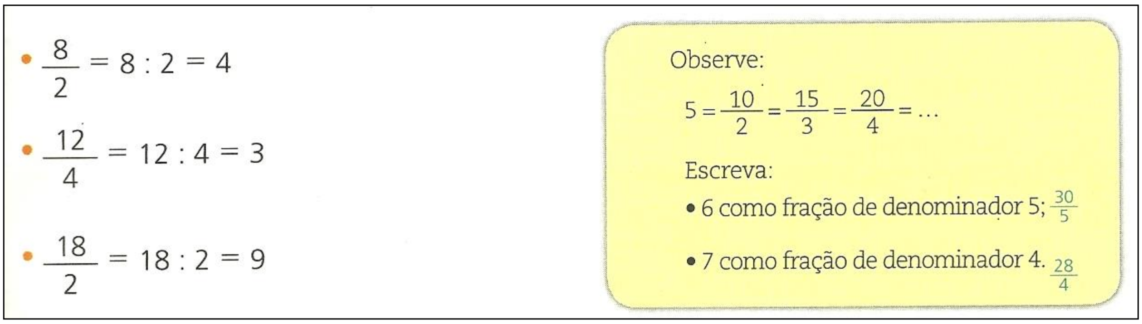
Figura 31 – Frações equivalentes na sua forma decimal.



Fonte: Praticando Matemática, 7º ano, p.31.

Pontuam que existem, também, frações que representam números naturais (Figura 32).

Figura 32 – Frações que representam números naturais.



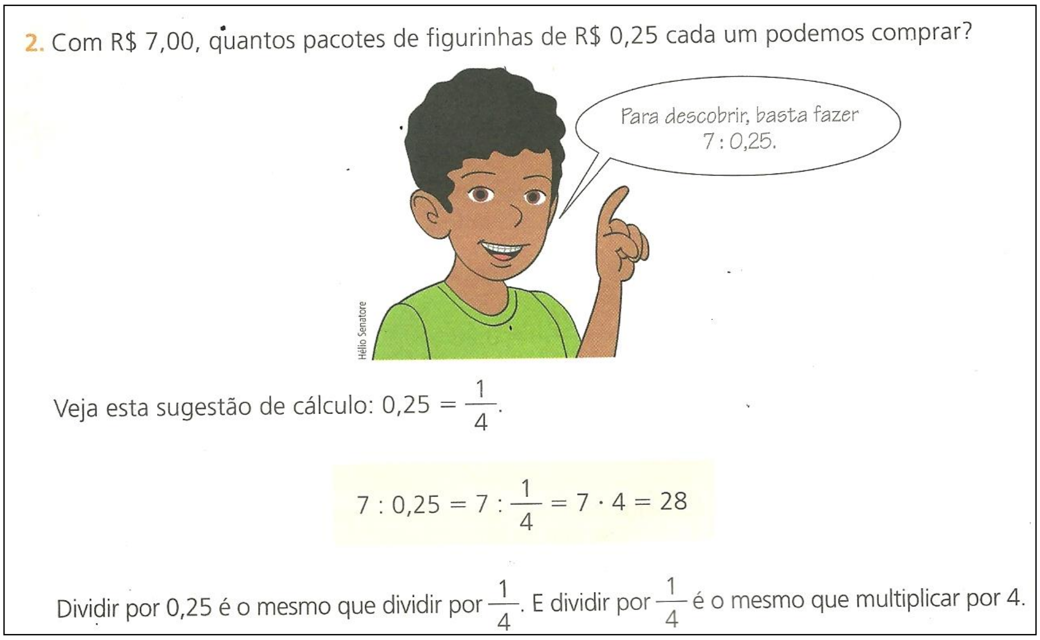
Fonte: Praticando Matemática, 7º ano, p.31.

Sugerem ainda, o sentido inverso, ou seja, a partir de um número natural, encontre sua representação fracionária conhecendo o denominador, conforme a Figura 32.

Retomam tratamentos numéricos como a simplificação de frações, "dividindo numerador e denominador por um divisor comum a eles", para encontrar a fração na "forma irredutível" (p. 31).

Entretanto, apresentam em língua natural uma situação-problema, sugerindo que os alunos efetuarão a divisão de 7 por 0,25, sem dificuldades ou retomadas, e que a atividade cognitiva de conversão seja naturalmente realizada, quando colocam $0{,}25 = \frac{1}{4}$ (Figura 33). Dessa forma, Andrini e Vasconcellos (2012) parecem acreditar que alunos reconhecerão, conforme sentido apresentado $0{,}25 \rightarrow \frac{1}{4}$, que as duas representações se referem ao mesmo número racional, "porém, mais frequente, a atividade de conversão é menos imediata e menos simples do que se tende a crer" (DUVAL, 2009, p. 64).

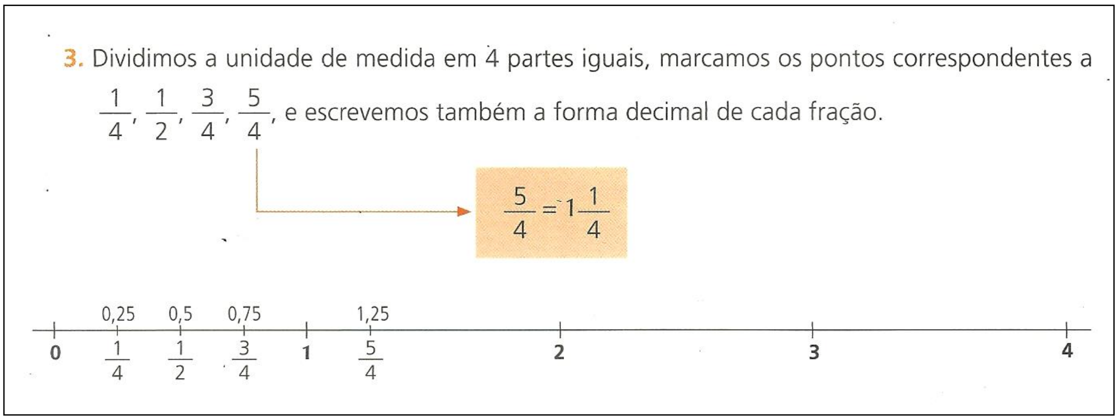
Figura 33 – Atividades cognitivas não espontâneas



Fonte: Praticando Matemática, 7º ano, p. 32

Números racionais representados na forma fracionária $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ e $\frac{5}{4}$ e na sua forma decimal 0,25, 0,5, 0,75 e 1,25, também são representados como pontos na reta numérica, de acordo com a Figura 34.

Figura 34 – Números racionais representados na reta numérica.



Fonte: Praticando Matemática, 7º ano, p. 34

Ainda, nesta seção, Andrini e Vasconcellos (2012) solicitam que os alunos respondam qual seria o procedimento para localizar 3,74 na reta numérica, e esperam como resposta que “seria dividir a unidade de medida em 100 partes iguais. Cada parte representa 1 centésimo”.

São poucos os exercícios propostos nesta unidade, que envolvem operações de adição, subtração, multiplicação e divisão em que são articuladas representações fracionárias e decimais.

Observa-se que os autores não propõem uma retomada sobre operações com representações decimais e operações com representações fracionárias, e não exploram, ao longo deste capítulo, operações que envolvem as duas representações simultaneamente, entretanto, propõem exercícios neste contexto, envolvendo cálculos mentais e expressões numéricas (p. 37-38).

Nesse sentido, faz-se sempre necessário que o professor tenha um olhar atento, reflexivo e crítico sobre o livro didático que utilizará para sua ação pedagógica, pois, não necessariamente, o que o autor descreve favorece o trabalho metodológico do professor e, sobretudo, a aprendizagem dos alunos.

Desse modo, o professor poderá procurar outros recursos para preparar a aula e, também, analisar o livro de tal forma que reconheça nele limitações e falhas para que estas não sejam repassadas aos seus alunos.

Este estudo preliminar, de representações semióticas de números racionais no livro didático, deu suporte para o planejamento de questões a serem propostas ao grupo de professores. Pontua-se que as atividades foram planejadas e pensadas de acordo com os estudos e discussões estabelecidas no grupo. Será apresentado com mais detalhes na sessão 2.4.

2.4 As atividades matemáticas

Visando alcançar o objetivo da pesquisa, analisar manifestações verbais e escritas de um grupo de professores de Matemática dos anos finais do ensino fundamental sobre possíveis dificuldades de alunos na mobilização de registros de representação semiótica de números racionais, em atividades matemáticas, envolvendo variados registros de representação semiótica de números racionais, foi trazido para estudos com o grupo de professores regentes, que deram condições tanto a pesquisadora, como também aos participantes, de levantarem discussões sobre a questão investigada, pois,

> […] a utilização de diferentes registros de representação semiótica é uma maneira didática/metodológica que o professor pode usar quando ele busca a conceitualização, a aquisição do conhecimento. Mas é importante lembrar que o essencial não são os registros de representação que estão sendo utilizados, mas a maneira como estão sendo utilizados (DAMM, 2012, p. 175-176).

Dessa forma, a exploração de tratamentos e conversões de diferentes registros de representação semiótica de números racionais é de fundamental importância, pois, conforme Damm (2012) “quanto maior for a mobilidade com registros de representação diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão desse objeto” (p. 177), o que torna importante investigar como os professores se posicionam sobre a *maneira* como esses registros são mobilizados pelos alunos.

Nos estudos iniciais, foram selecionadas algumas atividades matemáticas sobre os números racionais e suas representações semióticas, entretanto o que determinaria as escolhas definitivas ou mesmo a (re)elaboração de atividades nesta perspectiva, seriam os professores, no decorrer das sessões de estudos.

Cada atividade matemática foi pensada, elaborada e fundamentada na TRRS, assim, foi iniciada cada sessão entregando aos professores até duas atividades para analisarem e levantarem possíveis dificuldades ou estratégias que alunos poderiam apresentar para a resolução das mesmas. Os professores, individualmente, registravam na própria atividade suas análises e em seguida partiram para discussões no grupo.

Na prática docente, se revelam as ações dos professores e alunos, seus conhecimentos mobilizados, o que deu e o que não deu certo nas atividades propostas, tanto em suas ações, como também, pontualmente, no objetivo desta pesquisa.

Assim, um caminho metodológico foi delineado, no qual estudos preliminares foram realizados no planejamento de atividades e na organização da elaboração de análises prévias (ver apêndices A ao K), sempre precedentes à realização de cada sessão de estudos com o grupo de professores participantes. Nessa perspectiva, buscou-se, por meio de planejamento, prever possíveis dificuldades e estratégias de alunos que o grupo poderia levantar com relação à atividade proposta e, ainda, possíveis questionamentos elaborados para que a pesquisadora pudesse trazer à tona, de acordo com a evolução das discussões desencadeadas em cada sessão.

As discussões ocorridas em cada sessão de estudos indicavam tanto que os estudos iniciais estavam no caminho, quanto à necessidade de um maior aprofundamento. A partir das imprevisibilidades surgidas e à medida que as discussões tomavam novos rumos concernentes aos tratamentos e conversões de representações de números racionais, é que se confirmava a necessidade dessa conexão entre as sessões de estudos ocorridas e o planejamento da sessão consecutiva, não perdendo de vista nosso objetivo de pesquisa.

Dessa forma, para planejar cada sessão de estudos, a pesquisadora foi conduzida num movimento de ir e vir em cada sessão ocorrida, analisando os áudios gravados, análises escritas de cada professor, algumas anotações, e ainda, era constantemente remetida aos estudos teóricos da TRRS e, ao estudo realizado por meio dos dois livros didáticos, apresentados no item 2.2.1, deste capítulo.

A pesquisadora esperava que, à medida que ocorressem as sessões de estudos, o interesse dos professores aumentasse em trazer atividades aplicadas em suas turmas e elaboradas por eles ou retiradas de livros didáticos, para juntos discutirem e analisarem. Porém, apesar dessa ação não ter ocorrido, vale ressaltar que os professores manifestaram interesse em aplicar, em suas turmas, a atividade que a pesquisadora levou para discussão no segundo encontro.

Entretanto, apenas duas professoras aplicaram em uma de suas turmas,[13] após o término dos encontros.

Na primeira sessão[14], conforme os relatos dos professores participantes desta pesquisa, originados a partir de uma questão motivadora, pode-se extrair elementos que nos direcionaram para uma organização e planejamentos de atividades para as próximas sessões, que nos deram subsídios para proceder as análises, bem como possível alcance de um objetivo maior.

2.5 A coleta de dados

A coleta de dados procedeu-se por meio de entrevistas semiestruturadas, gravações em áudio, análises escritas e observação participante. Ocorreu também durante as sessões de estudos realizadas com o grupo de professores, a fim de dar os devidos encaminhamentos nas análises.

Foi proposto ao grupo de professores, na primeira sessão, ocorrida no dia 2 de março de 2015, uma questão motivadora: relatar sobre acontecimentos e experiências com o ensino e aprendizagem dos números racionais na sala de aula, por ser imprescindível para uma aproximação do grupo com as intenções dos estudos da pesquisadora.

As entrevistas foram assumidas como um instrumento aberto, na qual sua estrutura se baseia em: “resposta livre, não-limitada por alternativas apresentadas, o pesquisado fala ou escreve livremente sobre o tema que lhe é proposto” (GOLDENBERG, 2004, p. 86). Assim, a postura do pesquisador requer “ter em mente que cada questão precisa estar relacionada aos objetivos de seu estudo. As questões devem ser enunciadas de forma clara e objetiva, sem induzir e confundir, tentando abranger diferentes pontos de vista” (ib. p. 87).

As entrevistas foram momentos em que os professores puderam se expressar sobre a relevância do estudo proposto:

[13] Não é foco desse estudo analisar atividades de alunos.
[14] Descreveremos a primeira e demais sessões no Capítulo III.

> [Professora Diana]
>
> Eu vejo assim: a gente vai trabalhando com o aluno os números naturais, inteiros, quando chega nos racionais, o aluno já apresenta dificuldade, é o que eu sinto na sala de aula. Eu trabalho também com oitavo e nono e fico preocupada, como vou agir, quando o aluno chega para mim com dificuldades (primeira sessão de estudos).

Foram as discussões do grupo, nessas entrevistas, que contribuíram para a elaboração das atividades do estudo, subsidiando direcionamentos para as dificuldades dos alunos na apreensão de números racionais, expressadas pelos professores participantes.

Em todos os encontros, foram utilizados quatro gravadores de áudio, posicionados na mesa de cada professor participante, recursos esses consentidos por meio de um termo de autorização.

As gravações são consideradas como um material imprescindível para a pesquisa, pois, permitem ouvi-las e transcrevê-las, possibilitando a realização das análises sobre o objeto de investigação, bem como no planejamento de novas atividades matemáticas.

As produções escritas pelos professores foram pontuadas nas próprias atividades que foram entregues em cada sessão de estudos. Elas serviram tanto como material de análise individual, como também de direcionamento do próprio professor no momento das discussões no grupo.

Nem todas as anotações dos professores foram verbalizadas pelos mesmos e também nem tudo o que eles discutiam estava nas anotações escritas. Dessa forma, as anotações e as gravações se complementavam para a coleta de dados produzidos pelos participantes.

As observações dos participantes foram realizadas por meio de anotações da pesquisadora no momento de troca no grupo, “consiste na participação real do pesquisador” (GIL, 2010, p. 121), não só na sua organização, mas, também assumindo a função de observador “pelo menos até certo ponto, o papel de membro do grupo” (ib., p. 121).

No próximo capítulo, serão apresentadas as análises dos dados coletados em cada sessão de estudos com o grupo de professores participantes, com foco nos objetivos empreendidos nesta investigação.

3 ANÁLISE DO MATERIAL COLETADO DURANTE AS SESSÕES DE ESTUDOS

Neste capítulo, foram analisados manifestações verbais e escritas de um grupo de professores de Matemática dos anos finais do ensino fundamental sobre possíveis dificuldades de alunos na mobilização de registros de representação semiótica de números racionais, em atividades matemáticas, com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval (1993, 2006, 2009, 2011a, 2011b, 2012a, 2012b, 2013) e ainda, em outros textos de pesquisadores (BRANDT; MORETTI, 2014); (MORETTI; THIEL, 2012); (DAMM, 2012); (D'AMORE, 2009); (COLOMBO, 2008); (BITTAR; FREITAS, 2005); (MORETTI, 2002).

As análises são apresentadas, conforme os estudos realizados com os quatro professores participantes da pesquisa: Diana, João, Rafaela e Suzy, e intencionam descrever as manifestações verbais e escritas destes professores sobre dificuldades de alunos na mobilização de registros de representação semiótica de números racionais em atividades matemáticas.

É importante ressaltar que não houve uma intencionalidade no olhar sobre a fala dos professores como indicativa de "erros" ou "acertos" no fazer matemático, com o conhecimento em jogo, mas sim, o despertar de outros olhares para o ensino dos números racionais em sala de aula, de forma que "nossa pesquisa possa se constituir em uma contribuição para a elaboração de futuras propostas curriculares oficiais e para as propostas curriculares que são construídas no interior das escolas" (COLOMBO, 2008, p. 59), por professores de matemática.

Analisar manifestações verbais e escritas de professores de matemática sobre dificuldades de alunos com números racionais, tendo como orientação suas representações semióticas, implica empreender uma análise de conhecimentos matemáticos mobilizados "e, consequentemente, da atividade matemática, suas produções e significados culturais e cognitivos, assim como das relações com o mundo que nos rodeia" (ib., p. 64). Dessa forma, a pesquisadora se posicionou com os professores interlocutores deste estudo.

Entende-se que, como eles se manifestam verbalmente ou por escrito sobre as dificuldades dos alunos em mobilizar diferentes sistemas semióticos de representação de números racionais em atividades matemáticas, pode ser representativo de outros professores de matemática.

Assim, o fio condutor de nossa análise é estudar a mobilização de registros de representação semiótica de números racionais, a partir do material produzido na pesquisa.

Desse modo, neste capítulo, são apresentadas as análises baseadas no material coletado em nove sessões de estudos, realizadas com o grupo de professores participantes.

Para primeira sessão de estudos, foi aberta uma discussão com os professores sobre suas experiências concernentes ao ensino e à aprendizagem de números racionais.

Na sequência, impulsionados pela primeira sessão e pelas subsequentes, foram apresentadas nove atividades matemáticas planejadas para as nove sessões de estudos, contemplando discussões sobre comparação, ordenação, localização na reta graduada de representações de números racionais.

3.1 Primeira sessão: uma questão motivadora

A sessão de estudos foi iniciada com uma questão motivadora direcionada ao grupo de professores participantes: relatar sobre acontecimentos e experiências com o ensino e aprendizagem dos números racionais na sala de aula; no intuito de gerar uma conversa para conhecer e identificar elementos sobre o que pensam em relação à aquisição de conhecimentos sobre números racionais.

Procurou-se, nesse momento, estabelecer um diálogo aberto e tranquilo, no qual todos os professores se sentiram à vontade em se pronunciar e trocar experiências.

Muitas discussões se estabeleceram, a partir disso, serão destacadas algumas considerações relevantes feitas pelo grupo para o objetivo desta pesquisa, bem como para um direcionamento quanto ao planejamento das atividades para as próximas sessões de estudos:

> [Professora Diana]
> A gente vai trabalhando com o aluno os números naturais, os inteiros, quando chega nos racionais[15], o aluno já apresenta dificuldade, tem mais resistência a eles. A gente sempre está elaborando atividades diferenciadas, que chamem a atenção deles, que não fiquem com medo do número, quando vê uma fração, um decimal finito e infinito. No 8º e 9º anos, você dá determinado conteúdo, beleza! Quando entra uma fração, aí o aluno fala: já vai complicar, já tem fração!
>
> [Professora Suzy]
> Eles (alunos) vêm desde o pré ao quinto ano trabalhando mais os naturais, então eles têm maior vivência do que com os racionais. Quando chega nos racionais aquilo é novo. Fica muito mais complicado a hora que você define os números racionais, como sendo **a** sobre **b**, com **a** pertencendo a Z e b pertencendo a Z asterisco[16]. Quando você coloca isso, ele não consegue associar que **a** sobre **b** é, por exemplo, dois quintos. Ele não consegue fazer essa ponte entre um e outro, entre a generalização e a fração em si.

Do ponto de vista da teoria de Duval, quando a professora Suzy na sua fala, utiliza os termos ‘associar’ e ‘fazer essa ponte’, isso nos indica que a mesma está se referenciando à dificuldade que alunos apresentam em “reconhecer” que a representação ($\frac{a}{b}$, $b \neq 0$, $a,b \in \mathrm{Z}$) do registro algébrico ou, ainda, que a representação (a sobre b, com a e b inteiros, e b diferente de zero) no registro da língua natural e a representação ‘dois quintos’ ($\frac{2}{5}$) do registro numérico fracionário referem-se ao mesmo objeto matemático, um número racional. De acordo com o autor,

> [...] o ensino de matemática é em geral organizado como se a coordenação de diferentes registros de representações introduzidas ou utilizadas fossem efetuadas rapidamente e espontaneamente, como se os problemas e custos ligados a não congruência não existissem (DUVAL, 2012a, p. 284).

---

[15] A professora está considerando como racionais, frações e representações decimais.
[16] Conjunto dos números inteiros não nulos.

De fato, há um custo cognitivo muito grande e complexo para a compreensão do registro algébrico. Assim, é ilusão acreditar que alunos reconhecerão naturalmente a equivalência entre as representações de sistemas semióticos tão diferentes, nesse caso, o simbólico numérico e o algébrico, em referência ao mesmo objeto matemático em jogo.

A atividade cognitiva de conversão é "[...] a primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática" (DUVAL, 2012a, p. 276), pois revela o que o autor chama de fenômeno de congruência ou não congruência semântica, o que vai determinar o sucesso ou insucesso de alunos na coordenação das representações semióticas.

A professora Rafaela complementa dizendo, *"eu acredito que eles (alunos) têm um impacto maior com relação às frações do que com os decimais, que estão mais presentes na vida deles. Acho que a fração assusta mais, eles têm mais dificuldades". Em concordância com a professora, o professor João enfatiza, "o decimal é número também, só tem uma vírgula ali no meio. O fracionário não, já modifica a característica. Então, o impacto é maior".*

Percebe-se que os professores, por meio de suas falas, consideram que alunos apresentam maior dificuldade com representações fracionárias, por possuírem características diferentes de outras representações familiares em seu cotidiano. O professor João deixa transparecer que os alunos "estranham" tanto a representação decimal que nem as consideram como números.

A partir desses relatos estabelecidos pelos professores, a pesquisadora indagou o grupo: *vocês relataram aqui, que as frações não fazem parte do cotidiano dos alunos, daí a resistência, a dificuldade de aprenderem. Então, eles aprendem com facilidade os decimais, por fazerem parte do seu cotidiano?*

A professora Rafaela explanou:

> [Professora Rafaela]
> Sim, por mais que você dê um número decimal para ele e pede para multiplicar, ele vai ter uma ideia, porque ele vai relacionar com o que ele faz com números naturais. Se der duas frações para ele dividir, ele não vai ter ideia de como vai armar essa conta.

Contradizendo a professora Rafaela, a professora Diana, expressa dificuldades de alunos em somar, multiplicar e dividir números racionais na forma decimal:

> [Professora Diana]
> Eu tenho alunos que ficam perdidos se a divisão for com vírgula, é monstruosa para eles. Eles travam ali, não fazem. O que mais vejo: erros, medo de fazer, não entendem. Agora na adição, é vírgula embaixo de vírgula, mas se é com número inteiro [e decimal], ele já não sabe, ele monta errado. Na multiplicação, eles querem fazer o mesmo, às vezes, colocar vírgula embaixo de vírgula.

Na sequência, a professora Suzy reage complementando a fala da professora Diana:

> [Professora Suzy]
> Nós aprendemos e começamos a ensinar adição e subtração, vírgula embaixo de vírgula. E aí vai acontecer o erro que a Diana falou, às vezes eles colocam a parte inteira depois da vírgula. Eu tenho desde o ano retrasado mostrado para eles e evitado falar, vírgula embaixo de vírgula. Tenho trabalhado a questão das ordens, unidade com unidade, dezena com dezena, então, décimo com décimo, centésimo com centésimo. Tem que ser ordem embaixo de ordem. Mas a divisão com decimais, eles não conseguem fazer.

É importante aludir que cada registro de representação semiótica de números racionais possui regras próprias de tratamentos. Assim, será exemplificada a escrita de numeração decimal que possui duas regras de conformidade[17] essenciais, o sistema posicional e a base dez. São essas regras que assegurarão o reconhecimento das representações e a possibilidade de sua utilização para tratamento (DAMM, 2012, p. 178).

Nesse sentido, ao trabalhar com as operações fundamentais com decimais, a atividade de tratamento exigirá uma compreensão das regras do sistema posicional e da base dez, e “sem a compreensão dessas regras, a representação algorítmica não tem sentido, ou seja, não existe tratamento significativo” (DAMM, 2012, p. 179).

---

[17] “[...] já estão estabelecidas na sociedade, não sendo competência do sujeito criá-las, mas sim usá-las para reconhecer as representações” (DAMM, 2012, 178-179).

De acordo com o diálogo entre as professoras, percebe-se o enfoque que deram às dificuldades dos alunos, nos tratamentos de representações no registro decimal de números racionais.

Com base nas pontuações dos professores sobre a utilização de representações de números racionais realizadas por alunos, somos levados a pensar na possível existência de um isolamento na abordagem da representação fracionária e da representação decimal. Em outras palavras, parece que os alunos iniciam a atividade matemática e, assim, permanecem no mesmo registro de entrada, realizando apenas tratamentos, ficando enclausurados na utilização de uma só representação e com isso acabam não estabelecendo relações com outras representações de números racionais, impossibilitando-os de mobilizá-las. Portanto,

> [...] as dificuldades mais profundas, aquelas que param a maioria dos estudantes na entrada da atividade matemática, não decorrem apenas de uma deficiência na aquisição de conceitos, mas de um desconhecimento total dos gestos intelectuais, quer dizer, de operações semio-cognitivas que são próprias da atividade matemática (DUVAL, 2013, p. 21).

Segundo Duval (2013, p. 15-16), as dificuldades dos alunos decorrem também de um desconhecimento das transformações que constituem a atividade matemática: tratamentos e conversões. Dessa forma, as dificuldades de compreensão na aprendizagem não estão relacionadas aos conceitos, mas à variedade de representações semióticas utilizada e o uso “confuso” que fazem delas.

No ensino e aprendizagem, conhecer e trabalhar, simultaneamente, vários registros de representações semióticas de números racionais, poderá levar as escolhas convenientes e econômicas de representações, pois “tendo mais registros, há um aumento potencial de possibilidades de trocas” (MORETTI, 2002), para resolver determinado cálculo, uma vez que “um registro pode permitir efetuar certos tratamentos de uma maneira muito mais econômica e mais possante do que outro registro” (DUVAL, 2009, p. 80).

Considerando que o professor de Matemática tem papel fundamental como mediador entre aluno e objetos matemáticos, é imprescindível que este conheça com profundidade o que se vai ensinar, mas, também, necessariamente como ensinar, quais caminhos podem ser percorridos para levar seus alunos à construção de conceitos matemáticos[18], uma vez que

> [...] o estudo do cálculo com números racionais na forma decimal pode ser facilitado se os alunos forem levados a compreender que as regras do sistema de numeração decimal, utilizadas para representar os números naturais, podem ser estendidas para os números racionais na forma decimal (BRASIL, 1998, p. 103).

Corroborando com as ideias de Duval (2009), os PCN ainda pontuam que, de modo geral, parece não se levar em conta que, "para o aluno consolidar e ampliar um conceito, é fundamental que ele o veja em novas extensões, representações ou conexões com outros conceitos" (BRASIL, p. 22 e 23).

Dessa forma, os pronunciamentos dos professores ressaltam o que Duval (2012a, p. 270) alerta sobre

> [...] o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações.

Nessa mesma direção, salienta-se que cada registro possui algumas limitações representativas específicas, surgindo a necessidade de transitar pela diversidade das possíveis representações de objetos matemáticos conceituais, possibilitando assim, recorrer a outros sistemas semióticos para representá-los.

Utilizando-se do aporte teórico, a pesquisadora indagou ao grupo: como os alunos trabalham com as operações que envolvem frações?

> [Professora Rafaela]
> Quando eles vão somar frações, eles não podem somar numerador com numerador, denominador com denominador, o primeiro impacto é isso. Eles têm que fazer MMC (mínimo múltiplo comum), eles têm que calcular outras coisas. Vai dividir fração, conserva a primeira, multiplica pelo inverso da segunda, entram em outros conceitos que eles precisam aprender.

---

[18] "Depende estritamente da capacidade de utilizar vários registros de representações semióticas desses conceitos, ou seja, de representar os conceitos, de tratar as representações obtidas num mesmo registro e de converter as representações a partir de um registro para outro" (D'AMORE, 2009, p. 158).

> [Professora Suzy]
> Se você coloca uma lista de exercícios com frações, eles não conseguem dar o pontapé inicial. Por mais que seja no sétimo ano, quer dizer, isso já foi muito trabalhado no sexto ano, eles não conseguem.
>
> [Professora Diana]
> Se não deixar um exemplo. Sempre tem que fazer ali o como fazer. O tanto que é assustador às vezes, a resistência que o aluno tem para trabalhar com frações. Nesses dias fiquei pasma, o aluno perguntou, que operação é essa? Coloquei uma fração e ele não sabia que aquilo era uma divisão.

Pode-se extrair das falas das professoras que, nos últimos anos do ensino fundamental, parece que os alunos ainda apresentam dificuldades em tratamentos e conversões que envolvem frações e seus significados, em particular o quociente.

De acordo com Duval (2013, p. 25),

> [...] para olhar as atividades matemáticas do ponto de vista dos próprios alunos, não se deve limitar ao objetivo local da introdução de um conceito particular de um nível de ensino particular. Ao contrário, é preciso olhar para as reações e as produções de alunos durante períodos de tempo mais longos e em diferentes níveis de ensino. É assim que aparecem, como numa vista aérea, os vestígios enterrados no solo, esses erros ou bloqueios que permanecem os mesmos, independente dos conhecimentos matemáticos introduzidos. E de um ano para outro, eles se tornam os portais cada vez mais intransponíveis para os alunos, pelo menos enquanto o ensino de matemática permanecer unilateral, ou seja, centrado apenas na *face exposta*[19] da matemática.

Duval (2012a, p. 284) analisa que na aprendizagem deve-se levar em conta a “*semiósis”,* pois se a conceitualização implica na coordenação de registros de representação, então, o que conduzirá essencialmente às aprendizagens matemáticas não poderá ser apenas a automatização de certos tratamentos ou a compreensão de noções, mas deverá ser a coordenação de diferentes registros de representação, necessariamente mobilizados por estes tratamentos ou por esta compreensão.

[19] Corresponde aos objetos matemáticos (números, funções, equações, polígonos, poliedros etc.), às suas propriedades, às fórmulas e algoritmos aos quais eles dão origem, às demonstrações [...] (DUVAL, 2013, p. 17).

Dessa forma, a dupla: "*noésis*" e "*semiósis*" é inseparável, no que diz respeito à aprendizagem matemática. Ou seja, o funcionamento cognitivo do pensamento humano está intrinsecamente ligado à existência de uma diversidade de registros de representação semiótica (DUVAL, 2012a, p. 270).

Assim, percebe-se que as discussões levantadas pelas professoras convergiram-se para as dificuldades dos alunos em tratamentos no registro fracionário: "eles não conseguem dar o pontapé inicial". Não se cogita a possibilidade de efetuar transformações de conversão de representações fracionárias para representações decimais, ou mesmo trabalhar com outras representações dentro do mesmo sistema[20], para assim realizar os tratamentos necessários, na resolução de operações com representações de números racionais.

Podemos então pensar, se os alunos têm "menos dificuldades" em trabalhar com decimais, então, o caminho talvez fosse realizar conversões de representações do registro fracionário para o decimal. Mas, como realizar tal procedimento se alunos não são levados a transitar concomitantemente por várias representações semióticas de números racionais?

Entende-se que ao utilizar a técnica do mínimo múltiplo comum, os alunos poderão não perceber que estão trabalhando com representações equivalentes de um mesmo número racional, além disso, acabam ficando refém de memorizar um mecanismo para resolver um cálculo de adição e subtração de frações.

Ainda que essa técnica seja um caminho para resolver determinada operação, entende-se que não apresenta significado para os alunos, pois, estes ficam aquém da compreensão matemática, uma vez que não são levados à utilização de outras representações no percurso da resolução, o que implicará a não coordenação de representações semióticas de números racionais.

Para Duval (2013, p. 20) compreender,

> [...] do ponto de vista matemático, é ser capaz de justificar um resultado por meio de uma propriedade. Mas, do ponto de vista cognitivo, é primeiro reconhecer o mesmo objeto em diferentes

[20] Estamos nos referindo à utilização de frações equivalentes.

> representações semióticas que podem ser feitas a partir dele, cujos conteúdos não têm nada em comum. E isso significa pensar de forma espontânea, *e por si só*, em substituir uma dada representação semiótica por outra representação semiótica útil para um tratamento.

Assim, nessa perspectiva cognitiva, realizar tratamentos e conversões, espontaneamente, entre representações semióticas de números racionais, é fundamental para resolver qualquer problema.

A professora Diana relatou uma de suas experiências, na qual seus alunos dos 7º e 8º anos não apresentaram dificuldades em nenhuma atividade aplicada na sala de aula, em que deveriam localizar frações na reta numérica[21]:

> [Professora Diana]
> Eu dei números fracionários para cada aluno localizarem na reta numérica. Cada aluno ia lá e localizava, a gente usou prendedor[22]. Para mim foi bem satisfatório, porque iam certinho, e quando erravam, faziam a continha e arrumavam: "Ah! É aqui a posição dele!". Até número misto eles conseguem! Então eles já vêm assim, "eu sei como eu vou resolver! Eu sei como fazer isso aí!" Eles fazem tranquilamente, [o número misto].

A partir da explanação da professora Diana, parece que os alunos, para localizarem números fracionários e números mistos, realizam conversões para a forma decimal e que para isto, também, não apresentam dificuldades.

Em geral, constata-se nessa sessão de estudos, por meio dos relatos dos professores motivados por suas experiências, um destaque às dificuldades de alunos na apreensão dos números racionais, evidenciando que essas dificuldades estão diretamente ligadas no reconhecimento de representações de um mesmo número racional, nos tratamentos e conversões.

Conforme Brandt e Moretti (2014, p. 28),

> [...] as práticas dos professores em sala de aula, no que diz respeito à linguagem utilizada para conduzir a aula e o encaminhamento do trabalho com a matemática, entre outras características do trabalho docente, deixam a desejar quando refletidas à luz da Teoria de Registros de Representações Semióticas, pois a falta da coordenação de diferentes registros de representações semióticos pertencentes a sistemas semióticos

---

[21] Palavra utilizada pela professora em referência ao varal da atividade "varal dos números".
[22] A atividade que a professora Diana se refere é a do "varal dos números", por isso, a utilização de prendedores.

> diferentes e o fenômeno da congruência semântica são responsáveis por grande parte das dificuldades dos alunos. Esses aspectos e o fato das operações de tratamento e conversão serem consideradas operações cognitivas precisam estar na base das reflexões da atividade docente.

Com isso, notou-se que as discussões do grupo de professores indicaram uma importância de estudos dos registros de representação semiótica dos números racionais, de acordo com o que se apresenta na base das reflexões a seguir:

> [Professora Suzy]
> [...] Os livros geralmente trazem essa sequência de conjuntos, naturais, inteiros, aí trabalha-se todas as operações com os inteiros, e aí vai para os racionais. Se nós começássemos a hora que entrasse nos naturais já mostrar para ele [aluno] que, por exemplo, o 4 ele pode ser representado em forma de fração como 8 sobre 2, oito meios, e fazer a ligação dos naturais com os racionais, e vai para os inteiros, o mesmo procedimento, quando trabalhar os inteiros mostrar para ele, que -5 poderia ser -10 sobre 2, menos dez meios, então, já mostrando para ele que os outros números também são frações, que os naturais são racionais, que os inteiros são racionais, pra que eles comecem, não sei se é o termo correto, na cabeça dele, já ir armazenando esse conceito, fazendo com que ele perceba que existe esse vínculo, entre os naturais, inteiros, com os racionais.
> Eu acredito assim, não sei se eu estou olhando para um horizonte distante, mas eu creio, agora, refletindo, parando, pensando, analisando sobre isso, que de repente o ponta pé inicial que nós poderíamos dar, seria mesmo fazer isso que eu disse. Na hora da colocação quem são os naturais, quem são os inteiros, já mostrar para eles que esses números são na verdade, números racionais, que podem ser escritos em forma de fração também, e começar a colocar isso, essa relação dentro da cabeça deles ou vira um bloqueio. Então quer dizer, nós talvez estivéssemos já começando a desbloquear lá no começo do ano, na apresentação dos conjuntos.
>
> [Professora Diana]
> Mas seria trabalhar com os três juntos, ou começar pelos racionais?
>
> [Professora Suzy]
> Professora não trabalhar a fundo os racionais, mas mostrando, fazendo a associação dos naturais com os racionais, então a hora que eu colocar no quadro o um, o dois, o três, os naturais, mostrar para eles que esses números podem ser escritos em forma de fração, e não numa única fração, mas eu posso elencar, eu coloco o conjunto na horizontal, e aí embaixo de cada elemento eu vou

> elencando as frações correspondentes a esse número natural, e aí fazer a mesma coisa com os inteiros.

É importante que o aluno reconheça essas diferentes representações e não somente receba as indicações como na fala da professora Suzy, ao destacar a importância de lincar ‘naturais-inteiros-racionais’, pois,

> [...] ainda que a atividade de pesquisa e a de resolução de problemas sejam importantes tanto do ponto de vista cognitivo quanto do didático, não se deve por isso subestimar um outro tipo de atividade fundamental: o reconhecimento, isto é, a identificação dos objetos por suas múltiplas ocorrências representacionais (DUVAL, 2011a, p. 28).

Ainda é salientado que, de acordo com Damm (2012, p. 182) “o que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não é a determinação de representações possíveis de um mesmo objeto, mas a *coordenação entre vários registros de representação*”.

Nessa sessão de estudos, foi empreendido um diálogo entre pesquisadora e o grupo de professores, constatado, inicialmente, relatos que se direcionaram explícita e implicitamente às dificuldades das quais os alunos apresentam na mobilização de registros de representações semióticas de números racionais.

Dessa forma, essas discussões foram de grande relevância, pois subsidiaram ações de planejamento e elaboração de atividades, envolvendo diferentes registros de representação semiótica para as próximas sessões de estudos, possibilitando a continuidade no objeto de estudo desta pesquisa.

3.2 Comparação e ordenação entre representações fracionárias e decimais de números racionais

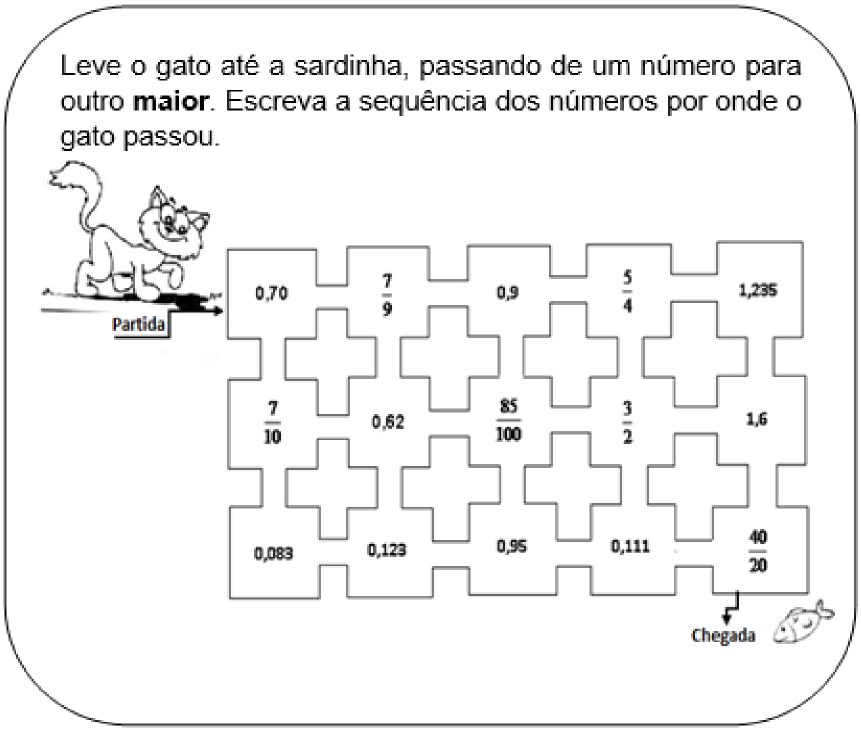
Como já pontuado no tópico 3.1, ao buscar um direcionamento para a proposta das atividades para estudo com o grupo de professores participantes, foi organizado a primeira sessão com “uma conversa”. A partir dessa sessão, as atividades foram planejadas[23]. Assim, na segunda sessão realizada, no dia 9 de

[23] Esses planejamentos constam nos apêndices A ao K dessa pesquisa.

março de 2015, em uma escola municipal de Campo Grande/MS, quando as análises das atividades discutidas no grupo foram iniciadas.

No início da segunda sessão de estudos, uma atividade foi proposta (Figura 35) aos professores participantes, sujeitos desta pesquisa, para que eles analisassem possíveis dificuldades, as quais os alunos poderiam encontrar para resolvê-la e, que as descrevessem,[24] a fim de, na sequência, dar início a uma discussão no grupo.

Figura 35 – Atividade 1.



Fonte: Autores da pesquisa.

A atividade intenciona que seja estabelecida uma sequência numérica crescente de números apresentados na Figura 35.

Entende-se que esta atividade pode possibilitar um trabalho rico em tratamentos e conversões entre registros numéricos de representações decimais e fracionárias de números racionais, podendo, ainda, transitar por outros sistemas semióticos, tais como: o da língua natural, o figural geométrico como a reta graduada, e ainda, por representações figurais.

[24] Foi entregue uma folha para que os professores descrevessem suas análises.

Conforme Duval (2011a), há necessidade de utilização de diferentes representações para a compreensão e acesso ao objeto matemático que se intenciona a apreendê-lo, uma vez que

> [...] há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato (DUVAL, 2011a, p. 31).

Duval afirma ainda que,

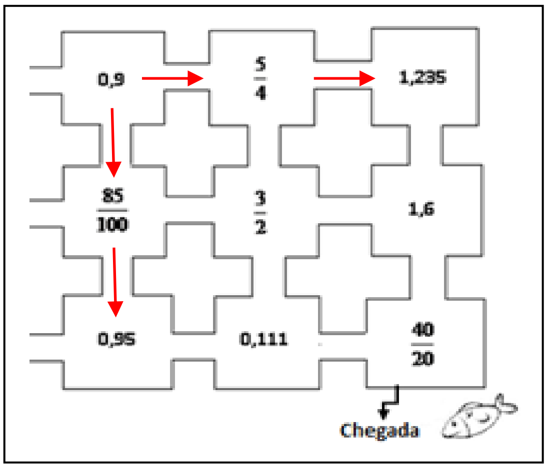
> [...] a passagem de um sistema de representação a um outro ou a mobilização simultânea de vários sistemas de representação no decorrer de um mesmo percurso, fenômenos tão familiares e tão frequentes na atividade matemática, não têm nada de evidente e de espontâneo para a maior parte dos alunos [...]. Estes, frequentemente, não reconhecem o mesmo objeto através das representações que lhe podem ser dadas nos sistemas semióticos diferentes (DUVAL, 2009, p. 18).

Essa atividade foi planejada para estudo com o grupo de professores, por ser considerada a “não evidência e não espontaneidade” de alunos na mobilização de variados sistemas semióticos de números racionais, como indicado por um dos professores participantes:

> [Professora Diana]
> [...] esses fracionários aqui, cinco quartos, três meios, não estou generalizando, mas é o que mais a gente vê, talvez ele (aluno) queira até ir para o caminho mais fácil, evitar frações, evitar as divisões.

A professora Diana considera que os alunos, em sua maioria, poderão optar por caminhos que não apresentam frações (Figura 36), e isso pode remetê-los a ‘evitar divisões’. Todavia, nesta atividade, seria impossível ‘evitar frações’.

Figura 36 – Caminhos: Impossibilidade de ‘evitar frações’.



Fonte: Autores da pesquisa.

Nesse sentido, buscou-se planejar,[25] antecipadamente, dificuldades dos alunos que pudessem ser levantadas pelo grupo de professores, no momento da sessão de estudo, com essa atividade:

1. Reconhecer uma representação fracionária como um número racional.
2. Comparar representações fracionárias de números racionais.
3. Comparar representações decimais de números racionais.
4. Comparar representações decimais com representações fracionárias de números racionais.
5. Converter a representação decimal de um número racional para a sua representação fracionária.
6. Converter a representação fracionária de um número racional para a sua representação decimal.
7. Identificar e aplicar procedimentos de tratamento em representações fracionárias de um mesmo número racional.
8. Reconhecer a ideia de fração como quociente.
9. Efetuar divisão de números racionais.
10. Representar números racionais na reta numérica.
11. Utilizar o registro na língua natural para comparar representações de números racionais.
12. Utilizar representações figurais para comparar representações de números racionais.

A partir da identificação dessas possíveis dificuldades, as quais os professores poderiam levantar, alguns questionamentos foram, previamente, planejados para o momento de discussão com o grupo, como nos exemplos:

1) Os alunos podem apresentar outras dificuldades? **(Se houver uma única dificuldade apresentada pelo grupo).**

---

[25] Constam nos apêndices A e B.

2) Que conhecimentos os alunos podem usar para decidir qual é o maior número? **(Uma questão que pode motivar discussões sobre o reconhecimento de diferentes registros de representação de números racionais, para compará-los: registros numéricos, figurais geométricos (reta graduada) e língua natural. E, ainda, a utilização de representações figurais.**

3) Como os alunos podem interpretar as frações $\frac{7}{9}, \frac{7}{10}, \frac{85}{100}, \frac{5}{4}, \frac{3}{5}, \frac{40}{20}$? **(Uma possível questão para discutir dificuldades em reconhecer a fração como um quociente).**

4) Como os alunos podem comparar $\frac{70}{100}$ com as frações $\frac{7}{9} e \frac{7}{10}$? **(Se no grupo surgir a conversão de $0{,}70$ para $\frac{70}{100}$, esta será uma questão para discutir possíveis dificuldades apresentadas no tratamento de frações equivalentes $\frac{70}{100} = \frac{7}{10}$).**

5) Como os alunos podem interpretar a comparação entre $0{,}777...$ e $0{,}7$? **(Se no grupo surgirem as conversões de $\frac{7}{9}$ em $0{,}777...$ e $\frac{7}{10}$ em $0{,}7$, esta poderá ser uma questão motivadora para provocar discussões sobre a comparação de números racionais na representação decimal).**

6) Como os alunos podem transformar frações do tipo $\frac{7}{10} e \frac{85}{100}$ na forma decimal? **(Se no grupo surgir indícios do uso de técnicas tradicionais como, por exemplo, "na divisão de números por 10, 100, 1000, ..., basta deslocar a vírgula para a esquerda tantas casas quantos forem os zeros", como facilitadoras para as conversões).**

7) Como alunos podem simplificar frações do tipo $\frac{40}{20}$? **(Se no grupo surgir indícios do uso de técnicas tradicionais como, por exemplo, "na representação fracionária em que o numerador e o denominador possuam "zeros", basta cortar a mesma quantidade de zeros que**

houver no numerador e no denominador", como facilitadoras nos tratamentos e conversões).

8) Por que alunos comparam frações observando numerador com numerador e denominador com denominador? **(Uma possível questão para discutir dificuldades em reconhecer representações fracionárias de um número racional como constituinte de um campo, com conceitos e propriedades, quando no grupo surgir uma possível discussão de que alunos podem comparar frações termo a termo).**

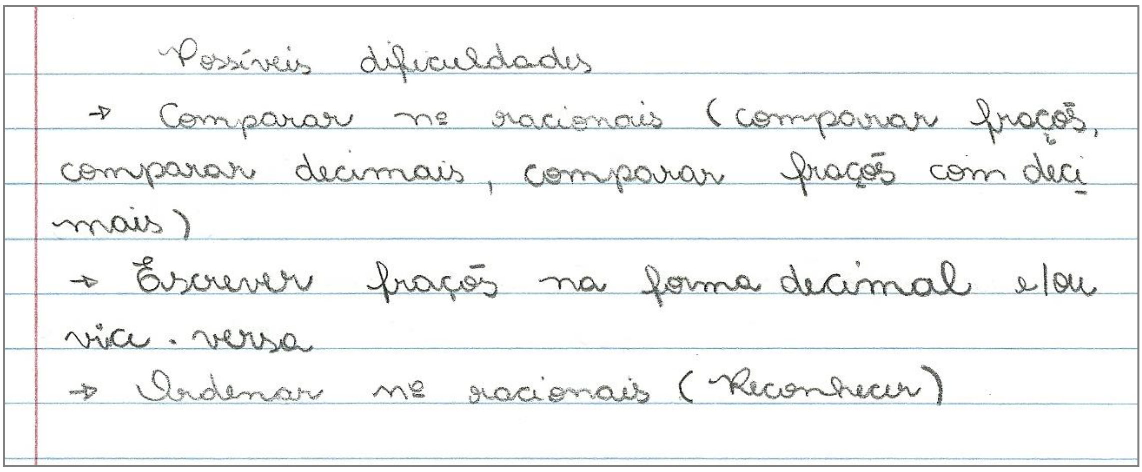
9) Como alunos podem comparar as representações utilizando a língua natural? **(Se o grupo apresentar o uso da leitura do número para comparar as representações).**

10) Como alunos podem comparar as representações por meio de figuras? **(Se o grupo apresentar o uso de figuras para comparar as representações).**

Esse planejamento possibilitou o estudo de possíveis coordenações (tratamentos e conversões) de diferentes registros de representação de números racionais presentes na atividade 1 (Figura 35), não intencionando esgotar todo o planejamento nesse encontro, mas nortear questões de importância para a pesquisa nos futuros planejamentos, como um método a seguir.

Na análise da atividade 1, considera-se como ponto de partida, para a seleção dos áudios das discussões ocorridas no grupo, alguns registros dos professores participantes sobre possíveis dificuldades que alunos poderiam encontrar na resolução, conforme as Figuras 37 e 38.

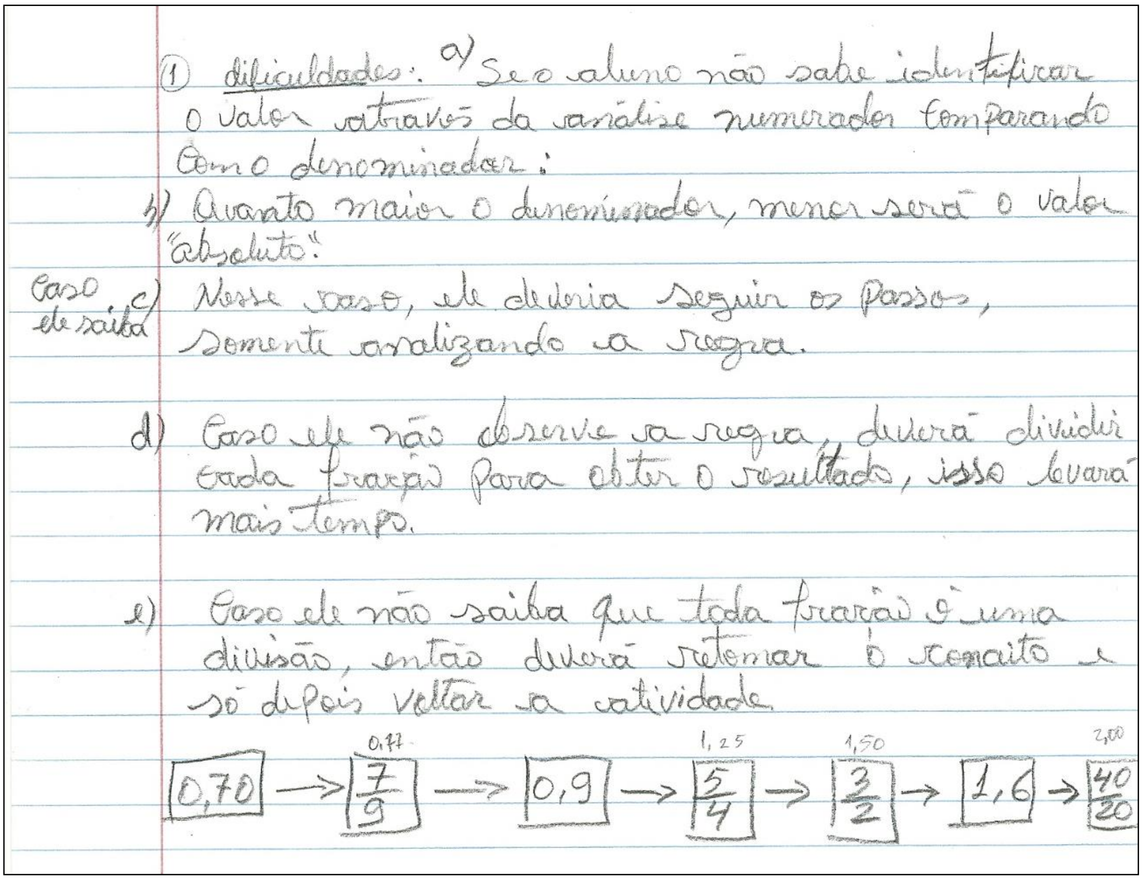
Figura 37: Possíveis dificuldades na resolução da atividade 1.


Possíveis dificuldades
→ Comparar nº racionais (comparar frações, comparar decimais, comparar frações com decimais)
→ Escrever frações na forma decimal e/ou vice-versa
→ Ordenar nº racionais (Reconhecer)

Fonte: Professora Rafaela.

Para Duval (2011a, p.24), “os métodos a serem utilizados numa pesquisa são sempre relativos à natureza dos fenômenos a estudar”, pois, “os fenômenos cognitivos reveladores da atividade matemática concernem à mobilização de vários registros de representação semiótica e à conversão dessas representações.” Assim, as questões estão sempre intencionadas, nesse contexto, podendo serem retomadas em outros planejamentos de novas atividades, caso não tenham acontecido, como um meio de provocar essas discussões.

Figura 38: Possíveis dificuldades na resolução da atividade 1.



Fonte: Professor João.

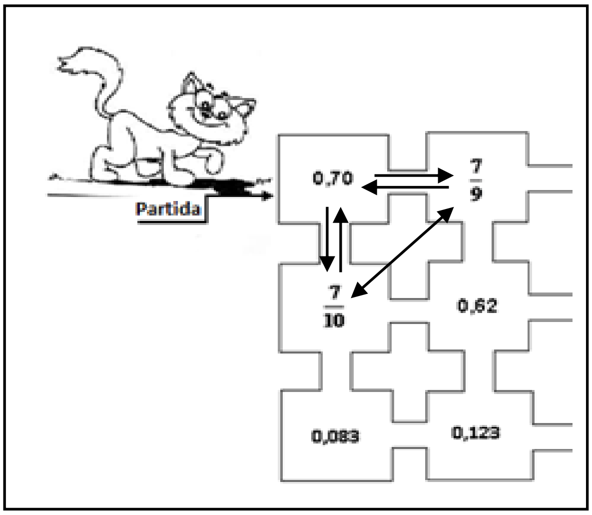
Dessa forma, ressalta-se que quando, nas discussões do grupo, não houve condições de descrever e analisar as falas dos professores participantes da pesquisa, com relação às dificuldades dos alunos nas atividades matemáticas propostas, outras atividades para retomar as discussões foram planejadas e replanejadas.

Nessa direção, as análises do material coletado da pesquisa foram apresentadas, produzidas nas sessões de estudos, articulando as atividades planejadas com as análises e as discussões do grupo.

3.2.1 Conversões de diferentes representações

A atividade indica que o gatinho deve partir da representação decimal 0,70 e seguir para um número maior. Para isso, inicialmente, será necessário comparar 0,70 com as frações $\frac{7}{9}$ e $\frac{7}{10}$, e ainda comparar as frações $\frac{7}{9}$ e $\frac{7}{10}$ (Figura 39), o que requer a coordenação entre dois registros de representações semióticas dos números racionais envolvidos na atividade.

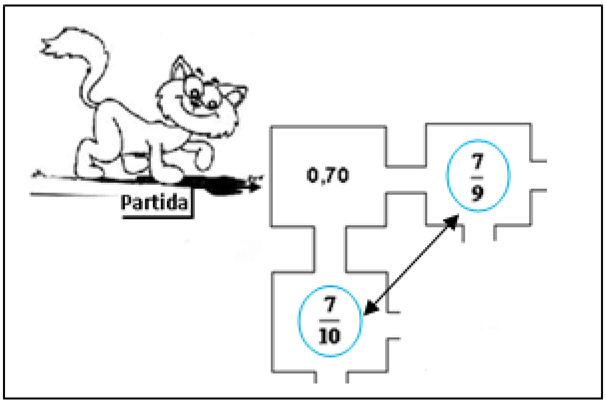
Figura 39 - Comparação: tratamentos e conversões entre as representações.



Fonte: Autores da pesquisa.

No início das discussões, os professores levantaram a possibilidade de alunos partirem de imediato para a comparação entre as representações do mesmo registro, $\frac{7}{10}$ e $\frac{7}{9}$ (Figura 40), “no primeiro caminho, eles têm que comparar duas frações”, explana a professora Rafaela.

Figura 40: Comparação entre duas representações do mesmo registro.



Fonte: Autores da pesquisa.

A professora Suzy acrescenta:

> [Professora Suzy]
> Se for para passar de um número para outro maior, ele (aluno) poderia pensar que 10 é maior do que 9 no denominador, entendeu? Ele já sairia do zero setenta (0,70) e iria para o sete décimos ($\frac{7}{10}$). A palavra "maior" o faria de imediato ir para o sete décimos, em vez de ir para o sete nonos.

A professora pontua ainda, que alunos poderão ser induzidos pela palavra "*maior*" empregada no enunciado da atividade, e assim optarão por outros caminhos para comparar as frações $\frac{7}{10}$ e $\frac{7}{9}$: "*pensar que como 10 é maior do que 9 no denominador*". Assim, a partir dessa observação, alunos equivocadamente reconhecem a fração como dois números separados por um traço e podem concluir que $\frac{7}{10}$ é maior $\frac{7}{9}$, por ter denominador maior.

Acrescenta-se ainda nessa análise que, de acordo com a fala da professora Suzy, parece implicar que alunos ao se depararem com representações diferentes como $\frac{7}{10}$ e 0,70, confundem-nas com o objeto representado, e assim consideram que estão diante de dois objetos diferentes, e não que as representações designam o mesmo objeto, o que pode levá-los a não fazer comparações entre elas, uma vez que "a dificuldade cognitiva vem do fato de que duas representações diferentes não apresentam ou não explicitam a mesma coisa do objeto que elas representam". (DUVAL, 2011b, p. 47).

Duval (2009, p. 38-39), nesse contexto, explica que

> Nos sujeitos, uma representação pode verdadeiramente funcionar como representação, quer dizer, dar-lhes acesso ao objeto representado apenas quando duas condições são preenchidas: que eles disponham de ao menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir a representação de um objeto, de uma situação, de um processo... e que eles possam converter "espontaneamente" de um sistema semiótico a outro, mesmo sem perceber as representações produzidas. Quando essas duas condições não são preenchidas, a representação e o objeto representado são confundidos, e duas representações diferentes de um mesmo objeto não podem ser reconhecidas como sendo as representações do mesmo objeto.

Assim, transformar representações por conversão não se configura uma atividade espontânea (DUVAL, 2009), o que nos leva a observar que a conversão de $\frac{7}{10}$ em 0,70 ou 0,70 em $\frac{7}{10}$, requer reconhecer que as representações indicadas referem-se ao mesmo número racional, entretanto, "para que a conversão possa ser efetuada ou o objeto seja reconhecido em dois sistemas distintos, é necessário também conhecer as regras de funcionamento semiótico em cada um desses sistemas" (MORETTI; THIEL, 2012, p. 385).

Ressalta-se que a atividade de conversão nos sentidos $\frac{7}{10}$ em 0,70 e 0,70 em $\frac{7}{10}$ apresentam custos cognitivos bem distintos, pois, o "custo é maior" em converter a representação no registro decimal para a representação no registro fracionário por se tratar de uma transformação de caráter não-congruente, uma vez que "pode igualmente fazer-se que duas representações sejam congruentes em um sentido de conversão e não congruentes para a conversão inversa (DUVAL, 2009, p. 19).

Nessa direção, presume-se que os alunos poderão ter dificuldades em realizar conversões de 0,70 para $\frac{70}{100}$ ou para $\frac{7}{10}$ ou utilizando o registro na língua natural por meio de tratamentos, relacionando equivalências entre décimos e centésimos, reconhecendo assim as representações de um mesmo número racional, por meio de frases que justificam essas equivalências. Desse modo, também é possível que comparem as representações obtidas com as frações $\frac{7}{10}$ e $\frac{7}{9}$, sugeridas como caminhos possíveis. Desse modo, faz-se necessário, no ensino e na aprendizagem, transitar de maneira articulada - com “idas” e “vindas” - por pelo menos dois registros de representação semiótica de um mesmo número racional.

A professora Suzy parte da premissa, de que essa dificuldade apresentada pelos alunos está diretamente ligada em reconhecer a ideia de fração como um quociente, dizendo:

> [Professora Suzy]
> [...] eles também não têm capacidade, de na hora pensar que uma fração é divisão, “então posso dividir sete por nove!” Eles não relacionam. Depois que você fala, fala, fala, eles podem até lembrar, mas eles, assim de imediato, não relacionam que o traço da fração representa divisão.

Diante disso, alunos não conseguiriam converter as representações fracionárias em decimais, por meio do algoritmo da divisão de 7 por 9 e de 7 por 10, configurando o que Duval (2012, p. 276) entende como a “primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática”, para então fazerem comparações entre as representações decimais encontradas: 0,777... e 0,7.

Nessa discussão, a professora Rafaela revela que a maior dificuldade dos alunos está na compreensão de representações fracionárias, e não tanto nas representações decimais:

> [Professora Rafaela]
> Eles (alunos) vão ter dificuldade na hora de comparar essas duas frações ($\frac{7}{9}$ e $\frac{7}{10}$). Eles não têm noção de quanto é sete nonos e de quanto é sete décimos!

Diante dessa afirmação, questionamos o grupo: quando se fala, eles não têm noção do que é uma fração, o que se quer dizer?

A professora Rafaela retoma fazendo as seguintes pontuações:

> [Professora Rafaela]
>
> [...] eles não têm noção de quanto aquela fração representa, então eles vão ter dificuldade no percorrer do caminho todo. Quando encontram números decimais eu acho que ainda, eles conseguem ter uma noçãozinha. Mas, quando chegam as frações eles não têm noção do que aquilo realmente representa. Então vão ter dificuldades.

Pode-se concluir que o grupo de professores indicam que alunos, ao iniciarem a atividade, optaram por trabalhar com representações decimais, todavia, ao se defrontarem com representações no registro fracionário, não pensam na possibilidade de efetuarem conversões para o registro decimal ou realizarem tratamentos numéricos com $\frac{7}{9}$ e $\frac{7}{10}$, obtendo outras representações do mesmo número racional, como por exemplo, as respectivas frações equivalentes $\frac{70}{90}$ *e* $\frac{63}{90}$, como um caminho para comparar as representações apresentadas na atividade, pois "uma das aplicações da ideia de frações equivalentes se manifesta, quando queremos comparar duas frações e determinar se uma é menor, igual ou maior do que a outra" (CISCAR; GARCIA, p. 125, 2009).

No intuito de enriquecer a discussão e identificar as dificuldades dos alunos, os quais os professores participantes se expressaram a respeito das atividades de tratamentos e de conversões de representações de números racionais, a seguinte questão foi levantada: quais conhecimentos os alunos precisam ter, para decidir qual desses números é o maior?

Com esse questionamento, referíamos a uma possível utilização de registros de representação semiótica multifuncional (língua natural e figural geométrico: reta graduada ou até mesmo a utilização de representações figurais), que os alunos poderiam mobilizar para decidir quais dessas representações correspondem ao maior número racional, pois,

> [...] a compreensão matemática requer uma **coordenação interna** entre os vários sistemas de representação semiótica possíveis que se podem escolher e usar (Duval, 2000). Sem desenvolver esta coordenação interna, alunos não podem cruzar o limiar da conversão de representação. A capacidade de mobilizar diversas representações conjuntamente de maneira interativa ou em

> paralelo, depende do desenvolvimento desta coordenação, e a compreensão conceitual não é a condição de tal coordenação, mas surge de seu desenvolvimento. Em outras palavras, o que primeiro importa para o ensino das matemáticas não está na escolha do melhor sistema de representação, mas garantir que os alunos são capazes de relacionar muitas maneiras de representar os conteúdos matemáticos (DUVAL, 2006, p. 158-159*, tradução nossa*)[26].

É nessa direção, que se pretende conhecer o que o grupo de professores poderia revelar sobre a possibilidade de seus alunos coordenarem diferentes representações semióticas de números racionais.

Assim, a professora Suzy apresentou alguns conhecimentos, dizendo: “primeiro, saber que o traço da fração indica divisão. Depois, precisam ter muito claro a questão das ordens, décimos, centésimos, milésimos”.

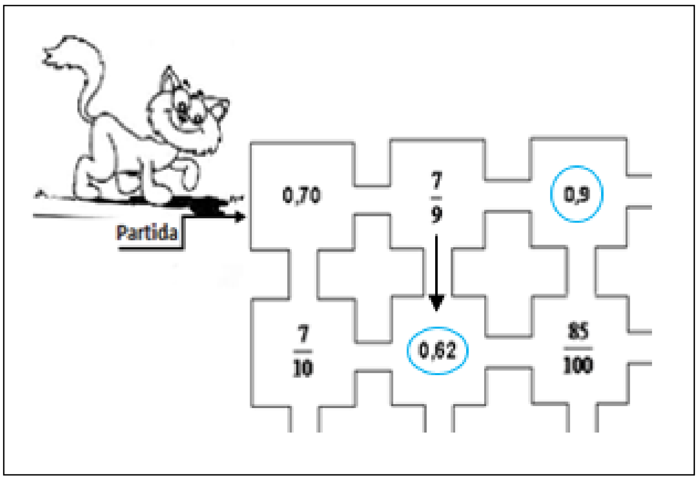
É possível perceber que, para a professora Suzy, a fração tem significado de quociente, e a conversão das representações fracionárias seria um caminho mais fácil para os alunos, já que a partir disso, trabalhariam com representações decimais estabelecendo a relação de ordem entre elas, uma vez que, na opinião da professora Rafaela, “transformar fração em decimal, ficaria mais fácil, para daí eles relacionarem. Com número decimal é mais fácil de ver, quem é o maior, quem é o menor, mas na forma fracionária é bem difícil”.

Vale destacar a importância e a necessidade dos alunos compreenderem o sistema de numeração decimal e a sua característica posicional, para poderem aplicar tratamentos entre décimos, centésimos e milésimos nas representações decimais, pois se não “eles acham que 0,62 é maior que 0,9, se ele não tiver bem claro a questão da ordem”, (Figura 41), esclarece a professora Rafaela.

---

[26] *[...] la comprensión matemática requiere uma* ***coordinación interna*** *entre los diversos sistemas de representación semióticos posibles que se pueden elegir y usar (DUVAL, 2000). Sin desarrollar esta coordinación interna los estudiantes no pueden cruzar el umbral de la conversión de representación. La habilidade para movilizar diversas representaciones conjuntamente de manera interactiva o en paralelo depende del desarrollo de esta coordinación, y la comprensión conceptual no es la condición de tal coordinación sino que surge de su desarrollo. Em otras palavras, lo que primero importa para la enseñanza de las matemáticas no es la elección del mejor sistema de representación sino lograr que los estudiantes sean capaces de relacionar muchas maneras de representar los cotenidos matemáticos (DUVAL, 2006, p. 158-159).*

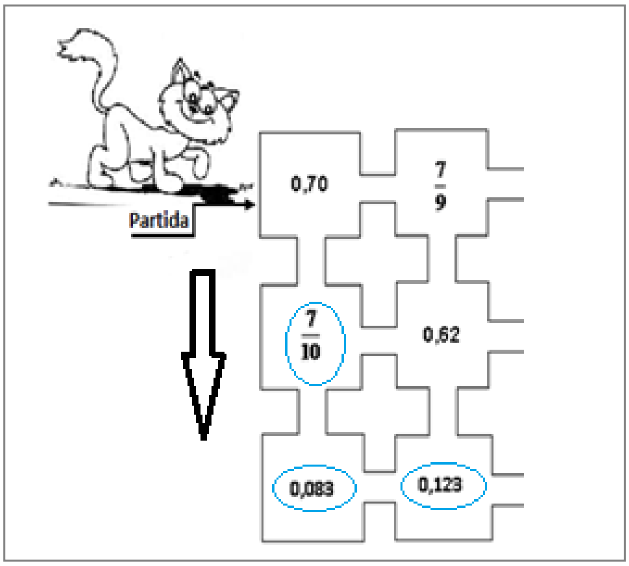
Figura 41: Não reconhecimento que 0,62 é menor que 0,9.



Fonte: Autores da pesquisa.

A professora Suzy destaca possíveis dificuldades que alunos enfrentariam em fazer comparações, partindo do princípio que eles tomariam, equivocadamente, o caminho na vertical (Figura 42).

Figura 42: Dificuldades na comparação entre representações decimais e fracionárias.



Fonte: Autores da pesquisa.

> [Professora Suzy]
> O aluno pegando o caminho na vertical na primeira coluna zero setenta e sete décimos poderia ir para o zero, zero, oitenta e três. Ele na sequência marcaria oitenta e três milésimos, não se atentando à ordem dos centésimos. Ele relacionaria o sete com o

> oito. Só que ele não ia se atentar que os sete décimos ($\frac{7}{10}$), na verdade, zero vírgula sete, o sete é décimos e o oito, centésimos. Ele não perceberia isso.

O possível caminho que a professora Suzy explanou que seus alunos tomariam, indica que os mesmos não reconheceriam 0,70 e $\frac{7}{10}$ como representações de um mesmo número racional. Entretanto, a professora sinaliza que alunos reconheceriam que $\frac{7}{10}$ e 0,7 são representações “equivalentes”, isso quer dizer que alunos realizariam um procedimento de conversão[27] da representação fracionária para a decimal. Ainda, seguindo o caminho no mesmo sentido, os alunos apresentariam dificuldades, segundo a professora Suzy, em estabelecer relações de ordem entre décimos, centésimos e milésimos entre as representações de 0,7 e 0,083, confundindo as posições que os algarismos ocupam.

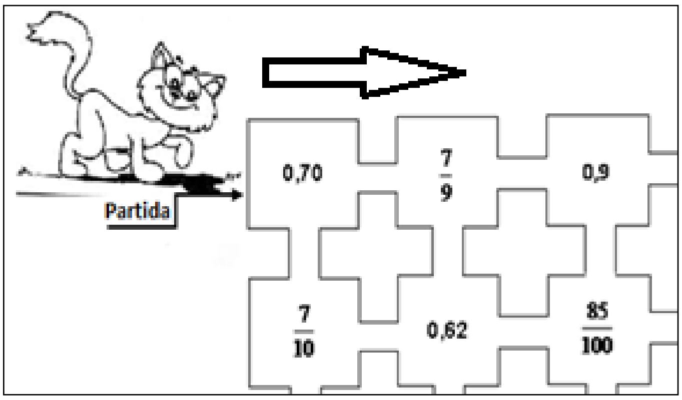
Desse modo, entende-se que para construir a noção de equivalência entre representações decimais é necessário um trabalho com representações figurais manipuláveis ou não, concomitantemente, com registros na língua natural, aplicando tratamentos acompanhados por meio de perguntas, levando os alunos a estabelecer relações entre décimos, centésimos e milésimos, podendo assim favorecer a compreensão do Sistema de Numeração Decimal e, consequentemente, comparar essas representações decimais.

Por outro lado, os professores João e Diana conjecturam que os alunos poderiam, inicialmente, partir para a representação $\frac{7}{9}$ como indicada na Figura 43.

---

[27] A professora Suzy não explicitou tal procedimento.

Figura 43: Um possível caminho.



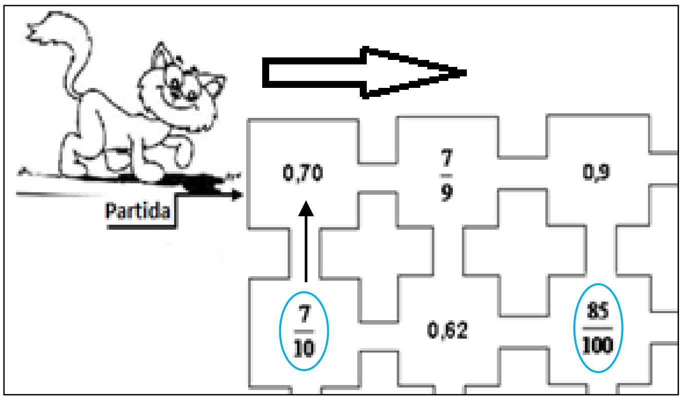
Fonte: Autores da pesquisa.

> [Professor João]
> O aluno esperto, mesmo se ele não souber essas regras fracionárias, mas se for bem esperto, ele consegue ir no caminho. Ele já observa que sete décimos ($\frac{7}{10}$) vai ser a mesma coisa que o de cima (0,70), ou seja, ele já não tomaria aquele caminho, se ele não toma o caminho na vertical, só sobra o caminho na horizontal, sete nonos. E lá na outra fração, oitenta e cinco sobre cem ($\frac{85}{100}$), ele já percebe que é menor que zero vírgula nove, então ele não toma o caminho de zero vírgula sessenta e dois. Ou seja, ele já vai por eliminação.
>
> [Pesquisadora]
> Como ele percebe que $\frac{7}{10}$ e 0,70 são a 'mesma coisa' ?
>
> [Professor João]
> Não sei se aluno de oitavo ano talvez já consiga perceber isso aí, a questão da vírgula, um zero, uma vírgula, dois zeros, duas vírgulas. A gente trabalha com isso aí. Então, se ele vê que tem um zero ele já sabe que vai ter uma vírgula, se tem dois zeros, duas vírgulas, duas casas decimais. Ele já sabe que a de baixo, se tem duas casas[28] decimais é zero vírgula oitenta e cinco, já é menor que zero vírgula nove. Mas, para isso ele tem que ter noção.

Pode-se notar, a partir da fala do professor João, conversões com o uso de regras das representações: $\frac{7}{10} \longrightarrow$ 0,70 e $\frac{85}{100} \longrightarrow$ 0,85 (Figura 44).

[28] O professor se refere ao denominador 100 (cem) que possui dois zeros.

Figura 44: Possível caminho na horizontal.



Fonte: Autores da pesquisa.

Entretanto, não foi possível identificar, por meio do professor João, como o aluno percebe que $\frac{7}{10}$ e 0,70 se referem ao mesmo número racional, conforme sua afirmação previamente apresentada.

Em contra partida, o professor dá indícios de uso de técnicas para transformar frações decimais como $\frac{85}{100}$ na sua forma decimal 0,85, observando a relação do número de zeros no denominador ($\frac{85}{100}$) com o número de casas na representação decimal (0,85).

Na sequência a professora Diana se pronuncia:

> [Professor Diana]
> Eu acredito que eles (alunos) iriam para os sete nonos, só que a dificuldade seria fazer a divisão. Essa parte de sete décimos foi bem trabalhada com eles. Quando a gente coloca fração em forma de decimais, é o que a gente mais utiliza, sobre dez, sobre cem, sobre mil, eles sabem isso no decimal como ficaria. Eles sabem que é zero vírgula sete.

A pesquisadora se coloca perguntando: *como os alunos fazem para, a partir da fração sete décimos ($\frac{7}{10}$), obter zero vírgula sete (0,7)*?

> [Professora Diana]
>
> Eles sabem que sete décimos ($\frac{7}{10}$) tem uma vírgula, como é divisão, uma vírgula para a esquerda, acrescenta-se o zero, então se é cem, duas casas para a esquerda, então é assim, é a forma

> decimal que a gente já mostra para eles, os que eles mais conhecem, então não vejo dificuldade.

Observa-se que os professores João e Diana sinalizam a familiaridade em que seus alunos tiveram ao converter frações decimais para a sua correspondente representação decimais, por meio de uma regra, sem fazer contas, como por exemplo, dividir um número inteiro por 10, por 100, por 1000, "desloca-se" a vírgula para a esquerda.

Essa regra foi encontrada no livro didático do 6º ano, da coleção Praticando Matemática, conforme apresentada no Capítulo II, no item 2.2.1, deste trabalho, cujos autores indicam como transformar uma fração decimal numa representação decimal:

> [...] o número de casas decimais é igual ao número de zeros do denominador da fração decimal; na prática, dividir por dez equivale a deslocar a vírgula uma casa para a esquerda; quando dividimos por 100, deslocamos a vírgula duas casas para a esquerda; por 1000, deslocamos a vírgula três casas para a esquerda; por 10000, deslocamos a vírgula quatro casas para a esquerda, e assim por diante (ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 206, 211).

Na discussão, a professora Suzy reage se direcionando ao professor João, querendo compreendê-lo quanto aos procedimentos utilizados para transformar frações decimais na forma decimal: "*professor eu não entendi uma coisa, você falou um zero uma vírgula, dois zeros duas vírgulas?*"

O professor João esclarece: "*duas casas decimais. Eu até falo errado na sala de aula, duas vírgulas, três vírgulas, é só para ele (aluno) entender que ele tem que passar duas..., na verdade são duas vírgulas... só que ele apaga uma e deixa uma*".

Caracterizamos esse procedimento como de "conversão sem compreensão", e isso nos preocupa, pois,

> [...] não se trata de apresentar formas e fórmulas de se passar de uma representação para outra, mas sim de propor situações em que a própria criança perceba a equivalência entre elas. Pouco adianta fazer os alunos decorarem uma regra que não compreendem e que, talvez por isso, tenham inclusive dificuldades em repeti-la, como observamos até mesmo com

> alguns alunos nas séries finais do Ensino Fundamental (BITTAR; FREITAS, 2005, p. 159,172).

As ideias dos autores corroboram com as de Duval (2009, p. 62) sobre a “crença no imediatismo e na simplicidade de uma mudança de registro, e prender-se a esse tipo de atividade cognitiva seria colocar-se atrás em relação a um ensino considerado sério das matemáticas [...]”. Sendo assim, se apropriar de cada um dos sistemas semióticos e articulá-los é fundamental para a compreensão em matemática.

Diante da explanação do professor João, foi trazido ao grupo o seguinte questionamento: o *que vocês acham desse possível procedimento que alunos utilizariam para comparar essas representações?*

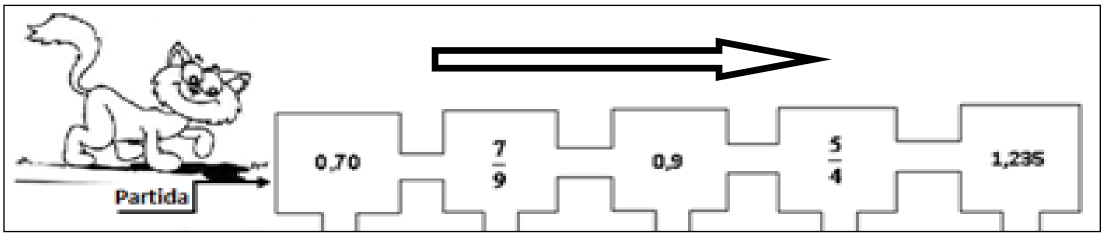
A professora Rafaela se posiciona favoravelmente aos autores, quando fala

> [Professora Rafaela]
>
> [...] eu acho importante ele (aluno) saber porque que anda duas casas e não ficar só guardando. Estou falando porque, frequentemente, a gente usa isso, mas eu acho que a gente tem que se desprender disso, tentar dar mais significado na aprendizagem e daí vai ficar de verdade guardado.

A fim de colher e explorar os pontos de vista do grupo em relação às dificuldades dos alunos na atividade proposta, foi retomado com os professores: *a atividade compreende vários caminhos que alunos podem tomar para resolvê-la. Vocês conseguem ver outras dificuldades nessa atividade?*

A professora Suzy aponta a possibilidade dos alunos fazerem o caminho na primeira linha, conforme Figura 45.

Figura 45 – Um possível caminho.



Fonte: Autores da pesquisa.

E verbaliza,

> [Professora Suzy]
> [...] zero vírgula setenta, sete nonos, zero vírgula nove, cinco quartos, e se fizer o cálculo da divisão de cinco quartos até a primeira casa decimal, vai cair no erro de novo, pois ele vai sair do um vírgula dois e vai para um vírgula duzentos e trinta e cinco.

Pode-se observar uma crença, por meio da fala da professora Suzy, a qual os alunos poderão permanecer nos registros monofuncionais, recorrendo à conversão do registro fracionário $\frac{5}{4}$ ao decimal. Porém, poderão apresentar dificuldades em finalizar o algoritmo da divisão, obtendo como quociente 'um vírgula dois' (1,2) e não um inteiro e vinte e cinco centésimos (1,25), que, consequentemente, poderão ser levados a direções equivocadas.

A professora Suzy ainda afirma:

> [Professora Suzy]
> [...] eu penso que, com certeza ele (aluno) faria cinco quartos como um vírgula dois e ele já iria lá na frente, no um vírgula duzentos e trinta e cinco. Então já iria direto, porque ele vai saber que um vírgula dois (1,2) pode ser escrito como um vírgula vinte (1,20), ou um vírgula duzentos (1,200), então vai entender que um vírgula dois é menor que um vírgula vinte e três.

Percebe-se que a professora acredita que seus alunos não terão dificuldades em comparar representações decimais. Todavia, não se pode constatar sobre a crença da professora em que seus alunos não terão dificuldades em aplicar tratamentos como estabelecer relações de equivalências entre décimos, centésimos e milésimos, já que a mesma usa o termo '*pode ser escrito*', e afirma ainda "*se o aluno concluir o algoritmo da divisão ele vai perceber, caso contrário cairá no erro*".

O professor João pontua que a maioria dos alunos, inclusive dos 9º anos, não conseguiu fazer a divisão, e a professora Suzy justifica que essa dificuldade é que os impedem de "transformar fração em número decimal".

A professora Rafaela compartilha com os professores sobre as dificuldades dos alunos em transformar frações na forma decimal, mas ressalta que "*eles* *(alunos) têm dificuldades de pegar*[29] *decimal, embora, nesse exercício, seria melhor que pegasse as frações e escrevessem em decimal. Mas, eles também têm dificuldade na atividade contrária, pegar decimal e passar para fração*".

As dificuldades dos alunos, em realizar a atividade de conversão nos dois sentidos, são percebidas pela professora, cuja afirmação parece se referir numa dificuldade de enfrentamento com o fenômeno da não congruência.

Duval (2009, p. 19) observa que a congruência ou a não-congruência corresponde a dois fatores muito fortes de sucesso ou fracasso implicados em mudança de sistema semiótico de representação:

> [...] toda tarefa na qual a conversão das representações é congruente dá lugar a uma taxa elevada de sucesso. Toda tarefa na qual a conversão não é congruente dá lugar a uma taxa mais ou menos fraca de sucesso, conforme o grau de não congruência.

A observação do autor vai ao encontro do relato da professora Suzy:

> [Professora Suzy]
> Eu acho que a dízima periódica é difícil para eles também, eu gosto de trabalhar no sétimo, mas eu percebo que é complicado. Eles não apreendem a dízima periódica, porque você trabalha, você explica, você fala, você insiste nos exercícios, mas passam quinze dias você coloca sete nonos e ele não consegue perceber que aquilo ali é zero vírgula sete sete sete, ele olha os sete nonos ele trava.

Na intenção de compreender a explanação da professora '*ele não consegue perceber*', foi feita a seguinte indagação: *como os alunos poderiam perceber que sete nonos é igual a zero vírgula sete sete sete...?*

A professora Suzy respondeu: "*eu não saberia te dizer. Mas, se eu não colocar, se eu não mostrar, se eu não falar: lembra o que nós vimos lá em dízima periódica? Se eu não voltar, eles por si só, a maioria não apreende o significado daquilo*."

Em consonância com Duval (2011a, p. 31), considera-se que "é enganosa a ideia de que todos os registros de representação de um mesmo objeto tenham igual conteúdo ou que deixem perceber uns nos outros".

---

[29] A professora quando fala 'pegar' está se referindo à escolha.

Nessa perspectiva, observa-se que a professora parece se referir a uma conversão que deveria ocorrer naturalmente, no sentido de $\frac{7}{9}$ (sete nonos) para sua forma decimal, o que é um equívoco, pois trata-se de mudança de representações, ainda que estas sejam do mesmo registro simbólico, sobretudo, pertencentes a registros simbólicos numéricos diferentes, fracionário e decimal, que, por conseguinte possuem propriedades e regras de funcionamento bem distintas. Além disso, ela deve estar considerando que a conversão para representação decimal 0,777... da fração $\frac{7}{9}$ possui um custo cognitivo mais elevado que a da fração decimal $\frac{7}{10}$, ou seja, a representação decimal das frações decimais é mais evidente do que as dízimas periódicas.

O professor João complementou:

> [Professor João]
> [...] eu vejo a necessidade de voltar lá nos tempos passados, quando o professor pegava um conteúdo desse e enchia a lousa, só para exercitar, só para fazer os exercícios, só para reconhecer, colocava bastante exercícios, para que o aluno reconhecesse de tanto ele praticar.

Observou-se, diante das falas dos professores Suzy e João, que reconhecer e apreender objetos matemáticos estão ligados à execução de listas de exercícios e a repetições.

No final dessa sessão, a professora Diana se manifesta falando sobre a atividade proposta pela pesquisadora: "*é uma atividade que nós deveríamos trabalhar mais na sala de aula, a gente tem que fazer os alunos se familiarizarem com isso aqui*".

A professora Diana parece reportar-se em oportunizar aos alunos atividades que envolvam simultaneamente representações fracionárias e decimais, favorecendo a atividade cognitiva de conversão, pois esta "requer então a coordenação dos registros no sujeito que a efetua" (DUVAL, 2009, p. 39).

3.3 Comparações entre representações fracionárias e decimais

Ressalta-se que cada sessão foi planejada com base no que foi discutido pelo grupo em sessões precedentes. Assim, discussões estabelecidas sobre a atividade 1, na segunda sessão, conduziram para o desencadeamento da elaboração de atividades subsequentes. Nas próximas sessões, foi seguido o mesmo procedimento, entregando ao grupo de professores até duas atividades matemáticas para analisarem sobre as possíveis dificuldades, nas quais os alunos poderiam apresentar para resolvê-las.

Dessa forma, as atividades 2 e 3 (Quadro 7 e 8) foram propostas ao grupo de professores, para a terceira sessão ocorrida, em 16 de março de 2015, ainda com uma abordagem acerca de comparação entre representações, fracionária e decimal, com o objetivo de “provocar” no grupo, outras discussões sobre o processo de resolução em termos de tratamentos e conversões e uma possível utilização de outras representações, conforme apêndices C e D, uma vez que os professores, em suas análises da atividade 1, permaneceram somente nas representações apresentadas.

3.3.1 Representações fracionária e decimal

A atividade 2 (Quadro 7) foi apresentada ao grupo de professores participantes, a fim de analisá-la, no sentido de explanar como os alunos a solucionariam, e quais possíveis dificuldades eles teriam ao resolvê-la. A atividade 2 solicita ao aluno verificar qual das duas representações se refere ao maior número racional.

Quadro 7 – Atividade 2: comparação entre uma representação fracionária e uma decimal de números racionais.

Atividade 2 Uma professora propôs aos seus alunos a seguinte questão: Qual dos números é o maior, $\frac{8}{10}$ ou 0,9? Como os alunos poderão resolver essa questão? Quais dificuldades eles poderão apresentar? Em 16/03/2015.

Fonte: Autores da pesquisa.

Ao se deparar com a atividade, a professora Suzy afirmou que "o aluno facilmente perceberá que zero vírgula nove (0,9) é maior que oito décimos ($\frac{8}{10}$) ".

A partir da colocação da professora, a pesquisadora questionou: *como o aluno facilmente perceberá que zero vírgula nove é maior que oito décimos?*

A professora Suzy explicou que "*ele (aluno) vai transformar oito décimos* (*$\frac{8}{10}$*) *em decimal. Ele vai fazer de cabeça, porque é automático, se é divisão ele vai andar uma casa para a esquerda*".

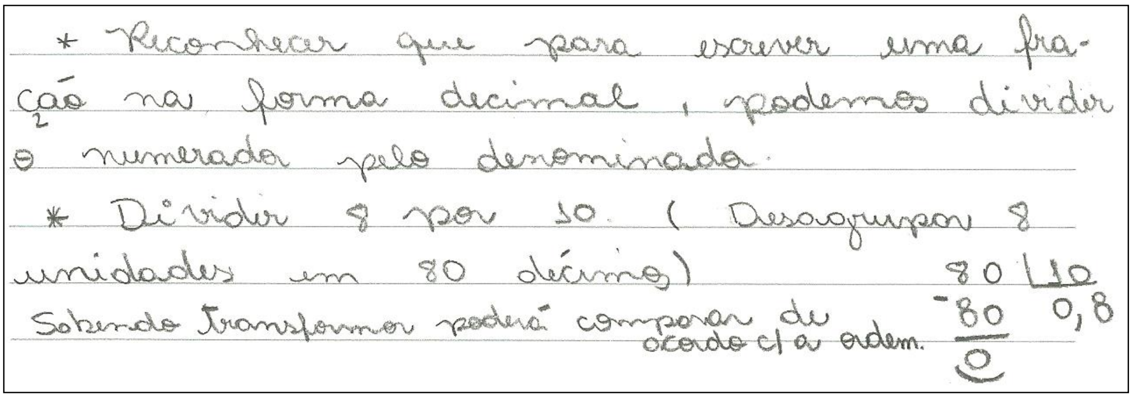
Ao encontro da fala da professora Suzy, a professora Diana ressaltou que transformar frações decimais para sua forma decimal "*eles (os alunos) teriam mais facilidade, acredito que se for outro denominador aí complica*". Nessa mesma direção, a professora Rafaela acrescentou, "*quando você vai dividir por dez tem a dica de andar com a vírgula*".

Considerando os comentários das professoras, é possível perceber procedimentos de conversões baseados no emprego de técnicas, "se é divisão ele vai andar uma casa para a esquerda", que poderá levar o aluno a não compreensão da equivalência entre a representação de partida e a de chegada.

Com base, ainda, nas explanações apresentadas, notou-se uma escolha implícita por alunos, segundo as professoras, para trabalharem com representações decimais, a fim de realizar a comparação entre 0,9 e $\frac{8}{10}$, que para isso converteriam a fração $\frac{8}{10}$ para sua forma decimal.

Entretanto, a professora Rafaela complementou que para realizar a conversão da forma fracionária para a decimal (Figura 46), os alunos teriam que reconhecer a fração $\frac{8}{10}$ como um quociente, realizando, então, o tratamento numérico do algoritmo da divisão e, consecutivamente, comparariam as ordens, parte inteira e décimo das representações 0,8 e 0,9.

Figura 46 – Conversão da representação fracionária para a decimal pelo algoritmo da divisão.


* Reconhecer que para escrever uma fração na forma decimal, podemos dividir o numerador pelo denominador.
* Dividir 8 por 10. (Desagrupar 8 unidades em 80 décimos)

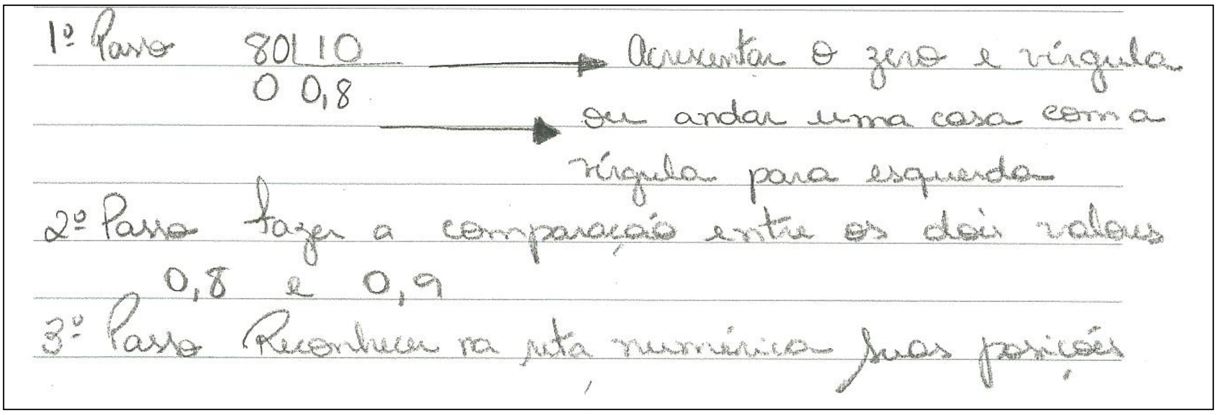
$$\begin{array}{r|l} 80 & 10 \\ \hline -80 & 0,8 \\ \hline 0 & \end{array}$$

Sabendo transformar poderá comparar de acordo c/ a ordem.

Fonte: Professora Rafaela.

A professora Diana se aproximou das colocações da professora Rafaela, em termos de procedimento de conversão, quando apresentou em suas análises registradas, o primeiro dentre os três “passos” (Figura 47) que, segundo ela, possivelmente, os alunos tomariam para resolver a atividade proposta, e verbalizou: “*se alunos tomarem a fração como quociente teriam dificuldade quando for fazer a divisão, se não lembrar que ele pode andar uma casa com a vírgula para a esquerda, ou, se não lembrar que ele pode preencher zero e colocar zero vírgula.*”

Figura 47 – Possíveis ‘passos’ que alunos tomariam para resolver a atividade 2.


1º Passo 80|10 → Acrescentar o zero e vírgula
0 0,8 → ou andar uma casa com a
vírgula para esquerda
2º Passo fazer a comparação entre os dois valores
0,8 e 0,9
3º Passo Reconhecer na reta numérica suas posições

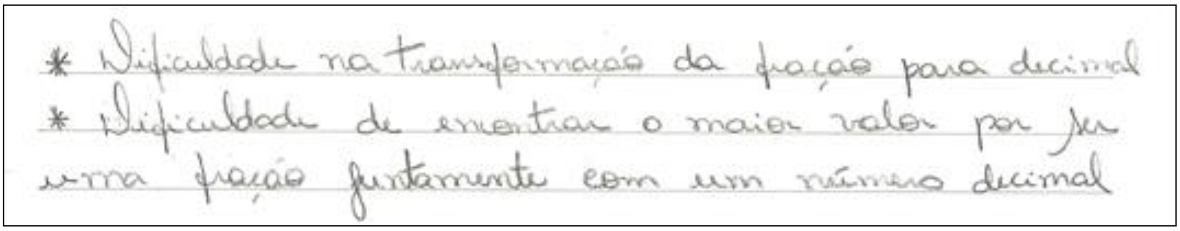
Fonte: Professora Diana.

Nesse sentido, a professora Diana complementou que, se os alunos conseguirem efetuar a divisão, utilizarão a reta numérica para identificarem as posições do 0,8 e do 0,9, sinalizando que não teriam dificuldade nesse procedimento e justifica: “*porque nós trabalhamos muito a reta numérica e esses números estão entre o zero e o um, são positivos e crescentes. Então, é um método que ele pode encontrar*”.

Assim, constatou-se uma possível utilização do registro geométrico, a reta graduada, para saber qual dos números racionais na sua representação decimal é o maior.

A professora Diana, ainda ressaltou (Figura 48) que: “*os alunos teriam dificuldades na transformação de fração para decimal*” e em comparar duas representações distintas, fracionária e decimal.

Figura 48 – Dificuldades de alunos na comparação de representações distintas.


* Dificuldade na transformação da fração para decimal
* Dificuldade de encontrar o maior valor por ser uma fração juntamente com um número decimal

Fonte: Professora Diana.

A professora Rafaela ainda colocou para o grupo sobre a possibilidade dos alunos “*transformarem o decimal em fração, o zero vírgula nove em fração*”. Diante disso, a pesquisadora indagou: *como os alunos fariam essa transformação?*

> [Professora Rafaela]
> Por exemplo, o zero é a parte inteira. O nove, é nove décimos, então se é nove décimos eles automaticamente sabem escrever nove sobre dez, fica mais fácil. Eu acho que pela leitura dos números eles conseguem transformar, fica bem mais fácil pela leitura do que ficar olhando o denominador e contando casas, denominador 10, uma casa.

A professora Rafaela explicitou que os alunos poderiam optar em comparar representações fracionárias, convertendo 0,9 para $\frac{9}{10}$, se apoiando na língua natural, que segundo ela seria mais fácil do que utilizar técnicas. A professora ainda reiterou que, os alunos ao optarem por comparar frações, ainda assim, “teriam dificuldades mesmo com denominadores iguais”: $\frac{8}{10}$ e $\frac{9}{10}$.

Todavia, observou-se que não foi levantada a possibilidade de se recorrer à língua natural para comparar as frações decimais ou quando se quer converter, por exemplo, a fração $\frac{8}{10}$ para sua forma decimal ou, ainda, comparar 0,9 e $\frac{8}{10}$.

Nessa perspectiva, enfatizou-se a importância do uso do registro na língua natural nessa atividade, pois, “a originalidade e a força das línguas naturais se devem ao fato de que elas cumprem, ao mesmo tempo, funções de comunicação e todas as funções cognitivas” (DUVAL, 2011b, p.74).

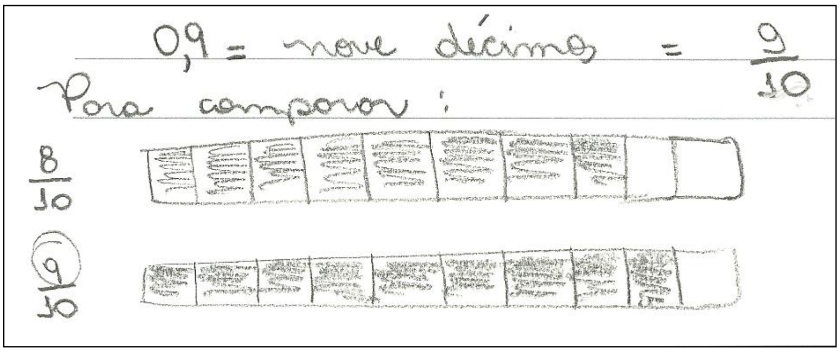
O professor João explanou que, “*se não tiver nenhuma ajuda do professor, porque é muito comum a gente dar a resposta ao aluno, a gente vai falando, dando dica, daqui a pouco a gente já respondeu tudo, a maioria dos alunos do 6º ao 9º anos acertariam”,* tendo em vista que *“olhariam o oito e o nove e que nove é maior que oito e então acertariam*”.

Para o professor João essa atividade deixaria a dúvida, “*se alunos acertaram porque sabem ou porque chutaram*”. Assim, sugeriu apresentar para alunos outra fração como $\frac{8}{7}$ para compararem com o 0,9. Mas, mesmo assim, “errariam novamente, porque não saberiam fazer essa transformação de fração para decimal”, ou seja, $\frac{8}{7}$ para sua forma decimal.

Nessa mesma direção, acrescentou a professora Rafaela: "*quando você vai dividir oito por sete, você não tem isso, andar com a vírgula, tem que fazer a divisão mesmo*".

A professora Rafaela revelou, ainda, que os alunos poderiam também utilizar a representação figural (Figura 49): "oito partes de dez e nove partes de dez, para poder identificar qual é o maior".

Figura 49 – Utilização de representações distintas para compará-las.



Fonte: Professora Rafaela.

Pode-se observar, na Figura 49, a conversão de 0,9 para a língua natural, que por sua vez convertida para a representação fracionária, e ainda representada na forma figural.

3.3.2 Comparação de representações decimais de um mesmo número racional

A atividade 3 (Quadro 8) foi trazida no intuito de complementar as observações nas discussões desencadeadas pelos professores participantes da pesquisa. Essa atividade contempla a comparação entre representações decimais, cujo objetivo é investigar no grupo de professores uma possível utilização e mobilização de variadas representações em tratamentos e conversões.

A sessão foi iniciada com a entrega da atividade 3 ao grupo, solicitando-o que a analisassem, pensando como os alunos resolveriam essa atividade e quais dificuldades poderiam surgir no processo de sua resolução.

Quadro 8 – Atividade 3: comparação entre representações decimais de números racionais.

Atividade 3

Alunos precisam comparar os números:

0,120 e 0,12

Como esses alunos poderão executar essa atividade?
Quais possíveis dificuldades alunos poderão apresentar para a resolução desta atividade?

Em 16/03/2015.

Fonte: Autores da pesquisa.

A professora Suzy iniciou a discussão fazendo a seguinte observação:

> [Professora Suzy]
> Eu nunca tive a preocupação de dizer o porquê, de provar, de mostrar para eles (alunos), porque zero vírgula cento e vinte é igual a zero vírgula doze! Eu sempre disse, zero vírgula cento e vinte, zero vírgula mil e duzentos e aí vai. Mas é importante você mostrar, agora fazendo aqui eu percebi. Na verdade você acaba simplificando por dez, por cem, e aí fica mais fácil dele assimilar também.
>
> [Pesquisadora]:
> Como seria essa simplificação?

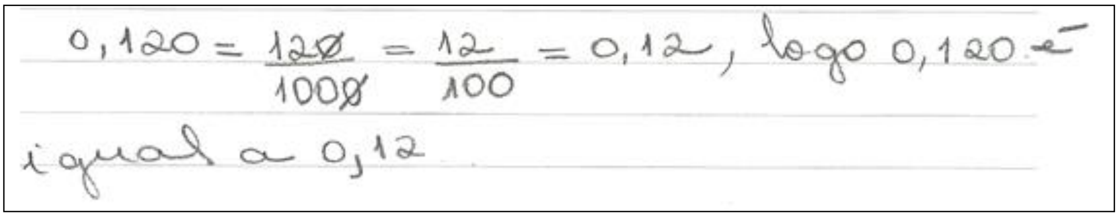
Ao analisar a atividade 3, a professora Suzy conclui sobre a importância de se justificar ao aluno as equivalências como 0,12 e 0,120, e para isso, sugeriu a conversão das representações decimais para fracionárias, utilizando a regra já mencionada na sessão anterior e procedimentos de tratamento de simplificação.

> [Professora Suzy]
> [...] em cima o número sem a vírgula, no numerador. No denominador o número um seguido de tantos zeros quantos forem as casas após a vírgula. Então ficaria, zero cento e vinte, cancelaria o zero, ficaria cento e vinte sobre mil, e aí dá para

> simplificar por dez, porque os dois terminam em zero, simplificando por dez ficaria doze sobre cem, e transformando doze centésimos (0,12) também em fração vai ficar doze centésimos (12/100) daí ele percebe que são iguais.

Observa-se, na Figura 50, a justificativa para mostrar a equivalência.

Figura 50 – Justificativa para mostrar a equivalência.



$0,120 = \frac{12\cancel{0}}{100\cancel{0}} = \frac{12}{100} = 0,12$, logo 0,120 é igual a 0,12

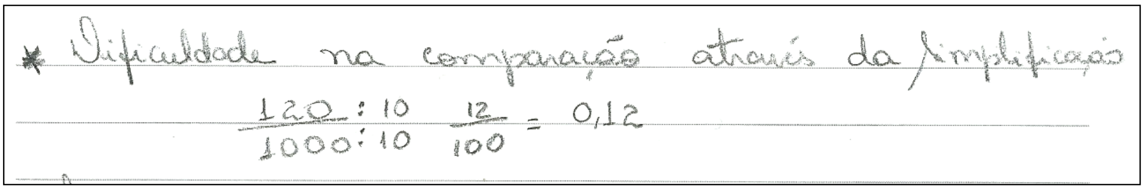
Fonte: Professora Suzy.

A explanação da professora Rafaela foi em direção à da professora Suzy, todavia, apresentou para o grupo a possibilidade e facilidade dos alunos compararem 0,12 e 0,120, realizando a conversão das representações para a fracionária, utilizando a “leitura dos números” para, então, realizarem tratamentos de simplificações.

> [Professora Rafaela]
> Se o aluno reconhece as casas decimais, décimos, centésimos, milésimos, eu tenho cento e vinte milésimos, automaticamente, cento e vinte sobre mil, aí décimos, centésimos, então eu tenho doze centésimos. Eu acho mais fácil ele assimilar fração com a leitura do número, doze sobre cem, depois fazer as simplificações, como a professora falou.

Nessa direção, a professora Diana explicitou, em suas análises escritas, sobre a possibilidade de os alunos apresentarem dificuldades no tratamento numérico de simplificação (Figura 51).

Figura 51 - Possível dificuldade de alunos no tratamento numérico de simplificação.



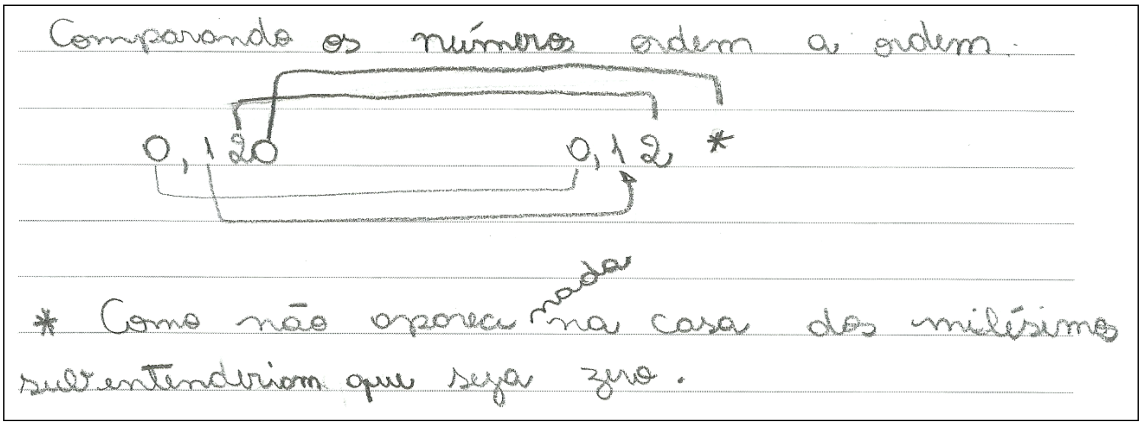
* Dificuldade na comparação através da simplificação

$\frac{120 : 10}{1000 : 10} \; \frac{12}{100} = 0,12$

Fonte: Professora Diana.

A professora Rafaela revelou que essa possibilidade de ‘leitura do número’ não foi colocada em suas análises escritas, mas, apenas a comparação das representações sem recorrer às conversões, “*analisando as ordens, parte inteira, zero e zero, décimos, um e um, centésimos, dois e dois, milésimos zero de um lado e no outro não tem nada, é zero também*”, como indica a Figura 52.

Figura 52 – Comparação entre as ordens das representações decimais.



Fonte: Professora Rafaela.

O professor João comparou a atividade 3 com a 2, e considerou que os alunos teriam mais dificuldades em resolver a atividade 3 do que a atividade 2, afirmando: “*essa atividade (atividade 3) seria mais difícil do que a primeira (atividade 2), teria mais erro*”, e justificou essa dificuldade pelo fato de “*transformar do decimal para fração, com três (casas) decimais*”.

Para clarificar a explanação do professor João, a pesquisadora indagou: *qual seria a dificuldade dos alunos nessa transformação?*

De acordo com o relato do professor João, para transformar o decimal para fração, os alunos deveriam ‘ter em mente’ algumas regras:

> [Professor João]
> [...] é porque entra uma outra regra que eles (alunos) teriam que ter em mente. Tem três casas decimais, então o denominador é um número acompanhado de três zeros, tem duas casas decimais então o número é acompanhado de dois zeros. Então, ele teria que ter em mente isso daí para poder transformar numa fração, tem quatro casas decimais depois da vírgula, então lá embaixo é o número dez mil.

O professor João deu indícios de que para comparar as representações 0,120 e 0,12, os alunos deveriam transformá-las na sua forma fracionária, e nessa intenção, teriam dificuldades em realizar a conversão, relacionando o número de casas decimais com o número de zeros que teria o denominador das frações, caso não tenham isso em mente.

Quando o professor disse: "*ele teria que ter em mente isso daí, para poder transformar numa fração*", pareceu que o procedimento de conversão está vinculado unicamente à regra apresentada.

Assim, a partir da possível dificuldade explanada pelo professor João, evidenciou-se a ausência de coordenação entre as representações, decimais e fracionárias, e o não reconhecimento da relação que as duas têm entre si, como representantes de um mesmo número racional, pois nesta regra, há um abandono do registro de partida, importando tão somente o registro de chegada.

Em Duval (2009, p. 62-63), não se percebe isso claramente

> [...] a mudança de registro é frequentemente efetuada com fins de simplicidade e de economia de tratamento: uma vez efetuada a conversão, apegamo-nos ao registro no qual trabalhamos, aquele do discurso, ou aquele da escritura algébrica, ou aquele dos números. [...] a conversão das representações é, para a aprendizagem, uma atividade tão fundamental quanto as atividades de formação ou de tratamento. Por que ela sozinha, pode favorecer a coordenação dos registros de representação.

Assim, o procedimento simples e automatizado utilizado para transformar 0,120 e 0,12 em $\frac{12}{1000}$ e $\frac{12}{100}$, respectivamente, pode não oferecer significado ao aluno e consequentemente, não favorecer a aprendizagem matemática. E, portanto, ainda que alunos 'tivessem em mente' a regra explicitada pelo professor João, não é garantia de uma compreensão e apreensão do objeto matemático em jogo.

Vale, ainda, considerar que a atividade de conversão de 0,120 para $\frac{120}{1000}$ e de 0,12 para $\frac{12}{100}$ remete-se ao caso de congruência, pois, "observa-se que uma correspondência termo a termo entre as unidades significantes respectivas é suficiente para efetuar a conversão. [...] a conversão inversa permite reencontrar a expressão do registro de partida” (DUVAL, 2009, p. 64-65). Vale esclarecer também que as unidades significantes, neste caso, são 0,120 e $\frac{120}{1000}$,e ainda 0,12 e $\frac{12}{100}$.

Dessa forma,

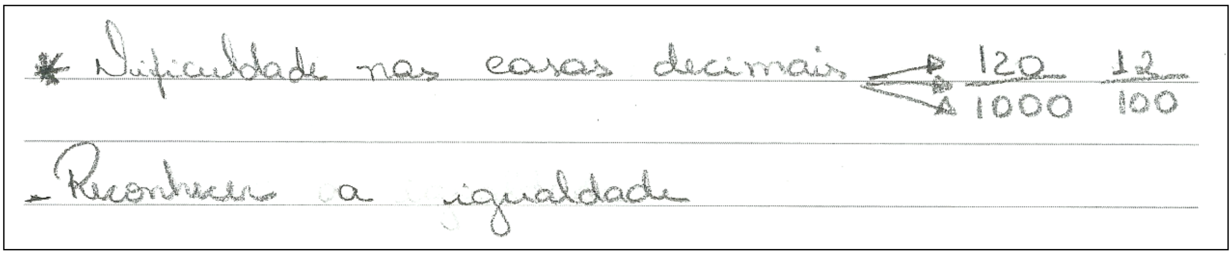
> [...] não apenas o tempo de tratamento aumenta, mas a conversão pode revelar impossível de efetuar, ou mesmo de compreender, se não houver uma aprendizagem prévia concernente às especificidades semióticas de formação e de tratamento de representação que são próprias a cada um dos registros em presença (DUVAL, 2009, p. 66).

Nesse sentido, compreender as especificidades de cada registro pode levar à escolha de se trabalhar com este ou aquele registro.

Apesar de o professor João ter levantado a possibilidade de seus alunos fazerem a conversão para compararem representações fracionárias (registros de chegada), não explicitou como isso seria realizado.

Entretanto, constatou-se que a professora Diana revelou implicitamente uma aproximação às falas do professor João, por meio de suas observações escritas, quanto à dificuldade na utilização da regra mencionada, acrescentando ainda, uma possível dificuldade de os alunos não reconhecerem que $\frac{120}{1000}$ e $\frac{12}{100}$ representam o mesmo número racional, conforme Figura 53.

Figura 53 – Conversão utilizando regras e comparação entre as representações fracionárias.



* Dificuldade nas casas decimais → $\frac{120}{1000}$ $\frac{12}{100}$

- Reconhecer a igualdade

Fonte: Professora Diana.

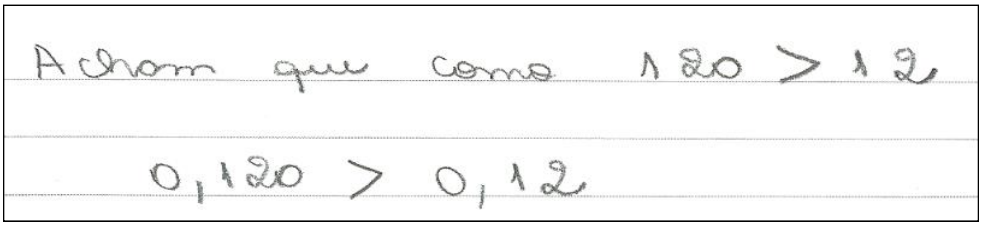
A partir do exposto pela professora Diana e professor João, ressalta-se que o emprego de regras memorizadas e utilizadas mecanicamente não tem ligação nenhuma com a aquisição conceitual do objeto representado, e nem tão pouco com a compreensão das especificidades dos dois registros, tanto ao de partida quanto ao de chegada, pois, observou-se, segundo os professores, um possível "interesse em converter" um registro a outro, contudo, uma dificuldade em comparar os registros de chegada, $\frac{120}{1000}$ e $\frac{12}{100}$.

Por outro lado, as professoras Rafaela e Diana se aproximaram ao apresentar outra provável dificuldade, a qual os alunos poderiam ter:

> [Professora Rafaela]
> Eles vão olhar o cento e vinte e o doze como se fossem números naturais.
>
> [Professora Diana]
> Eu tenho certeza que primeiro eles fariam isso, essa comparação de cento e vinte e, doze, de repente colocaria maior ou menor, mas jamais uma igualdade.

Entende-se que essa dificuldade pode estar relacionada com a influência predominante dos números naturais, na qual os alunos ao compararem as representações decimais, comparam o número de casas decimais, constituindo-o como um número natural, sem perceber a estrutura global do número, podendo a partir disso concluir que 0,120 é maior que 0,12, conforme registro da professora Rafaela (Figura 54).

Figura 54 - Possível comparação entre representações decimais.


Acham que como 120 > 12
0,120 > 0,12

Fonte: Professora Rafaela.

Por meio dos relatos dos professores, percebe-se a importância e necessidade da

> [...] compreensão do sistema de numeração decimal, identificando o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam e extensão das regras desse sistema para leitura, escrita e representação dos números racionais na forma decimal (BRASIL, 1998, p. 71).

Entretanto, “não parece necessário insistir mais sobre a necessidade de dominar a escrita decimal para os números superiores à unidade, antes de estendê-la de forma compreensiva à escrita de números inferiores a 1” (PÉREZ, 2009, p.142, *tradução nossa*[30]).

Nesse sentido, ressalta-se a necessidade de se trabalhar sistematicamente as regras que regem o sistema de numeração decimal para que os alunos consigam compreender que

> [...] cada lugar à direita implica um valor relativo dez vezes menor, que os números escritos à direita do ponto decimal são menores que um, que todos os algarismos formam um só número e que não se trata de números separados por um ponto” (AVILA; GARCIA, 2008, p. 70, *tradução nossa*[31]).

Pode-se dizer “que cada lugar situado à direita representa a décima parte do valor de lugar precedente. Da mesma forma que as potências da base de numeração são chamadas de dezenas, centenas, milhares etc, pode-se citar as unidades fracionárias resultantes da divisão por potências de 10, chamando décimos, centésimos, milésimos etc (PÉREZ, 2009, p. 83, *tradução nossa*[32]).

Ressalta-se que para um trabalho envolvendo equivalências entre representações decimais ou entre representações decimais e fracionárias de um mesmo número racional, sobretudo, abrangendo comparações entre representações, o professor poderá lançar mão da utilização simultânea de representações figurais manipuláveis ou não e da língua natural.

---

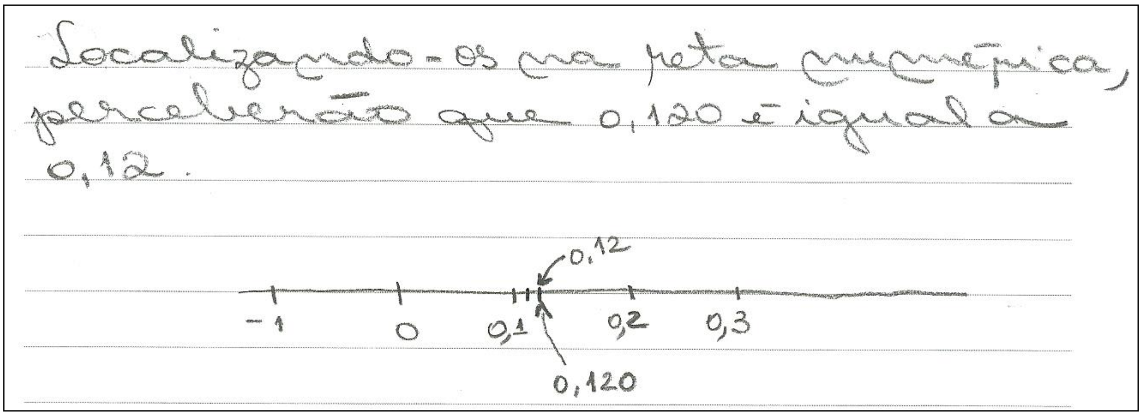
[30] *No parece necessário insistir más sobre la necessidade de dominar la escritura decimal para los números superiores a la unidad, antes de poder extenderla de forma compreensiva a la escritura de números inferiores a 1*(PÉREZ, 2009, p. 142).

[31] *[...] cada lugar a la derecha implica um valor relativo diez veces menor,que los números escritos a la derecha del punto decimal son menores que uno, que todas las cifras conformam um solo número y que no se trata de dos números separados por um punto* (AVILA; GARCIA, 2008, p. 70).

[32] *[...] que cada lugar situado a la derecha de uno dado representa la décima parte del valor del lugar precedente. De la misma forma que a las potencias de la base de numeración las hemos llamado : decenas, centenas, unidades de mil, etc., podemos nombrar a las unidades fraccionarias que resultan de dividir la unidade por potencias de 10, llamándolas décimas, centésimas, milésimas, etc* (PÉREZ, 2009, p. 83-84).

No final desta sessão, a professora Suzy apresentou ainda um possível caminho para os alunos utilizarem a reta graduada para “localizarem” 0,120 e 0,12: “*eu coloquei na reta numérica também. Coloquei zero vírgula um, zero vírgula dois, zero vírgula três!*” (Figura 55).

Figura 55- Utilização da reta graduada para comparar representações decimais.



Fonte: Professora Suzy.

A pesquisadora perguntou: “*como eles localizariam esses números na reta?*”

> [Professora Suzy]
> Entre o zero vírgula um e o zero vírgula dois.
>
> [Pesquisadora]
> Alunos poderiam localizar esses números na reta de outra maneira?
>
> [Professora Suzy]
> Não visualizei.

De acordo com a Figura 54, e com a fala da professora Suzy, há indícios de que os alunos localizariam 0,12 e 0,120 na reta e ‘perceberiam’ que as representações decimais se referem ao mesmo número racional, porém, essa percepção não foi explicitada.

3.6 Comparação de representações decimais de números racionais

Na quarta sessão realizada, no dia 24 de março de 2015, novas discussões foram estabelecidas pelo grupo de professores sobre a atividade 4, envolvendo comparação de representações decimais de números racionais distintos (Quadro 9).

Quadro 9 – Atividade 4: comparação entre representações decimais de números racionais.

Atividade 4

Uma professora solicitou que seus alunos comparassem os números do quadro.

0,2 e 0,12

Quais dificuldades alunos poderão encontrar ao realizar essa atividade?

Em 24/03/2015.

Fonte: Autores da pesquisa.

Os professores João, Rafaela e Diana relataram sobre as dificuldades dos alunos em compreenderem a estrutura de representações decimais, conforme já discutido na terceira sessão, entretanto, acrescentaram a dificuldade da ‘leitura decimal’:

> [Professor João]
> Ele não tem conhecimento de decimais. De saber a leitura decimal.

> [Professora Rafaela]
> E o aluno vê muito assim, ele só enxerga o que ele tá vendo ali, zero vírgula dois e zero vírgula doze, então doze é maior que dois, ele não vai além do que está no papel, não tem uma visão investigativa, de ele estudar esse zero vírgula dois, ver o que significa esse zero vírgula dois.

> [Professora Diana]
> Eu já sinto essa dificuldade no sétimo, dificuldade na leitura. Ele não lembra que é um decimal, como é a leitura desse decimal, como ele vai colocar em forma de fração. A leitura já vem dizendo. Quem faz a leitura sabe colocar na forma de fração.

A professora Diana acreditava que se o aluno conseguisse fazer a leitura da representação decimal naturalmente conseguiria representá-lo na forma fracionária.

Na sequência, a pesquisadora indagou o grupo: *vocês acham que quando os alunos fazem a leitura por exemplo, dois décimos, doze centésimos eles pensam numa fração? Eles visualizam uma fração?*

> [Professora Diana]
> Depende muito do aluno.
>
> [Professor João]
> Pouquíssimos alunos. Só se eu pedisse: transforme zero vírgula dois em fração!
>
> [Professora Rafaela]
> Acho muito difícil um aluno relacionar com fração.

De acordo com as explanações dos professores, pode-se inferir que alunos diante de representações decimais, ainda, que façam a leitura desses números, tendem a permanecer nelas, pois, segundo o professor João e a professora Rafaela não é espontâneo relacionar a leitura com a atividade cognitiva de conversão para representações fracionárias decimais.

A professora Rafaela acrescentou que "eles (alunos) têm dificuldade em reconhecer que zero vírgula dois é zero vírgula vinte" e sugeriu mostrar para os alunos essa equivalência, partindo para a conversão fracionária de 0,2 como indica a Figura 56. E afirmou, "*aí se ele tiver essa habilidade ele consegue comparar sem problema*".

Figura 56 - Como reconhecer que 0,2 é 0,20.

$$0,2 = \frac{2^{\times 10}}{10_{\times 10}} = \frac{20}{100} = 0,20$$

Fonte: Professora Rafaela.

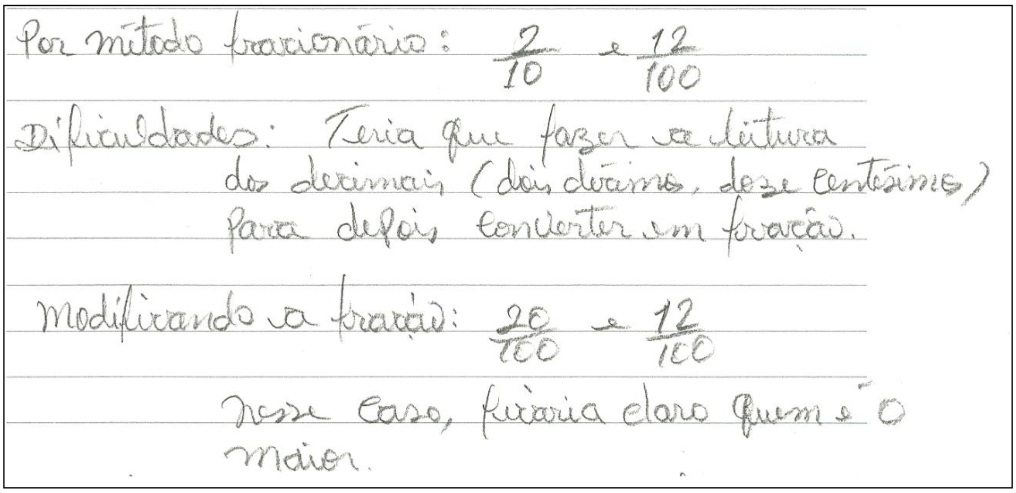
Entretanto, o professor João se posicionou dizendo:

> [Professor João]
> Eu pensei assim, transformaria na forma de fração o dois décimos e doze centésimos, acrescentaria o zero, aí ficaria vinte

> centésimos e doze centésimos, aí ficaria tudo claro. Se ele acrescentasse o zero, pronto! Resolveria tudo.

Conforme sua fala, o professor João descreveu (Figura 57).

Figura 57 - Como comparar 0,2 e 0,12.



Por método fracionário: $\frac{2}{10}$ e $\frac{12}{100}$

Dificuldades: Teria que fazer a leitura dos decimais (dois décimos, doze centésimos) para depois converter em fração.

Modificando a fração: $\frac{20}{100}$ e $\frac{12}{100}$

nesse caso, ficaria claro quem é o maior.

Fonte: Professor João.

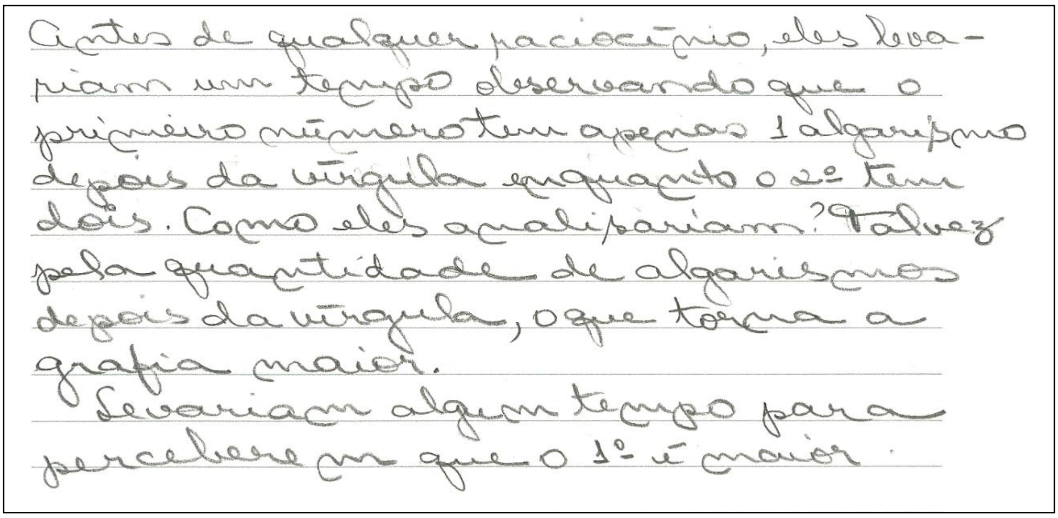
Na sequência a professora Rafaela e a professora Diana se posicionaram fazendo as seguintes indagações:

> [Professora Rafaela]
> Mas será que ele sabe o que significa o que é acrescentar aqueles zeros? Ele sabe que está multiplicando essa fração numerador e denominador por dez? Por isso ele tem vinte centésimos? Ou ele está acrescentando aquele zero porque o professor falou para ele? *Pode acrescentar zero aqui*. Acho importante a gente construir esse conceito com o aluno, mostrando realmente o que foi feito.
>
> [Professora Diana]
> Será que nós estamos fazendo isso? Eu falo por mim. Às vezes a gente não para igual ela falou, pra fazer esse conceito para o aluno, explicar.

Contudo, as professoras reconheceram que "*alunos não iam nem mexer com fração. O mais comum é comparar o dois com o doze*" (professora Rafaela). "*Se ele tem dificuldade, então a gente vai ter que interferir nisso aí*", ressaltou a professora Diana.

Por outro lado, a professora Suzy trouxe em suas análises escritas outra possível dificuldade na realização da atividade 4, acreditando que os alunos se remeteriam à quantidade de algarismos após a vírgula do 0,2 e do 0,12, para dizer qual é o maior (Figura 58).

Figura 58 - Contar quantidade de algarismos após a vírgula.



Antes de qualquer raciocínio, eles levariam um tempo observando que o primeiro número tem apenas 1 algarismo depois da vírgula enquanto o 2º tem dois. Como eles analisariam? Talvez pela quantidade de algarismos depois da vírgula, o que torna a grafia maior.
Levariam algum tempo para perceberem que o 1º é maior.

Fonte: Professora Suzy.

3.7 Comparação de representações fracionárias equivalentes

Na quinta sessão, ocorrida em 30 de março de 2015, foi levada a atividade 5, envolvendo comparação entre representações fracionárias (Quadro 10). A intenção da pesquisadora, nessa atividade, era a de investigar o que o grupo de professores poderiam lhe revelar, já que se referiam às representações fracionárias de um mesmo número racional, e ainda, não se tratavam de frações decimais, mas frações equivalentes a frações decimais.

Quadro 10 – Atividade 5: comparação entre representações fracionárias de números racionais.

Atividade 5

Um professor solicitou aos seus alunos que comparassem os números abaixo:

$$\frac{3}{2} \text{ e } \frac{6}{4}$$

Quais possíveis dificuldades alunos poderão ter ao resolverem essa atividade?

Em 30/03/2015.

Fonte: Autores da pesquisa.

A professora Suzy considerou que os alunos, do 6º ano, teriam dificuldades em resolver a atividade proposta, e por isso, "eles diriam de imediato que $\frac{6}{4}$ é maior que $\frac{3}{2}$" :

> [Professora Suzy]
> Pensando nos valores absolutos, do numerador e denominador, sem considerar fração. 6 é maior que 3 e 4 é maior que 2. Eles (alunos) comparariam numerador com numerador, denominador com denominador. Isso poderia acontecer com alunos do sexto ano.

Pode-se notar que a partir das análises escritas das professoras Diana (Figura 59) e Rafaela (Figura 60) houve concordância com a professora Suzy.

Figura 59 – Não reconhecimento de duas representações fracionárias de um mesmo número racional.

* O aluno poderá de começo fazer a comparação nos valores dos números, levando a pensar que $\frac{6}{4}$ é maior que $\frac{3}{2}$.

Fonte: Professora Diana.

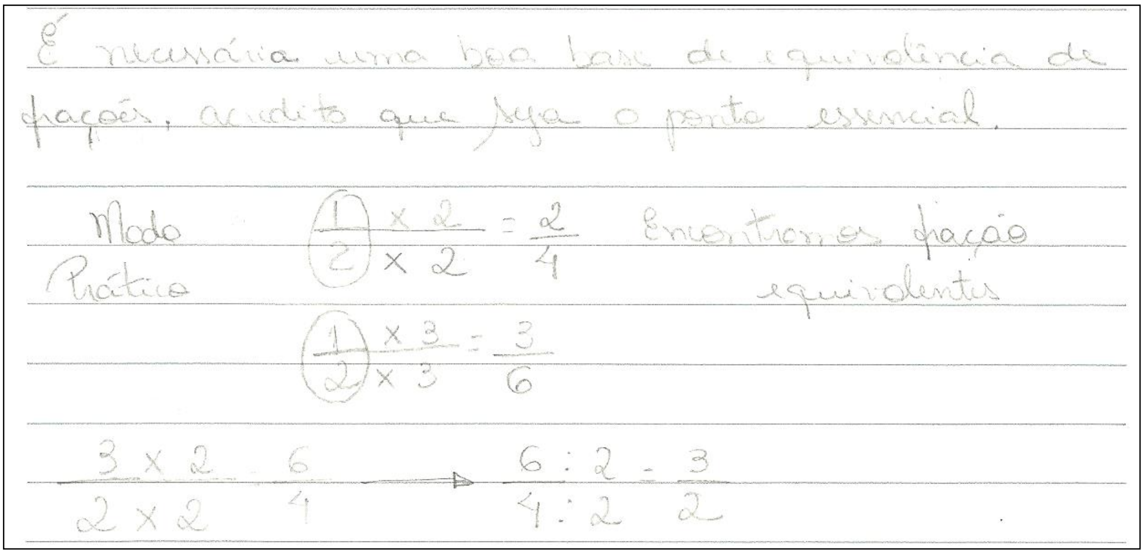
Figura 60 – Não reconhecimento de duas representações fracionárias de um mesmo número racional.

Achariam que $\frac{3}{2} < \frac{6}{4}$ pois levariam em consideração que $3<6$ e $2<4$.

Fonte: Professora Rafaela.

Entretanto, a professora Suzy considerou um possível tratamento numérico, explicitando: "*se pensarem (alunos) que é possível a simplificação dos seis quartos, logo perceberão que as duas frações são iguais*". Ao encontro disso, a professora Diana sinalizou que para optar por este procedimento, os alunos necessitariam ter uma ‘boa base de equivalência de frações’, e descreve um ‘modo prático’ para obter frações equivalentes e realizar a comparação entre elas (Figura 61).

Figura 61 – Comparação de representações fracionárias: utilização do ‘modo prático’ para obter frações equivalentes.


É necessária uma boa base de equivalência de frações, acredito que seja o ponto essencial.

Modo Prático $\frac{1 \times 2}{2 \times 2} = \frac{2}{4}$ Encontramos fração equivalentes

$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$

$\frac{3 \times 2}{2 \times 2} = \frac{6}{4} \rightarrow \frac{6 : 2}{4 : 2} = \frac{3}{2}$

Fonte: Professora Diana.

Esse ‘modo prático’ de obter frações equivalentes foi reconhecido, no estudo preliminar dos livros didáticos dos 6º e 7º anos, apresentados nesta dissertação, no Capítulo II, item 2.2.1, que foram utilizados pelo grupo de professores.

As professoras Suzy e Diana também levantaram a possibilidade de os alunos reconhecerem as frações como quociente, realizando o algoritmo da divisão de 3 por 2 e de 6 por 4, encontrando o resultado 1,5. Dessa forma, “*perceberiam que as duas frações são iguais*”, afirma a professora Suzy.

Porém, o professor João se posicionou dizendo que os alunos terão dificuldades, neste procedimento, por “*não entender que toda fração é divisão*”.

Por outro lado, a professora Rafaela acreditava que os alunos tentariam fazer as divisões, mas teriam dificuldades em concluí-las. Assim, partiriam para a comparação dos restos das divisões, conforme (Figura 62).

Figura 62 – Dificuldades na conversão para representações decimais.

Transformando os números em decimais teríamos

$$\begin{array}{r|l} 3 & 2 \\ \hline -2 & 1 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 4 \\ \hline -4 & 1 \\ 2 & \end{array}$$

Como a divisão de 6 por 4 apresenta maior resto, subentenderiam que $\frac{6}{4} > \frac{3}{2}$

* Teriam dificuldades em continuar a divisão obtendo números decimais

Fonte: Professora Rafaela.

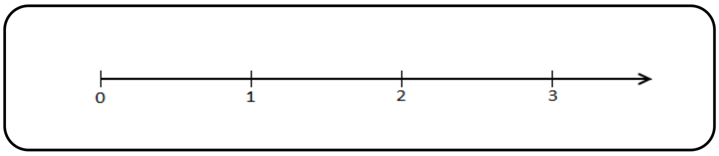
3.8 Representações de números racionais na reta graduada

Na sexta sessão, ocorrida no dia 6 de abril de 2015, foi proposto ao grupo de professores analisar estratégias, as quais os alunos poderiam ter para resolver a atividade 6, que aborda a localização de representações de números racionais na reta graduada.

Quadro 11 – Atividade 6: representações de números racionais na reta graduada.

Atividade 6

Um professor desenhou uma reta no quadro-negro e solicitou aos alunos que localizassem os números $0{,}22...$; $2\frac{1}{2}$; $1\frac{1}{3}$ na mesma.



Quais possíveis estratégias alunos poderão utilizar para representar os números na reta?

Em 06/04/2015.

Fonte: Autores da pesquisa.

A professora Diana iniciou a discussão relatando dificuldades de seus alunos em localizar frações na reta numérica, referindo-se à conversão para forma decimal, uma vez que sinalizou a necessidade de transformá-las em representações decimais para localizar, na reta, representações fracionárias, quando utilizou a expressão '*eu trabalho o método da divisão*'.

> [Professora Diana]
> Eu estou aqui me deparando com um problema que eu encontro no sétimo ano, quando ele (aluno) ver um número decimal é tranquilo para ele localizar na reta, não vejo dificuldade nenhuma. Quando é na forma de fração aí começa a dificuldade. Eu noto com o sétimo que eu trabalho até mesmo com o oitavo, é uma dificuldade na transformação desse número para localizar ele ali. É algo que teria que se focar mais.
> Na última avaliação mensal teve uma questão. Foi uma das questões mais erradas. Eu fico procurando meios para chegar nesses alunos para conseguir melhorar isso daí.
> Eu acredito que ainda é um problema de divisão, porque pelo menos eu trabalho o método da divisão. Não sei se vocês têm outro método? Até é bom ouvir as opiniões de outros colegas, de repente... ó você poderia ir por esse caminho.

A professora Suzy explanou que também trabalha com seus alunos a localização de frações na reta graduada, sugerindo-os, inicialmente, convertê-las para sua forma decimal. Entretanto, apresentou uma sugestão para o grupo de representar frações em sua forma mista, sem transformá-las para a representação decimal, mas recorrendo a fazer subdivisões congruentes na unidade, interpretando as frações como medidas, e complementou que acrescentará esse caminho em suas aulas.

> [Professora Suzy]
> Eu transformava imediatamente, eu falava para eles fração para reta tem que dividir, mas ultimamente, vendo em casa uns exercícios, comecei a notar que de repente, se você pegar por exemplo o um inteiro e um terço, ele já sabe que está entre um e dois, como o denominador é três ele vai dividir esse intervalo em três partes e dessas três partes ele marcaria a primeira, porque é um de três. Estou até pensando neste ano, em trabalhar com os alunos assim, a hora que eu chegar aqui[33].

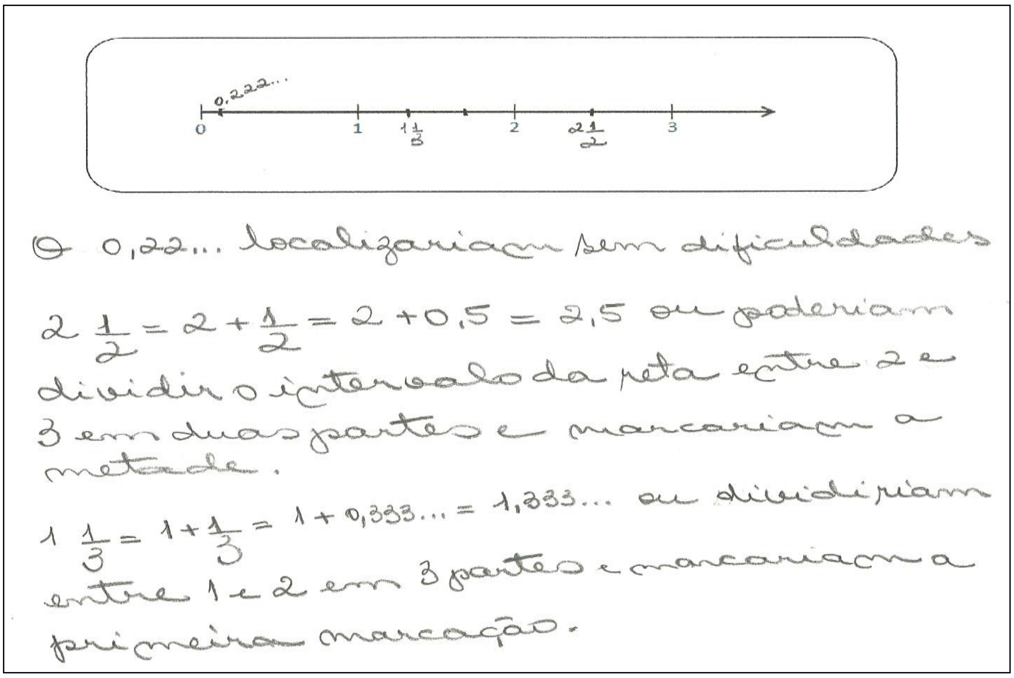
[33] A professora se refere na abordagem de localizar representações fracionárias ou na forma mista de números racionais na reta numérica.

Em concordância com a professora Suzy, a Diana se manifestou: "*nós iremos trabalhar assim*" e, ainda desabafa sobre as dificuldades pelas quais os alunos trazem para o 8º ano.

> [Professora Diana]
> Eu estou falando da dificuldade que vem para o oitavo, eu gostaria que não viesse com essa dificuldade, não divide, não reconhece o número. É uma coisa que está me incomodando.
> Parece para mim prático, mas eu tenho que pensar no meu aluno. Mas e ele? Será que ele está entendo o que eu estou fazendo?

E, assim, a professora Suzy prosseguiu a discussão lendo suas análises escritas (Figura 63):

Figura 63 – Localização de representações decimais e na forma mista de números racionais.



Fonte: Professora Suzy.

O professor João se manifestou dizendo que achou interessante localizar o número na forma mista na reta numérica, sem precisar transformar para a forma decimal, e complementou:

> [Professora João]
> eu acredito que a divisão seja o principal problema dos números fracionários. A transformação do fracionário para o inteiro ou decimal, que sempre passa pela divisão, ou ele faz mentalmente ou faz no lápis, aí vem a dificuldade porque a divisão é uma operação difícil. E a fração não é natural, você não olha uma

> fração e você ver, precisa de interpretação, se fração fosse natural a maioria dos alunos enxergariam isso aí.

Fica evidente que a dificuldade de alunos, explicitada pelo professor João, não é só na operação de divisão, mas, também, em reconhecer que a fração tem significado de quociente. Ao encontro disso, a professora Suzy explanou "*que de repente se você coloca no quadro pedindo para eles dividirem um (1) por três (3), eles até fazem, mas pelo fato de ser fração, um terço, param, bloqueiam*".

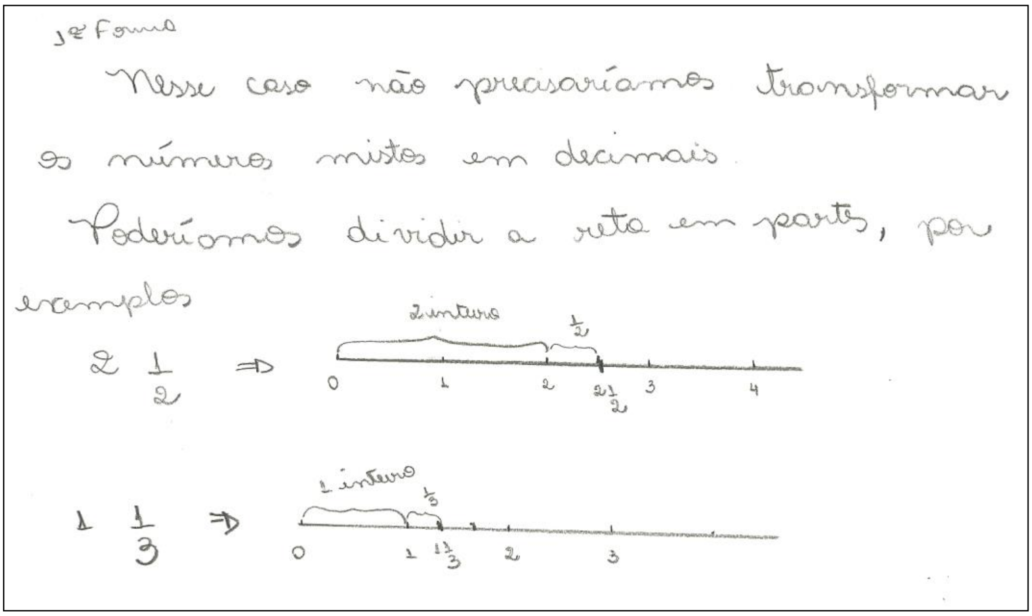
A pesquisadora indagou: *a dificuldade do aluno é em reconhecer a fração como divisão?*

> [Professora Suzy]
> Isso. Embora eles sejam treinados e muito, para reconhecer a fração como divisão.
>
> [Professora Diana]
> Sim. Interessante isso que ela falou! Por exemplo no 9º ano, divisão com radicais, se eu colocar raiz de 28 dividido por raiz de sete, ele faz, mas se eu colocar na forma de fração ele pergunta: que operação é essa aqui professora? Isso que ela falou é verdade. Aí eu notei, que eles não estão relacionando a fração com a divisão.
>
> [Professora João]
> Essa angústia é complicada. Porque é muito provável que isso aqui que a gente colocou como uma possível estratégia do aluno precisasse da interferência mesmo direta do professor, encaminhar isso aqui, essa atividade, porque se for deixar dificilmente ele vai conseguir.

Constatou-se, a partir da fala da professora Suzy, que treinar alunos não é garantia de uma compreensão matemática, faz-se necessário que os alunos conheçam os significados que uma fração pode apresentar em determinadas situações.

A partir das análises escritas da professora Rafaela, pode-se inferir que os alunos resolveriam a atividade, conforme sugestão da professora Suzy, '*dividir a reta em partes*' para localizar os números racionais na sua forma mista (Figura 64). E complementou, "q*ue eles também podem escrever todos os números na forma decimal*".

Figura 64 – Localização de representações na forma mista de números racionais na reta numérica.



Fonte: Professora Rafaela.

E o 0,222...? Alunos do 8º ano o transformaram para a forma fracionária para representá-lo na reta? Indaga a pesquisadora.

> [Professora Diana]
> Não. Eles localizam como está aqui 0,222...
>
> [Pesquisadora]
> Eles têm dificuldades em transformar dízimas periódicas na forma fracionária?
>
> [Professora Suzy]
> Não. Eles não têm essa dificuldade.
>
> [Professora Diana]
> Não. Falando assim da maioria né.
>
> [Pesquisadora]
> Como os alunos costumam fazer essa transformação?
>
> [Professora Diana]
> O livro traz dois métodos, a regra dos noves e trabalhar com aquela equação. A regra dos noves é a mais prática.
>
> [Pesquisadora]
> Como eles transformam dízima para a forma fracionária utilizando a regra dos noves?

> [Professora Diana]
> Por exemplo, 0,333...Então, ele sabe que vai usar um nove, porque o período é apenas um número[34], então ele coloca o nove no denominador e o numerador seria o próprio período, que é o três. Quando há uma parte inteira ele sabe que primeiro coloca na forma mista.

A professora Diana relatou que utilizou a regra dos noves, por achar '*mais prática*' para os alunos converterem dízimas periódicas na sua representação fracionária. "*Eles se adaptam mais. Você apresenta a outra regra, gasta umas seis linhas, o aluno já fala: Ah! Que difícil!*".

No final desta sessão, a professora Suzy exclamou: "*Gostei muito dessa atividade!*" E a professora Diana complementou: "*É bom, a gente aprende tanta coisa! Troca informações. Desabafa né*".

3.9 Possíveis formas de representar $3\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{10}$ e $\frac{7}{3}$

Na sétima sessão, ocorrida no dia 13 de abril de 2015, foi levada a atividade 7 abordando formas de representar $3\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{10}$ e $\frac{7}{3}$, no intuito de investigar o reconhecimento e utilização de outras representações de um mesmo número racional.

Quadro 12 – Atividade 7: Possíveis formas de representar números racionais.

Atividade 7

Um número pode ser representado de várias formas. Quais possíveis formas para representar os números do quadro?

$$3\frac{1}{2} , \frac{5}{6}, \frac{2}{10} \text{ e } \frac{7}{3}.$$

Quais possíveis estratégias alunos poderão utilizar para representar estes números de outras formas?

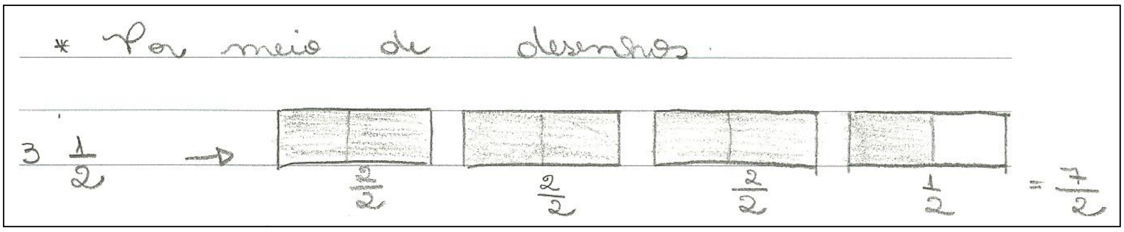
Em 13/04/2015.

Fonte: Autores da pesquisa.

[34] A professora Diana se referiu ao período, número que se repete, que é número 3 formado por apenas um algarismo.

A professora Suzy relatou que os alunos do 6º ano "*não têm maturidade para pensar em outras formas de representação desses números, talvez conseguissem com intervenção*". Em contrapartida, o professor João se aproximou da professora Rafaela (Figura 65), quando colocou que o número misto poderá ser representado pelos alunos na forma de desenho "*três barras inteiras e uma pela metade*".

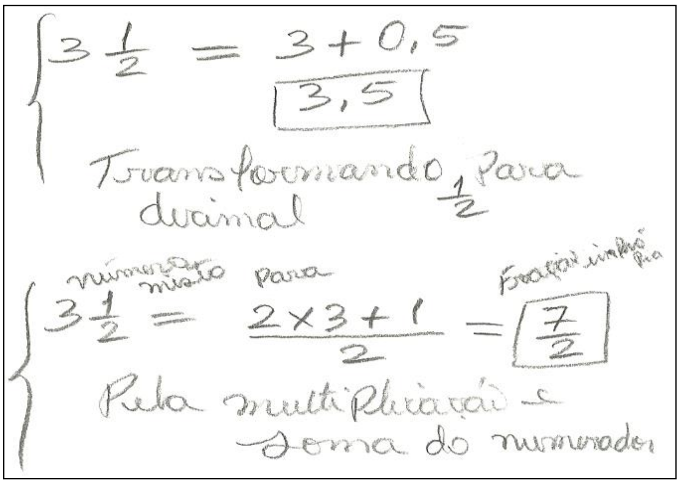
Figura 65 – Representação de $3\frac{1}{2}$ por meio de desenhos.



Fonte: Professora Rafaela.

Os professores João, Suzy, Rafaela e Diana relataram que os alunos, a partir do 7º ano, teriam como estratégias de representar $3\frac{1}{2}$ não só na forma de "desenhos", mas, também, na forma fracionária e na forma decimal, como explicitado pelo professor João na Figura 66.

Figura 66 – Possíveis estratégias para representar $3\frac{1}{2}$ na forma decimal e na forma fracionária.



Fonte: Professor João.

Observa-se, na Figura 66, a utilização de uma "regra prática" para transformar $3\frac{1}{2}$ em uma representação fracionária, a qual foi verbalizada pela professora Suzy: "*eles fariam dois vezes três mais um e repetiriam o denominador*".

Nessa direção, a pesquisadora indagou ao grupo: *os alunos utilizariam outra forma para representar esse número misto sem usar a regra prática?*

> [Professora Diana]
> Eu sempre estou utilizando essa regra prática, porque foi a forma que eles aprenderam, então eu não tiro. Não estou trazendo outra maneira.
>
> [Professora Suzy]
> Poderia fazer três mais um meio ($3+\frac{1}{2}$). E aí eles chegariam no três vírgula cinco.
>
> [Professora Diana]
> Não seria mais difícil para eles?
>
> [Professora Rafaela]
> Que seria trinta e cinco décimos que simplificando chegaria em sete meios.
>
> [Professora Diana]
> Não seria mais complicado?
>
> [Professor João]
> A regra prática é mais fácil de decorar né. Mas, a gente utilizando vários métodos,[35] acredito que a gente acaba atingindo mais alunos.

Pode-se inferir, a partir do diálogo estabelecido pelos professores, que a utilização da 'regra prática' apresentada para transformar uma representação na forma mista, para uma representação fracionária, se justifica por ser 'mais fácil de decorar', e a utilização de outros procedimentos de conversão poderia ser 'mais difícil' para os alunos. Todavia, o professor João pareceu admitir que recorrer às outras formas de representar um número racional oportunizaria um número maior de alunos que se familiarizariam com outros tipos de representação de números racionais.

---

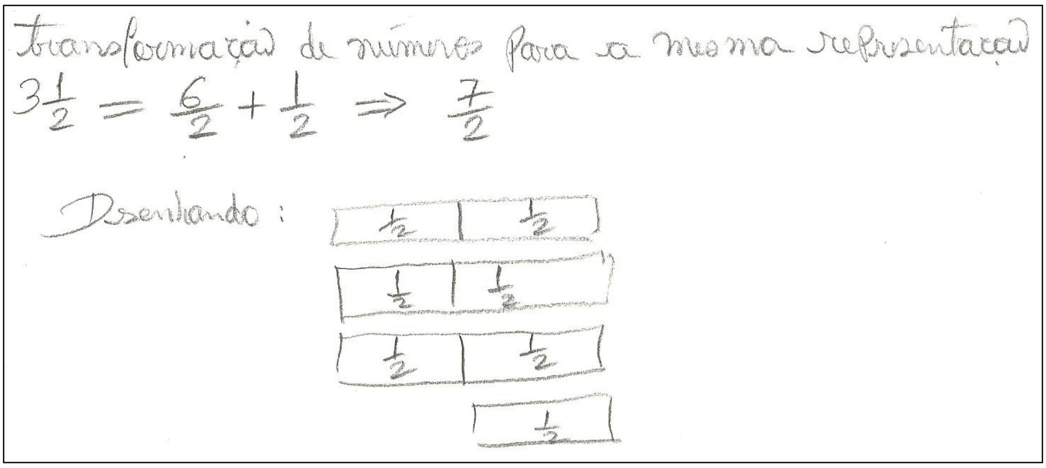
[35] O professor João se referiu às várias formas de representar um número racional.

Nessa direção, o professor João explicitou para o grupo outra estratégia, que segundo ele, os alunos do 9º ano poderiam realizar:

> [Professor João]
> Se tem dois tipos de representação, uma inteira e uma fracionária, uma decimal e uma fracionária, no caso de $3\frac{1}{2}$, aí teria que ter uma imaginação um pouco mais fértil, de entender que três inteiros, se eu quero fazer tudo na forma fracionária, eu preciso transformar tudo para fração Então três inteiros eu preciso transformar para uma fração. O que é três inteiros? Três inteiros é seis sobre dois somando com um sobre dois, pronto! Ficou tudo igual, seis sobre dois mais um sobre dois. Ele teria que saber que qualquer número inteiro ele pode transformar numa fração. Nono ano teria uma capacidade já de visualizar isso com a explicação do professor.

A estratégia levantada, por meio da fala do professor João, foi descrita em suas análises, indicada na Figura 67, nas quais ainda descreve uma possível representação figural ao indicar as metades de cada figura retangular, utilizar representações fracionárias, e sugerir sete metades:

Figura 67 – Outras possíveis estratégias para representar $3\frac{1}{2}$.



Fonte: Professor João.

Assim, considera-se que quando o professor verbaliza o termo ‘capacidade de visualizar’, poderá referir-se que os alunos do 9º ano têm capacidade de reconhecer 3 e $\frac{6}{2}$ como representações de um mesmo número racional, por isso, a substituição por conversão: $3 \rightarrow \frac{6}{2}$. De acordo com Duval (2011a, p. 28), “o nível de compreensão matemática que um aluno pode ser capaz de alcançar e o grau de iniciativa ou de exploração do qual ele pode dispor na resolução de um problema dependem do conjunto do que ele pode reconhecer rapidamente”.

Identificou-se a transformação de um número inteiro, representação decimal, para possíveis representações fracionárias, por meio dos estudos realizados no livro do 7º ano, e apresentados no Capítulo II, item 2.2.1, desta dissertação.

Em seguida, a pesquisadora questionou: *O que vocês acham? Seus alunos fazem isso ou fariam isso?*

> [Professora Rafaela]
> É um caminho.
>
> [Professora Diana]
> É um caminho, mas não é a realidade ainda. Oitavo não faria. Nono ano também não. Mas eu gostei da ideia de trabalhar dessa forma.
>
> [Professora Suzy]
> Também gostei. Eu achei interessante. E com essa forma eles se acostumariam também a enxergar que qualquer número inteiro ele pode transformar em fração”.

As professoras Rafaela, Diana e Suzy deram indícios que não vivenciaram com seus alunos experiência como essa apresentada pelo professor João, de substituir uma representação decimal inteira por uma representação fracionária. Entretanto, pareceu surgir uma intenção de trabalharem com seus alunos esse tipo de substituição por conversão.

A professora Rafaela apresentou para o grupo, que alunos poderiam também representar $3\frac{1}{2}$ como uma soma de três frações inteiras e uma fração unitária: “$\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}$”.

Em geral, as manifestações do grupo de professores se convergiram, relatando e descrevendo em suas análises escritas que os alunos realizariam procedimentos de tratamento e de conversão para representar $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{10}$ e $\frac{7}{3}$, apresentados a seguir:

1) Transformariam as representações fracionárias em representações decimais, realizando o algoritmo da divisão ou no caso de $\frac{2}{10}$ utilizariam a 'regra prática' já explicitada por eles;
2) Encontrariam representações fracionárias equivalentes, por meio da simplificação, quando possível, ou multiplicando numerador e denominador pelo mesmo número natural, diferente de zero;
3) Representariam por meio de figuras retangulares contínuas, no caso de $\frac{5}{6}$ e $\frac{2}{10}$, e no caso do $\frac{7}{3}$ figuras retangulares discretas.
4) Transformariam $\frac{7}{3}$ na forma mista: $2\frac{1}{3}$;
5) Representariam $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{10}$ e $\frac{7}{3}$ como uma soma de frações unitárias, por exemplo, $\frac{5}{6} = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$.

A professora Rafaela apresentou para o grupo uma representação figural circular de $\frac{5}{6}$. E acrescentou uma forma distinta de representar $\frac{2}{10}$, explanando: "*Eu pensei também que eles poderiam representar por meio de porcentagem, multiplicando por dez os dois (numerador e denominador) ficando vinte centésimos, que é vinte por cento. É outra representação*."

A professora Diana pontuou que "*não tinha pensado em porcentagem, mas é muito interessante, porque a gente trabalha muito com isso*". Na sequência, a professora Suzy exclamou: "*Gente como é dez! Cada cabeça pensando de um jeito!*" A professora Diana disse: "*Esse assunto é riquíssimo*!".

3.9 Decomposição de 8,512 e representações na língua natural

Na oitava sessão, realizada no dia 27 de abril de 2015, foi proposta a atividade 8, abrangendo a decomposição de uma representação decimal e tratamentos em língua natural de equivalências entre suas ordens.

Quadro 13 – Atividade 8: decomposição de 8,512 e representações na língua natural.

Atividade 8

Uma professora escreveu no quadro o número 8,512 e pediu que os alunos fizessem sua decomposição.

Em seguida levantou os seguintes questionamentos aos seus alunos:

- Oito unidades equivalem a quantos décimos?
- Cinco décimos equivalem a quantos centésimos?
- Um centésimo equivale a quantos milésimos?
- Cinquenta e um centésimos correspondem a quantos milésimos?
- Quantos décimos têm no número 8,512?
- Quantos centésimos têm no número 8,512?
- O número 8,512 equivale a quantos milésimos?

Quais possíveis dificuldades alunos poderão apresentar nesta atividade?

Em 27/04/2015.

Fonte: Autores da pesquisa.

O grupo de professores participantes relatou dificuldades de seus alunos em decomporem representações decimais:

> [Professora Diana]
> Eu vejo muita dificuldade, não é nem só no sétimo, até no oitavo às vezes, a questão das ordens dos números.

[Professora Rafaela]
Eu até acredito, pelo menos os alunos do oitavo ano e a maioria dos sétimos, eles conhecem, pelo menos até aqui com três casas decimais. Eles conhecem as ordens, os décimos, centésimos e milésimos. Então eles sabem, que ali é 5 décimos, mas eles não sabem escrever cinco décimos, extrair esses cinco décimos daquele número e escrever zero vírgula cinco (0,5).

[Professora Suzy]
Eles não conseguem. A dificuldade é bem grande. A leitura eles fazem bem, mas trazer aqueles cinco décimos para zero vírgula cinco, eles não fazem.

[Pesquisadora]
Quando o aluno ler o número ele compreende a estrutura do número?

[Professora Suzy]
Deveria.

Percebe-se, segundo os diálogos dos professores, que memorizar os nomes que correspondem cada ordem não garante que alunos compreendam a estrutura, por exemplo, de 8,512, pois, "saber os nomes das colunas não indica que se compreendeu o valor representado em cada uma delas" (AVILA; GARCIA, 2008, p. 34, *tradução nossa*[36]).

A pesquisadora levantou o seguinte questionamento: *ele consegue entender que aqui 8,512 (escreve no quadro) ele pode representar cinco décimos na forma de fração?*

[Professora Suzy]
Não por si só não.

[Professora Rafaela]
Não. Ele não faz. Se eu dissesse para ele: escreva para mim cinco décimos, ele consegue na forma de fração. Mas tirar os cinco décimos para decimal para fazer essa decomposição ele não sabe.
Ele poderia usar o mesmo artifício que eu vejo ele usar lá no sexto ano com os números naturais. Por exemplo, oito (8) ele sabe que esse oito é inteiro, aí cinco (5) então ele acrescenta zeros nos outros algarismos, então fica zero vírgula cinco zero zero, o um (1) , zero vírgula zero um zero. Mas aí estão fazendo a decomposição sem entender o processo.

---

[36] *Saber los nombres de las columnas no indica que se comprende el valor representado en cada una de ellas (AVILA;GARCIA, 2008, p. 70).*

Com base nas declarações da professora Rafaela, os alunos decomporiam o número 8,512, utilizando tratamento automático de ‘acrescentar zeros’ nas casas decimais, sem compreender a representação das ordens decimais.

Na sequência, a pesquisadora explanou: *“a professora Rafaela falou que os alunos poderiam fazer a decomposição do número 8,512, assim, 8+0,500+0,010+0,002”* (escreve no quadro) *“mesmo sem compreensão, acrescentando zeros. E vocês o que acham? Seus alunos fariam assim também?”* (Se dirigindo aos outros professores)

> [Professora Suzy]
> Ele pode até fazer, mas não vai fazer sabendo, vai fazer mecanicamente, completando as ordens com zeros.
>
> [Pesquisadora]
> Alunos podem fazer a decomposição deste número de outra forma?
>
> [Professora Diana]
> Eu não vejo outra maneira não. Só assim.
>
> [Professora Suzy]
> Se fizerem, só assim.

A pesquisadora escreveu no quadro a adição 8 + 0,5 + 0,01 + 0,002, e perguntou: *os alunos escreveriam essa decomposição de outra forma?*

Após alguns instantes, a professora Suzy se manifestou: “*Oito mais cinco sobre dez mais um sobre cem mais dois sobre mil.”*

Conforme a professora Suzy falava, a pesquisadora escrevia no quadro:

$$8+\frac{5}{10}+\frac{1}{100}+\frac{2}{1000}.$$

Após visualizarem as partes decimais da outra decomposição e as partes fracionárias, a professora Diana perguntou: “*mas pode fazer a decomposição assim? Nunca vi esse tipo de decomposição em livro nenhum!*”.

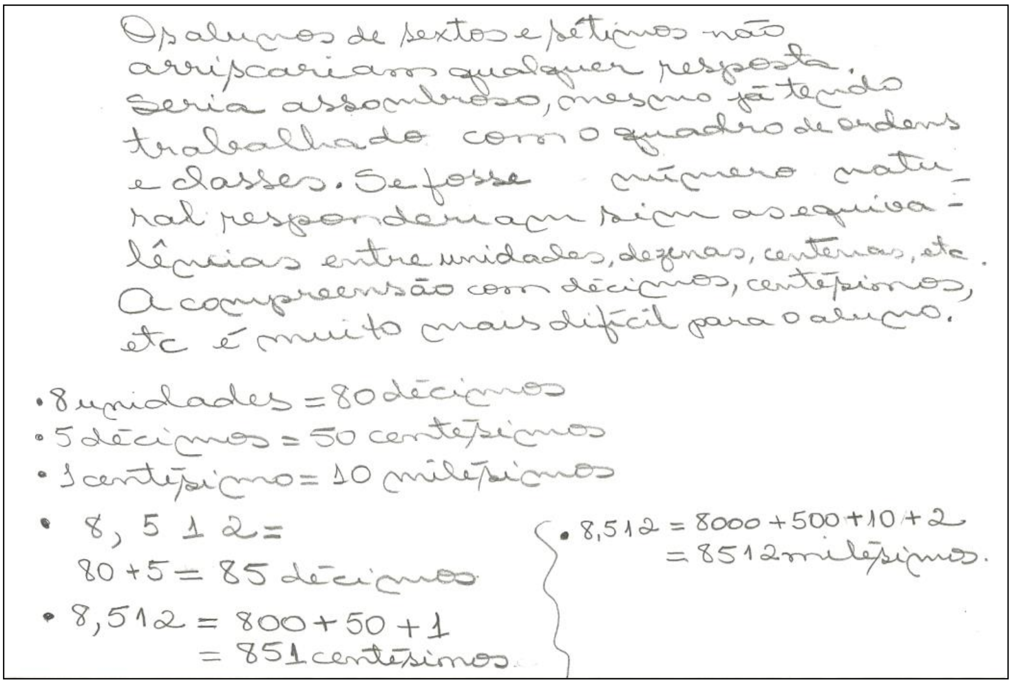
A professora Suzy concordou: “*Também nunca vi. Mas agora estou percebendo zero vírgula cinco, cinco décimos, transformou os decimais em frações!*”.

A pesquisadora respondeu: *“pode decompor assim também. A parte decimal da unidade, podemos também tomá-la como parte fracionária da unidade.”*

“*Vou mostrar isso para os alunos! Interessante!”,* pontuou a professora Diana. “*Gostei! Também vou fazer*”, completou a professora Suzy.

Com relação aos questionamentos levantados, na segunda parte da atividade 8, a professora Suzy revelou (Figura 68) que “*os alunos teriam muitas dificuldades em respondê-los, pois não compreendem a equivalência entre as ordens: décimos, centésimos e milésimos*”.

Figura 68 – Dificuldades em compreender as equivalências entre décimos, centésimos e milésimos.



Os alunos de sextos e sétimos não arriscariam qualquer resposta. Seria assombroso, mesmo já tendo trabalhado com o quadro de ordens e classes. Se fosse número natural responderiam sim as equivalências entre unidades, dezenas, centenas, etc. A compreensão com décimos, centésimos, etc é muito mais difícil para o aluno.

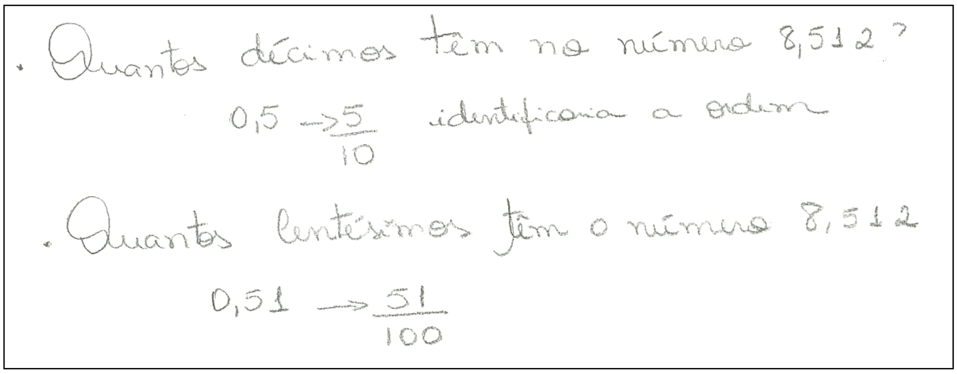
- 8 unidades = 80 décimos
- 5 décimos = 50 centésimos
- 1 centésimo = 10 milésimos
- 8,512 = 80 + 5 = 85 décimos
- 8,512 = 800 + 50 + 1 = 851 centésimos
- 8,512 = 8000 + 500 + 10 + 2 = 8512 milésimos.

Fonte: Professora Suzy.

Já a professora Rafaela relatou que “*a maioria dos alunos não teria muita noção para responder as primeiras perguntas. Eles reconhecem as ordens, mas fariam confusão respondendo que o número tem somente cinco décimos, um centésimo e dois milésimos.*” O professor João também apresentou essa possível dificuldade, a qual os alunos poderiam apresentar.

A professora Diana foi ao encontro do relato da professora Rafaela, quando descreveu como os alunos resolveram as últimas perguntas (Figura 69).

Figura 69 – Associação da quantidade de décimos e centésimos contidos no número 8,512 com suas ordens.



Fonte: Professora Diana.

Segundo a professora Diana, houve indícios de que os alunos conseguiriam representar cinco décimos e cinquenta e um centésimos na forma decimal e fracionária, porém, associariam a ordem com a quantidade de décimos ou milésimos contidos no 8,512.

Contudo, evidenciou-se que os professores não encontraram atividades desse tipo nos livros e, além de identificarem possíveis dificuldades dos alunos, eles também consideraram interessante propor atividades como essas para seus alunos.

Assim, foi observado uma necessidade de explorar atividades que fujam da aplicação imediata de técnicas, algoritmos, reprodução, enfim, que desafiem os alunos a pensarem e identificarem relações.

3.10 Representações de números racionais associados como pontos na reta

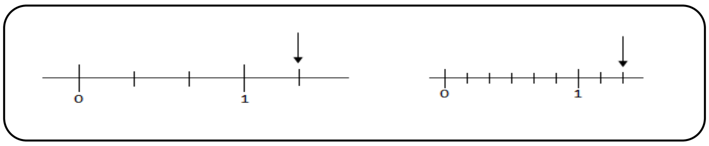
A atividade proposta, para a nona sessão de estudos, foi elaborada com base nas discussões levantadas pelos professores na sexta sessão, em referência a atividade 6, quando revelaram que não haviam trabalhado com seus alunos a utilização da reta graduada, subdividindo as unidades em segmentos para localizarem números racionais na forma fracionária e na forma mista, pois, sempre solicitaram que as convertessem em representações decimais para, então, realizarem suas localizações. Entretanto, eles se mostraram interessados e decididos em introduzir, futuramente, em suas aulas.

Nesta direção, decidiu-se trazer, nesta última sessão, a atividade 9 (Quadro 14), para oportunizar e provocar mais discussões no grupo de professores acerca da utilização do registro geométrico para representar números racionais. Porém, os números racionais já estão localizados (indicados pela seta), a atividade matemática requer, antes de tudo, o reconhecimento de suas representações como pontos na reta e não apenas a comparação entre elas.

Quadro 14 – Atividade 9: associação de pontos na reta graduada aos números racionais.

Atividade 9

Compare os números indicados pelas setas, representados nas retas abaixo.



Quais possíveis dificuldades os alunos podem encontrar para comparar os números indicados pelas setas nas retas?

Em: 11/5/2015.

Fonte: Autores da pesquisa.

Assim, a professora Suzy iniciou a discussão afirmando que alunos teriam dificuldades em "enxergar" as divisões do intervalo[37].

> [Professora Suzy]
> Se eles perceberem que na reta primeira reta, o intervalo entre o zero está dividido em três partes e na segunda reta, o mesmo intervalo está dividido em seis partes, talvez enxerguem que os números são iguais, então se ele conseguir essa visualização ele já resolve o exercício. Mas, uma dificuldade do aluno seria ele perceber as diferentes divisões do intervalo. No sétimo, eles conseguiriam perceber na primeira reta um inteiro e um terço. No sexto é um problema dificílimo para eles.

[37] A professora quando fala 'divisões do intervalo' se refere às subdivisões da unidade.

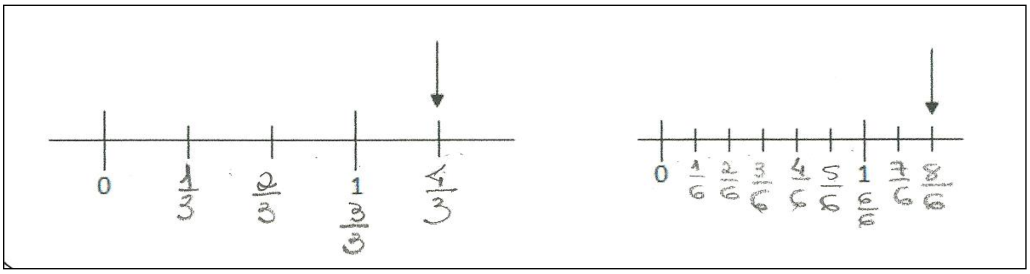
> [Pesquisadora]
> Esse mesmo aluno conseguiria identificar o número indicado pela seta na segunda reta? Ele usa a mesma estratégia?
>
> [Professora Suzy]
> Não. Até pela visualização que se tem de espaços menores, ele não faria não. Porque na primeira reta, os espaços são maiores, é mais fácil dele perceber, já na segunda reta ele já se perderia, ele precisaria parar, pensar, analisar. Ele poderia até fazer, mas ele levaria muito mais tempo, mesmo sendo aluno do sétimo.

Foi percebido, mediante as colocações da professora Suzy, a dificuldade que os alunos apresentariam para identificar as representações de números racionais associados aos pontos na reta. Entretanto, a professora reagiu e se posicionou:

> [Professora Suzy]
> Mas agora, eu pensei o seguinte: eu disse que não com muita facilidade ele (aluno) pensaria na segunda reta pelas divisões, mas se ele fizer essa representação na primeira reta, se ele escrever um terço, dois terços, três terços, quatro terços, ele vai fazer na outra reta e daí chegaria no resultado de oito sextos. Então, se ele escrever na segunda (reta) um sexto, dois sextos, três sextos,... depois acharia oito sextos, e se simplificar oito sextos, vai perceber que são iguais, quatro terços e oito sextos são equivalentes. Só pela representação geométrica.

Segundo a professora Suzy, se o aluno escrever, representando cada segmento como uma soma de frações unitárias, conseguiria encontrar a representação fracionária indicada pela seta, conforme Figura 70, e perceberia por meio do tratamento numérico de simplificação, que as duas representações indicadas pelas setas referem-se ao mesmo número racional.

Figura 70 – Localização de representações fracionárias na reta graduada.



Fonte: Professora Suzy.

Dessa forma, corroboramos com Ciscar e Garcia (2009, p. 61), quando afirmam que,

> [...] a utilização da representação de frações por meio da reta numérica deve ajudar a criança a conceituar as relações parte-todo em um contexto e reconhecer contextos equivalentes que procedem de novas divisões da unidade. Ou seja, a utilização da reta numérica (média contextos) pode ser uma boa introdução à noção de equivalência: a mesma parte da unidade recebe nomes diferentes dependendo do número de divisões [*tradução nossa*[38]].

Por outro lado, a professora Rafaela explanou que "*os alunos teriam dificuldades numa atividade como esta, identificar os números indicados, o decimal e fracionário, ou na forma mista e compará-los*". A professora Diana complementou que "*a dificuldade estaria nos cálculos, em dividir a unidade pela quantidade de espaçamentos*".

Os professores revelaram que não haviam ainda trabalhado uma atividade como esta, em que a reta já está subdividida em segmentos e que solicita a identificação de números racionais representados, a partir de pontos na reta graduada, o que levou os professores a decidirem que essa seria uma boa atividade para discutir com os alunos em sala.

No final desta sessão, foi entregue uma folha a cada um dos professores, solicitando que eles relatassem um pouco sobre a experiência que vivenciaram nas sessões de estudos, que apontassem aspectos que achassem importantes destacar. Como sugestões ou comentários sobre as atividades ou assuntos discutidos nos encontros realizados, assim, segue alguns relatos escritos:

> [Professor João]
>
> [...] tivemos a oportunidade de crescer em conhecimento compartilhado com os colegas de profissão. Pude aprender muitas coisas que vi e ouvi, outras formas de abordar o conteúdo.

---

[38] *Además, el manejo de la representación de las fraccionesa través de la recta numérica debe ayudar al niño a conceptualizar las relaciones perte-todo en un contexto y reconocer contextos equivalentes que proceden de nuevas divisiones de la unidad. Es decir, el manejo con la recta numérica (contextos de media) puede ser una buena introducción a la noción de equivalencia: la misma parte de la unidad recibe nombres diferentes en función del número de divisiones (CISCAR, GARCIA, p. 61, 2009).*

> [Professora Suzy]
> Com certeza, a prática pedagógica referente aos números racionais depois desses encontros será diferente. A visão mudou e veio acrescentar muito, principalmente às diferentes formas de representar um número racional, inclusive a sua decomposição no quadro valor de lugar. Pelo que já fui mudando no fazer pedagógico, durante os encontros, foi possível perceber diferenças na compreensão e na apreensão dos conteúdos ministrados.
>
> [Professora Diana]
> Participar desses encontros foi bastante produtivo, devido às trocas de ideias entre colegas de mesma área e pelo tema escolhido, abordando números racionais. [...] Foi de grande enriquecimento imaginar como meus alunos resolveriam tais exercícios. Inicialmente, foi relatado a dificuldade, que percebemos em trabalhar com números racionais em sala, devido à resistência que os alunos apresentam, talvez pelo aprendizado nos anos anteriores, ou porque nós mesmos, professores, os acostumamos a visualizar de uma única maneira de resolução, ou por ser mais fácil ou prático, não dando espaço para eles desenvolver a sua forma de resolver.
>
> [Professora Fabiana]
> Tivemos a oportunidade de analisar exercícios levando em consideração o olhar e dificuldades de alunos, o que muitas vezes, passa despercebido diante da nossa prática docente. As atividades propostas nos encontros nos proporcionaram momentos de reflexão sobre a importância em abordar o conteúdo de forma mais significativa ao aluno.

Pelos relatos dos professores, foi possível perceber que o grupo se posicionou afirmativamente, no sentido de uma reflexão de mobilização de diferentes representações de números racionais. Fato observado, também, a partir das sessões de estudos realizadas. Assim, o trabalho em sala de aula pode ser aprimorado por meio dos estudos realizados com os professores, nessas sessões.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta pesquisa, buscamos responder a questão: como os professores de Matemática, dos anos finais do ensino fundamental se posicionam sobre as dificuldades de seus alunos em mobilizar diferentes sistemas semióticos de representação de números racionais em atividades matemáticas, durante sessões de estudo, visando o aprimoramento do trabalho em sala de aula?

Para isso, utilizamos a Teoria de Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, a qual aborda a importância da diversidade de registros de representação, sua utilização e articulação entre eles nas atividades matemáticas, para a aquisição de conhecimentos.

As análises das representações de números racionais, em dois livros didáticos de 6º e 7º anos, nos possibilitaram o planejamento de atividades matemáticas para estudos e discussões em um grupo de quatro professores de Matemática do ensino fundamental. As sessões de estudos, neste grupo, possibilitaram a coleta de materiais para as análises, objetivando analisar manifestações verbais e escritas de um grupo de professores de Matemática, dos anos finais do Ensino Fundamental, sobre possíveis dificuldades de seus alunos na mobilização de registros de representação semiótica de números racionais, diante de atividades matemáticas.

Nesta direção, foi possível percebermos nas análises, segundo as manifestações do grupo de professores, que a predominância no uso de regras nos tratamentos e conversões de diferentes representações semióticas de números racionais pode localizar as dificuldades dos alunos, bem como uma ausência da compreensão de conceitos matemáticos envolvidos.

Consideramos que não basta conhecer as variadas representações semióticas de números racionais, mas também, faz-se necessário articulá-las entre si, estabelecer relações de equivalência entre elas, para que se desenvolva uma coordenação sobre os registros de representação de números racionais. Essa coordenação deverá estar ligada à capacidade do sujeito de realizar transformações dentro de um registro ou entre registros diferentes, para que, por meio deles, reconheçam o objeto matemático e, sobretudo, favoreça a compreensão matemática.

Nesta perspectiva, concordamos quando Duval (2009) ressalta que "um estudo das aprendizagens intelectuais fundamentais deve considerar os três fenômenos relativos à "*semiósis*" e à operação de conversão que lhe é verdadeiramente intrínseca": o fenômeno da diversificação dos registros de representação semiótica, da diferenciação entre representante e representado e da coordenação entre os diferentes registros. Entretanto, a tendência em privilegiar a aprendizagem de regras, ora nos tratamentos ora nas conversões, identificado em nosso estudo preliminar dos livros didáticos e de acordo com as manifestações dos professores, podem se constituir em um obstáculo para a apreensão do conhecimento desse conteúdo matemático.

Das análises das sessões de estudos realizadas, destacamos algumas manifestações verbais e escritas do grupo de professores sobre possíveis dificuldades na mobilização de registros de representação semiótica de números racionais, em atividades matemáticas, indicando que alunos:

a) podem permanecer, no início da atividade, no mesmo registro de entrada, realizando apenas tratamentos, não estabelecendo relações com outras representações de números racionais;

b) tendem a optar pela comparação de representações de um mesmo registro, preferencialmente, de representações decimais;

c) quando não reconhecem representações diferentes de um mesmo número racional, fracionária e decimal, consideram como representações de números racionais diferentes, o que pode levá-los à não comparação entre elas;

d) por não compreenderem as especificidades semióticas de cada registro, pode impossibilitá-los na decisão de se trabalhar com este ou aquele registro;

e) tendem a evitar frações, com a ideia de quociente, por uma possível dificuldade em realizar o algoritmo da divisão, impossibilitando a conversão de representações fracionárias em representações decimais de um número racional;

f) nem sempre reconhecem a fração como uma representação de um número racional e que ainda, podem obter outras representações desse mesmo número;

g) apresentam em suas ações, nas atividades matemáticas, uma ausência de coordenação entre as representações decimal e fracionária e o não reconhecimento da relação entre elas, como representações de um mesmo número racional;

h) podem realizar conversões de representações de números racionais por meio de regras mecânicas, o que configura um abandono do registro de partida, importando tão somente, o registro de chegada;

i) podem apresentar dificuldades na conversão nos dois sentidos, da representação fracionária para a representação decimal e, da representação decimal para a fracionária, apresentado uma maior dificuldade na conversão da representação decimal para a fracionária, devido ao enfrentamento com o provável fenômeno da não congruência existente nesse sentido;

j) podem associar o algarismo das ordens de uma representação decimal com a quantidade de décimos, centésimos, milésimos, ..., contidos nela, não estabelecendo relações de equivalência entre as ordens;

k) tendem a representar números racionais na reta graduada na sua representação decimal, podendo não associar representações fracionárias também como medida.

Além disso, pudemos notar por meio das sessões de estudos com o grupo de professores, que parecem se limitar ao que encontram nos livros didáticos utilizados para suas aulas. Notamos ainda, que nos tratamentos e conversões realizados, com representações de números racionais, dão ênfase a técnicas de manipulação de representações pouco valorizando a abordagem conceitual, ou seja, uma ênfase na “*semiósis”* em detrimento da “*noésis”*, o que pode dificultar o acesso aos conceitos envolvidos.

Pudemos perceber que há uma tendência em se restringirem a um único registro, privilegiando os tratamentos e limitando o acesso dos alunos às possibilidades de conversão, que por sua vez, deverão ter dificuldades em fazer ligação a outros registros.

Diante disso, consideramos fundamental não só trabalhar os registros simbólicos numéricos, fracionário e decimal, concomitantemente, mas também utilizar o registro geométrico, o da língua natural, e representações figurais como um caminho a aceder à apreensão do número racional. Desse modo, acreditamos que quando o aluno é levado a conhecer a diversidade de representações de um mesmo número racional, a explorá-las e a coordená-las, poderá reconhecer por meio delas o objeto matemático.

De acordo com Duval (2009, p. 19), a coordenação entre sistemas semióticos diferentes não sobressai naturalmente, “sua colocação não resulta automaticamente de aprendizagens clássicas muito diretamente centradas sobre conteúdos de ensino”, mas

> [...] um trabalho de aprendizagem específico centrado sobre a diversidade de sistemas de representação, sobre a utilização de suas possibilidades próprias, sobre sua comparação por colocar em correspondência e sobre suas “traduções” mútuas uma dentro da outra parece necessário para favorecê-la.

O autor ainda defende que, ao propor um trabalho deste tipo, revela-se

> [...] uma modificação completa nas iniciativas e nas atitudes dos alunos para efetuar os tratamentos matemáticos, para os controlar, para a rapidez de execução e também para o interesse colocado na tarefa. Não tem simplesmente sucesso, mas modificação da qualidade de produções. Esse salto qualitativo no desenvolvimento das competências e das performances aparece ligado à coordenação de sistemas semióticos nos alunos (DUVAL, 2009, p.19).

Assim, é necessário que antes de ensinar, o professor tenha a compreensão sobre os diferentes registros de representação semiótica dos números racionais e sua coordenação. Sendo assim, questionamos como o professor poderá levar o aluno à apreensão do objeto matemático se ele não transitar por variados registros de representação semiótica no seu fazer matemático?

Ao longo das sessões de estudos, pudemos constatar o envolvimento e a satisfação do grupo de professores ao discutirem e analisarem as atividades propostas, sob o olhar nas possíveis dificuldades de que seus alunos poderiam apresentar para resolvê-las, pois, havia sempre uma disponibilidade em expor seus pontos de vista e ouvir os dos colegas. A partir dessas trocas de experiências, surgia um interesse em possíveis mudanças sobre práticas pedagógicas, em termos de mobilização de registros de representação de números racionais nas aulas de Matemática.

Consideramos que no final desta pesquisa, a possibilidade de aprimoramento no estudo de representações de números racionais não se restringiu aos professores participantes da pesquisa, mas, e principalmente, à formação da pesquisadora enquanto professora de Matemática, uma vez que ao finalizá-la já se encontra novamente em seu lugar, na sala de aula. De volta à prática docente, percebeu o quanto esse estudo foi um marco em sua formação da Matemática escolar.

Pontuamos ainda, que o grupo de professores, hoje com quatro participantes, aprendeu a ser grupo de estudos de conteúdos matemáticos para o ensino. Nossas discussões continuam no sentido de fortalecer nossa prática docente.

REFERÊNCIAS

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria José. **Praticando Matemática.** São Paulo: Editora do Brasil, 2012. v.6 e 7.

ÁVILA, Alicia; GARCIA, Silvia. **Los decimales**: más que una escritura. México: INEE, 2008.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** 2ª ed. rev. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz Magalhães de. **Fundamentos e Metodologia de Matemática para os Ciclos Iniciais do Ensino Fundamental**. 2ª ed. Campo Grande: Editora UFMS, 2005.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, SARI KNOPP. **Investigação qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRANDT, Celia Finck; MORETTI, Méricles Thadeu. O Cenário da Pesquisa no Campo da Educação Matemática à Luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 7, n. 13, 2014.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais. **Diário Oficial da União,** Brasília: MEC/SEF, 1998.

______. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos PNLD 2014**: Matemática. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. Brasília, 2013.

BUEHRING, Roberta Schnorr; MORETTI, Méricles Thadeu. Gráficos e tabelas como leitura e registro do mundo: um caminho de ensino para o início da escolaridade. In: GRANDO, N. I. (Org.). **Educação matemática**: processos de pesquisa no ensino fundamental e médio. Ijuí: Ed. Unijuí, 2009. p. 15-30.

CATTO, Glória Garrido. **Registro de representação e o número racional:** Uma abordagem em livros didáticos. 152 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC, São Paulo, 2000.

CISCAR, Salvador Llinares; GARCÍA, Maria Victoria Sánchez. **Fracciones**: La relacion parte-todo. Madri: Editorial Sintesis, 2009. v. 4.

COLOMBO, Janecler Aparecida Amorim. **Representações Semióticas no Ensino**: Contribuições para reflexões acerca dos currículos de Matemática escolar. 232 f Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2008.

D'AMORE, Bruno. Conceptualización, registros de representaciones semióticas y noética: interacciones constructivistas en el aprendizaje de los conceptos matemáticos e hipótesis sobre algunos factores que inhiben la devolución. **Revista Científica**, v.11, p. 158, Bogotá, 2009.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org). **Educação Matemática**: Uma (nova) introdução. 3ª ed.rev. São Paulo: EDUC, 2012.

DE SOUZA, Roberta Nara Sodré; CORDEIRO, Maria Helena; MORETTI, Méricles Thadeu. Desenvolvendo o conceito de Função Linear: análise de uma experiência didática utilizando diferentes registros de representações semióticas. **Anais do VIII Encontro Nacional de Educação Matemática**. Recife, 2004.

DUVAL, Raymond. Registre de représentation sémiotique et foucionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. Strasbourg: IREM – ULP, 1993.

______. Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. **La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española**, V. 9.1, p.143–168, 2006.

______. **Semiósis e pensamento humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. (Fascículo I). Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009, p.15 -18; 29-110.

______. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de representação semiótica. 8ª. ed. Campinas, São Paulo: Papirus, 2011a.

______. **Ver e ensinar a matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar os registros de representações semióticas. Organização Tânia M. M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011b.

______. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. Florianópolis: Revemat v. 7, n. 2, 2012a.

______. **Diferenças semânticas e coerência matemática**: introdução aos problemas de congruência.Tradução de Méricles Thadeu Moretti. Florianópolis: Revemat v. 7, n. 1, 2012b.

______. **Entrevista:** Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Tradução de José Luiz Magalhães de Freitas e Veridiana Rezende. Campo Mourão, PR: RPEM, v. 2, n.3, 2013.

FIORENTINI, Dario. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática.** 2ª ed.rev. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5ª ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GIMENEZ, Joaquim. BAIRRAL, Marcelo. **Frações no currículo do Ensino Fundamental**: Conceituação e atividades lúdicas. Rio de Janeiro: GEPEM/UFRRJ, 2005. v. 2.

GOLDENBERG, Mirian. **A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8ª ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

IGLIORI, Sonia; MARANHÃO, Maria Cristina S. Registros de representação e números racionais In: Machado, Silvia Dias Alcântara (org). **Aprendizagem em Matemática:** Registros de representação semiótica. 8ª ed.. Campinas, São Paulo: Papirus, 2011.

LEME, Jayme do Carmo Macedo; IGLIORI, Sonia Barbosa Camargo. Reflexiones Semióticas en los Números Racionales. **Conferência Latino-americana de GeoGebra**. Ibagué, Colombia, 2013.

MIOLA, Adriana Fátima de Souza. **Uma análise de reflexões e de conhecimentos construídos e mobilizados por um grupo de professores no ensino de números decimais para o sexto ano do Ensino Fundamental.** 147 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), UFMS, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Campo Grande, MS, 2011.

MORETTI, Méricles Thadeu. **O papel dos registros de representação na aprendizagem de matemática.** Contrapontos – Revista de Educação da Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, n. 6, p. 348, 2002.

MORETTI, Méricles Thadeu; THIEL, Afrânio Austregésilo. **O ensino de matemática hermético:** um olhar crítico a partir dos registros de representação semiótica. Ponta Grossa: Praxis Educativa, v.7, n.2, 2012.

NIVEN, Ivan Morton. Números: **Racionais e Irracionais.** Trad. de Renate Watanabe. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

PÉREZ, Julia Centeno. **Numeros decimales**. Por qué? Para qué? Matematicas: cultura y aprendizaje. São Paulo: Editorial Síntesis, 2009.

PONTE, João Pedro da. Formação do professor de Matemática: Perspectivas atuais.In: Ponte, João Pedro da (org). **Práticas profissionais dos professores de Matemática.** 1ª ed. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014.
PONTE, João Pedro da. O conhecimento profissional dos professores de matemática (Relatório final de Projecto **- O saber dos professores**: Concepções e práticas). Lisboa: DEFCUL, 1997.

QUINTANA, Mário. **Nova Antologia Poética**. Editora Globo: São Paulo, 1998, p. 118.

SÁNCHEZ ACERO, Francisco Alejandro. **Propuesta para la enseñanza de la conversión de números decimales a fraccionarios y vice-versa em el conjunto de los racionales, para estudiantes de grado 7 de educación básica**. 96 h. Trabajo Final de Maestría em Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales), Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2012.

SHULMAN, Lee. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, p. 9, 1986.

SILVA, Marcelo Cordeiro da. **Reta graduada:** Um registro de representação dos números racionais. 123 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), PUC, São Paulo. 2008.

SOARES, Maria Arlita da Silveira. **Os Números Racionais e os Registros de Representação Semiótica**: análise de planejamentos das séries finais do ensino fundamental. 130 f. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências), UNIJUÍ, Ijuí, RS, 2007.

SOUZA, Gresiela Ramos de Carvalho. **Números Racionais:** concepções e conhecimento profissional de professores e as relações com o livro didático e a prática docente. 229 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Programa de Pós-Graduação em Educação, Cuiabá, MT, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 1 PARA A SEGUNDA SESSÃO

<table>
<tr><th>Possíveis dificuldades levantadas pelo grupo</th><th>Possíveis questionamentos da pesquisadora</th></tr>
<tr><td>Reconhecer uma representação fracionária como um número racional.</td><td rowspan="5">

- Os alunos podem apresentar outras dificuldades?

(Se houver uma única dificuldade apresentada pelo grupo).

- Que conhecimentos os alunos podem usar para decidir qual número é o maior?

(Uma questão que pode motivar discussões sobre o reconhecimento de diferentes registros de representação de números racionais, para compará-los: registros numéricos, figurais geométricos (reta graduada) e língua natural.

- Como os alunos podem interpretar as frações $\frac{7}{9}, \frac{7}{10}, \frac{85}{100}, \frac{5}{4}, \frac{3}{5}, \frac{40}{20}$?

(Uma possível questão para discutir dificuldades em reconhecer a fração como um quociente).

- Como os alunos podem comparar $\frac{70}{100}$ com as frações $\frac{7}{9}\,e\,\frac{7}{10}$?

(Se no grupo surgir a conversão de $0{,}70$ para $\frac{70}{100}$, esta será uma questão para discutir possíveis dificuldades apresentadas no tratamento de frações equivalentes).

- Como os alunos podem interpretar a comparação entre $0{,}777...$ e $0{,}7$?

(Se no grupo surgirem as conversões de $\frac{7}{9}$ em $0{,}777...$ e $\frac{7}{10}$ em $0{,}7$, esta poderá

</td></tr>
<tr><td>Comparar representações fracionárias de números racionais.</td></tr>
<tr><td>Comparar representações decimais de números racionais.</td></tr>
<tr><td>Comparar representações fracionárias com representações decimais de números racionais.</td></tr>
<tr><td>Converter a representação decimal de um número racional para a sua representação fracionária.</td></tr>
</table>

	ser uma questão motivadora para provocar discussões sobre a comparação de números na representação decimal).

APÊNDICE B - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 1 PARA A SEGUNDA SESSÃO

<table>
<tr><th>Possíveis dificuldades levantadas pelo grupo</th><th>Possíveis questionamentos da pesquisadora</th></tr>
<tr><td>Converter a representação fracionária de um número racional para a sua representação decimal.</td><td rowspan="7">▪ Como os alunos podem transformar frações do tipo $\frac{7}{10} e \frac{85}{100}$ na forma decimal?

(Se no grupo surgir indícios do uso de técnicas tradicionais como, por exemplo, “na divisão de números por 10, 100, 1000, ..., basta deslocar a vírgula para a esquerda tantas casas quantos forem os zeros”, como facilitadoras para as conversões).

▪ Como os alunos podem simplificar frações do tipo $\frac{40}{20}$?

(Se no grupo surgir indícios do uso de técnicas tradicionais como, por exemplo, “na representação fracionária em que o numerador e o denominador possuam “zeros”, basta cortar a mesma quantidade de zeros que houver no numerador e no denominador”, como facilitadoras para as conversões).

▪ Por que o aluno compara frações observando numerador com numerador e denominador com denominador?

(Uma possível questão para discutir dificuldades em reconhecer representações fracionárias de um número racional como constituinte de um campo, com conceitos e propriedades, quando no grupo surgir uma possível discussão de que alunos podem comparar frações termo a termo).

▪ Como os alunos podem comparar as representações por meio da língua natural?

(Se o grupo apresentar o uso da leitura do número para comparar as representações).

▪ Como os alunos podem comparar as representações por meio figuras?

(Se o grupo apresentar o uso de figuras para comparar as representações).</td></tr>
<tr><td>Identificar e aplicar procedimentos de tratamento em representações fracionárias de um mesmo número racional.</td></tr>
<tr><td>Reconhecer a ideia de fração como quociente.</td></tr>
<tr><td>Efetuar divisão de números racionais.</td></tr>
<tr><td>Localizar números racionais na representação da reta numérica.</td></tr>
<tr><td>Utilizar o registro da língua natural para comparar representações de números racionais.</td></tr>
<tr><td>Utilizar representações figurais para comparar representações numéricas de números racionais.</td></tr>
</table>

APÊNDICE C - PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES 2 E 3 PARA A TERCEIRA SESSÃO

<table>
<tr><th>Possíveis dificuldades levantadas pelo grupo</th><th>Possíveis questionamentos da pesquisadora</th></tr>
<tr><td>Reconhecer uma representação fracionária como um número racional.</td><td rowspan="5">

- Existe(m) outro(s) conhecimento(s) que os alunos podem usar para comparar os números $\frac{8}{10}$ e 0,9; 0,120 e 0,12?

(Uma questão que pode motivar discussões sobre o reconhecimento de diferentes registros de representação de números racionais, para compará-los: registros de representações fracionária, decimal e na reta numérica).

- Por que os alunos podem dizer que 0,9 é maior que $\frac{8}{10}$?

(Se no grupo surgir indícios que os alunos têm facilidade de reconhecer qual dos números é o maior).

- Por que os alunos podem dizer que 0,120 é maior que 0,12?

(Se no grupo surgir indícios que o aluno pode comparar a quantidade de casas decimais dos dois números).

- Existe outra dificuldade na qual os alunos poderão ter para comparar os números 0,120 e 0,12?
(Se o grupo não apresentar dificuldade como, por exemplo, reconhecer as casas decimais como um número natural).

- Como os alunos podem transformar 0,120 e 0,12 na forma fracionária?

(Se no grupo surgir indícios do uso de técnicas tradicionais como facilitadoras para as conversões, por exemplo: “para transformar em frações basta contar o número de casas decimais para obter o denominador da fração decimal: o 0,120, tem três casas decimais, então o denominador será 1000, três zeros, já o 0,12, tem duas casas decimais, então denominador 100, dois zeros” .

</td></tr>
<tr><td>Comparar representações fracionárias de um número racional.</td></tr>
<tr><td>Comparar representações decimais de um número racional.</td></tr>
<tr><td>Comparar representações decimais com representações fracionárias de um número racional.</td></tr>
<tr><td>Converter a representação decimal de um número racional para a sua representação fracionária.</td></tr>
</table>

APÊNDICE D - PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES 2 E 3 PARA A TERCEIRA SESSÃO

<table>
<tr><th>Possíveis dificuldades levantadas pelo grupo</th><th>Possíveis questionamentos da pesquisadora</th></tr>
<tr><td>Converter a representação fracionária de um número racional para a sua representação decimal.</td><td rowspan="5">Como os alunos podem simplificar a fração do tipo $\frac{120}{100}$?
(Se no grupo surgir a conversão de 0,120 para $\frac{120}{100}$ e indícios do uso de técnicas tradicionais como, por exemplo, “na representação fracionária em que o numerador e o denominador possuam “zeros”, basta cortar a mesma quantidade de zeros que houver no numerador e no denominador”, como facilitadoras para obter uma fração equivalente).</td></tr>
<tr><td>Identificar e aplicar procedimentos de tratamento em representações fracionárias de um mesmo número racional.</td></tr>
<tr><td>Efetuar a divisão com números racionais.
Cálculo mental comparando metades e quartos.</td></tr>
<tr><td>Reconhecer a ideia de fração como quociente.</td></tr>
<tr><td>Localizar números racionais na representação da reta numérica.</td></tr>
</table>

APÊNDICE E - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 4 PARA A QUARTA SESSÃO.

<table>
<tr><th>Possíveis dificuldades levantadas pelo grupo</th><th>Possíveis questionamentos da pesquisadora</th></tr>
<tr><td>Reconhecer uma representação fracionária como um número racional.</td><td rowspan="5">

- Existe(m) outro(s) conhecimento(s) em que os alunos podem usar para comparar os números $0,2$ e $0,12$? **(Uma questão que pode motivar discussões sobre o reconhecimento de diferentes registros de representação de números racionais, para compará-los: registros de representações fracionária, decimal e na reta numérica).**

- Por que os alunos podem dizer que 0,12 é maior que 0,2 e que **(Se no grupo surgir indícios que o aluno pode comparar a quantidade de casas decimais dos dois números).**

- Existe outra dificuldade na qual os alunos poderão ter para comparar os números 0,2 e 0,12? **(Se o grupo não apresentar dificuldade como, por exemplo, reconhecer as casas decimais como um número natural).**

</td></tr>
<tr><td>Comparar representações fracionárias de um número racional.</td></tr>
<tr><td>Comparar representações decimais de um número racional.</td></tr>
<tr><td>Localizar números racionais na representação da reta numérica.</td></tr>
<tr><td>Converter a representação decimal de um número racional para a sua representação fracionária.</td></tr>
</table>

APÊNDICE F - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 5 PARA A QUINTA SESSÃO.

<table>
<tr><th>Possíveis dificuldades levantadas pelo grupo</th><th>Possíveis questionamentos da pesquisadora</th></tr>
<tr><td>Reconhecer uma representação fracionária como um número racional.</td><td rowspan="9">Existe(m) outro(s) conhecimento(s) que os alunos podem usar para comparar os números $\frac{3}{2}$ e $\frac{6}{4}$?
(Uma questão que pode motivar discussões sobre o reconhecimento de diferentes registros de representação de números racionais, para compará-los: registros de representações fracionária, decimal e na reta numérica).
Existe(m) outra(s) dificuldade(s) em que os alunos podem apresentar ao compararem os números $\frac{3}{2}$ e $\frac{6}{4}$?
(Uma questão que pode motivar discussões sobre o reconhecimento de diferentes registros de representação de números racionais, para compará-los: registros de representações fracionária, decimal e na reta numérica).
Por que um aluno compara frações observando numerador com numerador e denominador com denominador?
(Uma possível questão para discutir dificuldades em reconhecer representações fracionárias de um número racional como constituinte de um campo, com conceitos e propriedades, quando no grupo surgir uma possível discussão de que alunos podem comparar frações termo a termo).</td></tr>
<tr><td>Comparar representações fracionárias de um número racional.</td></tr>
<tr><td>Comparar representações decimais de um número racional.</td></tr>
<tr><td>Reconhecer a ideia de fração como quociente.</td></tr>
<tr><td>Efetuar a divisão com números racionais.
Cálculo mental comparando metades e quartos.</td></tr>
<tr><td>Reconhecer a fração como parte todo.</td></tr>
<tr><td>Identificar e aplicar procedimentos de tratamento em representações fracionárias de um mesmo número racional.</td></tr>
<tr><td>Converter a representação fracionária de um número racional para a sua representação decimal.</td></tr>
<tr><td>Localizar números racionais na representação da reta numérica.</td></tr>
</table>

APÊNDICE G - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 6 PARA A SEXTA SESSÃO.

<table>
<tr><th>Possíveis estratégias levantadas pelo grupo</th><th>Possíveis questionamentos da pesquisadora</th></tr>
<tr><td>Transformar um número misto para a representação fracionária ou decimal de um número racional.</td><td rowspan="5">

- Quais estratégias os alunos podem utilizar para localizarem o número $2\frac{1}{2}$ na reta numérica?
(Se no grupo surgir apenas a conversão do número $2\frac{1}{2}$ para sua representação decimal para a localizar na reta numérica, esta será uma questão que poderá possibilitar discussões de representações na forma mista ou forma fracionária de números racionais, na reta numérica).
- É possível que os alunos encontrem outra forma de representar o número $1\frac{1}{3}$ ou 0,22... para localizá-los na reta numérica?
(Se no grupo surgir a utilização da reta numérica para representar número racional apenas na forma mista $1\frac{1}{3}$ e o 0,22... apenas na forma decimal, esta será uma questão que poderá possibilitar discussões para mobilizar procedimentos de tratamentos e conversões para localizar representações de um mesmo número racional na reta numérica).
- O aluno acharia mais vantajoso representar na reta numérica o número 1,33... ou o número $1\frac{1}{3}$?
(Esta poderá ser uma questão que possibilite discussões sobre escolhas vantajosas de representações de um número racional para localizá-lo na reta numérica).

</td></tr>
<tr><td>Converter representações fracionárias de números racionais para a sua representação decimal.</td></tr>
<tr><td>Identificar procedimentos de tratamento e conversão para a representação fracionária de um número racional, a partir de um número misto.</td></tr>
<tr><td>Converter uma representação decimal infinita e periódica de um número racional, para sua representação fracionária.</td></tr>
<tr><td>Representar números racionais na reta numérica.</td></tr>
</table>

APÊNDICE H - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 7 PARA A SÉTIMA SESSÃO.

<table>
<tr><th>Possíveis estratégias levantadas pelo grupo</th><th>Possíveis questionamentos da pesquisadora</th></tr>
<tr><td>Reconhecer a ideia de fração como quociente.</td><td rowspan="5">

- É possível representar estes números de outras formas?

(Se no grupo surgir apenas a conversão dos números $3\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{2}{10}$ e $\frac{7}{3}$ para a representação decimal, esta será uma questão que poderá possibilitar discussões de representações parte todo e da reta numérica).

- Sem utilizar a “regra prática” para a representação fracionária do número misto $3\frac{1}{2}$ como alunos poderão representá-lo de outra maneira?

  (Se no grupo surgir apenas a “regra prática” para representar $3\frac{1}{2}$ em $\frac{7}{2}$, esta será uma questão que poderá possibilitar discussões de representações fracionárias na reta numérica).

- Como os alunos podem representar $\frac{2}{10}$ de outra maneira?

  (Se no grupo não surgir o procedimento de tratamento de $\frac{2}{10}$ para $\frac{1}{5}$, esta será uma questão para discutir possíveis estratégias apresentadas no tratamento de frações equivalentes).

</td></tr>
<tr><td>Converter a representação fracionária de um número racional para a sua representação decimal</td></tr>
<tr><td>Aplicar procedimentos de tratamento em representações fracionárias para obter de um mesmo número racional.</td></tr>
<tr><td>Aplicar procedimentos de tratamento ou conversão em representações na forma mista de um número racional para obter representação fracionária ou decimal.</td></tr>
<tr><td>Reconhecer a fração como parte/todo para utilizar representações figurais.</td></tr>
</table>

APÊNDICE I - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 7 PARA A SÉTIMA SESSÃO.

Possíveis estratégias levantadas pelo grupo	**Possíveis questionamentos da pesquisadora**
Representar números racionais na reta numérica.	▪ Quais estratégias alunos podem utilizar para localizarem os números $3\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}, \frac{2}{10}$ e $\frac{7}{3}$ em retas numéricas sem transformá-los em representações decimais? **(Se no grupo surgir apenas a conversão dos números $3\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}, \frac{2}{10}$ e $\frac{7}{3}$ na representação decimal para a sua localização na reta numérica, esta será uma questão que poderá possibilitar discussões de representações fracionárias na reta numérica).** ▪ É possível utilizar algum recurso para representar os números $3\frac{1}{2}$, $\frac{5}{6}, \frac{2}{10}$ e $\frac{7}{3}$? **(Se no grupo não surgir discussões sobre o significado da fração como parte/todo, esta será uma questão que poderá possibilitar discussões sobre representações figurais).**

APÊNDICE J - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 8 PARA A OITAVA SESSÃO.

<table>
<tr><th>Possíveis dificuldades levantadas pelo grupo</th><th>Possíveis questionamentos da pesquisadora</th></tr>
<tr><td>Decompor um número racional na representação decimal como uma adição de números decimais.</td><td rowspan="3">▪ De que outra forma os alunos podem decompor o número 8,512?
(Se no grupo surgir apenas a decomposição de 8,512 como 8 + 0,5 + 0,01 + 0,002, não percebendo a partir da escrita decimal do número racional uma adição de frações decimais, esta será uma questão que poderá possibilitar discussões sobre a decomposição na forma: $8+\frac{5}{10}+\frac{1}{100}+\frac{2}{1000}$.

▪ De que outra forma os alunos podem decompor o número 8,512?
(Se no grupo surgir apenas a decomposição de 8,512 como $8+\frac{5}{10}+\frac{1}{100}+\frac{2}{1000}$, não percebendo a partir da escrita decimal do número racional uma adição de números decimais, esta será uma questão que poderá possibilitar discussões sobre a decomposição na forma: 8 + 0,5 + 0,01 + 0,002.

▪ Como os alunos podem estabelecer relações entre parte inteira, décimos, centésimos e milésimos?
(Esta será uma questão que poderá possibilitar discussões de relações de equivalência entre parte inteira, décimos, centésimos e milésimos, a partir de uma possível leitura, por parte de alunos, da decomposição do número 8,512 na forma: 8 inteiros, 5 décimos, 1 centésimo e 2 milésimos).

▪ Como os alunos poderiam compreender graficamente a representação de décimos, centésimos e milésimos?
(Se no grupo surgirem discussões sobre dificuldades de alunos para compreender relações entre parte inteira, décimos, centésimos e milésimos, esta será uma questão que poderá possibilitar discussões de representações materiais figurais (malha quadriculada ou material dourado) como recursos didáticos).</td></tr>
<tr><td>Mobilizar tratamento da língua natural para estabelecer relações de equivalência entre décimos, centésimos e milésimos, utilizando papel e lápis ou o cálculo mental.</td></tr>
<tr><td>Decompor um número racional na representação decimal como uma adição utilizando frações (decimais) da unidade.</td></tr>
</table>

APÊNDICE K - PLANEJAMENTO DA ATIVIDADE 9 PARA A NONA SESSÃO.

Possíveis dificuldades levantadas pelo grupo	Possíveis questionamentos da pesquisadora
Representar números racionais a partir de pontos indicados na reta graduada.	▪ Como os alunos podem comparar $\frac{4}{3}$ e $\frac{8}{6}$? **(Se no grupo surgir apenas a conversão das representações fracionárias para as representações decimais para comparar $\frac{4}{3}$ e $\frac{8}{6}$, esta será uma questão que poderá possibilitar discussões de comparações entre representações fracionárias de um mesmo número racional).**
Mobilizar procedimentos de tratamento para comparar representações fracionárias de um número racional.	▪ Os alunos podem utilizar outra estratégia para comparar os números indicados pelas setas? **(Se no grupo surgir apenas a comparação entre as representações $\frac{4}{3}$ e $\frac{8}{6}$, esta será uma questão que poderá possibilitar discussões de representações fracionárias (como medida) na reta numérica e de representações decimais).**
Converter uma representação fracionária de um número racional, para sua representação decimal.	▪ Como os alunos podem comparar $1\frac{1}{3}$ e $1\frac{2}{6}$? **(Se no grupo surgir a discussão de que os alunos podem utilizar o número misto para comparar os números indicados pelas setas, esta será uma questão que poderá possibilitar discussões para mobilizar procedimentos de tratamentos e conversões na comparação entre números mistos).**