Université Joseph Fourier
Sciences & Géographie

THESE

présentée par

Marilena BITTAR

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Didactique des Mathématiques**

LES VECTEURS DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

- Aspects outil et objet dans les manuels
- Etude de difficultés d'élèves dans deux environnements : papier crayon et Cabri-géomètre II



Soutenue le 21 septembre 1998

Composition du jury

Jean-Marie **Laborde**, Directeur de Recherche au CNRS	Président
Aline **Robert**, Professeur IUFM de Versailles	Rapporteur
Gérard **Vergnaud**, Directeur de Recherche au CNRS	Rapporteur
Colette **Laborde**, Professeur IUFM de Grenoble	Directeur
Claude **Comiti**, Maître de Conférences UJF	Examinateur
Jean-Luc **Dorier**, Maître de Conférences Habilité UPMF	Examinateur

Thèse préparée au sein de l'équipe EIAH - Laboratoire LEIBNIZ - IMAG

Université Joseph Fourier
Sciences & Géographie

THESE

présentée par

Marilena BITTAR

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1

(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Didactique des Mathématiques**

LES VECTEURS DANS L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

- Aspects outil et objet dans les manuels
- Etude de difficultés d'élèves dans deux environnements : papier crayon et Cabri-géomètre II



Soutenue le 21 septembre 1998

Composition du jury

Jean-Marie **Laborde**, Directeur de Recherche au CNRS	Président
Aline **Robert**, Professeur IUFM de Versailles	Rapporteur
Gérard **Vergnaud**, Directeur de Recherche au CNRS	Rapporteur
Colette **Laborde**, Professeur IUFM de Grenoble	Directeur
Claude **Comiti**, Maître de Conférences UJF	Examinateur
Jean-Luc **Dorier**, Maître de Conférences Habilité UPMF	Examinateur

Thèse préparée au sein de l'équipe EIAH - Laboratoire LEIBNIZ - IMAG

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance à Colette Laborde d'avoir accepté de diriger cette thèse. Les échanges faits pendant les quatres années de travail à Grenoble, sans jamais imposer son point de vue et en essayant de comprendre le mien m'ont permis de découvrir et d'apprendre le métier de chercheur en didactique.

Je remercie Jean-Luc Dorier pour les discussions qui m'ont aidé à progresser et pour avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance. Je remercie également Claude Comiti pour son aide en début de rédaction de thèse et pour avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance.

Je remercie Aline Robert et Gérard Vergnaud d'avoir accepté de rapporter sur mon travail et des contributions apportées.

Mes remerciements vont aussi à Jean-Marie Laborde, responsable du projet Cabri-Géomètre, pour avoir accepté de faire partie de mon jury de soutenance de thèse.

De nombreuses personnes ont contribué à l'aboutissement de ce travail de thèse. Je remercie particulièrement :

- les enseignants M. Vanotti, M. Lagoriot, M. Benoit et P. Clarou pour m'avoir permis de travailler dans leur classe ;
- les élèves et étudiants qui, acceptant de jouer le jeu, ont été des acteurs essentiels dans ce travail ;
- Philippe Clarou pour son soutien en tant qu'ami et pour son aide en tant qu'enseignant qui m'a ouvert les portes de sa classe pendant trois mois pour que je puisse observer et expérimenter ;
- les membres de l'ancienne équipe didatech pour l'accueil chaleureux, les portes ouvertes aux discussions qui aident à progresser et les mots d'encouragement dans des moments difficiles à traverser ;
- Jean-François, Lucile et Sylvie pour les relectures faites de ce manuscrit ;
- Jacky, Joëlle et Zilora toujours disponibles à aider et ce souvent avec un sourire ;
- les thésards et ex-thésards qui ont joué un rôle important aussi bien pour les discussions "didactiques" que pour le soutien moral tout au long de ces années. Un grand merci en particulier à Sophie, Lucile, Cileda, Hamid, Paula, Vanda, Ana Paula et Nery.

Je remercie le "Conselho Nacional de Pesquisa - CNPq" de m'avoir accordé une bourse d'études pendant toute la durée de cette thèse. Je felicite cet organisme qui a toujours tenu les délais fixés et qui a su répondre assez vite à chaque demande posée.

Les enseignants du "Departamento de matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul" ont toujours accepté d'être surchargés de travail pour permettre à ses membres de s'absenter pour se spécialiser. Je vous remercie et j'espère pouvoir contribuer activement dans notre université.

Les appels venus du Brésil ont été d'un très grand apport pour m'aider à traverser certains moments particulièment difficiles. Je remercie toute ma famille, sobretudo minha mãe, minhas irmãs, Marisa, Mariluce e Maura, e meus irmãos, Mauro e Marcio, de leur amour et soutien à distance pendant ces quatres ans. Quand cette distance tendait à zéro ma joie était complète... Mamãe, Meméia, Marisa, Junior, Meca, Zanza, ...

Je remercie les amis conquis tout au long de ses quatre années... Penny, Ge, Ana, les quatre mousquetaires du DEA ; Vanda et les discussions bilingues ; Paula le lien avec le Brésil ; Franck, l'ami franco-brésilien ; Hamid et Yasmina, le retour à mes origines. Gilson, Te, Celso, Neia, Neguinho, Marilia, Claudia, Alba,... des amis brésiliens faits en France qui restent pour toujours.

Merci infiniment à la famille Reboulli d'avoir été la deuxième famille de Said en France. Annie a comblé une partie de mon absence auprès de Said. Aucun remerciement ne suffit pour lui montrer mon amitié et ma gratitude mais j'essaie quand même... merci du fond du cœur Annie.

L'amour de mon fils m'a donné les forces pour surmonter les difficultés rencontrées. Du haut de son enfance il a su comprendre mon "obsession" pour cette thèse. Je t'aime très fort mon chéri.

"O essencial é invisível aos olhos."
Antoine de Saint-Exupéry

Table des Matières

Introduction et présentation du travail 11

Chapitre A
Problématique et Méthodologie de Recherche 15
1 - Premières hypothèses et questions issues de la lecture de travaux de recherche 15
1.1 - Multiplicité des formes et formalisations de l'objet vecteur 16
1.1.1 - Distinction entre vecteur géométrique, vecteur physique et vecteur élément d'un espace vectoriel 16
1.1.2 - Convergence entre changement de "mode de pensée" et différents langages ou niveaux de description 18
1.1.3 - Passage d'un niveau de représentation à l'autre et changement de points de vue 19
1.1.4 - Multiplicité de registres 21
1.1.5 - Importance de la flexibilité 22
1.1.6 - Premières questions retenues pour notre étude 23
1.2 - Nécessité des liens du vectoriel avec la géométrie et complexité de ces rapports 23
1.2.1 - Des concepts vectoriels émergent de la géométrie 23
1.2.2 - Toutes les façons de faire de la géométrie ne préparent pas à l'introduction des concepts d'algèbre linéaire 25
1.3.3 - L'algèbre linéaire doit être en rupture avec la géométrie 27
1.2.4 - Retour à notre questionnement 27
1.2.4.1 - Rapports entre géométrie et vecteurs 28
1.2.4.2 - Quel objet est introduit dans l'enseignement secondaire ? 30
2 - Objet de notre recherche 33
2.1 - Registres de représentations sémiotiques 36
2.2 - Aspect outil et aspect objet d'un concept mathématique 38
2.2.1 - Les vecteurs en tant qu'outil 38
2.2.2 - Les vecteurs en tant qu'objet d'étude 39
3 - Outils théoriques d'approche des questions 43
3.1 - Analyse mathématique du savoir à enseigner 43
3.2 - La théorie des champs conceptuels 43
4 - Méthodologie de recherche 45
4.1 - Vue d'ensemble du travail 45
4.2 - L'analyse des programmes et manuels 47
4.2.1 - L'évolution de l'enseignement de vecteurs dans le secondaire -1931 à 1997 47
4.2.2 - L'analyse des manuels les plus répandus de la Quatrième jusqu'à la Seconde 48
4.3 - Les dispositifs expérimentaux 49
4.3.1 - Le vecteur en tant qu'outil (Première S et DEUG première année) 49
4.3.2 - Le vecteur en tant qu'objet - une expérience en classe de Seconde 50
4.3.2.1 - Entre l'observation d'une situation "naturelle" et une ingénierie 50
4.3.2.2 - Le choix de l'environnement informatique - le logiciel Cabri-géomètre II 51
4.3.2.3 - Cabri-géomètre II constituant d'un milieu pour l'apprentissage 53
4.4 - Plan du travail 56

Chapitre B1
Evolution de l'enseignement des vectueurs dans le secondaire 57
1 - L'enseignement des vecteurs dans le secondaire de 1930 à 1962 58
1.1 - Les vecteurs en classe de mathématiques en 1931 59
1.2 - Les vecteurs dans le programme de 1945 60
1.2.1 - La classe de Seconde, 1949 62
1.2.2 - La classe de mathématiques en 1957 63
1.2.3 - La classe de Seconde en 1960 65
1.3 - Conclusion 68
2 - La reforme des mathématiques modernes - 1972 69
2.1 - Les classes de Quatrième et Troisième 69
2.2 - Les vecteurs au lycée 70

2.3 - Conclusion....72
3 - Des changements - 1978....72
3.1 - Les classes de Quatrième et Troisième....72
3.2 - Les vecteurs au lycée en 1982....74
3.2.1 - Seconde....74
3.2.2 - Première S et E....76
3.2.3 - Terminale S....76
3.3 - Conclusion....77
4 - L'enseignement des vecteurs à l'heure actuelle - 1997....78
4.1 - Quatrième....78
4.2 - Troisième....81
4.3 - Seconde....83
4.4 - Première S....86
4.5 -Terminale S....87
4.6 - Conclusion....88
5 - Changements de programme prévus....89
6 - Conclusion du chapitre....90

Chapitre B2
Analyse des Manuels....93
1 - Introduction et méthodologie pour l'analyse....93
1.1 - Le choix des manuels....94
1.2 - Méthodologie d'analyse....94
2 - La classe de Quatrième....96
2.1 - La partie cours....96
2.1.1 - IREM de Strasbourg - 1992....96
2.1.2 - Terracher - 1992....96
2.1.3 - Pythagore - 1992....98
2.1.4 - À propos de l'introduction de la notion de vecteur dans les manuels....99
2.2 - La partie exercices....100
2.2.1 - IREM de Strasbourg....101
2.2.1.1 - Exercices résolus....101
2.2.1.2 - Exercices proposés....102
2.2.2 - Conclusion....105
2.2.3 - Terracher....106
2.2.3.1 - Exercices résolus....106
2.2.3.2 - Exercices proposés....108
2.2.4 - Conclusion....111
2.2.5.1 - La "boîte à méthodes"....112
2.2.5.2 - Exercices proposés....113
2.2.6 - Conclusion....114
2.3 - Conclusion de l'analyse de la Quatrième....115
3 - La classe de Troisième....117
3.1 - La partie cours....117
3.1.1 - IREM de Strasbourg - 1993....117
3.1.2 - Terracher - 1993....118
3.1.3 - Pythagore - 1993....119
3.2 - Conclusion pour la partie cours....120
3.3 - La partie exercices....120
3.3.1 - IREM de Strasbourg....121
3.3.1.1 - Exercices résolus....123
3.3.1.2 - Exercices proposés....124
3.3.2 - Conclusion....127
3.3.3 - Terracher....128
3.3.3.1 - Exercices résolus....128
3.3.3.2 - Exercices proposés....130
3.3.4 - Pythagore....133
3.3.4.1 - Exercices résolus....133
3.3.4.2 - Exercices proposés....134
3.4 - Conclusion pour la Troisième....136
4 - Les vecteurs en classe de Seconde....139
4.1 - La partie cours....139
4.1.1 - Égalité vectorielle et passage à la notation $\vec{u}$....140
4.1.2 - Addition vectorielle et produit d'un vecteur par un réel....142
4.1.3 - Vecteur nul....142
4.1.4 - Vecteurs et configurations....143
4.2 - Conclusion de la partie cours....144
4.3 - Analyse des exercices....145
4.3.1 - Terracher....145
4.3.1.1 - Vue d'ensemble et "boîte à méthodes"....146
4.3.1.2 - Les exercices proposés....150
4.3.1.3 - A propos de la fonction d'outil et d'objet....152
4.3.1.4 - Les registres présents dans les exercices....154
4.3.2 - Dimathème....156
4.3.2.1 - La "boîte à méthodes"....156
4.3.2.2 - Les exercices proposés....157
4.4 - Conclusion de la partie exercices....159
4.5 - Géométrie analytique - Analyse de la partie cours....161
4.6 - Analyse des exercices....163
4.6.1 - Terracher....163
4.6.2 - Conclusion....165
4.6.3 - Dimathème....165
4.7 - Conclusion....167
4.8 - Les transformations - La partie cours....168
4.9 - Les exercices....169
5 - Conclusion du chapitre....171

Chapitre C
Le vecteur en tant qu'outil....177
1 - Choix expérimentaux....179
1.1 - L'objectif - questions à vérifier....179
1.2 - La situation expérimentale....183
1.2.1 - La consigne....184
1.2.2 - Les choix....184
1.2.2.1 - Choix liés à la situation....184
1.2.2.2 - Choix liés aux problèmes....185
1.2.3 - Les exercices....186
1.2.3.1 - Le premier exercice....186
1.2.3.2 - Le deuxième exercice....187
2 - Analyse a priori....190
2.1 - L'exercice n° 1....190
2.1.1 - Des stratégies possibles....190
2.1.2 - Analyse des stratégies....193
2.2 - Analyse de l'exercice n° 2....197
2.2.1 - Des stratégies possibles....198
2.2.2 - Analyse des stratégies....200
3 - Expérimentation - Première S....202
3.1 - Phase A - Les exercices écrits....202
3.1.1 - L'exercice n° 1 - résultats....202
3.1.2 - Analyse des résultats obtenus....205
3.1.3 - En conclusion....211
3.1.4 - L'exercice n° 2 - résultats....213
3.1.5 - A propos des résultats obtenus....216
3.1.6 - En conclusion....219
3.2 - Phase B - Les entretiens....220
3.2.1 - Phase B.1 - Une situation de formulation....221
3.2.2 - Analyse des résultats obtenus....223
3.2.2.1 - Binôme n° 1 - Emilie (n°15) et Céline (n°28)....223
3.2.2.2 - Binôme n° 2 - Amaury (n°21) et Laurent (n°13)....225
3.2.2.1 - Binôme n° 3 - Antony (n°18) et Karin (n°6)....226
3.2.3 - Conclusion de la phase B.1....226
3.2.4 - Phase B.2 - Les entretiens....227
3.2.4.1 - Objectifs et organisation des entretiens....227
3.2.4.2 - Analyse des entretiens....230
3.2.5 - Conclusion de la phase B.2....232

3.2 - Conclusion de l'expérimentation en Première S 233
4 - Expérimentation - DEUG 235
4.1 - Analyse a priori du deuxième exercice à proposer en DEUG 235
4.1.1 - Le nouvel exercice 235
4.1.2 - Analyse de l'exercice 236
4.1.3 -Analyse des stratégies 237
4.2 - Phase A - Les exercices écrits 239
4.2.1 - Exercice n°1 - résultats obtenus 239
4.2.2 - Analyse des résultats obtenus 242
4.2.3 - En conclusion 245
4.2.3 - Exercice n°2 - résultats obtenus 246
4.2.4 - Analyse des résultats obtenus 247
4.2.5 - En conclusion 250
4.3 - Conclusion de la phase A 251
4.4 - Phase B - Les entretiens 252
4.4.1 - Phase B.1 - Production d'un travail écrit. 252
4.4.2 - Phase B.1 - Résultats obtenus 254
4.4.3 - Conclusion de la phase B.1 257
4.5 - Phase B.2 - entretien individuel 258
4.5.1 - Déroulement de l'entretien 258
4.5.2 - Analyse des entretiens 263
5 - Conclusion du chapitre 266

Chapitre D
Le vecteur en tant qu'objet : une expérience en classe de Seconde 269
1 - Méthodologie de recherche 272
2 - Etude a priori des situations attachées aux vecteurs en classe de Seconde 276
2.1 - Ensemble de situations 276
2.1.1 - Identifier ou construire des vecteurs égaux 277
2.1.2 - Effectuer l'addition de deux vecteurs donnés 280
2.1.3 - Effectuer le produit d'un vecteur par un réel et colinéarité de deux vecteurs 282
2.1.4 - Déterminer les coordonnées d'un vecteur 283
2.2 - Les invariants 285
2.3 - Systèmes de signifiants 287
3 - Présentation de la séquence 288
3.1 - Quel scénario ? 288
3.2 - Organisation de la classe 288
3.3 - Les interactions enseignant/chercheur 289
3.4 - Notre participation en classe 289
3.5 - Objectifs de l'enseignant 289
3.5.1 - A propos du scénario 290
3.5.2 - Objectif en tant qu'enseignant 290
3.6 - Vue d'ensemble des activités proposées par nous 292
4 - Mise en place de la séquence 293
4.1 - TD n°5 - Aller/retour entre translation et vecteur - représentant d'un vecteur 293
4.1.1 - Première activité proposée aux élèves 293
4.1.2 - La macro-construction représentant d'un vecteur. 298
4.1.2.1 - Les stratégies 298
4.1.2.2 - Réalisation de l'activité 300
4.2 - TD n° 6 - Coordonnées d'un point - d'un vecteur 303
4.2.1 - Des activités autour des coordonnées d'un vecteur 303
4.2.1.1 -Activité 2° - macro "coordonnées d'un vecteur" 304
4.2.1.2 - Activité 3° 306
4.2.1.3 - Activité 4° 306
4.2.1.4 - Le rôle de Cabri-géomètre II dans les activités 307
4.2.2 - Réalisation des activités et résultats obtenus 307
4.2.2.1 - Activité 2° 307
4.2.2.2 - Activité 3° 308
4.2.2.3 - Activité 4° 312
4.2.3 - Lien entre points et vecteurs du plan 312
4.3 - TD n° 7 - Somme de deux vecteurs 316
4.4 - TD n° 8 - Quelques exercices d'entraînement avec les vecteurs 320
4.5 - TD n° 15 - Équation de droite avec Cabri 324
5 - Conclusion 326
6 - Les entretiens 331
6.1 - Préparation 331
6.2 - Les activités et analyse a priori 332
6.2.1 - Activité n°1 332
6.2.2 - Activité n°2 334
6.2.3 - Activité n°3 334
6.2.4 - Activité n°4 338
6.3 - Les entretiens 340
6.3.1 - Activité n° 1 340
6.3.2 - Activité n° 2 342
6.3.3 - Activité n° 3 342
6.3.4 - Activité n° 3' 344
6.3.5 - Activité n° 4 345
6.4 - En guise de conclusion 345
7 - Conclusion du chapitre 347

Conclusion 351

Bibliographie 361

INTRODUCTION ET PRÉSENTATION DU TRAVAIL

Au fil des années la notion de vecteur a subi de nombreuses modifications dans l'enseignement secondaire français. Pendant la période des mathématiques modernes la structure vectorielle et toute leur axiomatisation sont présentes et à d'autres périodes cette structure est absente de l'enseignement secondaire. À l'époque actuelle, on retrouve les vecteurs mais sans la structure vectorielle : "tout point de vue axiomatique est exclu" (Instructions du programme, classe de Seconde, 1996).

En effet, actuellement les vecteurs dans le secondaire sont essentiellement présentés par des propriétés géométriques pour résoudre des problèmes de géométrie. À l'université on les présente en tant qu'élément d'une structure vectorielle (objet algébrique éloigné de l'objet géométrique vu dans le secondaire). Autrement dit, il existe une rupture entre la notion de vecteur enseignée dans le secondaire et celle enseignée à l'université.

Motivée par l'observation de cette rupture qui existe dans le passage du secondaire à l'université, nous avons cherché à identifier l'objet d'enseignement "vecteur" dans l'enseignement secondaire actuel en France. Cette étude nous a permis entre autres, de dégager des aspects de l'enseignement susceptibles de provoquer des difficultés pour les étudiants lors du passage du géométrique à l'algébrique.

Un examen des résultats des évaluations A.P.M.E.P.[1] au niveau de la classe de Seconde montre d'une part que le taux de réussite des élèves dans des problèmes où ils utilisent l'outil vectoriel est assez faible, et d'autre part que les enseignants du secondaire s'accordent quant à reconnaître l'importance de ce nouvel outil pour résoudre des problèmes de géométrie. Nous avons cherché dans ce travail à étudier dans un premier temps comment les vecteurs se présentent dans l'enseignement secondaire et à quoi ils servent, et dans un deuxième temps nous avons dégagé quelques difficultés des élèves relatives à la notion de vecteur et à son utilisation en tant qu'outil de résolution de problèmes de géométrie.

Un premier chapitre est consacré à une étude de quelques recherches sur l'enseignement des vecteurs à l'université et dans le secondaire, débouchant sur les questions et hypothèses

[1] Association des Professeurs de Mathématique de l'Enseignement Public.

que nous cherchons à valider dans ce travail et sur le choix de la méthodologie adoptée pour répondre aux questions posées. Nous centrons notre attention en particulier sur les recherches autour des liens entre algèbre linéaire et géométrie, les changements de registres et de points de vue.

Le savoir à enseigner

Un survol sur l'enseignement des vecteurs dans le secondaire dans les dernières décennies a pour objectif de comprendre l'évolution des vecteurs dans l'enseignement. Ce travail comprend l'introduction de la notion de vecteur, le contenu concernant les vecteurs et leur rôle dans l'enseignement secondaire. Cette étude est faite dans le chapitre B1.

Pour la période actuelle une analyse plus fine des manuels de Quatrième, Troisième et Seconde, menée dans le chapitre B2, a pour objectif d'étudier le savoir à enseigner à ces niveaux, en portant l'attention sur la place et la fonction des différents registres de représentations sémiotiques (Duval, 1988) dans l'enseignement des vecteurs et la fonction des vecteurs dans la résolution des problèmes de géométrie. Nous essayons de répondre en particulier à la question suivante : "Pour quels types de problèmes les vecteurs sont-ils présentés dans l'enseignement secondaire comme constituant un outil (efficace) de résolution ?"

Finalement, cette étude de l'objet du savoir à enseigner, basé sur l'analyse des manuels et des programmes, prend en compte les deux composantes du vecteur : vecteur en tant qu'outil et en tant qu'objet.

Les dispositifs expérimentaux

Pour analyser les difficultés des élèves concernant l'apprentissage de la notion de vecteur et l'utilisation de l'outil vectoriel lors de la résolution de problèmes, nous mettons en place deux sortes de dispositifs expérimentaux.

En classes de Première S et DEUG première année nous menons une expérimentation qui consiste essentiellement à proposer des exercices de géométrie et à étudier les résolutions fournies par les élèves (étudiants). Elle a pour objectif d'étudier la disponibilité et l'efficacité de l'outil vectoriel chez les élèves, lorsqu'ils ont un problème de géométrie à résoudre. Il s'agit ici d'exercices "standards" (au niveau d'une classe de Seconde), pour lesquels les élèves sont entraînés à utiliser les vecteurs. Le choix des exercices se base sur l'étude des manuels développée dans le chapitre précèdent (B2).

L'enseignement attend que pour certains problèmes l'élève fasse appel aux vecteurs, ainsi pour étudier la disponibilité de l'outil vectoriel chez les élèves face à l'un de ces problèmes, nous cherchons à repérer s'ils font effectivement appel aux vecteurs pour les résoudre. Pour décider de l'efficacité de l'usage de l'outil chez les élèves, nous étudions comment ils utilisent cet outil, et surtout si cet usage permet à l'élève d'aboutir à une solution. Notre attention se porte ainsi sur les causes d'absence de réussite des élèves : s'ils font appel aux vecteurs, ils savent énoncer les propriétés qu'il faut mettre en œuvre, alors pourquoi ne réussissent-ils pas ? S'agit-il d'un manque de familiarité avec l'usage de l'outil vectoriel ?

Dans le chapitre C nous présentons ainsi nos choix d'expérimentations, une analyse a priori des exercices proposées et les analyses a posteriori des deux classes : Première et DEUG première année.

Pour analyser les difficultés des élèves de Seconde dans l'apprentissage de la notion de vecteur, et plus particulièrement concernant les notions de représentant d'un vecteur et de classe d'équivalence, nous étudions une séquence d'enseignement construite autour d'un nouvel environnement : le logiciel de géométrie Cabri-géomètre II. A partir d'une étude de la notion de vecteur en classe de Seconde faite en termes de champs conceptuels (Vergnaud, 1990), nous proposons des activités insérées dans la séquence pour confirmer et/ou perturber la présence de certains théorèmes-en-acte erronés construits par les élèves. L'un de nos objectifs concernant ce dispositif expérimental est d'étudier des conditions didactiques susceptibles de permettre à l'élève de créer de nouvelles règles d'action en situation visant la création des nouveaux schèmes et de progresser.

Dans le chapitre D nous présentons alors l'ensemble de l'expérimentation réalisé dans une classe de Seconde avec l'utilisation du logiciel Cabri-géomètre II.

CHAPITRE A

PROBLÉMATIQUE ET MÉTHODOLOGIE DE RECHERCHE

L'enseignement de l'algèbre linéaire à l'université, et du calcul vectoriel dans le secondaire a, depuis quelques années, attiré l'attention de plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques et de la physique. C'est à partir d'une synthèse des recherches en didactiques des mathématiques autour des premières notions vectorielles, plus particulièrement de la notion de vecteur, que nous établirons nos premières hypothèses et questions.

A partir de cette étude et de nos questions initiales, nous définissons notre problématique, nos hypothèses de travail et les hypothèses de recherche que nous mettrons à l'épreuve dans les chapitres suivants. Nous aurons ainsi défini le cadre théorique de référence de notre travail et finalement nous présenterons la méthodologie mise en place dans notre recherche.

1 - Premières hypothèses et questions issues de la lecture de travaux de recherche.

Les travaux en didactique des mathématiques sur les vecteurs et l'algèbre linéaire ne remontent guère à plus de quinze ans. Ils ne sont pas très nombreux même si, récemment, on assiste à un intérêt croissant pour ce champ de questions.

L'enseignement de l'algèbre linéaire à l'université pose des problèmes aux étudiants ; les notions ne vont pas de soi, il s'agit du premier contact avec une théorie d'algèbre abstraite. Les enseignants en ont conscience mais ne comprennent pas pourquoi quelque chose d'aussi simple, à leurs yeux, pose autant de problèmes. Plusieurs chercheurs en didactique des mathématiques ont entrepris des recherches sur l'enseignement de l'algèbre linéaire dans les dernières années, en France et à l'étranger, ainsi que sur l'enseignement des vecteurs dans le secondaire.

Nous pouvons constater qu'il n'existe pas de lien entre ce que l'on fait à l'université et l'enseignement des vecteurs dans le secondaire. En effet, il existe une rupture entre l'objet

vecteur tel qu'il est présenté et utilisé dans l'enseignement secondaire et le vecteur élément d'un espace vectoriel présenté dans l'enseignement de DEUG. Les termes et expressions tels que vecteur, égalité vectorielle, somme vectorielle et produit par un scalaire sont présents aux deux niveaux, mais il s'agit d'objets différents ayant des objectifs différents dans l'enseignement. A l'université, on présente une théorie des espaces vectoriels assez éloignée du calcul vectoriel de l'enseignement secondaire.

Notre objectif dans ce paragraphe est, à partir d'un ensemble de travaux de recherche qui couvrent à la fois l'enseignement secondaire et l'enseignement universitaire, de dégager les points cruciaux des problèmes d'enseignement et d'apprentissage autour de l'objet vecteur. Nous nous proposons d'étudier et mettre en évidence les convergences qui se dégagent de ces travaux.

1.1 - Multiplicité des formes et formalisations de l'objet vecteur

1.1.1 - Distinction entre vecteur géométrique, vecteur physique et vecteur élément d'un espace vectoriel

La thèse de doctorat de Lê Thi (1997), débute par une étude des recherches antérieures autour de l'enseignement des vecteurs de la classe de Quatrième à celle de Seconde ; ces recherches concernent les vecteurs en physique et en mathématique. A propos des vecteurs en physique, Lê Thi analyse des travaux réalisés entre 1970 et 1990 par les auteurs suivants : (i) Malgrange, Saltiel et Viennot, (ii) Genin, Michaud-Bonnet et Pellet, (iii) Lounis[1]. Ces travaux montrent, entre autres, qu'il y a une différence entre le vecteur de la physique (les grandeurs physiques vectorielles telles que la force et la vitesse) et le vecteur des mathématiques, et qu'en physique les élèves ont tendance à ne considérer qu'une seule caractéristique du vecteur, sa longueur.

En France, le calcul vectoriel est présent dans l'enseignement secondaire depuis la classe de Quatrième, pour travailler les mathématiques et la physique. Cela veut dire qu'un étudiant de DEUG aura connu, après son cours d'algèbre linéaire, trois types de vecteurs différents : le vecteur de la physique, le vecteur de l'algèbre linéaire et le vecteur géométrique. Cette distinction est rencontrée entre autres dans les travaux de Dorier (1997b), qui met en évidence l'existence de trois habitats différents pour les vecteurs dans l'enseignement secondaire à l'époque des mathématiques modernes : le vecteur géométrique (celui du

[1] Ces références se trouvent dans la thèse de Lê Thi (1997).

collège), les vecteurs de la physique[2] et le vecteur de l'algèbre linéaire (un élément d'un espace vectoriel). Ce dernier, que nous appellerons comme Dorier, vecteur algébrique peut prendre différentes formes, fonctions, polynômes, suites. Dorier désigne par le terme *vecteur géométrique*, "le vecteur du plan ou de l'espace géométrique défini de façon géométrique (soit par ses caractéristiques de longueur, direction et sens, soit par l'étude des translations), par opposition au vecteur, élément d'un espace vectoriel de dimension deux ou trois, défini axiomatiquement par des propriétés algébriques" (ibid., p. 44).

Ces trois types de vecteurs font appel à chaque fois à des propriétés et définitions qui sont différentes, faisant ainsi appel à des niveaux de conceptualisation différents autour de la notion de vecteur. Par niveau de conceptualisation nous reprenons la définition donnée par Robert (1997),

> "Nous voulons étiqueter par ce mot un palier dans un champ de connaissances mathématiques (champ conceptuel), correspondant à une organisation cohérente d'une partie du champ, caractérisée par des objets mathématiques présentés d'une certaine façon, des théorèmes sur ces objets, des méthodes associées à ces théorèmes, et des problèmes que les élèves peuvent résoudre avec les théorèmes du niveau considéré, et en utilisant ces méthodes." (p. 149)

A partir d'une étude des programmes de mathématiques du secondaire, Robert conclut que pour un certain nombre de notions "tout se passe comme si on préparait les élèves à une présentation de ces notions à un certain niveau de conceptualisation, mais sans l'atteindre dans les années du lycée. De plus c'est souvent un niveau formel, nécessitant l'introduction d'un nouveau formalisme spécifique qui est préparé sans être atteint." (ibid., p. 154). Robert prend comme exemple le cas de la géométrie vectorielle vue dans le secondaire : on introduit les vecteurs, on signale la bijection entre les points du plan et les vecteurs de $\mathbb{R}^2$, mais ni l'espace affine ni l'espace vectoriel ne font partie des objets d'enseignement au lycée. "Les élèves restent donc à un niveau élémentaire en géométrie, non axiomatique, tout en ayant "dépassé" ce niveau par l'introduction partielle d'objets intervenant à un autre niveau de conceptualisation, celui des géométries vectorielle et affine" (ibid., p. 155).

Les exemples donnés par Robert, convergence de suite ou limite de fonctions et l'algèbre linéaire, font appel à des notions qui sont du type généralisateur et unificateur et c'est justement la formalisation de ces notions qui pourrait fournir une certaine économie dans leur usage. Or, cette formalisation ne sera pas faite au niveau de l'enseignement secondaire, où les notions sont surtout présentées liées à des problèmes à résoudre, se

[2] "[...] les différents vecteurs physiques correspondent à des définitions mathématiques distinctes dans cette même théorie : un vecteur lié (ou segment orienté) est un couple formé d'un point (l'origine) et un d'un vecteur géométrique, un vecteur glissant est un couple formé d'une droite affine (le support) et d'un vecteur géométrique, un vecteur axial est le produit vectoriel de deux vecteurs géométriques, un champ de vecteur est une application du plan ou de l'espace affine dans l'espace vectoriel associé" (Dorier, 1997b, p. 44)

limitant ainsi à présenter aux élèves seulement ce dont ils auront besoin pour la résolution de ces problèmes. Pour conclure, nous laissons la parole à Robert (1997) :

> "La théorie des situations didactiques ou la dialectique outil/objet abordent à leur manière ce problème de conceptualisation en mathématiques, et proposent une genèse artificielle adaptée aux notions visées ; par exemple dans le dernier cas, l'hypothèse est la suivante : on aide les élèves à la conceptualisation en les faisant travailler sur des problèmes qui leur permettent d'abord de mettre en fonctionnement la notion comme outil de résolution d'un problème puis en leur proposant une exposition décontextualisée de la notion, présentée par l'enseignant, avec un certain nombre de propriétés.
> Mais il nous semble justement que les notions que nous avons en vue ne se prêtent pas bien à ce type d'approche, ce qui justifie d'une certaine manière leur traitement particulier dans les programmes : en effet un concept né pour remplacer diverses démarches efficaces mais disparates, qui, chacune, cache en partie l'essence de la démarche sous la particularité du problème, ne peut pas, par nature même, être associé à un problème particulier ; son intérêt est ailleurs : c'est précisément dans son caractère à la fois simplificateur et unificateur qu'il réside." (p. 157)

1.1.2 - Convergence entre changement de "mode de pensée" et différents langages ou niveaux de description

Sierpinska et collaborateurs (1997) identifient trois "modes de raisonnement (ou de pensée)" qui coexistent en algèbre linéaire : synthétique-géométrique, analytique-arithmétique et analytique-structurel. "La différence principale entre le mode "synthétique" et le mode "analytique" vient de ce que dans le premier, les objets sont, en quelque sorte, donnés directement à l'esprit, qui essaie alors de les décrire, tandis que dans le mode analytique les objets sont donnés indirectement, ils sont seulement construits par des définitions des propriétés de leurs éléments." (p. 250) Pour mieux comprendre cette distinction reprenons l'exemple du cas d'un système de trois équations à trois inconnues, donné par les auteurs. Dans ce cas trois modes de pensée sont identifiés :

- synthétique-géométrique : position relative des trois plans ;
- analytique-arithmétique : réduction d'une matrice 3X4 par un algorithme de type Gauss ;
- analytique-structurel : interrogation sur la bijectivité de l'opérateur.

Sierpinska a constaté des difficultés chez les étudiants lorsqu'ils doivent passer d'un mode de pensée à l'autre. Nous retenons ici une des explications sur le changement de pensée en fonction de l'environnement adopté :

> "Par exemple, si nous demandons à un étudiant de construire un triangle dans un plan, il n'aura pas besoin d'utiliser un autre mode de pensée que le synthétique-géométrique. Si nous lui demandons en plus quel genre de système d'équations linéaires cette figure représente du point de vue de sa solution, il sera déjà obligé d'analyser les côtés en termes de points et ensuite de traduire les points en couples de nombres. Si nous ajoutons à la première tâche la condition que la figure soit obtenue par une programmation en *Maple*, l'étudiant devra faire la navette entre la pensée synthétique-géométrique et la pensée analytique-arithmétique parce qu'il est impossible de communiquer une droite à *Maple* autrement qu'en lui en donnant son équation. Si, dans ce nouveau problème, nous remplaçons *Maple* par *Cabri*, la pensée géométrique-synthétique va suffire."(ibid., p. 266)

Il nous semble de plus que ce "changement de pensée", qui doit s'effectuer par rapport à l'environnement choisi, doit aussi contribuer à mettre en évidence différentes difficultés des étudiants (élèves) concernant l'apprentissage d'une certaine notion. Nous reviendrons sur ce point plus loin, lors de la définition de notre problématique, dans le paragraphe 2.

Le changement de pensée exigé par l'algèbre linéaire, converge avec les différents langages dans lesquels les étudiants doivent être capables de travailler. Hillel (1997) distingue l'existence de trois types de langages ou niveaux de description : le langage de la théorie générale (espaces vectoriels, sous-espaces, dimension, opérateurs, noyaux, etc.), le langage de la théorie plus spécifique de $\mathbb{R}^n$ (n-uplets, matrices, rang, solutions d'un système d'équations, etc.), et le langage géométrique de l'espace à deux ou trois dimensions (vecteur géométrique, points, droites, plans et transformations géométriques). Ainsi chaque "mode de pensée" correspond à un type de langage.

Dans la suite nous parlerons de l'importance du passage d'un niveau de représentation à l'autre.

1.1.3 - Passage d'un niveau de représentation à l'autre et changement de points de vue

Par "représentation" Hillel entend "l'action d'exprimer un objet particulier par un autre, que ce soit au même niveau de description ou à travers différents niveaux." (1997, p. 234) Selon l'auteur, l'un des problèmes de l'enseignement de l'algèbre linéaire est le passage entre deux niveaux de description qui est lié en particulier au problème de la représentation :

> "Un vecteur (respectivement un opérateur linéaire) d'un espace vectoriel de dimension finie est représenté comme un n-uplet (respectivement une matrice). Un couple ou un triplet peuvent être représentés comme un vecteur géométrique, etc. Ces représentations dépendent souvent d'un choix particulier de base ou de système de coordonnées. Comprendre cette dépendance liée à la base (et, implicitement, comprendre ce qui reste invariant) et être capable d'aller d'une représentation à l'autre est une source de difficultés pour les étudiants." (ibid., p. 234).

Parmi les difficultés dues au passage d'un niveau de représentation à l'autre, nous retenons ici l'exemple donné par Hillel à propos de la représentation des vecteurs et des opérateurs linéaires. Hillel a constaté que les étudiants qu'il a observés font une erreur persistante, concernant la représentation matricielle d'un opérateur linéaire : souvent ils

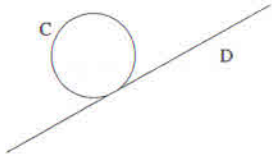
pensent "que les colonnes d'une matrice représentant un opérateur sont, au pied de la lettre, les images des vecteurs de base et non pas des *représentations* de ces images relativement à une base. La difficulté est compliquée par le fait que, dans le cas de la base canonique, c'est la bonne interprétation." (ibid., p. 244). Au lecteur intéressé par plus de détails, nous indiquons la lecture d'un article publié par Hillel et Sierpinska sur des erreurs persistantes en algèbre linéaire dans (Hillel et Sierpinska, 1994).

Convergeant avec la notion de niveau de représentation, on retrouve la notion de changement de points de vue. Dans notre travail cette notion est utilisée dans le sens donné par Robert (1998) :

> "Il s'agit de petits changements dans la lecture ou l'écriture d'énoncés, qui peuvent enclencher des stratégies nouvelles, comme le fait de rendre symétrique un énoncé dissymétrique (équivalent), ou l'inverse, ou d'introduire un énoncé très proche équivalent (de manière évidente pour celui qui l'utilise." (p. 22)

Pour mieux comprendre cette notion, prenons l'exemple donné par (Robert et Tenaud, 1988, p. 42) :

> "La figure suivante peut être interprétée comme une droite tangente à un cercle, un cercle tangent à une droite ou une droite et un cercle tangents ; ces trois descriptions ne sont pas équivalentes du point de vue des stratégies éventuelles qu'elles peuvent amorcer."



Rogalski (1997) et Dias (1995) ont pris en compte l'importance des changements de points de vue dans l'enseignement de l'algèbre linéaire.

Rogalski a élaboré, en concertation avec Dorier, Robert et Robinet un projet d'enseignement de longue durée qui a été expérimenté en DEUG première année dans le cours d'algèbre linéaire, en mettant en œuvre plusieurs stratégies, longues et imbriquées. Il a joué sur le levier "méta"[3] et les changements de cadres (du formel au numérique, du numérique au géométrique), ou de point de vue sur une notion (par exemple identifier l'équation linéaire $a_1x_2 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ avec le vecteur de $\mathbb{R}^n$ $(a_1, a_2, ..., a_n)$ et passer de la pratique des combinaisons linéaires d'équations à la notion de rang d'une famille

[3] "Nous désignons le mot "lévier méta" (ou quelques fois simplement méta) pour désigner le recours dans l'enseignement à des éléments d'information ou de connaissances SUR les mathématiques. Cela peut concerner le fonctionnement des mathématiques, leur utilisation, leur apprentissage, ce peut être des éléments généraux ou particuliers." (Dorier et al, 1997c, p. 185)

de vecteurs[4]) "pour obtenir une modification efficace des connaissances d'un nombre significatif d'étudiants" (Dorier et al, 1994, p. 330)[5].

Dans la suite des travaux de Rogalski, Dias développe, entre autres, l'existence en algèbre linéaire de deux points de vue et l'importance de la mobilité entre ces deux points de vues : cartésien et paramétrique. "Par exemple, la notion de sous-espace vectoriel peut apparaître du point de vue paramétrique, mettant l'accent sur les générateurs ou du point de vue cartésien, des équations caractérisant alors le sous-espace." (Dorier, 1997a, p. 277)

1.1.4 - Multiplicité de registres

Un autre aspect qui commence à apparaître dans les recherches menées sur l'enseignement d'algèbre linéaire est la notion de registre de représentation sémiotique, introduite par Duval (1993) ainsi que l'importance cognitive des changements de registres et l'absence d'une pratique institutionnalisée de ces changements.

> "Les représentations sémiotiques sont des productions constituées par l'emploi de signes appartenant à un système de représentation qui a ses contraintes propres de signifiance et de fonctionnement." (Duval, 1993, p. 39)

Pavlopoulou dans sa thèse de doctorat (Pavlopoulou, 1994), étudie les registres de représentation sémiotiques présents dans l'enseignement de l'algèbre linéaire. L'auteur distingue trois types de registres de représentation sémiotiques : le registre graphique (celui des flèches), le registre des tableaux (colonne des coordonnées) et le registre de l'écriture symbolique (théorie axiomatique des espaces vectoriels)[6]. La thèse que soutient Pavlopoulou est que :

> "...les différentes représentations du même objet que nous pouvons obtenir dans les différents registres ne doivent **pas simplement servir comme des champs d'application de l'objet défini**. Ils doivent aussi **constituer une approche vers la conceptualisation de l'objet mathématique**[7]. Et dans la conceptualisation, la conversion entre les différents registres c'est-à-dire la transformation d'une représentation en une autre dans un autre registre joue un rôle essentiel." (ibid., p. 40)

Lors d'une première enquête réalisée auprès des étudiants de DEUG, première année, Pavlopoulou a pu constater une très faible réussite des étudiants devant une tâche de conversion. Par ailleurs, elle a pu constater que dans les manuels d'algèbre linéaire, il y a

[4] Cet exemple est donné par Rogalski dans (Rogalski, 1997).
[5] Cet article porte essentiellement sur une évaluation de l'ingénierie mise en œuvre à Lille.
[6] Pavlopoulou fait une présentation des registres utilisés en algèbre linéaire et à ces trois registres s'ajoutent les deux suivants : langue naturelle et langage de programmation. Selon l'auteur, le passage entre le registre de la langue naturelle et le registre de l'écriture symbolique est "un passage qui ne peut pas être négligé pour un enseignement de l'algèbre linéaire" (Pavlopoulou, 1993, p. 92)
[7] C'est l'auteur qui souligne.

absence totale d'une pratique de changements de registres. Pavlopoulou a mis en place une séquence d'enseignement visant à favoriser la coordination des registres de représentation sémiotiques. L'auteur a constaté dans des tâches de conversion, un taux de réussite supérieur à celui obtenu lors des ses premières enquêtes, ce qui a contribué à ce que les étudiants distinguent l'objet mathématique de ses représentants, comme le conclut Pavlopoulou :

> "En mobilisant plusieurs registres de représentation pour l'appréhension conceptuelle d'un objet mathématique, nous mettons en évidence les différents aspects de cet objet en évitant qu'il soit confondu avec un de ses représentants." (ibid., p. 234)

Dans la suite du travail de Pavlopoulou, Dias reprend la notion de registres, la retravaille en l'approfondissant, en même temps qu'elle reprend les notions de modes de raisonnement et niveaux de description développées par Sierpinska et Hillel.

Dias étudie la notion de flexibilité cognitive entre formes de connaissance et représentation symbolique ; elle s'intéresse à savoir comment les étudiants peuvent donner des représentations symboliques différentes et passer de l'une à l'autre. Pour cela Dias distingue deux cadres au sens de Douady (1986), l'algébrique et le géométrique ; quatre registres (représentation symbolique intrinsèque, représentation par les coordonnées, représentation par les équations et représentation matricielle) et deux points de vue (cartésien et paramétrique).[8]

1.1.5 - Importance de la flexibilité

Le travail de Dias prend appui sur la notion de flexibilité cognitive qui est présentée comme constituant un facteur essentiel de la conceptualisation dans l'apprentissage des mathématiques. Ainsi Dias étudie "les problèmes d'articulation entre différents systèmes de représentations symboliques en algèbre linéaire, dans le cadre de l'étude globale de la flexibilité entre les deux points de vue, cartésien et paramétrique." (Dorier, 1997a, p. 277). Après avoir fait des expérimentations en DEUG sur la notion de rang, Dias conclut d'abord de l'importance du jeu dans les changements de modes de raisonnement et de représentation :

> "Les résultats obtenus confirment notre conviction selon laquelle la flexibilité entre les représentations cartésienne et paramétrique a un rôle fondamental à jouer dans l'apprentissage de l'algèbre linéaire et que cette flexibilité ne peut pas être réduite à des aptitudes de simple type sémiotique"[9].

En effet, à partir de l'analyse d'exercices résolus pas les étudiants, Dias conclut entre autres que l'étudiant peut contrôler des aspects techniques d'une conversion entre deux représentations sans pour autant maîtriser l'aspect conceptuel de la tâche. L'auteur conclut

[8] Au lecteur intéressé nous renvoyons à la lecture de la thèse de Dias (1998).
[9] Traduction faite par Dorier dans (Dorier, 1997, 2° partie, chapitre VIII, p. 279) d'un article de Dias (1995).

encore que spontanément les étudiants ne sont pas capables de mettre en œuvre cette flexibilité et que cela doit être pris en charge par l'enseignement.

Pavlopoulou et Dias mettent ainsi l'accent sur l'importance du travail sur les différentes représentations possibles d'une notion et sur la mobilité de passage entre ces différentes représentations, en particulier pour l'enseignement de l'algèbre linéaire, travail en général absent de l'enseignement.

1.1.6 - Premières questions retenues pour notre étude

Il n'y a pas à notre connaissance de travaux sur les registres de représentation sémiotique au niveau de l'enseignement secondaire autour de la notion de vecteur. Nous chercherons dans un premier temps à répondre à la question suivante dans le cadre de notre recherche :

- Quels sont les registres de représentation sémiotique présents dans l'enseignement secondaire attachés à la notion de vecteur et quel est leur usage ?

Nous avons vu qu'au niveau universitaire, les changements de registres ne font pas partie des objets d'enseignement, ce qui peut être source de difficultés des étudiants. Nous nous posons alors les questions suivantes :

- Dans l'enseignement secondaire, les choses se passent-elles de la même façon ?
- Fait-on pratiquer aux élèves des changements de registres ?
- A quoi peuvent servir ces changements de registres ?

Nous reviendrons sur ces points dans le paragraphe 2.

1.2 - Nécessité des liens du vectoriel avec la géométrie et complexité de ces rapports

1.2.1 - Des concepts vectoriels émergent de la géométrie ; la géométrie donne sens aux concepts vectoriels.

Dorier a mené une étude détaillée sur l'histoire de la genèse des concepts élémentaires d'algèbre linéaire (combinaison linéaire, sous-espace,...) et développé un aperçu historique de l'enseignement de l'algèbre linéaire en France. Au lecteur intéressé, nous renvoyons à (Dorier, 1990), (Dorier, 1993) ou encore (Dorier, 1997a, 1° partie). Dans le cadre de ce travail l'attention est centrée plus particulièrement sur son étude concernant les connaissances

préalables des étudiants en géométrie, et les liens entre celles-ci et l'apprentissage de l'algèbre linéaire.

Dorier montre qu'au cours du XVII siècle, la géométrie analytique a pris une place importante comme méthode pour résoudre des problèmes de géométrie.

> "La méthode analytique, mise au point indépendamment par René Descartes (1637) et Pierre de Fermat (1643), permit d'introduire en géométrie la performance du calcul algébrique. [...] De fait la méthode analytique obtint rapidement un large succès et les mathématiciens en reconnurent le pouvoir de simplification et d'unification en l'appliquant à la résolution de nombreux problèmes de géométrie anciens et nouveaux." (Dorier, 1997a, p. 35)

Le calcul vectoriel est né d'une critique de la méthode analytique : il débute en 1679 avec Leibniz, et un siècle et demi plus tard il regagne force avec le calcul barycentrique de Möbius (1827) et avec le calcul des équipollences de Bellavitis (1832-1835). En 1845, Grassmann remporte le prix du concours lancé par la société allemande de mathématiques pour prolonger le travail de Leibniz. Il développe la théorie des extensions qui n'est reconnue et acceptée par les mathématiciens que quelques années plus tard. "Les débuts de la théorie axiomatique des espaces vectoriels restent limités. Ils sont directement issus des travaux de Grassmann". (ibid., p. 70).

A partir de son analyse historique, Dorier a montré que "la géométrie et l'algèbre linéaire ont de longue date entretenu des rapports privilégiés. Ainsi plusieurs concepts d'algèbre linéaire ont pris naissance à travers des questions de géométrie et une phase importante dans la genèse de l'algèbre linéaire a consisté dans la généralisation des concepts et du langage de la géométrie à des espaces plus complexes." (1990, p. 456)

Si, d'une part des concepts vectoriels sont nés de la géométrie, d'autre part celle-ci peut contribuer à donner sens à l'étude de certains concepts vectoriels par les images qu'elle en peut en fournir, comme on le voit explicité entre autres dans les recherches faites indépendamment par Rogalski et Harel.

De prime abord, Rogalski a analysé l'enseignement traditionnel de l'algèbre linéaire qui part de l'axiomatique des espaces vectoriels. Cet enseignement classique est rapide, économique et ne demande pas de prérequis. Pourtant cela ne marche pas : même si au début les "avantages" de cet enseignement font apprécier l'algèbre linéaire aux étudiants, ces concepts ne prennent pas sens pour eux. Rogalski a repéré des causes épistémologiques et didactiques à ces difficultés, en s'appuyant notamment sur les travaux de Dorier. En effet, on ne donne l'accès aux étudiants qu'à la phase finale du processus historique sans rendre compte des difficultés qu'ont rencontrées les mathématiciens pour l'émergence des concepts d'algèbre linéaire (en fait, un processus long et complexe comme l'a montré Dorier). Autrement dit, la construction des concepts dans les mathématiques n'apparaît pas dans l'enseignement et cette présentation contribue à la "perte de sens". Rogalski (1994) a mis en

relief les connaissances qui sont prérequises (qui ne sont pas obligatoirement antérieures dans le temps), pour l'enseignement de l'algèbre linéaire :

- compréhension des enjeux de vérité en mathématique et une certaine pratique de la logique élémentaire et du langage ensembliste ;
- acceptation de la "démarche" algébrique et axiomatique ;
- pratique de la géométrie dans l'espace et de la géométrie cartésienne[10] ;

Harel (1989) a élaboré et mis en place une proposition d'enseignement d'algèbre linéaire au lycée (High School) en faisant d'abord travailler les élèves sur des concepts d'algèbre linéaire sur la géométrie, car celle-ci permet de visualiser ces concepts et par conséquent de leur donner sens, et ensuite de travailler sur l'espace $\mathbb{R}^n$ (en débutant par $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$). Enfin, dans une troisième étape les notions sont étendues à un espace vectoriel quelconque de dimension égal ou supérieure à 3. L'une des conclusions de l'auteur est que cette approche semble avoir permis une meilleure "abstraction" des concepts en jeu par les étudiants, mais la seule visualisation de quelques concepts ne suffit pas à l'apprentissage d'une théorie telle que l'algèbre linéaire.

En conclusion, le calcul vectoriel est issu historiquement de questions posées à partir de la géométrie. Certains travaux mentionnent l'apport de la visualisation que peut constituer la géométrie pour les débuts de l'enseignement de l'algèbre linéaire.

1.2.2 - Toutes les façons de faire de la géométrie ne préparent pas à l'introduction des concepts d'algèbre linéaire.

En effet, cela semble être un point commun entre les recherches qui portent sur les problèmes de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre linéaire dont nous retenons ici quelques résultats.

Selon Rogalski, "la géométrie cartésienne est peu développée au lycée et par exemple, beaucoup de bacheliers pensent qu'une droite dans l'espace est définie, comme dans le plan, par une seule équation" (1994, p. 7). Cela le conduit à poser la question suivante : "Que faut-il savoir en géométrie pour faciliter la tâche lors de l'apprentissage de l'algèbre linéaire ?" Rogalski nous fournit une réponse :

> "Ces connaissances géométriques vont être un support important pour le langage et le sens en algèbre linéaire. Elles peuvent en effet donner des "images" de certains concepts vectoriels : sous-espaces, combinaisons linéaires, somme directe, ensemble des solutions de systèmes d'équations linéaires, paramétrages linéaires, bases, ..." (1997, p. 163).

[10] La géométrie cartésienne est ce que l'on appelle actuellement la géométrie analytique.

Reste la question de savoir si ces connaissances seront prises en charge par l'enseignement secondaire ou s'il s'agit d'une tâche laissée à la charge de l'enseignement universitaire.

D'après Harel (1997), les mathématiques enseignées au lycée ont très peu de rapports avec l'algèbre linéaire même s'il y a des sujets dans le secondaire qui font partie de l'algèbre linéaire (la géométrie analytique, l'espace euclidien et les systèmes d'équations linéaires). "Mais ces sujets sont enseignés au lycée d'une façon qui a peu à voir avec les idées élémentaires d'algèbre linéaire." (p. 218)

Convaincus de l'importance pour le cours d'algèbre linéaire d'un travail préalable sur la géométrie analytique, Robert, Robinet et Tenaud (1987) ont préparé une série d'exercices destinée aux professeurs de lycée au niveau de la Terminale. L'objectif des auteurs était de familiariser les élèves avec les notions de droites, plans et vecteurs dans le plan et dans l'espace, en partant du principe que "d'un point de vue plus cognitif, une certaine aisance en géométrie du plan et de l'espace devrait permettre des jeux de cadres efficaces entre l'analytique et le vectoriel (moins connu), facilitant l'apprentissage ultérieur de l'algèbre linéaire." (Robert et al, 1987, p. 1) C'est pourquoi les exercices du polycopié proposés dans le cadre analytique devraient être résolus par le calcul vectoriel[11].

De son côté, Dorier a fait, à partir de textes de programmes, un bilan de l'état des connaissances en géométrie d'un étudiant qui rentre à l'université : "Il existe bien sûr plusieurs façons d'aborder la géométrie et toutes ne sont pas un moyen de préparer ou d'introduire les concepts d'algèbre linéaire. Ainsi la géométrie actuellement enseignée dans les lycées ne semble pas être de ce type, pour une part importante du moins." (1990, p. 457). En effet, la géométrie du secondaire, y compris la géométrie analytique, est basée sur l'étude des configurations, et le calcul vectoriel est introduit dans l'enseignement au lycée comme un nouvel outil pour cette étude.

Dans l'Appendice 1 de sa thèse Dorier (1990) expose et analyse la mise en place d'"une proposition d'introduction de la méthode analytique en géométrie, sur des bases métamathématiques", pour des étudiants de première année de DEUG, avant le cours sur les vecteurs. Comme illustration des intentions de l'auteur, nous citons l'un des premiers problèmes proposés aux étudiants : *montrer que dans un triangle quelconque les médianes sont concourantes*. Cet exercice a pour but d'introduire les étudiants à l'étude de la géométrie analytique du plan ; par la suite cette étude serait étendue à l'espace. La thèse que soutient l'auteur est qu'il est difficile d'enseigner l'algèbre linéaire si les étudiants ne sont pas capables d'en prendre des exemples en $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

[11] A notre connaissance, il n'y a pas d'évaluation sur l'application de ces exercices en Terminale et les conséquences par la suite chez un étudiant de DEUG lors de l'enseignement/apprentissage des premières notions vectorielles.

Dorier conclut donc que le travail en géométrie analytique peut être un travail préalable à celui de l'introduction des concepts d'algèbre linéaire, tandis que la "logique" peut être développée en parallèle avec la présentation du cours d'algèbre linéaire, ce qui converge avec les hypothèses à propos des prérequis pour l'enseignement de l'algèbre linéaire, explicités par Rogalski.

En conclusion, les auteurs cités ci-dessus semblent converger sur le fait que la géométrie telle qu'elle est enseignée au lycée ne prépare pas à l'algèbre linéaire. Certains proposent de travailler préalablement la géométrie analytique, sans que leur travaux débouchent sur des conclusions tranchées à ce propos.

1.3.3 - L'algèbre linéaire doit être en rupture avec la géométrie

Quelques unes de ces recherches questionnent les liens épistémologiques et historiques entre géométrie et algèbre linéaire : les débuts de l'enseignement de l'algèbre linéaire ont besoin de s'appuyer sur la géométrie, mais l'algèbre linéaire doit être construite ensuite en rupture avec la géométrie. La notion d'espace vectoriel, par exemple, ne prend vraiment de sens que si la dimension dépasse 3 (cf. Dorier, 1997b).

La seule visualisation de quelques concepts-images ne suffit pas à l'algèbre linéaire, comme le conclut Harel (1990) :

> "The idea of this program is to teach basic concepts of linear algebra through visual models and to use the techniques of vector arithmetic to apply these concepts in solving problems from a familiar domain, Euclidean geometry. It should be emphasized, however, that visualization alone is not sufficient to foster the learning of abstract theories such as linear algebra[12] ; other factors should be included in the content presentation." (p. 391)

Et nous retrouvons cette préoccupation chez Dorier, selon qui on ne peut pas perdre de vue le caractère unificateur-généralisateur-simplificateur (U.G.S.)[13] des concepts d'algèbre linéaire, ce qui oblige à sortir du cadre de la géométrie : l'algèbre linéaire ne peut se restreindre à ses applications dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

1.2.4 - Retour à notre questionnement

En revenant sur les prérequis posés par Rogalski pour l'enseignement de l'algèbre linéaire et sur l'étude faite par Dorier sur les liens entre l'algèbre et la géométrie, nous pouvons conclure que la géométrie dont on aurait besoin pour l'étude des structures vectorielles serait

[12] C'est nous qui soulignons.

[13] Pour le caractère unificateur-généralisateur-simplificateur des concepts d'algèbre linéaire nous renvoyons à (Dorier, 1997a, 1ère partie).

alors entre autres la géométrie cartésienne. Comme le calcul vectoriel est présent dans l'enseignement secondaire ainsi que la géométrie analytique, on pourrait espérer que son enseignement accomplisse la tâche de préparer le futur étudiant d'algèbre linéaire. Or, selon les auteurs déjà cités cela s'avère inexact.

Ceci nous a conduit, dans un premier temps, à centrer notre attention sur :

- les rapports entre géométrie et vecteurs dans l'enseignement secondaire (comment et jusqu'où le vecteur présenté dans l'enseignement secondaire s'appuie sur la géométrie synthétique et sur la géométrie cartésienne ?) ;
- la nature de l'objet vecteur introduit dans l'enseignement secondaire.

1.2.4.1 - Rapports entre géométrie et vecteurs

Les programmes et textes officiels en vigueur affirment que l'objectif de l'enseignement des vecteurs dans le secondaire est de constituer un nouvel outil pour l'étude des configurations. Citons l'objectif général de la géométrie plane donné dans le programme de la classe de Seconde, puis celui sur le calcul vectoriel :

> "Il s'agit d'entraîner les élèves à résoudre des **problèmes concernant des configurations** : alignement, concours, parallélisme, orthogonalité, calculs de distances, d'angles, d'aires. A cet effet, on utilise les acquis du collège sur les **configurations de base** et **leurs symétries** [...] et on exploite de nouveaux outils, notamment le **calcul vectoriel** et, sur des exemples **très** simples, l'**action des transformations**. [...]
> La **mise en œuvre des vecteurs sur les configurations et les transformations**[14] joue un rôle essentiel, aussi bien pour la compréhension de la notion de vecteur que pour la résolution des problèmes de géométrie ; le calcul vectoriel ne doit donc pas constituer un terrain d'activités purement algébriques." (Programme Seconde, 1996, p. 27)

De plus, une lecture brève de quelques manuels du secondaire, ou même des discussions informelles avec des enseignants du secondaire montre qu'il s'agit d'une notion qui est présentée comme constituant un outil efficace pour faire de la géométrie. Mais en est-il ainsi dans les faits ? C'est une des questions centrales de notre travail.

Notons que si les recherches antérieures sur l'enseignement des vecteurs dans le secondaire traitent surtout les vecteurs en tant qu'objet (nous y reviendrons ci-dessous), les vecteurs en tant qu'outil de résolution d'un problème ont fait l'objet de quelques mémoires professionnels PLC2[15], notamment à l'IUFM de Grenoble, parmi lesquels nous citons (Martoïa et Martoïa, 1997), (Regache, 1995), (Rignol, 1997) et (Toupé, 1996). D'une manière générale ces mémoires sont dédiés à l'étude des difficultés des élèves concernant l'utilisation des vecteurs pour résoudre des problèmes de géométrie en classe de Seconde et

[14] Souligné dans le texte du programme.
[15] Il s'agit de professeurs stagiaires en deuxième année de l'IUFM.

son utilisation pour des démonstrations. Nous ne procédons pas ici à une analyse de ces mémoires ; ce qui nous intéresse plus particulièrement est de retenir la convergence entre eux sur l'importance accordée dans l'enseignement secondaire à l'usage de l'outil vectoriel pour résoudre des problèmes de géométrie. Ceci confirme ainsi d'une part la préoccupation des futurs enseignants quant à l'enseignement des vecteurs, d'autre part l'importance qu'ils attribuent aux vecteurs en tant que nouvel outil pour résoudre des problèmes de géométrie.

L'un des travaux les plus récents sur l'enseignement des vecteurs dans le secondaire est la thèse de Lê Thi (1997). L'auteur fait une étude comparative entre l'enseignement des premières notions vectorielles au Viêt-nam et en France en première année du lycée. Son but est de caractériser les difficultés concernant l'apprentissage des vecteurs dans chacun des deux pays et d'en déterminer les principales raisons.

Bien que l'étude des vecteurs en tant qu'outil de résolution de problèmes de géométrie ne soit pas l'objet de sa thèse, nous trouvons, dans l'analyse qu'elle fait (3° partie, chapitre A3) des résultats d'une enquête auprès d'enseignants au Viêt-nam et en France, l'importance, pour ces derniers, des vecteurs en tant qu'outil de résolution de problèmes dans l'enseignement secondaire, ainsi que le constat des difficultés des élèves à mettre en œuvre les savoirs vectoriels dans la résolution d'un problème géométrique.

Ces difficultés sont confirmées par les données fournies dans l'évaluation nationale en fin de Seconde, effectuée par l'A.P.M.E.P. (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public) (1992) et également présentées dans la thèse de Lê Thi, dans lesquelles l'indice de réussite des élèves à résoudre un problème en utilisant les vecteurs n'est pas très encourageant : seulement 37% des élèves, par exemple, savent utiliser la colinéarité de deux vecteurs pour caractériser le parallélisme de deux droites ou l'alignement de trois points.

Ces résultats justifient les préoccupations des futurs enseignants sur les difficultés des élèves à utiliser les vecteurs pour la résolution de problème, et expliquent le nombre de mémoires professionnels sur ce sujet.

Ainsi le constat du faible nombre de recherches approfondies sur l'enseignement des vecteurs dans le secondaire en tant qu'outil nous conduit d'une part à étudier les types de problèmes proposés aux élèves pour lesquels les vecteurs apparaissent comme outil de résolution, et d'autre part à caractériser quelques difficultés des élèves à manipuler ce nouvel outil. Nous chercherons donc à répondre, dans le cadre de notre travail, aux questions suivantes :

- Quels types de problèmes propose-t-on aux élèves à résoudre avec les vecteurs ?
- Dans quelle mesure les vecteurs dans l'enseignement secondaire ont-il un caractère d'outil de résolution des problèmes de géométrie ?

• Quelles propriétés et définitions vectorielles doivent être mises en œuvre pour résoudre ces problèmes ?

1.2.4.2 - Quel objet est introduit dans l'enseignement secondaire ?

En France, l'objet vecteur est introduit de façon géométrique à partir des notions de direction, sens et longueur, comme le montre Lê Thi dans sa thèse : son objet d'étude principal concerne l'analyse les difficultés des élèves lors de l'apprentissage de la notion de vecteur, d'un double point de vue, didactique et épistémologique.

En didactique des mathématiques, Lê Thi analyse les travaux réalisés par Vettard, Colomb, Martin et Pressiat et aussi les Évaluations A.P.M.E.P.[16]. Tous ces travaux qui concernent l'étude des vecteurs en tant qu'objet, montrent les difficultés des élèves en ce qui concerne la prise en compte simultanée des trois caractéristiques (direction, sens et longueur) d'un vecteur. L'auteur fait le lien entre ces difficultés des élèves concernant l'apprentissage de la notion de vecteur et la disponibilité de l'outil vectoriel.

> "Un autre type de difficulté réside dans la distinction d'un vecteur et de son représentant. Le concept de vecteur n'est pas compris en tant que tel, mais fait plutôt place à des savoir-faire liés à des situations concrètes.
> Ces difficultés se manifestent fortement dans l'utilisation de l'outil vectoriel. L'élève peut réussir dans des situations où son travail ne porte que sur des vecteurs, sans que la situation proposée ne fasse interagir les vecteurs avec les propriétés géométriques connues auparavant. Cependant, la nécessité de traduction des propriétés géométriques en langage vectoriel, et réciproquement, fait ressurgir les difficultés évoquées plus haut.[17] Il semble donc que la méthode vectorielle ne soit pas disponible pour les élèves de fin de seconde." (Lê Thi, p. 78).

Cette analyse de Lê Thi sur les difficultés des élèves autour de la notion de vecteur et de son utilisation pour résoudre un problème, renforce l'importance d'analyser les activités de conversion.

C'est pour "mieux comprendre la nature du vecteur et du calcul vectoriel et éclairer ainsi les difficultés identifiées ici" (ibid., p. 78), que Lê Thi propose une étude épistémologique de la genèse du calcul vectoriel, dont nous citons la conclusion :

> "En ce qui concerne la genèse du concept de vecteur et le développement du calcul vectoriel, notre étude historique nous a permis de mettre en évidence deux principaux types de résistances contre lesquelles ont buté les acteurs de la vie scientifique de l'époque. Le premier est lié à l'élaboration du concept de grandeur géométrique autour de l'explicitation des notions de sens et de direction. Le deuxième concerne la complexité de la double nature algébrico-géométrique du calcul vectoriel. [...] Plus précisément, la confrontation de nos premières analyses didactiques avec cette étude historique nous conduit à formuler l'hypothèse que les deux types d'erreurs consistant, d'une part à réduire un vecteur à sa longueur, d'autre part à confondre sens et direction, ont une origine épistémologique." (1997, p. 108)

[16] Ces références peuvent être trouvées dans la thèse de Lê Thi (1997).
[17] C'est nous qui soulignons.

A partir des conclusions de son étude épistémologique, Lê Thi élabore un test qu'elle propose aux élèves de plusieurs classes de Dixième au Viêt-nam et Seconde en France (Le Thi 97, partie II, chapitre B.3). Elle étudie les différentes stratégies mises en jeu par les élèves pour vérifier l'égalité de deux ou plusieurs vecteurs et montre notamment :

- la prégnance dans les deux populations étudiés, de la stratégie "norme" (deux vecteurs sont égaux s'ils ont même longueur),
- la difficulté d'une grande partie des élèves à comprendre que l'on ne peut comparer le sens de deux vecteurs que si ces derniers ont même direction (à la base de la stratégie qu'elle appelle D=S),
- la non prise en compte, par les élèves de l'aspect algébrique du vecteur.

D'après Lê Thi, ces difficultés sont susceptibles de contribuer à l'échec lors de l'utilisation de la notion de vecteur pour résoudre un problème de géométrie.

D'un côté, l'enseignement du vecteur dans le secondaire paraît avoir comme objectif principal son utilisation pour résoudre des problèmes des géométrie. D'un autre côté, les recherches montrent que les élèves ont des difficultés à apprendre cette nouvelle notion, ce qui a des conséquences sur l'efficacité de l'outil. L'enseignement tel qu'il est fait actuellement ne prend pas en charge ces difficultés : la préoccupation principale étant d'utiliser ce nouvel outil pour résoudre des exercices, le vecteur en tant qu'objet d'étude n'a qu'une place secondaire et la notion d'un vecteur en tant que classe d'équivalence est hors programme.

Pour permettre une meilleure prise en charge de ces difficultés par l'enseignement, il importe de mieux les connaître. Nous chercherons à le faire en introduisant un milieu constitué autour d'un environnement informatique qui permet de travailler cette notion de classe d'équivalence et d'étudier quelques unes de ces difficultés. Notre objectif n'est pas de changer le programme actuel mais de le travailler autrement, dans un environnement où des questions relatives à cette notion peuvent être mises en évidence de façon implicite. En constituant ce nouveau milieu nous envisageons d'approfondir l'analyse de certaines difficultés mentionnées par les recherches existantes mais non véritablement travaillées et de rechercher plus exactement quelles sont les difficultés des élèves qui relèvent plus particulièrement de la notion de vecteur en tant que représentant d'une classe d'équivalence.

En conclusion de ce paragraphe nous précisons que notre intérêt sera centré sur les difficultés des élèves concernant l'apprentissage de la notion de vecteur ainsi que sur l'usage et l'efficacité de l'outil vectoriel lorsque les élèves ont à résoudre un problème de géométrie.

Dans la suite de notre travail nous allons définir plus précisément la problématique de notre recherche, explicitant notre objet d'étude, nos hypothèses à vérifier et les questions plus fines auxquelles nous cherchons à répondre dans ce travail. Finalement dans le paragraphe 4 nous expliciterons la méthodologie mise en œuvre pour atteindre notre objectif.

2 - Objet de notre recherche

C'est à partir de l'analyse de l'état actuel des recherches sur l'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire et sur l'enseignement des vecteurs dans le secondaire que nous définissons notre objet d'étude.

Il existe un décalage entre le vecteur objet de savoir du mathématicien et l'objet présent dans l'enseignement secondaire ou même universitaire. Ce décalage correspond au phénomène de transposition didactique, tel qu'il est défini par Chevallard (1991) :

> "Un contenu de savoir ayant été désigné comme savoir à enseigner subit dès lors un ensemble de transformations adaptatives qui vont le rendre apte à prendre place parmi les *objets d'enseignement*.[18] Le "travail" qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement est appelé *la transposition didactique*. [...] Mais *l'étude* scientifique du processus de transposition didactique (qui est une dimension fondamentale de la *didactique des mathématiques*) suppose la prise en compte de la transposition didactique *sensu lato*, représentée par le schéma
> —> objet de savoir —> objet à enseigner —> objet d'enseignement " (page 39)

Notre objectif dans ce travail n'est pas de faire une étude en termes de transposition didactique, ce qui reviendrait à prendre en compte l'étude de l'écart entre, par exemple, le vecteur objet du savoir et le vecteur objet à enseigner. Nous examinons la situation qui est déjà établie dans l'enseignement secondaire, où la notion de vecteur est présentée et nous nous centrons sur l'étude de cet objet déjà transposé.

Nous pouvons alors reformuler les questions qui demeurent au centre de notre travail de la manière suivante :

- Sous l'étiquette "vecteur" quel objet est transposé dans le secondaire ?
  - Quels problèmes propose-t-on aux élèves de résoudre avec les vecteurs ?
  - Quels types de difficultés peuvent avoir les élèves dans l'apprentissage de la notion du vecteur et lors de son utilisation pour résoudre un problème ?

- Quels sont les registres de représentation sémiotiques présents dans l'enseignement pour les vecteurs ?
  - Fait-on pratiquer aux élèves des changements de registres ?
  - Quelle est la fonction des différents registres lors de la résolution des problèmes ?
  - Les élèves pratiquent-ils d'eux-mêmes les changements de registres ?

De plus, dans la perspective de l'apprentissage de la notion du vecteur algébrique à l'université, nous cherchons aussi à repérer les conséquences de cette transposition,

[18] C'est l'auteur qui souligne.

fortement ancrée dans le géométrique, sur la facilité avec laquelle les élèves pourront accéder au vecteur algébrique, s'ils deviennent étudiants à l'université.

La construction d'un vecteur algébrique requiert le détachement du vecteur des caractéristiques géométriques qui lui ont donné naissance. Cela ne se fait probablement pas sans difficultés pour les élèves. Le passage complet au vecteur algébrique n'est réalisé qu'à l'université. Nous pouvons penser que l'étude de quelques difficultés dans le passage du géométrique à l'algébrique dans l'enseignement secondaire constitue cependant une indication sur les problèmes qui se poseront plus tard.

Ces questions nous serviront de guide pour définir nos hypothèses de recherche qui seront ensuite mises à l'épreuve par l'analyse de manuels et par des dispositifs expérimentaux (dont l'analyse de séances en classe).

Le paragraphe précédent a montré entre autres, d'une part que l'enseignement secondaire ne prépare pas l'élève à l'étude de la théorie vectorielle qui sera introduite en première année universitaire, d'autre part que les vecteurs sont apparemment introduits dans le secondaire pour résoudre des problèmes de géométrie. Néanmoins aucune recherche parmi celles auxquelles nous avons eu accès, ne fait d'étude approfondie sur cette fonction des vecteurs dans l'enseignement secondaire ni sur leur efficacité par rapport à ce qui est proposé dans les programmes. En ce qui concerne les difficultés des élèves, les études ont été effectuées dans le cadre d'un enseignement traditionnel des vecteurs, c'est-à-dire d'un enseignement dont le milieu est constitué par l'environnement papier crayon.

Ainsi notre étude s'articule-t-elle autour des deux axes suivants : étude des premières notions vectorielles présentées aux élèves, comme la définition du vecteur, et plus particulièrement les notions de direction et de sens ; les notations $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ et les changements conceptuels (s'ils existent) qui sont autour de chacune d'elles et étude du vecteur en tant qu'outil de résolution d'un problème de géométrie.

Nous avons vu qu'un enseignement habituel, fait en milieu papier crayon n'est pas sans poser des difficultés aux élèves, en partie dues à la notion de représentant d'un vecteur et de classe d'équivalence. Afin d'élargir l'étude sur les difficultés des élèves en ce qui concerne l'appréhension de la notion de vecteur, nous proposons la constitution d'un nouveau milieu qui puisse mettre en évidence ces difficultés, tout en permettant de faire travailler de façon implicite la notion de classe d'équivalence. Il s'agit ainsi de faire une approche différente de celle faite habituellement, dans laquelle l'étude du vecteur en tant qu'objet est secondaire par rapport à l'étude du vecteur en tant qu'outil. Nous cherchons ainsi, tout en respectant le programme en vigueur, à faire travailler les élèves sur des aspects moins classiques et moins habituels, pour étudier leurs difficultés.

Pour accéder aux difficultés des élèves nous choisissons de faire un étude en termes de champs conceptuels (Vergnaud, 1990a), centrée surtout sur les théorèmes-en-acte[19] que les élèves sont susceptibles de mettre en œuvre. Nous cherchons à modéliser les difficultés des élèves, en formulant des théorèmes-en-acte (corrects et erronés ou localement erronés) susceptibles d'être mis en œuvre par les élèves. Nous testerons leur présence chez les élèves, voire leur résistance. Nous reviendrons plus en détail sur la théorie des champs conceptuels lors de l'explicitation des outils théoriques de notre recherche.

Dans l'étude du vecteur en tant qu'outil de résolution d'un problème de géométrie, nous nous centrerons sur les problèmes d'alignement de points et de direction de droites. Ce sont en effet les premiers problèmes pour lesquels on entraîne les élèves à utiliser la notion de colinéarité vectorielle.

On peut dire qu'à partir de la classe de Seconde trois géométries coexistent dans l'enseignement secondaire : la géométrie des configurations (ou synthétique), la géométrie analytique et la géométrie faite avec les vecteurs (puisqu'ils sont introduits pour résoudre des problèmes géométriques), que nous appellerons géométrie vectorielle. Par exemple, on peut résoudre un problème d'alignement de trois points seulement en se basant sur la géométrie des configurations (ou synthétique), ou par la colinéarité vectorielle et cela encore par la relation de proportionnalité entre les coordonnées des deux vecteurs construit à partir des trois points. Nous cherchons à mieux délimiter la géométrie vectorielle en repérant les types de problèmes de la géométrie des configurations qu'elle permet de résoudre au niveau de la Seconde. De même sera analysé l'usage des vecteurs en géométrie analytique et les types de problèmes associés.

La coexistence de ces trois géométries amène à mettre en place plusieurs registres à la fois, d'où l'importance d'étudier l'activité de conversion d'un registre à un autre dans les manuels et par la suite chez les élèves.

> "**La conversion** d'une représentation est **la transformation** de cette représentation en une représentation d'un **autre registre** en conservant la totalité ou une partie seulement du contenu de la représentation initiale. La conversion est une transformation externe au registre de départ. L'*illustration* est la conversion d'une représentation linguistique en une représentation figurale. La *traduction* est la conversion d'une représentation linguistique dans une langue donnée en une représentation linguistique d'une autre langue ou d'un autre type de langage. La *description* est la conversion d'une représentation non verbale en une représentation linguistique.[20]" (Duval, 1993, p. 42)

[19] Un théorème-en-acte est une proposition qui est susceptible d'être vraie ou fausse ; un concept-en-acte est un invariant qui n'est pas susceptible d'être vrai ou faux, il est rarement explicité par l'élève. (Vergnaud, 1990a)

[20] Souligné dans le texte.

Après avoir délimité notre objet d'étude, nous allons expliciter les hypothèses de recherche que nous chercherons à valider ainsi que les questions auxquelles nous tenterons de répondre. Ces hypothèses et questions concernent conjointement les registres de représentation sémiotique présents dans l'enseignement secondaire autour des vecteurs, ainsi que leur fonction d'outil et d'objet.

2.1 - Registres de représentations sémiotiques

Lors de l'introduction de la notion de vecteur en Quatrième, celle-ci apparaît comme réalisant une économie d'écriture car elle réunit trois concepts à la fois : direction, sens et longueur. Et l'enseignement dans le secondaire est bâti sur le jeu possible entre les différentes notations existantes en géométrie à ce niveau. Selon Duval, "les objets mathématiques ne doivent jamais être confondus avec la représentation qui en est faite [...] Néanmoins, les diverses représentations sémiotiques d'un objet mathématique sont absolument nécessaires" (Duval, 1993, page 37). C'est ainsi que se forme ce que Duval a appelé le *paradoxe cognitif de la pensée mathématique* : "d'une part, l'appréhension des objets mathématiques ne peut être qu'une appréhension conceptuelle et, d'autre part, c'est seulement par le moyen de représentations sémiotiques qu'une activité sur des objets mathématiques est possible" (ibid., page 38). Dans ce cadre nous considérons qu'il est important d'étudier les registres de représentations sémiotiques présents dans l'enseignement secondaire du vecteur et les relations existantes entre eux.

L'étude que nous avons faite jusqu'à maintenant et un survol de l'enseignement des vecteurs dans le secondaire à l'heure actuel nous permettent de faire le constat suivant :

> Le traitement des vecteurs dans l'enseignement secondaire met en jeu différents registres à la fois.

Dans les chapitres qui suivront, nous étudierons en détail ces différents registres présents dans l'enseignement des vecteurs dans le secondaire. Pour l'instant, puisque nous sommes intéressée par les notations vectorielles qui apparaissent en Quatrième et par le changement de notation effectué en classe de Seconde, nous commençons par distinguer deux sous-classes à l'intérieur du registre de l'écriture symbolique :

i) le registre de l'écriture symbolique géométrique (**RSG**) : il s'agit ici des notations déjà connues des élèves dans le cours de géométrie, telles que : (AB)//(CD), (AB) ⊥ (CD).

ii) le registre de l'écriture symbolique vectorielle (**RSV**) : la notation $\overrightarrow{AB}$, qui fait appel à des concepts géométriques (points, segments,...), ou encore la notation $\vec{u}$, qui peut

renvoyer à un objet qui lui s'approche du vecteur défini dans une structure vectorielle. En effet, la notation $\vec{u}$ marque avant tout l'idée de classe d'équivalence et distingue la classe du représentant. Mais cet objet n'est pas défini par une structure d'espace vectoriel ; il est à la fois géométrique et algébrique, en sachant que l'aspect algébrique ne fait pas appel à une structure d'espace vectoriel mais implicitement à la notion de classe d'équivalence. Ces deux notations peuvent donc renvoyer à des objets différents, ce qui veut dire qu'ils peuvent avoir des signifiés différents. Ces deux notations peuvent encore être ajoutées des notations analytiques, et nous avons ainsi $\overrightarrow{AB}(x ; y)$ et $\vec{u}$ (x ; y). Ainsi le registre vectoriel représente pour nous l'ensemble de notations vectorielles dans lequel on peut faire des transformations, ce que Duval (1993) appelle de traitement[21] :

Reprenant le point de vue de Duval, nous considérons qu'"indépendamment de toute commodité de traitement *ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations*[22]" (ibid., p 40).

Au lycée, les vecteurs seront liés à des problèmes à résoudre, comme l'alignement de points et direction de droites. Ainsi un nouvel élément vient se joindre au jeu entre registres qui était mis en place à partir de la Quatrième. Cela nous permet d'élaborer notre première **hypothèse de recherche**, qui sera à valider à partir d'une analyse des programmes et des manuels actuels :

> **HR1 -** L'enseignement des vecteurs dans le secondaire repose sur l'aller-retour entre les différents types de registres. A partir de la Seconde ces aller-retours sont liés à des problèmes à résoudre.

Pour déterminer précisément les liens pratiqués dans l'enseignement entre les registres de représentation sémiotique et les types de problèmes, nous cherchons à répondre aux questions suivantes :

- Quels sont les différents registres que l'on fait travailler aux élèves ? Quel est le rôle des différents registres ? Quels changements entre registres leur apprend-on à pratiquer ? A quoi servent ces changements de registres ?
- Dans les manuels, quelle est l'articulation entre les différents registres et les types de problèmes ?

[21] "**Le traitement** d'une représentation est la **transformation** de cette représentation **dans le registre même où elle a été formée**. Le traitement est une transformation interne à un registre." (ibid., p. 41)
[22] Souligné par l'auteur

Cette analyse doit permettre de mieux connaître non seulement l'usage qui est fait des registres dans l'enseignement des vecteurs mais aussi la nature de la pratique de la conversion entre registres dans cet enseignement.

Pavlopoulou a analysé plusieurs manuels d'algèbre linéaire, au niveau du DEUG première année, et elle a montré, en particulier qu'il y a une absence de pratique de conversion entre registres dans ces manuels. Nous pensons a priori que, dans l'enseignement secondaire, on fait pratiquer aux élèves des changements de registres, et notre question est alors la suivante :

• Dans quel contexte sont faits ces changements de registres ? Quel est le rôle des conversions ?

2.2 - Aspect outil et aspect objet d'un concept mathématique

Nous utilisons les deux concepts d'outil et d'objet dans notre analyse en nous plaçant du côté de l'enseignement : dès qu'un concept est utilisé pour résoudre un problème (par exemple montrer que trois points sont alignés), nous dirons qu'il est un **outil** de résolution et dès qu'il est l'objet d'étude d'un problème (par exemple montrer que deux vecteurs sont égaux), nous dirons qu'il est **objet**.

Nous présentons maintenant notre première **hypothèse de travail** qui se situe en continuité avec les travaux français de didactique, en particulier avec ceux de Douady (1986).

HT1 - L'apprentissage d'un concept passe à la fois par son rôle d'outil et d'objet.

Dans ce travail, nous chercherons à étudier les vecteurs dans l'enseignement secondaire dans ces deux composantes : outil et objet.

2.2.1 - Les vecteurs en tant qu'outil

Pour analyser les vecteurs en tant qu'outil, nous chercherons à classer les types de problèmes pour lesquelles ils sont présentés dans l'enseignement comme un outil de résolution.

Les problèmes que l'on propose dans les manuels sont parfois des problèmes de géométrie déjà connus des élèves, et on introduit un nouveau registre (le vectoriel) pour les exprimer (et les résoudre). Nous voulons donc, par une analyse des manuels et des programmes, déterminer l'utilisation des vecteurs qui est proposée aux élèves.

On peut constater que l'enseignement des vecteurs dans le secondaire est très ancré dans le géométrique, c'est-à-dire que les vecteurs sont définis par des propriétés géométriques et qu'ils ont une fonction importante pour l'étude de configurations. Cela nous amène à penser que l'usage des vecteurs en tant qu'outil de résolution de problèmes de géométrie peut rester dans le cadre géométrique. Nous voulons dire ici que même si on utilise les vecteurs pour résoudre des problèmes, cette résolution se base sur des dessins et les propriétés à mettre en œuvre sont des propriétés géométriques. Toutefois l'outil vectoriel, même s'il est géométrique, doit avoir des caractéristiques de fonctionnement propre, tel que le fait d'avoir un ensemble infini d'éléments qui peuvent remplacer un autre, ce qui relève de la notion de représentant d'une classe d'équivalence.

Ainsi, pour étudier les points discutés ci-dessus, nous proposons d'examiner dans l'enseignement, les questions suivantes :

• Quels sont les types de problèmes proposés aux élèves et pour lesquels on attend qu'ils utilisent les vecteurs en tant qu'outil de résolution ?

• Quelles définitions et propriétés vectorielles doivent être utilisées pour résoudre ces problèmes ?

Ces questions se situent donc du côté de l'enseignement. Concernant les élèves et la fonction de vecteur en tant qu'outil de résolution de problèmes de géométrie, la question - qui nous intéresse et à laquelle nous nous donnerons les moyens de répondre par un dispositif expérimental - est la suivante :

• Pour un problème de géométrie énoncé dans le cadre géométrique, sans utiliser le registre vectoriel, dont les vecteurs fournissent une résolution (optimale ou non), l'élève va-t-il faire appel aux vecteurs ?

• Si oui, l'élève l'utilise-t-il de façon efficace pour la résolution d'un problème ?

2.2.2 - Les vecteurs en tant qu'objet d'étude

Pour analyser les vecteurs en tant qu'objet, nous étudions comment la notion est introduite dans les manuels et les types de difficultés que cette introduction peut engendrer chez les élèves. Les principales questions auxquelles nous cherchons à répondre sont les suivantes :

• Comment présente-t-on dans les manuels les notions de direction et de sens ? Et du côté des élèves, quelle est la signification qu'ils accordent aux notions de direction et de sens ?

• Quel est la signification accordée par les manuels à l'égalité vectorielle ? Comment présente-t-on (implicitement) la notion de classe d'équivalence et la notion de représentant d'une classe d'équivalence ?

• En tenant compte de la présentation et de l'usage des vecteurs dans les manuels, quelles difficultés peuvent avoir les élèves lors de l'apprentissage de cette notion ?

Rappelons que Lê Thi, dans son travail de thèse, a caractérisé certaines difficultés des élèves de Seconde, en particulier pour la prise en compte simultanée des trois caractéristiques d'un vecteur : direction, sens et longueur, dans les problèmes d'égalité vectorielle. Elle a notamment montré des difficultés d'appropriation des caractéristiques d'orientation : direction et sens.

> "L'élève peut comprendre la question de la direction (direction d'une droite) en la séparant du problème du sens. De même, il peut comprendre la question du sens limité à une seule direction. Mais, intégrer direction et sens dans un même modèle présente une grande complexité." (1997, p. 250)
> "[...] tout en étant sortis du modèle métrique et concevant l'existence de deux sens sur une droite, ils restent dans un modèle unidimensionnel orienté (droite orientée) et n'arrivent pas à concevoir correctement les relations entre les diverses directions dans un plan ou dans l'espace, en relation avec l'orientation de chacune." (ibid., p. 251)

L'enseignement habituel, fait en papier crayon, ne prend pas en charge ces difficultés ; les notions de direction et de sens étant définies comme allant de soi et la place principale étant accordée à l'étude des vecteurs pour résoudre des problèmes de géométrie. Nous pensons que l'introduction d'un environnement informatique ayant un caractère dynamique permettrait de travailler davantage qu'en papier crayon les aspects objet du vecteur, tout en respectant le programme en vigueur. Ce caractère dynamique de l'environnement informatique se manifeste entre autres par la possibilité de faire déplacer les objets construits, tout en conservant les propriétés géométriques des figures (robustesse géométrique). En particulier cet environnement devrait permettre de construire un vecteur et de calculer ses coordonnées, de le déplacer (globalement ou une de ses extrémités) et d'observer l'effet de ce déplacement sur ses coordonnées.

Dans ce cadre nous élaborons alors une deuxième **hypothèse de travail** autour des possibilités de l'apport d'un nouvel environnement pour faire travailler le vecteur en tant qu'objet aux élèves.

> **HT2 -** L'utilisation d'un environnement informatique satisfaisant à certains critères, va permettre de travailler des aspects objet du vecteur habituellement plus cachés dans l'environnement papier crayon.

À partir de l'analyse des manuels, nous pouvons établir une liste d'invariants[23] dont l'acquisition par les élèves s'avère souhaitée par l'enseignement. Cette analyse va nous

[23] "Je distingue deux grandes catégories d'invariants opératoires, les concepts-en-acte et les théorèmes-en-acte en entendant par "concepts-en-acte" les catégories qui permettent de prélever l'information pertinente en situation, et par "théorèmes-en-acte" les propositions tenues pour vraies par le sujet et qui lui permettent de traiter cette information". (Vergnaud, 1994, p. 181)

permettre de faire l'hypothèse de théorèmes-en-acte erronés, localement ou globalement, que les élèves sont susceptibles de construire. Nous pensons que l'utilisation d'un nouvel environnement qui offre la possibilité d'une approche différente de celle habituelle, peut permettre la mise en évidence de ces invariants chez les élèves et l'étude des conditions didactiques susceptibles d'offrir à l'élève la possibilité de construire de nouvelles règles d'action qui lui permettent par la suite de progresser. Nous pouvons tester la présence et l'absence de ces invariants chez les élèves aussi bien que leur résistance. Ainsi formulons-nous notre troisième **hypothèse de travail**.

> **HT3 -** L'utilisation dans l'enseignement d'un environnement informatique satisfaisant à certains critères, doit permettre la mise en évidence et l'étude des invariants construits par les élèves.

En prenant cette hypothèse comme point d'appui pour notre recherche, nous chercherons à répondre à la question suivante :

> • Quels sont effectivement les invariants relatifs aux vecteurs, erronés ou non, que les élèves construisent ?

Revenons au caractère outil des vecteurs dans le secondaire en liaison avec le caractère objet. Nous pouvons dire que les vecteurs ont dans le secondaire des caractéristiques géométriques et que les problèmes que l'on propose aux élèves de résoudre avec les vecteurs, sont aussi des problèmes de géométrie. Les élèves doivent ainsi mobiliser avant tout des connaissances géométriques quand ils travaillent avec les vecteurs. Ceci doit renforcer le caractère géométrique des vecteurs et les éloigner de l'objet vecteur qui lui, renvoie à l'élément qui appartient à un espace vectoriel. En d'autres termes, c'est peut être là une des raisons ou une des sources de difficultés des élèves lors du passage du géométrique au vectoriel.

Ainsi, concernant encore la construction des invariants par les élèves, nous énonçons une deuxième **hypothèse de recherche** que nous mettrons à l'épreuve lors de l'expérimentation réalisée en classe de Seconde (cf. chapitre D).

> **HR2 -** Les caractéristiques géométriques attachées aux vecteurs contribuent à créer la difficulté rencontrée par les élèves pour construire des invariants qui ne dépendent pas de ces caractéristiques.

Par caractéristique géométrique nous entendons la notion de vecteur telle qu'elle est présentée : du côté du dessin, on définit un vecteur par direction, sens et longueur ; du côté de la géométrie (en tant que domaine théorique), il y a le vecteur $\overrightarrow{AB}$ lié aux points A et B, le vecteur $\vec{u}$, représentant de $\overrightarrow{AB}$, et finalement la géométrie analytique qui est toujours liée aux points. L'objet point est donc très important car il constitue la base sur laquelle est échafaudé le vectoriel (la relation de Chasles[24] fait intervenir les points), alors que les vecteurs devraient être détachés des points.

Nous cherchons à repérer entre autres, les éléments qui sont attachés aux vecteurs et qui ne sont pas de nature géométrique, comme par exemple les coordonnées d'un vecteur qui sont indépendantes de la position du vecteur représentant dans le plan. Nous savons par exemple que le fait que le vecteur soit défini par deux points peut amener les élèves à penser que, comme les coordonnées d'un point changent quand on le déplace, les coordonnées d'un vecteur doivent aussi changer lorsque les coordonnées de ses points extrémités changent.

Une fois que nous aurons procédé à l'étude des invariants construits par les élèves, nous rechercherons les conditions qui devraient permettre de déstabiliser les invariants erronés de manière à faire progresser l'élève. En d'autres termes, nous chercherons à donner des éléments de réponse à la question suivante :

> • Quelles sont les conditions didactiques susceptibles de déstabiliser un invariant et de permettre de développer de nouvelles règles d'action en situation, voire de construire des nouveaux invariants (adaptables localement ou globalement) ?

Dans un environnement papier crayon l'élève a peu de moyens de contrôle et de validation de ses actions. En revanche, il nous semble que le milieu constitué autour d'un environnement informatique peut fournir aux élèves la possibilité de rétroactions qui nous permettent de provoquer un conflit entre l'attente de l'élève et ce qu'il obtient à l'écran ; de plus l'analyse des conduites de l'élève face à ce conflit permet de tester la résistance de ces invariants. Pour illustrer nos arguments, nous donnons ci-dessous un exemple provenant de l'usage du logiciel Cabri-géomètre II[25] par les élèves.

Dans Cabri-géomètre II, on peut construire un vecteur à partir de deux points, il est ensuite possible de créer une macro-construction qui à partir des points extrémités du vecteur donne les coordonnées de ce vecteur. L'élève peut déplacer ce vecteur (selon une translation)

[24] Donnons l'énoncé de la relation de Chasles : Pour tous points A, B et C on a $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

[25] Cabri-géomètre II est un logiciel de géométrie créé au sein du laboratoire LSD2 (Laboratoire de Structures Discrètes et de Didactique) de l'Institut d'Informatique et de Mathématiques Appliquées de Grenoble (IMAG) à l'Université Joseph Fourier.

et il observera l'effet provoqué sur les coordonnées du vecteur : elles ne changent pas, contrairement à ce qu'il peut attendre[26].

3 - Outils théoriques d'approche des questions

Nous avons jusqu'à présent, défini notre objet d'étude et les hypothèses que nous cherchons à mettre à l'épreuve, et par conséquent des questions plus fines pour nous aider à valider ou infirmer ces hypothèses. Ces questions doivent être étudiées à l'aide d'outils issus du cadre théorique de notre recherche, ainsi que par l'application de dispositifs expérimentaux. Nous passons donc maintenant à l'explicitation des outils théoriques sur lesquels nous appuierons notre recherche.

Brièvement parlant, notre recherche porte sur des aspects du savoir à enseigner, du savoir enseigné (dans le cas particulier d'une classe de Seconde) ainsi que des caractéristiques des connaissances de l'élève.

3.1 - Analyse mathématique du savoir à enseigner

Nous cherchons à étudier le vecteur en tant qu'objet d'enseignement dans les classes de Quatrième, Troisième et Seconde. Nous procéderons à une analyse détaillée des définitions et propriétés données dans les manuels ainsi que des théorèmes mis en évidence. Nous examinerons alors les manuels les plus répandus dans l'enseignement secondaire, aussi bien la partie cours que la partie exercices ; ces derniers nous permettront de savoir quels sont les types de problèmes à résoudre par les vecteurs qui sont proposés aux élèves, comment les vecteurs interviennent et quelles sont les propriétés mathématiques mises en œuvre dans la résolution de ces problèmes. Pour la partie cours des manuels, les questions auxquelles nous cherchons à répondre sont du type suivant :

• Lorsqu'on définit un vecteur, quels sont les "notions" qui sont en jeu ? Que comprend-on par exemple, par direction ou sens à ce moment ?

3.2 - La théorie des champs conceptuels

Nous nous intéressons à l'étude de la formation du concept de vecteur chez les élèves. L'un des objectifs de notre recherche est l'étude des invariants dont on souhaite l'acquisition par les élèves ainsi que de ceux qu'ils sont susceptibles de construire. Nous savons que les

[26] Dans le chapitre D, nous montrerons que chez certains élèves quand on déplace un vecteur, ses coordonnées doivent changer.

vecteurs dans le secondaire représentent un concept tout à fait nouveau pour les élèves dont on souhaite qu'il soit accompagné de l'acquisition de certaines compétences autour de cette nouvelle notion. D'après Vergnaud (1990a),

> "Un concept ne peut être réduit à sa définition, du moins si l'on s'intéresse à son apprentissage et à son enseignement. C'est à travers des situations et des problèmes à résoudre qu'un concept acquiert du sens pour l'enfant." (p.135)

Vergnaud définit un concept mathématique par un triplet de trois ensembles, C=(S, I, L)

S : l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence) ;

I : l'ensemble des invariants opératoires, concepts-en-acte et théorèmes-en-acte, qui interviennent dans les schèmes de traitement de ces situations (le signifié) ;

L : l'ensemble des représentations langagières et symboliques qui permettent de représenter le concept, ses propriétés, les situations auxquelles il s'applique, et les procédures qui se nourrissent de lui (le signifiant).

Dans ce sens, une étude faite en termes de champs conceptuels doit nous permettre de modéliser quelques difficultés rencontrées par les élèves lors de la construction du concept de vecteur. Pour analyser ces difficultés, nous dégagerons de l'enseignement des classes de problèmes proposés aux élèves. Ces types des problèmes doivent être dégagés à partir d'une analyse de l'objet à enseigner, par l'analyse des programmes et des manuels. Tout en nous intéressant aux composantes outil et objet du vecteur, nous voulons d'une part, faire une étude des situations[27] autour de la notion de vecteur et ce, dans le cas où les vecteurs doivent apparaître comme un nouvel outil de résolution, ou encore quand il s'agit de proposer aux élèves de se familiariser avec les définitions et les propriétés vues dans la partie cours. D'autre part, nous procéderons en parallèle avec cette étude des situations, à une étude des invariants susceptibles d'être construits par les élèves (souhaité par l'enseignement ou non).

Notre attention porte sur les compétences des élèves, ainsi nous nous intéressons non seulement à des invariants opératoires implicites mis en œuvre par les élèves mais aussi à ceux qui peuvent être explicites. En effet, le caractère implicite et explicite d'un invariant à ce niveau scolaire est beaucoup moins tranché qu'à l'école primaire, par exemple, et l'explicitation dépend aussi de la situation. En effet, l'explicitation dépend entre autres de l'énoncé du problème, des exigences respectives et mutuelles de l'élève et de l'enseignant. De plus nous pensons qu'existent différents niveaux d'explicitation. Nous en reparlerons lors du chapitre D.

Après avoir dégagé de l'enseignement, à partir d'une analyse de manuels, les invariants dont on souhaite l'acquisition par les élèves ainsi que les invariants erronés que ces derniers

[27] Nous prenons le terme situation dans le "sens large" que lui attribue Vergnaud (1990b). Il s'agit du sujet en situation : le problème proposé, les connaissances du sujet, les actions qu'il met en œuvre ...

sont susceptibles de construire, nous chercherons à confirmer la présence de ces invariants sous-jacents à leurs productions ou leurs actions en situation et à tester leur résistance.

Citons comme exemple le théorème-en-acte erroné selon lequel "deux vecteurs qui n'ont pas même sens ne peuvent pas avoir même direction", mentionné dans (Bittar, 1997). Ce même type de préoccupation est rencontré dans le travail de Lê Thi (1997) qui étudie les stratégies possibles chez les élèves devant des tâches dans lesquelles le savoir en jeu est l'égalité vectorielle. Citons la stratégie suivante : "un seul des deux mots "sens" ou "direction" peut être utilisé pour représenter en même temps les concepts de direction et de sens ou être employé pour parler de l'autre caractéristique d'orientation du vecteur." (p. 206). Lors de l'application du dispositif expérimental nous essaierons de confirmer la présence et d'étudier la résistance de ce type de théorème-en-acte erroné auprès des élèves (cf. chapitre D).

Dans le cadre de ce travail, concernant l'étude de systèmes de signifiants, nous nous contenterons d'étudier le sous-ensemble formé par les registres de représentations sémiotiques.

Nous donnons ci-dessous un schéma de notre propos :

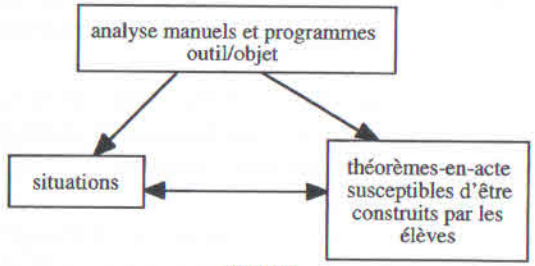


Schéma 1

4 - Méthodologie de recherche

4.1 - Vue d'ensemble du travail

Notre objet d'étude est l'enseignement/apprentissage des vecteurs dans le secondaire dans ses deux composantes : outil de résolution de problèmes et objet d'étude.

Pour l'instant, nous nous référons à une première lecture panoramique visant à avoir une idée concernant l'ensemble des programmes et des manuels autour de la notion de vecteur. Une analyse approfondie et détaillée de l'objet à enseigner est nécessaire pour bien

comprendre comment les notions se présentent, et à quoi doivent servir les vecteurs dans le secondaire. Nous choisissons d'accéder au savoir à enseigner dans le secondaire par l'analyse des programmes et des manuels. C'est seulement après cette étude que nous pourrons passer aux validations des hypothèses que nous avons formulées du côté des élèves.

Comme nous l'avons vu lors du survol de l'enseignement des vecteurs dans le secondaire, ceux-ci sont plutôt introduits comme ayant un caractère d'outil pour résoudre des problèmes de géométrie. Cela nous a conduit d'une part à nous demander si l'enseignement des vecteurs dans le secondaire atteint son objectif, et d'autre part à chercher à traduire les difficultés des élèves en ce qui concerne l'objet vecteur en termes d'invariants que les élèves construisent. Deux sortes de dispositifs expérimentaux, décrits ci-dessous, seront utilisés en vue de permettre l'analyse de ces deux aspects de l'enseignement des vecteurs.

En classes de Première S et DEUG, nous confronterons les étudiants à des problèmes choisis dans l'intention de vérifier la disponibilité et l'efficacité de l'outil vectoriel dans la résolution de problèmes de géométrie. Nous cherchons ainsi à mettre en évidence ce qui demeure chez les élèves (étudiants) quelques années après l'introduction de la notion de vecteur. Les deux niveaux Première S et DEUG ont été choisis, afin de vérifier s'il existe des différences entre un élève en fin de Seconde et un étudiant entrant en DEUG, relativement à l'outil vectoriel.

Il s'agit d'étudier quelques difficultés des étudiants juste avant l'introduction du cours sur l'algèbre linéaire. Cette étude portera essentiellement sur le vecteur outil de résolution d'un problème de géométrie et sur les causes des non-réussites.

En classe de Seconde, nous observerons la construction d'un enseignement des vecteurs constituée autour de la mise en œuvre d'un outil informatique à caractère dynamique et nous proposerons l'insertion dans la séquence d'activités construites dans le but de mettre en évidence des invariants que les élèves sont susceptibles de construire et de tester leur résistance chez les élèves. Ce dispositif expérimental sera complété par la réalisation d'entretiens avec les élèves de cette classe, ce qui permettra encore de tester la résistance de quelques invariants chez les élèves.

Avant de passer à une description plus détaillée de chaque phase à venir de notre recherche, et pour faciliter au lecteur la compréhension de chaque étape de ce travail et de l'objectif de chacune d'elles, nous donnons ci-dessous un schéma qui les résume.

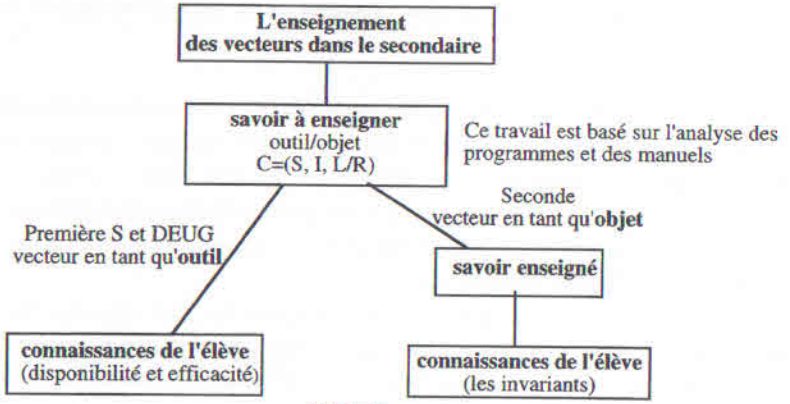


Schéma 2

4.2 - L'analyse des programmes et manuels

4.2.1 - L'évolution de l'enseignement de vecteurs dans le secondaire -1931 à 1997.

Nous avons centré notre objet d'étude sur les classes de Quatrième, Troisième et Seconde, mais nous voulons néanmoins avoir une vue d'ensemble de l'enseignement des vecteurs avant l'enseignement universitaire. C'est pourquoi, avant de procéder à l'analyse des manuels de la Quatrième à la Seconde, une première entrée dans le savoir à enseigner doit être faite par le "savoir officiel" qui est rencontré dans les programmes de la Quatrième à la Terminale.

Avant de nous pencher sur l'étude des programmes actuels, dans ce chapitre nous faisons un survol de l'évolution des programmes de 1931 jusqu'à nos jours. Les vecteurs apparaissent officiellement dans le programmes en 1945, mais nous avons pris comme point de départ de notre analyse l'année 1931 car à cette époque les vecteurs apparaissaient dans les manuels pour la définition de la translation. Il ne s'agit pas ici de faire une étude exhaustive mais de savoir comment les notions étaient introduites auparavant, quel était le contenu qui faisait partie de l'enseignement secondaire et le rôle attribué aux vecteurs. Cette analyse sera faite en utilisant quelques manuels de l'époque ainsi que les programmes en vigueur quand ils fournissent assez de renseignements.

Après l'analyse de l'évolution au fil des années, nous procéderons à une étude plus fine du programme en vigueur actuellement. Cette étude doit nous fournir un panorama de l'enseignement des vecteurs à l'heure actuelle.

4.2.2 - L'analyse des manuels les plus répandus de la Quatrième jusqu'à la Seconde

Dans les programmes il est annoncé de manière explicite que les vecteurs sont introduits pour résoudre des problèmes de géométrie : il s'agit d'un nouvel outil pour résoudre des problèmes parfois déjà connus des élèves. Mais, si nous revenons à notre hypothèse de travail 2 : "l'apprentissage d'un concept passe à la fois par son rôle d'outil et d'objet", nous reconnaissons aussitôt le besoin d'étudier comment les manuels présentent les définitions, les opérations et les propriétés sur les vecteurs.

Pour cela nous choisirons quelques manuels parmi les plus répandus dans l'enseignement secondaire et procéderons à une analyse de chacun d'eux, des parties cours, exercices résolus et exercices proposés. Nous voulons faire une comparaison entre les contenus et les exercices présentés dans les différents manuels.

L'analyse des exercices porte sur : la place du dessin dans l'exercice (énoncé et solution), le registre de départ et le registre de la solution envisagée (à partir du livre du maître), le cadre de l'exercice et les outils nécessaires à sa résolution. Cela permet de vérifier, entre autres, s'il y a un changement de cadre ou de point de vue, quels sont les registres utilisés, quel est le rôle du dessin dans l'exercice.

Nous voulons aussi dégager de cette analyse, les registres de représentation sémiotiques présents dans l'enseignement, les types de problèmes avec lesquels on fait travailler les élèves et les rapports qui existe entre eux.

Cette analyse doit permettre d'expliciter quelques invariants dont on désire la construction par les élèves ainsi que quelques invariants erronés susceptibles d'être construits par eux. Ceci doit être fait lors de l'élaboration du dispositif expérimental à réaliser en classe de Seconde (cf. chapitre D).

Pour finir rappelons que notre analyse de manuels est centrée sur les trois premières années du secondaire, car il s'agit du moment de l'introduction du concept de vecteur (en Quatrième) et du passage du vecteur de notation géométrique $\overrightarrow{AB}$, au vecteur $\vec{u}$ (en Seconde). De plus il y a une rupture dans l'enseignement des vecteurs entre la Troisième et la Quatrième d'une part et la première année du lycée d'autre part : on passe du vecteur de notation géométrique $\overrightarrow{AB}$ au vecteur $\vec{u}$ et cela n'est pas un simple changement de notation, l'objet lui même est modifié. Sur ce nouvel objet $\vec{u}$ on introduit une nouvelle opération, le produit de $\vec{u}$ par un scalaire. Avec l'introduction de cette opération les vecteurs semblent avoir un rôle d'outil pour résoudre des problèmes de géométrie (ce qui n'était pas le cas dans les deux années précédentes). L'élève doit aussi être capable de travailler dans plusieurs domaines[28] : numérique, dessin, géométrie analytique,... Travailler dans différents

[28] Nous utilisons ici le mot domaine tel qu'il est employé par les auteurs de manuels.

domaines veut dire le faire séparément mais aussi et surtout en faisant des allers et retours entre eux, en interprétant un même résultat dans différents domaines.

4.3 - Les dispositifs expérimentaux

4.3.1 - Le vecteur en tant qu'outil (Première S et DEUG première année)

Des problèmes dans lesquels les vecteurs sont présentés dans les manuels comme constituant un outil efficace de résolution ont été retenus et proposés à des élèves de Première S et de DEUG section scientifique en première année. Il s'agit, en fait, de tester la **disponibilité** et l'**efficacité**[29] de l'outil vectoriel chez les élèves (étudiants) pour des problèmes "simples". Nous ne voulons pas analyser la disponibilité et l'efficacité de l'outil au moment même de son apprentissage mais quelques années plus tard, lorsque les élèves ont déjà une certaine familiarité avec les vecteurs et que l'influence du contrat didactique (Brousseau, 1986) sur leurs actions est moins forte. C'est pourquoi nous avons choisi d'analyser des productions d'élèves de Première S et d'étudiants de DEUG. Les problèmes proposés seront exactement les mêmes pour les deux groupes.

Schématiquement, nous voyons l'analyse de manuels et l'analyse des résolutions des élèves (étudiants) liées de la manière suivante :

L'ANALYSE DES MANUELS
permet de :
classer les propriétés et définitions que l'on apprend aux élèves à écrire vectoriellement et de dégager des classes de problèmes pour lesquelles les vecteurs doivent constituer un outil efficace de résolution
↓
L'ANALYSE DES RÉSOLUTIONS PROPOSÉES PAR LES ÉLÈVES
permet de :
confirmer ou non la disponibilité et en vérifier l'efficacité

Schéma 3

L'analyse des difficultés rencontrées par les élèves (étudiants) dans les problèmes proposés en DEUG et en Première S peut aussi constituer un point d'appui pour modéliser leurs difficultés rencontrées dans l'apprentissage de la notion de vecteur.

[29] Pour ces deux notions voir chapitre C.

4.3.2 - Le vecteur en tant qu'objet - une expérience en classe de Seconde

4.3.2.1 - Entre l'observation d'une situation "naturelle" et une ingénierie.

Par situation "naturelle" nous entendons une situation d'enseignement où l'enseignant prépare seul son cours visant à atteindre ses objectifs, en tenant compte évidemment du niveau de ses élèves. C'est, de ce fait, un situation classique d'enseignement/apprentissage d'une notion, sans l'interférence d'une tierce personne. Dans ce cas, le chercheur vient procéder à l'observation d'une classe qui est entièrement sous la responsabilité de l'enseignant et ce, pendant une ou plusieurs séances. A l'opposé de l'observation d'une situation "naturelle" il existe le concept d'ingénierie didactique, et nous laissons la parole à Artigue pour comprendre en quoi consiste cette méthode et quel est son objectif :

> "L'ingénierie didactique, vue comme méthodologie de recherche, se caractérise en premier lieu par un schéma expérimental basé sur des "réalisations didactiques" en classe, c'est-à-dire sur la conception, la réalisation, l'observation et l'analyse de séquences d'enseignement." (Artigue, 1990, p. 285)
> "On considère un point du système didactique dont le fonctionnement apparaît, pour des raisons qui peuvent être de nature diverse, peu satisfaisant. On analyse ce point de fonctionnement et les contraintes qui tendent à en faire un point d'équilibre du système puis, en jouant sur ces contraintes, on cherche à déterminer des conditions d'existence d'un point de fonctionnement plus satisfaisant." (Artigue, 1989, p.183)

C'est dans ce cadre, que nous disons que notre recherche menée en classe de Seconde se situe entre une observation d'une situation naturelle et la construction (et proposition, réalisation, validation...) d'une ingénierie didactique. Nous avons eu accès à une classe de Seconde dans laquelle l'enseignant faisait partie d'un projet soutenu par la Région Rhône-Alpes et l'INRP, sur l'utilisation de la calculatrice TI-92[30] dans la classe. L'enseignant responsable de la classe devait écrire et appliquer une séquence d'enseignement sur les vecteurs incluant l'utilisation de Cabri-géomètre II, et nous avions la possibilité de travailler avec l'enseignant en proposant des activités dont nous voulions faire l'observation. Il s'agit ainsi d'une classe de Seconde non-ordinaire car le milieu est constitué autour d'un environnement informatique, incluant en particulier le logiciel Cabri-géomètre II, ce qui a favorisé un travail plus approfondi sur certains aspects du vecteur en tant qu'objet. L'un des objectifs de ce travail étant d'élaborer et de proposer aux élèves des situations qui puissent leur permettre de progresser.

> "Le rôle de l'enseignant, à la lumière de cette analyse, c'est d'abord d'offrir au sujet des situations, c'est-à-dire des occasions d'exercer des schèmes existants (de mieux en contrôler les opérations et les conditions, d'en automatiser certaines parties), et de développer des schèmes nouveaux (des conceptualisations et des règles d'actions nouvelles, des buts et des tâches inhabituelles). Les situations permettant de développer des schèmes nouveaux sont ce qu'on appelle couramment les situations de résolution de problème, qui peuvent se caractériser par l'absence de schème de traitement prêt à l'emploi." (Vergnaud, 1994, p. 181)

[30] La calculatrice TI-92 contient notamment un module de géométrie, qui est en fait Cabri-géomètre II.

La réalisation des activités proposées par nous et intégrées dans la séquence, a ainsi deux objectifs :

- permettre un meilleur repérage des invariants attachés aux productions d'élèves ;
- provoquer des déséquilibres amenant à déstabiliser des conduites reposant sur des invariants erronés et de remettre en question les réponses fournies par les élèves.

Il importe de procéder à une validation des activités proposées et pour cela nous faisons encore appel à des outils mis en œuvre dans l'élaboration et l'application d'une ingénierie didactique.

> "En général, la validation employée n'est finalement pas très différente de celle en vigueur avant l'institutionnalisation de la méthode d'ingénierie didactique. Elle porte sur les conduites et les productions des élèves [...]" (Laborde, 1997, p. 105)

Ainsi, Laborde reprend les deux types de validations pertinentes dans une ingénierie didactique définis par Artigue (1988) : validation interne à la séquence, qui consiste essentiellement en une comparaison entre l'analyse a priori et l'analyse a posteriori, et validation externe à la séquence, comme par exemple une comparaison des résultats obtenus avant et après l'application de la séquence.

Comme nous l'avons précisé ci-dessus, notre expérimentation ne prétend pas être une proposition d'ingénierie didactique, mais nous avons toutefois conservé des caractéristiques de cette méthodologie. Ainsi, nous effectuerons les deux types de validations décrits ci-dessus, mais pour certaines tâches particulières proposées aux élèves. Pour la validation interne, citons le cas de la construction, d'un représentant d'un vecteur donné utilisant Cabri-géomètre II. Et concernant une validation externe des conduites des élèves, nous effectuerons des entretiens auprès des élèves après l'application du scénario.

4.3.2.2 - Le choix de l'environnement informatique - le logiciel Cabri-géomètre II

Le logiciel de géométrie Cabri-géomètre II se présente comme satisfaisant les conditions nécessaires à remplir pour une approche des vecteurs différente de celle pratiquée habituellement.

Cabri-géomètre II est un logiciel qui, grâce à la manipulation directe permet de construire à l'écran de l'ordinateur des figures géométriques et en permet l'exploration. Il existe des

outils à partir desquelles on peut faire des constructions. Parmi les outils disponibles[31] figure l'outil "vecteur" : pour construire un vecteur dans Cabri-géomètre II, on sélectionne cet outil et on doit montrer deux points qui seront les extrémités du vecteur.

L'une des caractéristiques de Cabri-géomètre II pertinente pour notre étude est qu'il s'agit d'un logiciel de géométrie "dynamique", c'est-à-dire qu'on peut faire bouger les objets et que, surtout, les propriétés géométriques qui ont servi à construire l'objet et celles qui en découlent sont conservées dans le déplacement. Ceci permet, entre autres de vérifier certaines propriétés vectorielles, comme par exemple le fait que l'addition vectorielle est invariante par rapport au représentant choisi. En effet, on peut donner deux vecteurs dans Cabri-géomètre II et ensuite, avec l'outil "Somme de vecteurs", sur un point quelconque choisi par l'utilisateur, on peut avoir la somme de ces deux vecteurs d'origine ce point. Ensuite, on déplace un (ou les) vecteur initial et on observe qu'aucune modification ne s'opère sur le vecteur somme.

Il est aussi possible de créer des macro-constructions à partir d'objets initiaux. Nous citons comme exemple le cas des coordonnées d'un vecteur : cela ne fait pas partie des objets primitifs mais on peut construire une macro qui à partir des points extrémités d'un vecteur donne comme objets finaux ses coordonnées. Une macro-construction est donc une nouvelle primitive disponible qui produit un ou des objets finaux à partir d'objets donnés. Grâce à l'outil macro-construction, on peut construire le produit par un scalaire et de cette façon on a l'outil vecteur avec les deux opérations définies au niveau de la classe de Seconde. Cabri permet aussi de travailler dans le cadre de la géométrie analytique. Par exemple on peut tracer une droite quelconque dans le plan et ensuite demander à Cabri-géomètre II d'afficher l'équation de cette droite.

Les possibilités de traitement des vecteurs dans Cabri-géomètre II semblent ouvrir la voie pour proposer des activités qui permettent aux élèves de se confronter à des contradictions originaires des théorèmes-en-acte faux qu'ils construisent. Par exemple, pour le cas de la macro-construction qui donne les coordonnées d'un vecteur, on peut déplacer le vecteur selon une translation (avec l'outil "Pointer") et constater que les coordonnées restent inchangées. En revanche si on le fait tourner en utilisant l'outil "Tourner[32]", on observe que les coordonnées changent. On peut encore "attraper" une des extrémités du vecteur, la déplacer et observer l'effet de ce déplacement sur les coordonnées du vecteur.

Pour faciliter la compréhension du lecteur, une figure est donnée ci-dessous : on construit un vecteur, on demande ses coordonnées avec la macro "coordvecteur" et ensuite

[31] Une liste complète des outils disponibles dans Cabri-géomètre II est fournie dans les annexes D. Dans ce paragraphe nous donnons surtout quelques exemples sur "vecteur" et Cabri.

[32] Avec l'outil "tourner" on peut attraper un objet construit et le faire tourner ; ce mouvement conserve les caractéristiques de la figure.

on déplace un représentant de ce vecteur et on observe l'effet de ce déplacement sur ses coordonnées. Le logiciel fournit ici une rétroaction de type perceptif (car on observe que des propriétés géométriques telles que la direction et le sens sont préservées) et de type géométrique-numérique (car les coordonnées du vecteur sont affichées).

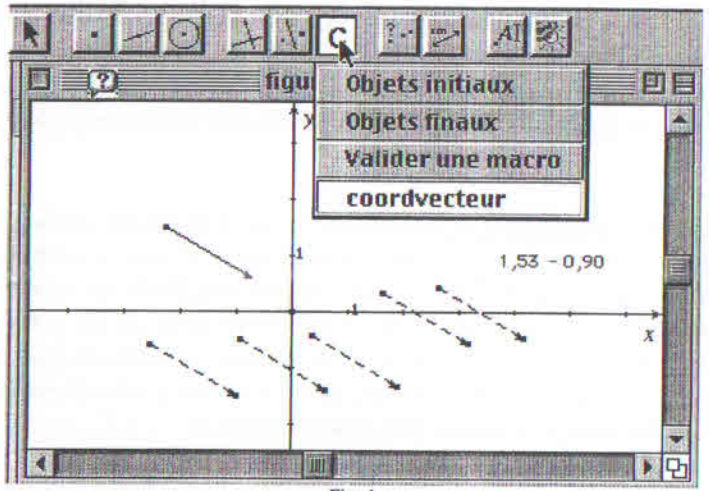


Fig. 1

Pour plus de détails à propos du fonctionnement de Cabri-géomètre nous renvoyons à (Bellemain, 1992), (Capponi et Laborde, 1994) et (Charrière, 1996). Une copie du menu disponible dans Cabri-géomètre II est donnée dans les annexes du chapitre D .

4.3.2.3 - Cabri-géomètre II constituant d'un milieu pour l'apprentissage

L'analyse des programmes en vigueur et des manuels les plus répandus dans l'enseignement nous a permis d'accéder en particulier au savoir à enseigner en classe de Seconde. A partir de cette analyse, et prenant en compte le caractère dynamique de Cabri, nous avons choisi d'analyser certaines parties de l'enseignement des vecteurs en tant qu'objet dans la classe de Seconde citée plus haut. L'introduction du vecteur $\vec{u}$ et le fait que les élèves doivent être capables de prendre un représentant d'un vecteur donné et d'opérer avec ce représentant, nous a conduit à chercher et à repérer les invariants attachés aux vecteurs qui sont objets d'apprentissage en Seconde. L'un des objectifs de l'enseignement est de faire comprendre aux élèves qu'un vecteur est un représentant d'une classe d'équivalence - implicitement au niveau de la notion mais explicitement quand on leur demande par exemple d'effectuer l'addition de deux vecteurs donnés. Cette présence à la fois implicite et explicite de la classe

d'équivalence est perçue par nous dans les intentions des auteurs des manuels, comme nous le montrerons dans notre analyse des manuels (cf. chapitre B2).

L'utilisation d'un nouvel instrument impose un contrat différent du contrat habituel. Ce qui peut être révélateur à la fois au niveau des choix de l'enseignant et au niveau des élèves à propos de leurs difficultés concernant la notion de vecteur et son utilisation. Dans une situation habituelle, l'objectif central n'est pas de fixer l'attention sur la notion de vecteur en tant qu'objet. Il s'agit de faire une révision du cours sur les vecteurs vu en Quatrième et Troisième et d'introduire la notation vectorielle et le produit par un scalaire. Ensuite on attaque presque tout de suite le rôle d'outil des vecteurs pour résoudre des problèmes de géométrie.

Du côté de l'enseignement, le poids accordé à la notion de représentant d'une classe d'équivalence dans la séquence que nous avons observée et dans un enseignement traditionnel n'est pas le même. En effet, comme Cabri-géomètre II offre un "objet" vecteur qu'on peut déplacer, "Tourner" et en même temps observer l'effet que ces changements provoquent sur les coordonnées du vecteur ou sur l'addition vectorielle, par exemple, les élèves ont été confrontés plus explicitement à l'usage en acte de la notion de représentant d'une classe des vecteurs. (cf. chapitre D, application du TD n°5).

Du côté de l'élève, l'introduction d'un nouvel environnement permet de valider des conjectures émises par eux (formulées en papier crayon ou dans Cabri). Avec Cabri l'élève gagne un moyen de contrôle de ses actions. Citons par exemple, la macro-construction qui donne les coordonnées d'un vecteur ; on demande à Cabri d'afficher ses coordonnées et on déplace ce vecteur. S'il est déplacé selon une translation, ses coordonnées seront toujours les mêmes ; si on fait une rotation, ses coordonnées changent. On a donc la possibilité de vérifier ce qui se passe avec les coordonnées d'un vecteur quand on le déplace dans le plan. Ceci peut favoriser d'une part la déstabilisation d'un théorème-en-acte erroné et d'autre part l'établissement d'une nouvelle règle d'action en situation, voire, un nouveau théorème-en-acte, vrai cette fois et/ou avec un domaine de validité plus large.

Cabri peut encore fonctionner comme un outil de validation ou d'invalidation d'une construction faite par l'élève. Par exemple, l'élève peut construire l'addition vectorielle à travers le parallélogramme (comme il le ferait en papier crayon), et ensuite le résultat peut être comparé avec celui fourni par Cabri-géomètre II[33].

Le caractère dynamique de Cabri permet encore aux élèves de vérifier des propriétés que l'environnement papier crayon ne permettait pas, apportant ainsi aux élèves un moyen de contrôle de leurs actions.

[33] Dans le menu de Cabri II il y a la somme de deux vecteurs : on montre les représentants des deux vecteurs qu'on veut additionner et ensuite un point à partir duquel Cabri dessine un représentant du vecteur somme.

Plusieurs travaux en didactique des mathématiques ont déjà été fait sur l'utilisation des logiciels en classe ; nous retenons ici en particulier celui de Laborde et Capponi sur l'apprentissage de la notion de figure à l'aide de Cabri-géomètre II :

> "C'est parce que le déplacement est fondé sur des connaissances de géométrie, qu'il permet une rétroaction extérieure plus riche sur une production du sujet. Prenons l'exemple d'un élève ayant à résoudre une tâche que nous décririons en termes classiques comme une tâche de construction d'une figure satisfaisant à des conditions données (dans nos termes, ce serait une tâche de tracé d'un dessin d'un objet géométrique donné issu d'un procédé contrôlé par des connaissances géométriques). Dans un contexte papier crayon l'élève peut tourner sa feuille de papier et voir le dessin dans différentes positions mais ne peut faire varier les éléments variables qu'en traçant à nouveau un dessin, c'est-à-dire en engageant une nouvelle action fondée sur des connaissances". (1994, page 175).

Notre objectif pour cette partie du travail est d'analyser l'enseignement de ces notions, la façon dont elles vivent dans l'environnement Cabri-géomètre II, les difficultés des élèves, les concepts ou encore, les invariants dont on peut permettre la construction par les élèves. Il ne s'agit pas de fournir une séquence pour l'enseignement de la notion de vecteur ni de faire une analyse exhaustive de tout ce qui concerne les vecteurs en classe de Seconde, mais d'effectuer une analyse plus approfondie de l'apprentissage de cette notion en utilisant pour cela un nouvel environnement.

L'apport des nouvelles technologies en tant que pourvoyeurs de "signification" aux concepts mathématiques est également souligné dans les recherches faites par Noss et Hoyles (1997) :

> "Focusing on technology draws attention to epistemology : for new technologies - *all* technologies - inevitably alter how knowledge is constructed and what it means to any individual. This is as true for the computer as it is for the pencil, but the newness of the computer forces our recognition of the fact. There is no such thing as unmediated description : knowledge acquired through new tools is new knowledge, MicroworldMathematics is new mathematics. Researching how students exploit autoexpressive computational settings to communicate, (re-)present and explain, not only provides descriptions of how individual students can express mathematical ideas, but can provide more general clues to the process involved in learning, how knowledge is modified in the direction of mathematisation. " (p. 106)

4.4 - Plan du travail

Afin de faire le point sur notre plan de travail, nous présentons ci-dessous et de manière résumée, les étapes à venir.

Deux chapitres seront consacrés à l'étude de manuels et programmes. Dans le chapitre B1 un survol basé sur les programmes traite de l'évolution des vecteurs dans l'enseignement secondaire dans les 6 dernières décennies. Le chapitre B2 contient une analyse plus fine de l'objet de l'enseignement vecteur en classe de Quatrième, Troisième et Seconde ; cette analyse est basée sur quelques manuels actuels.

Après l'analyse de l'objet de l'enseignement, nous consacrons un chapitre à l'étude du maniement des vecteurs par les élèves en tant qu'outil de résolution de problèmes de géométrie, l'objectif étant de tester la disponibilité et l'efficacité de cet outil chez les élèves, et d'en dégager quelques difficultés des élèves à utiliser à bon escient l'outil vectoriel.

Finalement, un dernier chapitre porte sur une modélisation de quelques difficultés des élèves dans l'apprentissage de la notion de vecteur. Nous y discutons des conditions didactiques à mettre en œuvre pour permettre à l'élève d'évoluer, de créer de nouvelles règles d'action en situation visant la création de nouveaux invariants.

CHAPITRE B1

ÉVOLUTION DE L'ENSEIGNEMENT DES VECTEURS DANS LE SECONDAIRE

Dans ce chapitre nous ferons tout d'abord un survol de l'évolution de l'objet mathématique vecteur dans l'enseignement secondaire au cours des dernières décennies. Nous chercherons à repérer comment le vecteur était défini, quel était le registre utilisé pour le représenter et, de façon générale, les éléments principaux du contenu à enseigner.

Ensuite nous procéderons à une analyse des programmes actuels pour caractériser le savoir à enseigner dans ses deux composantes qui nous intéressent : vecteur en tant qu'outil et vecteur en tant qu'objet.

Notre analyse sera partagée en quatre étapes : la première porte sur la période concernant les années 1930 à 1960, juste avant la reforme des mathématiques modernes ; la seconde concerne la période des mathématiques modernes ; la troisième concerne la période consécutive à la fin des mathématiques modernes et la quatrième se réfère à la période actuelle.

Depuis à peu près 10 ans a cours une période stable qui n'est traversée que par des changements mineurs. De nouveaux changements sont actuellement prévus : les vecteurs doivent disparaître de la classe de Quatrième, pour être introduits en classe de Troisième[1].

INTRODUCTION

Les vecteurs commencent à apparaître dans l'enseignement secondaire dans les années 30. Pour analyser l'évolution de l'objet d'enseignement vecteur, nous avons tout d'abord considéré les programmes en vigueur pour chaque époque. Nous avons immédiatement constaté que la seule lecture de ces programmes ne fournissait pas d'éléments conclusifs, et cela pour deux raisons : la première est qu'on trouve des programmes où les vecteurs n'apparaissent pas de façon explicite alors qu'ils apparaissent dans les manuels, comme par

[1] Cf. programme de Quatrième 98/99 et projet de programme de Troisième.

exemple celui de 1931. La deuxième est que lorsqu'ils apparaissent de façon explicite dans le programme, cela ne donne pas suffisamment d'indices à propos de leur enseignement, comme le font par exemple de nos jours les instructions du programme qui permettent d'éclaircir quelques points relatifs à l'application du contenu du programme.

Ces constatations faites, nous avons décidé de procéder à une analyse de l'enseignement des vecteurs dans le secondaire, pour la période de 1931 à 1962 par l'étude de quelques manuels. Afin de ne pas prendre le risque d'analyser des manuels qui ne soient pas représentatifs de cet enseignement, nous avons choisi des auteurs reconnus et nous avons aussi pris des manuels qui s'étendent sur toute cette période. À partir de l'époque de la réforme des mathématiques modernes, nous nous servirons du texte du programme car les instructions du programme nous suffiront pour faire ce survol de l'enseignement des vecteurs. Pour la période actuelle nous procéderons à une analyse des programmes dans ce chapitre, et une analyse détaillée de manuels figurera dans le chapitre suivant.

Cette étude de l'évolution de l'objet vecteur dans l'enseignement secondaire ne prétend être ni exhaustive, ni détaillée sur chaque changement de programme : nous nous contenterons d'en étudier les principaux changements et les lignes générales à chaque période.

Dans cette étude, nous cherchons premièrement à étudier comment les vecteurs étaient introduits dans l'enseignement secondaire : Comment définissait-on les notions de direction et de sens ? Quels registres de représentation sémiotique étaient présents dans l'enseignement ? Deuxièmement, nous cherchons aussi à déterminer les objectifs généraux de l'enseignement autour des vecteurs : à quoi servaient les vecteurs ?

1 - L'enseignement des vecteurs dans le secondaire de 1930 à 1962.

Nous commençons cette étude en donnant une vue "panoramique" de l'enseignement des vecteurs entre les années 30 et la reforme des mathématiques modernes. Dans le programme en vigueur en **1925,** aucune référence n'est faite aux vecteurs ; les translations sont présentes mais on ne sait pas si elles doivent être présentées avec une notation vectorielle ou non. Entre les années **1945** et **1959** le programme en vigueur est celui de 1945 avec de petites modifications ; cette fois les vecteurs sont présents de façon explicite sous la mention : "vecteurs équipollents ; translation ". En **1960** un nouveau programme est mis en place et les vecteurs commencent à gagner de l'espace dans l'enseignement secondaire ; on parlera entre autres de vecteurs équipollents, de l'addition vectorielle, du produit par un nombre relatif. On continue à utiliser les vecteurs pour définir la translation et l'homothétie. Ce

programme subit quelques petites modifications jusqu'en **1972** où la reforme des mathématiques modernes se met en place, le calcul vectoriel est alors remplacé par l'algèbre linéaire.

Après cet aperçu nous passons maintenant à l'étude de quelques manuels pour mieux comprendre comment se présentaient les vecteurs et quel était leur usage.

1.1 - Les vecteurs en classe de mathématiques en 1931.

Dans les années 30 les vecteurs ne sont pas présents dans les programmes du secondaire, mais ils apparaissent dans les manuels de "classe de mathématiques" lorsqu'on travaille les transformations. Prenons l'exemple du manuel (Chenevier, 1931) pour étudier la présentation des vecteurs.

Dans ce manuel, la définition d'un vecteur apparaît dans le chapitre sur les transformations comme "un morceau de droite sur lequel on a choisi un sens de parcours". Notons que cette définition exige seulement le choix d'un sens car la direction et la longueur du vecteur viennent "avec" le segment : on n'a pas besoin de parler explicitement de ces notions. L'auteur parle du sens de façon indirecte : "Les deux points qui limitent le vecteur jouent un rôle différent. La figure 2 montre le vecteur AB d'*origine* A et d'*extrémité* B." Les représentations graphiques utilisées sont les suivantes :

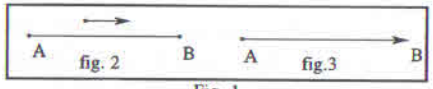


Fig. 1

Ensuite, l'auteur dit : "On figure souvent un vecteur en plaçant une flèche à son extrémité (fig.3)".

Il n'y a donc pas de définition de direction et de sens ni mathématiquement, ni même en langue courante ; le sens est représenté par deux flèches, celle du vecteur (fig3) et la petite ajoutée par l'auteur (fig.2).

La notation adoptée est : $\overrightarrow{AB}$. On définit aussi dans le manuel la mesure algébrique d'un vecteur (porté sur un axe), l'abscisse d'un point A sur un axe (par la mesure algébrique du vecteur OA). On introduit la formule de Chasles (à partir de la relation $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots + \overline{HK} + \overline{KL} = \overline{AL}$, les coordonnées d'un point dans un plan (à partir des projections d'un vecteur sur les axes, cela de façon implicite) et l'angle de deux vecteurs.

A la fin de cette première partie figurent des exercices mais aucun ne porte sur un vecteur $\overrightarrow{AB}$; quatre d'entre eux portent explicitement sur la mesure algébrique.

On définit des vecteurs équipollents comme des "vecteurs égaux, parallèles et de même sens". A l'époque le mot "égaux" était utilisé pour "même longueur". On introduit ici implicitement la notion de direction.

La translation est définie en utilisant des vecteurs équipollents : "On appelle translation la transformation ponctuelle qui, à un point M, fait correspondre un point M' tel que le vecteur MM' soit équipollent à un vecteur donné qui définit la translation." (p. 18) Dans le chapitre sur l'homothétie, on définit le rapport de deux vecteurs parallèles, et on utilise cette définition pour introduire l'homothétie : "Étant donnés un pont fixe O et un nombre algébrique K, on appelle homothétie de centre O et de rapport K la transformation ponctuelle qui, à un point M, fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$." (p. 49)

Les vecteurs sont essentiellement utilisés comme un outil pour définir la translation et l'homothétie. Les problèmes à résoudre portent directement sur les transformations. Il s'agit de problèmes d'application des transformations et les vecteurs constituent un registre qui peut s'avérer économique au niveau de l'écriture ; ils apparaissent dans la définition d'une transformation. Nous n'avons pas trouvé de problèmes où les vecteurs soient véritablement un outil de résolution.

1.2 - Les vecteurs dans le programme de 1945.

En 1945 les vecteurs apparaissent de façon explicite dans les programmes à partir de la classe de Seconde, dans deux items intitulés : "vecteurs équipollents, translation" et "rapport algébrique de deux vecteurs parallèles". Pour mieux étudier la présentation des vecteurs dans l'enseignement, prenons l'exemple de la collection Benoit, classe de Seconde classique et moderne[2].

Le premier chapitre traite de la géométrie plane ; on commence par les définitions de point, droite, segment et vecteur. La définition d'un vecteur est donnée de la façon suivante :

> "Un segment AB peut être parcouru par un point mobile dans deux sens différents, soit que le mobile parte de A pour arriver en B, soit qu'il parte de B pour arriver en A ; on appelle vecteur un segment que l'on suppose parcouru par un mobile d'un bout à l'autre dans un sens déterminé ; le sens du déplacement de ce mobile s'appelle le sens du vecteur ; le point du départ du mobile s'appelle l'origine du vecteur ; son point d'arrivée est l'extrémité du vecteur. La droite dont fait partie un vecteur s'appelle son support." (ibid. p. 7).

On ne parle pas de direction d'un vecteur et le sens est défini comme le sens du parcours d'un point mobile ; en fait, il ne s'agit pas d'une définition mathématique mais d'une

[2]Collecton Benoit, Géométrie 2e CM, 1947, librairie Vuibert.

définition utilisant la langue courante. Le registre graphique utilisé, traduit lui aussi cette idée de parcours :



Fig. 2

On définit encore la mesure algébrique. Dans le chapitre II, "Droites, parallèles, parallélogramme", des vecteurs équipollents sont définis comme deux vecteurs de même direction, même sens et même longueur, ayant des supports parallèles ou confondus. A cette occasion il est fait appel au parallélogramme et le mot direction apparaît explicitement. Le déplacement par translation rectiligne est introduit d'abord sans utiliser les vecteurs, qui apparaissent ensuite sous forme d'un théorème. Donnons ci-dessous la définition de la translation rectiligne, puis le théorème que lie cette transformation à l'équipollence de deux vecteurs :

> "Si un plan P glisse sur un plan fixe de telle façon qu'une droite D du plan P glisse sur une droite Δ du plan fixe, ce mouvement du plan P est ce qu'on appelle un **mouvement de translation rectiligne**, et la droite fixe Δ sur laquelle glisse D s'appelle la glissière. [...] *Théorème I* . Dans un déplacement par translation rectiligne, tous les vecteurs qui ont pour origine et pour extrémité la position initiale et la position finale d'un même point de la figure déplacée sont équipollents." (ibid. p. 56)

Dans le chapitre sur les figures homothétiques, on parlera d'un vecteur homothétique. On présente encore le rapport algébrique de deux vecteurs ayant même direction et la forme algébrique du théorème de Thalès.

Cette collection ne diffère guère de celle étudiée antérieurement (pour la classe de mathématique) ; cette fois-ci on parle d'une translation rectiligne et elle est d'abord définie sans utiliser les vecteurs. En ce qui concerne la définition d'un vecteur il s'agit toujours d'un morceau de droite. Le sens est le sens de parcours d'un mobile. La seule différence par rapport à la collection Chenevier est que dans la collection Benoit on parle de support d'un vecteur ce qui donne, implicitement, la direction de ce vecteur.

Dans la collection Benoit, Géométrie, classes de Première Classique et Première moderne, **1946**, les vecteurs apparaissent dans un chapitre intitulé : "Prismes. Pyramides. Translation. Homothétie. Symétrie". Pour définir la translation, on part d'un vecteur VV' (ici au départ il n'y a pas de flèche sur le vecteur, on la met après !). Les exercices de ce chapitre portent sur les transformations et il n'y a pas de vecteurs dans l'énoncé, ce qui laisse croire que les vecteurs étaient un outil pour définir la translation et l'homothétie (cette dernière par le rapport algébrique de deux vecteurs).

1.2.1 - La classe de Seconde, 1949[3]

Nous présentons maintenant un manuel d'une collection de 1949, dont le programme en vigueur est celui de 1945, pour montrer qu'il n'y a pas de différence par rapport à 1947, autrement dit, une certaine stabilité est atteinte en ce qui concerne les vecteurs dans l'enseignement secondaire.

Le vecteur est un segment de droite orienté, "c'est-à-dire un segment sur lequel on a fixé un sens de parcours". On définit aussi la mesure algébrique d'un vecteur. La notation adoptée pour un vecteur est $\overrightarrow{AB}$ et le registre graphique est le suivant :



Fig. 3

La définition de droites parallèles apparaît seulement à la sixième leçon et sans lien avec les vecteurs.

"Deux vecteurs sont égaux ou équipollents lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur" (p. 67). Nous observons ici une évolution par rapport au premier ouvrage, car on utilise les mots "égaux" et "équipollents" comme ayant même signification. Ici les mots "direction" et "sens" apparaissent explicitement mais ils ne sont pas définis. Pour le sens il existe un essai de définition lorsqu'on parle de sens d'un parcours mais pour la direction aucun commentaire n'est fait. Suite à la définition de vecteurs équipollents, l'égalité vectorielle est liée au parallélogramme : "deux vecteurs égaux qui n'ont pas le même support définissent un parallélogramme" (p. 67).

Comme pour la collection Benoit (1947), que nous venons d'analyser, la translation rectiligne est d'abord définie indépendamment du vecteur, de la façon suivante : "Une figure plane se déplace d'un mouvement de translation rectiligne lorsqu'elle glisse dans son plan de façon qu'une droite donnée de cette figure glisse sur une droite fixe du plan." Les vecteurs apparaissent après, dans un théorème : "Dans la translation rectiligne qui amène la figure F sur la figure F', tous les points de la figure F décrivent des vecteurs égaux."

Dans le chapitre sur les similitudes, on définit le rapport de deux vecteurs parallèles, puis la mesure algébrique d'un vecteur (qui interviendra pour l'une des formulations du

[3] Pour cette analyse nous utilisons le manuel : C. Lebossé & C. Hémery, Géométrie Plane, classe de Seconde des Lycées et Collèges, Nathan, 1949.

théorème de Thalès). Finalement, les vecteurs apparaissent également dans la dix-huitième leçon pour définir l'homothétie, mais on passe tout de suite à la notation de mesure algébrique (la notation vectorielle disparaît).

Dans ce manuel, les vecteurs sont donc plus une notation introduite pour définir la translation qu'un objet à part entière. Les exercices qui traitent des vecteurs font appliquer l'équipollence vectorielle à des problèmes de lieu géométrique. Nous en donnons un exemple ci-dessous. Il s'agit de l'exercice 83, page 69.

> On considère une droite (D) et un vecteur $\vec{V}$.
>
> 1° Par un point quelconque M de (D) on mène le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ équipollent à $\vec{V}$. Trouver le lieu du point M'.
> 2° Soit une seconde droite (D'). Trouver un point A de (D) et un point B de (D') tels que le vecteur AB soit équipollent à $\vec{V}$.

Compte tenu de l'étude de la partie cours, nous pensons que la résolution attendue par les auteurs consiste à utiliser la définition de translation. Ce même exercice pourrait être donné de nos jours, en changeant quelque peu son énoncé, et nous pensons que la résolution, dans l'essentiel, serait la même : on fait un dessin, on trace un premier vecteur équipollent à $\vec{V}$, puis on déplace M sur la droite et on "voit" l'ensemble des points qu'on obtient. Pour justifier la réponse on peut utiliser les propriétés géométriques d'une translation.

1.2.2 - La classe de mathématiques en 1957

Avant d'étudier des changements de programmes qui ont eu lieu en 1960, examinons le contenu des vecteurs dans la classe de mathématiques vers la fin des années 50[4].

L'étude des vecteurs se trouve dans la première partie de ce livre qui est dédiée à la "géométrie dirigée"[5] ; le chapitre I commence par le "rappel des éléments fondamentaux de la théorie des vecteurs". La définition d'un vecteur est donnée comme suit : "On appelle vecteur un segment de droite auquel on a associé un sens de parcours[6] déterminé". On parle de support d'un vecteur : deux vecteurs sont parallèles si leurs supports sont parallèles (ou

[4] Pour cette étude nous prenons le manuel : J. Commeau, Géométrie, classe de mathématiques, Maison et Cie Editeurs, 1957.
[5] Nous pensons que le mot "dirigée" ici veut dire "orientée" car dans cette partie l'auteur met les chapitres suivants : "Rappel des éléments fondamentaux de la théorie des vecteurs : Géométrie sur une droite et applications ; Arcs et angles ; Dièdres. Trièdres."
[6] C'est nous qui soulignons.

confondus) ; dans ce cas on peut comparer leurs sens. Le registre graphique présenté est le suivant :

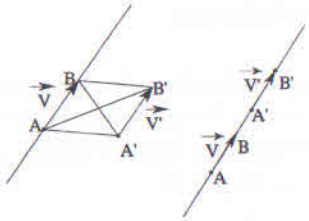


Fig. 4

Avant de définir l'égalité vectorielle, des vecteurs équipollents sont introduits comme étant ceux qui sont parallèles, qui ont même sens et qui sont de même module (un nouveau terme est alors introduit). On dit alors que cette équipollence est appelée aussi une égalité vectorielle car elle est réflexive, réciproque et transitive "c'est donc une relation d'équivalence". Cela veut dire que l'égalité vectorielle est définie comme une relation d'équivalence ce qui montre l'apparition de quelques aspects formels (ou axiomatiques) dans l'enseignement secondaire. Dans cette collection, la notion de vecteur libre $\vec{V}$ est présentée comme suit :

> "Si, dans une question, on peut sans inconvénient remplacer le vecteur $\vec{V}$ par tout autre vecteur équipollent à $\vec{V}$, on dit que $\vec{V}$ est un *vecteur libre* ou encore que $\vec{V}$ est *déterminé à une équipollence près.*" (p. 28)

On présente alors les notions de projection d'un vecteur, somme vectorielle, produit d'un vecteur par un nombre algébrique et les propriétés des deux opérations définies. En ce qui concerne le registre de l'écriture symbolique utilisé, la même notation est utilisée aussi bien pour un vecteur que pour un axe orienté.

La notion de barycentre est aussi donnée dans la partie cours, et dans les exercices la seule rubrique où nous trouvons les vecteurs est intitulée "Applications de la notion de barycentre". Nous donnons ci-dessous un des exercices mis sous ce thème :

> Exercice 13, page 31.
> Soit ABCD et A'B'C'D' deux parallélogrammes. Démontrer que les milieux des segments AA', BB', CC' et DD' sont les sommets d'un parallélogramme. La propriété subsiste-t-elle si on considère les points qui partagent algébriquement les quatre segments dans un même rapport ?

Dans le chapitre XII, "Déplacements et symétries dans le plan", comme dans les manuels précédents, on définit la translation à partir de la notion de vecteurs équipollents :

> "Étant donné un vecteur $\vec{V}$, on appelle translation de vecteur directeur $\vec{V}$ la transformation ponctuelle qui, à un point M quelconque, fait correspondre le point M' tel que le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ soit équipollent au vecteur $\vec{V}$." (p. 217)

Finalement dans le chapitre XIV on étudie l'homothétie, définie de la façon suivante :

> "Étant donnés un point O et un nombre algébrique k différent de zéro, on appelle homothétie de centre O et de rapport k la transformation ponctuelle qui, à tout point M, fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$." (page 264)

Bilan : La partie cours de ce manuel ne diffère guère des manuels déjà examinés. La seule différence est la présentation théorique du début mais l'usage des vecteurs pour les transformations est le même.

1.2.3 - La classe de Seconde en 1960.

En 1960 un nouveau programme est mis en place. Les premières notions vectorielles sont introduites dès les classes de Troisième A et B modernes sous la rubrique "géométrie dans l'espace". Relativement au contenu des vecteurs il existe : "Vecteurs : vecteurs équipollents, vecteurs opposés. Somme géométrique de deux vecteurs." C'est au niveau de la classe de Seconde que les vecteurs apparaissent dans toutes les sections. Ci-dessous un extrait du programme des Secondes A', C, M, M' (1963) :

> "1° Éléments orientés sur une droite [...]
> 2° Vecteurs - Equipollence. Addition ; associativité et commutativité. Vecteur nul ; vecteurs opposés. Soustraction.
> Projections d'un vecteur [...]
> Projection sur une droite orienté [...]
> 3° Multiplication d'un vecteur par un nombre relatif ; rapport de deux vecteurs parallèles. Théorème de Thalès en géométrie plane; problème réciproque. Théorème de Thalès dans l'espace ; réciproque. Projection (sur une droite, sur un plan) du vecteur produit d'un vecteur par un nombre. Projection sur une droite orientée : mesure algébrique de la projection du vecteur produit d'un vecteur par un nombre.
> 4° Translation ; homothétie [...]" (p. 67)

La translation et l'homothétie ne font pas partie des programmes des sections A et B. Pour mieux analyser la présentation des définitions et des propriétés vectorielles dans le secondaire, nous examinons un manuel de classe de Seconde[7].

[7] Le manuel analysé ici est : C. Lebossé & C. Hémery, 1960, Géométrie Plane, classe de Seconde, des Lycées et Collèges, Nathan.

Dans (Lébossé et Hémery, 1960), il existe un chapitre entier consacré aux vecteurs qui débute en parlant d'éléments orientés : "L'utilisation d'éléments orientés en Géométrie permet de donner à certains théorèmes une forme plus précise et plus générale". Cela laisse croire que les vecteurs pourront servir à d'autres choses que les définitions des transformations.

La définition d'un vecteur est toujours donnée comme un segment de droite orienté, le sens du vecteur étant encore associé au sens de parcours de A vers B. Cette même définition est donnée dans la 11ème leçon "Rapport de deux segments". A cette occasion, le mot direction apparaît pour un vecteur pour la première fois et de la façon suivante: "La droite AB est le support du vecteur et définit sa *direction*". Un essai de définition sera fait dans le chapitre sur les vecteurs, de la façon suivante :

> "Deux vecteurs dont les supports sont parallèles (ou confondus) sont dits parallèles ou de même direction. Ces deux vecteurs peuvent être de même sens ou de sens contraires.
> Deux ou plusieurs vecteurs de même support sont dits *colinéaires*, tandis que des vecteurs situés dans un même plan sont dit *coplanaires*." (p. 191)

Le mot *colinéaire* ne renvoie pas ici à la définition qui est adoptée de nos jours ; et de plus l'expression "vecteurs parallèles" n'a plus cours actuellement. Le registre graphique utilisé ne diffère pas de celui utilisé dans les autres collections :



Fig. 5

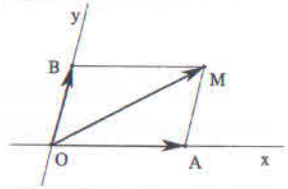
On définit des vecteurs égaux (ou équipollents) comme étant deux vecteurs de même direction, même sens et même module. L'égalité vectorielle apparaît ici liée au parallélogramme (et vice-versa), en excluant le cas de deux vecteurs de même support. Le produit d'un vecteur par un nombre est défini à partir du rapport de deux vecteurs parallèles. On retrouve ensuite la mesure algébrique d'un vecteur. La somme géométrique de deux vecteurs est définie et on montre les propriétés qui y sont associées.

Finalement on présente la décomposition d'un vecteur dans le plan suivant deux directions Ox et Oy, puis la décomposition d'un vecteur dans l'espace suivant trois directions Ox, Oy et Oz. La décomposition dans le plan est donnée comme suit :

Décomposition d'un vecteur, page 198.

Soit dans un plan un vecteur $\overrightarrow{OM}$ et deux directions distinctes Ox et Oy. Les parallèles menées par M à Oy et Ox coupent Ox en A et Oy en B.

On a (n° 358[8]) : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.



La décomposition dans l'espace est faite de façon analogue ; il est ensuite précisé que "la décomposition ainsi obtenue est unique". Aucune démonstration n'est faite.

Les exercices de ce chapitre portent sur les notions vues ; il s'agit d'exercices de géométrie car l'objet vecteur est encore géométrique. De plus, le dessin parfois est fondamental pour la résolution. Citons l'exercice 398, page 200 :

> Soient deux vecteurs parallèles $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ tels que $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$. Les droites AC et BD se coupent en I :
>
> 1° Démontrer que $\overrightarrow{IA} = k\,\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{IB} = k\,\overrightarrow{ID}$;
>
> 2° Évaluer $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BI}$ en fonction de k, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

Une résolution possible de la partie 1°, est la suivante :

La relation de Chasles donne : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{ID}$

Comme $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{CD}$, on obtient $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = k\overrightarrow{CI} + k\,\overrightarrow{ID}$

Pour conclure, on doit utiliser le fait que la décomposition est unique dans ce cas car les directions $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{CI}$ sont les mêmes, ainsi que celles de $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{ID}$. C'est à ce moment que le dessin joue un rôle plus important, pour se rendre compte que ces deux vecteurs ont même support, ou qu'ils sont colinéaires.

Dans la leçon qui suit, on présente d'abord la projection d'un vecteur sur un plan et des résultats qui en découlent ; ensuite la translation est définie à partir de l'égalité vectorielle et on donne quelques propriétés de cette transformation. Finalement on présente l'homothétie dans la leçon suivante en utilisant aussi les vecteurs.

[8] Le n° 358 définit la somme de deux vecteurs.

Bilan : Comme nous l'avons dit, la définition donnée pour un vecteur est essentiellement la même. Ce qui change par rapport aux autres années est maintenant la façon de voir un vecteur. En effet, la définition de décomposition d'un vecteur selon deux directions, représente un travail sur la base (même si ce mot n'existe pas encore), qui n'est pas du tout présent avant. Cela permet la présence d'exercices qui ne pouvaient pas exister avant.

Avant de conclure sur l'enseignement des vecteurs dans cette période, faisons un survol sur le contenu des vecteurs en classe de Première, en examinant le manuel Nathan [9].

En classe de Première, après avoir défini l'angle de deux vecteurs, on introduit le produit scalaire de deux vecteurs comme étant le nombre relatif égal au produit de leurs modules par le cosinus de leur angle. On présente et démontre ensuite ses propriétés. L'expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs coplanaires est aussi présentée ce qui permet un passage entre la géométrie vectorielle et la géométrie analytique. En effet on montre comment calculer la distance entre deux points, le cosinus de l'angle de deux vecteurs du plan, la condition d'orthogonalité de deux vecteurs du plan, les relations métriques du triangle rectangle et la puissance d'un point par rapport à un cercle. Tout cela en passant par les coordonnées d'un vecteur. C'est pourquoi nous disons qu'on peut passer de la géométrie vectorielle à la géométrie analytique et vice-versa.

1.3 - Conclusion

Avant la période des mathématiques modernes, la notion d'espace vectoriel est absente de l'enseignement secondaire ; le vecteur est défini de façon géométrique comme un morceau de droite ou un segment de droite orienté. La notion de sens est introduite par la métaphore du mouvement, quand on parle d'un mobile ou du sens de parcours d'un segment. Dans ces définitions la direction n'est pas introduite et comme la norme est définie par la longueur du segment, il ne reste que la notion de sens à expliciter, ce qui est fait en utilisant la notion de "sens de parcours". Le vecteur est d'abord introduit comme un vecteur lié, c'est ensuite qu'apparaît la notion de vecteur libre.

S'agissant du contenu à enseigner, dans les années 60 on constate que la théorie vectorielle commence à gagner de la place dans l'enseignement secondaire, autrement dit il y a déjà des indices de la transformation qui est en vue et qui se mettra en place dans les années 70, la période des mathématiques modernes. En effet dans les programmes de 68 et 69 on voit apparaître l'idée de bipoints et du vecteur comme une classe d'équivalence de bipoints.

[9] C. Lebossé & C. Hémery, 1961, Géométrie Plane, classe de Première, Nathan.

Au niveau des notations utilisées, on retrouve dans cette période la notation $\overrightarrow{AB}$ aussi bien que la notation $\vec{V}$; les registres graphiques présents font appel à des segments de droites. On ne trouve pas de dessins d'un faisceau de droites parallèles.

Relativement à la fonction des vecteurs dans l'enseignement secondaire, on peut dire qu'ils servent surtout pour les transformations en tant qu'outil économique d'écriture, et ce notamment pour la translation. Avant les années 60 on ne trouve pas d'exercice sur les vecteurs en dehors de ceux sur les transformations.

Au niveau des changements de programmes, on constate qu'à partir de 1960 le contenu à enseigner autour des vecteurs a considérablement augmenté ; cela coïncide avec le début de l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'université. Cette période donne lieu à des ouvrages connus destinés aux enseignants et dans lesquels la structure vectorielle est présente. Ces ouvrages ont exercé une grande influence sur la rédaction des manuels. Nous ne rentrerons pas dans cette discussion, pour le lecteur intéressé nous renvoyons à la lecture de Choquet (1964) et Dieudonné (1964). En ce qui concerne le début de l'enseignement de l'algèbre linéaire à l'université nous renvoyons aux travaux, sur ce thème, cités dans le premier chapitre.

2 - La reforme des mathématiques modernes - 1972

Pour analyser cette période nous nous servirons principalement des textes des programmes et, si nécessaire, d'une collection de manuels de l'époque pour compléter cette analyse.

2.1 - Les classes de Quatrième et Troisième

La réforme des mathématiques modernes vient modifier complètement l'enseignement. Les vecteurs subissent donc aussi des changements. En classe de **Quatrième**, en géométrie plane on définit une direction de droites comme une classe d'équivalence, l'équipollence de bipoints est aussi définie comme étant une relation d'équivalence dont la classe s'appelle vecteur du plan. Les vecteurs sont liés aux translations et on définit aussi la direction d'un vecteur non nul. L'addition vectorielle et le produit par un nombre réel sont introduits ; on peut ainsi parler de combinaison linéaire, comme on le voit dans l'extrait du programme : "Deux vecteurs de directions distinctes étant donnés, tout vecteur en est combinaison linéaire d'une manière et d'une seule. [...]." (programme 1972, p. 17)

De ce fait, deux remarques nous sautent aux yeux : la première est que l'introduction de la notion de combinaison linéaire rend le vecteur opérationnel, en plus d'être une économie

d'écriture pour les transformations. La deuxième est que ce qui figurait en Première dans les années 60, est maintenant contenu d'enseignement de la classe de Quatrième.

En classe de **Troisième**, dans l'item "géométrie dans l'espace", on définit les vecteurs de l'espace, l'équipollence de vecteurs et la somme géométrique de deux vecteurs.

2.2 - Les vecteurs au lycée

En classe de **Seconde,** sections **C** et **T**, on présente les espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$. Nous donnons ci-dessous un extrait du programme de Seconde afin que le lecteur puisse comprendre le changement qui a eu lieu par rapport aux programmes antérieurs. Nous verrons ici très clairement le fait que le vecteur est une classe d'équivalence distincte du bipoint.

> "3. Bipoints [c'est-à-dire couples (A,B) de points du plan]. Équipollence. Vecteurs du plan ; notation $\overrightarrow{AB}$ pour le vecteur dont le bipoint (A,B) est un représentant. Addition des vecteurs ; ils forment un groupe commutatif. Bijection du plan pointé par la donnée d'une origine, sur l'ensemble des vecteurs. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel ; définition d'une droite vectorielle.
> 4. Introduction de la locution "espace vectoriel". Exemples : vecteurs du plan, R^2, R^3, fonctions affines, fonctions en escalier, fonctions affines par intervalles. Combinaison linéaire de vecteurs du plan ; définition de la dépendance linéaire et de l'indépendance linéaire. Plan vectoriel ; définition d'une base d'un plan vectoriel.
> 5. Coordonnées d'un vecteur d'un plan vectoriel dans une base déterminée ; coordonnées de la somme de deux vecteurs, du produit d'un vecteur par un nombre ; condition de dépendance linéaire de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées. Interprétation vectorielle du système de deux équations du premier degré à deux inconnues." (programme 1972, p. 21)

Il est fait mention explicite dans les instructions du programme que : "L'étude de la partie IV[10] a pour but de permettre aux élèves de dégager l'idée de structure d'espace vectoriel à partir de concepts géométriques simples, élaborés depuis la classe de Quatrième." (instructions du programme, 1972, p. 75)

En **Section C**, on rencontre en plus : application linéaire d'un espace vectoriel dans lui-même ou dans un autre ; application affine d'un plan vectoriel dans lui-même ; translations.

Et encore pour **les deux sections** :

> "9. Repère cartésien dans un plan. Coordonnées d'un point. Changement de coordonnées par changement d'origine, la base étant inchangée. Équation cartésienne d'une droite ; équation d'une droite définie par un point et un vecteur directeur, par deux

[10] La rubrique IV est intitulée "Géométrie et espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$."

> points. Interprétation géométrique du signe d'un polynôme du premier degré à deux variables."

Pour la section **C**, en géométrie métrique plane, on parlera de longueur d'un vecteur, de vecteur unitaire et de produit scalaire de deux vecteurs.

Dans les instructions du programme il est explicité que l'étude des vecteurs en classe de Seconde constitue une introduction à l'algèbre linéaire.

Pour mieux cerner le **type de problèmes** proposé aux élèves en classe de Seconde, nous regardons le manuel : Mathématiques, Tome 2, Géométrie, écrit par J.M. Decreton et B. Poret, Editions Gamma, 1973. Les exercices de ce manuel portent sur les vecteurs en tant qu'objets externes à la géométrie, comme les fonctions, les matrices. Il s'agit par exemple de montrer que l'espace des matrices à deux lignes et deux colonnes, muni de l'opération d'addition et de produit par un scalaire est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$. Nous n'avons pas trouvé de problème que l'on peut résoudre en utilisant les vecteurs, autrement dit, dans lesquels les vecteurs fournissent un outil de résolution. Il s'agit d'exercices d'"abstraction" qui sont donnés pour compléter la théorie.

Il n'existe aucun lien avec la géométrie, sauf lors d'un rappel de la classe de Quatrième sur les vecteurs du plan. À cette occasion on fait un lien entre l'équipollence de deux bipoints et le parallélogramme. Le dessin ne prend place que dans ce rappel. Par la suite, on n'a pas trouvé de registre graphique.

En **Première C**, on présente finalement toute la structure vectorielle[11],

> "En Seconde, le programme a prévu une initiation prudente, progressive à la définition d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$; en Première la notion est désormais acquise et les définitions prévues seront données ici sous leur forme générale bien que leur exploitation ultérieure ne concerne que des espaces vectoriels et affines de dimension $\leq$ 3" (Instructions du programme, p. 87).

On présente aussi une application linéaire du plan vectoriel euclidien dans lui-même conservant le produit scalaire. L'espace affine fait partie du programme de Première section C.

En **Terminale,** sections **C et D,** on poursuit l'étude des espaces vectoriels en étendant à deux espaces vectoriels quelconques E et F les notions déjà vues, comme par exemple celle d'application linéaire. Dans la rubrique sur le calcul différentiel, on rencontre les fonctions vectorielles.

[11] La notion de base d'un espace vectoriel est particulièrement travaillée.

2.3 - Conclusion

La période des mathématiques modernes représente une rupture complète avec les années précédentes : toute la théorie des espaces vectoriels est présente dans l'enseignement secondaire. On commence par définir les espaces vectoriels réels et finalement en classe de Terminale, on présente un espace vectoriel quelconque.

En ce qui concerne la présentation de la notion de vecteur, on passe d'un vecteur défini par un morceau de droite, donc géométrique, à un vecteur défini comme une classe d'équivalence à partir de la notion de bipoints, il s'agit ainsi d'un élément d'un espace vectoriel quelconque. En effet, on démarre l'étude des vecteurs en classe Quatrième. On part de la notion de bipoints, et à partir de la classe d'équivalence d'un bipoint, on définit le vecteur du plan. Ensuite en Seconde on passe à un espace vectoriel pour finalement arriver à un vecteur comme étant un élément d'un espace vectoriel quelconque, comme par exemple les matrices.

Comme nous l'avons vu, avant la période des mathématiques modernes les vecteurs servaient plutôt de notation pour la définition des transformations, tandis que pendant la période des mathématiques modernes il s'agit d'étudier les vecteurs en tant qu'objet d'un espace vectoriel. On étudie les définitions et les propriétés d'un espace vectoriel et l'objectif est de préparer à l'étude de l'algèbre linéaire. En effet, les exercices de cette période portent sur les vecteurs en tant qu'objet, il s'agit de montrer des résultats du cours, l'accent est donc mis sur les démonstrations.

3 - Des changements - 1978.

Les programmes en vigueur en 1978, présentent un début de rupture avec ceux qui sont en vigueur depuis 1972. L'accent y est mis sur l'observation et l'expérimentation, l'algébrisation a ici une place secondaire. Le programme de 1978 donne les changements pour le collège et celui de 1982, les changements concernant le lycée.

3.1 - Les classes de Quatrième et Troisième

En **Quatrième**, "L'étude de la géométrie plane est nécessairement alimentée par l'observation et l'expérimentation, lesquelles requièrent l'usage des instruments de dessin [...]" (programme 1978, p. 20). Le contenu d'enseignement est : translation - composition des translations ; vecteur - addition des vecteurs.

Pour mieux comprendre comment on définit le vecteur à cette époque, prenons comme exemple la Collection Pierre Louquet, Mathématique Quatrième, 1979.

Tout d'abord les auteurs définissent une translation sans utiliser les vecteurs, puis dans la suite le vecteur d'une translation est défini. Donnons ci-dessous les deux définitions :

> "La translation définie par le bipoint (A , A') du plan P est l'application t du plan dans lui-même qui, à tout point M du plan P, associe le point M' tel que (M , M') éq. (A , A')." (p. 169)
> "On appelle vecteur d'une translation t l'ensemble des bipoints (M , M') tels que M' = t(M)". (p. 171)

Il existe donc une première définition d'un vecteur mais par la suite on trouve une définition pour l'ensemble des vecteurs du plan qui n'a pas de lien avec la translation. Nous transcrivons ci-dessous ce qu'ils mentionnent pour que le lecteur puisse comprendre le lien qui existe entre ce qui était vu dans cette période, les périodes précédentes et les actuelles.

> "Tout bipoint (A, B) de P définit le vecteur $\overrightarrow{AB}$, ensemble des bipoints (M, N) équipollents à (A, B). L'ensemble des vecteurs ainsi défini est l'*ensemble des vecteurs* de P, il est noté $\mathcal{V}$. Les expressions suivantes sont équivalentes :
> $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur de P ; $\overrightarrow{AB}$ est un élément de $\mathcal{V}$."

Le vecteur est encore défini à partir de bipoints (comme pour la période précédente) mais il ne constitue plus un objet d'étude en soi. Les exercices proposés utilisent les propriétés de l'égalité vectorielle, de l'addition vectorielle et de la définition de la translation ; il s'agit de problèmes de géométrie, il y a toujours une figure géométrique dans l'énoncé qu'elle soit déjà construite ou à construire. Il n'existe plus d'exercice d'abstraction ou pour démontrer des résultats sur la théorie vectorielle, comme était le cas pour la période des mathématiques modernes. Donnons un exemple d'un de ces exercices :

23.4 (page 174)
Soit ABCD un parallélogramme propre. E=m(C,B), F est l'image de C dans la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, G l'image de A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{CB}$.



1° Démontrez que A=m(D,G) et C=m(D,F).
2° Démontrez que E=m(A,F) et que C est l'image de A dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BF}$.
3° Démontrez que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{GB}$.
4° Prouvez que l'on a : B=m(G,F) et (GF)//(AC).

Notons que ce même exercice peut être rencontré dans la période actuelle en classe de Troisième car l'addition vectorielle n'est plus introduite en Quatrième.

En **TROISIÈME**, le contenu à enseigner est le suivant : Propriété de Thalès. Multiplication d'un vecteur par un réel. Coordonnées d'un vecteur dans un repère. Équations d'une droite dans un repère. [...] Orthogonalité de deux vecteurs rapportés à un repère orthonormé.

Bilan : La théorie pour elle même a disparu de l'enseignement. Les vecteurs doivent devenir des outils de résolution de problèmes de géométrie même s'ils sont définis comme dans la période précédente. Si nous examinons les instructions du programme, nous voyons que l'enseignement de la géométrie met l'accent sur l'intuition, comme nous le transcrivons ci-dessous :

> "Les nouveaux programmes, et tout spécialement leur partie géométrique mettent l'accent sur l'utilisation de l'acquis intuitif des élèves. La théorie n'est pas un but en soi, mais un outil pour répondre à des questions que pose la vie : technologie, physique, économie,...
> De ce point de vue l'analyse de situations et la résolution de problèmes jouent un rôle majeur. En particulier l'enseignement de la géométrie est indissociable de la recherche de constructions géométriques." (instructions du programme 1978, p. 30)

Si nous prenons l'esprit général de ce que disaient les instructions d'alors, nous constaterons plus loin que l'esprit actuel des programmes est resté identique à celui introduit en 1978, comme nous le montrerons lors de l'analyse des programmes en vigueur à l'époque actuelle.

3.2 - Les vecteurs au lycée en 1982

3.2.1 - Seconde

Démarrons notre analyse du contenu à enseigner en classe de Seconde par un extrait des instructions du programme qui traduit le grand changement qui a lieu concernant le programme de 1972 :

> "Il y a lieu d'éviter tout exposé artificiel de logique mathématique ; un tel exposé serait vide de sens pour les élèves, précisément par manque de pratique mathématique antérieure ; ..." (programme 1982, p. 26)

Le cours de vecteurs en classe de Seconde se résume à l'étude du produit scalaire dans le plan, comme on le voit dans l'extrait du programme que nous transcrivons ci-dessous :

> "V - Produit scalaire dans le plan.
> L'introduction du produit scalaire par les formes bilinéaires symétriques ne figure pas au programme.
>
> Formule $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ où H est la projection orthogonale de C sur un axe normé portant A et B.
>
> Égalités : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$; ...
>
> Cosinus de l'angle de deux demi-droites. Formule : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \cos\alpha$
> Théorème de Pythagore et sa réciproque.
> Expression du produit scalaire de deux vecteurs et de la distance de deux points dans un repère orthonormal.[...], lignes de niveau." (ibid. p.34)

Pour compléter notre analyse nous prenons encore comme exemple la Collection Pierre Louquet (1981). Dans ce manuel les vecteurs apparaissent dans un chapitre intitulé :"Vecteurs-Transformations". Tout d'abord un rappel est fait des notions vues en classes de Quatrième et Troisième. On reparlera des coordonnées d'un point et d'un vecteur dans un repère ; la notion de base n'y apparaît pas. Pour le repère on utilise la notation suivante $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le produit scalaire apparaît dans une autre partie du manuel consacrée à la géométrie métrique et les exercices sont des exercices pour pratiquer les définitions et propriétés du cours mais aussi et en grand nombre pour résoudre des problèmes de géométrie tels que l'exercice 19.19, page 223, que nous donnons in extenso ci-dessous :

> Soit MNPQ un parallélogramme. Montrez, en utilisant le produit scalaire que, pour que les diagonales soient perpendiculaires, il faut, et il suffit, que MNPQ soit un losange.

Cela veut dire que même si le contenu qui concerne l'enseignement des vecteurs est important, l'esprit du cours a changé par rapport à la période des mathématiques modernes. Ici l'accent est mis sur la résolution de problèmes de géométrie. En effet, on va par exemple parler des propriétés d'alignement et de concours qu'on résout avec les vecteurs (intrinsèquement) dans un repère, comme nous pouvons le voir à partir d'un extrait de ce livre : "Sur quelques exemples simples, nous allons montrer comment le choix judicieux d'un repère du plan permet de démontrer aisément une propriété d'alignement de trois points ou de concours de trois droites." (page 63)

De plus, dans cette période la majorité des exercices proposés pourrait encore l'être de nos jours comme c'est le cas pour l'exercice énoncé ci-dessus et aussi de l'exercice 5.8, page 65 du même manuel, que nous transcrivons ci-dessous :

> Dans les deux cas suivants, on donne quatre points A, B, C et D.
>
> Démontrez que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
> Déduisez-en que ABCD est un parallélogramme.
> 5.8 A(0, 1) ; B(2, 3) ; C(1, 3) ; D(-1, 1).
> 5.9 A(2, -1) ; B(-1, -1) ; C(1, 4)) ; D(4, 2).

3.2.2 - Première S et E

L'objectif de la géométrie plane est l'étude des configurations ; on présente les espaces vectoriels du plan et de l'espace, mais sans procéder à des généralisations pour un ensemble F quelconque.

En géométrie plane, on définit la colinéarité de deux vecteurs, des vecteurs directeurs d'une droite, on introduit la notion de base et celle de repère.

Pour la géométrie dans l'espace, on procède à une extension de la théorie vectorielle à l'espace ; on va parler de bases orthonormales et des produit vectoriel et mixte.

Même si la théorie vectorielle (du plan et de l'espace), est présente dans la classe de Première S et E, on doit faciliter la tâche aux élèves et donner des exemples qui sont plus "faciles" à voir. Pour que le lecteur puisse comprendre l'esprit du programme de 1982, nous en donnons un extrait :

> "Le professeur procédera à un rappel rapide (sans démonstrations) des propriétés des opérations sur les vecteurs du plan. En vue de faciliter la communication, il donnera la définition d'un espace vectoriel et d'une application linéaire, un premier exemple d'application linéaire étant la projection vectorielle.
> Aucune théorie générale des espaces vectoriels et des applications linéaires n'est au programme ; il n'y aura pas lieu de donner d'autres exemples d'espace vectoriel que les ensembles de vecteurs de la droite, du plan, de l'espace.
> L'intuition géométrique sera développée par l'emploi fréquent de figures, concernant aussi bien les ensembles de vecteurs que les ensembles de points." (p. 81)

Rappelons que notre intérêt pour l'ensemble de ce travail est centré sur les premières notions vectorielles et les problèmes proposés à résoudre avec ces notions dans l'enseignement. Ainsi, pour les classes de Première et Terminale nous nous contentons de l'analyse des programmes.

3.2.3 - Terminale S

En Terminale on introduit les fonctions vectorielles, et on pourra appliquer les vecteurs à l'étude des problèmes de physique. C'est finalement en Terminale qu'on introduit l'algèbre linéaire sur des exemples de dimension finie, en s'appuyant sur l'étude du modèle fondamental $\mathbb{R}^n$. On disposera donc de la notion d'espace vectoriel mais il ne s'agit pas de modéliser l'espace affine en général.

Dans le plan et dans l'espace, on définira les applications affines : "*Une application de l'ensemble de vecteurs de l'espace dans lui-même est dite affine quand elle est de la forme* $\vec{v} \mapsto \vec{A} + \varphi(\vec{v})$, *où* φ *est linéaire.*"

3.3 - Conclusion

En conclusion, la grande différence entre le programme de 72 et celui de 82, c'est que pour ce dernier on ne doit pas faire des cours de logique mathématique, mais que l'on doit au contraire s'appuyer sur l'intuition géométrique pour des exemples simples, et expérimenter tout en s'efforçant de justifier les résultats obtenus. Dans la période précédente, on restait à l'intérieur de la théorie qui était développée pour elle-même. Dans la période 82, on part de l'expérience pour motiver la théorie, on se préoccupe donc beaucoup de l'intuition.

Mais il y a tout de même une préoccupation de formalisation, celle qui consiste à passer à un espace vectoriel quelconque et à présenter toute sa structure car il ne faut pas oublier qu'à la fin de l'enseignement secondaire, les élèves doivent connaître la structure des espaces vectoriels de dimension finie. Si on prend un manuel de 1982, comme par exemple Collection N. Dimathème, Mathématiques Première S et E, on voit une très grande influence de la période des mathématiques modernes, même si l'esprit du programme a changé : le vecteur est toujours présenté comme une classe d'équivalence de bipoints. Ensuite, en Terminale, on fait l'extension du vecteur à l'élément de l'espace vectoriel autre que géométrique.

L'étude des configurations a une place centrale dans l'enseignement de géométrie dans le secondaire, et le calcul vectoriel apparaît comme un outil puissant, comme le montre le grand nombre d'exercices consacré à l'étude de propriétés géométriques des configurations. Pour savoir plus précisément quels sont les problèmes qu'on doit résoudre en utilisant les vecteurs, il faudrait procéder à une analyse de manuels, car le programme ne donne pas d'indices. Mais ce qui nous intéresse dans l'étude de cette période ce sont les lignes générales du savoir à enseigner ; cette analyse détaillée sera faite pour la période actuelle.

A partir de cette nouvelle réforme de 1982, des changements ont eu lieu chaque année et finalement en 1985 l'algèbre linéaire disparaît de l'enseignement secondaire et le calcul vectoriel la remplace. Nous n'allons pas faire ici une analyse exhaustive de chaque changement de programme de 1982 à nos jours. Nous passerons tout de suite à la période actuelle pour laquelle nous procéderons à une analyse plus détaillée en essayant de bien saisir le contenu à enseigner et surtout l'esprit du programme concernant l'enseignement des vecteurs.

4 - L'enseignement des vecteurs à l'heure actuelle - 1997.

Nous allons maintenant étudier l'enseignement des vecteurs dans le secondaire tel qu'il est pratiqué à l'heure actuelle ; nous nous intéressons aux cinq années sur lesquelles s'étale le cours de calcul vectoriel. Cela servira à déterminer tout le contenu d'enseignement sur les vecteurs concernant les classes de Quatrième, Troisième, Seconde, Première S et Terminale S. L'analyse des programmes en vigueur permet de savoir ce qu'on a le droit d'enseigner aux élèves ainsi que les interdictions, parfois implicites. Le programme donne le contenu obligatoire, les directions à suivre et l'importance (relative) qui doit être accordée aux concepts et propriétés. Ils sont suivis dans leurs grandes lignes ; il est donc tant aussi important de tenir compte des manuels et de la pratique des enseignants dans leur cours. La lecture des programmes consiste donc en une première approche du savoir à enseigner, qui doit nous fournir la "philosophie" du cours sur les vecteurs.

En revenant sur notre problématique pour l'analyse qui suit, nous essayerons de dégager, en plus des concepts et propriétés vectorielles qu'on présentera aux élèves, les problèmes qu'on leur propose de résoudre avec les vecteurs.

Dans un premier temps nous nous contenterons d'analyser seulement les programmes des cinq dernières années du secondaire, car de nos jours ceux ci nous fournissent déjà des éléments suffisants pour une analyse du contenu à enseigner, ce qui n'était pas le cas pour d'autres périodes, comme nous l'avons vu. Une étude détaillée des manuels courants sera faite dans la suite de notre travail (cf. chapitre B2).

Dans l'analyse qui suit nous donnons quelques extraits des programmes actuels ; le lecteur intéressé par plus détails rencontrera une copie complète des programmes, relativement à l'enseignement de la géométrie, dans les annexes B1.

4.1 - Quatrième

> "Les vecteurs sont introduits "naïvement" par direction, sens et longueur. A toute translation on associe son vecteur. Si, dans une translation, A' est l'image de A et B' celle de B, on écrit : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.[12]"

La rubrique "Transformations" vient avant la rubrique "Vecteurs", ce qui veut dire que la translation peut être définie d'abord sans utiliser la notation vectorielle, et qu'ensuite un lien peut être établi avec les vecteurs. L'objectif de cette rubrique "Transformations" est la construction de l'image d'une figure par une translation ou par une rotation donnée ; cette figure pouvant être un point, une droite, une demi-droite ou encore un cercle.

12 Instructions du programme, 1997, page 51.

Dans le programme, il n'est pas dit clairement si l'égalité vectorielle est définie par le parallélogramme ou par la translation. En tout cas, les instructions explicitent que "*la translation sera reliée au parallélogramme*". Nous pouvons donc supposer que l'égalité de vecteurs sera donnée par le parallélogramme, du point de vue d'une configuration.

Cela dit, un ordre possible d'introduction des concepts peut être le suivant :

On définit une translation d'abord sans utiliser les vecteurs et après on l'associe à un (et un seul) vecteur. Puis on définit un vecteur à partir de deux points, par direction, sens et longueur. Finalement on présente l'égalité vectorielle, par le parallélogramme ou à partir d'une translation : deux vecteurs sont égaux s'ils définissent la même translation.

Un autre ordre possible peut être :

Tout d'abord on définit un vecteur par direction, sens et longueur ; et c'est après qu'on définit une translation en utilisant la notation vectorielle. Pour l'égalité les choses se passent alors comme dans le cas précédent, c'est-à-dire qu'elle peut être définie à partir d'une translation ou via le parallélogramme.

De toutes manières, dans un deuxième temps nous pensons que ces définitions et résultats seront tous entremêlés et que l'accent sera surtout mis sur les configurations.

Selon les instructions du programme, la translation doit apparaître comme une action sur une figure. Aucun commentaire n'est fait dans les programmes sur les propriétés des transformations à énoncer. L'importance qui doit être accordée à ces propriétés et le rôle des vecteurs à ce moment, est laissé à la charge des auteurs de manuels et des enseignants.

En ce qui concerne les vecteurs, les instructions du programme nous amènent a nous poser les questions suivantes auxquelles nous essayerons de répondre lors de l'analyse des manuels que nous mèneront dans le chapitre B2 :

1) Comment définir la direction, le sens et la longueur d'un vecteur ?

Le programme ne donne aucune instruction à propos des concepts de direction et de sens : s'agit-il de propriétés géométriques énoncées comme telles ou prendra-t-on ces concepts tels qu'ils sont traités par le langage courant ? Nous faisons l'hypothèse que cela sera fait en prenant le sens courant de ces mots (les images familières) et les représentations par des dessins. La notion de parallélisme est déjà connue des élèves, il ne faudrait donc qu'introduire une nouvelle notion, celle de sens. Pourtant on constate que ces notions sont souvent confondues dans le langage courant. Par exemple, on dit autoroute A48 direction Lyon ou autoroute A48 direction Grenoble. En fait, l'autoroute est la même et ce qu'on appelle ici direction signifie le sens.

Cette confusion entre direction et sens est légitimée par le dictionnaire. En effet, en cherchant la signification du mot direction, on retrouve comme synonyme "orientation" et les exemples d'utilisation dans des phrases donnent bien l'idée de la double signification, ce qui

est d'ailleurs reconnue comme illégitime du point de vue scientifique, comme on le voit dans cet extrait du dictionnaire (Le nouveau petit Robert, 1994) :

> "[...] *Quelle direction a-t-il prise* ? [...] *Il retourne sur ses pas. Il reprend la direction de la rive gauche*. Dans cette acception, direction signifie soit direction et sens, soit sens (la direction nord-sud) ; dans la langue scientifique cet emploi est abusif".

Pour sens on retrouve comme synonyme "direction :

> "La ville et l'université avaient chacune leur grande rue particulière qui courait dans le sens de leur longueur. [...] Tailler dans le sens du bois, en suivant les fibres."

Mais on retrouve aussi une utilisation du mot sens tel qu'il existe dans les mathématiques :

> "*Caresser un chat dans le sens du poil* [...] Ordre dans lequel un mobile parcourt une série de points ; mouvement orienté. Chaque direction a deux sens opposés ; si l'un est pris pour sens positif, l'autre est de sens négatif."

Cela nous permet de faire l'hypothèse selon laquelle, quand on définit un vecteur par direction, sens et longueur, il peut y avoir difficultés en ce qui concerne les deux premières notions. Notre hypothèse (à être vérifiée lors de l'analyse de manuels) est donc que la notion de vecteur est construite à l'aide de notions familières, explicitement ou implicitement.

2) Quel est le sens de l'égalité ici ? La classe d'équivalence se trouve-t-elle implicitement dans l'égalité de vecteurs ?

Le programme de Quatrième ne comporte donc qu'une introduction à l'étude des vecteurs et, pour l'instant, il semble qu'il ne s'agisse que d'une familiarisation avec les toutes premières notions qui, en résumé, sont les suivantes :

- Vecteur : fonction de deux points, caractérisée par des propriétés géométriques : direction, sens et longueur ; le registre graphique pour le représenter est un dessin d'un segment orienté.
- Égalité vectorielle : définie par le parallélogramme ou par la translation.

Si nous essayons maintenant de répondre à la question : "Quel est cet objet qui est transposé ? ", nous pouvons dire que cet objet qui est introduit en Quatrième de notation $\overrightarrow{AB}$ est un objet qui est en principe "vectoriel" car il y a un langage qui est le même que celui qu'on utilisera quand on parlera d'espace vectoriel mais cet objet est loin d'être celui qui sera appelé vecteur à l'université. C'est pourquoi nous disons que le vecteur vu en Quatrième a une étiquette vectorielle mais il s'agit en fait d'un objet géométrique. L'absence de la notation

vectorielle $\vec{u}$ dans les programmes et manuels du collège renforce le choix de l'approche géométrique plutôt que vectorielle. De plus, le fait d'utiliser la notation $\overrightarrow{AB}$, nous éloigne du savoir savant mais il est plus près d'une représentation possible chez les élèves : à chaque fois qu'il faut opérer avec un vecteur on apprend aux élèves à passer au vecteur $\overrightarrow{AB}$, comme nous le montrerons dans les analyses qui suivent (chapitre B2).

D'après la lecture du programme, nous pouvons conclure que l'enseignement des vecteurs se base sur le registre graphique (surtout le parallélogramme) et le registre de l'écriture symbolique géométrique et vectoriel. Seule une analyse des manuels nous fournira assez de données sur l'utilisation précise qui en est faite dans l'enseignement.

4.2 - Troisième

> "Translation et vecteurs. Égalité vectorielle. Dans le plan rapporté à un repère, effet d'un déplacement par translation sur les coordonnées d'un point ; coordonnées d'un vecteur. Addition vectorielle." (p. 84)

On part de l'expérience acquise en Quatrième mais cette fois on travaille dans un repère, c'est à dire avec les coordonnées d'un vecteur. Dans les instructions du programme, l'égalité de vecteurs est explicitement reliée au parallélogramme et l'addition de vecteurs est définie en utilisant aussi le parallélogramme (reliée à la composition de deux translations). La présentation des vecteurs ne comporte pas de rupture avec le programme de Quatrième : le vecteur reste géométrique.

> "Les travaux partiront de l'expérience acquise en Quatrième. Il s'agit essentiellement, sur des situations simples, de familiariser les élèves avec le maniement des vecteurs." (p. 84)

L'addition vectorielle, de la même façon que l'égalité de vecteurs, nécessite la notion de classe d'équivalence. Que se passe-t-il en Troisième, lors de la définition et de l'application de l'addition vectorielle, dans la mesure où cette opération met en jeu l'égalité de vecteurs ? Cette question se joint à celles auxquelles nous tenterons de répondre au cours de l'analyse des manuels.

En Troisième, la notation $\overrightarrow{AB}$ devient pour la première fois opérationnelle, grâce à l'égalité de Chasles $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$; le vecteur se distingue d'un segment car avec ce dernier on ne pouvait pas opérer de cette façon. L'égalité vectorielle devient elle aussi opérationnelle pour définir et travailler l'addition vectorielle. L'introduction du registre vectoriel représente donc une économie du point de vue opérationnel.

En Troisième, le vecteur est vu comme un objet d'étude : on en étudie quelques propriétés et opérations. Mais ce rôle d'objet n'a pas encore le caractère d'un objet vectoriel défini dans une structure vectorielle. En même temps, aucune compétence n'est exigée des élèves, comme le montrent les instructions du programme : "...aucune compétence sur le calcul vectoriel n'est exigible des élèves."

Si en Quatrième les vecteurs pouvaient jouer un rôle d'outil pour la formulation de la définition des translations, en Troisième ce sont les translations qui jouent le rôle d'outil pour les vecteurs en servant à définir l'addition vectorielle.

Dans le programme on ne mentionne pas le produit d'un vecteur par un réel et les instructions du programme rappellent qu'il ne faut pas introduire cette opération : "Le produit d'un vecteur par un réel n'est pas au programme". Cela peut avoir pour but de rappeler que la théorie vectorielle n'est pas au programme de Troisième et qu'on ne traite que les vecteurs du type $\overrightarrow{AB}$ (géométrique) . La définition du produit par un réel permettant l'introduction de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, car on aurait ainsi défini les deux opérations qui forment la "base" d'un espace vectoriel.

Pendant la suite de notre analyse, nos questions suivent le même fil conducteur que celui de Quatrième. Nous étudions ces objets qui sont transposés : le vecteur et l'égalité vectorielle, vus en Quatrième et auxquels en Troisième on ajoute l'opération somme et les coordonnées d'un vecteur. On peut alors se poser les questions suivantes :

• Quels changements peuvent être soulevés quand les coordonnées d'un vecteur sont introduites ? Les coordonnées fonctionnent-elles plutôt comme un nouvel outil pour résoudre des problèmes sur les vecteurs ?

Le travail qui est développé en utilisant les coordonnées d'un vecteur, cache la notion de base (on y utilise la base naturelle). Et ce même travail renforce l'idée d'un vecteur géométrique qui a un "comportement" identique à celui d'un segment en géométrie analytique. Autrement dit, aux yeux des élèves, les coordonnées d'un point et les coordonnées d'un vecteur peuvent être confondues du point de vue de leurs caractéristiques (hypothèse à vérifier dans le chapitre D).

Nous faisons donc l'hypothèse que l'introduction du repère va renforcer le caractère géométrique d'un vecteur, car les coordonnées renforcent l'idée de points et segments. Les coordonnées d'un vecteur doivent, à notre avis, avoir chez les élèves le même "comportement" que les coordonnées d'un point (si on change la position du point, ses coordonnées changent aussi, ne serait-il pas la même chose avec les coordonnées d'un vecteur?). Ce rapprochement entre les vecteurs et la géométrie analytique, est aussi l'un des points soulevé par Dorier (1997b) :

> "Par ailleurs, la représentation par les coordonnées est source de nouvelles difficultés dans la confusion entre segment orienté et vecteur : par exemple, certains élèves confondent les coordonnées du vecteur avec celles de l'extrémité d'un représentant." (p. 84).

Nous reviendrons sur ce point lors de l'analyse de Seconde, et chercherons à repérer de façon précise cette confusion chez les élèves. Ainsi, lors du dispositif expérimental réalisé en classe de Seconde (cf. chapitre D), nous chercherons à répondre aux questions suivantes :

* Le travail avec les coordonnées d'un point et les coordonnés d'un vecteur ne renforce-t-il pas le caractère géométrique du vecteur ?

* Les élèves font-ils la distinction entre les coordonnées d'un point A et les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$? Comprennent-ils les liens qui existent entre les deux ?

• L'addition vectorielle, de la même façon que l'égalité de vecteurs, doit faire appel aux classes d'équivalence. En Quatrième, cela conduit les auteurs de manuels à différents choix (cf. chapitre B2). Que se passe-t-il en Troisième, lors de la définition et de l'application de l'addition vectorielle, si on considère que cette opération pose les mêmes difficultés que la définition d'égalité de vecteurs ? Seule une analyse des manuels peut répondre à cette question.

4.3 - Seconde[13]

En Seconde, l'étude des vecteurs est poursuivie mais sans axiomatisation ; cette étude est encore liée à la géométrie des figures. Ci-dessous les deux objectifs du programme concernant l'étude de la géométrie :

> "- Poursuivre **conjointement** l'étude, déjà engagée au collège, **des configurations usuelles du plan et de l'espace**.
> - Mettre en place et exploiter quelques éléments de **calcul vectoriel dans le plan**, en relation avec l'étude des configurations et des transformations et avec l'enseignement de la physique." (programme 1997, p. 26)

Le calcul vectoriel y figure comme l'un des nouveaux outils de résolution de problèmes sur les configurations et les transformations. Le point de vue adopté est le même que celui du Collège ; le vecteur étant défini par direction, sens et longueur. Ce qui change est la **notation $\vec{u}$** pour désigner un vecteur. Dorénavant les deux notations coexisteront, et cela nous conduit à poser la question de savoir ce qui change avec l'introduction de cette nouvelle notation : à quoi sert ce vecteur $\vec{u}$ ou cette nouvelle notation ?

[13] Une copie du programme de Seconde est donnée dans l'annexe B1.

Tout d'abord, l'analyse du programme montre que ce vecteur $\vec{u}$ est, en quelque sorte, le même vecteur $\overrightarrow{AB}$ qu'on avait défini en Quatrième, à savoir, un objet géométrique, comme nous pouvons le voir à partir de cet extrait du programme : "Les vecteurs ont été introduits au collège (par direction, sens et longueur) ; on n'y reviendra pas et on conservera le même point de vue pour étudier les opérations sur les vecteurs (le programme en troisième ne comporte qu'une initiation à la somme)" (programme Seconde 1996; p. 27). Nous pouvons ainsi dire que $\vec{u}$ est un vecteur qui ne dépend plus des points extrémités mais qui ne doit pas changer au niveau conceptuel par rapport au vecteur géométrique du collège. Dans notre analyse de manuels nous examinerons ces deux notations en essayant d'en dégager des différences conceptuelles qui pourraient exister entre les deux.

Cette notation $\vec{u}$ adoptée à partir de la Seconde, pourrait induire l'idée d'un vecteur qui serait un futur candidat à entrer dans une structure d'espace vectoriel. Cependant l'introduction de cette notation a, en fait, un caractère d'économie d'écriture pour les définitions, l'énoncé des propriétés et même pour les exercices (problèmes) à résoudre, comme par exemple pour énoncer la propriété commutative de l'addition : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$. Mais il y a aussi l'idée de dégager le vecteur de ses caractéristiques géométriques et de passer implicitement à un vecteur ayant quelques caractéristiques "vectorielles", c'est-à-dire sans lien avec les points donnés du plan. Autrement dit, il s'agit de commencer à mettre en place la géométrie vectorielle.

Dans les analyses des années antérieures, nous cherchions à examiner avec attention le traitement accordé à l'égalité vectorielle parce que le passage aux classes d'équivalence y est nécessaire. Et, une fois en classe de Seconde, nous croyons pouvoir mieux analyser ce passage. Dans le programme on trouve : "interprétation géométrique de l'égalité $\vec{u} = \vec{v}$", ce qui induit l'idée selon laquelle $\vec{u}$ n'est pas une classe d'équivalence (puisqu'on ne définit pas l'égalité de classes d'équivalence), mais un représentant variable d'un ensemble de vecteurs égaux. Autrement dit, $\vec{u}$ doit être travaillé comme un représentant d'une classe d'équivalence. Il nous faut donc regarder dans les manuels quelle est la façon de travailler cette notion aussi bien dans le cours que dans les exercices.

L'examen des manuels permettra de plus de repérer comment se fait le passage du vecteur $\overrightarrow{AB}$ au vecteur $\vec{u}$.

En Seconde, un rappel est fait sur l'opération d'addition introduite en Troisième, en prenant maintenant le vecteur $\vec{u}$ à la place du vecteur de notation géométrique $\overrightarrow{AB}$ vu au collège. "Les élèves doivent connaître et savoir utiliser les relations entre le parallélogramme, la translation, l'égalité et l'addition de vecteurs, entre l'opposé et la symétrie centrale". Les

vecteurs, ainsi que leurs propriétés jouent un rôle d'objet lorsqu'on les définit : on étudie les opérations et leurs propriétés et leurs représentation géométrique. Mais l'accent est mis sur leur rôle d'outil pour résoudre des problèmes de géométrie. En effet, les commentaires du programme "pour préciser le sens et les limites à donner à certaines questions", parlent de l'utilisation des vecteurs pour les problèmes d'alignement de trois points (relation entre points alignés et vecteurs colinéaires) et de parallélisme de droites. Cela est possible avec la nouvelle opération introduite, à savoir la multiplication d'un vecteur par un réel. Elle permet aussi de donner la caractérisation vectorielle d'une droite qui, désormais, peut être définie par deux points ou par un point et un vecteur directeur. On peut ainsi procéder à la détermination de droites parallèles (vecteurs directeurs colinéaires) et à la détermination de droites perpendiculaires (vecteurs directeurs orthogonaux). Concernant l'introduction de cette nouvelle opération, nous sommes particulièrement intéressés par la façon dont elle est traitée dans les manuels : y a-t-il des changements par rapport à l'introduction de la première opération sur les vecteurs, à savoir l'addition en classe de Troisième ? Nous renvoyons cette question à l'analyse de manuels (chapitre B2).

Finalement, on peut dire qu'en classe de Seconde, les vecteurs peuvent être utilisés pour la première fois comme un outil de résolution des problèmes de géométrie ; cela représente un changement par rapport à la Troisième. Au Collège, il s'agissait plutôt de l'introduction d'un nouvel outil pour introduire les transformations ; les problèmes portant sur l'effet de l'application d'une transformation sur une figure. Autrement dit, l'analyse des programmes paraît montrer qu'il n'y a pas au collège de problèmes où les vecteurs fonctionnent comme un outil de résolution ; les vecteurs constituent simplement un outil pour l'écriture d'une transformation. Cela est à confirmer lors de notre l'analyse des manuels.

À propos de la notion de base qui figure au programme - puisque les espaces vectoriels en tant que théorie ne font pas partie du programme de Seconde - nous nous posons les questions suivantes :

- Quel est cet objet qui est transposé ? Quel est le sens de base donné ici ? Comment présenter cette notion si, ni la notion de combinaison linéaire ni celle d'indépendance linéaire ne sont disponibles ? De plus, quels aspects de cette notion serviront dans la résolution de problèmes ?

La géométrie analytique et la géométrie vectorielle

Les notions de repère et coordonnées d'un point ont été enseignées au Collège et en Seconde, où on définit le couple base/coordonnées d'un vecteur. Le programme parle alors en Troisième de coordonnées d'un vecteur dans une base et de coordonnées d'un point dans un repère. Cela permet d'établir le lien entre la géométrie vectorielle et la géométrie analytique

en procédant, par exemple, à la caractérisation vectorielle d'une droite et en donnant aussi la relation d'orthogonalité de deux droites par les coefficients directeurs, vue en Troisième. En revanche la notion de base ne comporte pas une étude en soi, c'est-à-dire qu'on ne va pas par exemple donner des résultats tels que "tout vecteur peut se décomposer en deux vecteurs non-colinéaires", contrairement au programme de 1960.

Pour l'analyse des manuels nous sommes aussi intéressée à examiner la distinction et le lien que font les auteurs entre la notion de base et celle de repère.

En ce qui concerne la définition de norme d'un vecteur nous la considérons davantage comme une nouvelle notation que comme un nouvel objet. En effet une fois que le vecteur est défini comme un segment orienté, sa norme n'est que la longueur de ce segment. En fait, la notion de norme d'un vecteur va fonctionner comme un outil au moment de définir, par exemple, les vecteurs unitaires et qui sont utiles au moment de définir une base orthonormale.

4.4 - Première S

En Première S, le calcul vectoriel doit constituer un outil pour résoudre des problèmes de configurations du plan et de l'espace. A ce propos il est explicité dans le programme que "En ce qui concerne les configurations du plan et de l'espace, l'objectif principal est d'entraîner les élèves à résoudre des problèmes d'alignement, de concours, de parallélisme, d'orthogonalité ..." (programme 1997, p. 114). Cela veut dire qu'il y a continuité avec la classe de Seconde ; les vecteurs sont vus avec l'objectif de résoudre des problèmes de géométrie.

La seule préoccupation explicite du programme concernant la notion de vecteur, est que "la **traduction vectorielle des propriétés des configurations et des transformations** joue un rôle essentiel, aussi bien pour la compréhension de la notion de vecteur que pour la résolution des problèmes de géométrie." (ibid., p. 114) Autrement dit, le vecteur continue à être l'objet géométrique basé sur des propriétés géométriques qu'on a connu en Quatrième et il s'agit toujours de faire des traductions d'un registre à un autre.

Les nouveaux concepts introduits en classe de Première sont :

- le calcul barycentrique pour l'étude de configurations et sur des exemples numériques, mais les exercices de recherche et de construction de barycentres ne doivent pas être multipliés.
- et le produit scalaire, dont l'introduction doit être appuyée sur la caractérisation de l'orthogonalité de deux vecteurs, $\vec{u}$ et $\vec{v}$, vue en Seconde : $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$, ou encore xx'+yy'=0. Le produit scalaire est aussi utilisé pour l'étude des lignes de niveau.

On poursuit donc l'étude du calcul vectoriel dans le plan en relation avec la géométrie et, aussi, avec la géométrie analytique comme par exemple, lors de la caractérisation d'une droite par un vecteur normal ou lors de l'écriture de l'équation d'un cercle de centre et de rayon donnés. L'emploi de repères est limité à des repères orthonormaux et il apparaît comme un outil efficace, comme l'explicitent les instructions du programme : "le recours à un tel repère n'est qu'un outil parmi d'autres : il relève de seules considérations de commodité et d'efficacité".

L'extension du calcul vectoriel à l'espace est admise, mais sans aucune construction théorique et ce pour résoudre des problèmes tels que parallélisme de droite et de plans. Il est explicité que "le produit scalaire dans l'espace est hors programme."

Les vecteurs seront encore utilisés pour les notations vectorielles des transformations ainsi que pour l'étude des angles orientés.

En conclusion, en Première S on introduit le barycentre et le produit scalaire qui constituent de nouveaux outils pour résoudre des problèmes de géométrie (et de physique) ; autrement dit, il n'y a pas de changement par rapport à la Seconde en ce qui concerne les objectifs d'enseignement des vecteurs.

4.5 -Terminale S

En dernière année du lycée le calcul vectoriel doit servir, comme auparavant, à résoudre des problèmes de géométrie, comme le montre cet extrait du programme de 1997 :

> "**En géométrie**, il est essentiel de développer une **vision géométrique des problèmes** dans les différentes parties du programme, à travers l'étude des **configurations** usuelles du plan et de l'espace, l'emploi de représentations graphiques et de tracé des courbes planes. Le **calcul vectoriel** et ses interventions constituent un autre objectif important." (p. 122)

Tous les concepts vus dans le plan sont ici vus dans l'espace et on introduit ainsi le produit scalaire dans l'espace et le produit vectoriel. Comme le précisent les instructions du programme, le calcul vectoriel est toujours lié à la géométrie : il s'agit de problèmes d'alignement, de parallélisme, d'orthogonalité de droites ou d'une droite et d'un plan, ...

Les caractérisations vectorielles d'une droite et d'un plan font aussi partie du programme. Le produit vectoriel doit être utilisé pour calculer l'aire du parallélogramme ou d'un triangle et pour déterminer un vecteur normal à un plan. Pour l'enseignement de "Spécialité", on étudiera les lignes de niveau et encore quelques notions sur les courbes paramétrées du plan, mais l'étude des fonctions vectorielles est hors programme.

Le programme de Terminale S actuellement en vigueur a subi quelques modifications par rapport à celui de **1991**. En géométrie plane, les transformations géométriques étaient alors introduites avec des notations vectorielles et on pouvait exploiter les transformations vectorielles associées aux isométries, aux déplacements et même aux similitudes directes. Il était possible aussi de travailler les applications linéaires, ce qui nous amène à nous poser quelques questions sur un pont possible avec l'algèbre linéaire, ou encore sur l'opportunité de faire le pont affine/vectoriel. La réponse est explicitée dans le programme 97 : "A propos de l'étude des projections et des transformations, la linéarité des applications vectorielles associées doit être mise en évidence et exploitée, mais l'étude systématique des applications linéaires, et a fortiori des applications affines, n'est pas au programme." Ce changement ferme, à notre avis l'une des dernières ouvertures possibles pour un lien entre l'affine et le vectoriel dans le secondaire. Dans le programme de 1991, on explicitait encore que "la notion générale d'espace vectoriel est hors programme", ce qui n'est plus le cas pour le programme actuel : il est clair qu'il ne s'agit que de calcul vectoriel et il n'est même plus besoin d'en faire mention explicitement.

4.6 - Conclusion

De nos jours il n'existe aucun indice de la présence d'espace vectoriel dans l'enseignement secondaire, comme c'était le cas autrefois. Actuellement les vecteurs sont présentés de façon purement géométrique, et les instructions des programmes mettent l'accent sur l'usage qui doit en être fait : les vecteurs doivent apparaître comme un nouvel outil pour résoudre des problèmes de géométrie.

Il est clair qu'une étude plus fine devient nécessaire pour bien saisir la forme de présentation des notions vectorielles ainsi que l'usage qui est fait des vecteurs pour les problèmes ; par exemple, en ce qui concerne les registres de représentation sémiotiques utilisés, la seule analyse des programmes ne fournit pas des données qui permettent de conclure car ceux ci ne donnent que les lignes générales à traiter. Concernant encore les types de problèmes posés aux élèves et l'usage spécifique des vecteurs, une analyse détaillée des manuels apparaît comme nécessaire pour bien saisir la fonction des vecteurs dans l'enseignement secondaire et pour pouvoir procéder à un classement des situations-problèmes présentes dans l'enseignement secondaire.

5 - Changements de programme prévus

Nous avons analysé le programme en vigueur pour l'année 97/98 ; des changements sont prévus pour la rentrée 98/99 ; les vecteurs doivent disparaître de la classe de Quatrième pour être introduits en classe de Troisième. Au moment de la rédaction de cette thèse, nous avons eu accès au texte du programme officiel pour la rentrée 98/99 de classe de Quatrième et au texte du projet du programme pour la classe de Troisième. Dans le projet, il est explicite que l'objectif des vecteurs en Troisième est de "préparer l'outil vectoriel qui sera explicité au lycée". La translation sera définie en Quatrième indépendamment des vecteurs et elle sera liée au parallélogramme ; une fois en classe de Troisième on fera le lien entre les translations et les vecteurs (par le parallélogramme). Le contenu de Troisième concernant les vecteurs sera : Vecteurs et translations, écriture vectorielle, coordonnées d'un vecteur dans le plan muni d'un repère, composition de deux translations, somme de deux vecteurs. La différence entre le contenu vu au collège actuellement et celui qui sera mis en place est que la notation $\vec{u}$ sera présente dès le début du cours sur les vecteurs. Autrement dit, on parlera de représentant d'un vecteur dès la classe de Troisième, tandis que pour le moment cela n'apparaît qu'en classe de Seconde. Dans le projet, il est explicitement dit qu'on fera remarquer aux élèves l'indépendance des coordonnées d'un vecteur par rapport au représentant choisi.

Du point de vue de l'utilisation des vecteurs pour résoudre des problèmes de géométrie, il n'y a pas vraiment de changements entre le programme actuel et celui à venir. En effet, même s'il est annoncé actuellement qu'il s'agit d'un nouvel outil de résolution de problèmes de géométrie au collège, cet usage semble être plutôt artificiel. D'après notre analyse des programmes, nous pensons pouvoir dire que c'est en classe de Seconde que les vecteurs commencent à être utilisés de façon plus effective et efficace. Cela reste à vérifier plus finement lors de notre analyse des manuels dans le chapitre qui suit (cf. chapitre B2).

6 - Conclusion du chapitre

L'analyse des programmes et des manuels de ces six dernières décennies, nous a permis de comprendre quelques aspects de l'évolution de l'enseignement des vecteurs dans le secondaire, dont nous retenons ici les points principaux. Dans les années 30-50 le vecteur était défini comme un morceau de droite et servait plutôt aux définitions de la translation et de l'homothétie. Vers les années 60 on observe une extension du contenu à enseigner, la théorie vectorielle commence à gagner de l'espace dans l'enseignement secondaire. Dans les années 70 toute l'axiomatique des espaces vectoriels est présentée dans le secondaire, le vecteur étant une classe d'équivalence de bipoints : il s'agit de la période des mathématiques modernes. En 1978 des changements sont mis en place, l'accent est mis sur l'enseignement de la géométrie, mais on utilise toujours le bipoint pour définir le vecteur. Finalement de nos jours le vecteur est introduit au collège par des propriétés géométriques, direction-sens-longueur. En classe de Seconde on introduit le vecteur $\vec{u}$ et le vecteur est utilisé en tant qu'outil de résolution de problèmes et ce pour des problèmes de la géométrie des configurations et de géométrie analytique. Il n'y a plus d'indice de la présence explicite d'espace vectoriel dans l'enseignement secondaire.

Notre étude de l'évolution de l'enseignement des vecteurs dans le secondaire a montré que contrairement à ce qu'on peut penser, les changements qui se sont effectués depuis les années 30 ont été faits d'une façon plus au moins continue. Il n'a pas existé de rupture très brusque d'une période à l'autre. Il est vrai qu'avant et après la période des mathématiques modernes c'est le calcul vectoriel qui est présent dans l'enseignement secondaire et pendant les mathématiques modernes on retrouve l'algèbre linéaire. Mais le passage à une nouvelle période a été fait de façon à toujours conserver des éléments de la période ancienne. La période entre les années 30 et les années 60, en est un bon exemple. En effet, la définition adoptée pour un vecteur est toujours la même mais l'importance accordé à la théorie des vecteurs est beaucoup plus grande vers les années 60. Il y a des indices de la réforme qui se mettra en place dans les années 70. Prenons encore le passage des mathématiques modernes aux programmes de 78. On a gardé la même définition pour un vecteur et ce qui a changé était l'esprit du programme, cela se révèle surtout par une analyse des types d'exercices proposés à chaque époque. Pendant la période des mathématiques modernes les exercices portaient sur la théorie, il s'agissait d'exercices de démonstration. En 78, on ne trouve plus ce type d'exercice : on commence à introduire des exercices de géométrie à résoudre en utilisant les vecteurs. Par la suite, la partie cours a peu à peu subi des changements jusqu'à devenir ce que l'on retrouve aujourd'hui, c'est-à-dire qu'on ne parle plus du vecteur comme

une classe d'équivalence de bipoints. En effet, de nos jours le vecteur est défini par les propriétés géométriques de direction, sens et longueur.

Actuellement la notion de classe d'équivalence ne fait pas partie des objets à enseigner mais l'idée est présente d'une façon implicite par exemple quand on parle de l'égalité vectorielle et surtout du vecteur $\vec{u}$, tandis que dans les années 30-50 on parlait d'un morceau de droite et l'idée de classe d'équivalence dans ce cas, était beaucoup plus éloignée que maintenant.

Concernant la fonction des vecteurs dans l'enseignement secondaire tout au long de ces années, les vecteurs sont passés d'une aide à l'écriture de transformations, la translation et l'homothétie, à un objet d'étude à part entière et finalement à un outil pour la résolution de problèmes de géométrie. Il est vrai qu'actuellement les vecteurs servent encore aussi à la définition de la translation et de l'homothétie, comme c'était le cas dans les années 40, par exemple. La différence est que de nos jours l'étude des transformations ne représente pas une fin en soi, mais elle a comme objectif l'étude des configurations, autrement dit, elle sert à l'étude des problèmes de géométrie.

Un autre point qui a retenu notre attention dans l'analyse que nous venons de faire, concerne la notion de décomposition d'un vecteur dans une base. Ce travail, y compris le bon choix d'une base, nous paraît fondamental pour résoudre certains exercices de configuration, comme par exemple montrer que trois points sont alignés. En effet, une meilleure réussite dans ce type d'exercices est forcément liée au choix de la base sur laquelle on va décomposer les vecteurs de la configuration. Cette notion a été objet d'enseignement dans les années 60 ; à cette occasion elle était utilisée pour résoudre des problèmes de géométrie, comme nous l'avons montré. Pendant la réforme des mathématiques modernes, elle est présente mais en tant que théorie et non pour résoudre des problèmes. Actuellement, on présente la notion de base sans la définir et la décomposition d'un vecteur dans une base n'est pas clairement un objet d'enseignement. Par ailleurs il n'existe aucun commentaire dans les programmes sur le résultat selon lequel toute décomposition dans une base est unique, ce qui faisait partie du contenu à enseigner en 60. Dans l'analyse de notre dispositif expérimental, chapitre C, nous montrerons que cette absence est l'une des responsables des difficultés des élèves lors de la résolution d'exercices.

L'analyse des programmes nous a donc fourni un premier aperçu de l'enseignement (du savoir à enseigner). Dans le chapitre B2 sur l'analyse des manuels, cette étude sera détaillée, approfondie et élargie. L'un de nos centres d'intérêt repose sur la fonction des vecteurs en tant qu'outil de résolution des problèmes de géométrie : nous voulons procéder à une classification des types de problèmes proposés aux élèves autour de la notion de vecteur.

CHAPITRE B2

ANALYSE DES MANUELS

Ce chapitre a pour objectif d'étudier le savoir à enseigner relatif à la notion de vecteur dans les trois premières années de l'enseignement secondaire tel qu'il est présenté dans des manuels. Nous utiliserons les manuels les plus répandus de l'enseignement à l'heure actuelle pour analyser la présentation de ces notions dans ces manuels, les propriétés et registres de représentation sémiotiques mis en jeu, ainsi que les types de problèmes proposés aux élèves pour lesquels les vecteurs constituent un outil de résolution possible. Enfin nous caractériserons les types des problèmes proposés dans l'enseignement par des actions ou compétences exigibles des élèves.

Cette étude doit ainsi d'une part analyser les problèmes pour lesquels les vecteurs sont présentés dans les manuels en tant qu'outil de résolution (quelques uns de ces problèmes seront expérimentés auprès d'élèves lors du chapitre C), et d'autre part servir de point de départ à la modélisation des difficultés des élèves lors de l'apprentissage de la notion de vecteur, ce qui sera fait dans le chapitre D.

1 - Introduction et méthodologie pour l'analyse

Lors de l'analyse des programmes en vigueur, nous nous sommes posée quelques questions sur le savoir à enseigner autour de la notion de vecteur ; les programmes ne sont pas clairs, par exemple, sur la manière dont on doit introduire la notation vectorielle $\overrightarrow{AB}$, ou sur la façon de présenter l'égalité vectorielle. Une analyse systématique de manuels sera mise en place pour chercher à répondre aux questions posées lors du chapitre consacré à la problématique du travail (cf. chapitre A), et pour mettre ainsi à l'épreuve notre première hypothèse de recherche, dont nous rappelons l'énoncé ci-dessous :

HR1 : L'enseignement des vecteurs dans le secondaire repose sur l'aller-retour entre les différents types de registres. A partir de la Seconde ces aller-retours sont liés à des problèmes à résoudre.

Pour valider cette hypothèse nous chercherons essentiellement à répondre aux questions suivantes :

• Quels sont les différents registres que l'on fait travailler aux élèves ? Quel est le rôle des différents registres ? Quels changements entre registres leur apprend-on à pratiquer ? A quoi servent ces changements de registres ? Dans les manuels, quelle est l'articulation entre les différents registres et les types de problèmes ?

Concernant la fonction des vecteurs dans l'enseignement secondaire nous chercherons à répondre aux questions suivantes :

• Quels sont les types de problèmes proposés aux élèves et pour lesquels on attend qu'ils utilisent les vecteurs en tant qu'outil de résolution ? Quelles définitions et propriétés vectorielles doivent être utilisées pour résoudre ces problèmes ?

Comme nous l'avons précisé dans notre problématique, notre étude est centrée sur les trois premières années de l'enseignement secondaire consacrées aux vecteurs, c'est-à-dire les classes de Quatrième, Troisième et Seconde.

1.1 - Le choix des manuels

Pour être le moins partiel possible dans notre analyse, nous n'allons pas nous restreindre à un seul manuel par classe. Nous pourrons ainsi analyser des éventuelles différences entre les manuels, ce qui peut nous permettre, entre autres, de comprendre les raisons des choix des auteurs. Le choix des manuels à analyser s'est effectué à partir de discussions informelles avec quelques enseignants de collège et lycée.

Pour l'analyse des classes de Quatrième et Troisième, nous avons choisi trois manuels parmi les plus répandus dans l'enseignement : Collection Strasbourg, Collection Hachette (Terracher) et Collection Pythagore. En classe de Seconde la part réservée aux vecteurs est importante. Nous analyserons donc d'une part attentivement un manuel bien répandu dans l'enseignement, la Collection Terracher. D'autre part, un examen rapide d'un autre manuel, la Collection Dimathème, doit être fait pour étudier des différences et similitudes entre les deux manuels dans la présentation du contenu à enseigner et dans les types de problèmes proposés.

1.2 - Méthodologie d'analyse

Tout d'abord nous analysons la partie cours des manuels et ensuite la partie exercices. Nous allons étudier séparément chaque manuel pour repérer comment sont présentées les notions,

l'accent donné aux définitions et propriétés, et conjointement nous procéderons à des comparaisons entre les manuels. L'étude de chaque manuel et leur comparaison seront menées de front, thème par thème. Après l'étude individuelle de la partie cours de chaque manuel, une conclusion comportant une comparaison entre les trois manuels sera alors présentée. L'étude de la partie exercices sert, entre autres, à étudier la fonction des vecteurs dans l'enseignement secondaire.

Nous analyserons aussi quelques exercices résolus dans les manuels, car ils donnent accès aux intentions des auteurs relativement aux outils à retenir pour résoudre le problème considéré.

Dans l'analyse des exercices proposés aux élèves, nous faisons parfois appel au livre du maître, pour mieux étudier les intentions des auteurs. Nous cherchons à identifier les registres présents dans l'exercice, cela aussi bien pour l'énoncé que pour la résolution, les propriétés que les élèves doivent utiliser pour le résoudre et la place du registre graphique dans l'énoncé et dans la résolution de l'exercice.

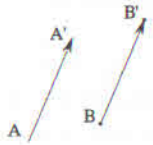
2 - La classe de Quatrième

2.1 - La partie cours[1]

2.1.1 - IREM de Strasbourg - 1992

Définition d'un vecteur

Deux points A et A' définissent un vecteur $\overrightarrow{AA'}$.



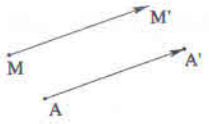
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$

Égalité de vecteurs

On dit que deux vecteurs sont égaux si les segments AA' et BB' sont parallèles, de même sens et de même longueur, c'est-à-dire si le quadrilatère AA'B'B est un parallélogramme.

Translation

L'image d'un point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AA'}$. On peut dire aussi : le point M' tel que le quadrilatère MM'A'A soit un parallélogramme.



La définition d'un vecteur donnée dans Strasbourg donne l'idée d'autant de vecteurs différents que la donnée de 2 points distincts donnés. Le vecteur est un couple de points, v=f(A,A'), et l'ordre dans lequel on va prendre les points est implicite. Ainsi, la définition d'un vecteur dépend de deux points, l'égalité est définie à l'aide du parallélogramme et la translation est introduite aussi à l'aide du parallélogramme. L'égalité vectorielle est donnée tout de suite après la définition d'un vecteur et c'est alors que le registre graphique apparaît.

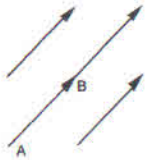
2.1.2 - Terracher - 1992

Définition d'un vecteur

La donnée d'une direction de droites, d'un sens sur cette direction et d'une longueur définit un vecteur

Attention :

Toutes ces flèches ci-contre représentent un seul vecteur que l'on désigne par $\overrightarrow{AB}$.



Égalité vectorielle

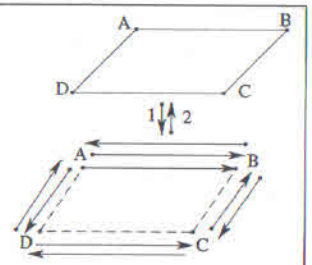
L'égalité vectorielle $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *signifie trois "choses" : (AB)//(CD) ; [AB) et [CD) même sens ; AB=CD.*

[1] Des extraits des manuels seront donnés dans les tableaux qui suivent.

Vecteur et parallélogramme

1. Si ABCD est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$.

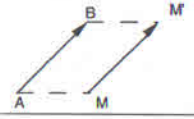
2. Si l'une des quatre égalités suivantes est vérifiée : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ou $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, alors ABCD est un parallélogramme (et les trois autres égalités sont vérifiées).



Translation

Soit deux points A et B.

L'image d'un point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point M' tel que : $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$



Avec la définition d'un vecteur donnée dans Terracher on a l'impression d'être plus proche du savoir savant, mais plus loin des représentations des élèves. Le vecteur est une fonction de trois variables v=f(d,s,l). Quand on désigne le vecteur par $\overrightarrow{AB}$, on passe brusquement à un choix de deux points A et B.

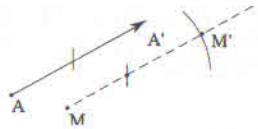
Avant la partie cours figurent des exercices qui induisent la définition de translation (par glissement) puis est donnée l'idée de vecteur par la translation (essai d'introduire le vecteur comme une transformation géométrique). Mais il n'y a pas de congruence entre ce travail préalable et le cours lui même, car ce n'est pas l'ordre qui sera suivi pour le cours. Comme dans le manuel IREM de Strasbourg, l'égalité de vecteurs n'est pas définie par la translation, au contraire on se sert de l'égalité vectorielle pour définir la translation.

La représentation graphique donnée pour un vecteur induit un peu plus que dans le manuel IREM de Strasbourg l'idée de représentant d'une classe puisque Terracher présente plusieurs vecteurs et non seulement un vecteur. Au moment de la définition de l'égalité vectorielle il n'y a pas de dessin, mais il apparaît immédiatement après pour la règle du parallélogramme. Et au moment de la définition de la translation le registre graphique joue à nouveau un rôle important car celle-ci est liée au parallélogramme.

2.1.3 - Pythagore - 1992

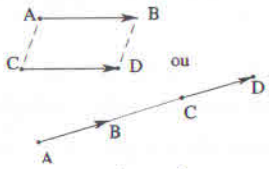
Translation et vecteurs
Deux points distincts A et A', pris dans cet ordre, **représentent** un **vecteur** qu'on note $\overrightarrow{AA'}$.
Définition

L'image d'un point M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ est le point M' tel que :
les demi-droites [AA') et [MM') sont parallèles et de même sens ; AA'=MM'.



Propriété de l'égalité de deux vecteurs
Soit 4 points A, B, C, D. Si D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

On écrit alors: $\overrightarrow{AB} =. \overrightarrow{CD}$



Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même longueur.

$\overrightarrow{AB} =. \overrightarrow{CD}$

Propriété du parallélogramme
Soit quatre points non-alignés A, B, C et D.

Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors ABCD est un parallélogramme. Réciproquement, si ABCD est un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

"pris dans cet ordre..." le sens d'un vecteur est ici défini de façon implicite. Cette définition de vecteur, v=f(A,A',O), se situe entre les deux précédentes. Le mot "*représentent*" peut vouloir donner l'idée d'un représentant au sens mathématique mais on fait le choix de deux points A et A'. C'est de plus une marque linguistique très subtile et ce manuel introduit finalement le vecteur comme lié à deux points. Dans ce manuel il n'existe aucun essai d'explication des termes "direction" et "sens". Ils sont implicitement en jeu dans la définition d'un vecteur et dans celle de la translation.

Dans Pythagore l'ordre de présentation suivi n'est pas le même que celui adopté pour les deux autres collections : ici on définit un vecteur, ensuite la translation et finalement l'égalité vectorielle. Il n'y a pas de représentation graphique pour la définition d'un vecteur, cette représentation est donnée en une seule fois au moment de la définition de la translation, l'égalité de deux vecteurs étant représentée graphiquement par le parallélogramme. Ceci renforce le lien entre les vecteurs et la translation.

2.1.4 - À propos de l'introduction de la notion de vecteur dans les manuels

La présentation globale des vecteurs en classe de Quatrième s'avère très attachée aux propriétés géométriques, comme nous l'avions annoncé. Dans l'objectif de le mettre en évidence encore une fois, nous faisons ci-dessous un résumé de l'analyse des manuels, partie cours. Ce résumé est fait autour du caractère géométrique de la présentation des vecteurs et du registre graphique mis en œuvre.

I) À propos du caractère géométrique de la présentation des vecteurs :

i) La collection Hachette (Terracher) est la seule où il y a une intention (non explicite) de définition de direction et de sens. Dans la partie de préparation au cours du manuel Terracher, les auteurs présentent la direction et le sens de la façon suivante : "Lorsque des droites sont parallèles entre elles, on dit qu'elles ont la même direction. Une direction étant donnée, on peut choisir un sens sur celle-ci"[2]. De plus ce manuel se distingue aussi des deux autres par rapport à la représentation graphique donnée : en effet, pour représenter un vecteur il est donné plusieurs représentants de vecteurs géométriques ayant même direction, même sens et même longueur. Dans les deux autres collections, il n'y a aucune explication de la signification des notions de direction et de sens ; on admet donc qu'on utilisera ces deux mots comme dans le langage courant.

ii) Le registre graphique utilisé favorise en fait le caractère géométrique car le vecteur est représenté par un segment orienté et l'utilisation du parallélogramme pour vérifier l'égalité des vecteurs renforce ce caractère géométrique.

iii) L'égalité vectorielle telle qu'elle est présentée dans les manuels, est très liée au parallélogramme et ceci rend plus difficile le passage à une classe d'équivalence. En effet, le parallélogramme ne permet d'envisager que l'égalité de deux représentants, et non l'ensemble des représentants. Il n'y a pas de vue globale de la classe d'équivalence avec le parallélogramme.

2) À propos du registre graphique :

i) Pour les auteurs de manuels, l'idée de représenter graphiquement un vecteur par une flèche semble être admise comme allant de soi pour les élèves, ne méritant aucune explication.

ii) Nous constatons une absence de variation graphique de direction d'un vecteur et de sens une fois que la direction est fixée. On ne rencontre pas, par exemple de représentations graphiques de vecteurs comme suit :

[2] Terracher est ainsi le seul manuel qui attire, implicitement, l'attention sur le fait qu'il faut d'abord fixer une direction pour ensuite parler de sens.



Fig. 1

Finalement ce qui est commun aux trois manuels, c'est le lien fait entre le parallélogramme et l'égalité de vecteurs par l'intermédiaire du registre graphique (ce qui est un début de validation de notre hypothèse de recherche 1[3]), mais les manuels diffèrent dans le passage du parallélogramme à l'égalité vectorielle. Seul Terracher relie directement parallélogramme, égalité vectorielle en langue naturelle et écriture symbolique ; les deux autres le font de façon plus indirecte par l'intermédiaire de la translation.

Ces remarques sont basées seulement sur l'analyse de la partie cours des manuels. L'analyse des exercices résolus et proposés permettra de mieux comprendre les intentions des auteurs des manuel et de répondre à des questions du type "comment l'égalité vectorielle est-elle traitée dans les exercices ? Est-elle toujours liée à un parallélogramme, ou à une configuration ?"

2.2 - La partie exercices

Seront d'abord examinés les exercices résolus, avec à chaque fois au moins un exemple de ce type d'exercice, ainsi que la résolution donnée par le manuel. Ensuite l'analyse des exercices proposés est présentée ; nous chercherons entre autres à comparer les nombres d'exercices proposés par chaque manuel. Cela nous fournira des éléments d'information sur les intentions des auteurs des manuels. Il est fort probable que selon les intentions des auteurs, le nombre d'exercices pour un même thème soit sujet à des variations.

Les registres de représentations sémiotiques utilisés sont aussi un objet d'étude de notre analyse d'exercices, en particulier les allers et retours entre les différents registres. Nous distinguons dans la suite deux catégories d'énoncés de problèmes que nous estimons a priori le plus fréquentes :

V(G)G - l'énoncé est donné en termes vectoriels (registre symbolique vectoriel), pour résoudre l'exercice on passe au registre symbolique géométrique et la réponse est demandée en termes géométriques.

G(G)V - l'énoncé est donné en termes géométriques, la résolution est basée aussi sur le registre géométrique et la réponse souhaitée est en termes vectoriels.

[3] HR1 : L'enseignement des vecteurs dans le secondaire repose sur l'aller-retour entre les différents types de registres et les types de problèmes qui y sont attachés.

Il est clair que pour l'instant il ne s'agit que d'une classification pour démarrer notre étude, car nous pensons qu'il existera encore beaucoup d'autres possibilités de jeu entre les différents registres. Par exemple, nous n'avons pas mentionné le registre graphique, mais il est très probable qu'il ait une place importante dans l'énoncé et la résolution d'un exercice de géométrie en classe de Quatrième. La règle que nous prendrons en compte lors de la classification d'un exercice est de mettre avant la parenthèse le(s) registre(s) utilisé(s) dans l'énoncé (données et question), dans la parenthèse le(s) registre(s) de la solution telle qu'elle est rédigée, et finalement après la parenthèse le registre dans lequel la réponse est attendue.

2.2.1 - IREM de Strasbourg

2.2.1.1 - Exercices résolus

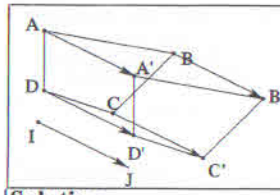
Dans cette collection il y a trois séries d'exercices résolus qui sont donnés dans la section qui s'appelle "*Ce qu'on attend de moi*" et y sont distingués trois thèmes :

i) Savoir construire l'image d'une figure par une translation ;

ii) Savoir construire l'image d'une figure par une rotation (pas de vecteurs) ;

iii) Polygones (pas de vecteurs).

Dans le thème i), un seul exercice comptant trois questions est censé obliger les élèves à utiliser la définition géométrique de vecteur pour construire les images de figures par translation ; il s'agit d'une application directe de la définition de translation et de ses propriétés. L'énoncé de cet exercice contient toujours des expressions en registre symbolique vectoriel et on doit interpréter ce registre par des propriétés géométriques. En effet, il faut faire une "lecture" géométrique de la notation vectorielle. Dans ce cas, nous disons que l'énoncé mélange la langue naturelle, le registre symbolique vectoriel et le registre graphique et la résolution est donnée en registre symbolique géométrique et graphique, comme dans l'exemple ci-dessous. Nous transcrivons ainsi l'exercice proposé suivi de la résolution donnée dans le livre pour la première question (Strasbourg, p. 208) :



1° Construire l'image du quadrilatère ABCD (voir figure dans la colonne de gauche) par la translation du vecteur $\overrightarrow{IJ}$. Expliquer.
2° Même question avec la droite d.
3° Même question avec le cercle $\mathcal{C}$.

Solution
Je construis l'image de chaque sommet.
Je vérifie que le quadrilatère A'B'C'D' a des côtés parallèles et de même longueur que le quadrilatère ABCD.

La résolution donnée par les auteurs indique de construire d'abord l'image de chaque sommet du quadrilatère, ce qui doit être fait, à notre avis en utilisant la définition géométrique de translation. Ensuite on doit vérifier que le quadrilatère ainsi obtenu, A'B'C'D', a les côtés parallèles à ceux de ABCD et de même longueur. La résolution du problème reste donc, dans le cadre géométrique et le seul usage de vecteur est dans l'expression "translation du vecteur $\overrightarrow{IJ}$", puisque la résolution proposée utilise les propriétés géométriques de direction, de sens et l'égalité de longueur plus le registre graphique. L'intention des auteurs du manuel est de faire interpréter géométriquement la translation de vecteur $\overrightarrow{IJ}$.

Si nous revenons à notre proposition de classification des exercices, celui-ci serait noté de la façon suivante : graV(Ggra)gra[4]. En effet, dans l'énoncé on utilise le registre graphique plus la notation vectorielle, pour la résolution il s'agit d'utiliser le registre graphique en respectant des propriétés géométriques et finalement la réponse qu'on doit fournir est un dessin.

2.2.1.2 - Exercices proposés

Nous démarrons notre analyse en donnant un tableau résumé des exercices proposés dans chaque série de ce manuel, ainsi que la tâche demandée. Ainsi, dans les deux premières colonnes du tableau nous donnons le titre de chaque série d'exercices et les sous-titres, donnés par les auteurs ; la troisième colonne mentionne les propriétés à mettre en œuvre. Ces données sont aussi quantitatives ce qui nous permettra par la suite de faire une analyse plus approfondie des intentions supposées des auteurs des manuels.

titre des séries d'exercices	sous-titre des exercices[5]	propriétés à mettre en œuvre
Exercice pour tous (21)	transformation de figures (~~10~~) **(8)**	translation de vecteur donné **(6)** translation quelconque **(1)** translation de A en A' **(1)**
	démontrer (~~8~~) **(2)**	construire image par translation d'un vecteur donné + démontrer propriété géométrique **(2)**
	construire de polygones (~~3~~)	
Je m'entraîne (30)	transformation de figures (~~23~~) **(15)**	translation d'un vecteur donné **(11)** translation de A en A' **(4)**
	justifier, démontrer (~~5~~) **(2)**	identifier des vecteurs égaux **(1)** translation de vecteur donné + pb géométrie **(1)**
	construire de polygones (~~2~~)	
Je mets en pratique (16)	transformer une figure (~~1~~)	
	utiliser une translation (~~3~~)	translation de vecteur donné + pb géométrie (~~3~~)
	reconnaître une transformation (~~3~~) **(1)**	déterminer la translation qui transforme une figure 1 en une figure 2
	avec 2 symétries (~~2~~), rotation (~~1~~), polygones réguliers (~~6~~).	

[4] Nous notons "gra" le registre graphique.

[5] Les chiffres barrés indiquent le total d'exercices de l'item, et nous le barrons pour mettre à côté le nombre d'exercices où il s'agit de vecteurs. Les chiffres en gras indiquent la quantité d'exercices où il s'agit de vecteurs.

À partir de cette première étude des exercices proposés, nous pouvons identifier trois classes d'exercices présentes dans ce manuel :

- construire l'image par translation d'un vecteur donné (ou translation de A en A') ;
- dans une configuration donnée, identifier des vecteurs égaux ;
- déterminer une translation à partir d'un dessin donné.

Dans la série "exercices pour tous", les exercices du type "Transformer des figures", traitent d'une manière générale les transformations en tant qu'effet sur des figures, c'est-à-dire la construction de l'image d'un objet géométrique (point, droite, triangle,...) par une translation de vecteur donné. Leur résolution est basée sur des applications directes des propriétés géométriques données et on utilise, une fois de plus, la définition géométrique de vecteur. Ici, il y a toujours la référence au vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans l'énoncé des exercices ; il s'agit donc d'exercices du type de celui analysé ci-dessus.

Voici l'un de ces exercices, donné in extenso pour faciliter notre analyse et la compréhension du lecteur. Exercice F, page 211.

> 1° Tracer un parallélogramme ABCD. Marquer le point I milieu du segment AD, puis tracer la droite d passant par B et par I.
> 2° Construire les droites d_1, d_2 , d_3 et d_4 , images respectives de d par les translations des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.
> Deux droites sont confondues ; lesquelles ? Expliquer pourquoi.

Avant de faire nos commentaires, donnons une figure pour mieux visualiser l'exercice :

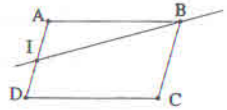


Fig. 2

La résolution de cet exercice utilise, soit que l'image d'une droite est une droite qui passe par deux points images, soit que l'image d'une droite est une droite parallèle à la droite donnée et qui passe par un point image. Dans les deux cas les propriétés utilisées sont des propriétés géométriques. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ n'est qu'une notation commode qui condense en un seul symbole, la direction, le sens et la longueur ou le côté du parallélogramme à utiliser. Cet exercice met donc en jeu la définition de translation. Il contribue à l'apprentissage de l'interprétation géométrique de l'expression "translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$" en termes de construction géométrique et le registre vectoriel n'apparaît que dans l'énoncé. Il permet aussi de montrer en acte sur un exemple que la translation ne dépend pas du représentant choisi pour son vecteur. Enfin il permet la reconnaissance de deux vecteurs égaux par le

parallélogramme : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux, alors l'image par la translation est la même. En prenant en compte notre classification, cet exercice est classé VG(graG)G.

Dans la rubrique "Démontrer" il existe deux exercices qui contiennent la mention d'un vecteur dans l'énoncé. Il s'agit de faire une construction en utilisant entre autres, la translation d'un vecteur donné et ensuite utiliser les propriétés géométriques d'un vecteur et de la translation pour répondre à la question qui est d'ordre géométrique. Nous donnons ci-dessous l'un des deux exercices suivi d'un dessin qui doit être fait par l'élève.

Exercice N, page 212.
1° Tracer un parallélogramme ABCD.

2° Construire le point E image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.
3° Montrer que les points D, C et E sont alignés.
4° Montrer que le point C est le milieu du segment DE.

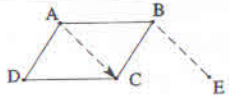


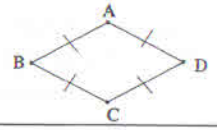
Fig. 3

Une fois de plus le vecteur apparaît dans l'énoncé pour déterminer la translation. Dans la résolution de l'exercice il faut utiliser les propriétés géométriques de la translation et de l'égalité vectorielle. Cet exercice est classé VG(graG)G.

Dans la série d'exercices, "Je m'entraîne", les exercices sur "Transformer des figures" et qui portent sur la translation, contiennent majoritairement la notation vectorielle $\overrightarrow{AB}$ dans l'énoncé. Seuls trois exercices ne donnent pas explicitement le vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans l'énoncé, mais définissent la translation transformant un point A en un point B. Ainsi, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est implicite mais on peut s'attendre à ce que les élèves relient la donnée de la translation dans l'énoncé à celle du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Finalement on rencontre dans la rubrique "Je m'entraîne - justifier, démontrer", le seul exercice où le vecteur est l'objet du problème et non pas simplement un raccourci d'expression pour la translation qui, d'ailleurs, n'apparaît pas dans cet exercice. Dans cet exercice l'égalité de vecteurs est l'objet du problème. Voici son énoncé :

Exercice 24, page 216
Pour la figure dire si les égalités sont vraies. Justifier.
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$? $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$? $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$?



Cet exercice illustre bien la mobilité des registres qui est présente dans l'enseignement des vecteurs dans le secondaire. L'usage de cette mobilité sollicité ici est celui de l'interprétation du registre symbolique vectoriel en termes de propriétés géométriques et spatiales : égalité de longueurs, parallélisme de segments et sens. Le dessin joue un rôle essentiel dans cet exercice, d'autant plus que le terme de losange n'est pas explicité dans l'énoncé : l'élève doit l'identifier par les "marques" faites sur le dessin. En un mot, nous pourrions dire que cet exercice consiste à juger si des expressions dans le registre vectoriel rendent bien compte de propriétés géométriques exprimées uniquement graphiquement. La résolution de cet exercice nécessite les traitements suivants :

- interprétation de l'égalité vectorielle en termes de longueur, direction et sens.
- repérage sur le dessin des segments concernés (AB et CD ou AB et CB...).
- estimation perceptive de leur parallélisme, et/ou de l'égalité de leurs longueurs, enfin lecture sur le dessin de leur sens s'ils ont même direction et même longueur.

Cet exercice peut être classé comme Vgra(Ggra)V. En effet, on part du registre vectoriel associé au dessin, on doit interpréter les égalités vectorielles en termes de propriétés géométriques, ensuite on étudie le dessin pour donner une réponse, vrai ou faux, à l'égalité vectorielle.

Dans la série d'exercices "Je mets en pratique", il n'y a pas de changement par rapport à ce que nous avons dit auparavant ; il s'agit ici de transformer, de faire pratiquer la translation et de reconnaître des transformations sur des configurations. Pour ces derniers types de problèmes, l'usage des vecteurs n'est pas indispensable mais ceux-ci seront probablement utilisés par les élèves pour caractériser la translation.

2.2.2 - Conclusion

À partir de l'analyse de la partie cours et des exercices à résoudre et proposés, nous concluons que dans le manuel IREM de Strasbourg, l'accent est fortement mis sur l'utilisation de vecteurs pour les translations et ce comme une écriture économique au niveau de l'énoncé. Il n'y a aucun exercice, à part l'exercice 24 déjà cité, où les vecteurs sont traités

en tant qu'objet. Cela se confirme aussi par les titres de chaque série d'exercices proposés qui ne renvoient pas aux vecteurs. De plus dans le sommaire du manuel, on ne trouve pas le terme vecteur mais un chapitre intitulé "*Translation et rotation*". Autrement dit, la table de matières traduit bien la centration sur les transformations. De plus, les auteurs du manuel ne cherchent pas à attirer l'attention sur les vecteurs. En effet, la seule intervention des vecteurs est implicite : il s'agit d'un point méthode, "Je fais le point", pour que l'élève apprenne ce qu'il doit savoir faire. Le problème posé sur les translations est celui de reproduire une figure analogue à une autre figure donnée par la translation qui transforme un point A en un point A' ; il n'y a donc pas de vecteurs dans l'énoncé. Dans la collection IREM de Strasbourg, les exercices concernant les translations sont donc énoncés dans un cadre géométrique avec pour seule expression en registre vectoriel la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Ces exercices sollicitent une interprétation de l'écriture vectorielle de la translation pour une résolution graphique ; il ne s'agit pas de produire une écriture vectorielle.

Finalement, pour revenir sur la classification des registres utilisés dans les exercices, nous avons constaté qu'en fait le registre vectoriel est présent dans la majorité des énoncés (pour définir une translation) et qu'il est ensuite remplacé par des interprétations géométriques et graphiques. La réponse souhaitée doit rarement être donnée en termes vectoriels. De plus notre analyse montre l'importance accordée au registre graphique et ce aussi bien dans l'énoncé que pour la résolution de l'exercice.

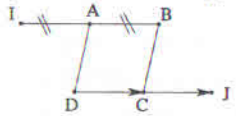
2.2.3 - Terracher

2.2.3.1 - Exercices résolus

Il y a deux exercices résolus, intitulés : "Savoir manipuler les vecteurs". Pour le premier exercice, il s'agit de montrer l'aller-retour entre les deux registres utilisés pour caractériser le milieu d'un segment : le registre vectoriel et le registre géométrique. Le deuxième exercice fait travailler l'égalité vectorielle sur des parallélogrammes ; nous donnons ci-dessous l'énoncé et la résolution de cet exercice :

Énoncé
Tracer un parallélogramme ABCD, puis construire le point I, symétrique de B par rapport à A, et le point J, image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{DC}$. Montrer que IAJC est un parallélogramme.
Solution[6]

Pour prouver que IAJC est un *parallélogramme, il suffit* de prouver que $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AJ}$.



1) $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{AB}$; 2) $\overrightarrow{CJ}=\overrightarrow{DC}$; 3) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (*à justifier*) ; d'où $\overrightarrow{IA}^{(1)}=\overrightarrow{AB}^{(3)}=\overrightarrow{DC}^{(2)}=\overrightarrow{CJ}$ et IAJC est un parallélogramme.

Important : On peut déduire que $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{AJ}$ et que [IJ] et [AC] ont le même milieu.

L'énoncé de cet exercice contient le registre géométrique et le registre vectoriel, et la résolution est donnée en registre symbolique vectoriel. Il s'agit de lire des propriétés géométriques sur la figure donnée, qui est un parallélogramme, et de les écrire en langage vectoriel. Dans cet exercice nous pouvons dire que le registre vectoriel a été utilisé de façon économique au niveau de l'écriture. En effet, au lieu d'écrire par exemple que (IA)//(AB), [IA) et [AB) ont même sens et que IA=AB, il suffit d'écrire $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{AB}$. Pour revenir à notre classification d'utilisation des registres de représentation sémiotique dans l'exercice, nous pouvons le classer comme un exercice du type GV(GVgra)G.

Après les deux exercices résolus, les auteurs explicitent la **méthode**[7], que nous transcrivons ci-dessous :

Soit quatre points A, B, C et D non alignés. Dès que l'une des propriétés suivantes est vérifiée, les trois autres le sont aussi :
1. ABCD est un parallélogramme.
2. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.
3. La translation qui amène A sur B, amène D sur C.
4. [AC] et [BD] ont le même milieu.

La méthode mise en évidence dans le manuel confirme notre hypothèse de recherche 1, selon laquelle "l'enseignement des vecteurs dans le secondaire repose sur l'aller-retour entre les différents types de registres. A partir de la Seconde ces aller-retours sont liés à des problèmes à résoudre". En effet, la méthode consiste à donner l'équivalence entre les quatre propriétés : une écriture vectorielle et trois propriétés énoncées géométriquement, et c'est

[6] La première phrase est mise comme une pensée de l'élève en début de l'exercice.
[7] Terracher, page 234.

justement cette équivalence qui donne à chaque fois les aller-retours entre les items. Nous pouvons alors conclure que ce que propose la "méthode" pour la résolution des exercices est de faire pratiquer aux élèves des changements de registres, entre le vectoriel et le géométrique sans oublier qu'il est aussi possible de rester seulement dans le géométrique. Il s'agit bien d'un simple changement de registre, les problèmes dans lesquels ces passages sont utilisés restant dans le cadre géométrique.

Si dans la collection Strasbourg l'accent était mis sur l'utilisation des vecteurs lors de l'écriture d'une translation et que le vecteur en tant qu'objet avait une place secondaire, dans la collection Terracher l'idée de l'aller-retour entre les propriétés géométriques et les propriétés vectorielles occupe une place centrale. On utilise toujours les vecteurs pour définir la translation, certes, mais aussi et surtout pour faire des équivalences entre des propriétés géométriques et des égalités vectorielles. C'est ce que montre l'analyse du cours et des exercices résolus, renforcée par la "méthode" mise en évidence dans le manuel. L'analyse des exercices proposés doit encore confirmer cela.

2.2.3.2 - Exercices proposés

Nous donnons d'abord un tableau résumé avec le titre et sous-titre de chaque série d'exercices proposés en spécifiant à chaque fois le nombre d'exercices donnés et les propriétés à mettre en œuvre. À la suite du tableau des exemples seront donnés pour illustrer notre analyse.

titre des séries d'exercices	sous-titre des exercices	propriétés à mettre en œuvre
Vrai ou faux (~~20~~) (**10**)		égalité vectorielle ⇔ milieu ou parallélogramme (**8**)
		translation de vecteur donné (**2**)
		rotation et polygones (~~10~~)
Exercices (**69**)	vecteurs (**18**)	égalité vect + parallélogramme (**10**) égalité vect + autre ppté géom[8] (**8**)
	translation (**19**)	image par translation (**4**) découvrir une translation (**3**) translation d'un vecteur donné + pb géométrie (**11**)
	rotation, polygones (~~32~~)	
Lire et comprendre un énoncé (4) (**2**)		égalité vectorielle et parallélogramme (**2**)
Problèmes (3) (**2**)		translation donnée par un vecteur + pb géométrie (**2**)

Dans la série de "Vrai ou faux ?", le but est d'entraîner rapidement aux définitions et aux propriétés vues dans le cours. Ces exercices portent donc, sur la définition d'un vecteur (par les propriétés géométriques, direction-sens-longueur) et sur l'égalité de deux vecteurs, ou

[8] Sous cette classification nous avons classé des exercices dont la résolution exige de mettre en œuvre des propriétés géométriques autres que celles du parallélogramme. Quelquefois il faut aussi utiliser celles du parallélogramme mais toujours avec une autre propriété telle que par exemple, le théorème des milieux.

encore sur les propriétés vectorielles du parallélogramme et du milieu d'un segment. Le registre symbolique vectoriel est présent dans tous les énoncés, à part bien sûr ceux qui traitent de la rotation et des polygones. L'utilisation des propriétés géométriques pour résoudre les exercices représente plutôt un usage en acte : on n'est pas obligé de les écrire pour donner la réponse mais on doit les lire sur un dessin ou même sur une écriture vectorielle.

Dans la deuxième série d'exercices, les 18 exercices dont le sous-titre est "Vecteurs" portent sur des propriétés et résultats déjà connus, comme les propriétés géométriques d'un parallélogramme, le théorème des milieux, la symétrie centrale et l'alignement des points. Nous reprenons la distinction que nous avons faite en début de l'analyse des exercices sur les registres de l'énoncé de l'exercice et de sa résolution. Si dans la collection IREM de Strasbourg les exercices étaient plutôt classés du vectoriel vers le géométrique, pour la collection Terracher les choses se passent d'une façon un peu différente. Parmi les 18 exercices proposés, 8 partent essentiellement du géométrique vers le vectoriel et 9 partent du vectoriel vers le géométrique. Il existe un seul exercice dans lequel il n'y a pas de vecteurs dans l'énoncé et la réponse est demandée en termes géométriques, ce qui laisse à supposer que les auteurs du manuel s'attendent à ce que le vecteur, ou plutôt la notation vectorielle soit utilisée dans la résolution de l'exercice. Dans tous ces exercices le registre graphique est soit présent dans l'énoncé, soit à construire. La plupart des exercices met en œuvre les relations entre l'égalité vectorielle et les propriétés géométriques du parallélogramme.

Donnons tout d'abord un exemple d'un exercice de type V(graG)G :

> Exercice 13, page 237.
> 1° Construire cinq points I, J, K, L, M tels que :
> $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{JM} = \overrightarrow{ML}$
> Que peut-on dire du quadrilatère IJKL ?
>
> 2° Tracer un triangle ABC isocèle en A, puis marquer le milieu A' de [BC].
>
> Placer le point D tel que $\overrightarrow{A'D} = \overrightarrow{AA'}$.
> Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

Dans la première partie de cet exercice, on doit construire les vecteurs donnés par l'énoncé puis il faut interpréter le dessin pour en tirer des propriétés géométriques et finalement répondre à la question posée. Pour construire les vecteurs on doit utiliser la définition d'égalité vectorielle, et pour conclure l'exercice il faut utiliser la propriété géométrique selon laquelle les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu. Pour revenir sur la classification des registres présents dans l'exercice, on part du registre symbolique vectoriel, on doit construire une figure, c'est-à-dire qu'on passe au registre graphique, ensuite on interprète les données sur cette figure pour conclure qu'il s'agit d'un

parallélogramme. Autrement dit, il ne s'agit pas de produire un vecteur ou une écriture vectorielle mais de traduire l'écriture vectorielle de l'énoncé par des termes géométriques.

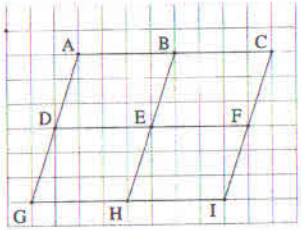
Dans la deuxième partie de cet exercice, il faut tout d'abord faire une construction, ensuite on doit placer un point qui obéit à une relation vectorielle. Ainsi l'énoncé passe au registre symbolique vectoriel pour finalement demander d'interpréter les propriétés géométriques sur le dessin et donc de revenir au registre symbolique géométrique.

Nous donnons ci-dessous l'exemple d'un exercice que nous avons classé gra(graG)V (exercice 4, page 236) :

En utilisant les lettres A, B, C, D, E, F, G, H et I, recopier et compléter

1° $\overrightarrow{EF}$ =....=...=....=....=.... ;

2° $\overrightarrow{GD}$= I.. ; F.. = $\overrightarrow{HE}$; ..G = $\overrightarrow{BE}$; $\overrightarrow{HF}$= ..E.



La résolution de cet exercice est obtenue par la reconnaissance des propriétés géométriques sur le parallélogramme. Il s'agit de passer du registre graphique au registre symbolique vectoriel en passant par un usage en acte des propriétés géométriques lues sur la figure. Même si on ne va pas lire ou écrire le registre symbolique géométrique on l'utilise "en acte" pour arriver aux propriétés de parallélisme, même sens et même longueur et finalement conclure sur les égalités vectorielles. Il s'agit ici d'un exercice où l'élève doit produire une écriture vectorielle, ce qui n'est pas souvent le cas, comme nous l'avons déjà remarqué.

La classification de certains exercices dépend du procédé de résolution adopté et il peut ainsi être classé du vectoriel vers le géométrique ou au contraire du géométrique vers le vectoriel. Citons l'exemple de l'exercice 11, page 236.

Parmi les égalités vectorielles suivantes, une seule signifie que C est le symétrique de A par rapport à B ; laquelle ?

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.

Pour le résoudre, on peut faire un dessin qui représente le fait que C est le symétrique de A par rapport à B, et ensuite en tirer des conclusions sur les égalités vectorielles qu'on peut

écrire à partir de ce dessin. La résolution porte ainsi sur la représentation géométrique de l'énoncé par un dessin et ensuite sur la reconnaissance des trois propriétés géométriques (même direction, même sens et même longueur). Dans ce cas, nous pouvons dire que l'exercice part du géométrique vers le vectoriel. D'autre part, on peut essayer de représenter chaque égalité vectorielle donnée, et vérifier une à une, si la condition "C symétrique de A par rapport à B" est satisfaite. Dans ce cas il s'agit d'un exercice qui part du vectoriel vers le géométrique. Dans les deux cas les connaissances vectorielles en jeu sont essentiellement les propriétés géométriques de l'égalité vectorielle. L'usage du vectoriel reste une fois de plus au niveau de l'écriture.

Les exercices sur les translations ne diffèrent guère de ceux de la collection Strasbourg cependant le nombre d'exercices consacrés à l'étude d'une translation et le nombre d'exercices portant sur l'étude des vecteurs est plus égalitaire. Dans les problèmes autour de la translation, les vecteurs servent à son écriture et les propriétés à utiliser sont toujours des propriétés géométriques. L'objet des 19 exercices sur les translations est toujours leurs effets sur des figures (droites, segments, cercles, polygones, ...) et leurs propriétés (alignement, parallélisme,...). On y trouve aussi deux exercices sur les coordonnées et sur la notion de lieu géométrique. Pour 17 de ces exercices, les vecteurs font partie de l'énoncé.

En fin de chapitre figurent huit exercices, intitulés "Lire et comprendre un énoncé", pour lesquels l'objectif est encore de faire pratiquer les aller-retours entre le registre de l'écriture symbolique géométrique, le registre de l'écriture symbolique vectorielle, le registre graphique et le registre de la langue naturelle.

2.2.4 - Conclusion

D'une manière générale, les exercices qui portent exclusivement sur les vecteurs (pour lesquels il n'est pas question de translation) sont proposés avec une nouvelle notation et ce qui est le plus demandé est de savoir que l'égalité vectorielle équivaut à même direction, même sens et même longueur. La plupart des exercices sont une traduction du registre symbolique vectoriel au registre symbolique géométrique et inversement. Comme nous l'avons dit, le nombre d'exercices du type VG et GV est plus ou moins le même, tandis que le manuel IREM de Strasbourg privilégie les exercices du type VG.

Les résultats géométriques les plus utilisés sont les propriétés géométriques du parallélogramme, à savoir que les côtés opposés sont parallèles et que les diagonales se coupent en leur milieu, et d'une manière générale la caractérisation vectorielle du milieu d'un segment.

Dans le manuel Terracher, 18 exercices mettent en jeu l'égalité de vecteurs, ce qui n'est pas le cas pour la collection Strasbourg. Ceci montre qu'une importance majeure est accordée à l'étude des vecteurs pour eux-mêmes et non seulement dans les exercices qui parlent d'une

translation. Contrairement au manuel de la Collection Strasbourg, où on traitait plutôt les transformations, de nombreux exercices portent ici explicitement sur les vecteurs ; les transformations sont traitées dans ce chapitre mais elles n'ont pas une présence supérieure à celle des vecteurs.

2.2.5 - Pythagore

2.2.5.1 - La "boîte à méthodes"

Cette collection ne propose pas d'exercice résolu. Avant les exercices proposés, les auteurs donnent la "boîte à méthodes", qui est transcrite ci-dessous in extenso (Pythagore, page 234).

Comment démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ?

Si A, B, C et D sont quatre points non alignés tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ **alors** ABDC est un parallélogramme.

Comment démontrer l'égalité de deux vecteurs ?

- **Si** ABDC est un parallélogramme **alors** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
- **Si** deux vecteurs ont même direction, même sens et même longueur **alors** ils sont égaux
- **Si** D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ **alors** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



Comme pour la collection Terracher, il s'agit ici de faire pratiquer aux élèves les aller-retours entre les registres graphiques, d'écriture symbolique géométrique et d'écriture symbolique vectorielle. Les propriétés mises en évidence sont les mêmes que pour Terracher, cependant dans Pythagore ne figure pas la caractérisation vectorielle des milieux pour le parallélogramme, à savoir que les diagonales du parallélogramme se coupent en leur milieu. La propriété géométrique est ici indiquée implicitement par le dessin donné dans la boîte à méthodes.

Après la boîte à méthodes sont présentés trois exemples décortiqués de construction géométrique, mais sans vecteurs[9].

[9] Il s'agit de construire un hexagone régulier, un triangle équilatéral et un carré.

2.2.5.2 - Exercices proposés

Les exercices à résoudre sont partagés en deux séries : "...pour savoir faire" et " ...pour chercher", dont un tableau résumé est donné ci-dessous :

titre des séries d'exercices	sous-titre des exercices	propriétés à mettre en œuvre
pour savoir faire (~~19~~) (9)	image d'une figure par une rotation (~~6~~)	
	image d'une figure par une translation (5)	construire image par une translation (4) trouver la translation à partir d'un dessin (1)
	construction de polygones réguliers (4)	
	égalité de vecteurs (4)	égalité vectorielle et/ou pptés parallélogramme (3) construire image par translation + pb géométrie (1)
pour chercher (~~26~~) (6)	quelques constructions (2)	
	rotations (4), recherche d'une rotation (2)	
	avec des hexagones réguliers (2)	
	calculs d'aires (3)	
	divers (4) (1)	translation, égalité vectorielle, parallélogramme (1)
	frises et translations (5)	construire image d'une frise par translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ (5)
	les roses en architecture (4)	

Les exercices sur la translation traitent de l'image d'une figure donnée, par la translation d'un vecteur donné. Il s'agit d'appliquer la définition de la translation, et d'utiliser les propriétés de conservation d'une figure par translation. Pour une figure géométrique, donnée sur un papier quadrillé, on n'a pas besoin par exemple de construire le translaté de chaque sommet de la figure, on peut le faire pour un ou deux sommets de la figure et à partir d'un segment translaté, on reconstruit la figure initiale. Parmi les 5 exercices sur la translation, 4 donnent un vecteur dans l'énoncé (celui qui caractérise la translation), soit par son écriture soit par une représentation géométrique ; ces 4 exercices peuvent être classés Vgra(graG)gra. Le cinquième exercice donne une frise et demande de la commenter en pensant aux translations : il est classé gra(V)LN[10]G.

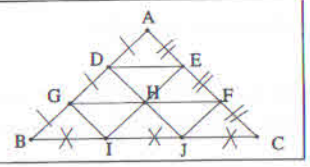
Les résolutions des quatre exercices qui traitent explicitement de l'égalité de vecteurs (y compris celui où il y a aussi la translation), mettent en jeu les mêmes règles déjà citées pour les exercices des deux premières collections analysées (égalité vectorielle en direction, sens et longueur, propriétés géométriques du parallélogramme). Autrement dit, il n'y a pas de différence par rapport aux collections IREM de Strasbourg et Terracher. Pour illustrer notre affirmation, nous présentons l'exercice 22, page 238.

[10] Rappelons que LN veut dire "registre de la langue naturelle".

Voici une figure.
Avec les points de cette figure, écrire :

a) tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{DG}$,

b) tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{DE}$.



La résolution de cet exercice porte sur les propriétés d'égalité de vecteurs (direction-sens-longueur) et aussi sur le parallélogramme. Il faut vérifier, par exemple, que DEHG est un parallélogramme et utiliser ensuite ses propriétés géométriques pour vérifier l'égalité de vecteurs. Pour montrer qu'il s'agit bien d'un parallélogramme on peut se servir du théorème des milieux (ce qui n'est peut-être pas très probable) ou on peut chercher des segments qui forment les côtés opposés du parallélogramme. La perception visuelle favorise en fait, cette dernière stratégie. En termes de registres, la résolution de cet exercice consiste donc à passer du registre graphique et du registre symbolique géométrique au registre symbolique vectoriel.

Dans la série d'exercices "...pour chercher", les cinq exercices mis sous le titre "Frises et translations", font travailler la translation sur des figures autres que les polygones (il s'agit de façades d'églises). Ils exigent donc une compréhension plus globale de la transformation translation ; il ne s'agit pas de trouver le translaté de quelques points sur la figure pour ensuite l'obtenir la figure image, comme c'est le cas, par exemple si on veut trouver l'image d'un polygone par translation d'un vecteur donné. Dans ce cas, il suffit d'obtenir les images des sommets et ensuite de les lier. Ce type d'exercice n'existe pas dans les deux autres manuels analysés.

2.2.6 - Conclusion

Dans cette collection les vecteurs fonctionnent plutôt comme une écriture pour la définition de la translation ; on ne consacre pas de temps à l'étude des vecteurs eux-mêmes, à part les quatre exercices sur l'égalité vectorielle que nous avons cités ci-dessus. Le chapitre où se trouvent les vecteurs a pour objectif d'étudier la translation, la rotation, les polygones réguliers et finalement de faire des constructions pour lesquelles on ne doit pas utiliser les vecteurs. Ce manuel est en fait un intermédiaire entre le manuel IREM de Strasbourg et Terracher : pour le premier il y a seulement un exercice sur l'égalité vectorielle et pour le deuxième il y en a 18.

2.3 - Conclusion de l'analyse de la Quatrième

La définition de l'objet vecteur s'appuie sur des notions : direction, sens, longueur, qui de fait n'ont pas été définies auparavant dans l'enseignement en tant que concepts mathématiques. Nous pouvons donc supposer qu'implicitement en particulier les termes direction et sens ont une signification naïve, voire multiple suivant les circonstances ; on peut noter à ce propos le paradoxe relatif à la notion de direction. Cette dernière sert à introduire le vecteur alors qu'elle-même n'a pas fait l'objet d'une définition et qu'elle prendra sens mathématiquement grâce au vecteur (vecteur directeur d'une direction).

En classe de Quatrième, on introduit donc le vecteur de notation $\overrightarrow{AB}$, qui est un objet défini par des propriétés géométriques. Au moment d'introduire la notation $\vec{u}$, cela peut représenter une difficulté car le vecteur est très attaché aux points A et B.

A partir de la définition d'un vecteur, la translation est introduite en Quatrième comme une application ponctuelle et travaillée comme une application de figure à figure (lors des exercices). On s'intéresse à ses effets sur des figures (points, segments, vecteurs, droites, polygones,...). À cette fin les vecteurs jouent un rôle d'outil économique d'écriture pour la définition de la translation. Mais ce que l'on utilise dans les exercices est, une fois de plus, les propriétés géométriques d'un vecteur, à savoir le parallélisme (direction), le sens et la longueur. En effet, pour résoudre les exercices on est obligé de revenir, soit au parallélogramme, soit à l'égalité en direction, sens et longueur (quand le parallélogramme est aplati, par exemple, ou dans la caractérisation vectorielle du milieu).

Nous concluons ainsi que cette nouvelle notion, le vecteur, fonctionne en classe de Quatrième plutôt en tant qu'outil économique au niveau de l'écriture qu'outil de résolution de problèmes.

Types de problèmes (et actions exigibles des élèves)

Nous pouvons classer deux types de situations pour lesquelles on entraîne les élèves à utiliser les vecteurs en classe de Quatrième. A ce niveau, il s'agit plutôt de faire utiliser les définitions et propriétés présentées dans le cours :

égalité vectorielle : il faut identifier des vecteurs égaux sur des configurations données par la reconnaissance de parallélogrammes ; les exercices qui demandent de construire des vecteurs égaux sont en moins grand nombre et de plus ils n'exigent pas de construction en utilisant la règle et le compas.

transformations (translation) : on demande la construction d'une image par la translation de vecteur donné. Le vecteur est utilisé dans la définition de la translation et dans la résolution même on utilise les propriétés géométriques du vecteur (direction-sens-longueur).

Au niveau de la Quatrième nous n'avons pas trouvé d'exercices où les vecteurs interviennent en tant qu'outil de résolution économique. Il s'agirait plutôt d'exercices visant à familiariser l'élève avec la nouvelle notion, à faire pratiquer des aller-retours entre les propriétés géométriques et vectorielles que l'on peut lire sur un dessin et à établir le lien entre translation et vecteurs.

Comparaison numérique du nombre d'exercices par manuel

Le manuel Terracher paraît accorder un peu plus d'importance à l'enseignement des vecteurs en Quatrième et à l'acquisition par les élèves des premiers concepts vectoriels. Cela se confirme par le nombre d'exercices de ce manuel où l'objet est l'étude de la notion de vecteur et des propriétés vues en cours. Ils proposent 18 exercices qui portent exclusivement et explicitement sur les vecteurs, tandis que le manuel Pythagore propose quatre exercices et la collection Strasbourg se contente de proposer un seul exercice sur les vecteurs. Il y a donc dans le manuel Terracher une préoccupation explicite de l'enseignement de la notion de vecteur pour elle même, tandis que pour les deux autres manuels la préoccupation est centrée sur l'usage des vecteurs pour la définition de la translation.

A propos de registres

Nous avons pu relever plusieurs indices dans les manuels consultés qui montrent qu'en classe de Quatrième il s'agit d'introduire une nouvelle notation et de faire travailler les élèves sur les aller-retours entre les différents registres présents à ce niveau : registre graphique, registre de l'écriture symbolique géométrique et registre de l'écriture symbolique vectorielle.

Contrairement au manuel IREM de Strasbourg qui ne comporte pas de "boîte à méthodes", les manuels Terracher et Pythagore en donnent une, en stimulant les aller-retours entre les registres graphiques, de l'écriture symbolique vectoriel et géométrique. Ces méthodes ne diffèrent guère l'une de l'autre, mais l'accent mis par les auteurs sur ces méthodes n'est pas le même, comme nous pouvons le constater aussi par le type et la quantité d'exercices proposés dans chaque manuel autour de la "méthode".

Concernant encore les aller-retours entre les registres, pour la majorité des exercices il s'agit de lire une écriture vectorielle et non de produire un vecteur. En effet, pour la plupart des exercices on doit interpréter des propriétés géométriques et conclure en termes vectoriels.

Finalement, l'analyse de la partie cours et de la partie exercices des trois manuels étudiés confirme notre hypothèse de recherche 1 : "L'enseignement des vecteurs dans le secondaire repose sur l'aller-retour entre les différents types de registres. A partir de la Seconde ces aller-retours sont liés à des problèmes à résoudre".

3 - La classe de Troisième

3.1 - La partie cours[11]

En classe de Troisième, sont introduites les notions de coordonnées d'un vecteur et d'addition vectorielle. Cette dernière est justifiée par la composée de deux translations, avec quelques différences de présentations dans les trois manuels étudiés. Concernant les coordonnées d'un vecteur, les trois manuels présentent des définitions semblables :

> Coordonnées d'un vecteur
> Si dans un repère, le point A a pour coordonnées $(x_A ; y_A)$ et le point B a pour coordonnées $(x_B ; y_B)$ alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A)$.

Aucun des trois manuels ne montre que les coordonnées d'un vecteur ne dépendent pas de sa position dans l'espace, contrairement aux coordonnées d'un point. Dans Terracher, une observation est faite sur la façon de calculer les coordonnées d'un vecteur sur du papier quadrillé : "En partant de l'"origine" du vecteur, on compte les carreaux horizontalement, puis verticalement". Cette observation, qui a comme objectif de fournir aux élèves un moyen supplémentaire de calculer les coordonnées d'un vecteur, pourrait aussi servir à illustrer le fait que les coordonnées ne dépendent pas de la position du vecteur dans le plan : si on le déplace selon une translation, la quantité des carreaux horizontaux et verticaux ne change pas !

Seul le manuel Pythagore profite de l'occasion pour définir le vecteur nul et introduire la notation $\vec{0}$. Les auteurs de ce manuel font aussi le lien entre les coordonnées d'un vecteur d'origine O et les coordonnées de l'autre point extrémité qui définit le vecteur.

> **Remarques**[12] :
> Les coordonnées de $\overrightarrow{AA}$ sont (0 ; 0). Ce vecteur est appelé vecteur **nul** et noté $\vec{0}$.
> Les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ sont les coordonnées de M.

3.1.1 - IREM de Strasbourg - 1993

Avant de présenter le cours, ce manuel donne des activités préparatoires à l'introduction de la composition de deux transformations et l'addition vectorielle ; cette dernière étant vue dans

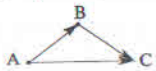
[11] Des extraits des manuels sont donnés dans les annexes du chapitre B2.
[12] Pythagore, 1993, page 221.

les activités sur la composition de deux translations. Dans la partie cours, les auteurs institutionnalisent la composition de deux transformations quelconques[13], et puis l'addition vectorielle est présentée par un "cas particulier" qui aboutira sur la relation de Chasles, généralisée par la suite. Donnons ci-dessous l'extrait du manuel (IREM de Strasbourg, p. 167)

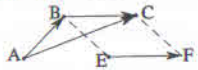
Cas particulier : Soient trois points A, B et C. La translation de vecteur $\vec{AB}$, suivie de la translation de vecteur $\vec{BC}$ est la translation de vecteur $\vec{AC}$.

On dit que le vecteur $\vec{AC}$ est la somme des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$ et on écrit $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

Relation de Chasles : Pour tous points A, B et C, on a $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

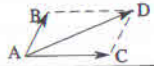


Cas général : Soient quatre points A, B, C et F. Le point C tel que $\vec{AB} + \vec{EF} = \vec{AC}$ est le point C tel que $\vec{BC} = \vec{EF}$.



Règle du parallélogramme :

Soient trois points A, B et C. Le point D tel que $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ est le quatrième sommet du parallélogramme ABCD de côtés AB et AC.



Le "cas général" n'est justifié que par le dessin qui est donné à côté des définitions : le manuel ne parle pas de l'invariance de l'addition vectorielle par rapport au représentant choisi, ni même de l'indépendance du résultat de l'addition de deux vecteurs par rapport à l'ordre de ces vecteurs. En résumé, on ne donne aux élèves que des procédés pour additionner deux vecteurs donnés.

3.1.2 - Terracher - 1993

Après avoir définit la composée de deux translations[14], les auteurs introduisent la somme de deux vecteurs comme suit :

[13] La composée de deux tranformations est définie de la façon suivante : "Transformer une figure $\mathcal{F}$ par la transformation t_1 suivie de la transformation t_2, c'est construire $\mathcal{F}_1$ l'image de $\mathcal{F}$ par t_1, puis $\mathcal{F}_2$, l'image de $\mathcal{F}_1$ par t_2."

[14] "L'action successive, sur une figure, d'une translation de vecteur $\vec{AB}$, suivie d'une translation de vecteur $\vec{BC}$, est identique à l'action de la translation de vecteur $\vec{AC}$." (Terracher, page 225)

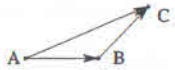
•De quoi s'agit-il ?

Dans la situation précédente, on dit que le vecteur $\vec{AC}$ est la somme des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{BC}$.

On écrit : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.

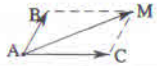
•La somme $\vec{AB} + \vec{BC}$ (Relation de Chasles):

Quels que soient les points A, B et C : $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$.



•La somme $\vec{AB} + \vec{AC}$ (règle du parallélogramme)

La somme des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ est le vecteur $\vec{AM}$ tel que BACM soit un parallélogramme.



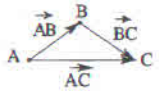
Dans ce manuel un seul chapitre est consacré aux vecteurs, intitulé "*Autour des vecteurs et du repérage*". La partie cours ne contient aucun commentaire sur l'addition vectorielle de deux vecteurs qui n'ont pas même origine. Cela sera traité lors des exercices résolus, et à cette occasion il est remarqué que "La somme de deux vecteurs *ne dépend pas de l'ordre* dans laquelle on l'effectue", mais aucune justification de cette affirmation n'est fournie. Il est à noter que dans la partie cours on ne donne pas beaucoup d'informations sur l'addition vectorielle et ses propriétés; cela sera fait dans les parties "exercices résolus" et "méthodes".

3.1.3 - Pythagore - 1993

Comme pour les deux autres manuels, on retrouve tout d'abord une définition pour la composition de deux translations[15], qui sert à justifier l'addition vectorielle.

Propriété de Chasles :

Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$.



[15] "Appliquer la translation t de vecteur $\vec{AB}$, puis la translation t' de vecteur $\vec{BC}$ revient à appliquer la translation t" de vecteur $\vec{AC}$".

Dans la partie cours, les auteurs ne présentent que la propriété de Chasles, suivie de la définition de l'opposé d'un vecteur. Dans la suite ils exposent les "méthodes", et à cette occasion on voit apparaître les techniques de "mise bout-à-bout" et le parallélogramme.

La somme de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$:
i) on construit C tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$, résultat : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$. (mise bout à bout)
ii) On construit C tel que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EF}$; On construit D tel que ABDC soit un parallélogramme ; résultat : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF}$. (diagonale d'un parallélogramme)

Dans le manuel Pythagore, la partie du programme concernant les vecteurs et les translations est traitée dans un seul chapitre intitulé "Translations, vecteurs". Les transformations géométriques sont étudiées dans le chapitre suivant et le vecteur apparaît très brièvement pour la translation.

3.2 - Conclusion pour la partie cours

Aucun manuel ne démontre l'indépendance de l'addition vectorielle par rapport aux représentants choisis. De même aucun travail n'est fait sur l'invariance des coordonnées d'un vecteur par rapport à sa position dans le plan.

L'opération d'addition vectorielle, introduite en Troisième est fortement basée sur le dessin, en particulier le parallélogramme. Ainsi, une fois de plus l'accent pour l'enseignement des vecteurs est mis sur les aller-retours entre les registres graphique, symbolique géométrique et symbolique vectoriel. Le parallélogramme aura, comme pour la Quatrième, une place centrale dans l'enseignement des vecteurs en classe de Troisième.

L'analyse de la partie cours des manuels de Troisième montre qu'il n'y a pas de changements par rapport à ce qui était fait en classe de Quatrième autour de la notion de vecteur. La seule différence étant l'introduction d'une opération, l'addition vectorielle, ce qui peut fournir un nouvel outil lors de la résolution de problèmes. Dans l'analyse des exercices, nous chercherons à déterminer si le vecteur est véritablement un outil de résolution en Troisième ou s'il s'agit toujours d'un outil économique au niveau de l'écriture de certaines propriétés géométriques.

3.3 - La partie exercices

Nous analyserons d'abord les exercices du manuel IREM de Strasbourg suivie d'une conclusion portant sur les types d'exercices rencontrés, les tâches demandées et la place du

registre vectoriel dans la résolution. Pour les manuels Terracher et Pythagore, nous faisons une analyse des exercices, en procédant quelquefois à des comparaisons entre les manuels quand il y a des différences entre eux. Ainsi, nous ne ferons pas à chaque fois une conclusion à propos de chaque manuel ; celle-ci sera donnée synthétiquement dans la conclusion de l'analyse des exercices des trois manuels.

3.3.1 - IREM de Strasbourg

Dans cette collection, deux chapitres traitent des vecteurs. Tout d'abord le chapitre intitulé "Démonstrations : un outil de plus, le vecteur" puis "Transformations - sommes de vecteurs", consacré à l'étude des transformations et de l'addition vectorielle.

Dans le chapitre "Démonstrations : un outil de plus, le vecteur", les définitions et propriétés données en Quatrième à propos des vecteurs et des translations sont rappelées, puis les coordonnées d'un vecteur sont introduites. L'usage du mot "outil" dans le titre du chapitre de ce manuel se rapporte en fait à l'économie d'écriture qui représente les vecteurs. Les exercices donnés sont semblables à ceux rencontrés dans le manuel Terracher pour la classe de Quatrième. Ils sont de deux sortes : des exercices d'application des définitions et des propriétés des vecteurs vues en Quatrième et des exercices qui lient les vecteurs et les transformations. Le vecteur est donc susceptible de fonctionner comme un "outil" au niveau de l'écriture d'une translation. Dans la partie d'exercices résolus, on trouve entre autres "savoir relier l'égalité vectorielle au parallélogramme" et "savoir calculer, lire sur un graphique les coordonnées d'un vecteur". Une fois de plus, il y a un renforcement de la nécessité d'utiliser un parallélogramme pour traiter l'égalité vectorielle ; ce parallélogramme n'est pas nécessairement clair dans la configuration donnée, il s'agit de l'identifier.

Nous n'allons pas détailler ici tous ces exercices car ce sont des reprises de ce qui a été vu l'année précédente ; nous nous contenterons de présenter un exercice pour illustrer les attentes des auteurs du manuel. Pour l'analyse de l'exercice nous donnons une résolution géométrique et une résolution utilisant le registre vectoriel, puis une comparaison entre les deux résolutions est faite.

Exercice **H**[16], page 28
Une autre démonstration du théorème des milieux
1) Tracer un triangle ABC et marquer les points I et J milieux respectifs des côtés AB et AC. Construire le point E symétrique du point I par rapport à J.
2) Quelle est la nature du quadrilatère AICE ?
3) Ecrire deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AI}$. En déduire la nature du quadrilatère IECB.
4) Retrouver la conclusion du théorème des milieux.

[16] Cet exercice est présenté sous la rubrique "Démontrer en utilisant les vecteurs".

Faisons d'abord un dessin avec les données de l'exercice :

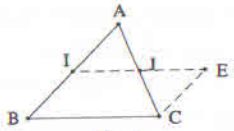


Fig. 3

Pour les deux résolutions que nous présentons ci-dessous, nous partons du fait que AICE est un parallélogramme (car ses diagonales se coupent en leur milieu) et qu'il faut alors retrouver la conclusion du théorème des milieux.

résolution a) AICE parallélogramme ⇒ (AI)//(CE) et AI=EC

Comme IB=AI on a EC=IB et (EC)//(IB) ⇒ IECB parallélogramme ⇒ IE=BC

Comme E est symétrique de I par rapport à J on a IJ=1/2IE

Alors IJ=1/2BC et (IJ)//(BC) .

résolution b) AICE parallélogramme ⇒ $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{EC}$ et I milieu de AB ⇒ $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$

i) Par la transitivité de l'égalité vectorielle on a $\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{IB}$, alors IECB est un parallélogramme et $\overrightarrow{IE}=\overrightarrow{BC}$. Ce qui donne (IE)//(BC).

ii) Comme E est le symétrique de I par rapport à J, on conclut que $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{JE}$.

Alors on a IJ=JE ce qui signifie que IJ=1/2IE=1/2BC.

De i) et ii) nous concluons que (IJ)//(BC) et IJ=1/2BC

La résolution b) est celle proposée par les auteurs du manuel. L'exercice tel qu'il a été énoncé, rend cette résolution facilement accessible aux élèves car ils sont guidés dans les pas à suivre pour arriver à la conclusion. Mais si nous analysons les deux résolutions, ne prenant en compte que le fait qu'il faut montrer le théorème des milieux, la résolution vectorielle peut être lue comme moins économique pour les élèves car elle fait appel à des objets nouveaux moins bien maîtrisés et à des changements de registres dont on sait l'absence de maîtrise pour les élèves. De plus, comme le produit par un réel n'est pas présenté en Troisième, on ne peut pas utiliser la relation vectorielle $\overrightarrow{IJ}=1/2\overrightarrow{IE}$, ce qui oblige à revenir sur les propriétés géométriques de l'égalité vectorielle pour en tirer la conclusion du théorème des milieux.

Les deux résolutions font appel aux même propriétés géométriques, la différence se situe au niveau de l'écriture : une écriture vectorielle contracte plus d'informations qu'une écriture géométrique. Nous pouvons donc voir, dans cet exercice le souci des auteurs de familiariser les élèves à l'usage des vecteurs et du registre symbolique vectoriel, et d'établir des liens entre l'égalité vectorielle et ses correspondants géométriques.

A propos de la caractérisation vectorielle du milieu d'un segment

En classe de Quatrième, la relation vectorielle $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$, qui caractérise le fait que I soit milieu du segment [AB], n'apparaît pas dans la partie cours des manuels. Seul le manuel Terracher la présente et ce dans les exercices résolus. En classe de Troisième le manuel IREM de Strasbourg l'introduit et Terracher en fait un rappel, tandis que le manuel Pythagore ne fait aucune mention à cette relation.

Les exercices sur les coordonnées d'un vecteur sont aussi donnés dans ce chapitre : il s'agit de savoir lire les coordonnées d'un vecteur sur un graphique et de calculer les coordonnées d'un point qui doit satisfaire à certaines propriétés géométriques. Par exemple, connaissant les coordonnées de trois points A, B et C calculer les coordonnées d'un point D de façon à ce que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. La notation vectorielle apparaît pour un exercice parmi les 5 proposés : connaissant les coordonnées des points A, B et C, il faut déterminer les coordonnées du point E, image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Passons maintenant à une analyse plus systématique des exercices résolus et proposés du chapitre 11 : "Transformations - sommes de vecteurs".

3.3.1.1 - Exercices résolus

Dans la rubrique "Ce qu'on attend de moi", un exercice est intitulé "Savoir construire la somme de deux vecteurs"[17] et consiste à donner une méthode de construction pour l'addition vectorielle. Nous donnons ci-dessous l'énoncé de cet exercice :

> 3. Savoir construire la somme de deux vecteurs
> Marquer quatre points A, B, C et D.
>
> Construire le point M tel que $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Expliquer.

Deux méthodes de résolution sont données : construire la somme $\overrightarrow{AE}$ de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et ensuite, à partir du point D construire un représentant $\overrightarrow{DM}$ de $\overrightarrow{AE}$; ou mettre "bout à bout" deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en partant du point D. Dans les deux cas il n'y a pas d'explication sur la façon de construire un représentant d'un vecteur ; cela peut être fait "'au jugé" ou peut être une construction au sens propre du terme, c'est-à-dire une construction reposant sur des propriétés géométriques. Cela dépend du contrat en vigueur et la décision

[17] Les deux autres exercices portent sur la symétrie centrale et la rotation.

est laissée à la charge de l'élève ou de l'enseignant, car le manuel ne comporte aucune explication du terme "construire".

Relativement à la classification des exercices que nous avons donnée en début de ce chapitre, nous classons cet exercice comme un exercice du type V(graV)gra : en effet, il s'agit ici d'interpréter l'écriture vectorielle pour construire le point M. Le registre de la résolution est graphique parce qu'elle passe par la construction d'une figure, et vectoriel car la résolution est donnée dans ce langage. Il est à noter que derrière le graphique et le vectoriel, il existe des propriétés géométriques qui sont utilisées sans qu'on soit obligé de les expliciter, c'est pourquoi nous n'avons pas mis le registre géométrique comme faisant partie du registre de la résolution. En cela cet exercice diffère des exercices de Quatrième où le géométrique est explicite.

3.3.1.2 - Exercices proposés

Dans le chapitre 11 "Transformations - sommes de vecteurs", on trouve d'abord une série d'exercices "De A à Z, exercices pour tous" pour utiliser les définitions et les propriétés des transformations et des vecteurs. Ces derniers sont mis sous le titre :"Sommes de vecteurs". La deuxième série d'exercices, "Je m'entraîne", est composée de problèmes où il s'agit d'utiliser les mêmes résultats mais qui demandent davantage de recherche. Ces problèmes ne consistent pas à mettre en œuvre une application immédiate des résultats vus en cours. Avant de donner quelques exemples d'exercices proposés et de les commenter, nous donnons ci-dessous un tableau-résumé de tous les exercices proposés avec le chiffre d'exercices par item et les propriétés à utiliser.

titre des séries	sous-titre[18]	items à l'intérieur de sous-titres[19]
De A à Z, exercices pour tous (23)	transformations (5)	
	reconnaître une transformation (3)	
	démontrer en utilisant transf (5)	
	sommes de vecteurs (10)	constructions (3) (à partir de points données construire la somme de deux vecteurs) relation de Chasles et simplifications (2) règle du parallélogramme (5)
Je m'entraîne (53)	transformations (~~16~~) (7)	constructions (3) composée de transformations (5) (1) reconnaître des transformations (8) (5)
	rotation (4)	
	symétrie et translation (5) (1)	(image d'un point par transl + montrer ppté géo)
	sommes de vecteurs (28)	construction (9) relation de Chasles (5) règle du parallélogramme (8) démonstrations utilisant la relation de Chasles (6) (constructions de points obéissant à des rel vectorielles + ppté géo (4) ou construction géo + montrer relation vectorielle (2))
Je mets en pratique (21)	transformations (4)	
	démonstrations (7)	
	sommes de vecteurs (10)	constructions (10)
Recherche (8)	constructions (~~7~~) (1)	
	démontrer (~~1~~)	

Avant de passer aux exemples d'exercices, voici une classification des tâches demandées dans les exercices proposés :

- des points quelconques étant donnés on demande de construire la somme des vecteurs définis à partir de ces points ;
- basée sur une configuration donnée ou à faire, simplifier une addition vectorielle (par Chasles ou la règle du parallélogramme) ;
- effectuer la construction de points obéissant à des relations vectorielles, puis montrer une propriété géométrique ;
- faire une construction basée sur des propriétés géométriques et, à partir de la configuration obtenue montrer une relation vectorielle.

Dans tous les exercices le registre vectoriel fait partie de l'énoncé ; dans la plupart des exercices le vecteur est présent dans le registre de départ (dans les données) et pour une minorité il est présent dans le registre de la réponse. À la fin de l'analyse des exercices résolus, nous reviendrons sur les types d'exercices rencontrés et les registres utilisés.

[18] Nous rappelons que les chiffres barrés rendent compte de la quantité d'exercice de l'item ayant des notations vectorielles ou non ; les chiffres en gras représentent la quantité d'exercices qui portent sur des vecteurs.
[19] Les titres de chaque item fournissent déjà des données sur ce que l'élève doit faire dans les exercices ; quand cela n'est pas le cas, nous l'expliciterons brièvement entre parenthèses.

Débutons notre étude par l'exemple d'un exercice qui se place dans la première classe de problèmes indiquée ci-dessus[20] :

> Placer trois points A, B et C non alignés, puis un point D sur la droite AB.
> Construire les vecteurs suivants (faire des figures séparées) :
> a) $\vec{AB} + \vec{BC}$ e) $\vec{CA} + \vec{CB}$ j) $\vec{AD} + \vec{BC}$

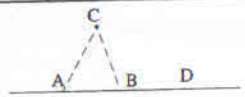


Fig. 4

Cet exercice fait pratiquer aux élèves les procédés de construction de l'addition vectorielle. Pour résoudre l'item a) on peut appliquer directement la relation de Chasles, pour l'item e) il s'agit de la règle du parallélogramme et pour l'item j) il faut tracer un représentant du vecteur somme en partant du point A ou du point B, par exemple. D'une manière générale nous pouvons dire qu'il s'agit ici d'un exercice du type vectoriel/graphique. En effet, on part d'un dessin et des notations vectorielles pour aboutir à la construction d'une addition vectorielle sur ce dessin. Dans les termes de notre classification de registres, cet exercice est classé comme graV(graV)gra. L'usage du parallélogramme, par exemple pour la construction de $\vec{AD} + \vec{BC}$ est bien sûr géométrique, mais comme il n'est pas nécessaire de l'expliciter, cela peut-être vu comme un usage en acte : on n'est pas obligé de l'expliciter.

La définition d'un vecteur nul est donnée à l'occasion d'un exercice de ce chapitre comme une convention de notation. Nous transcrivons ci-dessous l'énoncé de cet exercice :

> Exercice O (page 171) :
> Placer trois points A, B et C non alignés et le point I milieu du segment AB.
> Par convention, on écrit : $\vec{AA} = \vec{0}$, $\vec{BB} = \vec{0}$ ...

Donnons maintenant l'exemple d'un exercice donné dans la série "Je m'entraîne", dont le sous-titre est "Démonstrations utilisant la relation de Chasles" :

> Exercice 48, page 179 :
> Placer quatre points A, B, C et D non alignés, puis construire le point E tel que :
> $\vec{AE} = \vec{BC} + \vec{AD} + \vec{CA}$.
> Que peut-on dire du quadrilatère AEDB ? Justifier.

[20] Il s'agit de l'exercice N, page 171, donné dans la série "De A à Z, exercices pour tous".

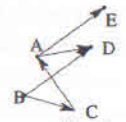


Fig. 5

Pour résoudre cet exercice on peut soit construire la somme $\vec{BC} + \vec{AD}$ et faire ensuite la somme du vecteur obtenu avec le vecteur $\vec{CA}$, soit faire des simplifications dans la deuxième partie de la relation vectorielle et arriver ainsi au fait qu'il faut construire E tel que $\vec{AE} = \vec{BD}$. En utilisant la relation entre le parallélogramme et l'égalité vectorielle on arrive à la réponse : AEDB est un parallélogramme car $\vec{AE} = \vec{BD}$. Cela veut dire qu'une réponse à cet exercice peut être fournie sans que le dessin soit fait, mais ceci n'est pas dans les intentions des auteurs, car il est dit dans l'énoncé de "construire" le point E tel que ... Cet exercice met donc en évidence le souci des auteurs de faire pratiquer aux élèves les aller-retours entre une configuration et ses propriétés géométriques et vectorielles, et le passage par le registre graphique.

En dernier lieu, nous voulions revenir sur la question de la présence du registre graphique dans presque tous les exercices proposés. En effet, parmi les 57 exercices proposés autour des vecteurs, il y en a seulement 3 dont l'énoncé n'est pas dans le registre graphique et dont la résolution peut être faite sans passer par le graphique. Cela ne veut pas dire que les élèves n'auront pas une tendance à le faire, car ils peuvent se sentir plus à l'aise s'ils ont un dessin pour les guider, mais cela est une autre histoire ....[21] Voici l'un de ces trois exercices :

> Exercice 36, page 178 :
> Soient les points A, B, C et D ; parmi les égalités suivantes, indiquer celles qui sont vraies :
> a) $\vec{CA} + \vec{BA} = \vec{BC}$ b) $\vec{CB} + \vec{CA} = \vec{AB}$ c) $\vec{AB} + \vec{CA} + \vec{BD} = \vec{CD}$
> d) $\vec{AB} + \vec{CA} = \vec{CB}$ e) $\vec{BA} + \vec{CA} + \vec{BD} = \vec{CD}$ f) $\vec{BA} + \vec{CB} = \vec{CA}$

3.3.2 - Conclusion

D'une manière générale les données des exercices sont présentées conjointement en registre symbolique géométrique et/ou graphique et registre symbolique vectoriel. Certains exercices demandent une production graphique d'une somme vectorielle, d'autres une démonstration. Ce qui est à montrer est soit une propriété vectorielle (par exemple, la simplification d'une somme), soit une propriété géométrique (par exemple, trouver des parallélogrammes dans une configuration donnée). Dans les deux cas, les propriétés les plus utilisées sont les

[21] Dans le chapitre D, nous reviendrons sur cette discussion.

propriétés d'un parallélogramme traduites en termes vectoriels et vice-versa, ainsi que les propriétés géométriques du vecteur (direction, sens et longueur).

La grande majorité des exercices comporte un dessin déjà donné ou à faire, ce qui montre l'importance du registre graphique dans l'enseignement des vecteurs au collège. Et nous pouvons ainsi affirmer qu'il n'y a pas de changement conceptuel par rapport à ce qui a été fait en Quatrième : le vecteur est toujours attaché à deux points et on utilise des procédés géométriques pour résoudre les exercices, même si le géométrique est absent de la solution rédigée.

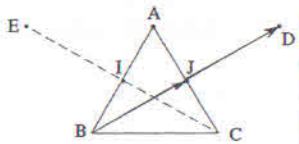
Nous pouvons encore constater qu'en classe de Troisième, l'utilisation du registre vectoriel dans la rédaction de la résolution de l'exercice est présente dans presque tous les exercices, contrairement à ce qui se passait l'année précédente. En Quatrième, il s'agissait de faire pratiquer aux élèves les conditions d'application de l'égalité vectorielle, et à ce moment il fallait montrer des propriétés géométriques, telles que même direction, même sens et même longueur, qui normalement pourraient être lues sur une configuration à partir de ses propriétés. En Troisième, même si on utilise des propriétés géométriques, lors de la rédaction de la résolution d'un exercice ces propriétés peuvent être mises sous la notation vectorielle ; rappelons la démonstration vectorielle fournie pour le théorème des milieux. Finalement, nous pouvons dire que si les vecteurs ne représentent pas un outil économique au niveau de la résolution de l'exercice, ils représentent au moins une économie au niveau de la rédaction de la résolution.

3.3.3 - Terracher

3.3.3.1 - Exercices résolus

Après la partie cours, le manuel donne quelques exercices résolus qui ont pour but de déboucher sur des méthodes pour résoudre des problèmes avec les vecteurs. Il s'agit de problèmes de géométrie : d'une manière générale les élèves doivent traduire des propriétés géométriques en termes de vecteurs, découvrir alors d'autres propriétés puis retourner au géométrique. Les thèmes traités ici sont : "*Savoir utiliser les vecteurs*", "*Savoir additionner deux vecteurs*", "*Savoir exploiter des égalités vectorielles*", "*Savoir travailler avec des coordonnées*" et finalement "*Savoir calculer des distances*" et "*Savoir étudier les propriétés d'une figure*", dans lesquels il n'y a pas de vecteurs. Pour les trois premiers thèmes, il s'agit surtout de travailler sur une configuration. Le premier et le troisième thèmes sont en fait des révisions des propriétés vues en Quatrième. Nous transcrivons ci-dessous l'exemple donné pour illustrer le thème 1, "*Savoir utiliser les vecteurs*", page 227 :

Dans la figure ci-contre:
I et J sont les milieux de [AB] et [AC] ;
E est le symétrique de C par rapport à I
D est le symétrique de J par la translation de vecteur $\overrightarrow{BJ}$.
Préciser la position des points E, A et D.



La résolution donnée par les auteurs met en œuvre des équivalences entre des propriétés géométriques qui sont par la suite traduites en registre symbolique vectoriel. On montre que EACB est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{BC}$, et de même on montre que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Puis, par la transitivité des égalités vectorielles on montre que $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AD}$ ce que veut dire que E est le milieu du segment [ED]. Ce sont les propriétés géométriques du parallélogramme qui sont utilisées ; autrement dit, l'utilisation des vecteurs dans l'exercice relève du contrat mis en place avec l'introduction du vecteur, le but de l'exercice est de mettre en œuvre le lien entre l'égalité vectorielle et soit le parallélogramme soit la configuration du milieu d'un segment. L'utilisation des vecteurs provient donc très probablement du souci des auteurs de faire pratiquer des passages entre propriétés géométriques et égalités vectorielles. L'exercice met en jeu deux changements de registres, du géométrique au vectoriel, puis du vectoriel au géométrique et nous le classons graVG(graGV)G. Il met en jeu une partie des aller-retours ensuite explicités par les auteurs (Terracher, p. 227) :

1. Le tableau suivant illustre comment une *égalité de vecteurs* peut être traduite *géométriquement* (et inversement).

égalité de vecteurs				
$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$	translation qui amène A sur A' = translation qui amène B sur B'.	(AA')//(BB') [AA') et [BB') de même sens AA'=BB'	AA'B'B est un parallélogramme	[AB'] et [A'B] ont même milieu

Ceci renforce notre hypothèse selon laquelle l'enseignement des vecteurs dans le secondaire repose sur l'aller et retour entre les différents registres de représentation sémiotique ; l'idée qui est ici exprimée de façon explicite est de faire pratiquer aux élèves des changements de registres. En effet, suite à cette première méthode on rencontre une méthode pour étudier une figure géométrique à l'aide des vecteurs qui consiste à suivre les étapes suivantes :

- on traduit vectoriellement les propriétés de la figure ;
- on "travaille avec les vecteurs" ;
- on traduit géométriquement les résultats obtenus vectoriellement.

3.3.3.2 - *Exercices proposés*

Les exercices du chapitre sur les vecteurs commencent par une série de "*Vrai ou faux* ?" où il faut appliquer directement des notions vues dans le cours : l'égalité vectorielle, l'addition vectorielle, les transformations et les propriétés géométriques qui en découlent. Après cette série d'exercices, 99 exercices traitent cette fois plus particulièrement du contenu enseigné en Troisième. Finalement sont proposés 5 problèmes qui sont un peu plus élaborés, pour lesquels on doit utiliser les concepts et propriétés vus dans le cours. Nous donnons ci-dessous un tableau résumé de ces exercices, pour les commenter ensuite.

titre des séries d'exercices	sous-titre des exercices	thèmes et (propriétés à mettre en œuvre[22])
Vrai ou faux (~~25~~) **(21)**		égalité vectorielle ⇔ milieu ou parallélogramme addition vectorielle (Chasles et/ou parallélogramme) composition de deux translations coordonnées d'un vecteur distance (4)
Exercices (~~94~~) **(46)**	vecteur et translation **(18)**	entretien **(4)** égalité vectorielle et pptés géométriques **(14)**
	somme de deux vecteurs **(18)**	composée de translations **(3)** constructions **(8)** égalités **(9)** propriétés géométriques **(7)** points variables **(1)**
	coordonnées d'un vecteur (~~48~~) **(20)**	calcul direct/lecture **(7)** propriétés géométriques **(9)** somme de vecteurs et coordonnées **(4)** distance (~~28~~)
Lire et comprendre un énoncé (~~5~~) **(2)**		(égalité vectorielles et parallélogramme) (addition vectorielle-règle du parallélogramme)
Problèmes (~~5~~) **(4)**		égalité et addition vectorielle

Ces exercices mettent en œuvre des propriétés géométriques du parallélogramme, même si celui-ci n'est pas toujours donné explicitement : quelquefois il s'agit d'une configuration où on doit identifier un parallélogramme. La résolution de la majorité des exercices nécessite un dessin soit déjà construit, soit à construire. Le registre symbolique vectoriel est aussi présent dans l'énoncé. Comme pour l'année précédente et aussi pour les autres collections, la plupart des exercices exige une interprétation et non une production d'une écriture vectorielle ; et quand on doit la produire on lit sur la figure des propriétés géométriques données, on les traite géométriquement pour conclure sur des relations vectorielles.

22 Quand les titres des thèmes des exercices ne suffisent pas à comprendre le type d'exercice, nous donnons, entre parenthèses les propriétés à mettre en œuvre.

Avant de passer à des exemples d'exercices, nous faisons une classification des tâches demandées dans les exercices proposés[23] :

- basée sur une configuration donnée ou à faire, simplifier une addition vectorielle (par Chasles ou la règle du parallélogramme) ;
- construction de points obéissant à des relations vectorielles et montrer une propriété géométrique ;
- sur une configuration donnée ou à faire montrer une relation vectorielle (égalité vectorielle, addition vectorielle et caractérisation vectorielle du milieu d'un segment) et montrer une propriété géométrique ;
- des vecteurs d'origines distinctes sont donnés, et il faut construire un représentant de la sommes de deux vecteurs, d'origine un point donné quelconque du plan ;
- calculer les coordonnées d'un vecteur en connaissant les coordonnées de ses points extrémités et montrer une propriété géométrique (y compris la translation) ;
- calculer les coordonnées d'un vecteur défini par des points donnés sur du papier quadrillé.

Donnons un exemple d'une exercice classé dans la troisième des catégories mises ci-dessus :

> Exercice 11, page 233.
> 1° Tracer un losange ABCD, puis placer les points E, F et G, images respectives de B, C et D par la translation $t_{\overrightarrow{AC}}$.
>
> 2° a) Citer tous les "vecteurs de la figure" égaux au vecteur $\overrightarrow{GC}$.
> b) Vrai ou faux ? • (CF) ⊥ (GE) • BEGD est un rectangle.
> 3° Quelle condition imposer au triangle ABC pour que ABEFGD soit un hexagone régulier ?

Dans l'item 1°, on construit une figure géométrique et on applique ensuite la translation de vecteur donné : on trace des représentants du vecteur $\overrightarrow{AC}$ ayant différentes origines. Ensuite, pour l'item 2°, partie a), on doit identifier des vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{GC}$ sur la configuration obtenue : il s'agit de faire pratiquer l'égalité vectorielle en direction, sens et longueur. Pour la partie b) on doit lire des propriétés géométriques sur la configuration. Enfin, pour répondre à l'item 3°, il faut connaître la définition d'un hexagone régulier et puis utiliser le fait que les côtés BE et DG ont la même longueur que (AC), en déduire que le triangle ABC doit être équilatéral et finalement vérifier la conclusion sur les angles. Cet exercice met donc en œuvre la définition d'égalité vectorielle et fait pratiquer des aller-retours entre la lecture des propriétés géométriques sur la figure et leur relecture en langage vectoriel.

23 Dans la classification donnée ci-dessous on peut trouver des énoncés qui peuvent être classés en plus d'une catégorie et d'autres qui ne satisfont qu'une partie de la tâche donnée dans une configuration. Nous faisons ainsi pour que la liste de tâches puisse être présentée de manière résumée.

Relativement à notre classification des registres, chaque item de cet exercice est classé comme suit : 1° LNV(Vgra)Gr ; 2°, a) graG(Ggra)V, b) graGV(graG)G ; 3° graV(graG)G

Remarque :
Nous signalons la présence du registre de la langue naturelle seulement quand les registres de l'écriture symbolique vectoriel et géométrique ne suffisent pas pour exprimer les données de l'exercice. Il est clair que, surtout à ce niveau, le registre de la langue naturelle est présent dans presque tous les exercices. Ainsi quand les seuls registres signalés sont le vectoriel et le géométrique, le registre de la langue naturelle est présent de façon implicite.

Dans le manuel Terracher, il n'existe pas d'exercice qui porte uniquement sur l'utilisation algébrique de la relation de Chasles, comme était le cas pour le manuel IREM de Strasbourg. Le caractère géométrique des exercices est donc très accentué dans ce manuel. Nous donnons ci-dessous l'exemple d'un exercice qui doit faire pratiquer l'addition vectorielle aux élèves. Il s'agit de l'exercice 33, page 235 (le dessin ne fait pas partie de l'énoncé) :

Soit I, J et K les milieux respectifs des côtés [AB], [AC] et [BC] d'un triangle ABC.
a) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{\ldots}$ b) $\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{C\ldots} = \overrightarrow{CI}$
c) $\overrightarrow{BI} + \ldots\overrightarrow{K} = \overrightarrow{BJ}$ d) $\overrightarrow{CJ} + \overrightarrow{KB} = \overrightarrow{\ldots}$
e) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{KC} = \overrightarrow{\ldots}$ f) $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{\ldots} = \overrightarrow{CI}$

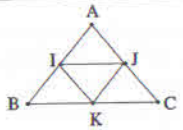


Fig. 6

L'objectif de cet exercice est de faire pratiquer l'addition vectorielle et en particulier la règle du parallélogramme. En utilisant les données de l'énoncé, on doit appliquer plusieurs fois le théorème des milieux pour identifier des parallélogrammes et donc des vecteurs égaux dans la configuration donnée. Pour les items d) e) et f) on est obligé de prendre au moins un représentant de l'un des deux vecteurs pour pouvoir donner la réponse, car on ne peut pas, par exemple appliquer la règle du parallélogramme ou la mise bout-à-bout aux vecteurs $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{KB}$. Pour revenir à notre classification sur les registres de représentation sémiotiques utilisés, cet exercice est classé graV(graV)V. Les propriétés géométriques qui sont à utiliser dans la résolution de l'exercice peuvent apparaître sous une forme vectorielle : on utilise le théorème des milieux en écriture géométrique et lorsqu'on doit identifier des parallélogrammes pour effectuer l'addition vectorielle on peut se servir des vecteurs.

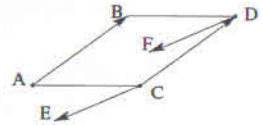
3.3.4 - Pythagore

Après la partie cours, il existe une partie intitulée "*Méthodes : Démontrer, construire*", qui est consacrée à donner des méthodes pour démontrer des résultats qui certainement doivent être utilisés pour la résolution d'exercices. Sur ce thème on rencontre : "*Comment démontrer que ABCD est un parallélogramme* ?", "*Comment démontrer que deux vecteurs sont égaux* ?", *Comment construire la somme de deux vecteurs* ?" et "*Comment construire l'image d'un point par une translation* ?" Dans les méthodes proposées par les auteurs pour démontrer que ABCD est un parallélogramme et que deux vecteurs sont égaux il s'agit de faire pratiquer des allers et retours entre la définition d'un vecteur et les propriétés géométriques du parallélogramme. La méthode donnée pour : "*Comment construire la somme de deux vecteurs ?* ", parle de la technique de "mise bout à bout" et de la "diagonale du parallélogramme", mais il n'est pas dit comment faire pour construire un vecteur égal à un autre. Ce qui se passait en classe de Quatrième se répète en Troisième, le type de construction à effectuer n'est pas clair.

3.3.4.1 - Exercices résolus

Dans cette collection il existe seulement deux exercices résolus ; le premier porte sur le calcul des coordonnées de l'image d'un point par une translation et le deuxième porte sur la démonstration de l'égalité de deux vecteurs. Nous donnons ci-dessous l'énoncé du deuxième exercice et commentons ensuite la résolution proposée.

Enoncé. Démonstration de l'égalité de deux vecteurs (page 224).
Sachant que les points A, B, C, D, E et F vérifient $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{CE}$, démontrer que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$, puis que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$.



Solution
• On a $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE}$ (ppté de Chasles)
Or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ donc ABDC est un parallélogramme d'où $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$
Et de plus par hypothèses $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF}$.
Par conséquent $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF}$, d'où $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ (ppté de Chasles)
• Comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ alors AEFB est un parallélogramme, donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

La nouveauté de cet exercice est la manipulation algébrique des vecteurs, liée à la nouvelle opération introduite, l'addition vectorielle. On utilise la relation de Chasles et la relation entre un parallélogramme et l'égalité vectorielle. Il s'agit d'un exercice du type V(graV)V ; il est à noter que dans la résolution rendue publique il n'y a pas d'explicitation des propriétés géométriques : elles sont présentes (implicitement) dans les relations vectorielles.

3.3.4.2 - Exercices proposés

Dans le manuel Pythagore, les exercices proposés peuvent être placés dans les classes de tâches que nous avons élaborées pour les deux autres manuels. Mais cette fois on ne rencontre pas d'exercice demandant les tâches suivantes :

- des vecteurs d'origines distinctes sont donnés, et il faut construire un représentant de la sommes de deux vecteurs, d'origine un point donné quelconque du plan ;
- calculer les coordonnées d'un vecteur défini par des points donnés sur du papier quadrillé.

Avant de donner des exemples d'exercices qui ne sont pas rencontrés dans Terracher, un tableau résumant les exercices du manuel Pythagore est donné ci-dessous :

titre des séries d'exercices	sous-titre des exercices	propriétés à mettre en œuvre
Savoir faire (41)	translation et vecteurs (8)	tracer image d'une figure par translation de $\overrightarrow{AB}$; sur une configuration, identifier des translations ; aller-retour entre égalité vect, translation et parallél.
	coordonnées de points, de vecteurs (13)	déterminer les coord de $\overrightarrow{AB}$ à partir des coord de A et de B; deux vecteurs égaux ont mêmes coordonnées ;
	composée de translations (6)	identifier les figures obtenues par translation et composition de deux translations.
	somme de vecteurs, constructions (5)	règle du parallélogramme et relation de Chasles
	propriété de Chasles (9)	identifier les conditions d'application de Chasles
Apprendre à démontrer (4)		égalité vectorielle et parallélogramme pptés géométriques du parallélogramme
Chercher (10)	(4) (sans titre)	coordonnées de vecteurs et relations géométriques
	vecteurs et physique (2)	règle du parallélogramme
	vu au Brevet (4)	propriétés géom et vect du parallélogramme ; image de figure par translation d'un vecteur et pptés.

Pour la propriété de Chasles, on trouve 6 exercices faisant directement appel à la géométrie, en partant d'un dessin. En voici un exemple :

Exercice 37, page 227
Soit un parallélogramme ABCD.

Démontrer que pour tout point M du plan, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DM}$.

Il s'agit d'un exercice où l'utilisation d'un dessin peut être évitée. En effet, il suffit d'utiliser la propriété déjà vue en Quatrième et rappelée en Troisième, selon laquelle si ABCD est un parallélogramme alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égal au vecteur $\overrightarrow{DC}$. On applique ensuite directement la relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{DM}$. Mais nous faisons l'hypothèse que l'intention des auteurs du manuel est une fois de plus de faire le lien entre le parallélogramme et l'égalité vectorielle, et ensuite faire pratiquer la relation de Chasles et ce tout en s'appuyant sur un dessin (en particulier pour ne pas se tromper sur le sens des vecteurs). En effet, une fois le parallélogramme dessiné, on observe que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ensuite on observe que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{CM}$ sont mis "bout-à-bout" et on peut conclure l'exercice. Ainsi, en tenant compte de l'intention des auteurs, cet exercice est classé gra(V)V, les propriétés géométriques du parallélogramme étant présentes de façon implicite dans les notations vectorielles.

Il y a un seul exercice qui ne part pas d'un dessin ; on en reste au niveau du calcul vectoriel (ou algébrique), il n'y a pas besoin d'interpréter géométriquement l'énoncé. De plus, nous pensons que l'intention des auteurs est de faire travailler aux élèves la relation de Chasles d'une façon purement algébrique. Il s'agit de l'exercice n°35, page 227 :

Simplifier les sommes suivantes :

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}$

c) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EB}$ d) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{BC}$

La résolution de cet exercice utilise la propriété de Chasles comme un outil de réduction d'une somme vectorielle, il s'agit d'une application directe du résultat vu en cours. L'objectif de l'exercice est de faire pratiquer aux élèves la relation de Chasles et les conditions de son application, tout en se détachant du dessin. En Seconde, comme nous le verrons plus tard, on rencontrera des exercices qui utilisent la relation de Chasles de la même façon. Cet exercice est alors classé V(V)V. Rappelons que ce type d'exercice n'apparaît pas dans Terracher.

Parmi les 55 exercices proposés, seuls 7 exercices ne contiennent pas d'expression vectorielle dans leur énoncés. Sur ces 7 exercices, 4 donnent des figures et il faut identifier la translation qui transforme une figure 1 en une figure 2 (le vectoriel doit apparaître dans la réponse) ; 2 autres exercices consistent à montrer une relation géométrique, à partir des

coordonnées des quelques points donnés (à ce moment les vecteurs peuvent ne pas apparaître) ; et le dernier de ces exercices porte sur la physique, et là on doit utiliser l'addition vectorielle liée au parallélogramme. Les énoncés des 48 autres exercices ont recours conjointement au registre graphique, au registre symbolique géométrique et au registre symbolique vectoriel.

Les translations sont rencontrées aussi dans le chapitre 13 "Transformations géométriques". Les exercices qui traitent des translations demandent d'identifier la transformation qui passe d'une figure 1 à une figure 2.

3.4 - Conclusion pour la Troisième

Concernant l'enseignement des vecteurs, il n'y a pas de rupture entre la Quatrième et la Troisième. La différence est qu'en Troisième on en vient à étudier les vecteurs en tant qu'objet d'étude (sans les définir dans un cadre vectoriel) et une opération est introduite, l'addition vectorielle. Dans les trois manuels analysés, même s'il y a des façons différentes de présenter le contenu, la notation pour un vecteur, la définition d'un vecteur, sa représentation graphique etc., sont les mêmes. Enfin le point de vue sur les vecteurs en Troisième est le même que celui en Quatrième, ce qui nous permet donc de conclure qu'au collège le vecteur est vu comme un objet géométrique.

Le seul moment où le vecteur semble être un outil économique est dans l'écriture de la définition de la translation, mais on est alors obligé de revenir soit au parallélogramme, soit à l'égalité de direction, sens et longueur. Autrement dit, les vecteurs ne sont pas indispensables. Ceci se passe en classe de Quatrième, et en Troisième on va utiliser la composition de transformations pour justifier l'addition de deux vecteurs. Enfin, entre la translation et les vecteurs il existe une relation dialectique : on définit les vecteurs, ensuite on les utilise pour définir une translation, puis on travaille la composition de deux translations ce qui permet d'introduire l'addition vectorielle !

Concernant la distinction entre un vecteur et son représentant, aucun travail systématique n'est fait au niveau collège. En effet, au moment de l'introduction des coordonnées d'un vecteur, aucun des trois manuels étudiés ne traite l'indépendance des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ par rapport aux positions de A ou de B dans le plan. De même, un seul manuel (Terracher) fait référence au fait que le résultat de l'addition vectorielle ne dépend pas du représentant choisi.

Types de problèmes et l'usage des différents registres de représentation sémiotique

Il existe des exercices où le vecteur est un outil au niveau de l'écriture pour les problèmes autour de translation, et il existe d'autres exercices où les propriétés vectorielles sont l'objet du problème. Mais si d'un côté l'usage du vecteur en tant qu'outil de résolution de problèmes de géométrie est artificiel, d'un autre côté il s'agit d'exercices d'entraînement, de mises en œuvre des procédés, demandant un type bien défini de compétences. Exceptés les exercices de rappel de la Quatrième, les nouveaux exercices portent sur l'addition vectorielle et les coordonnées d'un vecteur. Sur ces thèmes, nous pouvons distinguer, quatre types de tâches :

(i) Identifier sur une configuration donnée une addition vectorielle : il faut identifier par exemple, que sur un parallélogramme ABCD, on a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$;

(ii) Construire des points qui obéissent à une relation vectorielle. Par exemple, un parallélogramme ABCD est donné, il faut construire un point M, tel que $\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{AC}$;

(iii) Simplifier une expression vectorielle en utilisant la relation de Chasles, exercice qui peut être purement algébrique ;

(iv) Calculer les coordonnées d'un vecteur à partir de ses extrémités.

Un même exercice peut demander plus d'une des tâches décrites ci-dessus. De plus ces tâches constituent un premier pas de l'exercice qui demande par la suite de montrer une propriété géométrique ou une propriété vectorielle. Enfin il existe des problèmes sur la composition de deux translations. Nous n'allons pas les détailler car il s'agit d'exercices où le vecteur intervient au niveau de la définition de la translation ; il n'est pas l'objet du problème.

En Troisième nous pouvons noter une tentative de la part des auteurs des manuels à mettre en évidence les avantages à utiliser les vecteurs pour résoudre des exercices de géométrie, parfois de façon explicite, comme l'a fait par exemple la collection IREM de Strasbourg en donnant "une autre démonstration du théorème des milieux". Ce sont les auteurs des manuels qui qualifient d'avantageux le fait d'utiliser les vecteurs pour résoudre des problèmes de géométrie, car il s'agit en réalité plutôt d'une traduction de propriétés géométriques en propriétés vectorielles qui n'apporte pas de solution plus efficace.

Relativement aux aller-retours entre le vectoriel et le géométrique, une différence entre la Quatrième et la Troisième est qu'on rencontre un nombre important d'exercices où il n'est pas nécessaire d'expliciter les propriétés géométriques qui sont sous-jacentes aux écritures vectorielles. Par exemple, dès qu'il y a un parallélogramme dans une configuration, on peut écrire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$, et continuer ainsi à rédiger la solution de l'exercice en n'utilisant que le registre symbolique vectoriel.

L'accent mis sur l'utilisation des vecteurs pour la résolution d'exercices de géométrie relève de l'intention didactique d'entraîner les élèves au calcul vectoriel. En fait, nous n'avons pas trouvé de problèmes dans ces manuels où le vecteur représente un outil efficace ou économique pour la résolution. Le vecteur se réduit essentiellement à un changement de notation : on donne le nom de "vecteur" à un objet géométrique déjà connu par les élèves, "un segment orienté avec sa longueur". En conclusion, nous pouvons dire que les vecteurs au collège représentent un entraînement aux premières notions vectorielles, notamment l'égalité et l'addition vectorielle. Il s'agit surtout d'introduire une nouvelle notion et de familiariser les élèves avec cette notion, d'introduire une opération sur ces nouveaux objets et quelques propriétés. Nous pouvons donc interpréter l'enseignement des vecteurs dans la classe de Troisième comme une introduction à la géométrie vectorielle.

4 - Les vecteurs en classe de Seconde

A la sortie du collège, les vecteurs ne représentent donc pas vraiment un nouvel outil pour résoudre des problèmes de géométrie car il s'agit essentiellement d'une introduction à l'enseignement des vecteurs. Une fois au lycée, le contenu à enseigner subit une modification nette et d'après les programmes, les vecteurs devront servir à l'étude des configurations qui tient une place centrale dans l'enseignement de la géométrie. Comme nous l'avons précisé lors de la définition de notre problématique, notre intérêt principal est centré sur la classe de Seconde où les vecteurs semblent assumer un caractère d'outil pour des problèmes de géométrie. De plus c'est en classe de Seconde que s'effectue le passage du vecteur de notation $\overrightarrow{AB}$ au vecteur de notation $\vec{u}$.

Pour l'analyse de la Seconde nous nous contenterons d'étudier deux manuels, collections Dimathème (1990) et Terracher (1994). Pour la partie cours, nous procéderons à une étude comparative entre les deux manuels sans les étudier séparément comme nous l'avons fait pour la Quatrième et la Troisième. Cette étude sera faite relativement aux questions spécifiques de notre travail. Nous essayerons d'être la plus exhaustive possible en ce qui concerne les définitions, les opérations, les propriétés et les théorèmes mis en évidence par les auteurs de manuels. Nous identifierons les théorèmes et les propriétés qui reçoivent une démonstration, qu'elle soit donnée dans la partie cours ou proposée comme exercice. Des extraits des manuels sont donnés dans les annexes du chapitre B2.

Nous analyserons d'abord le contenu des chapitres sur les vecteurs, puis sur la géométrie analytique et finalement sur les transformations.

4.1 - La partie cours

Un extrait des objectifs présentés par le manuel Terracher au début du chapitre sur les vecteurs confirme notre hypothèse selon laquelle les vecteurs sont présentés dans les manuels, en classe de Seconde, comme constituant un outil de résolution des problèmes de géométrie :

> "Dégager le rôle d'**outil** joué par le calcul vectoriel dans la **résolution de problèmes de géométrie**. Cela nous amènera à traduire par des relations vectorielles des propriétés telles que : alignement, parallélisme, milieu, centre de gravité, ..." (Terracher, page 278)

L'analyse qui suit porte sur la façon dont les manuels traitent les points suivants : les démonstrations des propriétés et résultats énoncés, le passage à la notation $\vec{u}$, l'introduction du vecteur nul, les opérations d'addition vectorielle et de produit par un réel et finalement ce que les manuels présentent sous le titre de vecteurs et configurations.

4.1.1 - Égalité vectorielle et passage à la notation $\vec{u}$

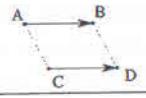
Donnons d'abord des extraits de deux manuels concernant l'introduction de la notation $\vec{u}$.

TERRACHER - 1995

Égalité

Chacune des propriétés suivantes signifie que : $\vec{AB} = \vec{CD}$.

- $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ ont même **direction**, même **sens** et les **longueurs** AB et CD sont égales.
- ABCD est un **parallélogramme** (ou encore [AD] et [BC] ont même milieu).
- C'est la même *translation* qui amène A sur B et C sur D.



La notation $\vec{u}$

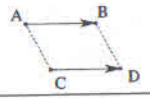
- Devant des égalités du type $\vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF} = ...$, on peut noter ce vecteur par *une* lettre $\vec{u}$ $= \vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF} = ...$ ($\vec{AB}$, $\vec{CD}$, ... sont alors des représentants du vecteur $\vec{u}$).
- Pour des raisons calculatoires (cf. paragraphe suivant), le vecteur $\vec{AA} = \vec{BB} = ...$ est appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$.

De ce fait, l'égalité $\vec{AB} = \vec{0}$ ne se produit que lorsque A=B.

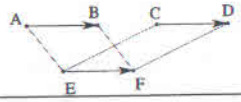
DIMATHEME - 1990

Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont égaux lorsque B et D sont les images respectives de A et C par la même translation.

Pour A, B, C et D non alignés



Pour A, B, C et D alignés



Égalité - Dans les exemples précédents $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ désignent le même vecteur. Pour simplifier l'écriture, on utilise la notation $\vec{u}$, avec $\vec{u} = \vec{AB} = \vec{CD}$.

Terracher donne l'égalité vectorielle en ayant recours aux propriétés vues au collège (direction, sens et longueur, parallélogramme et translation), tandis que Dimathème la définit uniquement par la translation (qui est l'une des propriétés citées par Terracher). En fait, il n'y

a pas de différences importantes à propos de la définition de l'égalité de vecteurs puisque ce que fait Terracher est un résumé de ce qui a été vu au collège. Dimathème ne le fait pas explicitement, mais implicitement avec, entre autres, le dessin d'un parallélogramme pour vérifier l'égalité vectorielle. En Seconde, l'égalité de deux vecteurs est donc traitée de manière à renforcer le caractère géométrique du vecteur, comme au collège.

La façon d'introduire la notation $\vec{u}$ chez Terracher nous semble présenter quelques contradictions. Jusqu'à maintenant, on avait des vecteurs qui étaient égaux ; autrement dit, on avait plusieurs objets $\vec{AB}$, $\vec{CD}$, $\vec{EF}$, ... que l'on disait égaux pour satisfaire quelques propriétés. Et dorénavant on note **ce** vecteur par **une seule** lettre. Comment pourrait-on expliquer l'apparition de **ce** vecteur aux élèves ? Il existe donc ici, un passage du pluriel au singulier qui cache une définition conceptuelle complexe, celle de passer d'un ensemble d'objets à un unique objet renvoyant à cet ensemble, une classe d'équivalence. Au niveau du discours, Dimathème paraît plus cohérent puisqu'il est écrit "...$\vec{AB}$ *et* $\vec{CD}$ *désignent le même vecteur.*" Cependant le problème de fond du passage à la classe d'équivalence n'est pas pour autant résolu. Plus encore, d'une certaine façon Dimathème est plus éloigné de la notion de classe d'équivalence que Terracher. Dimathème introduit $\vec{u}$ pour désigner deux vecteurs égaux, alors que Terracher veut donner l'idée d'un nombre indéterminé de vecteurs (donnée par les points de suspension).

L'idée de représentant d'une classe apparaît dans Terracher, page 281, à l'occasion de la représentation d'un vecteur, à savoir : "Soit O un point fixé du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M unique tel que $\vec{u} = \vec{OM}$". Mais, plus que l'idée de représentant, l'égalité permet d'approcher la relation bijective qu'il existe entre points du plan et vecteurs. Pourquoi donner cette propriété ? Il faudra voir si les résolutions des exercices de ce manuel font appel à cette propriété et quel est le rôle de cette bijection entre les points du plan et les vecteurs dans cette résolution.

Finalement, l'introduction du vecteur nommé $\vec{u}$ relève, pour nous, de deux raisons : la première est l'économie d'écriture, et la deuxième est que cet objet $\vec{u}$ est, en quelque sorte, un peu plus proche du savoir savant qui est le vecteur défini dans une structure vectorielle. De plus, c'est sur le vecteur $\vec{u}$ que sont écrites les propriétés des opérations : $\vec{u}$ a un caractère plus algébrique que $\vec{AB}$, on opère avec lui comme s'il était une variable x par exemple. En effet, pour simplifier l'expression $\vec{AB} + 2\vec{AB} - 5\vec{AB}$, on peut faire appel à un dessin pour le résoudre, donc c'est géométrique, ou on peut procéder de manière algébrique et répondre directement $-3\vec{AB}$. Alors que dans l'expression $\vec{u} + 2\vec{u} - 5\vec{u}$, les points A et B ne sont pas donnés explicitement, le calcul algébrique est privilégié. En d'autres mots, $\vec{u}$

échappe aux contraintes géométriques de ses extrémités. D'une part il rend compte d'une infinité de vecteurs égaux et d'autre part il est plus générique que le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Remarquons encore le passage discret de $\vec{u}$ comme notation d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, défini à partir de deux points A et B, à ce vecteur $\vec{u}$, introduit sans que A et B n'aient été donnés. De là se dégage l'impression qu'on ne connaît $\vec{u}$ que si on connaît au moins deux points A et B, et cette impression est accentuée lorsqu'on doit construire la somme de deux vecteurs, le produit par un réel ou encore la définition de représentation d'un vecteur (présentée dans Terracher)

4.1.2 - Addition vectorielle et produit d'un vecteur par un réel

Les deux opérations ont été définies de façon semblable dans les deux manuels choisis. En effet, le vecteur $\vec{u}$ est introduit, mais, pour définir les opérations d'addition et de produit par un réel, le manuel a recours au vecteur géométrique $\overrightarrow{AB}$. Pour l'addition de deux vecteurs donnés $\vec{u}$ et $\vec{v}$, les manuels prennent des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ représentants respectivement de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, et ceci se reproduit pour le produit par un réel. Autrement dit, on sait effectuer des opérations avec le vecteur géométrique $\overrightarrow{AB}$ mais non avec le vecteur $\vec{u}$.

Au moment de travailler l'addition vectorielle, Terracher définit aussi les propriétés algébriques de l'addition, l'opposé d'un vecteur et par conséquent la différence de deux vecteurs, et ce avec des vecteurs du type $\vec{u}$. Dimathème ne définit pas les propriétés algébriques de l'addition et l'opposé d'un vecteur sera défini par le produit d'un vecteur par le réel -1.

Il n'existe pas de démonstrations dans la partie cours des deux manuels analysés : il faudra regarder si ces résultats et leurs démonstrations sont proposées dans la partie exercices des manuels. Aucun des deux manuels ne justifie par exemple, l'invariance de l'addition vectorielle par rapport au vecteur $\vec{u}$ et un représentant choisi. De même les propriétés de l'addition et du produit par un scalaire sont énoncées dans Terracher et l'élève doit les accepter : il n'y a aucune proposition de justification.

4.1.3 - Vecteur nul

Terracher introduit le vecteur nul pour des "raisons calculatoires". Ces raisons ne sont pas explicitées et l'explication est laissée à la charge de l'enseignant. Entre la définition du vecteur nul et son utilisation pour définir les propriétés de l'addition, figure la somme de deux vecteurs. Serait-ce l'addition vectorielle qui peut justifier le vecteur nul ? Nous croyons

que la réponse doit être là, mais il n'y a rien d'explicite ! L'impression que nous avons, est que les auteurs des manuels ne voulaient pas définir le vecteur nul par lui-même, puisque il n'a pas de correspondant géométrique : quelle est la direction et le sens d'un vecteur nul ? Et pourtant, comme il faut le définir on le justifie par des raisons qu'on va comprendre plus tard ; il sert, en fait, à la définition du vecteur opposé.

Dimathème définit le vecteur nul comme un cas particulier du produit d'un vecteur par un réel. Cette façon de l'introduire **peut** paraître logique (ou naturelle) aux yeux des élèves, car il paraît logique que si on multiplie quoique ce soit par zéro, le résultat sera toujours zéro. Le problème ici est d'interpréter ce "zéro".

4.1.4 - Vecteurs et configurations

Dans ce chapitre les propriétés que les élèves étaient habitués à travailler dans la géométrie seront réinterprétées en utilisant cette fois-ci les vecteurs. Les propriétés principales à étudier sont : l'alignement de points, le parallélisme de deux droites, la caractérisation vectorielle d'une droite et du milieu d'un segment.

Le caractère d'outil des vecteurs est ici mis en évidence, comme nous l'avons dit au début de l'analyse de la partie cours. Par exemple, on trouve dans Terracher une démonstration de la résolution vectorielle du théorème des milieux, et cette fois le vecteur est vraiment utilisé pour le résoudre : on ne fait pas une "traduction" des propriétés géométriques en utilisant la notation vectorielle, comme c'était le cas pour la présentation de ce théorème en classe de Troisième, dans la collection IREM de Strasbourg. Nous transcrivons ci-dessous l'énoncé du théorème et la démonstration donnée, ainsi que le commentaire qui vante l'efficacité du calcul vectoriel :

> Théorème des milieux (Terracher, p. 286)
>
> Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC], alors : $\overrightarrow{BC} = 2\,\overrightarrow{IJ}$.
>
> En effet, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AJ} - 2\,\overrightarrow{AI} = 2\,(\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI}) = 2\,\overrightarrow{IJ}$.
>
> Simple et élégant, tel peut être le calcul vectoriel.

L'intention des auteurs, inculquer aux élèves l'idée que le vecteur constitue un outil efficace et économique, est tout à fait explicite dans cet exemple. Seulement il n'existe pas d'explication sur le procédé qui permet l'écriture des relations vectorielles et leurs transformations (mise en œuvre de propriétés vectorielles et de traduction par les vecteurs de propriétés géométriques). La solution est présentée ici d'une façon presque miraculeuse.

4.2 - Conclusion de la partie cours

Notre analyse des manuels montre que la notation $\vec{u}$ est introduite en classe de Seconde à partir de l'égalité entre vecteurs. Ainsi ce vecteur $\vec{u}$ n'est pas un représentant d'une classe d'équivalence, mais il désigne un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et tous ceux potentiels qui lui sont égaux. En ce sens on peut dire que $\vec{u}$ est un représentant générique d'un ensemble de vecteurs. Mais pour traiter les opérations d'addition et de produit par un réel on a besoin de passer au vecteur géométrique défini à partir de deux points et on va alors choisir un représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$. Il semble donc que ce vecteur $\vec{u}$ ne soit pas opérationnel. De plus, aucun des deux manuels ne fait mention de l'invariance d'un résultat obtenu lors d'une opération vectorielle par rapport au représentant choisi.

Le vecteur a encore en Seconde un caractère géométrique très fort. On fait pratiquer l'aller-retour entre le vecteur $\overrightarrow{AB}$ et le vecteur $\vec{u}$, mais cela est fait d'une façon très peu claire dans les manuels. En effet, on introduit le vecteur $\vec{u}$ à partir d'un vecteur géométrique et, ensuite on doit savoir à partir du vecteur $\vec{u}$ trouver un vecteur géométrique $\overrightarrow{AB}$, mais on ne sait pas comment ! A aucun moment dans les manuels on a appris aux élèves la façon de trouver $\overrightarrow{AB}$ à partir de $\vec{u}$.

Il nous semble que lorsque l'on sort du cadre de la géométrie "pure" ou synthétique, et que l'on introduit un nouvel objet, le vecteur géométrique, nous pouvons parler du cadre de la géométrie vectorielle. En effet, les problèmes que l'on doit résoudre avec les vecteurs sont les mêmes que ceux que l'on connaissait dans la géométrie synthétique. De plus, les opérations définies sont interprétées en termes de géométrie synthétique ; on utilise par exemple le parallélogramme pour justifier l'addition vectorielle. Mais les outils ne sont pas les mêmes. Cette "géométrie vectorielle" a des caractéristiques propres et nouvelles par rapport à la géométrie synthétique. Certes, l'objet vecteur n'est pas celui de l'algèbre linéaire mais il s'agit d'un objet géométrique qui peut représenter un nombre indéterminé d'éléments (la classe d'équivalence). Ceci est traduit par l'égalité vectorielle, par la possibilité de remplacer un vecteur par un autre et c'est à ce niveau que repose une différence importante par rapport à la géométrie synthétique. De plus, même si cet objet n'est pas le vecteur algébrique, il a des caractéristiques algébriques. On peut, par exemple faire l'addition de $\overrightarrow{AB}$ + $\overrightarrow{AB}$ comme s'il s'agissait d'effectuer x + x ; la notation $\overrightarrow{AB}$ peut être lue comme une variable x. La question qui se pose alors est de savoir si cela sera vraiment utilisé par l'enseignement et en occurrence par les élèves.

Dans la partie cours des manuels Terracher et Dimathème, après l'introduction de l'opération "produit d'un vecteur par un réel", la caractérisation vectorielle des propriétés géométriques est donnée, ce qui suppose la résolution des problèmes géométriques en utilisant le vecteur comme un outil pour la résolution. A ce moment on pourrait dire que l'on fait pratiquer le passage entre géométrie synthétique et géométrie vectorielle. Il faudra donc analyser en détail les exercices résolus et proposés pour déterminer du cadre dans lequel ses exercices sont présentés, s'il existe des changements de cadres.

Enfin, dans l'analyse des Travaux Pratiques (TP) et des exercices des deux manuels choisis, nous essaierons de répondre entre autres, aux questions suivantes :

1) Quels sont les points principaux traités dans les travaux pratiques ?

2) Dans les exercices proposés, y a-t-il toujours un vecteur ? La résolution nécessite-t-elle vraiment l'usage des vecteurs ou leur usage satisfait-il surtout une intention didactique ?

3) Les exercices sont-ils proposés dans le cadre de la géométrie synthétique ? Fait-on pratiquer aux élèves des changements de cadres, entre le cadre de la géométrie synthétique et le cadre de la géométrie vectorielle ?

4) Quels sont les types de problèmes proposés aux élèves et pour lesquels on attend qu'ils utilisent les vecteurs en tant qu'outil de résolution ?

5) Existe-t-il des exercices où les vecteurs sont vus en tant qu'objet ?
- Si oui, quelles sont les propriétés les plus visées ?
- Dans ces types d'exercices la notation $\vec{u}$ est-elle présente ?

4.3 - Analyse des exercices

Relativement à l'analyse des exercices, nous centrons notre étude sur les exercices résolus et proposés dans le manuel Terracher ; pour ce manuel, nous donnons une analyse exhaustive de chaque exercice. Pour obtenir des informations plus complètes avant de tirer nos conclusions, nous étudierons aussi le manuel Dimathème. Cette partie de l'étude sera faite pour confirmer ou infirmer les résultats obtenus lors de l'analyse de Terracher.

4.3.1 - Terracher

L'analyse des exercices du manuel Terracher est constituée de deux parties : une vue d'ensemble des exercices et une analyse plus détaillée d'énoncés et de résolutions attendues.

Pour être fidèle aux attentes des auteurs du manuel, nous avons étudié les résolutions proposées dans le livre du maître.

4.3.1.1 - Vue d'ensemble et "boîte à méthodes"

Avant les exercices proposés aux élèves, sont donnés dans le manuel des exercices proposés comme travaux pratiques. Ils sont partagés en deux rubriques :

A) *Un autre brin de technique* (deux exercices résolus et deux exercices proposés);

B) *Utilisation des vecteurs pour l'étude d'une configuration* (deux exercices résolus et deux exercices proposés).

Dans l'item A, il s'agit d'exercices qui ont pour objectif d'entraîner les élèves à :

"savoir écrire des relations vectorielles connaissant la position de points dans une figure."

"savoir construire un point défini à partir de relations vectorielles."

La position des points dans une figure est donnée par des propriétés géométriques, comme par exemple, P est le point du segment [AB] tel que BP=2/3 BA. L'élève doit traduire ces relations en utilisant le registre symbolique vectoriel. Les relations vectorielles qui sont mises en jeu sont la relation de Chasles et le produit par un réel (ce dernier traduit la colinéarité de deux vecteurs). Les auteurs du manuel explicitent l'importance de faire une figure pour mieux "voir" le problème.

Suite au premier exercice résolu, un "point méthode" est développé indiquant qu'il faut faire des figures pour en extraire des relations vectorielles et que pour cette lecture on se sert toujours de la direction, du sens et de la longueur du vecteur. Une telle affirmation ne fait que renforcer le caractère géométrique des vecteurs et par conséquent le fait que l'usage des vecteurs dans les exercices resteront ainsi très géométriques. L'analyse de chaque exercice proposé fournir des précisions sur quelles sont effectivement les caractéristiques vectorielles à mettre en œuvre pour résoudre les exercices.

Dans l'item B, la question à laquelle le manuel cherche à répondre est : "Comment résoudre un problème de géométrie à l'aide des vecteurs ?" Le premier problème résolu traite de l'alignement de trois points et le deuxième traite du parallélisme de droites. Les deux énoncés sont donnés en utilisant le registre graphique, la langue naturelle et le registre symbolique géométrique ; il n'y a pas de registre symbolique vectoriel. Les intentions des auteurs de ce manuel sont de montrer qu'on peut résoudre un exercice de géométrie en utilisant un nouvel outil, comme annoncé en tête des exercices. Dans le premier problème, une note en bas de page rappelle que ce même exercice était déjà résolu dans un autre chapitre

en utilisant les configurations. Donnons ci-dessous l'énoncé de cet exercice et la résolution proposée par les auteurs du manuel suivi d'une analyse de cette résolution[24] :

Exercice résolu 1 *Un problème d'alignement*[1]

Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E le point du segment [ID] tel que $IE = \frac{1}{3} ID$.

Établir que les points A, E et C sont alignés et préciser la position de E sur [AC].

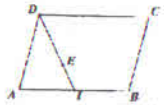


Fig. 20

1. Recherche

▪ Nous voulons *A, E* et *C* alignés. Vectoriellement, cela revient à établir que $\vec{AE}$ et $\vec{AC}$ *sont colinéaires*. Il s'agit donc « d'épingler » une *relation entre* $\vec{AE}$ et $\vec{AC}$.

▪ Nous savons que $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ (puisque *ABCD* est un parallélogramme). Nous pouvons exprimer $\vec{AB}$ en fonction de $\vec{AI}$ (*I* milieu de [*AB*]) et $\vec{AD}$ en fonction de $\vec{AI}$ et $\vec{ID}$ (relation de Chasles). Ainsi nous sommes sûrs de pouvoir exprimer $\vec{AC}$ en fonction de $\vec{AI}$ et $\vec{ID}$.
D'où la question : *« En est-il de même pour* $\vec{AE}$ *? »*

Toujours d'après Chasles, $\vec{AE} = \vec{AI} + \vec{IE}$ et nous pouvons exprimer $\vec{IE}$ en fonction de $\vec{ID}$ (d'après l'énoncé).
D'où la réponse : nous pouvons *aussi* exprimer $\vec{AE}$ en fonction de $\vec{AI}$ et $\vec{ID}$.

▪ Les deux expressions (de $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$) en fonction de $\vec{AI}$ et $\vec{ID}$ vont permettre sûrement d'*obtenir une relation entre* $\vec{AC}$ *et* $\vec{AE}$...

2. Une solution rédigée

▪ Nous avons $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ (*ABCD* est un parallélogramme).
Or $\vec{AB} = 2\vec{AI}$ (*I* est le milieu de [*AB*]) et $\vec{AD} = \vec{AI} + \vec{ID}$ (Chasles).
Ainsi $\vec{AC} = 2\vec{AI} + (\vec{AI} + \vec{ID})$, soit $\vec{AC} = 3\vec{AI} + \vec{ID}$ (1).

▪ D'autre part, $\vec{AE} = \vec{AI} + \vec{IE}$ (Chasles) et $\vec{IE} = \frac{1}{3}\vec{ID}$ (par hypothèse).

Donc $\vec{AE} = \vec{AI} + \frac{1}{3}\vec{ID}$ (2).

▪ Les relations (1) et (2) rendent visible que $\vec{AC} = 3\vec{AE}$, ce qui prouve l'alignement de *A, E* et *C* et précise la position de *E* : *E* est le point de [*AC*] tel que $AC = 3AE$.

Notons que la résolution proposée ci-dessus ne représente pas vraiment une méthode sûre pour aboutir à une solution. L'idée qu'on peut toujours décomposer un vecteur dans une base ou dans deux vecteurs non-colinéaires est inexistante. En effet, les auteurs affirment qu'on est sûr de pouvoir exprimer $\vec{AC}$ en fonction de $\vec{AI}$ et $\vec{ID}$ par des relations sur le parallélogramme et la propriété du milieu d'un segment et non simplement parce que ces deux vecteurs sont non-colinéaires et que par conséquent on peut toujours exprimer $\vec{AC}$ en fonction de $\vec{AI}$ et $\vec{ID}$. Cela est encore plus évident quand ils posent la question de savoir si de la même manière on peut exprimer $\vec{AE}$ en fonction de ces mêmes deux vecteurs. Et il faut

[24] Cet exercice fait partie des exercices proposés aux élèves de Première S et aux étudiants de DEUG ; une analyse de plusieurs stratégies de résolutions et des résultats obtenus auprès des élèves se trouve dans le chapitre C.

utiliser la relation de Chasles, puis remplacer une donnée du problème dans la relation ainsi obtenue pour pouvoir répondre affirmativement à la question posée.

Après l'analyse de la résolution proposée pour cet exercice nous nous posons la question de savoir quelle méthode de résolution sera mise à disposition des élèves (donc présentée dans l'enseignement) pour leur permettre d'aboutir à une solution. Pour esquisser des réponses à cette question, examinons "le point méthode", donné par les auteurs dans l'objectif d'expliquer la "démarche générale" à suivre pour étudier les propriétés d'une figure géométrique à l'aide des vecteurs. (Terracher, p. 293) :

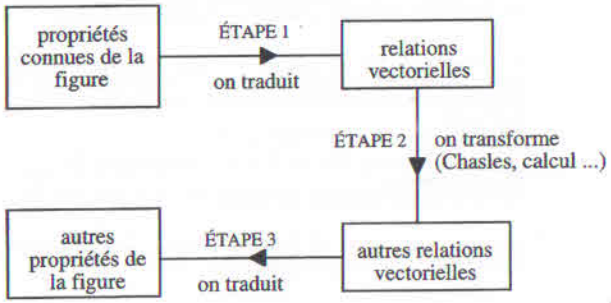


Schéma 1 : Point méthode du manuel Terracher

L'étape 1 de cette méthode consiste à pratiquer un changement de registre, entre un registre graphique (et peut être aussi géométrique) et le registre vectoriel. Une fois la traduction faite, on est dans la géométrie vectorielle et on vise à montrer une relation vectorielle. Il s'agit alors de travailler à l'intérieur du cadre de la géométrie vectorielle : étape 2. Puis on interprète la (les) relation obtenue en termes de propriétés sur la figure, autrement dit, on doit pratiquer la conversion du registre vectoriel en registre symbolique géométrique, c'est l'étape 3.

La démarche générale de ce manuel propose donc un changement de registres : du registre symbolique géométrique au registre symbolique vectoriel, et inversement (le registre graphique est aussi inclus). Ce changement de registre est accompagné d'un changement de cadres : du cadre géométrique (propriétés d'une figure) au cadre géométrique vectoriel (relations vectorielles). Pour l'analyse des exercices, il faut essayer de caractériser quels types de changements on propose aux élèves : changement de registres, de points de vue ou de cadres ? De plus, on peut s'interroger sur le rôle de ces changements.

Après les TP (travaux pratiques), une série d'exercices est proposée, intitulée "*applications directes du cours.*" Ils sont séparés par thèmes, à savoir : "égalité de deux vecteurs "(4) ; "norme d'un vecteur" (4) ; "addition des vecteurs" (7) ; "multiplication d'un

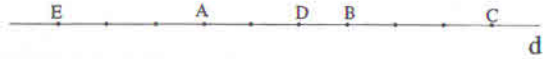
vecteur par un réel" (6) ; "vecteurs et configurations géométriques" (6). La résolution de ces exercices porte, en général, sur les définitions et propriétés vus en cours et repose sur :

(i) le changement de registres qui a été proposé dans la "démarche générale" ;

(ii) une analyse de la figure pour en conclure des propriétés vectorielles et géométriques.

Parmi les 27 exercices de cette série, peu d'exercices (6) utilisent la notation $\vec{u}$, dont un seul demande l'usage de la norme d'un vecteur et un autre l'addition vectorielle. Enfin quatre exercices mettent en jeu la multiplication d'un vecteur par un réel. Le vecteur $\vec{u}$ fonctionne parfois comme une autre écriture pour le vecteur $\vec{AB}$. Donnons un exemple :

Exercice 16, page 295
La graduation de la droite d est régulière :



1° Déterminer dans chaque cas le réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$
a) $\vec{u}=\vec{AB}$, $\vec{v}=\vec{AC}$ ....d) $\vec{u}=\vec{CE}$, $\vec{v}=\vec{AD}$
2° Placer les points M, N et P définis par : $\vec{AM}=1/2\vec{AB}$; $\vec{BN}=1/2\vec{DC}$; $\vec{PA}=1/3\vec{BA}$

Pour résoudre cet exercice, on doit "lire" sur la droite les distances entre les points et établir ensuite un rapport entre ces distances. Puis, en respectant le sens, on traduit ces rapports de distances dans le registre de l'écriture symbolique vectorielle. Cet exercice met en jeu la définition de colinéarité vectorielle et la nouvelle notation introduite $\vec{u}$. Relativement aux registres mis en jeu dans l'exercice, nous le classons : graV(gnum)V, où gnum, veut dire géométrique-numérique.

Dans la partie des exercices relatifs à la multiplication d'un vecteur par un réel, deux items de l'exercice 19 et deux items de l'exercice 20 n'utilisent que le vecteur $\vec{u}$. Voici l'item a) de l'exercice 19 (page 295) :

Dans les exercices 19 et 20, exprimer le plus simplement possible chaque vecteur en fonction de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.
a) $-\vec{u}+1/2(\vec{v}+\vec{u})$;

Cet exercice porte sur des vecteurs, est énoncé en utilisant le registre vectoriel mais il s'agit d'un exercice d'algèbre : on peut changer la notation vectorielle par une lettre et on trouve la solution facilement. Il nous semble que l'intention des auteurs est de faire les élèves

travailler avec le vecteur $\vec{u}$. On a l'impression d'être en train d'étudier l'objet vecteur mais en fait il ne s'agit que de faire des calculs.

Après cette série d'exercices d'application du cours, 48 exercices et problèmes sont proposés qui traitent des concepts vus jusqu'à maintenant : "Vrai/faux" (12) ; "La technique mise à l'épreuve" (7) ; "Des points et des relations vectorielles" (8) ; "Étude de figures géométriques" (9) ; "Avec les théorèmes de la projection et de Thalès" (6) et enfin, 4 problèmes. Parmi ces 48 exercices, seulement 3 utilisent la notation $\vec{u}$, les autres utilisent la notation "deux points", $\overrightarrow{AB}$. L'un d'eux est un travail pour préparer l'introduction de la notion de coordonnées d'un vecteur dans une base. Deux exercices utilisent les vecteurs pour des problèmes de force.

4.3.1.2 - Les exercices proposés[25]

Après cette vue d'ensemble, nous allons procéder à une classification plus détaillée des exercices. À cette fin, nous avons choisi quelques questions précises : dans quel cadre l'exercice est-il énoncé. Dans quel cadre la réponse est-elle demandée, quels sont les registres de représentation sémiotique mis en œuvre dans l'exercice ? Quelles sont les relations à utiliser pour la résolution (vectorielles ou non) ?

Lors de l'analyse des manuels du collège, nous avons mis à l'épreuve l'hypothèse de recherche 1, "L'enseignement des vecteurs dans le secondaire repose sur l'aller-retour entre les différents types de registres. A partir de la Seconde ces aller-retours sont liés à des problèmes à résoudre". Nous sommes arrivée à la conclusion qu'à ce niveau l'enseignement repose surtout sur le jeu entre les différents registres. En classe de Seconde, il semble que les vecteurs doivent assumer, vis-à-vis de l'enseignement, un rôle d'outil pour résoudre des problèmes de géométrie, et nous chercherons donc à étudier le jeu entre les registres et ces problèmes.

Enfin, pour mettre à l'épreuve l'hypothèse rappelée ci-dessus et pour répondre aux questions que nous nous sommes posées (cf. introduction chapitre B2), nous avons ressenti le besoin d'analyser chaque exercice avec son énoncé et la résolution souhaitée (nous rappelons que nous rendons compte des réponses fournies dans le livre du maître). Nous procédons aussi à une classification des exercices par rapport aux registres de représentation sémiotique qui sont en jeu, tant pour l'énoncé que pour la résolution. Nous disons qu'il s'agit du registre :

géométrique - numérique (**gnum**) - quand il faut faire des calculs tels que donner la norme d'un vecteur ;

[25]Un tableau contenant les registres utilisés, le cadre de l'exercice et les outils mis en œuvre pour la résolution, est donné dans les annexes du chapitre B2.

symbolique géométrique (**G**) - quand il s'agit d'une écriture symbolique à propos d'une propriété géométrique, par exemple les droites (AB)//(CD) ;

langue naturelle (**LN**) - quand il s'agit d'informations données de façon discursive, comme "soit ABC un triangle rectangle en A....." ;

symbolique vectoriel (**V**) - quand il s'agit d'utiliser des relations et/ou notations vectorielles ;

graphique (**gra**) - quand a un dessin est donné ou à faire.

Démarrons notre étude par l'exemple d'un exercice pour illustrer notre classification des exercices. Prenons l'exercice 44, page 297 :

> Tracer un triangle ABC et construire les points M et N tels que :
> $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BN} = 1/3\overrightarrow{BC}$.
> Montrer que A, M et N sont alignés.
> Suggestion : $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et la colinéarité

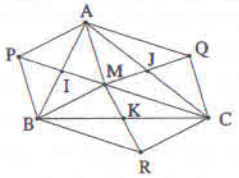
Il s'agit d'un exercice énoncé en registre symbolique vectoriel et en langue naturelle ; on demande de faire une construction et de montrer que trois points sont alignés, et on suggère un chemin pour la résolution. Ainsi les registres présents dans la résolution fournie par le livre du maître sont le graphique et le vectoriel : en effet, à partir de la construction faite on montre que $\overrightarrow{AN} = 1/3\overrightarrow{AM}$. Dans le livre du maître la résolution s'arrête là ; une fois qu'on montre la colinéarité on admet que l'alignement est aussi montré, le registre vectoriel suffit pour conclure l'exercice. Les outils de résolution sont la relation de Chasles et la colinéarité. Relativement aux notions d'outil et d'objet, cet exercice est classé comme intermédiaire entre les deux : en effet, en même temps que l'on est en train de faire pratiquer aux élèves les constructions de points à partir de relations vectorielles (et donc de mettre en œuvre la définition d'un vecteur et les opérations d'addition vectorielle et de produit par un réel) il s'agit aussi d'un exercice d'entraînement pour préparer l'utilisation de la colinéarité pour résoudre des problèmes d'alignement de points. De ce fait, cela n'a pas de sens de discuter de la nécessité d'utiliser les vecteurs pour résoudre l'exercice, puisqu'il consiste à faire une construction basée sur des relations vectorielles et ensuite montrer l'alignement des points ainsi obtenus. En résumé cet exercice a pour objectif de rendre mobilisable (Robert, 1988) la relation entre alignement de points et colinéarité vectoriel : si l'outil à utiliser est indiqué l'élève doit être capable de l'appliquer correctement.

Analyse des exercices

4.3.1.3 - A propos de la fonction d'outil et d'objet

L'étude des exercices proposés et des résolutions fournies dans le livre du maître, nous permet de conclure que parmi les 73 exercices, 24 traitent du vecteur en tant qu'objet, 36 font pratiquer des aller-retours entre les propriétés vectorielles et les propriétés géométriques, visant à les rendre mobilisables, comme l'exercice 44, analysé ci-dessus. Enfin, 13 exercices font utiliser le vecteur comme un outil de résolution pour un problème de géométrie, mais il ne s'agit pas d'exercices qui nécessitent une résolution vectorielle. Ils peuvent être résolus en utilisant seulement le registre géométrique, comme par exemple l'exercice 65, où les auteurs font une note après l'énoncé de l'exercice disant qu'on peut se dispenser de l'usage des vecteurs, et la résolution qu'ils proposent ne comporte pas le registre vectoriel. Ainsi nous pouvons classer ces exercices en deux sous-classes : ceux pour lesquels l'usage des vecteurs représente plutôt un changement de registre sans fournir une résolution qui soit plus efficace ou économique, et ceux pour lesquels cet usage fournit une résolution plus efficace. Donnons d'abord un exemple d'exercice où cet usage n'apporte aucune économie importante (exercice 62), puis un exercice où nous pouvons dire que l'outil vectoriel représente une certaine économie (exercice 70).

Exercice 62, page 298.
Un triangle ABC, I, J et K les milieux des côtés, un point M quelconque et ses symétriques P, Q et R par rapport à I, J et K : telles sont les données de l'exercice.
Il s'agit alors de montrer que les segments [AR] , [BQ] et [PC] ont le même milieu.
Suggestion des auteurs : Étudier les quadrilatères mis en évidence dans la figure.[26]



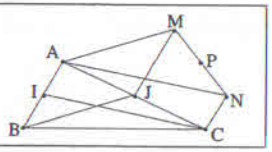
Pour cet exercice la figure est donnée et le registre de départ n'est pas vectoriel. La résolution donnée propose de montrer que les quadrilatères APBM, MBRC et AMCQ sont des parallélogrammes (on utilise le fait que les diagonales se coupent en leur milieu), et de traduire ensuite des égalités vectorielles sur chaque parallélogramme. Finalement, on applique la transitivité de l'égalité vectorielle, on obtient par exemple $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{RC}$ et on conclut que APCR est un parallélogramme et par conséquent ses diagonales se coupent en leur milieu. En n'utilisant que le registre géométrique, on peut obtenir pratiquement la même résolution, le tout est de montrer qu'on a des parallélogrammes et d'utiliser la transitivité des propriétés géométriques. Dans notre tableau ci-dessus, nous avons indiqué comme registre d'arrivée le vectoriel, car la résolution fournie dans le livre du maître utilise le registre

[26] Dans le manuel, les parallélogrammes APBM, MBRC et AMCQ sont colorés en couleurs différentes.

vectoriel. Nous pouvons ainsi conclure qu'une utilisation du registre symbolique vectoriel pour la résolution de cet exercice représente plutôt un artifice didactique, destiné à faire pratiquer les définitions et les propriétés vectorielles[27].

Passons à notre deuxième exemple :

Exercice 70, Parallélisme
Dans la figure ci-après, I et J sont les milieux de [AB] et [AC], ABJM et CIAN sont des parallélogrammes et enfin P est le milieu de [MN].
Le problème consiste à établir que (AP) et (BC) sont parallèles.



Les propriétés à utiliser dans la résolution vectorielle sont les suivantes : i) le demi-parallélogramme : "lorsque I est le milieu de [AB], on a pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$", et ii) la relation de Chasles pour la différence de deux vecteurs "$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$". La difficulté de la résolution vectorielle réside justement dans l'utilisation du "demi-parallélogramme" ; en effet, nous avons vu dans la partie cours que cette propriété est énoncée au moment de caractériser le milieu d'un segment ; elle apparaît donc comme une généralisation de cette caractérisation plutôt que comme une autre propriété à lire sur un parallélogramme. D'ailleurs, nous pouvons voir d'après les outils à mettre en œuvre dans chaque exercice, que le demi-parallélogramme n'y apparaît que quatre fois. Ainsi, on peut douter que cette propriété soit disponible chez l'élève, mais une fois qu'il pense à l'utiliser, la résolution nous semble plus économique qu'une résolution géométrique. En effet, une résolution géométrique, disponible à ce niveau, consiste à faire intervenir un point K milieu du segment [MJ], à utiliser le théorème des milieux dans le triangle MJN ; puis à conclure en utilisant la transitivité des propriétés géométriques des parallélogrammes existants sur la configuration. La difficulté de cette résolution géométrique réside dans le fait que l'élève doit penser à poser un point qui n'appartient pas à la figure de départ et à visualiser des "sous-figures"[28].

Tenant compte de l'énoncé de l'exercice et de la résolution vectorielle proposée dans le livre du maître, nous pouvons dire qu'il s'agit de pratiquer un changement de cadres, de la géométrie synthétique à la géométrie vectorielle. De plus, ce changement, qui implique l'utilisation de l'outil vectoriel, rend la solution économique.

[27] Ce même exercice a été proposé lors d'une pré-observation en classe de Première S, et la majorité des élèves (21/25), n'a pas utilisé les vecteurs pour le résoudre. Cela est dû au fait que l'exercice est proposé loin du moment où ils ont vu les vecteurs, qu'une résolution en utilisant seulement le registre symbolique géométrique est facile à obtenir et qu'en fait, la résolution vectorielle passe elle aussi par les diagonales des parallélogrammes APRC et AQRB, mais on doit traduire chaque résultat en registre symbolique vectoriel. Dans le chapitre C, nous fournissons les résultats obtenus ainsi que plusieurs stratégies de résolution.

[28] Nous avons proposé cet exercice dans une expérimentation réalisée en DEUG. Une résolution vectorielle et une résolution géométrique, ainsi que des résultats obtenus sont donnés dans le chapitre C.

4.3.1.4 - Les registres présents dans les exercices

Démarrons notre analyse par une classification des exercices en termes de registre de représentation mis en œuvre, aussi bien pour l'énoncé que pour la résolution de l'exercice.

registre de l'énoncé	les exercices	registre résolution
V/N (18 exercices)	2,10,39,40,57,61	V/graphique (6)
	44,53,59,60	V (4)
	3,63,67	V + (G/gnum/...) (3)
	4,5,17,30,37	pas de vecteurs (5)
V/graphique (17 exercices)	9,11,22	V/graphique (3)
	13,45,47,54	V (4)
	33,34,35,41,42,69	V + (G/gnum/...) (6)
	6,16,21,29	pas de vecteurs (4)
V/gnum (2)	7,8	pas de vecteurs (2)
V (17 exercices)	14,51,52	V/graphique (3)
	19,20,28,31,32	V (5)
	12,15,43	V + (G/gnum/...) (3)
	38,48,49,50	pas de vecteurs (4)
V/G (5 exercices)	23,24,25	V/graphique (3)
	18	V (1)
	73	V + (SG/gnum/...) (1)
V/G/graphique (1)	46	V (1)
V/LN/graphique (2)	71,72	V (2)
LN/graphique (5)	26,62,64,66,70	V (5)
LN (3 exercices)	55	V (1)
	36,65	pas de vecteurs (2)
LN/G (2 exercices)	68	V (1)
	58	pas de vecteurs (1)
G/graphique (2 exercices)	56	V (1)
	1	V + (G/gnum/...) (1)

Pour la résolution des exercices 5, 7, 12, 18, 19, 20, 22, 28, 30, 31, 32, 36, 37, 43, 59, le dessin est inutile. Ainsi, 15 exercices sur 73 dispensent de l'utilisation d'un dessin pour leur résolution. Il s'agit d'exercices destinés à faire pratiquer les définitions et propriétés vectorielles. Citons l'exercice 36, page 296, "Vrai ou faux ? Deux vecteurs colinéaires et de même longueur sont égaux." Il s'agit ici d'un exercice ayant pour objectif de faire pratiquer à l'élève la définition de colinéarité de deux vecteurs. La résolution peut être donnée en restant dans le registre de la langue naturelle et sans faire appel au dessin.

Ci-dessous un tableau résumé de l'utilisation des registres, concernant les 73 exercices que nous venons d'analyser :

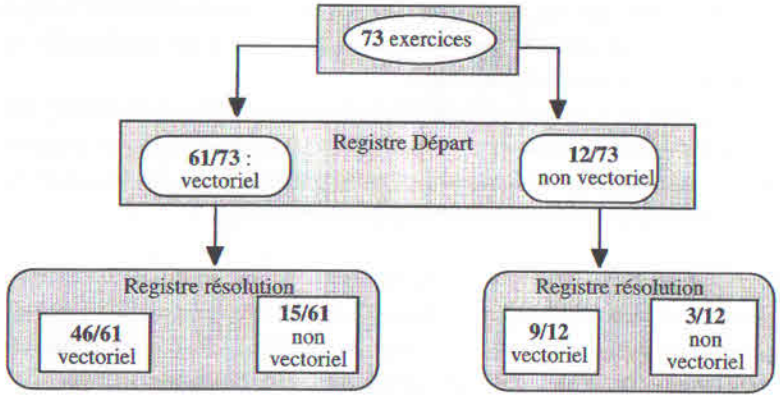


Tableau 1

Il existe donc 46 exercices qui sont partis du registre vectoriel et dont le registre de la résolution contient aussi le registre vectoriel. La résolution de la majorité de ces exercices nécessite l'interprétation des propriétés géométriques qui sont dans l'énoncé vectoriel pour après conclure à nouveau en termes vectoriels. Dans ce cas nous disons qu'il y a eu un changement de registre à l'intérieur de la résolution.

Les outils de résolution utilisés sont : égalité vectorielle par direction, sens et longueur et par le parallélogramme ; relation de Chasles pour l'addition et pour la différence ; caractérisation vectorielle du milieu d'un segment ; demi-parallélogramme ; théorème des milieux ; colinéarité ; théorème de Pythagore et propriétés géométriques du parallélogramme ou encore de quelques configurations particulières (comme rectangle ou triangle).

A propos des catégories d'exercices

Le tableau donné ci-dessus nous permet encore de proposer un regroupement des 73 exercices proposés dans des quatre nouvelles catégories :

(i) du registre vectoriel vers le registre vectoriel (46 exercices sur 73) ;
(ii) du registre vectoriel vers le registre "non-vectoriel" (15/73) ;
(iii) du registre non-vectoriel vers le registre vectoriel (9/73) ;
(iv) du registre non-vectoriel vers le registre non-vetoriel (3/73).

Les exercices des catégories (i) et (ii), ont pour objectif de pratiquer les notions vues dans le cours, de les rendre mobilisables. La différence entre ces deux catégories est que pour (ii) on se base sur des propriétés données vectoriellement mais au moment de rédiger la solution on utilise des propriétés géométriques sans besoin d'utiliser des notations vectorielles. Dans ces deux premières catégories, nous avons trouvé 5 exercices pour

lesquels nous pouvons dire que les vecteurs représentent un outil de résolution. Il s'agit d'énoncés composés de plusieurs "pas", pour induire la réponse finale dans laquelle on demande de déduire une propriété géométrique.

Les 9 exercices de la catégorie (iii) ont été classés comme "outil non-nécessaire". En effet, il s'agit d'utiliser les vecteurs pour résoudre un problème de géométrie mais les vecteurs ne constituent pas le seul outil possible de résolution. Ces 9 exercices font passer du cadre de la géométrie synthétique au cadre de la géométrie vectorielle.

En résumé, parmi les 73 exercices proposés, pour seulement 14 l'usage des vecteurs constituent un outil (non-nécessaire) de résolution. De plus cet usage peut parfois représenter une certaine économie, comme c'est le cas de l'exercice 70 analysé ci-dessus. Malheureusement ce type d'exercice ne représente pas la majorité des énoncés proposés !

Finalement nous arrivons aux 3 exercices de la quatrième catégorie. L'exercice 36 traite la colinéarité vectoriel en utilisant le registre de la langue naturelle (les connaissances en jeu, sont donc, vectorielles) ; l'exercice 58 porte sur la trigonométrie et l'exercice 65 met en œuvre le théorème de Thalès forme non-vectorielle (pour lequel les auteurs du manuel attirent l'attention sur le fait qu'on peut se dispenser d'utiliser les vecteurs).

4.3.2 - Dimathème

Pour cette collection, nous avons choisi de ne pas analyser les exercices en détail comme nous l'avons fait pour Terracher, sauf s'il y a des exercices "différents" de ceux que nous avons déjà vus chez Terracher. Ainsi l'analyse du manuel Dimathème nous servira à confirmer ou infirmer l'analyse du manuel Terracher.

4.3.2.1 - La "boîte à méthodes"

Dimathème ne propose pas d'exercice résolu ; après la partie "cours", la "boîte à méthodes" doit faire le lien entre les définitions et propriétés vues dans le cours et les exercices à résoudre. Elle doit ainsi transmettre l'esprit du cours sur les vecteurs.

Comment démontrer que ABCD est un parallélogramme.
Montrer que (AB) est parallèle à (CD) et que (AD) est parallèle à (BC).

Montrer que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$)
Montrer que [AC] et [BD] ont même milieu.

Comment démontrer que trois points distincts A, B et C sont alignés.

Montrer qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\,\overrightarrow{AB}$

D'après cette "boîte à méthodes", nous pouvons supposer que les exercices portent surtout sur des configurations (particulièrement sur le parallélogramme) et l'alignement de trois points. La "boîte à méthodes" semble aussi confirmer que cet enseignement est basé sur les aller-retours entre les registres graphique, symbolique géométrique et symbolique vectoriel. Il est vrai que cet aller-retour est beaucoup plus explicite dans le "point méthode" du manuel Terracher ; dans Dimathème, l'aller et retour entre les registres est implicite et donné pour des résultats spécifiques, et non d'une manière générale comme l'a fait Terracher. De plus Terracher attire l'attention sur le fait qu'il faut toujours accompagner une relation vectorielle par un dessin ; Dimathème n'en fait pas mention.

4.3.2.2 - Les exercices proposés

Après la boîte à méthodes viennent directement les exercices, présentés en deux séries : "pour savoir faire" (30) et "pour chercher" (29). Les exercices de ce chapitre ne sont guère différents de ceux rencontrés dans le manuel Terracher. En effet, il s'agit d'exercices où le registre graphique est présent majoritairement, soit dans l'énoncé, soit à faire, et on utilise des propriétés qu'on peut lire sur le dessin. Nous allons, dans la suite, citer et commenter des différences par rapport aux exercices du manuel Terracher ainsi que les similitudes entre les deux manuels.

Dans les exercices du manuel Dimathème la notation $\vec{u}$ apparaît un peu plus que dans Terracher, mais ici ce vecteur $\vec{u}$ est souvent lié soit à un dessin soit à la notation $\overrightarrow{AB}$. Donnons l'exemple d'un exercice où la notation $\overrightarrow{AB}$ n'apparaît pas dans l'énoncé :

Exercice n°8, page 225 :
2° Tracer les vecteurs suivants après avoir réduit leur écriture :
$\vec{a} = 1/4\,\vec{u} + 1/3\,\vec{u}$; $\vec{b} = 1/4\,\vec{u} - 1/3\,\vec{u}$; $\vec{c} = 1/4\,\vec{u} + 5/8\,\vec{u}$; .....

Pour réduire leur écriture on ne doit pas passer au vecteur défini par deux points de notation $\overrightarrow{AB}$, leur résolution n'étant basée que sur des calculs, c'est pourquoi nous disons qu'à ce moment il s'agit plutôt d'un vecteur "algébrique". L'exercice est un exercice de calcul algébrique du type réduction d'expressions, comme ceux rencontrés dans Terracher, seulement Dimathème ne s'arrête pas là : une construction est demandée. Ainsi on revient au vecteur du type $\overrightarrow{AB}$, car d'après la partie cours pour construire la somme de deux vecteurs, on doit tracer un représentant $\overrightarrow{AB}$ de chaque vecteur $\vec{u}$. Notons encore que les coefficients de colinéarité donnés facilitent la division d'un segment en parties égales. L'élève doit donc savoir construire le produit d'un vecteur par un rationnel, mais ce rationnel est bien particulier : il favorise la construction en jeu.

On rencontre encore d'autres exercices portant sur la relation de Chasles où il s'agit de faire des manipulations algébriques avec les vecteurs du type $\overrightarrow{AB}$, et dans ces exercices on ne demande pas de construire des vecteurs, ainsi l'usage d'un dessin n'est pas nécessaire.

D'une manière générale, les exercices de ce manuel font travailler aux élèves les définitions et propriétés données dans la partie cours. Dans la plupart de ces exercices, le dessin joue un rôle central, car soit il faut le construire avec les données du problème puis en tirer des relations vectorielles (ce qu'on veut prouver), soit le problème demande de construire un dessin. Comme nous l'avons remarqué ci-dessus, dans la partie cours de ce manuel on ne trouve pas d'observations explicites sur le fait d'utiliser le dessin pour en extraire des relations géométriques et de faire ensuite le passage au vectoriel. Mais, en analysant la partie cours et les exercices proposés, nous pouvons conclure que l'objectif des auteurs est de faire pratiquer aux élèves la lecture de propriétés géométriques sur un dessin, leur traduction dans le registre vectoriel, et inversement.

En effet, les propriétés géométriques utilisées sont, entre autres, les propriétés d'un quadrilatère, plus particulièrement d'un parallélogramme (les côtés opposés sont parallèles et ont même mesure, ses diagonales se coupent en leur milieu, etc), les propriétés d'alignement et les propriétés de centre de gravité. L'élève apprend aussi à traduire ces propriétés par des relations vectorielles, comme par exemple :

- B milieu du segment [AC] se traduit par $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;

- ABCD un parallélogramme se traduit par $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

A la fin de ce chapitre B2, nous donnerons un tableau résumant les traductions exigibles des élèves, dès la classe de Quatrième jusqu'à celle de Seconde.

Parmi les exercices sur la colinéarité, nous en avons trouvé un seul où le dessin n'est pas nécessaire pour le résoudre et de plus la résolution vectorielle que nous pensons être attendue par les auteurs met en jeu la notion de "décomposition unique dans une base". Dans Terracher on ne retrouve pas ce type d'exercice. Il s'agit d'un exercice qui peut aussi être classé comme algébrique. Voici son énoncé :

> Exercice 43, page 228.
> A, B et C sont trois points non alignés. Soit D et E tels que :
> $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.
>
> Déterminer k pour que $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ soient colinéaires.

L'idée de cet exercice est de faire pratiquer aux élèves la condition de colinéarité de deux vecteurs, et pour cela il faut trouver une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$. On pourrait rédiger de la manière suivante la résolution : il faut trouver m tel que $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AE}$. Cela revient à trouver un m tel que $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = m\overrightarrow{AB} + mk\overrightarrow{AC}$. On compare les coefficients et on conclut que $m = \frac{2}{3}$ et que $mk = -\frac{1}{4}$. Alors k doit être égal à $-\frac{3}{8}$.

Nous avons dégagé des différences entre les deux manuels, et il nous semble qu'il est aussi important de souligner que ces différences ne sont pas, pour l'instant, très nombreuses et de plus, qu'on peut retrouver beaucoup de similitudes entre les exercices proposés dans les deux manuels. Citons l'exemple d'un exercice pour lequel l'usage des vecteurs dans la résolution pourrait être facilement remplacé par des notations géométriques[29].

> Exercice 32, page 228
> A, B, C et D sont quatre points quelconques. I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs de [AB], [CD], [AC], [BD], [AD] et [BC].
> Montrer que [IJ], [KL] et [MN] ont le même milieu.

Pour résoudre l'exercice on doit faire un dessin et en tirer des idées pour arriver à montrer que les segments [IJ], [KL] et [MN] ont même milieu. Pour montrer par exemple que [IJ] et [KL] ont même milieu il faut montrer que ILJK est un parallélogramme et pour cela on utilise le théorème des milieux. La résolution de cet exercice pourrait se passer des vecteurs mais il est vrai que le fait d'utiliser une notation vectorielle rend la résolution un peu plus économique au niveau de sa rédaction (on n'est pas obligé d'expliciter que les segments sont parallèles et qu'ils ont même longueur : la notation vectorielle s'en charge). En ce qui concerne les registres, cet exercice peut donc être classé comme un exercice qui part du géométrique et arrive au géométrique mais dont la résolution est faite à l'aide du registre vectoriel.

4.4 - Conclusion de la partie exercices

Nous avons montré que beaucoup d'exercices font pratiquer des changements de registres : du registre graphique au registre vectoriel, du géométrique au vectoriel, et ainsi de suite[30]. Ces changements peuvent se situer au niveau de l'énoncé et/ou à l'intérieur de la résolution. Les principales relations à utiliser sont l'égalité vectorielle, l'addition vectorielle et le produit

[29] Cet exercice (et par conséquent sa résolution) ressemble à l'exercice 62 proposé dans Terracher, que nous avons analysé.
[30] Une liste des traductions demandées et de leur fréquence d'apparition dans les manuels sera fournie à la fin de ce chapitre.

par un réel et ces notions sont basées sur des propriétés géométriques (en particulier sur la configuration du parallélogramme), mais elles relèvent d'un fonctionnement interne autre que celui propre à la géométrie synthétique. En effet, si nous regardons de plus près ces propriétés et relations vectorielles mises en place en classe de Seconde, nous pouvons confirmer l'hypothèse qu'il s'agit des propriétés géométriques, certes, mais il y a un système de traitement interne propre à ce nouvel ensemble formé par le vecteur géométrique, les opérations définies et les propriétés qui les accompagnent. Nous pouvons ainsi conclure que l'enseignement des vecteurs dans la classe de Seconde introduit un nouveau cadre pour résoudre des problèmes de configurations : le cadre de la géométrie vectorielle.

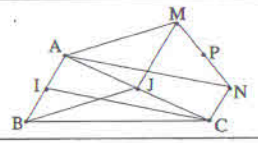
Au collège nous avons montré que l'enseignement de vecteurs repose surtout sur les changements de registres ; il n'y a pas des problèmes à résoudre avec les vecteurs qui puissent représenter un véritable changement de cadres (de plus seul est introduite l'addition vectorielle). En Seconde les choses se passent différemment. Nous pouvons alors classer deux cas de figures, que nous relatons ci-dessous.

Quand on fait travailler les élèves sur un exercice qui traite de l'égalité des vecteurs basée sur le parallélogramme et que l'on utilise le vecteur $\overrightarrow{AB}$, il s'agit d'un changement qui a plutôt un caractère d'artifice didactique pour entraîner les élèves à l'usage d'une notion, pour la rendre mobilisable, et qui parfois n'apporte aucune économie. Alors que dans un problème de colinéarité de vecteurs, par exemple, on utilise véritablement des propriétés et des relations vectorielles, ce qui nous amène à dire qu'on a pratiqué un changement autre d'une importance majeure. Il ne s'agit plus d'un artifice didactique, les vecteurs pouvant, à ce moment là devenir un outil économique. Hélas, ce que nous avons constaté dans les exercices analysés jusqu'à maintenant, est que pour peu d'exercices le vecteur peut être lu comme constituant un outil économique de résolution. Et pourtant nous pensons que l'intérêt d'introduire la géométrie vectorielle est justement pour la résolution d'exercices tels que l'exercice 70[31] du manuel Terracher, pour lequel l'utilisation de l'outil vectoriel fourni une solution économique.

Avant d'avancer des conclusions finales sur l'utilisation et l'intérêt des vecteurs en classe de Seconde il est important de voir ce qui est fait des vecteurs dans le chapitre sur la géométrie analytique.

31

Exercice 70, Parallélisme
Dans la figure ci-après, I et J sont les milieux de [AB] et [AC], ABJM et CIAN sont des parallélogrammes et enfin P est le milieu de 5MN. Le problème consiste à établir que (AP) et (BC) sont parallèles.



4.5 - Géométrie analytique - Analyse de la partie cours

Les deux manuels analysés commencent la géométrie analytique en établissant la relation entre coordonnées d'un point M et coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{OM}$. En fait, il s'agit de la bijection entre l'affine et le vectoriel qui pourrait servir de passerelle pour travailler ce passage. Là on trouve des différences pour ces définitions dans les deux manuels étudiés : Dimathème utilise la projection et la colinéarité de façon explicite, tandis que Terracher ne parle pas explicitement de la projection et donne à voir un parallélogramme par un seul dessin, et il ne mentionne pas l'usage de la colinéarité. Le passage des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ aux coordonnées du vecteur $\vec{u}$ est plus explicite dans Terracher que dans Dimathème. De plus, Terracher énonce un théorème sur l'unicité des coordonnées d'un vecteur dans une base, dont la démonstration est laissée aux élèves comme un exercice à faire. Dans Dimathème, seule une remarque est faite : "Étant donné un repère, les coordonnées d'un point dans ce repère sont uniques. Il en est de même pour un vecteur dans une base." A notre avis cette remarque ne fait qu'accentuer la confusion entre point et vecteur en donnant l'idée que les deux objets ont le même comportement en ce qui concerne les coordonnées, ce qui n'est pas vrai. Autrement dit, l'affirmation est bien vraie mais la comparaison avec le point n'est pas cohérente. De plus, dans Dimathème il n'y a pas de définition de la notion de base. Le terme est utilisé sans essai de définition ou d'explication ; la définition est faite de façon implicite quand on prend pour base des vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$, toujours non-colinéaires. Dans le manuel Terracher, cette notion est définie à partir d'un couple de deux vecteurs non colinéaires. En fait, l'objet qui est donc, officiellement introduit en Seconde, est un objet éloigné de l'objet correspondant de la théorie des espaces vectoriels. En effet, bien que soit utilisé le même mot que celui de la structure vectorielle, le sens n'est pas le même. A partir de ce qui est vu dans la partie cours, nous pourrions dire que ce n'est pas un objet d'enseignement. La question se pose alors de savoir l'usage de cette notion en classe de Seconde. Nous cherchons à étudier l'utilisation de cette notion dans les exercices, où l'on doit par exemple savoir faire la "bonne" décomposition pour trouver plus facilement la résolution d'un exercice.

Les deux manuels analysés introduisent la notion de vecteur directeur à partir d'un vecteur géométrique dont les extrémités appartiennent à la droite. Ensuite il est affirmé que n'importe quel vecteur colinéaire au premier est un vecteur directeur de la droite. Cette façon d'introduire le vecteur directeur ne favorise pas la notion de représentant d'un vecteur ; au contraire, le vecteur directeur est attaché aux points de la droite qui le définissent. Après la définition de vecteur directeur, les deux manuels le "détachent" de la droite : Terracher affirme que n'importe quel vecteur colinéaire à $\vec{u}$ est lui aussi un vecteur directeur de la droite, tandis que Dimathème passe par une autre droite parallèle à la première, et le vecteur

directeur est alors attaché à cette nouvelle droite introduite. Relativement à la caractérisation vectorielle d'une droite, il nous semble qu'il existe un paradoxe dans l'enseignement. En Quatrième, pour définir le vecteur on utilise la notion de direction, qui, elle, s'appuie sur l'idée de droites parallèles. En Seconde, pour parler de la direction des droites on utilise la notion de vecteur directeur.

L'orthogonalité dans le plan sera traitée de la même façon que le parallélisme et les autres propriétés. Terracher définit l'orthogonalité de deux vecteurs à partir de l'orthogonalité de deux directions, donc, très générale, tandis que Dimathème prend deux représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et puis étudie les positions des deux droites (AB) et (CD). Finalement la condition d'orthogonalité de deux droites à partir du produit des coefficients directeurs est donnée.

Ce chapitre de géométrie analytique des manuels introduit en fait la géométrie analytique vectorielle. En effet, on y discute, par exemple, de la caractérisation analytique de la colinéarité de deux vecteurs et des positions relatives de deux droites en utilisant les vecteurs. Mais le passage entre la géométrie analytique et la géométrie analytique vectorielle est subtile car la géométrie analytique travaille sur les coordonnées d'un point et la géométrie analytique vectorielle travaille sur les coordonnées d'un vecteur qui sont données à partir des coordonnées de deux points. Si d'une part l'utilisation des vecteurs dans la géométrie analytique peut rendre la résolution d'un exercice plus économique (il suffit d'utiliser par exemple la formule déduite dans le cours), d'autre part cet usage tel qu'il est présenté dans les manuels peut renforcer les possibilités de confusion entre un vecteur et les points qui le définissent.

Finalement l'enseignement de la géométrie analytique laisse beaucoup d'implicite à la charge de l'élève, notamment l'invariance des coordonnées pour des représentants d'un même vecteur, ce qui d'ailleurs représente une source de difficultés pour les élèves, comme nous le montrerons dans le chapitre D.

Nous cherchons à repérer dans la partie exercices, les problèmes que l'on propose de résoudre en utilisant les définitions et propriétés données. Le rôle d'économie des vecteurs sera-t-il mis en évidence ? Cette question se pose dans la mesure où dans la partie cours, ne figure aucun commentaire à propos des vecteurs en tant qu'outil pour résoudre des problèmes de géométrie analytique.

4.6 - Analyse des exercices

4.6.1 - Terracher

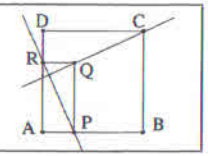
Débutons notre analyse par le "Point méthode" donné dans Terracher :

> "C'est dans notre capacité à **exprimer les différentes notions géométriques** (alignement, parallélisme, distance, orthogonalité,...) dans **chacun des domaines** : **figures, vecteurs, nombres**, que tiendra notre savoir-faire en Géométrie analytique" (p.312).

On voit par là l'idée d'habituer les élèves à envisager plusieurs domaines et à pratiquer un changement de registres et de cadres. L'importance de faire un dessin pour essayer de comprendre le problème est toujours mise en évidence par les auteurs de ce manuel et renforce l'idée du rôle des vecteurs comme outil de résolution de problèmes de géométrie. Les vecteurs son présentés dans ce chapitre comme un outil pour permettre à la géométrie analytique de résoudre des problèmes de géométrie. Ceci est explicité par les auteurs du manuel à l'occasion d'un exercice résolu : "Arrivé à la quatorzième page d'un chapitre de Géométrie analytique, il serait peut-être temps d'illustrer comment elle permet de résoudre un problème de Géométrie..." (p. 314) Ci-dessous l'exercice résolu et l'analyse de la résolution proposée :

Soit un carré ABCD. On construit un rectangle APQR de manière que :
- P et R soient sur les côtés [AB] et [AD] du carré ;
- AP=DR.

Les droites (CQ) et (PR) semblent alors orthogonales.
Qu'en est-il exactement ?



La résolution proposée consiste à prendre un repère orthonormal d'origine A et d'axes (AB) et (AD), et de calculer les coordonnées des points R, Q, P et C dans ce repère. Puis il faut juste étudier la condition analytique d'orthogonalité à partir des coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CQ}$ et $\overrightarrow{PR}$. Cet exercice doit ainsi servir à illustrer comment on peut utiliser la géométrie analytique pour résoudre un problème de géométrie. Les vecteurs apparaissent ici comme un outil dans l'outil analytique lorsque pour vérifier que (CQ) et (PR) sont orthogonales, on vérifie que $\overrightarrow{CQ}$ est orthogonal à $\overrightarrow{PR}$. La résolution par la géométrie analytique semble donc, être une résolution économique et encore plus dès lors qu'on a un repère orthonormal facile à identifier sur le dessin. Les registres de la résolution sont le registre vectoriel et le registre géométrique-numérique.

Dans Terracher figurent deux séries d'exercices. La première est intitulée : *Applications directes du cours*. Elle comporte 34 exercices ayant pour objectif d'entraîner les élèves à l'usage des nouveaux outils présentés dans le cours : coordonnées des vecteurs, conditions analytiques d'orthogonalité et de parallélisme. Dans la deuxième série 53 exercices sont proposés. On trouve d'abord des exercices "Vrai et faux", dans lesquels il s'agit encore d'utiliser les définitions et propriétés vues dans le cours. Citons l'exercice 41, page 318 :

> 41) Deux droites qui ont des vecteurs directeurs distincts sont sécantes.

Cet exercice nous a paru intéressant car il met en jeu à la fois des aspects vectoriels et géométriques. On peut se demander, par exemple, ce que signifie pour l'élève l'expression "deux vecteurs distincts" ! Deux vecteurs colinéaires, qui n'ont pas la même norme sont-ils distincts ? Le vecteur directeur d'une droite, a-t-il un certain caractère d'unicité chez les élèves ? Voient-ils toujours un vecteur directeur d'une droite ou un représentant d'une classe ? Autrement dit, les élèves diront-ils par exemple, que les droites D et D' qui ont comme vecteurs directeurs $\vec{u}(1 ; 2)$ et $\vec{u}(2 ; 4)$, sont sécantes ? Notons que pour répondre à cet exercice on n'a pas besoin de faire appel à la géométrie l'analytique ; on peut rester sur la définition d'un vecteur directeur et dans le registre graphique. Ce type de question sera repris lors de l'élaboration du dispositif expérimental en classe de Seconde (cf. chapitre D).

Suite aux exercices "Vrai ou faux" il existe des exercices intitulés : "Figures dans un repère" (8 exercices), dans lesquels il est mis en évidence l'importance de tracer une figure pour conjecturer et puis pour contrôler ; puis 11 exercices portent sur les équations de droites et enfin sont donnés 6 exercices de "quelques problèmes de géométrie" et 4 "Problèmes". Voici un exemple du type d'exercice donné qui sollicite l'utilisation d'un dessin.

> Exercice n° 57, page 319 :
> Les points A, B, C et D sont définis par : A(-2,4), B(-4,0), C(6,-1), D(0,1).
> Que représente le point D pour le triangle ABC ?
> Là encore, il ne se passera rien sans figure. Donc : figure, conjecture (utiliser le quadrillage), contrôle...

Le coup de pouce des auteurs montre bien la méthode à suivre dans ce type d'exercice : à partir des données on fait un dessin sur du papier quadrillé, ensuite on va pouvoir émettre des conjectures. En fait D est le centre de gravité du triangle, cela saute aux yeux ! Une fois la conjecture faite il reste à montrer que $\overrightarrow{OD} = 1/3\ (\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

4.6.2 - Conclusion

Le registre vectoriel apparaît dans l'énoncé de 44 exercices parmi les 86 proposés, ce qui n'était pas le cas dans le chapitre sur les vecteurs et configurations (61/73 exercices du chapitre "vecteurs" présentent la notation vectorielle dans l'énoncé). Parmi ces 44 exercices nous en rencontrons **8** pour lesquels nous pouvons dire que le vecteur représente un outil de résolution, et cela en utilisant les conditions analytiques de parallélisme et d'orthogonalité. Citons à ce propos l'exercice 57, décrit ci-dessus.

Dans ce chapitre le registre graphique a une place centrale, rappelée à tout moment par les auteurs du manuel. Plusieurs énoncés donnent un dessin à construire, basé par exemple sur les coordonnées de quelques points donnés, puis il faut faire une conjecture et c'est alors que les vecteurs jouent son rôle. De cette façon, on peut rencontrer des exercices énoncés dans les registres de la langue naturelle et géométrique-numérique (où nous classons les notations des coordonnées d'un point, par exemple) et la résolution démarre par un passage au registre graphique, passant ensuite au registre vectoriel (pour décider, par exemple de la propriété qu'on cherche à montrer), puis on retourne au registre géométrique-numérique (avec les calculs des conditions analytiques) pour finalement conclure. Il s'agit toujours d'écrire une même donnée dans différents registres (et les interpréter par la suite dans différents domaines), et si nous prenons l'ensemble des exercices proposés, nous voyons que ce jeu entre les registres graphique, langue naturelle, géométrique-numérique et vectoriel[32] peut se passer dans n'importe quel sens. Cette fois on ne fait pas, dans un même exercice, l'aller-retour entre les registres, comme était le cas dans le premier chapitre sur les vecteurs. Il s'agit d'une séquence de passages entre registres sans retour au registre de départ. Ce passage entre registres met aussi en jeu un changement de cadres, entre les cadres géométrique, géométrique vectoriel, analytique et analytique vectoriel.

Un point qui attire notre attention est l'absence d'exercices autour de la notion de base et de décomposition dans une base. Ainsi l'introduction de cette notion dans la partie cours semble avoir pour seul objectif celui de permettre de définir les conditions analytiques de colinéarité et d'orthogonalité.

4.6.3 - Dimathème

Dans le manuel Dimathème, il n'y a pas de Travaux Pratiques et les exercices sont partagés en : "pour savoir faire" et "pour chercher". Les exercices "pour savoir faire", traitent des

[32] La notation vectorielle gagne encore une nouvelle façade, les coordonnées viennent se joindre aux notations précédemment vues, ce qui donne alors les notations $\overrightarrow{AB}(x, y)$ et $\vec{u}(x, y)$

définitions et des propriétés du cours. Il s'agit d'applications directes du cours pour familiariser les élèves avec les notions données et leur faire pratiquer le passage entre l'analytique et les vecteurs. Pour entraîner les élèves à savoir calculer les coordonnées d'un vecteur, par exemple, il est donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, leurs coordonnées, et il est demandé de trouver les coordonnées de : $\vec{u} + \vec{v}$, $2\vec{u}$. Ou encore trois points A, B et C, sont donnés et il est demandé de calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, entre autres choses.

Les exercices concernant la notion de vecteur directeur renforcent l'idée d'un vecteur formé par deux points qui appartiennent à la droite, ce qui est susceptible de créer des difficultés pour les élèves lorsqu'il leur faut envisager l'ensemble des représentants. On dit que deux droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Or, dans les exercices, il s'agit de trouver un vecteur directeur pour chaque droite puis de les comparer pour savoir s'ils sont colinéaires ou non. Une fois de plus ce vecteur est formé à partir de deux points qui appartiennent à la droite.

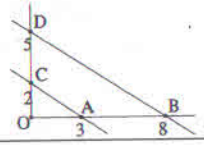
Nous avons pu constater que comme pour Terracher, les exercices donnés utilisent les résultats analytiques obtenus à partir des vecteurs, comme outils pour résoudre des problèmes de géométrie. Citons l'exercice 19, page 259 :

> 19) Placer les points A(3 ; 2), B(7 ; 3) et C(15 ; 5).
> Démontrer que les points A, B et C sont alignés

Cet exercice peut être résolu d'au moins deux manières : d'abord en traduisant le problème d'alignement de trois points en un problème d'appartenance d'un point à une droite, ou en utilisant la condition analytique pour la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, par exemple. Cette dernière possibilité semble plus économique, d'une part en nombre de calculs, d'autre part parce que cela consiste en l'utilisation d'une formule donnée dans le cours.

Ci-dessous l'exemple d'un exercice dans lequel l'outil vectoriel n'apporte aucune économie.

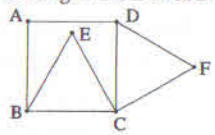
> Exercice 27, page 259.
> 27) On donne la figure ci-dessus.
> Les droites (AC) et (BD) sont-elles parallèles ?



Pour répondre à la question posée, on peut comparer les coefficients directeurs de chaque droite et vérifier s'ils sont égaux, ou on peut utiliser la condition analytique de parallélisme de deux droites obtenue à partir de deux vecteurs directeurs. Cette deuxième solution nous semble être celle visée par les auteurs du manuel, et pourtant la première est assez économique (on fait un seul calcul) d'autant plus qu'on reste dans le "domaine" de l'analytique sans devoir passer explicitement par les vecteurs.

Citons enfin, l'exemple d'un exercice qui peut avoir plusieurs résolutions, et pour lequel les auteurs du manuel attirent l'attention sur le fait que ce même exercice apparaît dans un autre chapitre du manuel[33]. Il s'agit de l'exercice 34, page 261.

> Exercice 34, page 261.
> 34) Points alignés
> Sur la figure, D est un carré et les triangles BCE et CFD sont équilatéraux.



> On utilise le repère $(B, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.
> 1° a) Donner les coordonnées des points B, C, D et A.
> b) calculer les coordonnées des points E et F.
>
> 2° Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AF}$, en déduire que les points A, E et F sont alignés.
> (Cet exercice est traité sous une autre forme p.211 n°42)

Il y a donc une intention d'attirer l'attention des élèves sur le fait qu'un exercice peut se résoudre de plusieurs façons, ce qui offre la possibilité de mettre en évidence le vecteur comme un nouvel outil pour résoudre des problèmes de géométrie. Il faut pourtant remarquer que ce même exercice possède aussi une résolution utilisant la notion d'angle. Nous considérons cette résolution comme plus élémentaire et économique au niveau du nombre d'étapes à effectuer et moins difficile car il suffit d'utiliser les définitions et propriétés d'un triangle équilatéral.

4.7 - Conclusion

L'analyse des exercices sur la géométrie analytique nous a permis de confirmer que les vecteurs jouent un rôle d'outil pour résoudre des problèmes de géométrie dans la mesure où

[33] Nous ne donnerons pas ici en extenso les résolutions possibles, mais citons au moins quelques possibilités : les configurations avec la notion d'angle ; la colinéarité vectorielle sans passer par les coordonnées ; la rotation, et bien sûr la géométrie analytique.

ils fournissent un outil pour la géométrie analytique, mais ils peuvent disparaître ensuite. Les problèmes de géométrie sont résolus avec les résultats de la géométrie analytique obtenus à partir des vecteurs. Pour certains cas, ce changement peut représenter une économie au niveau de la résolution de l'exercice. Les auteurs des manuels annoncent qu'il faut pratiquer des changements de domaines pour résoudre les exercices.

Ce qui est annoncé dans les manuels et programmes de Seconde comme étant de la géométrie analytique, semble être plutôt la géométrie analytique vectorielle. En effet, il s'agit, tout au moins en classe de Seconde, de prendre les notions et propriétés vectorielles vues dans le chapitre sur les vecteurs et de les interpréter ou de les relire à la lumière de la géométrie analytique, ou plus particulièrement à l'aide de la notion de coordonnées d'un vecteur.

Nous avions fait l'hypothèse que les coordonnées d'un vecteur pouvaient renforcer son caractère géométrique. En effet, quand on définit les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$, cette définition est très attachée aux points A et B ; on ne montre pas que si on prend un autre représentant $\overrightarrow{CD}$ de ce vecteur $\overrightarrow{AB}$, les coordonnées seront les mêmes, autrement dit on ne montre pas que ce choix ne dépend pas uniquement des extrémités du vecteur.

Prenons encore l'exemple d'un vecteur directeur d'une droite. Nous avons vu qu'il est défini d'abord par des points qui appartiennent à la droite et c'est seulement après que les auteurs des manuels essaient de le "détacher" de la droite. Nous pensons que cette définition posera des problèmes aux élèves lorsqu'ils devront utiliser le résultat selon lequel tout vecteur colinéaire à un vecteur directeur d'une droite représente, lui aussi un vecteur directeur de la droite. Il nous semble ainsi que la procédure pratiquée par les élèves pour identifier deux droites parallèles doit consister à prendre un vecteur colinéaire à chaque droite et de les comparer. Cette question sera reprise lors de l'analyse du dispositif expérimental réalisé en classe de Seconde (cf. chapitre D).

4.8 - Les transformations - La partie cours[34]

Passons à l'étude de la dernière partie du cours en lien avec les vecteurs : les transformations. Les vecteurs apparaissent dans les définitions de l'homothétie et de la translation. L'étude des transformations est centrée sur l'effet d'une transformation sur des propriétés géométriques telles que l'alignement et le parallélisme, et sur l'image d'une figure par une transformation donnée, comme nous pouvons le voir d'après les "boîtes à méthodes" des deux manuels analysés. L'étude de l'homothétie est, en particulier liée à des situations portant sur les agrandissements et les réductions.

[34] Des extraits des manuels sont donnés dans les annexes du chapitre B2.

Il nous semble, d'après le cours, que dans l'étude des transformations les vecteurs servent plutôt comme une notation au moment de l'écriture de la transformation, ou encore à traduire certaines propriétés de la figure. D'après le programme nous avons l'impression que les vecteurs servent à définir la translation et l'homothétie qui de leur côté servent à traiter des problèmes de géométrie.

> " La mise en oeuvre des vecteurs sur les configurations et les transformations joue un rôle essentiel, aussi bien pour la compréhension de la notion de vecteurs que pour la résolution des problèmes de géométrie.... ". (Programme Seconde, 1996, p. 27)

Pour l'analyse des exercices, nous chercherons à déterminer plus exactement les types d'exercices proposés où les vecteurs interviennent, ainsi que leur rôle dans la résolution de l'exercice.

4.9 - Les exercices[35]

Les exercices sur les transformations portent surtout sur l'effet sur des figures et les invariants d'une transformation. Les vecteurs sont utilisés au niveau de la notation pour la translation et l'homothétie. Les propriétés dont on a besoin pour les exercices sur la translation sont essentiellement : l'égalité vectorielle (sous les deux formes : même direction, même sens et même longueur, et les côtés opposés d'un parallélogramme) ; l'addition vectorielle (la relation de Chasles et la règle du parallélogramme) et finalement la caractérisation vectorielle du milieu d'un segment et du centre du gravité d'un triangle. Concernant l'homothétie il s'agit en plus de savoir exprimer l'alignement de trois points par une relation de colinéarité et de connaître la configuration de Thalès. Dans Dimathème, on retrouve aussi la mesure algébrique pour revenir à la propriété de Thalès.

Dans le chapitre sur les transformations des deux manuels, les exercices sur la translation occupent une place secondaire. En effet, dans Terracher on rencontre 4 exercices où il s'agit de faire pratiquer la définitions et les propriétés d'une translation, et 3 exercices où la translation fonctionne comme un outil pour résoudre un problème de géométrie, mais pour deux d'entre eux, on pourrait tout simplement utiliser les vecteurs sans parler de translation et dans le troisième il s'agit d'identifier l'image d'une figure par une translation. Citons l'exemple d'un exercice où les auteurs attirent l'attention (dans la résolution proposée dans le livre du maître) sur le fait que l'utilisation des vecteurs ou de la translation revient au même. Il s'agit de l'exercice 52, page 348 :

[35] Les exercices des deux manuels diffèrent peu les uns des autres, ainsi avons-nous restreint les exemples donnés dans cette analyse aux exercices du manuel Terracher.

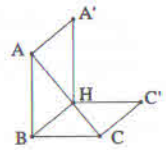
Soit ABC un triangle rectangle en B et H le projeté orthogonal de B sur (AC). On désigne par A' et C' les points tels que HBAA' et HBCC' sont des parallélogrammes. Quelle est la nature du quadrilatère CAA'C' ?

Suggestion : On pourra utiliser la translation de vecteur $\overrightarrow{BH}$.

Résolution donnée dans le livre du maître :

Que ce soit avec les translations ou les vecteurs, nous avons $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BH}$, ce qui montre que CAA'C' est un parallélogramme.

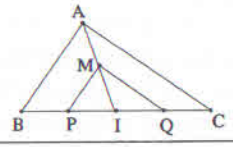
L'orthogonalité de $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AC}$ mène à l'orthogonalité entre $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AC}$, ce qui établit que CAA'C' et un rectangle.



En effet, pour résoudre l'exercice il faut montrer que le quadrilatère CAA'C' est un parallélogramme et on peut le montrer en utilisant une translation de vecteur $\overrightarrow{BH}$, par exemple, ou l'égalité des vecteurs sur les parallélogrammes. Mais on peut aussi le résoudre sans faire appel aux vecteurs : il suffit d'utiliser les propriétés géométriques des parallélogrammes HBAA' et HBCC'.

Dans ces mêmes conditions, on peut trouver des exercices qui portent sur l'homothétie et qui pourraient être résolus d'une autre façon. Citons l'exemple de l'exercice 46, page 367 :

Dans le triangle ABC I est le milieu de [BC] et M un point de la médiane (AI). Les parallèles à (AB) et (AC) issues de M rencontrent (BC) en P et Q.
Montrer que I est le milieu de [PQ].



Ce même exercice a été proposé dans le chapitre sur les vecteurs, pour utiliser les projections dans la résolution.

5 - Conclusion du chapitre

Faisons d'abord le point sur la place des différents registres de représentation sémiotique et les cadres présents dans l'enseignement et sur l'usage qui en est fait ; ensuite sur les types de problèmes proposés aux élèves à résoudre avec les vecteurs, en dégageant et en distinguant ceux pour lesquels les vecteurs fonctionnent réellement comme un outil efficace de résolution de ceux qui sont présentés dans l'enseignement comme tel mais dans lesquels les vecteurs n'apportent pas d'économie ni d'efficacité.

À propos des registres de représentation sémiotique

Relativement aux traductions en langage vectoriel, nous donnons ci-dessous une liste des celles qui peuvent être attendues des élèves en fin de Seconde. L'ordre de présentation choisi n'est pas celui d'apparition dans l'enseignement ; il s'agit ici de fournir un classement par importance accordée pour les manuels à chaque traduction. Pour cela nous avons analysé la partie cours, les "boîtes à méthodes", les exercices résolus et les exercices proposés. Pour les exercices, ce qui nous a guidé pour classer par ordre d'importance, est la fréquence d'apparition de chaque traduction.

	propriétés géométriques	traduction en langage vectoriel
1	ABCD parallélogramme	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
2	I milieu de [AB]	$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{AI} = 1/2\ \overrightarrow{AB}$
3	ABCD parallélogramme	$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Chasles)
4	A, B, C alignés	$\overrightarrow{AB} = k\ \overrightarrow{AC}$
5	(AB)//(CD) et AB=kCD	$\overrightarrow{AB} = k\ \overrightarrow{CD}$ (proportionnalité)
6	G centre de gravité de ABC	$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$
7	$t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D$	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$
8	(AB)//(CD)	$\overrightarrow{AB} = k\ \overrightarrow{CD}$ (vecteurs colinéaires)
9	(AB)⊥(CD)	vecteurs orthogonaux
10	A ∈ (CD)	$\overrightarrow{AC} = k\ \overrightarrow{AD}$

* Les items 8) et 9) sont travaillés surtout avec la géométrie analytique, donnant lieu ainsi au passage par le registre géométrique-numérique.

Du point de vue théorique, une traduction d'un registre à un autre est d'autant plus efficace qu'elle est équivalente mathématiquement ; mais il faut pourtant savoir que les traductions mises dans cette liste ne doivent pas être interprétées comme une équivalence au sens mathématique et que le passage d'un registre à l'autre, tel qu'il est fait dans les manuels, provoque parfois une perte d'informations. En effet, on entraîne les élèves à traduire en registre vectoriel les informations que l'on croit utiles pour la résolution du problème. De plus ces traductions ne sont pas souvent résultats d'un théorème ; elles se situent aussi au niveau de la pragmatique.

En classe de Quatrième et Troisième, la majorité des exercices exige une interprétation d'une relation vectorielle en termes des propriétés géométriques et vice-versa ; il est rare qu'on demande aux élèves de produire une relation vectorielle ou encore de produire des vecteurs. La fonction des différents registres dans la résolution des exercices change quelque peu entre la Quatrième et la Troisième. En effet, en classe de Quatrième on doit expliciter les propriétés géométriques qui sont utilisées pour la résolution, tandis qu'en classe de Troisième cet usage peut être fait de manière implicite, ou comme un usage en acte. Par exemple, en Quatrième il s'agit, dans beaucoup d'exercices, de montrer l'égalité vectorielle, et dès lors, pour justifier que deux vecteurs sont égaux il faut utiliser des propriétés géométriques (même direction, même sens et même longueur ou côtés opposés d'un parallélogramme). Une fois en Troisième, face à un parallélogramme ABCD, on peut conclure et écrire directement que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, (ceci apparaît souvent dans des exercices pour simplifier une écriture vectorielle, dans lesquels on doit utiliser la relation de Chasles). Et en classe de Seconde, il est encore plus recommandé d'utiliser directement les propriétés vectorielles énoncées sans justifier à chaque fois qu'elles sont déduites des propriétés géométriques. C'est peut-être là un type d'économie dans l'usage des vecteurs ! Enfin, c'est pourquoi, au moment d'expliciter les registres qui sont utilisés dans l'énoncé et la résolution d'un exercice, l'apparition du registre géométrique diminue dans les classes de Troisième et Seconde. Mais ceci ne signifie pas pour autant que les résolutions ne soient pas géométriques : n'oublions pas que les propriétés vectorielles ont été déduites à partir des propriétés géométriques et que, dans les exercices, le dessin a une présence constante.

Avec l'introduction de la géométrie analytique liée aux vecteurs, le registre que nous avons appelé de "géométrique-numérique" vient se joindre aux registres précédemment vus. Il nous semble alors qu'un changement majeur, concernant le jeu entre registres, s'est mis en place : on définit les coordonnées d'un vecteur et à partir de propriétés vectorielles utilisées dans l'étude des configurations, des relations analytiques sont déduites comme par exemple, l'expression analytique de la colinéarité de deux vecteurs. A partir de cela, on fait pratiquer aux élèves ces relations qui ont été déduites à partir du calcul vectoriel mais il s'agit plutôt de nouvelles "formules" pour résoudre des problèmes de géométrie. Ce qui signifie que l'élève

peut quelques fois utiliser ces relations et oublier qu'elles sont originaires de l'étude des vecteurs.

Dans notre analyse des manuels nous avons rencontré des exercices qui apparaissaient à des moments différents : dans l'étude des configurations, sans utiliser les vecteurs, ensuite avec les vecteurs et finalement dans l'étude de la géométrie analytique avec de formules déduites à partir des relations vectorielles. Ainsi un exercice énoncé en utilisant le registre de la langue naturelle, de l'écriture symbolique géométrique et le registre graphique, peut être résolu par trois "méthodes" différentes. Nous pourrons dans un premier moment représenter cela par le schéma suivant :

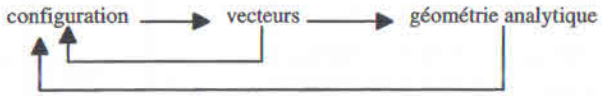


Schéma 2

Chacun de ces "domaines" a des contraintes et des lois de fonctionnement internes ce qui nous conduit à parler de quatre cadres coexistants dans la géométrie : géométrique, géométrique vectoriel, analytique et analytique vectoriel. En effet, nous avons montré que seuls les cadres géométrique et analytique ne suffisent pas pour décrire et expliquer l'enseignement des vecteurs dans le secondaire. C'est pourquoi nous avons parlé de cadre de la géométrie vectorielle et de cadre de la géométrie analytique vectorielle. C'est ainsi et pour cela que nous pouvons conclure que l'enseignement des vecteurs en classe de Seconde représente un changement autre que le changement de registres, tout en étant encore loin du cadre de l'algèbre linéaire. Reste à savoir si les élèves peuvent, d'eux mêmes, pratiquer ces changements de cadres. Nous renvoyons cette question au chapitre suivant.

La fonction des vecteurs dans la résolution d'exercices

Notre analyse des manuels montre qu'en classe de Quatrième et Troisième les vecteurs ne constituent pas vraiment un outil de résolution de problèmes de géométrie ; il s'agit d'introduire une nouvelle notion et de faire pratiquer les définitions et propriétés. En classe de Seconde on va rencontrer encore des exercices d'entraînement aux notions vectorielles mais aussi de véritables problèmes à résoudre avec les vecteurs. Les vecteurs représentent alors un outil de résolution de problèmes de géométrie, mais il faut remarquer qu'ils ne sont pas nécessaires : nous n'avons pas rencontré d'exercices de géométrie pour lesquels les vecteurs soient indispensables sans qu'ils fassent partie de l'énoncé. En revanche, nous avons rencontré des exercices dans lesquels l'utilisation des vecteurs représente une certaine économie au niveau de leur résolution.

Donnons ci-dessous d'abord un tableau des types de problèmes rencontrés sur les vecteurs et ensuite nous discutons la fonctionnalité des vecteurs pour leurs résolutions.

Types de problèmes	Quatrième	Troisième	Seconde
1) montrer l'égalité vectorielle	X	X	X
2) effectuer ou identifier la translation de figures	X	X	X
3) calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ à partir des coordonnées de A et B.		X	
4) calculer les coordonnées du milieu de $\overrightarrow{AB}$.		X	
5) effectuer ou identifier l'addition vectorielle (règle du parallélogramme et rel de Chasles).		X	X
6) construire des points définis par des égalités vectorielles.		X	X
7) montrer l'alignement des points			X
8) identifier ou calculer le milieu d'un segment			X
9) montrer le parallélisme de droites			X
9) montrer l'orthogonalité de droites			X
10) transformations (translation et homothétie - effet sur des figures)			X

En résumé, mis à part les problèmes où l'on fait pratiquer aux élèves les définitions et propriétés vectorielles, à l'issue de la Seconde les problèmes géométriques que les élèves doivent résoudre en utilisant les vecteurs sont essentiellement :

1) alignement de points ;

2) direction de droites (droites parallèles et droites orthogonales).

3) transformations : translation et homothétie.

Pour ce type de problèmes, les vecteurs sont présentés dans les manuels comme un outil efficace de résolution. Pourtant, dans notre analyse des exercices proposés dans le chapitre des manuels qui traite les vecteurs et les configurations, nous avons trouvé très peu d'exercices pour lesquels nous pouvons dire que les vecteurs fonctionnent de façon efficace, et de plus il s'agit d'exercices dont la résolution exige d'utiliser deux résultats qui n'ont pas été assez mis en évidence dans la partie cours : l'addition vectorielle dans le demi-parallélogramme et la possibilité d'écrire un vecteur du plan comme combinaison de deux vecteurs non-colinéaires quelconques du plan. Il reste donc à savoir si les élèves sauront y faire appel et bien utiliser ces résultats. Ainsi dans la suite de notre travail, nous proposons une expérimentation pour vérifier la disponibilité et l'efficacité de l'outil vectoriel chez les élèves après la classe de Seconde (cf. chapitre C).

Discutons un peu de la méthode proposée aux élèves pour résoudre ces problèmes. Cette méthode constitue essentiellement à changer de registres, puis à travailler à l'intérieur du cadre de la géométrie vectorielle, et ensuite à revenir sur les changements de registres. Ces changements de registres sont aussi accompagnés d'un changement de cadres. Les relations vectorielles à mettre en œuvre sont essentiellement l'égalité vectorielle, l'addition vectorielle et le produit par un scalaire. L'addition vectorielle consiste plutôt à utiliser la relation de Chasles et pour l'utiliser à bon escient, il faut savoir qu'il est toujours possible de décomposer un vecteur comme combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires et non nuls. Toutefois cette notion ne fait pas partie des objets à enseigner, du moins pas de manière explicite. Nous disons, comme Bronner (1997), que l'absence de cette notion représente un "vide didactique" dans l'enseignement secondaire. Et la question que nous nous posons est d'étudier les conséquences de cette absence chez les élèves lorsqu'ils ont à résoudre un problème. Ainsi le discours sur la méthode fait par les auteurs des manuels nous a semblé assez flou ce qui doit probablement engendrer des difficultés chez les élèves lorsqu'ils ont à résoudre un problème de géométrie. C'est là l'une des questions sur lesquelles nous porterons notre attention lors du prochain chapitre.

CHAPITRE C

LE VECTEUR EN TANT QU'OUTIL

L'analyse des manuels conduite dans le chapitre précédent a permis de montrer que les vecteurs sont présents dans l'enseignement secondaire, essentiellement dans leur fonction d'outil pour résoudre des problèmes de géométrie et que cet enseignement se base sur des aller-retours entre les registres graphique, symbolique géométrique et symbolique vectoriel essentiellement.

Nous présentons dans ce chapitre deux dispositifs expérimentaux réalisés auprès d'étudiants de DEUG et d'élèves de Première S. Leur but était d'étudier si les vecteurs constituent vraiment un outil disponible et efficace pour ces élèves. Nous avons choisi quelques exercices standards pour lesquels les vecteurs sont présentés dans l'enseignement comme un outil performant de résolution. En enlevant de l'exercice tout indice qui puisse évoquer les vecteurs, nous cherchions à repérer si les étudiants et élèves feraient appel aux vecteurs et dans l'affirmative s'ils le faisaient de façon suffisamment efficace pour les conduire à une réussite.

INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent sur l'analyse des manuels actuels, nous avons mis à l'épreuve l'hypothèse de recherche 1, selon laquelle "l'enseignement des vecteurs dans le secondaire repose sur l'aller-retour entre les différents types de registres et les types de problèmes attachés qui y sont présents". De plus, nous avons montré qu'en classe de Seconde le cadre de la géométrie vectorielle est introduit et que l'on apprend aux élèves à résoudre des problèmes de configuration dans ce nouveau cadre. L'une des questions découlant de cette analyse est de savoir si l'utilisation des vecteurs apparaît chez les étudiants ou élèves comme un outil possible et efficace de résolution des problèmes de géométrie. Notre objectif principal dans ce chapitre est de vérifier cette disponibilité de l'outil vectoriel dans des problèmes de configuration et d'étudier par la suite jusqu'à quel point il se révèle efficace. Nous nous centrerons sur les aspects fondamentaux des vecteurs : somme vectorielle, relation de Chasles et produit par un réel.

D'une manière générale, au moyen du dispositif expérimental que nous décrivons et analysons dans ce chapitre, nous cherchons à répondre à la question suivante :

Pour un problème de géométrie énoncé dans le cadre géométrique sans usage du registre vectoriel, problème dont les vecteurs fournissent une solution (optimale ou non), l'élève fait-il appel aux vecteurs ? Et si oui, le fait-il de façon efficace ?

Pour procéder à notre étude sur les vecteurs en tant qu'outil de résolution de problèmes et les difficultés que les étudiants et élèves rencontrent lors de leur utilisation pour résoudre des exercices, nous mettons en place un dispositif expérimental réalisé à deux niveaux différents : la classe de Première S et la première année du DEUG section scientifique. Ce dispositif expérimental est partagé en deux parties :

(i) **phase A,** composée d'exercices écrits effectués par les élèves ;

(ii) **phase B**, constituée par les entretiens effectués après l'analyse des résultats des exercices écrits.

En premier lieu nous présentons dans le paragraphe 1 les choix expérimentaux de la situation proposée aux élèves, en explicitant d'abord les questions auxquelles nous cherchons à répondre, qui ont conduit aux choix des exercices. Ensuite nous procédons dans le paragraphe 2, à une analyse a priori des exercices choisis, en donnant quelques stratégies de résolution et une analyse de chacune de ces stratégies, prenant en compte le niveau scolaire auquel l'exercice sera appliqué.

Puis dans le paragraphe 3 nous présentons l'expérimentation réalisée en classe de Première S, en faisant une analyse a posteriori des résultats obtenus dans les deux phases A et B. Finalement nous présentons dans le paragraphe 4 l'expérimentation faite en DEUG première année, en procédant tout de suite à une analyse des données obtenues dans chaque phase.

Nous conclurons sur la disponibilité et l'efficacité de l'outil vectoriel chez les élèves à la sortie du secondaire ou après la classe de Seconde, en analysant individuellement puis en comparant les résultats obtenus en Première S et DEUG section scientifique.

La confrontation entre les résultats obtenus dans les deux niveaux permet de comparer les difficultés des étudiants à leur entrée à l'université et à leur sortie de Seconde relativement à l'utilisation de vecteurs pour résoudre un problème de géométrie. C'est pourquoi nous croyons que le fait de choisir les premières notions acquises est pertinent : cela nous permet entre autres d'appliquer les mêmes problèmes aux deux groupes différents d'élèves.

Le principe de l'expérimentation réalisée en Première S et en DEUG section scientifique a été le même, mais entre les deux réalisations du dispositif expérimental des changements ont été effectués. Nous les justifierons au fur et à mesure qu'ils apparaissent dans cette rédaction.

1 - Choix expérimentaux

1.1 - L'objectif - questions à vérifier

La situation que nous avons mise en place a été conçue comme une situation diagnostique pour répondre à quelques questions que nous nous sommes posées dans notre problématique. D'une manière générale, la question à laquelle nous avons voulu esquisser des réponses est la suivante :

Quels sont les problèmes dans lesquels l'outil vectoriel intervient de façon efficace chez les élèves ?

A propos de la disponibilité de l'outil vectoriel, nous voulions savoir si les élèves utilisent les vecteurs s'il n'y a pas de notation vectorielle mais qu'il s'agit d'un problème pour lequel ils ont été entraînés à l'utiliser.

Le champ d'investigation est trop vaste, pour le réduire nous avons recours à la liste de traductions (changement de registres) pratiquées dans l'enseignement au niveau de la Seconde et les types d'exercices proposés (cf. conclusion du chapitre B2). Ce que nous envisageons est donc, en partie la disponibilité de cette liste auprès des élèves.

La liste des traductions que nous avons formulée, concerne celles exigibles des élèves d'après les attentes des auteurs des manuels ; les élèves n'ont pas été pris en compte, à ce moment là. Si nous voulons mesurer le **degré de difficulté** de la traduction pour les élèves, il faut distinguer deux types de situations :

(i) quand les vecteurs sont présents dans l'énoncé ;

(ii) quand les vecteurs n'apparaissent pas dans l'énoncé de l'exercice.

Pour élaborer une liste de traductions qui satisfait le point (i) décrit ci-dessus, il faut mener un travail auprès des élèves pour valider la liste de traductions exigibles décrite dans notre analyse de manuels. Cependant cela n'est pas l'objectif central de ce travail. Dans un premier temps nous cherchons à étudier si les élèves pensent à utiliser les vecteurs quand le problème n'est pas énoncé dans le registre vectoriel, (cas (ii)), et dans un deuxième temps, nous étudions leur démarche une fois que les vecteurs apparaissent comme un outil possible pour la résolution du problème. En d'autres termes, nous cherchons à étudier la disponibilité et l'efficacité de l'outil vectoriel chez les élèves.

Le terme "disponibilité" est inspiré des travaux de Robert, selon qui "cela correspond au fait de savoir résoudre ce qui est proposé sans indications, de pouvoir par exemple donner des contre-exemples (retrouver ou inventer), changer de cadres (mises en relation),

appliquer des méthodes non prévues." (1997, p. 206) Nous avons ressenti le besoin de faire une classification plus fine : pour nous il est important d'analyser premièrement quand les élèves font appel spontanément à l'outil vectoriel puis quand ils l'utilisent à bon escient, c'est pourquoi nous parlons de disponibilité et d'efficacité de l'outil vectoriel.

Nous supposons que le passage du registre symbolique géométrique au registre symbolique vectoriel ne va pas de soi pour les élèves, ou autrement dit, qu'il y a des traductions qui ne sont pas spontanées chez eux, hypothèse que nous formulons sous forme de question :

I) Les élèves feront-ils appel spontanément aux vecteurs, pour un problème de géométrie, énoncé dans le cadre géométrique, qui ne renvoie pas explicitement aux vecteurs (ni même par des "indices") et dont les vecteurs représentent une solution possible (optimale, simple ou non) ?

Pour répondre à cette question, nous choisissons des problèmes simples (qui mettent en jeu les premières notions vectorielles), et nous les énonçons en utilisant le registre de la langue naturelle (dans la mesure du possible) et le registre symbolique, mais qui ne donnent aucun indice faisant penser aux vecteurs. De cette façon, nous pourrons vérifier si les élèves mobilisent d'eux-mêmes l'outil vectoriel (si cet outil est disponible) et s'ils arrivent à pratiquer la conversion (changement de registre). La difficulté est donc, que cet outil n'est pas pointé par l'énoncé et qu'on attend que les élèves y pensent spontanément. Autrement dit, nous voulons tester la **disponibilité** de l'outil vectoriel.

Une fois que l'outil vectoriel se montre disponible, nous nous intéressons à étudier l'**efficacité** chez les élèves de cet outil, autrement dit :

II) Une fois que les élèves font la traduction du registre symbolique géométrique (RSG) au registre symbolique vectoriel (RSV), que font-ils ? L'outil vectoriel se montre-t-il efficace ?

Pour répondre à cette question, il faut tout d'abord définir les aspects que nous analysons, pour décider de l'efficacité de l'outil vectoriel chez les élèves. Le fait de ne pas arriver à une résolution n'est pas le critère le plus informatif pour décider de l'efficacité de l'outil choisi. Entre la traduction en registre vectoriel, et une résolution correcte jusqu'à la fin, nous cherchons à examiner, pour comprendre les difficultés des élèves, ce qui a pu empêcher leur réussite. C'est pourquoi nous étudions les erreurs commises dans la résolution de l'exercice et nous examinons surtout les deux points suivants :

- le **nombre** d'erreurs ;

- les **raisons** de l'échec au problème : la nature des erreurs, ou la nature des stratégies qui ne débouchent pas sur une solution.

Par "nature des erreurs" nous distinguons les erreurs dues à l'usage de propriétés erronées, les erreurs de calcul algébrique sur relations vectorielles et l'interprétation vectorielle erronée du graphique.

Pour comprendre ce que veut dire "une stratégie qui ne débouche pas", prenons comme exemple un exercice où on doit utiliser, entre autres, la relation de Chasles. Nous constatons que pour beaucoup d'exercices il s'agit de lire des relations vectorielles sur le dessin, puis d'introduire des points intermédiaires et de faire des manipulations algébriques (ou encore des substitutions) jusqu'à ce qu'on arrive à la solution[1]. L'objectif du problème guide-t-il les choix à effectuer ou ce point intermédiaire est-il choisi "au hasard" ? En fait, le choix d'un point à faire intervenir ne devrait pas être fait au hasard mais par rapport à une paire de vecteurs non colinéaires sur laquelle on décompose les vecteurs pour arriver à une solution. Cela veut dire que ce qui pourrait apparaître comme un problème de manipulation peut relever, en réalité, d'un problème de décomposition dans une base qui, à son tour, ne fait pas partie des objets à enseigner (cf. chapitre B2). Nous voulons donc examiner cette question auprès des élèves.

Notre objectif est aussi de procéder à une étude comparative entre les productions des élèves qui ont fourni une résolution avec l'outil vectoriel et ceux qui ont proposé une résolution géométrique.

Le nombre d'étapes dans la résolution du problème n'est pas considéré par nous comme un paramètre pour mesurer les difficultés des élèves. Du point de vue mathématique, une solution peut être considérée comme optimale si elle a moins d'étapes, mais dans ce cas le nombre d'implicites est beaucoup plus grand et cela peut rendre la solution plus difficile pour les élèves.

La question I) est très large, ainsi pour donner des éléments de réponse nous la reformulons de la manière suivante :

III) Les élèves sont-ils susceptibles de penser spontanément à utiliser l'outil vectoriel dans les types de situations (problèmes) les plus standards ?

Le programme en vigueur et les manuels visent à entraîner les élèves à résoudre des problèmes de géométrie en utilisant un nouvel outil : les vecteurs. En effet, en Seconde, l'étude de vecteurs a été centrée surtout sur la colinéarité vectorielle ce qui permet de

[1] Il s'agit ici d'un des résultats de l'analyse des manuels, chapitre B2.

résoudre des problèmes d'alignement de points, d'appartenance d'un point à une droite ainsi que des problèmes de direction de droites. La proximité d'écriture et la fréquence d'apparition dans les manuels ont été des outils pour décider de la possibilité pour ces élèves d'effectuer un changement de registres, et pour dégager ainsi les problèmes qui peuvent favoriser le plus le recours à l'outil vectoriel.

Les problèmes traitant de proportionnalité de distances et d'alignement de trois points nous paraissent ceux pour lesquels les élèves peuvent effectuer une traduction en registre vectoriel plus facilement :

- Les problèmes de proportionnalité parce qu'il existe une proximité très grande au niveau de l'écriture : en effet, une fois qu'on a par exemple AB = k CD, il suffit de rajouter une "flèche", tout en respectant le sens, et l'on passe ainsi au registre symbolique vectoriel.

- Les problèmes qui portent sur l'alignement sont aussi susceptibles de provoquer un passage au registre vectoriel très facilement à cause de leur importance dans les points méthodes et de leur fréquence d'apparition dans les manuels analysés.

Une autre classe de problèmes également bien placée dans l'enseignement par rapport au rôle d'outil de vecteurs porte sur les directions de droites. Ces problèmes sont mis essentiellement dans le chapitre sur la géométrie analytique où les vecteurs sont explicités par l'intermédiaire de leurs coordonnées. Mais notre intérêt dans l'expérimentation est surtout centré sur l'usage des vecteurs dans la résolution des premiers problèmes proposés aux élèves dans les manuels, dans le chapitre sur les vecteurs. C'est pourquoi nous n'utiliserons pas ce type de problème pour notre observation.

Ainsi, pour les choix des exercices et la façon de les énoncer, nous allons donc jouer sur les liens entre la question et l'usage des vecteurs dans l'enseignement secondaire.

Les réponses fournies dans la partie A du dispositif expérimental donnent accès à ce que l'élève a voulu rendre public de son travail, tandis que ce qu'il a pensé pour arriver à la résolution (ou pour choisir le chemin à suivre) reste inconnu de nous. Quelles sont les raisons des choix de résolution de l'élève ? Qu'est-ce qui fait que l'élève, seul face à un problème, va choisir les vecteurs ou non ? Nous allons donc effectuer des interviews avec quelques binômes choisis parmi l'ensemble des élèves analysés. Cela nous permettra de mieux comprendre les résultats obtenus dans la partie A, d'avoir des réponses plus fines pour nos questions que les réponses fournies aux exercices, et d'analyser la composante privée ((Chevallard, 1992), (Coppé, 1993))[2] de leur travail.

[2] Nous reviendrons sur ce point lors du paragraphe 3, "les entretiens".

Avant de passer au choix des exercices pour la phase A, nous précisons quelques questions que nous voulons analyser lors de notre dispositif expérimental partie B : **les interviews**.

V) Quelles sont les raisons des choix des élèves ?

Nous voulons confronter les solutions fournies par les élèves et leur demander d'argumenter sur les raisons de leur choix. Pour cela nous devrons former des binômes qui n'ont pas utilisé les mêmes outils pour résoudre l'exercice et chaque élève doit expliquer la résolution qu'il a proposée et prendre une décision par rapport à la résolution suggérée par son binôme. Le fait de devoir argumenter et expliquer la résolution proposée doit nous fournir des indices à propos des automatismes chez les élèves qui sont plus difficilement aperçus si on analyse seulement une copie.

VI) Quelles sont les raisons de la non réussite ?

Nous ne cherchons pas à comprendre au moyen de questions posées aux élèves sur leur propre solution toutes leurs erreurs, mais à situer à quel niveau se trouvent les difficultés empêchant l'utilisation efficace de l'outil vectoriel.

V) Quels sont pour eux les propriétés et résultats marquants des vecteurs et du travail sur cette notion ?

Nous cherchons à identifier les propriétés que les élèves considèrent comme les plus importantes ou qu'ils considèrent comme à savoir pour résoudre de problèmes de géométrie, en fin de la Seconde. Pour cela nous leur demanderons directement d'expliciter les trois propriétés les plus importantes à savoir sur les vecteurs.

1.2 - La situation expérimentale

Une fois précisés notre objectif ainsi que les questions auxquelles nous voulons répondre, nous passons à l'étude de la situation à proposer aux élèves. Cela consiste à définir la consigne que nous allons leur fournir, le choix des exercices et les exercices.

Nous avons choisi de travailler sur petits effectifs : 33 élèves de Première S et 20 étudiants de DEUG. Ce choix est justifié par le fait que nous voulons faire une analyse qualitative de ce que les élèves (étudiants) font, en analysant les réponses fournies, les méthodes utilisées par eux, les erreurs, et en complétant cette analyse par des entretiens.

1.2.1 - La consigne

Nous cherchons surtout à connaître les raisons de la démarche des élèves même si leur raisonnement n'aboutit pas à une solution. A la rigueur, nous ne nous intéressons pas à ce qu'ils arrivent à une solution, mais surtout à savoir à quoi ils ont pensé, s'ils pensent à utiliser l'outil vectoriel, s'il apparaît dès le début, ou s'il apparaît comme un dernier recours. Nous voulons tester la disponibilité de l'outil vectoriel. Pour cela, il faut expliciter et souligner aux élèves que l'activité n'a pas un caractère d'évaluation et qu'ils doivent écrire tout ce qu'ils pensent. Ils ne peuvent pas utiliser de brouillon, et doivent tout écrire sans se censurer et sans effacer ou gommer et rayer de façon à ce que ce soit encore lisible. Pour contrôler cela, nous allons fournir le papier (n° fixe pour chacun) agrafé et tout doit être rendu à la fin du temps dédié à l'expérimentation. Dans la phase A, le travail doit être fait individuellement.

Pour analyser l'effet "diffusion" nous allons numéroter le travail de chaque élève de façon à pouvoir repérer qui était assis à côté de qui. Cela peut être utile à l'analyse des résultats car si un élève voit la notation vectorielle sur les exercices de son camarade nous ne pouvons pas dire que lui aussi a pensé aux vecteurs spontanément. Il faut d'abord arriver à repérer ce phénomène pour ensuite décider de son importance.

Finalement la consigne doit donc remplir les conditions décrites ci-dessus, et elle a le texte suivant :

LA CONSIGNE

"Ce travail fait partie d'une recherche et ne sera pas utilisé pour vous évaluer. Ne vous censurez donc pas.

Nous voudrions que vous écriviez tout ce que vous pensez même si cela ne donne pas la solution. N'utilisez pas de brouillon ! Vous pouvez tout écrire sans vous censurer et sans effacer ou gommer. Rayez ce que vous pensez être faux mais de façon à ce que ce soit encore lisible.

Le travail doit être fait individuellement.

Vous ne devez utiliser que le matériel qui vous est fourni. Tout doit être rendu aux observateurs."

1.2.2 - Les choix

1.2.2.1 - Choix liés à la situation

En prenant en compte l'objectif de notre dispositif expérimental, la seule variable liée à la situation, qui nous semble jouer un rôle significatif, est la réalisation de l'observation à un moment qui est loin de celui où les élèves (étudiants) ont eu le cours sur les vecteurs, c'est-

à-dire qu'on se trouve "hors contrat didactique". Les résultats doivent changer si l'on propose par exemple les mêmes exercices en fin de Seconde alors que les élèves ont été entraînés à considérer les vecteurs comme un outil de résolution pour des problèmes de géométrie.

Nous choisissons aussi d'appliquer le même dispositif expérimental à deux moments différents, Première S et DEUG. Les étudiants de début de DEUG première année nous semblent constituer une population intéressante :

- de par la maturation qu'ils ont pu effectuer depuis le moment où ils ont été introduits aux vecteurs (5 ans) ;
- parce qu'ils n'ont pas encore abordé cette notion dans les programmes universitaires. Cela garantit l'absence d'interférence avec le vecteur algébrique.

La comparaison des solutions des deux populations permettra de repérer dans quelle mesure un temps long de maturation favorise la disponibilité et/ou l'efficacité de l'outil vectoriel.

1.2.2.2 - Choix liés aux problèmes

Nous allons présenter ci-dessous le choix des variables liées à l'énoncé des exercices et aussi aux résolutions possibles. Ensuite nous allons donner les exercices choisis et finalement procéder à une analyse détaillée de chacun d'eux.

(i) Par rapport à l'énoncé du problème :

Rappelons et détaillons les choix faits (déjà présentés ci-dessus) :

- il ne doit y avoir aucun indice faisant penser aux vecteurs ni du point de vue de la notation utilisée et ni du point de vue des propriétés du calcul vectoriel. Nous n'allons pas utiliser, par exemple, les problèmes que les élèves sont habitués à traiter dans l'enseignement. Ainsi l'énoncé du problème doit être donné en utilisant surtout le registre de la langue naturelle et les écritures symboliques géométriques les plus connues des élèves, comme la notation d'un segment ou d'une droite. Un tel énoncé va probablement entraîner une traduction en "écriture symbolique" avant même que l'élève sache où il doit arriver, ce qui nous permet de repérer les données traduites en registre symbolique géométrique et les données traduites en registre symbolique vectoriel.
- dans l'enseignement des vecteurs, dans le secondaire, il y a des problèmes pour lesquels les élèves sont plus au moins entraînés à utiliser les vecteurs et d'autres problèmes à propos desquels on peut se servir de vecteurs bien que cet aspect ne soit pas tellement accentué dans l'enseignement. C'est pourquoi, concernant la question posée, nous allons jouer avec l'usage des vecteurs dans l'enseignement, c'est-à-dire

par exemple que nous n'allons pas poser directement une question en termes d'alignement de points mais en termes d'appartenance d'un point à une droite.

(ii) par rapport aux solutions du problème :

- les exercices choisis doivent avoir au moins une solution vectorielle et une solution géométrique non-vectorielle (résolution par configuration sans utiliser le registre vectoriel, ni le calcul vectoriel par conséquent). Nous cherchons à trouver des exercices faisant appel à une solution vectorielle simple, c'est-à-dire basée sur les définitions et propriétés vectorielles les plus élémentaires connues des élèves. Nous proposerons des exercices pour lesquels on se sert surtout de la relation de Chasles, des relations vectorielles qui peuvent être déduites d'un parallélogramme et de la colinéarité (ou produit par un scalaire).

Nous ne nous intéressons pas à savoir si les élèves connaissent et savent appliquer des résultats un peu plus sophistiqués comme le produit vectoriel, par exemple. Au contraire, nous voulons tester la disponibilité de l'outil vectoriel et pour cela nous allons travailler avec les "concepts de base" : égalité vectorielle, addition vectorielle et produit par un scalaire.

- les exercices proposés aux élèves doivent avoir une solution vectorielle qui soit au moins économique au niveau de l'écriture (possibilité de condenser plusieurs propriétés géométriques en une relation vectorielle telle que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) puisqu'au niveau de la résolution (du point de vue mathématique) cela n'est guère satisfait avec le contenu présenté dans l'enseignement actuel d'une classe de Seconde (cf. analyse des manuels). En revanche, du point de vue de l'élève, nous avons montré qu'il y a des problèmes dans l'enseignement pour lesquels ils sont entraînés à penser aux vecteurs comme constituant un outil économique de résolution.

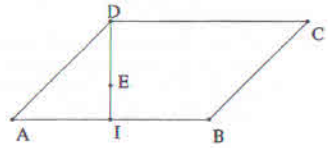
1.2.3 - Les exercices

Présentons les exercices de Seconde choisis pour l'expérimentation. Nous donnons tout d'abord l'énoncé tel qu'il est dans le manuel puis l'énoncé fourni aux élèves. Pour reformuler les énoncés des exercices, nous prenons en compte les "questions à répondre", données au début de notre analyse a priori et les variables mentionnées ci-dessus. La comparaison entre les deux énoncés nous semble importante pour faciliter la compréhension du lecteur par rapport à nos choix.

1.2.3.1 - Le premier exercice

Choisissons un exercice classique dans l'enseignement qui permet de traiter l'alignement de trois points.

1) Exercice résolu[3], Terracher, pages 226 et 291.
Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E le point du segment [ID] tel que $IE = \frac{1}{3} ID$. Établir que les points A, E et C sont alignés et préciser la position de E sur [AC].



1') Énoncé fourni aux élèves :
Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E un point situé sur le segment [ID] de telle façon que la distance du point I au point E soit égale au tiers de la distance du point I au point D. Montrer que le point E appartient au segment [AC] et que la distance de A à E est égale au tiers de la distance de A à C.

Quelques remarques à propos du choix de l'énoncé de l'exercice

(i) Les changements dans l'énoncé

Dans l'énoncé 1') nous avons supprimé la notation $IE = \frac{1}{3} ID$ parce que nous voulions diminuer la **proximité** avec l'écriture vectorielle.

Nous avons aussi décidé de parler d'appartenance d'un point à une droite au lieu de parler d'alignement de trois points pour échapper à un **automatisme** créé dans l'enseignement.

(ii) Solutions mathématiques

Du point de vue des outils mathématiques dont on dispose pour résoudre des problèmes d'alignement dans une classe de Seconde, on a :

(i) repère et déterminant
(ii) centre de gravité
(iii) colinéarité de vecteurs
(iv) transformations géométriques

1.2.3.2 - Le deuxième exercice

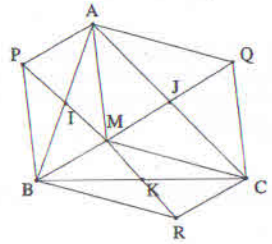
Nous avons montré dans notre analyse des manuels que dans l'enseignement on entraîne les élèves à faire des aller-retours entre les propriétés géométriques d'un parallélogramme et les propriétés vectorielles. C'est pourquoi nous choisissons un exercice qui nous permet

[3] Cet exercice a deux résolutions proposées à deux moments différents dans le manuel Terracher. La première fois il apparaît pour illustrer la méthode des médianes et la deuxième il apparaît dans le chapitre sur les vecteurs, pour utiliser la colinéarité vectorielle (respectivement pages 226 et 291).

d'une part de déterminer si les élèves font ce passage, et d'autre part de savoir quelles propriétés vectorielles du parallélogramme ils ont le plus retenues.

Donnons ci-dessous l'énoncé du deuxième exercice tel qu'il était dans le manuel Terracher et l'énoncé donné aux élèves de Première S.

2) Exercice n° 62 (Terracher - 1995), page 298.
Un triangle ABC, I, J et K les milieux des côtés, un point M quelconque et ses symétriques P, Q et R par rapport à I, J et K : telles sont les données de l'exercice.
Il s'agit alors de montrer que les segments [AR] , [BQ] et [CP] ont le même milieu.
❦ Étudier les quadrilatères mis en évidence dans la figure.



2') Énoncé donné aux élèves :
Soit un triangle quelconque ABC. On note I, J et K les milieux des côtés [AB], [AC] et [BC] respectivement.
Soit par ailleurs, un point M quelconque à l'intérieur du triangle ABC, on note P, Q et R respectivement ses symétriques par rapport à I, J et K.
Parmi les segments qui ont pour extrémités les points A, P, B, R, C, Q et M, nommer ceux qui sont parallèles et justifier pourquoi.
Montrer que les segments [AR] , [CP] et [BQ] ont le même milieu.

Quelques remarques à propos du choix de l'énoncé de l'exercice

(i) Les changements dans l'énoncé

Cet exercice a été utilisé lors d'une première observation sur un groupe de 25 élèves, que nous avons faite en classe de Première S, au Lycée Pablo Neruda en septembre 96[4]. L'énoncé (quelque peu différent), fourni aux élèves était alors le suivant :

2'') Soit un triangle quelconque ABC. On note I, J et K les milieux des côtés [AB], [AC] et [BC] respectivement.
Soit par ailleurs, un point M quelconque, on note P, Q et R respectivement ses symétriques par rapport à I, J et K.
Montrer que les segments [AR] , [BQ] et [CP] ont le même milieu.

Dans l'énoncé le point M peut être n'importe où, ce qui a amené les élèves à le mettre à l'extérieur du triangle et, dans ce cas, visualiser les parallélogrammes et la transitivité du parallélisme des droites, n'était pas du tout évident. Il y a eu un seul élève qui a mis le point à l'intérieur du triangle ; il a utilisé les médianes mais sans succès. De plus, l'énoncé

[4] Un tableau résumé des résultats alors obtenus est donné dans les annexes de ce chapitre.

du problème ne se traduit pas immédiatement par des notations vectorielles ; en effet seulement 2 élèves ont pensé à utiliser l'outil vectoriel. Parmi les 25 élèves qui ont participé à la pré-expérimentation un seul a réussi l'exercice en utilisant des notations vectorielles et le fait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Quand l'enseignante a repris l'exercice avec eux, en leur fournissant l'énoncé tel qu'il est donné dans le manuel, les élèves ne se sont pas rendus compte qu'il s'agissait du même exercice que nous leur avions proposés. Cela est assez naturel car l'énoncé de la figure et les parallélogrammes sont données en couleurs ce qui les met en évidence et favorise ainsi la visualisation des autres parallélogrammes existants dans la configuration.

Nous avons alors décidé de proposer cet exercice à d'autres élèves, en obligeant le point M à appartenir à la région intérieur au triangle et aussi en introduisant une question supplémentaire. Nous espérions ainsi éviter une construction qui n'aide pas à visualiser le résultat et avec la nouvelle question introduite, nous voulions leur indiquer un peu un chemin à suivre pour montrer que les segments ont le même milieu.

(ii) Solutions mathématiques

En classe de Seconde, quand on parle de parallélisme, nous avons comme outils de résolution des problèmes les possibilités suivantes :

(i) les propriétés géométriques du parallélogramme,
(ii) les propriétés vectorielles du parallélogramme,
(iii) les transformations géométriques,
(iv) la direction de droites (géométrie analytique).

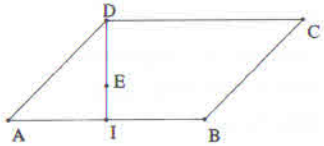
2 - Analyse a priori

Les deux exercices choisis sont maintenant examinés, en donnant dans un premier temps des stratégies possibles de résolution. Dans un deuxième temps nous discutons ces stratégies en prenant en considération le niveau scolaire des élèves qui doivent les résoudre.

2.1 - L'exercice n° 1

Rappelons l'énoncé du premier exercice. Le dessin n'est pas à fournir aux élèves, cependant nous le donnons ici pour faciliter la lecture des stratégies :

Exercice n°1
Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E un point situé sur le segment [ID] de telle façon que la distance du point I au point E soit égale au tiers de la distance du point I au point D. Montrer que le point E appartient au segment [AC] et que la distance de A à E est égale au tiers de la distance de A à C.



2.1.1 - Des stratégies possibles

S1) Solution configuration - Centre de gravité

E centre de gravité du triangle ADB car E est le point de la médiane [ID] tel que $IE=\frac{1}{3}ID$

Alors (AE) médiane de ADB qui coupe [BD] en un point O

Alors O est le milieu de [BD] et on obtient que (AE) est une diagonale du parallélogramme ADCB

On conclut alors que (AE) coïncide avec (AC) ce qui veut dire que A, E et C sont alignés.

Comme E est le centre de gravité du triangle ABD, $AE=\frac{2}{3}AO$

Alors $AC = AO + OC = 2\,AO = 2\,\frac{3}{2}AE = 3\,AE$ ou $AE = \frac{1}{3}AC$

Solutions vectorielles : variations dans le choix d'une base

Les stratégies décrites ci-dessous prennent en compte les choix possibles d'une base lue sur le dessin. Nous considérons essentiellement les bases formées de la manière suivante :

deux côtés du parallélogramme ; un côté du parallélogramme et une diagonale ; un côté du parallélogramme et le segment [DI] ; une diagonale et le segment [DI]. La diagonale [AC] ne sera pas considérée dans le choix d'une base car on cherche à décomposer le vecteur $\vec{AC}$ en fonction d'autres vecteurs.

S2)[5] Base choisie : $(\vec{AI}, \vec{ID})$

(i) $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB}$ et $\vec{AD} = \vec{AI} + \vec{ID}$
$\Rightarrow \vec{AC} = \vec{AI} + \vec{ID} + 2\vec{AI} = 3\vec{AI} + \vec{ID}$

(ii) $\vec{AE} = \vec{AI} + \vec{IE}$ et $\vec{IE} = \frac{1}{3}\vec{ID}$
$\Rightarrow \vec{AE} = \vec{AI} + \frac{1}{3}\vec{ID}$

Donc, (i) et (ii) $\Rightarrow \vec{AC} = 3\vec{AE} \Rightarrow$ A, E et C sont alignés.

S2') Base choisie : $(\vec{AI}, \vec{ID})$

$\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB}$ et $\vec{AD} = \vec{AI} + \vec{ID} \Rightarrow \vec{AC} = \vec{AI} + \vec{ID} + 2\vec{AI} = 3\vec{AI} + \vec{ID}$

$\Rightarrow \vec{AC} = 3\,\vec{AI} + 3\,\vec{IE} \Rightarrow \vec{AC} = 3\,(\vec{AI} + \vec{IE}) = 3\vec{AE}$

Alors on a : A, E et C sont alignés.

S3) Base choisie : $(\vec{AB}, \vec{AD})$

On part de la donnée du problème : $\vec{DE} = \frac{2}{3}\vec{DI}$; on utilise la relation de Chasles deux fois et le fait que $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$.

$\Rightarrow \vec{DA} + \vec{AE} = \frac{2}{3}(\vec{DA} + \frac{1}{2}\vec{AB})$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\vec{DA} + \vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AB} \Rightarrow \vec{AE} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AD}) = \frac{1}{3}\vec{AC}$

Une autre forme de la stratégie S3 est :

S3') Base choisie : $(\vec{AB}, \vec{AD})$

On part du vecteur $\vec{AE}$ et on essaye de l'écrire en fonction de $\vec{AB}$ et de $\vec{AD}$.

$\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE} = \vec{AD} + 2/3\,\vec{DI} = \vec{AD} + 2/3\ 1/2\,(\vec{DA} + \vec{DB})$

$\vec{AE} = \vec{AD} + 1/3\,(\vec{DA} + \vec{DA} + \vec{AB}) = 1/3\,\vec{AD} + 1/3\,\vec{AB} = 1/3\,\vec{AC}$

S4) Base choisie : $(\vec{DA}, \vec{DB})$

On part de la donnée du problème, $\vec{DE} = 2/3\,\vec{DI}$

[5] Cette stratégie est la plus proche de celle proposée dans le manuel (pour la résolution donnée dans le manuels nous renvoyons au chapitre B2).

(i) $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} = 2\,\overrightarrow{DI} = 2 \times 3/2\,\overrightarrow{DE}$
$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + 1/3\,(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB})$
$\Rightarrow \overrightarrow{AE} = -2/3\,\overrightarrow{DA} + 1/3\,\overrightarrow{DB}$

(ii) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC})$
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} = 2\,\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$

On conclut de (i) et de (ii) que $\overrightarrow{AE} = 1/3\,\overrightarrow{AC}$

S5) Base choisie : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB})$.

(i) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$
$= 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

(ii) $\overrightarrow{AE} = 1/2\,\overrightarrow{AB} + 1/3\,\overrightarrow{ID} = 1/2\,\overrightarrow{AB} - 1/3\,\overrightarrow{DI}$
$= 1/2\,\overrightarrow{AB} - 1/3(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BI}) = 1/2\,\overrightarrow{AB} - 1/3\overrightarrow{DB} - 1/3\overrightarrow{BI}$
$= 1/2\overrightarrow{AB} - 1/3\overrightarrow{DB} + 1/6\,\overrightarrow{AB} = 2/3\,\overrightarrow{AB} - 1/3\overrightarrow{DB}$

On conclut de (i) et de (ii) que $\overrightarrow{AE} = 1/3\,\overrightarrow{AC}$

S6) Base choisie : $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DI})$

(i) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + 2\,\overrightarrow{AI}$
$= \overrightarrow{AD} + 2\,(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI})$
$= 3\,\overrightarrow{AD} + 2\,\overrightarrow{DI}$

(ii) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + 2/3\,\overrightarrow{DI}$
$= \overrightarrow{AD} + 2/3\,\overrightarrow{DI}$

On conclut de (i) et de (ii) que $\overrightarrow{AE} = 1/3\,\overrightarrow{AC}$

S7) Base choisie : $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DI})$

(i) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} + 2\,\overrightarrow{AI}$
$= 3\,\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} = 3\,\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{DI}$
$= 3\,(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DB}) - \overrightarrow{DI} = 3\,\overrightarrow{DB} - 4\,\overrightarrow{DI}$

(ii) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IB} + 1/3\,\overrightarrow{ID}$
$= \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DB} + 1/3\,\overrightarrow{ID}$
$= 4/3\,\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} - 4/3\,\overrightarrow{DI}$

On conclut de (i) et de (ii) que $\overrightarrow{AE} = 1/3\,\overrightarrow{AC}$

S8) Stratégie Repère

Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$, on a : A(0,0) ; B(1,0); C(1,1) ; D(0,1)
Comme I est le milieu de [AB], on a $I(\frac{1}{2}, 0)$

On cherche une relation entre $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$.
On sait que $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ donc $E = I + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID} = (\frac{1}{2} - \frac{1}{6}, \frac{1}{3})$
On conclut que $E = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
Alors, $\overrightarrow{AE}\,(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{AC}\,(1, 1) \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

S9) Stratégie transformation

Soit **H** l'homothétie de centre E et rapport $-\frac{1}{2}$.

Alors H transforme :
- D en I.
- droite DC → droite parallèle à DC passant par I
- droite DC → droite AB
- [DC] → [IJ] avec $IJ = \frac{1}{2}AB = IA$ et $J \in (AB)$

donc, C → A
Donc, $EA = -\frac{1}{2}EC$ et A, E et C sont alignés et AE =1/3 AC.

2.1.2 - Analyse des stratégies

Comme notre intérêt principal est d'étudier l'utilisation que font les élèves des vecteurs pour résoudre un problème proposé, nous démarrons l'analyse des stratégies décrites ci-dessus par un tableau résumant les stratégies possibles dans le vectoriel et les propriétés utilisées dans chaque cas. Ces stratégies sont classées par rapport au choix de la base et ensuite par la méthode de résolution adoptée. Ainsi une fois fixée la base, nous prenons en compte les variations suivantes :

I) partir d'une donnée du problème en écriture vectorielle que l'on décompose ensuite sur la base choisie ;

II) décomposer systématiquement $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ sur la base choisie ;

III) partir de $\overrightarrow{AC}$ et arriver à $\overrightarrow{AE}$ (ou inversement).

Base	partir de $\overrightarrow{DE} = 2/3\,\overrightarrow{DI}$	décomposition de $\overrightarrow{AC}$ et de $\overrightarrow{AE}$	partir de $\overrightarrow{AC}$ pour arriver à $\overrightarrow{AE}$ (ou inversement)	outils
$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{DI})$		S2		somme du parallél, relation de Chasles
$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{DI})$			S2'	somme du parallél, relation de Chasles,
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$	S3			somme du parallél, relation de Chasles,
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$			S3'	somme du parallél, demi-parallél, relation de Chasles
$(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$	S4	S4		égalité des côtés du parallél, relation de Chasles
$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DB})$		S5		égalité des côtés du parallél, Chasles, différence de vecteurs
$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DI})$		S6		somme du parallél, relation de Chasles
$(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DI})$		S7		somme du parallél, relation de Chasles, vecteurs opposés

Il est clair que la colinéarité doit être présente dans toutes les stratégies car c'est la question en jeu, ainsi nous ne l'avons pas mis dans les outils à mettre en œuvre.

Il existe naturellement d'autres stratégies que nous n'avons pas listées ici, mais elles sont des combinaisons de ce que nous avons mis dans le tableau ci-dessus. C'est pourquoi nous ne fournissons pas une liste exhaustive de toutes les stratégies possibles dans le vectoriel.

Analyse de la probabilité d'apparition des différentes stratégies

A propos de la traduction de l'énoncé

L'énoncé du problème tel qu'il est donné aux élèves peut engendrer une traduction en registre symbolique de certaines données avant même que le élèves sachent ce qu'ils en feront, c'est-à-dire la résolution qu'ils proposeront. C'est pourquoi nous attendons de voir apparaître plus d'un type de langage symbolique dans leurs traductions. Ils peuvent traduire chaque donnée dans le langage qui leur est le plus familier : avoir ainsi des données traduites en langage vectoriel et d'autres traduites en langage géométrique. Ce fait a motivé le choix de cet exercice car s'il y a une traduction en registre symbolique, la proportionnalité de distances peut être traduite en écriture vectorielle presque immédiatement. En effet, si l'on écrit IE $=\frac{1}{3}$ ID, la notation vectorielle $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ vient de soi !

D'autres données qui peuvent encore être traduites en langage vectoriel sont : la caractérisation du milieu d'un segment et les propriétés du parallélogramme. Ces dernières moins probablement car elles servent surtout à faire la figure, donc à passer au registre graphique.

En analysant les stratégies possibles, nous voyons aussi que les traductions les plus susceptibles d'apparaître sous forme vectorielle concernent la proportionnalité des distances ; l'utilisation du milieu d'un segment se fait plutôt pendant la résolution du problème, comme pour la stratégies P3, dans laquelle on part de la traduction de $\overrightarrow{DE} = 2/3\ \overrightarrow{DI}$.

Finalement si la question posée évoque auprès des élèves l'alignement, alors cela les conduit très probablement à l'usage des vecteurs. L'utilisation des vecteurs ici peut être vue comme un effet du contrat : "problème d'alignement —> je traduis par les vecteurs et j'utilise la colinéarité". Il reste à savoir si les élèves transforment des problèmes d'appartenance d'un point à une droite en un problème d'alignement.

A propos des outils mis en œuvre dans les stratégies

La stratégie **S9** (homothétie) nous paraît être difficile pour les élèves de Première S car il faut utiliser les invariants de l'homothétie et raisonner sur ces invariants n'est pas facile, surtout dans un exercice pour lequel l'usage des transformations n'est pas demandé directement. En revanche, chez les étudiants du DEUG première année, l'apparition de cette stratégie est probable car en classe de Première et Terminale S les transformations et leurs actions sur des configurations sont étudiées.

La stratégie **S8** (repère) du point de vue mathématique est optimale car simple et rapide (par rapport au nombre d'étapes). Mais elle exige une certaine compréhension de la part de l'élève de l'outil analytique et de plus, il s'agit de prendre un repère non-orthonormé tandis que les élèves sont entraînés en Seconde à utiliser un repère orthonormé. C'est pourquoi nous considérons que cette stratégie a des chances très faibles d'apparaître chez les élèves de Seconde et chez les étudiants du DEUG et que de plus elle pourra provoquer des erreurs par manque d'entraînement à utiliser un repère autre qu'orthonormé.

La stratégie **S1** (centre de gravité) a plus de probabilité d'apparaître car elle fait appel à une notion familière aux élèves. Il faut rappeler que cet exercice a été résolu dans un chapitre avant les vecteurs en utilisant les configurations, en Seconde (cf. chapitre B2). La difficulté de cette stratégie réside dans le fait qu'il faut voir un triangle à l'intérieur du parallélogramme ce qui n'est pas évident, d'autant plus qu'un des côtés de ce triangle n'est pas tracé. La configuration gêne l'analyse géométrique, mais une fois qu'on y pense, la solution n'est pas compliquée : il s'agit de calculs simples. Ce qui pourrait aussi renforcer l'idée qu'il s'agit d'une stratégie probable d'apparition chez les élèves de Première. Une fois en classe de DEUG, cette stratégie peut apparaître comme une résolution encore plus facile car en fin de Secondaire la résolution d'exercices de géométrie par l'utilisation du barycentre a une place centrale.

L'apparition des stratégies **S2**, **S2'**, **S3**, **S3'** et **S6** semble probable car les vecteurs de ces bases sont visibles sur le dessin. En revanche les stratégies **S4**, **S5** et **S7** sont moins probables car les vecteurs de ces bases ne sont pas facilement visibles sur le dessin. En effet, le vecteur $\overrightarrow{DB}$ n'est pas a priori tracé sur le dessin. De plus le choix de ces trois bases n'est pas du tout évident, car elle est un peu plus loin de qu'on envisage quand on pense aux vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$, d'autant plus qu'on doit y faire appel à la différence de deux vecteurs.

Examinons plus en détail les stratégies vectorielles. Pour mieux comprendre les difficultés à affronter par les élèves, il semble important de souligner le type de raisonnement adopté dans chaque résolution et d'en faire une description :

(i) Les stratégies **S2, S4, S5, S6** et **S7** nécessitent l'idée de décomposition d'un vecteur en deux vecteurs non-colinéaires et ceci n'est pas présent dans l'enseignement. Nous considérons que ces stratégies ont peu de chances d'arriver à une réussite car il faut savoir s'arrêter au bon moment de la décomposition, ce qui n'est pas évident quand on ne sait pas que tout vecteur du plan peut être décomposé en deux vecteurs non-colinéaires.

(ii) La différence entre **S2** et **S2'** réside dans la décomposition de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$ pour trouver une relation entre les deux (pour S2), et la seule décomposition de $\overrightarrow{AC}$ pour arriver à $\overrightarrow{AE}$ (pour S2'). La stratégie S2' est plus probable pour les élèves qui ont en tête la question, d'autant plus que l'élève peut utiliser cette stratégie sans utiliser (ou expliciter) la notion de base.

(iii) Dans la stratégie **S3**, on part de l'égalité vectorielle donnée et on espère arriver par anticipation de la solution. Cette stratégie est probable pour les élèves qui ne prennent pas de distance par rapport au problème, mais la question n'est pas traduite ou du moins elle n'est pas explicitement traduite. La stratégie **S3'** semble probable pour l'élève qui sait où il doit arriver (trouver une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$), mais cette stratégie met en œuvre l'addition vectorielle sur un demi-parallélogramme, propriété qui n'est pas tellement travaillée dans l'enseignement (cf. chapitre B2). C'est pourquoi le niveau de réussite avec cette stratégie peut être peu satisfaisant. Une autre variation de cette stratégie, que nous n'avons pas listé ci-dessus, serait de partir du vecteur $\overrightarrow{AC}$ pour arriver au vecteur $\overrightarrow{AE}$. Les propriétés en jeu et les possibilités d'apparition chez les élèves sont les mêmes dans les deux cas.

(iv) La méthode utilisée dans la stratégie **S4** est la même que pour S3, la difficulté majeure étant, comme nous l'avons signalé, de savoir où l'on doit s'arrêter. Dans S4 on s'arrête quand on arrive à la décomposition sur la base ($\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$), et cette base n'est pas évidente, on ne la voit pas sur le dessin.

(vi) Les stratégies **S5** et **S7** se ressemblent, la différence étant le moment où on s'arrête, la base n'est pas la même. Ces sont les seules stratégies où on voit apparaître la notation de différence de vecteurs, et c'est là peut être qui réside une difficulté pour les élèves, car la différence des vecteurs (ou la relation de Chasles deuxième forme) est moins présente dans l'enseignement que la relation de Chasles première forme.

Nous faisons encore une dernière comparaison entre les stratégies décrites ci-dessus :

- S1 (centre de gravité) exige une solution faite en deux parties : d'abord on montre que les points sont alignés et ensuite on montre la proportionnalité de distances.

Ici une difficulté peut apparaître : l'appartenance du point E au segment [AC] doit poser une certaine difficulté due à l'évidence de la figure, car sur le dessin il est clair que A, E et C sont alignés ! L'évidence de la figure est une difficulté habituelle. Ce fait peut amener les élèves à commettre des erreurs de type conceptuel, c'est-à-dire à penser à une solution dans laquelle on utilise déjà l'alignement des points avant même de le montrer.

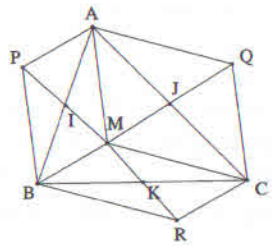
- Les stratégies vectorielles fournissent la solution en un seul pas : quand on arrive à l'égalité $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AE}$ on a la proportionnalité de distances et l'alignement des points en même temps. Dans ce cas on peut dire qu'il existe une supériorité de l'outil vectoriel par rapport à l'outil géométrique ce qui montrerait un certain avantage à utiliser les vecteurs et nous croyons qu'ainsi le nombre d'erreurs peut diminuer si les élèves choisissent une stratégie vectorielle. La difficulté avec le vectoriel étant autour d'une "bonne" utilisation de l'outil. On sait qu'il faut arriver à trouver une relation entre les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AE}$, on connaît les relations vectorielles énoncés, en particulier la relation de Chasles, on sait lire des relations vectorielles sur un parallélogramme, mais on n'est pas sûr d'arriver à une solution. En effet, l'élève peut partir un peu "au hasard", il décompose, fait des substitutions mais il lui manque la certitude de pouvoir arriver à une solution.

2.2 - Analyse de l'exercice n° 2

Passons maintenant à l'étude du **deuxième exercice** choisi ; rappelons l'énoncé fourni aux élèves :

> **2)** Soit un triangle quelconque ABC. On note I, J et K les milieux des côtés [AB], [AC] et [BC] respectivement.
> Soit par ailleurs, un point M quelconque à l'intérieur du triangle ABC, on note P, Q et R respectivement ses symétriques par rapport à I, J et K.
> Parmi les segments qui ont pour extrémités les points A, P, B, R, C, Q et M, nommer ceux qui sont parallèles et justifier pourquoi.
> Montrer que les segments [AR] , [CP] et [BQ] ont le même milieu.

Donnons d'abord un dessin pour faciliter la lecture des stratégies :



2.2.1 - Des stratégies possibles

S1 - Propriétés vectorielles du parallélogramme

(i) [AB] et [PM] ont même milieu car P est symétrique de M par rapport à I et I est le milieu de [AB] alors APBM parallélogramme (I milieu des diagonales) et on a $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{MB}$

(ii) [BC] et [MR] ont même milieu car R est symétrique de M par rapport à K et K est le milieu de [BC] alors MBRC parallélogramme (K milieu des diagonales) et on a $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CR}$

De (i) et (ii) on a $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{CR}$ alors APRC parallélogramme et on conclut que [AR] et [CP] ont même milieu.

De la même façon on conclut que [BQ] et [AR] ont même milieu.

S2 - Propriétés géométriques du parallélogramme

(i) I milieu de [AB] et [PM] car P est symétrique de M par rapport à I ⇒ APBM parallélogramme ⇒ [AP]//[MB] et AP=MB.

(ii) K milieu de [BC] et [MR] car R est le symétrique de M par rapport à K ⇒ MBRC parallélogramme ⇒ [MB]//[CR] et MB=CR.

(i) et (ii) ⇒ [AP]//[CR] et AP=CR ⇒ APRC parallélogramme ⇒ [AR] et [CP] ont même milieu.

De la même façon on conclut que [BQ] et [AR] ont même milieu.

S3 - Théorème des milieux - forme vectorielle

(i) Dans le triangle ABC, I et K sont les milieux des côtés [AB] et [BC]. Alors, en utilisant le théorème des milieux on a $\overrightarrow{IK} = 1/2\overrightarrow{AC}$.

(ii) Dans le triangle PMR, I et K sont les milieux de [MP] et [MR] ; alors le théorème des milieux permet de conclure que $\overrightarrow{IK} = 1/2\overrightarrow{PR}$.

De (i) et (ii), on conclut que$\overrightarrow{AC} = 1/2\overrightarrow{PR}$. Ainsi ACRP est un parallélogramme et [AC] et [RP] ont même milieu.

De manière analogue on montre que CBPQ est un parallélogramme et que [CP] et [BQ] ont même milieu.

S4 - Théorème des milieux - forme géométrique

(i) Dans le triangle ABC, I et K sont les milieux des côtés [AB] et [BC]. Alors, en utilisant le théorème des milieux on a [IK]//[AC] et IK = 1/2 AC.

(ii) Dans le triangle PMR, I et K sont les milieux de [MP] et [MR] ; alors le théorème des milieux permet de conclure que [IK]//[PR] et IK = 1/2 PR.

De (i) et (ii), on conclut que [AC]//[PR] et AC=PR. Ainsi ACRP est un parallélogramme et [AC] et [RP] ont même milieu.

De manière analogue on montre que CBPQ est un parallélogramme et que [CP] et [BQ] ont même milieu.

S5 - Résolution par homothétie

(i) Soit h_1 l'homothétie de centre G (centre de gravité du triangle ABC) et rapport -1/2

⇒ $h_1(A) = K$; $h_1(B) = J$; $h_1(C) = I$

(ii) Soit h_2 l'homothétie de centre M et rapport 2

⇒ $h_2(K) = R$; $h_2(I) = P$; $h_2(J) = Q$

De (i) et (ii) on obtient $h = h_2 \circ h_1$, homothétie de centre Ω et rapport -1, tel que $A \mapsto R$; $B \mapsto Q$; $C \mapsto P$

Comme le rapport est -1, on conclut que Ω est le milieu de [AR], [BQ] et [CP].

S6 - Barycentre 1

Soit G le barycentre de (A,1), (B,1), (C,1) et (M,-1).

Alors on a $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM} = \vec{0}$ (I)

Comme $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GK}$, on transforme l'expression (I) et obtient l'expression :

$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GK} - 2\overrightarrow{GM} = \vec{0}$ (II)

R est le barycentre de (K,2) et (M, -1), et on a alors, $2\overrightarrow{GK} - \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{GR}$. On substitue cette dernière expression en (II) et on obtient :$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GR} = \vec{0}$. On conclut alors que G est le milieu de [AR].

De même on montre que G est le milieu de [PC] et de [BQ].

S7 - Barycentre 2

a) $1/2\,(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = 1/2\,(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MR})$

b) $1/2\,(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = 1/2\,(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MQ})$

De a) et b) on a $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MR} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MQ}$

D'où $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MR}$ et on alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{QR}$

Ainsi, [AR] et [BQ] ont même milieu.

De la même manière on montre que [AR] et [CP] ont même milieu.

2.2.2 - Analyse des stratégies

Les stratégies **S1** (vectorielle) et **S2** (géométrique) consistent à voir des parallélogrammes dans la figure construite et à partir de là, par transitivité des propriétés, à déduire l'existence d'autres parallélogrammes pour finalement, arriver au résultat recherché. La différence entre ces deux stratégies réside donc essentiellement au niveau du registre choisi pour la résolution : le géométrique (S2) ou le vectoriel (S1). Si on choisit ce dernier, il y a une toute petite économie au niveau de la résolution, et cela au niveau de la notation vectorielle qui contracte trois informations en même temps. Mais nous ne considérons pas vraiment cela comme une économie car on continue à résoudre l'exercice en un même nombre de pas.

Or, si nous regardons ces deux stratégies du point de vue des élèves, nous considérons que l'apparition de S2 est plus probable car l'exercice, tel qu'il est présenté, est essentiellement géométrique. En fait ce type d'exercice, trouvé dans l'enseignement dans le chapitre sur les vecteurs, nous semble plutôt un artifice didactique pour entraîner les élèves à utiliser les vecteurs. Notre expérimentation pourra (entre autres) confirmer cette hypothèse.

Dans les stratégies **S3** et **S4** il faut essentiellement mettre en œuvre les résultats liés à la droite des milieux, ou au théorème des milieux. La différence entre les deux stratégies étant au niveau de la notation. La forme vectorielle du théorème des milieux semble fournir une certaine économie au niveau de l'écriture, mais elle exige un changement de registres, tandis que la forme géométrique de cette stratégie reste dans le registre géométrique. C'est pourquoi la stratégie S4 est considérée comme un peu plus probable par rapport à la stratégie S3.

La stratégie **S5** (homothétie) n'exige pas de "voir", dans la configuration donnée, des parallélogrammes, comme c'est le cas pour S1 et S2. Mais sa difficulté réside, à notre avis, dans le fait qu'il faut d'abord introduire une homothétie ayant comme centre un point qui n'appartient pas à la figure a priori, et ensuite penser à composer les deux homothéties. Autrement dit, on doit avoir en tête la solution entière pour réussir l'exercice, le seul fait d'envisager une transformation pour le résoudre ne suffit pas à trouver la résolution tandis que les deux autres stratégies nous semblent plus faciles puisqu'on voit les parallélogrammes dans la figure.

En conclusion, la stratégie S5 semble peu probable car il n'y a aucun indice dans l'énoncé faisant penser aux transformations et les élèves, en Seconde, ne sont pas habitués à utiliser l'homothétie pour résoudre des problèmes de ce type, qui renvoie plutôt à l'utilisation des propriétés géométriques de la figure.

La stratégie **S6** ne peut pas apparaître en début de classe de Première car les élèves ne connaissent pas le barycentre en Seconde. Cette stratégie ne peut donc être envisagée (du point de vue de notre expérimentation) qu'en DEUG. Concernant les notions et propriétés à mettre en œuvre, nous considérons que cette stratégie est moins économique que S1 et S2.

La stratégie **S7** est, en fait, liée au barycentre (ou au centre de gravité) par la seule expression 1/2 ($\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$) qui sert à conclure sur l'existence des égalités vectorielles qui fournissent à leur tour la conclusion souhaitée.

Finalement il nous semble que l'énoncé de cet exercice favorise une solution qui renvoie à des configurations et à ce moment l'utilisation des propriétés géométriques d'un parallélogramme (stratégie S2) nous semble être la stratégie la plus probable ou encore la droite des milieux (stratégie S4). Restant toujours la possibilité à l'élève d'utiliser ces mêmes raisonnement avec une notation vectorielle ce qui donne les stratégie S1 et S3.

3 - Expérimentation - Première S

Nous avons soumis les exercices à 33 élèves d'une Première S du Lycée Pierre du Terrail à Pontcharra, en début d'année scolaire et avant le cours sur les vecteurs. Les 33 élèves ont participé à la première phase, c'est-à-dire qu'ils ont répondu aux exercices écrits et ils ont disposé d'environ 50 minutes. Pour la suite du dispositif expérimental, nous avons eu des problèmes avec la disponibilité des élèves, ce qui a limité le nombre d'élèves participant de la phase B. Nous passons tout de suite à l'étude de l'expérimentation réalisée, après quoi nous expliquerons plus en détail la deuxième phase de notre dispositif expérimental.

3.1 - Phase A - Les exercices écrits

Pour analyser les résultats obtenus dans la première partie de l'observation (exercices écrits), nous allons tout d'abord procéder à un classement du travail réalisé par chaque élève. Nous signalons surtout les propriétés qu'ils ont utilisées et les registres auxquels ils ont fait appel. Les tableaux ont été conçus en tenant compte des solutions plus probables données dans l'analyse a priori.

3.1.1 - L'exercice n° 1 - résultats

Nous fournissons un tableau avec les résultats des productions des élèves, les points suivants sont détaillés :

Par rapport à l'énoncé du problème

(i) Nous regardons les données que les élèves ont traduits en registre de l'écriture symbolique dès le départ et en quel type d'écriture, c'est-à-dire, symbolique géométrique, numérique ou vectoriel. Les données en question sont le milieu et la distance.

(ii) Nous signalons aussi le traitement accordé à la question au départ : la question a-t-elle été traduite ? Et si oui, dans quel registre ?

Nous voulons vérifier dans quelle mesure l'étudiant est guidé par la question lorsqu'il choisit une méthode de résolution. Le traitement accordé à la question au départ donne des indices sur le rôle de cette traduction dans la résolution du problème.

Par rapport à la (aux) solution(s) du problème fournie(s) par les élèves :

(iii) Les outils ou les propriétés mathématiques auxquels les élèves ont fait appel sont signalés. Nous mettons surtout en évidence l'utilisation des définitions et propriétés suivantes :

(a) l'égalité vectorielle des côtés d'un parallélogramme (**EV**), l'addition vectorielle dans un parallélogramme (**AV**) et la relation de Chasles, la colinéarité et le milieu[6] - ces sont des notions vectorielles qui peuvent apparaître dans la traduction de l'énoncé et dans leurs solutions.

(b) les outils pour résoudre l'exercice de façon "géométrique non-vectorielle", ici le centre de gravité et les médianes ;

(iv) Dans une colonne de notre tableau on trouve d'autres outils ou résultats (corrects ou non) utilisés par les étudiants et qui ne sont pas dans notre analyse a priori. Cela permettra entre autres, de valider cette analyse.

(v) Les types d'erreurs faites. Comme nous voulons procéder à une comparaison entre les erreurs commises lorsque les élèves travaillent dans le vectoriel et dans le géométrique, nous utilisons les symboles suivants pour les distinguer dans le tableau :

H - Les élèves qui ont fait de fautes dans l'utilisations des propriétés géométriques (sans vectoriel).

X - Les fautes commises d'une manière générale dans le vectoriel ou dans celui-ci mélangé à d'autres registres

(vi) Concernant les registres de représentation sémiotique utilisés, nous adoptons la notation suivante :

SG - quand l'étudiant a écrit en registre symbolique géométrique sans utiliser la notation vectorielle, par exemple : (AB)//(CD) ;

SV - utilisation de la notation vectorielle, par exemple $\overrightarrow{AC}$;

SN - (géométrique-numérique) : il s'agit d'une relation de distance ;

disc - utilisation du registre de la langue naturelle pour expliquer la résolution.

gra - (graphique) pour signaler la présence d'un dessin.

(vii) Pour avoir des indices à propos de l'efficacité de l'outil chez les élèves, les réussites totales ou partielles du problème sont mises en évidence.

Comme ce qui nous intéresse est de voir la disponibilité et l'efficacité de l'outil vectoriel, il semble aussi important de signaler et de distinguer les élèves qui ont fait un bon démarrage avec les vecteurs de ceux que n'ont rien fait ou encore de ceux qui ont juste fait quelques conversions sans essayer quelque chose d'autre pour arriver à une solution. Cette donnée est placée dans la dernière colonne, avec les symboles suivants :

EQC - les élèves qui ont essayé quelque chose "un peu n'importe comment" ;

énoncé - les élèves qui ont juste traduit une donnée de l'énoncé ;

réussite - ces qui ont réussi l'exercice et si la solution fournie par l'élève coïncide avec l'une des stratégies mises dans l'analyse a priori, nous le signalons aussi dans la même colonne "réussite".

[6] Ici il peut s'agir de $\overrightarrow{AI} = 1/2\ \overrightarrow{AB}$ ou encore $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$.

EXERCICE N°1

	ENONCÉ			SOLUTION							
Élèves	Milieu	distance[7]	Question	Chasles	Colinéarité	Gravité	Médianes	Erreurs	Registres[8]	autres/ suggestions	réussite
1	SV	SV		X	X				SG-SV		S2'
2								X	SG	diag du paral et triangle isocèle	
3		SV							SG-SV	Thalès(vect)	EQC
4							X	X	SG		
5								X	SG	Thalès	
6								X	SG	Thalès	
7									SN	analytique	
8	SV							X	SV	prop parallélog	EQC
9						X	X	X	SG-Disc-SV		
10		SV		X				X	SV		EQC
11 (R)		SN	SN						SG-SN	Thalès	
12	SV		SV	X	X			X	SV		S3'
13	SN	SN	SN				X	X	SG-SN		
14		SV	SV					X	SG-SV	Thalès	Énoncé
15		SV	SV	X	X				SV		EQC
16 (R)									gra		
17 (R)		SV							SV-SG		énoncé
18		SN						X	SG-SN	Thalès	
19	SG	SN			X	X	X		SG-SV-SN-Disc		réussite
20				X					SV		EQC
21		SN		X					SV-SN		EQC
22							X		SN	perception visuelle / comptes	
23		SN		X				X	SV-SN		EQC
24									gra		
25 (R)		SN				X	X	X	SG-SN-Disc		
26	SV	SV		X					SV		EQC
27 (R)									gra		
28							X		SG-Disc	diag d'un paral	
29		SN-SV	SV	X	X				SV-SN		réussite
30	SN			X				X	SN-SV (abandonné) SG	triangles semblables	EQC
31								X	SN	mesure d'angles	
32	SV	SN		X				X	SV-SN		EQC
33									gra		
total	5SV	8SV 9SN	4SV 2SN	11	5	3	7		17SV-15SG-12SN		

[7] Nous notons ici, SN si l'élève écrit IE = 1/3 ID ; et SV si l'élève écrit $\overrightarrow{IE} = 1/3\ \overrightarrow{ID}$.

[8] Tous les registres présents sur la feuille d'exercice de l'élève seront notés dans cette colonne.

3.1.2 - Analyse des résultats obtenus

Le registre symbolique vectoriel est apparu dans 17 copies. Parmi ces 17 élèves, 3 ont utilisé les vecteurs seulement pour la traduction de l'énoncé en langage mathématique (ceux signalés "énoncé" dans la colonne "réussite") ; 13 ont travaillé au moins un peu avec les vecteurs (en utilisant Chasles, l'addition vectorielle, Thalès...) ; et finalement un élève a utilisé des notations vectorielles pour le centre de gravité (donc une solution considérée par nous géométrique).

Il faut souligner que le registre symbolique vectoriel est apparu mélangé au registre symbolique géométrique. Il y a des propriétés qui ont été traduites directement dans le langage géométrique (comme le parallélisme), et d'autres qui sont tout de suite traduites en langage vectoriel (comme la proportionnalité, $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$).

Nous comptons 14 élèves qui sont passé du point de vue *appartenance* au point de vue ***alignement***. Parmi ces 14 élèves, 4 seulement ont traduit au départ la question posée en problème de colinéarité vectorielle, mais la solution vectorielle proposée par les 10 autres montre qu'ils ont bien cherché à montrer l'alignement des trois points. L'hypothèse que nous formulons ici est que le changement de point de vue a amené les élèves à changer de cadre.

A part les propriétés que nous avons signalées, d'autres propriétés ont été utilisées par les élèves. Nous citons le théorème de Thalès (version géométrique et vectorielle) qui a été évoqué 6 fois.

Résumons en termes quantitatifs les résultats obtenus :

Registre symbolique vectoriel (**RSV**) : **17/33**.

(i) seulement dans l'énoncé[9] —> 3/17

(ii) essayé quelque chose—> 13/17 (parmi ceux-ci 4 ont réussi)

(iii) réussite —> 4/17

(iv) erreurs —> 3/17

Registre symbolique géométrique (**RSG** sans vectoriel, mais parfois mélangé au registre numérique) : **10/33**.

(i) médianes —> 7/9

(ii) Thalès —> 3/9

(iii) erreurs —> 7/9

(iv) réussite —> **0**/9

[9] Deux élèves ont juste fait une traduction dans l'énoncé et un troisième a utilisé une notation vectorielle dans sa résolution qui était géométrique.

Dans les résolutions géométriques, seulement les élèves n°1 et n°28 ont montré explicitement que E ∈ [AC]. Un seul élève a réussi son exercice en utilisant l'outil géométrique, et ce avec une notation vectorielle.

Registre numérique (**RN**): **3/33**.

Registre graphique (les élèves qui n'ont fait que le dessin[10]) (**gra**): **4/33**.

Les élèves n° 16, 24, 27 et 33 ont fait seulement un dessin de l'énoncé ; l'élève n° 16 a construit un rectangle à la place d'un parallélogramme.

Donnons ci-dessous un tableau résumé des solutions proposées par les élèves. Nous faisons trois groupes : ceux qui ont proposé une solution géométrique, même si éventuellement il y a une notation vectorielle sur leur copie, ceux qui ont proposé une solution vectorielle et ceux qui n'ont fait qu'un dessin ou traduit juste une donnée de l'énoncé.

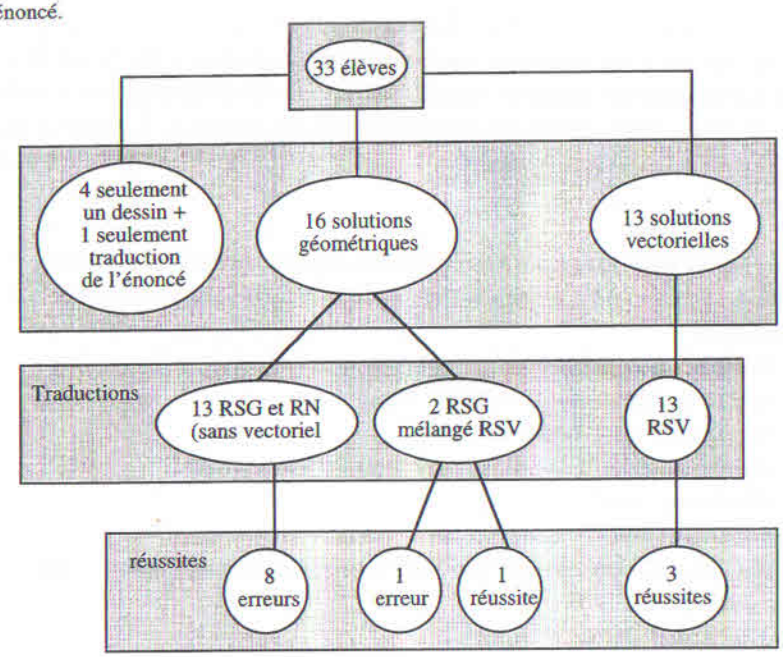


Tableau 1 : Exercice 1 - Première S

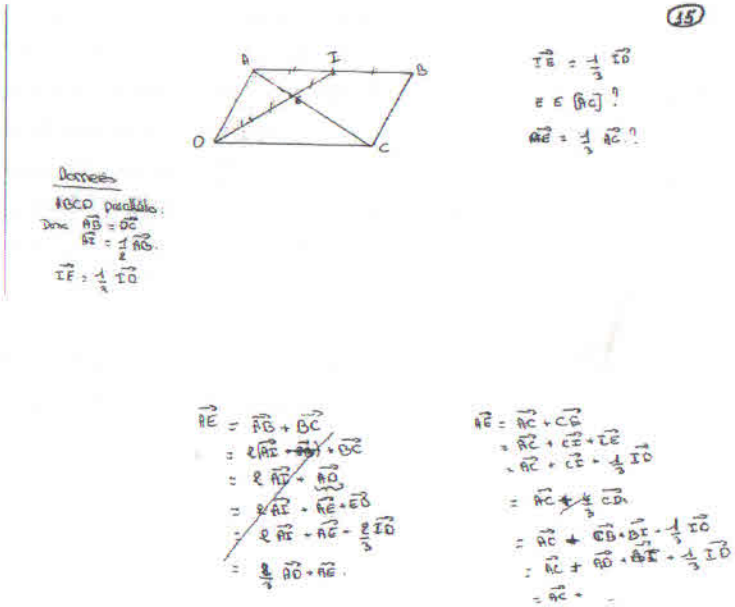
En conclusion, parmi les 17 élèves seulement 13 ont pu faire quelques transformations d'écritures vectorielles après avoir fait des traductions dans le registre symbolique vectoriel ; parmi ces 13, 4 ont utilisé une notation géométrique pour noter un segment,

[10] Le registre graphique est présent dans toutes les copies, mais nous signalons ici celles où la construction d'un dessin a été la seule activité de l'élève.

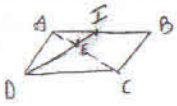
mais ne l'ont pas pris en compte par la suite, c'est pourquoi nous ne les classons pas comme ayant utilisé essentiellement le registre symbolique vectoriel. Nous avons essayé de distinguer parmi ces 13 élèves, ceux qui sont restés au niveau de quelques transformations sans but précis et ceux qui ont véritablement essayé de trouver une solution, après s'être fixé un objectif à poursuivre. Mais d'après les copies des élèves, cela ne nous a pas été possible, car il n'y a aucun indice des intentions des élèves, et dans le cas où nous pensons qu'ils avaient un but clair, ils ont commis des erreurs qui nous empêchent de dire s'il s'agissait effectivement d'un bon démarrage.

Les erreurs ...

Parmi les 13 élèves qui ont essayé de travailler effectivement avec les vecteurs, trois ont réussi l'exercice (nous commenterons leurs résolutions plus loin), 3 autres ont commis des erreurs et les 7 élèves restants n'ont pas fait d'erreurs mais n'ont pas trouvé de solution au problème posé. Les erreurs commises dans le vectoriel sont au niveau des substitutions et de l'utilisation d'une égalité vectorielle qui n'était pas encore démontrée ou qui n'était pas vraie. Mais les "échecs" dans le vectoriel sont plutôt dus au fait que les élèves, apparemment, même s'ils savent *où* ils doivent arriver, ils ne savent pas *comment* faire pour y arriver. Donnons l'exemple de l'élève 15 :



Dans les erreurs du type géométrique, contrairement à ce qui se passe pour les erreurs dans le vectoriel, il s'agit plutôt soit d'énoncer et utiliser une propriété erronée ou encore dans l'utilisation du théorème de Thalès utiliser le fait que E appartient à [AC] avant de le montrer. Citons l'exemple de l'élève 6 :



⑥

Thalès dans AI DC car (AI)//(DC)

$\frac{EO}{EI} = \frac{EC}{EA} = \frac{DC}{AI}$

$\frac{2/3}{1/3} = \frac{EC}{EA}$

$2/3\,EA = 1/3\,EC$

$2\,EA = EC$

donc $AE = \frac{1}{3}AC$

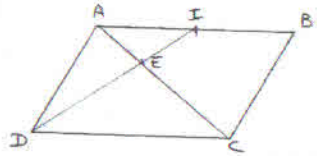
Les réussites[11]

Les réussites pour l'exercice 1, sont les suivantes : l'élève **1**, avec la stratégie S2' (vectorielle) ; l'élève **12** avec la stratégie S3' (vectorielle) ; l'élève **19** en utilisant le centre de gravité avec une notation vectorielle et finalement l'élève **29** qui part du vecteur $\vec{AC}$, utilise Chasles pour faire apparaître le vecteur $\vec{AE}$, et ensuite il fait plusieurs substitutions jusqu'à ce qu'il arrive à une relation entre les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$. Nous n'avons pas classé cette solution dans les stratégies mises dans notre analyse a priori. En effet, l'élève sait qu'il faut trouver une relation entre les deux vecteurs, et il part déjà de $\vec{AC} = \vec{AE} + \vec{EC}$. Ensuite il doit "travailler" avec le vecteur $\vec{EC}$ pour arriver à une solution.

Au niveau des "méthodes", seulement l'élève n°12 a apparemment essayé de décomposer le vecteur $\vec{AE}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$. L'élève n°1 est parti du vecteur $\vec{AC}$ pour arriver à une relation avec le vecteur $\vec{AE}$; nous avons classé sa solution comme stratégie S2' (car la base utilisée est presque la même). Donnons ci-dessous l'extrait de la copie de l'élève n° 1 :

[11] Les copies dont nous nous référerons ici peuvent être rencontrées dans les annexes du chapitre C.

①



ABCD parallélogramme donc (AB) // (DC)
I milieu de (AB) donc (AI) // (DC)

$\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{DC}$ $\quad \vec{IE} = \frac{1}{3}\vec{ID}$ $\quad \vec{ID} = \vec{IA} + \vec{AD}$

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AI} + 3\vec{IE} + \vec{DC} = \vec{AI} + 3\vec{IE} + 2\vec{AI}$

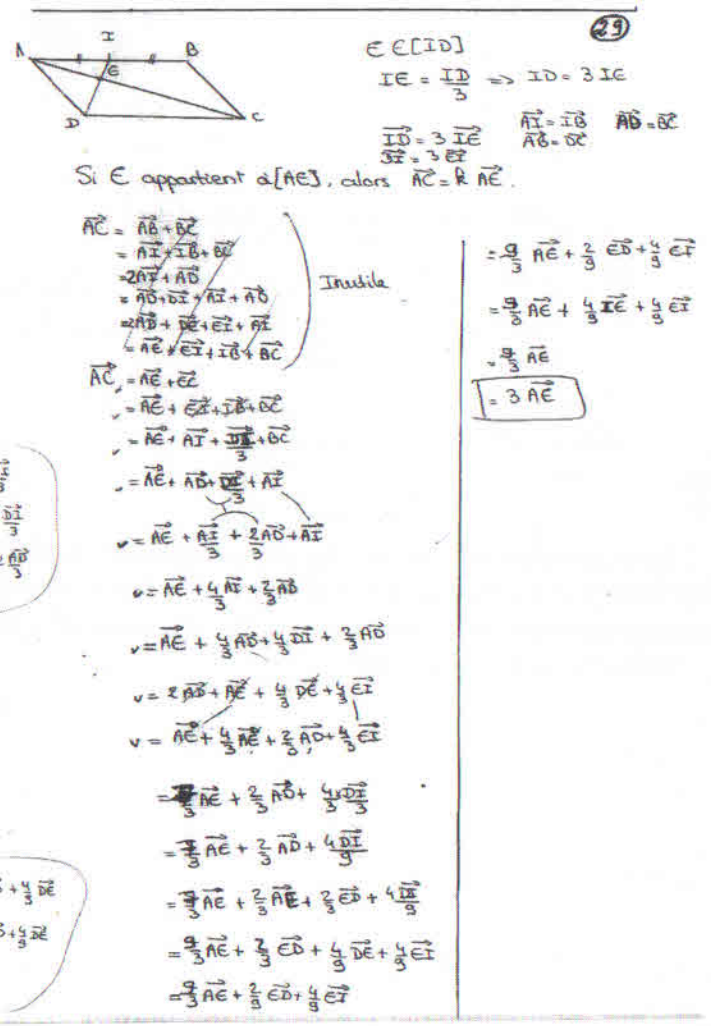
$= 3(\vec{AI} + \vec{IE}) = 3\vec{AE}$

$\vec{AC}$ et $\vec{AE}$ colinéaires donc E sur (AC)

$\vec{AE} = 3\vec{AE} \quad \Leftrightarrow \vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AC}$

Nous voyons donc que l'élève n°1 a bien réussi son exercice et il l'a fait en un nombre petit de pas, surtout si nous comparons la résolution qu'il propose à celle de l'élève n°29. Ce dernier fait plusieurs substitutions pour arriver à une relation entre $\vec{AC}$ et $\vec{AE}$.

Ci-dessous l'extrait de la copie n°29 :



L'élève n°19[12] a fourni une solution vectorielle mais que nous pouvons classer comme géométrique car il a utilisé le théorème des médianes avec une notation vectorielle pour conclure à la colinéarité vectorielle. Autrement dit, il ne s'agit pas d'une réussite due exclusivement à l'utilisation de l'outil vectoriel, mais nous la laissons quand même parmi

[12] Cette copie est donnée dans les annexes du chapitre C.

les résolutions dans le vectoriel car l'élève à utilisé tout le temps une notation vectorielle et en plus, pour lui, il s'agit clairement de l'utilisation des vecteurs.

3.1.3 - En conclusion ...

D'après l'analyse de l'enseignement actuel des vecteurs et en tenant compte de l'objectif de notre observation, nous avons choisi cet exercice qui pose une question considérée comme pouvant provoquer chez les élèves un appel aux vecteurs. En effet, il s'agit d'un exercice traité en classe de Seconde, utilisant des configurations et aussi des vecteurs (exercice résolu dans le manuel adopté - Terracher). Et le problème d'alignement de trois points joue un rôle fondamental pour l'enseignement de vecteurs : les auteurs de manuels mettent l'accent sur l'utilisation des vecteurs pour résoudre des problèmes d'alignement. Seulement nous avons changé la question d'alignement en une question d'appartenance pour diminuer la proximité excessive avec l'usage dans l'enseignement de la première question ; ainsi si l'élève interprète le problème d'appartenance comme un problème d'alignement, le passage aux vecteurs peut se faire facilement. En plus, cet exercice demande l'utilisation d'une proportionnalité de distances qui renvoie (ou devrait renvoyer) facilement à l'utilisation de vecteurs à partir du moment où l'élève écrit la relation de distance. Et pourtant le résultat obtenu pour cet exercice, montre que la moitié de la classe n'a pas pensé aux vecteurs, même si les élèves étaient en face d'un problème considéré par nous comme étant un problème de passage "raisonnablement" facile aux vecteurs ; contrairement à ce qui s'est passé lors de la pré-observation au lycée Pablo Neruda où 19/25 élèves ont pensé aux vecteurs.

Le premier problème proposé aux élèves nous semble donc, montrer que l'outil vectoriel n'est **disponible** que pour 13/33 des élèves, pour le type de problème posé.

Du point de vue de l'**efficacité**, les résultats semblent montrer que les élèves ont des difficultés à utiliser les vecteurs pour résoudre un problème. Pour analyser l'efficacité de l'outil vectoriel nous regardons, parmi les élèves qui ont utilisé le registre vectoriel, la proportion de ceux qui ont réussi (au moins à démarrer), les erreurs commises et les "impasses", c'est-à-dire les élèves qui s'arrêtent sans explication apparente.

Le taux de réussite dans le vectoriel est de 3 élèves. Et en ce qui concerne les erreurs commises, nous voyons que les erreurs de type vectoriel (**3/17**) sont beaucoup moins importantes que celles de type géométrique (**7/9**). Les erreurs commises dans le géométrique sont de type "conceptuel" : il s'agit par exemple de l'utilisation de propriétés erronées. Dans le vectoriel, les élèves commencent à résoudre l'exercice et n'arrivent pas à s'en sortir. Cela peut être dû au fait que d'une manière générale, ils ont une méthode à suivre - qui consiste à utiliser la relation de Chasles pour montrer que les vecteurs sont

colinéaires - mais que cela ne consiste pas en une méthode sûre qui puisse les amener à une réussite. Comme nous l'avons conclu au chapitre B2, ceci relève selon nous d'un manque de maîtrise de la notion de base. En effet, les élèves ne disposent pas de méthode de décomposition par rapport à deux vecteurs donnés ; alors que si l'on sait qu'il faut arriver à décomposer les vecteurs dans une base fixe, le risque de tourner en rond est réduit.

D'après les résultats obtenus, l'outil vectoriel paraît tout de même plus opérationnel que le géométrique, car, pour bien utiliser le géométrique, il faut vérifier à chaque fois des conditions géométriques, comme par exemple vérifier si les conditions pour utiliser le théorème de Thalès sont satisfaites avant de l'appliquer. La plupart des élèves ont utilisé comme hypothèse une condition qui en fait, était à démontrer (l'appartenance du point E au segment AC). La configuration dans ce cas a induit des élèves a utiliser le résultat comme point de départ car en analysant la configuration, Thalès saute aux yeux ! La solution géométrique étant rendue difficile de par la présence du dessin, le recours au vectoriel permettrait d'éviter cette source de difficulté.

Remarque

Ces deux exercices ont été proposés lors d'une première observation sur un groupe de 25 élèves, en classe de Première S, au Lycée Pablo Neruda en septembre 96. En ce qui concerne l'exercice 1, 19 élèves ont alors eu recours à la notation vectorielle et, parmi eux, 13 ont essayé une solution vectorielle. Autrement dit, 19/25 ont pensé spontanément aux vecteurs.

Essentiellement quatre (4) types de démarches ont été trouvées, à savoir :

(i) vectorielle - 13 essais dont 5 réussites ;

(ii) configuration - 7 essais dont 2 réussites ;

(iii) transformation - 2 essais ;

(iv) géométrie analytique - 4 essais.

Si nous regardons l'optimalité de l'outil (en termes d'aboutir à une solution), nous constatons que 5/13 des élèves qui ont choisi l'outil vectoriel ont réussi leur exercice, tandis que 2/7 des élèves qui ont choisi les configurations l'ont réussi. Par rapport aux résultats obtenus dans l'expérimentation au lycée Pierre du Terrail, ceux-ci nous ont semblé plus positifs quant à l'utilisation de l'outil vectoriel. Cela peut être du, par exemple au fait que les enseignants de l'année dernière (classe de Seconde) ont donné plus ou moins d'importance à l'utilisation des vecteurs pour résoudre un problème.

Les élèves qui ont choisi la géométrie analytique ont, eux aussi, utilisé le registre symbolique vectoriel. Mais la solution fournie n'est pas celle que nous avons proposée dans notre analyse des stratégies ; ils ont fait appel à la géométrie analytique mais d'une façon plus "dure" : "...pour prouver l'alignement des points, j'utilise le déterminant et pour

cela il faut trouver les coordonnées des points...". Ce qui pourrait être facile mais ils n'ont pas su retrouver les coordonnées numériques des points, ils ont introduit des inconnues x et y, et cela a compliqué le travail. En plus, la manière dont ils ont utilisée la géométrie analytique ne résout que le problème d'alignement des points, restant encore à montrer la proportionnalité des distances.

Quelques jours plus tard, nous sommes retournée au lycée Pablo Neruda pour faire un compte-rendu aux élèves. L'enseignante avait repris les deux exercices de l'expérimentation avec les élèves, dans le cours sur les vecteurs. Pour l'exercice 1, les élèves se sont rendus compte qu'il s'agissait de l'exercice que nous avions proposé. Aucun élève n'a proposé de le faire avec les médianes. Ce qui veut dire que dans un contexte "vecteurs", la solution vectorielle s'impose.

Le lecteur intéressé peut rencontrer un tableau résumé avec les données de cette pré-expérimentation dans les annexes du chapitre C.

3.1.4 - L'exercice n° 2 - résultats

Pour analyser le deuxième exercice proposé aux élèves, nous allons construire tout d'abord un tableau dans lequel nous soulignons les outils utilisés pour la résolution du problème, à savoir l'utilisation :

(i) des propriétés vectorielles (égalité vectorielle, addition vectorielle, parallélisme...) ;

(ii) des propriétés géométriques (côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et de même mesure, diagonales se coupent en leur milieux...) ;

(iii) de la définition du symétrique d'un point ou de la symétrie centrale ;

(iv) du théorème des milieux (nous indiquerons s'il s'agit de la forme géométrique ou vectorielle de cette propriété) ;

(v) d'autres outils que nous n'avons pas cités ci-dessus.

En ce qui concerne les **registres** utilisés, nous suivons la même notation que pour le premier exercice en ajoutant quelques fois les notations (A) ou (B) pour distinguer la première partie de la question de la seconde partie (respectivement montrer le parallélisme des côtés et que les segments se coupent en leur milieu). Ainsi, si par exemple l'élève a utilisé le registre vectoriel pour la première partie de la question et le registre géométrique pour la deuxième partie, nous le signalons SV(A)-SG(B).

Le registre graphique n'est pas cité, car il nous a semblé que son utilisation va de soi pour les élèves qui essayent de résoudre le problème.

Dans une colonne mise entre les colonnes "registres" et "réussite", nous signalons les **erreurs** commises par les élèves.

Au niveau de la solution du problème, comme la question posée était partagée en deux parties, nous notons $\mathbf{X}^{(A)}$ quand l'élève a fourni la solution pour la partie A même partiellement et **X** s'il a fourni une solution pour les deux parties. Si la résolution (ou partie de la résolution) coïncide avec l'une des stratégies de notre analyse a priori nous le signalons aussi dans cette colonne, par exemple $S4^{(A)}$ veut dire que l'élève a utilisé la stratégie "théorème des milieux version géométrique" et ce pour la première partie de l'exercice.

EXERCICE N°2

Élèves	Prop vect	prop géom	symétrie	théor milieux	autres	registres	erreurs	réussite
1	Chasles	$X^{(B)}$				SV (A) - SG (B)		X
2		X		X		SG	sans montrer dist[13]	$S4^{(A)}$
3		X				SG		$S2^{(A)}$
4		X		X		SG	sans montrer dist	$S4^{(A)}$
5					"il faut les vecteurs"	gra		
6		X	X	X		SG	sans montrer dist	$S4^{(A)}$
7						gra		
8		X	X	X		SG	sans montrer dist	$S4^{(A)}$
9		X		X		SG		$S4^{(A)}$
10			X	X		SG		$S4^{(A)}$
11 (R)				X		SG		$S4^{(A)}$
12	Chasles			X		SG(A)- SV(B)		$X^{(A)}$
13						SG		
14			X	X		SG		$X^{(A)}$
15	Eg. vect parallél	X				SG/SV- (A) SG (B)		X
16 (R)		X			Thalès	SG		
17 (R)		X	X			SG		$S2^{(A)}$
18						SG		
19		X		X		SG-Disc.	diag d'un quadrilatère coupent milieux	
20						gra		
21								
22			X	X		SG-Disc.	sans montrer dist	
23			X	X		SG-SV (A)		$X^{(A)}$
24		X	X	X		SG	sans montrer dist	$S4^{(A)}$
25 (R)						SG		
26						SV		
27 (R)						SG		
28 (R)		X	X			SG	diag d'un trapèze coupent milieux	$S2^{(A)}$
29				X		Disc.		
30				X	médiatrices	SG		$S4^{(A)}$
31				X	égalité de triangles-translation	SG		
32		X	X	X	Thalès	SG		$X^{(A)}$
33			X	X		SG		$X^{(A)}$

L'élève n° 15 a fourni une solution "mixte" entre S1 et S2.

A part l'élève n°21, tous les autres ont fourni un dessin.

[13] "sans montrer dist" veut dire que l'élève a utilisé le théorème des droites des milieux pour montrer le parallélisme des segments et puis sans parler de distance il a conclut qu'il s'agissait d'un parallélogramme sans justifier l'égalité des côtés parallèles.

3.1.5 - A propos des résultats obtenus

Comme prévu, cet exercice s'est présenté chez les élèves comme essentiellement géométrique. En effet, parmi les 33 élèves, 18 ont utilisé les théorème des droites des milieux sous la forme géométrique. Seulement 5 élèves ont fait appel au registre vectoriel, et parmi ceux ci quatre l'ont utilisé mélangé au registre géométrique. Ceci est une première vue d'ensemble des résultats obtenus ; passons à une analyse plus fine de ces résultats.

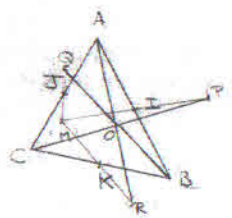
L'utilisation du registre symbolique géométrique et réussites dans ce registre

La proportion de l'utilisation seulement du registre symbolique géométrique (**SG**) est de **23/33** ; dont 15/23 ont réussi la première partie et aucun élève n'a réussi les deux parties de l'exercice. Parmi les 15 élèves qui ont réussi partiellement l'exercice, 8 croient être arrivé à une solution complète de l'exercice mais ils ont fait des erreurs : 6 élèves ont utilisé les théorème des milieux pour montrer le parallélisme des segments et n'ont pas montré l'égalité des côtés opposés du parallélogramme, et 2 élèves ont utilisé des propriétés géométriques erronées, à savoir que les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu et que les diagonales d'un trapèze se coupent en leur milieu.

L'utilisation du registre symbolique vectoriel et réussites dans ce registre

La proportion de l'utilisation du registre symbolique vectoriel (**SV**) est bien inférieure à celle du registre symbolique vectoriel à savoir **5/33**. De plus, parmi ces cinq élèves, quatre ont aussi utilisé le registre symbolique géométrique.

(i) élève n°1 - a utilisé RSV pour la partie A (pour montrer par exemple que $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{QP}$ et en conclure le parallélisme des segments [CB] et [QP]) et RSG pour la partie B (pour interpréter géométriquement l'égalité vectorielle). Il a réussi les deux parties. Donnons un extrait de sa résolution :



$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$ ①
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MQ}$
$\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MP}$
$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MR}$

)

* (PQ)//(BC)

$\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CK} = 2\overrightarrow{CJ} + 2\overrightarrow{JI} + 2\overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{AI}$

$= 2\overrightarrow{JI} = 2\overrightarrow{JM} + 2\overrightarrow{MI} = -2\overrightarrow{MQ} + 2\overrightarrow{MP}$

$= 2(\overrightarrow{JM} + \overrightarrow{MI}) = 2\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{MQ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MP}\right)$

$= -\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{QP}$

Ces vecteurs sont égaux donc (PQ)//(BC)

* (PR)//(AC)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{IK} = 2(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MK})$

$= 2\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{PM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MR}\right)$

$= 2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{PR}\right) = \overrightarrow{PR}$

Ces vecteurs sont égaux donc (PR)//(AC)

(ii) élève n° 12 - a utilisé le RSG pour la partie A (le théorème des milieux) et RSV (essaie de résolution avec la relation de Chasles) pour la partie B. Il a réussi la partie A et ce de manière géométrique.

(iii) élève n°15 - utilisation du registre symbolique géométrique pour montrer le parallélisme des segments et utilisation du registre symbolique vectoriel RSV pour caractériser l'existence des parallélogrammes, ensuite réutilisation du registre géométrique pour l'interprétation de la propriété géométrique du parallélogramme sur ses deux diagonales. Il a réussi des deux parties.

(iv) élève n°23 - utilisation des registres symboliques géométriques et vectoriels pour la partie A - réussite de cette partie de l'exercice. Le SG pour le théorème des milieux pour montrer que (IK)//(AC) et le SV pour traduire vectoriellement le fait que I et K sont des symétriques du point M par rapport à I et K respectivement. Il a réussi la première partie de l'exercice mais n'a pas essayé de résoudre la deuxième partie.

(v) élève n° 26 - a utilisé seulement le registre symbolique vectoriel mais en brouillon : il a fait des décompositions en utilisant la relation de Chasles, mais sans succès.

Finalement il décide d'abandonner ses calculs et à part le dessin il n'a rien fourni sur la page où il devrait écrire sa réponse.

Au niveau des réussites, si nous comptons les élèves qui ont réussi partiellement ou totalement l'exercice, nous avons **3/5** de réussite parmi ceux qui ont utilisé les vecteurs à un moment ou à un autre contre **15/23** parmi ceux qui ont réussi tout en restant dans le géométrique.

À propos des erreurs

Le nombre d'erreurs commises par les élèves n'est pas très important. Dans l'utilisation du registre et de l'outil vectoriel, aucune erreur n'a été faite tandis que dans l'utilisation de l'outil géométrique huit erreurs ont été faites. Six élèves n'ont pas pris en compte que pour affirmer qu'un quadrilatère est un parallélogramme ne suffit pas de montrer qu'il a deux côtés parallèles et deux autres élèves ont énoncé une propriété erronée.

Les outils de résolution

Les élèves ont majoritairement utilisé des propriétés géométriques pour résoudre l'exercice. Les proportions par rapport à l'utilisation des propriétés sont les suivantes :

- propriétés géométriques du parallélogramme —> 14/33.
- propriétés vectorielles —> 3/33.
- théorème des milieux —> 18/33.
- Thalès —> 2/33.

Avant de conclure donnons un tableau résumé des résultats obtenus concernant les registres utilisés par les élèves, les réussites dans chacun de ces registres ainsi comme le taux d'erreurs.

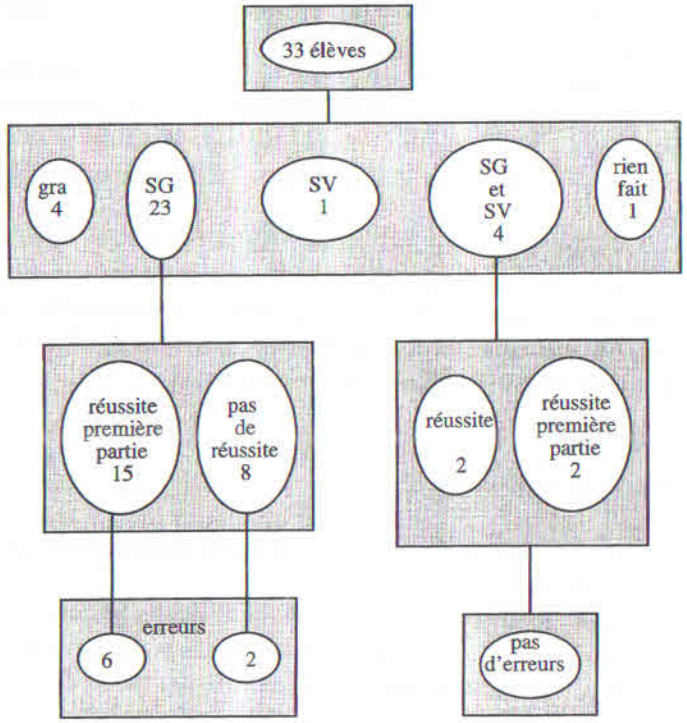


Tableau 2 : Exercice 2 - Première S

3.1.6 - En conclusion ...

Il s'agit ici d'un exercice essentiellement géométrique, et qui donné dans un contexte qui ne fait pas appel aux vecteurs, n'amène pas les élèves à penser à utiliser cet outil. Ce résultat confirme l'hypothèse que nous avons faite lors de notre analyse des manuels, selon laquelle il existe des exercices dans l'enseignement qui sont des artifices didactiques, du point de vue de la solution attendue par les auteurs (cf. analyse des manuels chapitre B2, classe de Seconde, manuel Terracher), et qui ont pour objectif d'entraîner les élèves à utiliser les vecteurs. Deux raisons principales contribuent à ce que l'élève ne pense pas à l'utilisation de l'outil vectoriel : la première raison est que l'outil géométrique est plus ancien pour les élèves et la deuxième raison est que la première question posée dans l'énoncé de l'exercice porte sur le parallélisme de segments dans une configuration. Les élèves ne pensent pas à traduire en relation vectoriel le parallélisme de segments. De plus, une fois le parallélisme des côtés démontré, et par conséquent l'existence de parallélogrammes, il suffit d'utiliser une propriété géométrique du parallélogramme pour montrer que les segments se coupent

en leur milieu. Le problème ici étant celui de penser à montrer deux à deux le parallélisme des côtés du quadrilatère.

Concernant l'économie de l'usage du registre vectoriel ou géométrique, le premier peut se montrer plus économique dans la mesure où quand on utilise le théorème des milieux on obtient d'une seule fois le parallélisme des côtés et la proportionnalité des distances. Mais nous avons vu que les élèves pensent plutôt à utiliser le théorème des milieux sous sa forme géométrique.

Enfin, cet exercice proposé hors du contexte "vecteurs" ne fait pas penser à ces derniers, et une fois qu'il est mis dans le chapitre sur les vecteurs, par une règle implicite du contrat didactique (Brousseau, 1986), les élèves utilisent naturellement le registre symbolique vectoriel. Ainsi nous pouvons conclure que la disponibilité de l'outil vectoriel est très faible dans un contexte géométrique pour ce type de problème.

3.2 - Phase B - Les entretiens

Passons à présent à la préparation et l'analyse de la deuxième partie (phase B) de notre observation : les interviews.

Au départ, notre objectif est de connaître plus précisément les connaissances des élèves sur la notion de vecteur et surtout de repérer les situations-problèmes où les élèves pensent à les utiliser. Nous cherchons aussi à comprendre pourquoi les élèves ont échoué dans l'utilisation de l'outil vectoriel, surtout dans le premier exercice proposé.

Nous avons choisi quelques élèves parmi ceux qui ont participé à la première partie de l'observation (exercices écrits) et nous les avons groupés par binômes. Cela rend possible une interaction entre eux et l'apparition de contradictions. Ce choix a surtout été fait en fonction des réponses fournies au premier exercice proposé.

L'idée de départ était d'interviewer une quantité significative d'élèves de façon à mieux comprendre leur démarche, mais il ne nous a été accordé qu'une heure pour effectuer cette deuxième partie de notre observation.

Finalement, le temps d'interviews n'était suffisant que pour deux binômes. Il a donc fallu élaborer une autre situation pour rencontrer trois autres binômes et avoir le maximum possible des données relatives à cette classe de Première S. Une stratégie qui nous a apparu intéressante était de former des binômes et de leur proposer un exercice à travailler ensemble. Ils seraient enregistrés pendant leur travail et devraient fournir une seule solution par écrit. L'idée était de les mettre en situation de formulation, ce qui les oblige a trouver une solution d'un commun accord. Nous avons considéré qu'il était plus intéressant de choisir des binômes mixtes, c'est-à-dire formé d'un élève qui a pensé aux vecteurs dans la résolution du premier exercice et d'un élève qui n'a pas pensé aux vecteurs. Cela pourrait permettre une discussion entre eux sur l'utilisation l'avantage de chaque outil.

De cette façon, la deuxième phase de notre expérimentation a consisté en une situation de formulation (Brousseau, 1986, page 95) pour trois binômes où des binômes devaient produire une réponse à un exercice, et un entretien pour deux autres binômes portant sur la proposition de résolution donnée par chacun d'eux au premier exercice.

3.2.1 - Phase B.1 - Une situation de formulation

Passons maintenant à la description de la phase B.1 de notre dispositif expérimental. Tout d'abord nous présentons l'exercice donné aux élèves et une résolution vectorielle, et ensuite nous présentons les résultats obtenus.

Nous avons donc choisi six élèves et nous avons formé trois binômes mixtes ; aucun de ces élèves n'avait réussi le premier exercice proposé dans la phase A. Nous leur avons proposé alors un exercice et ils avaient comme tâche de fournir une réponse commune au binôme. Nous n'acceptions pas de réponse individuelle. Ils ont été enregistré pendant tout le temps de discussion. Tous les brouillons ont été ramassés pour que nous puissions avoir le plus précisément possible une trace de leur démarche. Ils ont disposé d'**une heure** pour faire le travail.

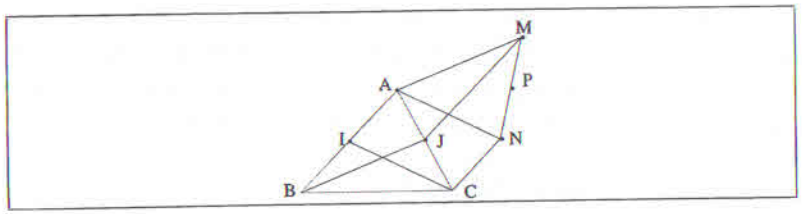
L'exercice proposé est le suivant :

> Soit un triangle ABC, I et J les milieux respectifs des côtés [AB] et [AC].
> Les points M et N sont tels que ABJM et AICN sont des parallélogrammes.
> Soit P le milieu du segment formé par les points M et N.
> Montrer que la droite (AP) est parallèle à droite (BC).

Nous avons choisi cet exercice, motivée par le fait que son énoncé permet plusieurs passages au langage vectoriel (milieu d'un segment, propriétés vectorielles d'un parallélogramme, parallélisme de droites...), et que de plus il s'agit d'un exercice qui satisfait les conditions que nous avions choisis pour les exercices à donner aux élèves (voir analyse a priori).

Ci-dessous nous donnons l'énoncé tel qu'il était dans le manuel. Nous fournissons deux solutions vectorielles et ensuite une solution géométrique.

> 2) Terracher, page 300, problème n°70.
> Dans la figure ci-après, I et J sont les milieux de [AB] et [AC], ABJM et CIAN sont des parallélogrammes et enfin P est le milieu de [MN].
> Le problème consiste à établir que (AP) et (BC) sont parallèles.



Deux solutions vectorielles :

1. Décomposition dans la base $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$

(i) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AC})$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI})$

$= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

(ii) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

On conclut de (i) et (ii) que $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ et alors on a (AP) // (BC).

2. Décomposition dans la base $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})$

$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BJ} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{4}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC})$

Alors on a $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$

Une solution géométrique :

(i) Soit K le milieu de [JM]. Dans le triangle MJN, (KP)//(JN)

(ii) Dans le parallélogramme ABJM, [AI]//[JK] et ils ont même mesure

Alors AKJI est un parallélogramme et on obtient [AK]//[IJ]

De (i) et (ii) et de ce que AICN est un parallélogramme on conclut que (KP)//(AK), et comme ces deux droites ont un point en commun, elles coïncident alors A, K et P sont alignés

Comme (AK)//(IJ) et (IJ)//(BC) on a (AK)//(BC) ce qui permet de conclure que (AP)//(BC).

A propos des stratégies ...

La première stratégie vectorielle est longue, par rapport à la deuxième, mais on est sûr de pouvoir aboutir à une solution, tandis que la deuxième stratégie, plus courte, cela n'est pas sûr. Au niveau des outils mis en œuvre pour chaque stratégie, la première utilise le demi-

parallélogramme, la relation de Chasles, le vecteur opposé et les caractérisations vectorielles du milieux d'un segment et des l'égalités des côtés opposés d'un parallélogramme ; la deuxième utilise le demi-parallélogramme, la caractérisation vectorielle de l'égalité des côtés d'un parallélogramme et du milieu d'un segment. Enfin, la première stratégie met en œuvre les mêmes outils que la deuxième stratégie plus la relation de Chasles et la caractérisation vectorielle du milieu d'un segment, qui est pris en charge dans cette dernière par l'utilisation du "demi-parallélogramme" à plusieurs reprises : trois fois dans la stratégie 2 contre une fois pour la stratégie 1. C'est cette utilisation qui rend la deuxième stratégie plus économique.

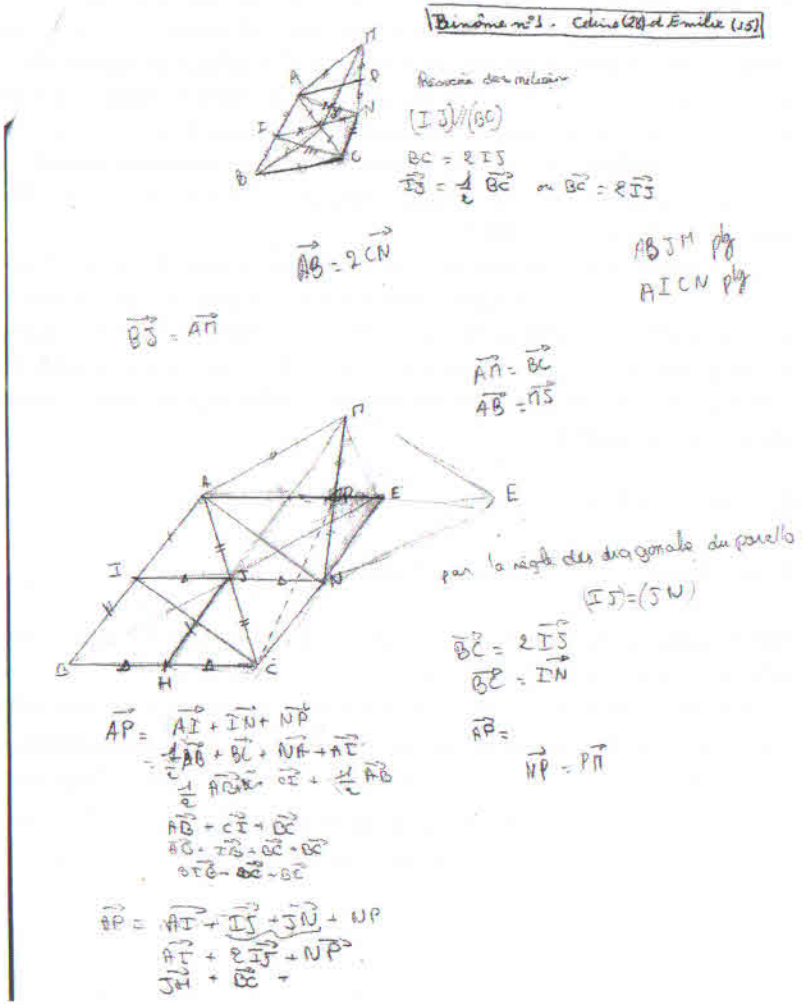
La stratégie géométrique nous paraît un peu difficile du point de vue des propriétés mises en œuvre : il s'agit essentiellement d'utiliser les propriétés géométriques du parallélogramme et le théorème des milieux, et pour ce dernier il faut d'abord penser à insérer un nouveau point qui n'appartient pas a priori a la configuration. C'est là qui réside la difficulté de cette stratégie : l'élève doit penser à introduire des sous figures pour donner une résolution au problème.

3.2.2 - Analyse des résultats obtenus

3.2.2.1 - Binôme n°1 - Emilie (n°15) et Céline (n°28)

Nous n'avons pas pu enregistrer le dialogue de ce binôme en raison d'un problème technique ; l'analyse est donc basée sur la production écrite des élèves.

Elles ont utilisé le registre vectoriel pour le milieu d'un segment et comme propriétés elles ont utilisé le théorème des milieux avec une notation vectorielle ($\overrightarrow{IJ} = 1/2\ \overrightarrow{BC}$) et la relation de Chasles mais sans arriver à une solution. A deux reprises elles partent du vecteur $\overrightarrow{AC}$, ensuite elles font de décompositions utilisant la relation de Chasles mais elles n'aboutissent pas à une solution. Donnons un extrait de leur copie :



Sur le dessin qu'elles présentent on voit une esquisse du quadrilatère AMEN, E étant sur la droite AP. Il n'y a rien d'écrit qui fournisse une piste de ce qu'elles comptaient faire avec ce quadrilatère, et la question qui se pose est : "auraient-elles pensé au parallélogramme dont P est le milieu des diagonales ?". Dans l'affirmative, la solution du problème n'était pas loin car il suffisait alors d'écrire le vecteur $\overrightarrow{AP}$ en fonction de $\overrightarrow{AM}$ et de $\overrightarrow{AN}$. Comme il n'y a pas eu d'enregistrement rien ne peut être affirmé, et de plus,

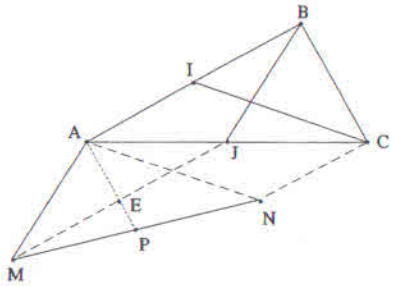
comme nous l'avons montré lors de notre analyse des manuels (cf. chapitre B2), cette relation n'est pas beaucoup travaillée dans l'enseignement secondaire et il est donc assez naturel de penser que ce résultat ne soit pas disponible chez les élèves.

L'outil vectoriel est donc **disponible** (c'est le seul outil auquel elles ont fait appel) mais il ne se montre pas **efficace** car il n'y a pas eu réussite dans la résolution du problème. Elles font des substitutions en utilisant les données de l'énoncé sans arriver à s'en sortir.

3.2.2.2 - Binôme n°2 - Amaury (n°21) et Laurent (n°13)

Ce binôme n'a pas utilisé le registre vectoriel. Ils ont utilisé la notion de translation et le théorème des milieux sous forme géométrique. Nous transcrivons ci-dessous la réponse fournie :

On appelle E intersection de (AP) et (MJ).
Je trace F le translaté de I/[BC].
F=E. Donc comme la translation conserve l'égalité, E=milieu [MJ].
EJ=IB et IB=AI
AI=EJ donc AIJE est un parallélogramme.
(AF)//(IJ)
[AF]∈(IJ) (AP)//(IJ).
D'après le théorème des milieux dans le triangle ABC, (IJ)//(BC) car I=milieu[AB] et J=milieu[AC].
Donc, (AP)//(BC).



Quand ils ont parlé de translation, l'un des deux a dit, "le translaté de I par rapport au vecteur...euhhhhh, o segment [BC]." C'est-à-dire que l'idée d'utiliser le vecteur est écarté rapidement, ou même pas mise en question.

Ils étaient convaincus d'avoir trouvé la solution, mais ils ont fait des fautes : par exemple, le translaté de A par rapport à [BC] ne coïncide pas avec le point E (à part l'écriture sur la feuille ils ont dit plusieurs fois que c'était par rapport à [BC] et non [BJ] comme on pouvait penser !!!). En fait, analysant la copie rendue il est difficile de savoir ce qui relève vraiment d'une erreur au niveau d'une notion de ce qui relève d'une erreur au niveau simplement de l'écriture, comme nous croyons être le cas pour [AF]∈(IJ) : il nous semble bien qu'ils voulaient plutôt écrire [AE]//(IJ).

L'outil vectoriel ne s'est pas montré donc disponible même s'ils ont évoqué la plupart des propriétés qui donnent lieu à des traductions vectorielles en classe de Seconde : la translation, le parallélogramme, le théorème des milieux). Nous avons pu constater qu'ils

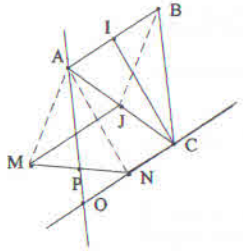
ont une très grande difficulté dans l'utilisation des propriétés géométriques, et ils prennent ce qu'ils lisent sur le dessin comme étant une propriété vraie qu'on a le droit d'utiliser.

3.2.2.1 - Binôme n° 3 - Antony (n°18) et Karin (n°6)

Antony a suggéré d'utiliser les vecteurs mais ils n'ont rien fait dans ce sens là, c'est-à-dire que le binôme n'a pas utilisé les vecteurs.

Antony a aussi dit que ça ressemblait a un truc de "médianes", sur quoi Karin a dit : "ah, oui, le centre...ouais...". Mais ils n'ont pas suivi cette direction non plus.

Ils se sont "perdus" dans le dessin ; par l'enregistrement de leur discussion nous vérifions qu'ils ne savent pas quoi utiliser pour arriver à la solution. Ils font d'abord plusieurs manoeuvres, insèrent un autre point O qui est l'intersection de (CN) et (AP). Ci-dessous le dessins fourni par le binôme :



Comme [IJ] est parallèle à [BC] (par le théorème des milieux), ils essayent de montrer que AINO est un parallélogramme, d'où on arriverait à la solution. Mais ils n'y arrivent pas ; ils utilisent de faux résultats tels que J = milieu [AN].

Le binôme recommence l'exercice, refait le dessin et la conclusion qu'ils en tirent est que (IJ) passe par N. Ils s'arrêtent là.

3.2.3 - Conclusion de la phase B.1

Un seul binôme a utilisé les vecteurs mais sans avoir réussi l'exercice. Les deux autres binômes ne se sont pas servi de l'outil vectoriel et n'ont pas réussi non plus l'exercice. Une fois cette constatation faite, nous pouvons dire que l'outil vectoriel et l'outil géométrique se sont montrés inefficaces mais nous sommes tentée dire que le binôme qui a utilisé les vecteurs était "plus proche" de trouver une solution que les deux autres. Une fois de plus nous avons pu constater que la difficulté de l'utilisation de l'outil vectoriel réside dans la manipulation de cet outil, et ce relativement à la décomposition dans une base.

L'analyse des résultats obtenus dans la phase B.1, indique que l'outil vectoriel n'est pas disponible pour les binômes 2 et 3, car même s'ils ont, à un moment donné, dit le mot

vecteur cette idée n'a pas eu de continuation : ils ne voyaient pas l'exercice proposé comme un problème qui peut avoir une solution vectorielle.

3.2.4 - Phase B.2 - Les entretiens

3.2.4.1 - Objectifs et organisation des entretiens

Cette phase de notre observation a eu comme objectif de permettre de faire une analyse plus fine de la démarche de résolution des exercices chez les élèves. Notre objectif était d'étudier un peu plus la disponibilité de l'outil vectoriel en ce qui concerne les types de problèmes qu'ils pensent pouvoir être résolus avec cet outil et son efficacité. L'entretien a été décomposé en trois points : que pense l'élève de la solution fournie par son camarade au premier exercice proposé dans la phase A ; explicitation de l'élève sur leur propre copie et finalement un exercice est proposé et le binôme doit dire comment il tenterait de le résoudre.

Tout d'abord nous avons repris le premier exercice qui a été proposé dans la classe. Nous avons posé aux élèves des questions relativement à la résolution qu'ils ont fournie, notre but étant de leur faire expliciter les raisons du choix qu'ils ont fait. Nous voulions avoir accès à ce que les élèves ont pensé lors de la résolution de l'exercice mais qu'ils n'ont pas écrit sur leur copies. Pour cette étude nous nous sommes inspirée du travail de Coppé (1993), sur les élèves en situation de devoir surveillé. A partir des notions de rapport privé et rapport public définies par Chevallard (1992), Coppé (1993) définit deux composantes dans le travail de l'élève, que nous transcrivons ci-dessous:

> "Le travail des élèves, dans toutes les situations qu'ils rencontrent au cours de leur métier d'élève, comporte deux composantes non totalement indépendantes.
> Nous appellerons travail privé de l'élève, tout ce qui est fait, en lien avec le savoir, hors de la vue du maître et dont le maître n'aura pas forcément connaissance.
> En opposition, nous appellerons trace publique, ce que l'élève donne à voir au maître, sous forme écrite ou orale, en général pour que celui-ci porte un jugement ou une évaluation.
> La délimitation privé/public, varie suivant les différentes situations.
> Pour l'élève, cette délimitation provient, soit d'une décision de garder pour lui certains points et d'en rendre d'autres publics, soit d'une perception des contraintes de la situation qui le pousse alors à donner une réponse." (p 62)

Ainsi, l'analyse de la copie de chaque élève nous permet d'accéder à la composante public du travail qu'il a fait ; il nous reste à étudier des traces de la composante privée pour esquisser des réponses qui montrent les raisons de leur choix et, par conséquent, affiner notre étude.

Pour cela, les questions posées aux élèves ont été du type suivants :

"Élève 1 que penses-tu de la solution fournie par l'élève 2 ?"
"Est-ce qu'on n'a pas un autre moyen de traiter cette question ?"

Nous cherchions à ne pas porter de jugement, ni a demander directement les raisons de l'usage de tel ou tel outil, par exemple : "pourquoi as tu choisi cet outil pour résoudre le problème ?" Comme nous l'avons déjà dit, notre but était d'essayer de confronter sa réponse avec celle de son camarade et les obliger à argumenter.

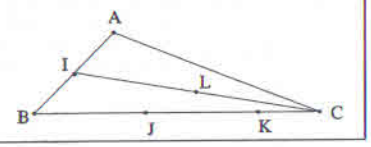
Avec les entretiens, nous voulions essayer de repérer dans quelle mesure les vecteurs représentent un outil pour résoudre des problèmes ou s'il s'agit plutôt d'une règle (même implicite) du contrat didactique qui a été mis en place en classe de Seconde (cf. analyse des manuels).

Nous leur avons aussi proposé un exercice écrit et demandé des possibilités de traiter le problème (cela aussi bien pour ceux qui ont réussi ou pas et pour ceux qui ont utilisé les vecteurs ou non). Premièrement, nous avons fourni les données du problème et observé le type de traduction en registre symbolique qu'ils en font ; puis nous leur avons posé la question pour identifier le registre qu'ils utilisaient pour la traduire.

En ce qui concerne la solution de l'exercice, ce que nous intéressait le plus était de connaître la démarche des élèves ; leur faire trouver une solution complète, c'est-à-dire arriver jusqu'à la fin de l'exercice, n'était pas notre objectif principal.

L'exercice qui nous a semblé intéressant d'utiliser à l'entretien (car il y a plusieurs traductions possibles au vectoriel) est le suivant :

Soit ABC un triangle quelconque et I le milieu de [AB]. Soient J et K deux points de [BC], tel que BJ=JK=KC et L le milieu de [IC]. On veut démontrer que les points A, L et K sont alignés.



Nous ne fournissons ici qu'une résolution vectorielle et une résolution géométrique car notre objectif n'est pas d'épuiser les possibilités de solutions, mais d'analyser les types de passages au vectoriel que les élèves peuvent faire. Ainsi, avant de donner une solution vectorielle et une solution géométrique, nous listons ci-dessous les traductions possibles au registre vectoriel :

(i) I milieu de [AB] se traduit par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou encore par $\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{AI}$;

(ii) BJ=JK=KC se traduit par $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{KC}$ ou $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ (par exemple ...) ;

(iii) L milieu de [IC] se traduit par $\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{LC}$ ou encore par $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$;

(iv) A, L K alignés se traduit par $\overrightarrow{AL} = \lambda\ \overrightarrow{AK}$.

Une solution vectorielle :

Décomposition dans la base ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$)

(i) $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

(ii) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AK}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

D'où $\frac{3}{4}\ \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Alors de (i) et (ii) on conclut que $\overrightarrow{AL} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AK}$, d'où A, L et K alignés.

Une solution géométrique :

(i) Dans le triangle ABK, J est le milieu de [BC] et I le milieu de [AB], alors par le théorème des milieux on a (AK)//(IJ) ;

(ii) Dans le triangle CIJ, L est le milieu de [CI] et K est le milieu de [CJ], alors par le théorème des milieux on a (LK)//(IJ) ;

De (i) et (ii) on conclut que (LK)//(AK) et comme ces deux droites ont un point en commun, elles coïncident, donc les points A, L et K sont alignés.

Notre **objectif,** avec cet exercice, était de voir les données que les élèves traduisent plus au moins vite en vectoriel et comment ils le traduisent. Cet exercice visait la vérification de la disponibilité de l'outil vectoriel.

Si les élèves restaient bloqués sur l'exercice sans penser aux vecteurs, la question pourrait être posée directement, c'est-à-dire que nous leur demanderions :

"Y a-t-il dans l'énoncé des données qui peuvent être traduites en langage vectoriel ?"

De cette façon, même si la traduction au vectoriel n'est pas spontanée nous avions la possibilité de voir les propriétés qu'ils traduisent plus facilement dans ce langage. Nous cherchions ainsi à valider une partie des traductions possibles au vectoriel exigibles en fin de Seconde (cf. conclusion du chapitre B2).

Dernièrement, nous voulions leur poser une question pour savoir **ce qui les a marqué le plus** dans l'enseignement de vecteurs jusqu'à maintenant ! Nous voulions les obliger à

trier des propriétés vectorielles qu'ils connaissent pour transmettre à une troisième personne :

"Que tu dirais à un élève qui rentre en Première à propos de ce qu'il doit savoir sur les vecteurs ? Les points le plus importants ? Dis-nous trois choses que tu considère essentielles sur les vecteurs."

3.2.4.2 - Analyse des entretiens

Nous allons maintenant transcrire des parties des entretiens effectués avec les élèves et en même temps nous procéderons à l'analyse de ces extraits.

binôme n°1 (11h) - Séverine (n°1) et Jullien (n°25).
Séverine a réussi l'exercice n°1 (phase A) avec les vecteurs et Jullien avec les médianes.

Dans la partie (i), Jullien dit qu'il a choisi les médianes car il n'a pensé qu'à ça "*et puis la solution est venue donc, c'était bien*". Séverine a fait le choix d'utiliser les vecteurs parce qu'elle se rappelait de la classe de Seconde et montrer l'alignement de trois points était un exercice sur les vecteurs. Cela montre bien qu'elle a choisi d'utiliser les vecteurs parce que c'était la règle apprise en Seconde, autrement dit, par un effet du contrat didactique.

Une fois que nous les avons questionnés à propos de la solution produite par l'autre, les réponses étaient :

Jullien : "Je n'aime pas les vecteurs. Il faut faire des comptes... Je sais pas... C'est plus compliqué ! Avec les médianes non, je sais ce qu'il faut faire. Et en plus je redouble donc, je ne me rappelle pas de cet exercice, ni des vecteurs !"

Comme Séverine a dit qu'il s'agissait d'un exercice de Seconde, Jullien se défend en disant qu'il redouble et ne se rappelle pas de cet exercice.

Séverine : "J'avais pas pensé aux médianes. C'est vrai qui peut être facile. Mais j'avais pas pensé..."

Nous proposons un nouvel énoncé (l'exercice décrit ci-dessous dans 3.2.4.1). Chacun a une feuille avec l'énoncé du problème. Ils font le dessin. Nous leur demandons de traduire l'énoncé en langage mathématique. Impasse ! Pour les faire sortir de l'impasse, nous leur demandons la traduction de chaque information de l'énoncé en langage vectoriel. Ils commencent à le faire et écrivent ensemble :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{KC}$ $\quad \overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$

Pour la question, ils ne sont pas très sûrs de comment le faire. Nous demandons : "comment peut-on traduire en langage vectoriel les conditions d'alignement de trois points ?" et ils écrivent :

$$\overrightarrow{AL} = k\ \overrightarrow{AC}$$

Nous pouvons alors conclure que les traductions vectorielles permises sur la configuration (milieu d'un segment et colinéarité vectorielle) sont assez spontanées chez ces deux élèves.

Enfin, nous voulons savoir les trois "points" importants qu'il faut savoir sur les vecteurs quand on entre en Première.

Les réponses fournies par le binôme en commun accord son :

l'égalité de vecteurs - la définition d'un vecteur - la colinéarité

Le temps est fini. En fait nous avons eu seulement 20 minutes pour pouvoir les interviewer. Nous avons eu des problèmes avec l'enregistrement ; nous nous sommes donc fondées sur les notes que nous avons écrites pendant l'entretien.

binôme n°2 (11h30) - Stelle (n°2) et Delphine (n°23).
Pas de réussite, mais il s'agit aussi d'un binôme mixte car Stelle n'a pas du tout pensé aux vecteurs tandis que Delphine a utilisé le registre vectoriel.

Par rapport au premier item de l'entretien, sur les raisons de choisir l'outil vectoriel ou l'outil géométrique, les deux élèves ont dit que c'était ce qu'elles avaient pensé (chacune).

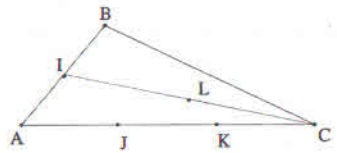
Stelle dit qu'elle n'a pas vu les vecteurs. "J'ai pensé aux triangles, aux parallélogrammes..."

Delphine dit qu'elle a vu qu'il s'agissait d'un problème d'alignement et "en Seconde on utilise les vecteurs..." Une fois de plus nous voyons ici une utilisation de l'outil vectoriel qui est due à l'usage qui en est fait dans l'enseignement.

Il n'y a pas eu de débat entre elles à propos de l'efficacité de chaque proposition. Elles sont restées sur l'argumentation de "c'est ça que j'ai pensé".

Quand on leur a proposé le nouvel exercice, elles n'ont pas pensé immédiatement aux vecteurs, mais elles ne réussissent pas l'exercice. A cause du temps limité pour les interviewer, nous leur avons demandé de traduire l'énoncé de l'exercice en registre vectoriel. Nous transcrivons ci-dessous ce qu'elles ont produit :

$AI = IB$
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
$AJ = \frac{1}{3}AC$
$AJ = JK = KC$
$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{KC}$
$IL = LC$
$\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{LC}$



Nous leur avons demandé comment on peut traduire vectoriellement le fait que B, L et K soient alignés. Réponse : x $\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BK}$

Enfin nous leur demandons les trois concepts ou résultats essentiels qu'il faut savoir sur les vecteurs quand on quitte la classe de Seconde.

Réponse :

l'égalité de vecteurs - il faut savoir dessiner un vecteur -

Il y a une impasse : elles ne savent plus quoi dire ! Nous insistons sur la question.

Elles reprennent :

il faut savoir le parallélogramme

Nous demandons : "Ça veut dire quoi ?"

On doit voir les vecteurs sur le parallélogramme.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

"Quoi d'autre ?"

l'alignement.

Fin de la séance.

3.2.5 - Conclusion de la phase B.2

Malheureusement nous avons disposé de trop peu de temps et cela ne nous a pas permis d'attaquer le fond des questions. Il n'a pas été possible de détailler les réponses que les élèves fournissaient ni de leur poser d'autres questions qui pouvaient contribuer à notre analyse. Il aurait fallu disposer de plus de temps pour pouvoir interviewer chaque binôme et pour interviewer un plus grand nombre d'élèves.

Nous avons voulu former des binômes pour les obliger à défendre la solution choisie mais cela n'a pas fonctionné : chaque élève se contentait d'énoncer ce à quoi il avait pensé. Il n'y avait pas d'enjeu pour confronter les solutions proposées par eux. Aucune discussion

n'a pu avoir lieu à ce niveau ; il n'y a eu qu'un seul élève qui a dit explicitement qu'avec les vecteurs il faut faire des comptes et qu'avec les médianes il savait où il faut arriver. Apparemment il semblait dire que la difficulté avec les vecteurs est qu'on ne sait pas où on doit arriver.

Pour les élèves observés dans cette partie, nous avons pu vérifier que l'outil vectoriel n'est pas disponible de façon spontanée comme un outil efficace pour résoudre des problèmes de géométrie, il s'agit d'un mécanisme qu'ils ont appris, d'un automatisme.

À propos des propriétés qui les ont le plus marqués, nous ne savons pas s'ils citent les propriétés qu'ils viennent d'utiliser ou si cela a vraiment un rapport avec ce qu'ils ont le mieux retenu du cours sur les vecteurs.

En tenant compte des problèmes que nous avons eu avec la phase B.2 de notre expérimentation en classe de Première S, pour l'expérimentation en DEUG, nous avons décidé de changer le type d'interview avec les étudiants. Cette fois les entretiens seraient individuels et, comme nous aurions plus de temps, nous allions pouvoir faire des entretiens avec un plus grand nombre d'étudiants. Cela nous permettrait d'en tirer des conclusions plus sûres.

3.2 - Conclusion de l'expérimentation en Première S

Dans les manuels, l'accent est mis sur l'utilisation de ce nouvel outil pour résoudre des problèmes de géométrie (surtout d'alignement de points). Les résultats obtenus dans notre expérimentation (phase A et phase B), nous permettent d'avancer quelques conclusions concernant ce nouvel outil.

Une fois qu'on demande aux élèves de traduire les données de l'exercice en registre vectoriel, ils le font sans difficultés. Mais cela ne veut pas dire que l'outil soit disponible et efficace chez les élèves, au sens que nous avons pris pour ces deux concepts. En effet, les résultats de l'expérimentation réalisée en Première S, nous permettent de dire qu'une partie des élèves est apte à penser à utiliser l'outil vectoriel pour la résolution d'un exercice de géométrie sur l'alignement des points. Nous pouvons attribuer cela à un effet du contrat didactique : nous avons vu que pour beaucoup d'exercices proposés dans les manuels en classe de Seconde il s'agit de montrer l'alignement de trois points. Même si c'est en classe de Seconde que les enseignants soulignent qu'il faut utiliser les vecteurs pour résoudre entre autres, ce type de problème, et si les élèves interviewés sont en classe de Première, ils sont encore sous l'influence du contrat en vigueur en classe de Seconde. Nous avons pu constater qu'ils avaient toujours en tête ce qu'avaient dit les enseignants l'année précédente. C'est pourquoi nous considérons que la réalisation du dispositif expérimental en DEUG nous fournira de données concluantes sur l'usage des vecteurs au moins pour les premiers

problèmes proposés, car on est alors assez éloigné du moment où les étudiants ont vu ce type de problème.

Si l'outil vectoriel s'est montré disponible pour une bonne partie des élèves, la conclusion n'est pas la même pour son efficacité. Nous avons montré que certains élèves ayant choisi l'outil vectoriel ont "tourné en rond", en faisant plusieurs substitutions sans déboucher sur une solution. Ceci confirme notre hypothèse à propos de l'absence d'une méthode sûre pour permettre aux élèves d'arriver à une solution. Les élèves savaient ce qu'il fallait montrer (la relation de colinéarité) et que pour cela il fallait utiliser la relation de Chasles plus des relations lues sur le dessin. Ils ignoraient "comment" utiliser exactement la relation de Chasles et quels points il fallait faire intervenir.

La réalisation du dispositif expérimental réalisé en DEUG doit compléter notre analyse et nous permettre d'avancer dans nos conclusions.

4 - Expérimentation - DEUG

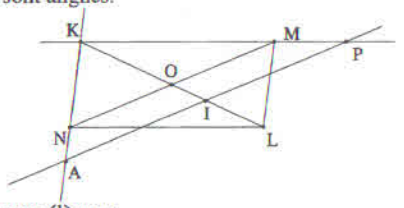
Nous avons dit, en début de ce chapitre, qu'a priori les exercices proposés en classe de Première S et en DEUG seraient les mêmes, mais comme le deuxième exercice proposé aux élèves de Première S ne nous a pas apporté des données concluantes sur l'efficacité de l'outil vectoriel chez les élèves, nous donnerons un autre exercice aux étudiants du DEUG. Cet exercice doit obéir aux conditions décrites dans notre analyse a priori.

4.1 - Analyse a priori du deuxième exercice à proposer en DEUG

Nous énonçons maintenant le nouvel exercice choisi et ensuite nous donnons des stratégies possibles de résolutions. Ces stratégies sont accompagnées d'une analyse de leur probabilité d'apparition chez les étudiants en fonction du niveau auquel ils se trouvent : première année du DEUG section scientifique.

4.1.1 - Le nouvel exercice

2) Dans le plan on considère le parallélogramme KMLN et le point O d'intersection de ses diagonales.
Soit A un point de la droite (KN) distinct de K et de N. P est le projeté de A parallèlement à la droite (MN) sur la droite (KM). Soit I le milieu du segment [AP].
Montrer que I, K et L sont alignés.



2') Énoncé à proposer aux élèves :
Dans le plan on considère le parallélogramme KMLN et le point O d'intersection de ses diagonales.
Soit A un point de la droite (KN) distinct de K et de N. P est le projeté de A parallèlement à la droite (MN) sur la droite (KM). Soit I le milieu du segment [AP].
Montrer que I appartient à droite (KL).

(i) Les changements dans l'énoncé

Le seul changement effectué dans l'énoncé concerne la question posée : au lieu de parler directement d'alignement nous demandons de démontrer l'appartenance d'un point à une droite, comme nous l'avons fait dans l'expérimentation en Première S, ce qui représente une question moins habituelle dans l'enseignement.

(ii) Solutions mathématiques

Les outils mathématiques disponibles pour résoudre des problèmes d'alignement à l'entrée en DEUG sont :

(i) repère et déterminant
(ii) centre de gravité
(iii) colinéarité de vecteurs
(iv) transformations géométriques (homothétie, symétrie oblique, projection affine)

4.1.2 - Analyse de l'exercice

S1 - Homothétie

Soit h l'homothétie de centre K et rapport λ :

$\Rightarrow$ h(N) = A et h(M) = P et comme O milieu de [MN]

on a que h(O) est le milieu de [AP] $\Rightarrow$ h(O) = I (invariance du milieu par l'homothétie)

De plus h(O) $\in$ (KO) $\Rightarrow$ I $\in$ (KL) (on utilise l'alignement entre l'image et objet avec le centre d'homothétie)

S2 - Projection affine

Soit P la projection sur (AP) parallèlement à (KL).

Soit P' la projection de P sur (MN) parallèlement à (KL).

Soit I le milieu de [AP] $\Rightarrow$ P(A') = A et P(P') = P

O est le milieu de [A'P'] : P(O) est le milieu de [AP]

Or O $\in$ (MN) $\cap$ (KL) $\Rightarrow$ P(O) $\in$ (AP) $\cap$ (KL)

donc I $\in$ (AP) $\cap$ (KL)

S3 - Configuration - Parallélogramme (+ Thalès)

Soit (PP') la parallèle à (KN), P' $\in$ (KL)

Par Thalès on a : $\frac{KP}{KM} = \frac{KP'}{KL}$ et $\frac{KP}{KM} = \frac{KA}{KN} \Rightarrow \frac{KP'}{KL} = \frac{KA}{KN}$

$\Rightarrow$ (AP')//(LN)

Donc KPP'A est un parallélogramme

$\Rightarrow$ le milieu I de [AP] $\in$ KP' $\Rightarrow$ I $\in$ (KL)

S4 - Configuration - Thalès et réciproque de Thalès

Soit I le milieu du segment [AP], d'après le théorème de Thalès on a :

$\frac{KM}{KP} = \frac{MN}{PA} = \frac{2MO}{2PI} = \frac{MO}{PI}$

Alors la réciproque du théorème de Thalès donne O, I et K sont alignés.

S5 - Calcul vectoriel/Thalès

Soit I le milieu de [AP]

On a $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KP})$ et $\overrightarrow{KO} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KM})$

Le théorème de Thalès permet d'écrire $\overrightarrow{KP} = \lambda\ \overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{KA} = \lambda\ \overrightarrow{KN}$

$\Rightarrow \overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}(\lambda\ \overrightarrow{KN} + \lambda\ \overrightarrow{KM})$

$\Rightarrow \overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}(\lambda\ 2\ \overrightarrow{KO}) = \lambda\ \overrightarrow{KO}$

$\Rightarrow$ I, K et O sont alignés.

S6 - Décomposition dans une base ($\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KN}$)

$\overrightarrow{KI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{KA}) = \frac{1}{2}(x\overrightarrow{KN} + x\overrightarrow{KM}) = x\frac{1}{2}(\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KM}) = x\frac{1}{2}(2\ \overrightarrow{KO}) = x\ \overrightarrow{KO} = x\frac{1}{2}\overrightarrow{KL}$

Alors on conclut que K, I et L sont alignés et que L appartient à la droite (KL).

S7 - Repère

Calculons les coordonnées des points K, O et I dans le repère (K, $\overrightarrow{KM}$, $\overrightarrow{KN}$) :

K(0,0) L(1,1) A(x,0) P(0,x) $I(\frac{x}{2},\frac{x}{2})$

Et on a l'alignement des points K, I et L.

S8 - Calcul barycentrique

A est le barycentre de K et de N $(1,\lambda)$

P est le barycentre de K et de M $(1,\lambda)$

I est le barycentre de A et de P, chacun affecté du coefficient $1+\lambda$

Donc

I barycentre de K, N, M affectés des coefficients $(2, \lambda, \lambda)$

$\Rightarrow 2\lambda\ \overrightarrow{IK} + \lambda\ \overrightarrow{IN} + \lambda\ \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{o}$

$\Rightarrow (2+2\lambda)\ \overrightarrow{IK} + 2\lambda\ \overrightarrow{KO} = \overrightarrow{o}$

$\Rightarrow$I, K, O sont alignés.

4.1.3 -Analyse des stratégies

Nous donnons tout d'abord un tableau résumé des stratégies possibles avec les connaissances qui doivent être mises en jeu à chaque fois. Cette vue d'ensemble des stratégies nous sera utile pour les analyser par la suite. Nous distinguons aussi dans ce tableau l'utilisation, ou non, du registre symbolique vectoriel.

	Connaissances en jeu	Vecteur
S1	Homothétie - invariants	non
S2	Projection affine	non
S3	propriétés du parallélogramme + Thalès	non
S4	Thalès et réciproque de Thalès	non
S5	addition vectorielle sur le demi-parallélogramme + Thalès + alignement/colinéarité	oui
S6	décomposition dans une base + demi-parallélogramme + alignement/colinéarité	oui
S7	calcul de coordonnées dans un repère	oui
S8	calcul du barycentre	oui

La stratégie **S1** (homothétie) est très économique : une fois qu'on pense à utiliser les transformations (la homothétie) la seule difficulté possible est de bien utiliser les propriétés d'invariance d'une homothétie. Comme au lycée, surtout en Première et Terminale S, une partie importante de l'enseignement est consacré à l'étude des transformations, cette stratégie nous semble assez probable.

La stratégie **S2** (projection affine) semble être la stratégie la moins probable chez les étudiants du DEUG car, dans l'enseignement, on travaille peu sur les projections affines.

L'étude des configurations a une place centrale dans l'enseignement secondaire, ce qui nous laisse croire que les stratégies **S3** (parallélogramme + Thalès) et **S4** (Thalès + réciproque) peuvent apparaître chez les étudiants du DEUG, de par la forte visibilité de la configuration de Thalès. En nombre de pas, la stratégie S4 s'avère une solution optimale. En ce qui concerne les erreurs possibles les élèves risquent d'utiliser l'hypothèse que K, O et I sont alignés dans l'utilisation de Thalès, ce qui veut dire, d'utiliser la question à montrer. Cela nous semble être la principale erreur susceptible d'apparaître de façon un peu systématique. La difficulté de la stratégie **S3** est qu'elle nécessite l'introduction d'un nouvel élément (le point P') dans le dessin et nous que les étudiants ont plutôt l'habitude de raisonner sur un problème avec les données qui sont fournies dans l'énoncé.

Le calcul vectoriel occupe une place importante dans l'enseignement secondaire, ainsi il apparaît comme un candidat fort probable pour une résolution. De plus le type d'exercice (montrer l'alignement de points données à partir d'un parallélogramme) renvoi au calcul vectoriel. Ainsi les stratégies **S5** et **S6** nous semblent probables chez les étudiants du DEUG première année. La difficulté de la stratégie **S5** (calcul vectoriel/Thalès) est que les élèves sont entraînés à utiliser le parallélogramme pour en tirer l'addition vectorielle et dans cet exercice il faut identifier le demi-parallélogramme ; autrement dit, il faut savoir que si on a trois points A, B et C non-alignés et I le milieu de AB, par exemple, on obtient

$\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$. Un tel outil associé à l'usage du théorème de Thalès vectoriel fournit une solution économique. La stratégie **S6** (décomposition dans une base) semble probable d'apparaître car il s'agit de l'usage "pure" du calcul vectoriel (sans introduire un autre outil tel que le théorème de Thalès), donc un usage familier des étudiants. La difficulté de cette stratégie est d'abord d'utiliser l'addition sur le demi-parallélogramme et de savoir partir d'un vecteur $\overrightarrow{KI}$ faire des décompositions et substitutions et arriver au vecteur $\overrightarrow{KL}$.

La stratégie **S7** (repère) s'avère une solution très économique en nombre de pas et de plus le choix judicieux du repère

La stratégie **S8** (calcul barycentrique) a des possibilités d'apparaître chez les étudiants du DEUG, car le calcul barycentrique fais partie du programme de première S.

4.2 - Phase A - Les exercices écrits

Nous avons fait passer les exercices à 20 étudiants d'une classe de DEUG session scientifique, première année, avant qu'ils n'aient leur cours sur les vecteurs. La consigne était la même que celle donnée en Première S, le seul changement est le changement du deuxième exercice.

4.2.1 - Exercice n°1[14] - résultats obtenus

Pour analyser les résultats obtenus dans la première partie de l'observation (exercices écrits), nous procédons tout d'abord à un classement du travail réalisé par chaque étudiant. Comme pour l'analyse des résultats obtenus en classe de Première S, un tableau avec les résultats des productions des étudiants est d'abord fourni, dans lequel nous détaillerons les points suivants :

Par rapport à l'énoncé du problème

(i) Nous identifions les données traduites en langage symbolique au démarrage et dans ce cas, en le registre dans lequel elles sont formulées, c'est-à-dire, symbolique géométrique, numérique ou vectoriel ;

(ii) Nous signalons aussi le traitement accordé à la question au démarrage : a-t-elle été traduite ? Et si oui, dans quel registre ?

Nous voulons vérifier dans quelle mesure l'étudiant est guidé par la question, c'est pourquoi nous voulons expliciter son traitement au démarrage pour, ensuite, trouver des indices du rôle de cette traduction dans la résolution du problème.

[14] Rappelons qu'il s'agit du même exercice proposé aux élèves de la Première S, lycée Pierre du Terrail.

Par rapport à la (aux) solution(s) du problème fournie(s) par les étudiants

(iii) Nous signalons les outils auxquels ils ont fait appel ;

(iv) Les types d'erreurs commises par eux ;

(v) Concernant les registres de représentation sémiotique utilisés, la notation suivante est utilisée :

SG - quand l'étudiant a écrit en langage symbolique géométrique sans utiliser la notation vectoriel, par exemple : (AB)//(CD) ;

SV - utilisation de la notation vectorielle, par exemple $\overrightarrow{AC}$;

SN - (géométrico-numérico) : quand il s'agit d'une relation de distance ;

disc - utilisation de la langue naturelle pour expliquer un "pas" de la solution.

Notons que dans cette colonne ne sont signalés que les registres utilisés pour la résolution de l'exercice. Il se peut par exemple que sur la copie de l'élève la notation vectorielle apparaisse mais que le registre vectoriel ne soit pas signalé dans cette colonne car la solution proposée par l'élève ne contient pas ce registre.

(vi) Les outils ou définitions et propriétés (erronés ou non) utilisés par les étudiants et qui ne figuraient pas dans notre analyse a priori sont signalés ;

(vii) Pour avoir des indices à propos de l'efficacité de l'outil, nous mettons en évidence les réussites totales ou partielles du problème. Ainsi XA veut dire que l'étudiant a réussi la première partie de l'exercice (montrer que le point E ∈ [AC]) et XB concerne la deuxième partie de l'exercice (montrer que la distance de A à E est égale au tiers de la distance de A à C).

(viii) Finalement, quand la solution fournie par l'étudiant coïncide avec l'une des stratégies de l'analyse a priori, nous le signalons aussi.

EXERCICE N° 1

	ÉNONCÉ			SOLUTION								
Étudiant	Milieu	distance[15]	Question	Châsles	Colinéarité	Gravité	Médianes	Erreurs	Registres	autres/ suggestions	réussite	stratégie
1		SN						coord. points	SG-SN	équation droite (¥) Thalès (B)	XB	
2	SV	SV					X		SV/SG			
3	SV	SV	SV	X					SV			part de $\overrightarrow{AE}$
4	SV	SV	SV	X	X				SV		X	S3'
5		SV		X	X				SV		X	S3'
6	SV	SV	SG/SN					Thalès	SG-SV-SN	Thalès		
7				X				E∈ [AC] + ...	SG-SV	Thalès		
8	SV	SV						prop fausse	SG-SV	diag d'un trapèze se coupent en leur tiers		
9	SV	SV		X					SV		X	part de $\overrightarrow{AC}$
10	SV	SV	SV	X	X				SV		X	part de la question et fait sens inverse
11		SV	SV	X	X				SV		X	
12		SN/SV		X		X			SV-SG		X/X	part de $\overrightarrow{AC}$ + S1
13				X					SV			
14		SV	SV	X				partie géom	SG-SV	réciproque de Thalès E∈ [AC]	XB	$\overrightarrow{IE}=1/3\overrightarrow{ID}$ (dist)
15	SV	SV	SV	¥	X	X			SV(¥) SG		X	S1 avec vecteurs
16		SN	SN			X bar	X		SG		X	S1
17						X bar	X		SG	Thalès (dist)	X	S1 E∈ [AC]
18	SV	SV		¥		X bar	X		SV(¥) SG		XA	S1 E∈ [AC]
19	SV !!!	SV	SV			X bar			SV		X	
20		SV							SV-SG	Thalès mais il faut E∈ [AC]		
Total	10 SV	15SV 3SN	7SV 2SN	12	5	6	4		11SG-17SV-2SN			

¥ - L'étudiant a utilisé l'outil mais "cela ne marche pas", il l'abandonne.

[15] Nous rappelons que nous notons ici, SN si l'étudiant écrit IE=1/3ID ; et SV si l'étudiant écrit $\overrightarrow{IE}=1/3\overrightarrow{ID}$.

4.2.2 - Analyse des résultats obtenus

Parmi les 20 étudiants observés, 17 ont utilisé le registre vectoriel à un moment ou l'autre de l'exercice, et 11 étudiants sur ces 17 ont essayé de trouver une solution vectorielle. Le taux de réussite des étudiants ayant utilisé l'outil vectoriel est de 7 sur 11. Parmi les 5 étudiants qui n'ont fait appel qu'à l'outil géométrique, 3 ont réussi entièrement l'exercice et 2 l'ont réussi partiellement. L'étudiant n°2 a utilisé une notation vectorielle pour les médianes mais nous comptons sa solution comme étant une solution géométrique.

Relativement au changement de point de vue nous comptons 12 étudiants ayant adoptée le pont de vue "alignement". Parmi eux, 10 étudiants ont alors essayé une résolution vectorielle, avec la colinéarité. L'étudiant n°3 a utilisé l'outil vectoriel pour écrire quelques relations vectorielles, mais nous ne l'avons pas classé parmi les 12 décrits ci-dessus car il n'a pas traduit la question et nous n'avons pas de certitude quant au point de vue adopté.

A propos des registres ...

Donnons de façon résumée les traductions faites lors du démarrage.

Données traduites au départ. distance : 17/20 SV - 15/17 SN - 3/17 milieu : 10/20 (SV)	**question** : 9/20 SV - 7/9 SN - 2/9

Tous les étudiants qui ont traduit en registre symbolique la caractérisation du milieu d'un segment, l'ont fait en utilisant le registre vectoriel. Seul l'étudiant 19 a traduit le milieu d'un segment en utilisant la relation du "demi-parallélogramme" : $2\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}$.

L'absence de traduction de la question (au départ) peut signifier l'absence d'un but précis auquel ils peuvent se rapporter à chaque instant de la démonstration. Nous constatons que parmi les 7 étudiants qui ont traduit la question en registre vectoriel, 5 ont réussi l'exercice.

Concernant les résolutions de l'exercice, 11 étudiants sur 20 ont essayé une solution vectorielle, contre 3 étudiants qui n'ont utilisé que le registre géométrique et 6 étudiants qui ont utilisé des notations vectorielles et géométriques. Parmi ses 6 étudiants, 1 a utilisé le registre vectoriel seulement dans la traduction de l'énoncé, 2 ont essayé une solution vectorielle et abandonné ensuite pour tenter une solution géométrique et finalement 3 ont proposé des solutions géométriques avec des notations vectorielles. Deux étudiants parmi les 11 ayant essayé une solution vectorielle ont abandonné cet outil et ont proposé une résolution géométrique. Finalement un étudiant a fourni une solution entièrement rédigée

dans le registre vectoriel et une autre solution entièrement rédigée dans le registre géométrique.

A propos des outils de solution ...

Résumons de façon quantitative les outils mis en œuvre par les étudiants :

Chasles - 12/20 (2 abandons)
Colinéarité vectorielle - 5/20
Gravité/barycentre - 6/20
(2 étudiants l'ont utilisé avec une notation vectorielle)
Médianes - 4/20
Théorème de Thalès - 6/2O

En plus des outils que nous avions signalés dans notre tableau nous observons encore l'utilisation de l'égalité et de la somme vectorielle données dans un parallélogramme.

Égalité vectorielle - 8/20
Somme vectorielle - 2/20

Le calcul vectoriel se présente donc, comme un outil disponible de solution pour ce problème d'appartenance pour 11/20 étudiants. Passons maintenant à l'étude de l'efficacité de cet outil.

Les réussites

Parmi les 20 étudiants, 10 ont réussi l'exercice proposé, dont 7 avec l'outil vectoriel et 3 avec l'outil géométrique. De plus 3 étudiants ont réussi partiellement l'exercice : 1 réussite de la partie B avec les vecteurs, 1 réussite de la partie A et 1 réussite de la partie B avec le registre géométrique. L'étudiant n°12 a fourni deux solutions : une vectorielle et une géométrique. La solution fournie par l'étudiant n° 15 est classée par nous comme une solution géométrique. Pour plus de détails voir :"les non-réussites avec le vectoriel".

Le tableau suivant résume la répartition des étudiants selon le registre utilisé pour la résolution et les réussites au problème, ainsi que le nombre d'erreurs. La typologie adoptée est la suivante : **XA** veut dire réussite de la première partie de la question, et **XB** réussite de la deuxième partie de la question.

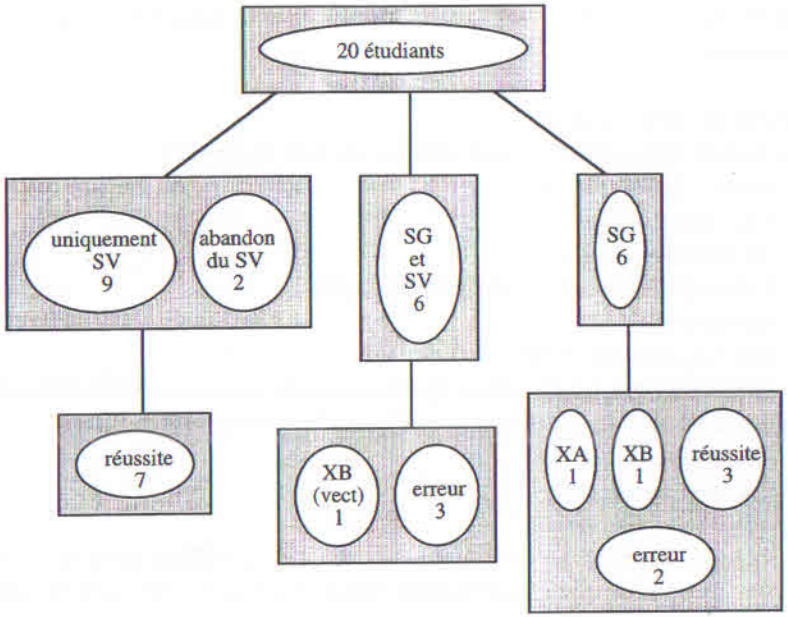


Tableau 3 : Exercice 1 - DEUG

Les erreurs ...

Nous avons constaté 5 erreurs faites par les étudiants et ce par des étudiants qui essayaient une solution géométrique. Aucune erreur dans l'utilisation de l'outil vectoriel n'a été faite.

À propos de l'utilisation de l'outil géométrique classique, les erreurs s'avèrent plutôt du côté conceptuel comme par exemple, l'utilisation dans la résolution du résultat à montrer (à savoir la propriété d'alignement de A, C et E) et utilisation d'une fausse propriété (comme les diagonales d'un trapèze se coupent en leur tiers). Avec l'outil vectoriel, il n'y a pas d'erreurs du type conceptuel, apparemment les étudiants savent énoncer la relation de Chasles, ou la colinéarité par exemple, tandis qu'avec l'outil géométrique classique on trouve des erreurs au niveau des propriétés.

Les échecs avec l'outil vectoriel

Comme 11 étudiants sur 20 ont proposé, à un moment ou l'autre, une solution vectorielle (Chasles et/ou colinéarité) et que seulement 7 ont réussi l'exercice avec ces outils, il est essentiel de vérifier ce qu'ont fait les 4 étudiants qui n'ont pas pu déboucher sur une solution. Pourquoi l'outil vectoriel ne s'est pas montré efficace pour eux ?

Nous rappelons que ce qui suit n'est extrait que des copies des élèves, l'entretien ayant eu lieu après cette phase. Les copies complètes sont fournies dans les annexes du chapitre C.

Étudiant 3 - "Je tourne en rond..." Il a utilisé plusieurs fois la relation de Chasles mais sans succès, il n'est pas guidé par le résultat à obtenir, quoique qu'il a traduit la question.

Étudiant 13 - Cet étudiant écrit sur la copie : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$ et ... c'est tout ! Il n'avait pas traduit la question.

Étudiant 15 - Il commence par écrire une relation de Chasles mais sans succès. Ensuite le rapport 1/3 évoque pour lui le centre de gravité. Il change donc d'outil, et en utilisant le centre de gravité il montre que E∈[AC] et ensuite que $\overrightarrow{AE} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$ (nous ne considérons pas que c'est une solution vectorielle, parce qu'en fait il s'agit d'une traduction vectorielle de la position du centre de gravité).

Étudiant 18 - Il commence par la relation de Chasles. Après quelques calculs il écrit : "mauvaise méthode". Il abandonne cet outil et il utilise alors le centre de gravité pour montrer que A, E et C sont alignés. Il lui manque encore montrer la relation de distance et il revient alors au calcul vectoriel mais sans réussite.

Nous voulons encore citer l'étudiant 14 qui a utilisé le registre géométrique pour la première partie de l'exercice et le registre vectoriel pour la deuxième partie.

Étudiant 14 - Il n'arrive pas a montrer géométriquement que E∈ [AC] ; il montre que $\overrightarrow{AE} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$ mais il croit qu'il faut encore montrer l'appartenance du point E au segment [AC]. Pour lui, la colinéarité des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ n'implique pas que les points A, E et C appartiennent à une même droite. Du moins il ne l'a pas interprété ainsi et nous considérons donc, qu'il s'agit d'un échec dans l'usage du vectoriel, car il a bien réussi a montrer la "bonne" relation vectorielle qu'il fallait mas faute d'une interprétation de cette relation il ne réussi pas son exercice.

4.2.3 - En conclusion ...

Même si chez les étudiants du DEUG, on peut espérer (et on constate) une plus grande maturité en ce qui concerne la méthode de résolution de problèmes (d'une manière générale), et même si le problème que nous leur avons proposé, figure parmi les plus "simples" vu en Seconde, le taux de réussite n'est pas satisfaisant (moitié de la classe réussi l'exercice) et les étudiants manquent toujours d'une méthode sûre qui les amène à une solution.

Si nous faisons une comparaison entre les résultats obtenus en Première S et ceux obtenus en DEUG première année, nous constatons qu'il n'y a pas eu de grandes

différences dans la disponibilité de l'outil vectoriel (17/33 et 11/20 respectivement). La différence se trouve peut-être dans l'analyse du taux de réussite (4/33 et 10/20). C'est encore plus net si nous comparons les taux de réussite de ceux qui ont proposé une résolution vectorielle : 3/13 en Première S contre 7/11 en DEUG.

Une différence que nous pouvons constater entre les étudiants de DEUG et les élèves de Première S, est que, parmi ces derniers, pas un seul n'a explicité le fait de "tourner en rond". Chez les étudiants du DEUG, il semble qu'il y ait une plus grande conscience de que le problème nécessite l'utilisation de la méthode vectorielle. Cela peut être dû d'une part à une plus grande familiarité avec l'outil vectoriel, et d'autre part à l'apprentissage des méthodes que les élèves voient en Première et en Terminale S, par exemple en ce qui concerne l'objectif à poursuivre.

> "Enfin le programme conserve le souci de faire acquérir aux élèves la maîtrise de certains automatismes de calculs, mais on insistera à la fois :
> - sur le choix de la méthode la plus pertinente ;
> - sur le lien entre techniques et but à atteindre." (Programme Première, 1996, p. 36)

Une analyse plus fine des raisons des échecs des étudiants est nécessaire pour pouvoir avancer dans nos hypothèses. Ainsi pour mieux comprendre les raisons des échecs des étudiants, en particulier des cinq étudiants mentionnés ci-dessus, des entretiens ont été menés dans la suite de notre expérimentation.

4.2.3 - Exercice n°2 - résultats obtenus

Comme pour l'exercice n°1, le tableau concernant les résultats obtenus pour le deuxième exercice proposé aux étudiants, est donné. Il indique le registre utilisé pour traduire les données de l'énoncé, les outils de résolution auxquels il a été fait appel ainsi que le registre utilisé. Dans les deux dernières colonnes de ce tableau, sont signalés les étudiants qui ont réussi l'exercice et ceux qui ont utilisé une stratégie fournie dans l'analyse a priori.

	ÉNONCÉ		SOLUTION									
Étudiant	données	I ∈ [KL]	Chasles	Colinéarité	Gravité	Thalès et récipr	Homothétie	Erreurs	Registres	autres/ suggestions	réussite	stratégie
1									gra			
2	SG					X			SG			
3								géom	SG	théor milieux; médiane ; droites parallèles		
4		SV	X	X				$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{MN}$	SV			
5							X		SG		X	S1
6	pro	blè	me	de	cons	truc	tion	para	llèlo	gramme	KL	MN
7	SV	SV	X	X				Chasles	SV			
8									disc/SG			
9						X vect.		Thalès (vect)	SV/SG			
10	SV					X		I ∈ [KO]	SG			
11	SG - SV	SG				X		récipr Thalès	SG-SV		X	S4
12				X		X vect			SG-SV			
13							X		SG		X	S1
14				X		X vect			SV- SG			
15				X		X vect			SV			
16						X			SG			
17						X		I ∈ [KO]	SG			
18						X vect			SV			
19						X		Thalès	SG			
20						¥		prop fausse	SG	bissectrice		
Total	3SV 2SG	2SV 1SG	2	5		12	2		8SV 14SG		3	

Nous utilisons le symbole ¥, quand l'étudiant a utilisé l'outil signalé mais sans succès et il l'abandonne.

4.2.4 - Analyse des résultats obtenus

Parmi les 20 étudiants, 14 ont fait appel au registre géométrique et 8 au registre vectoriel. Aucun étudiant n'a réussi l'exercice avec l'outil vectoriel et seulement 3 l'ont réussi en utilisant l'outil géométrique. Le taux de réussite de cet exercice a été donc très faible. Nous allons analyser les résultats pour essayer de comprendre les raisons des échecs.

Seulement 2 étudiants ont clairement adopté un point de vue "alignement" et ces deux étudiants ont utilisé l'outil vectoriel. Nous avons rencontré des étudiants semblant avoir eux aussi adopté le point de vue "alignement" mais nous n'avons pas assez d'indices pour l'affirmer. Ces derniers ont utilisé le théorème de Thalès sous forme géométrique ou sous forme vectorielle.

A propos des registres ...

Indiquons de façon quantitative les données traduites au démarrage :

Données traduites au départ : 4/20 SV - 3/20 (2 égalité vectorielle du parallélogramme et 1 pour I milieu de [AP]) SN - 2/20 (1 droites parallèles, 1 milieu de [AP]	**question** : 3/20 SV - 2/20 SG - 1/20

Le taux de traductions faites au départ est très faible, ce qui représente une différence importante par rapport au premier exercice. Concernant la solution proposée (ou essai de solution) par les étudiants, le registre vectoriel a été utilisé par 7 d'entre eux contre 14 pour le registre géométrique. Un étudiant (n°11) a utilisé le registre vectoriel lors de la traduction de l'énoncé mais ne l'a pas utilisé pour la solution de l'exercice.

A propos des outils de solution ...

Résumons de façon quantitative les outils mis en œuvre par les étudiants :

Egalité vectorielle - 3/20
La relation de Chasles - 2/20
Colinéarité - 5/20
Barycentre - 0
Thalès - 12/20
- géométrique - 7/20
- vectoriel - 5/20

Homothétie - 2/20

L'outil le plus utilisé est le théorème de Thalès, soit avec une écriture géométrique ou vectorielle. Ceci confirme nos hypothèses élaborées dans l'analyse a priori de cet exercice. Parmi les étudiants qui ont fait appel à la notion de colinéarité de deux vecteurs, 2 ont essayé de trouver une solution utilisant uniquement le calcul vectoriel. Ils n'ont pas réussi l'exercice. Avant de discuter des erreurs faites par les étudiants, faisons une étude sur leurs réussites.

Les réussites

Le taux de réussite pour cet exercice a été assez faible. En effet, seulement 3 étudiants sur 20 l'ont réussi. Les stratégies utilisées par eux sont :

L'homothétie (S1) - 2 étudiants
Thalès et réciproque (S4) - 1 étudiant

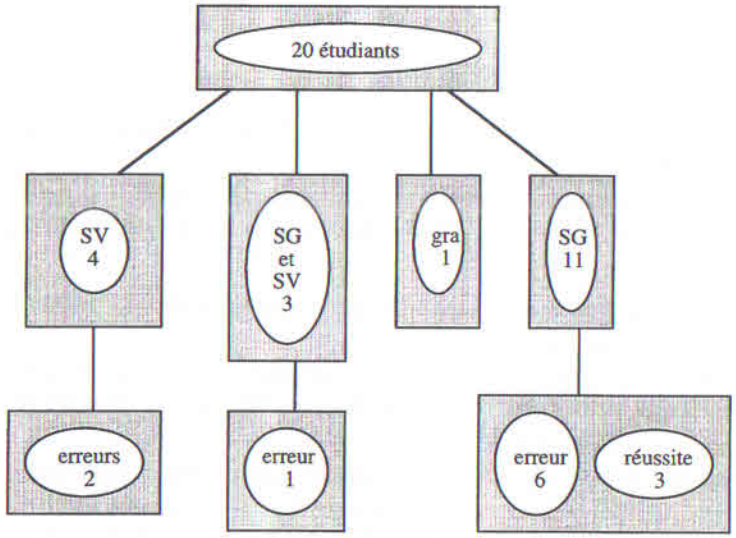


Tableau 4 : Exercice 2 - DEUG

Nous avons classé l'étudiant n°11 dans le registre symbolique géométrique car il n'a utilisé le registre vectoriel qu'une seule fois et ce lors de la traduction de l'énoncé.

Le fort taux d'échec dans cet exercice, est peut-être dû au manque de temps. Nous rappelons qu'il s'agissait du deuxième exercice et que, pendant l'expérimentation, les étudiants ont commencé leur travail par le premier exercice.

Les erreurs ...

Les erreurs faites par les étudiants sont majoritairement dans l'usage de l'outil géométrique : parmi les 9 erreurs rencontrées sur leurs copies, 2 sont vectorielles et 7 géométriques. Les erreurs dans le géométrique sont dues à un usage incorrecte du théorème de Thalès : les étudiants utilisent le fait que le point I appartient à [KO] sans le montrer. Une fois de plus c'est l'évidence perceptive de ce résultat qui fait que les étudiants le

prennent comme vrai avant de le prouver. En effet, une fois que le dessin est fait l'appartenance du point I à la droite (KL) est "évidente" !

Pour cet exercice, un seul étudiant énonce une propriété erronée (la diagonale d'un parallélogramme est aussi une bissectrice). Les erreurs dans l'usage de l'outil vectoriel sont une substitution incorrecte d'une égalité vectorielle et un usage incorrecte de la relation de Chasles.

Les échecs avec l'outil vectoriel

Étudiant 4 - Il fait plusieurs manipulations pour essayer d'arriver à une solution. Il sait qu'il doit arriver à trouver une relation du type $\overrightarrow{KI} = k\ \overrightarrow{IL}$, mais son stratégie ne débouche pas à une solution.

Étudiant 7 - Il applique plusieurs fois la relation de Chasles mais ne débouche pas sur une solution ; il écrit alors sur sa copie : "Je veux montrer qu'en utilisant la relation de Chasles on arrive à $\overrightarrow{KI} = k\ \overrightarrow{IL}$".

Étudiant 9 - Il utilise la forme vectorielle du théorème de Thalès de façon erronée et fait des fautes : il croit être arrivé à une solution.

Étudiant 14 - Elle essaie la forme vectorielle du théorème de Thalès ; elle utilise ensuite les vecteurs mais n'aboutit pas à une solution. Elle écrit : "Je ne sais pas si je suis bien plus avancée". Elle recommence sans succès.

Étudiant 15 - Il utilise la forme vectorielle du théorème de Thalès et semble croire être arrivé à une solution mais sans explication. Il introduit un point I', intersection de (AP) et (KL), utilise plusieurs fois les relations de colinéarité qu'il peut lire sur le dessin et ensuite, il fait des pointillés comme pour indiquer qu'il y a un raisonnement qui continue et conclut que I'=I.

Étudiant 18 - Il commence son exercice avec la forme vectorielle du théorème de Thalès, utilise ensuite la relation de Chasles mais n'aboutit à rien.

Les étudiants 4 et 7 ont essayé une solution avec le calcul vectoriel (la relation de Chasles et la colinéarité) et n'ont pas débouché sur une solution ; les quatre autres étudiants ont utilisé la forme vectorielle du théorème de Thalès et leurs échecs ne sont pas dus à l'usage des vecteurs mais plutôt à la configuration de Thalès.

4.2.5 - En conclusion ...

L'outil vectoriel ne se montre pas vraiment disponible aux étudiants du DEUG pour ce problème, ce qui est assez compréhensible, car la configuration donnée favorise l'utilisation de Thalès.

En examinant ce que font les étudiants qui ont choisi d'utiliser l'outil vectoriel et qui ont échoué, nous constatons que seulement les étudiants n°4 et n°7 ont essayé de résoudre le problème en utilisant la relation de Chasles pour montrer la colinéarité. De plus, ils savaient ce qu'il fallait démontrer, énonçaient correctement les résultats à utiliser mais n'arrivaient pas à trouver une résolution. Autrement dit, il nous semble que nous sommes face au même type de difficulté constatée lors de l'analyse du premier exercice : le manque de méthode permettant d'aboutir à une solution.

Les quatre autres étudiants ont utilisé le théorème de Thalès avec une notation vectorielle et ont commis des erreurs telles que le fait d'utiliser l'alignement des points (qui est une partie de la question posée).

4.3 - Conclusion de la phase A

Le très faible nombre d'étudiants qui ont utilisé le registre vectoriel pour le deuxième exercice, par rapport au premier, est dû, à notre avis, à une influence moindre du contrat didactique. En effet, le premier exercice se présente comme l'un des plus utilisés, surtout en classe de Seconde, pour entraîner les élèves à résoudre des problèmes avec les vecteurs, comme nous l'avons montré dans notre analyse des manuels. Même présenté d'une façon "différente" de celle habituelle, une fois la traduction et les dessins faits, les étudiants ont pu identifié facilement la configuration de l'alignement. Pour le deuxième exercice, une fois le dessin fait, les étudiants ont plutôt identifié perceptiblement la configuration habituelle de Thalès. Notons par ailleurs que certains étudiants voulant montrer l'alignement des trois points avec une notation vectorielle, utilisaient la forme vectorielle du théorème de Thalès, ce qui les a entraîné à faire des erreurs. Ces erreurs sont aussi dues à l'usage lui-même de Thalès car ils utilisent le fait que les trois points sont alignés visuellement. Dans ce cas le dessin a joué de façon "négative" car, le résultat étant évident sur le dessin, les étudiants le prennent comme hypothèse pour résoudre le problème. En conclusion, la différence entre le premier et le deuxième exercice est due non aux propriétés qui sont en jeu, mais surtout au type de configuration. Le contrat est moins fort pour le premier car il existe une influence forte de la configuration de Thalès.

L'hypothèse selon laquelle les étudiants connaissent la relation de Chasles, parfois même savent où ils doivent arriver, mais n'arrivent pas à aboutir à une solution semble être plausible. Le manque d'une méthode sûre, qui amène les étudiants à une solution paraît, être l'explication de cet échec. Ceci est à creuser lors de la phase B de notre dispositif expérimental.

Relativement aux résultats obtenus auprès des élèves de Première S, en DEUG les étudiants semblent savoir un peu mieux utiliser l'outil vectoriel. De plus ils peuvent parfois

identifier la source de leur difficulté. En effet, le problème de "tourner en rond" est explicité par quelques étudiants sur leurs copies. Pendant les entretiens nous essaierons de mieux comprendre les raisons pour lesquels les étudiants tournent en rond et nous voulons aussi voir l'interprétation donnée par les étudiants à ce fait.

4.4 - Phase B - Les entretiens

La deuxième phase de notre dispositif expérimental comporte deux parties :

I - Phase B.1 : production d'un travail écrit, où un exercice était proposé aux élèves

II - Phase B.2 : entretien individuel

D'une part cette phase B complète la première car une fois de plus nous aurons une trace écrite du raisonnement des étudiants avec vérification des données qui sont traduites en vectoriel, et de l'efficacité de l'outil (phase B.1). D'autre part nous allons discuter avec eux (individuellement) et essayer de connaître les raisons des choix faits pour l'exercice donné à classe entière (phase B.2).

4.4.1 - Phase B.1 - Production d'un travail écrit.

Déroulement de la séance :

Les étudiants avaient un exercice à résoudre. Ils travaillaient seuls pendant dix minutes. Ensuite ils ont eu cinq minutes pour communiquer et échanger à propos de la solution (ils sont enregistrés). De nouveau ils travaillaient seuls encore dix minutes pour finir la rédaction de la résolution.

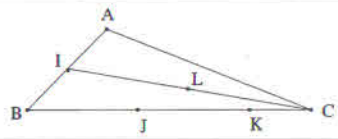
Objectif de cette phase :

Dans la première partie de notre observation, les étudiants travaillaient seuls et ils devaient produire une réponse. Nous voulions repérer comment ils travailleraient avant l'échange, les outils qu'ils utiliseraient et puis les informations qu'ils demanderaient au partenaire et les informations qu'ils considéraient comme importantes de lui dire. Et en particulier, dans le cas où seulement un des deux étudiants a pensé à utiliser l'outil vectoriel, le deuxième étudiant, une fois que l'outil lui est présenté, cet outil se montre-t-il efficace ? Autrement dit, avec la formation d'un binôme nous voulions vérifier encore la disponibilité et l'efficacité de l'outil vectoriel : d'abord, dans la partie avant communication puis après la communication. En résumé, nous voulions donc, analyser ce qu'ils ont produit avant et après la communication ; et la communication elle-même et repérer comment les étudiants argumentent le choix de leur démarche.

Exercice proposé aux étudiants :

L'exercice que nous avons proposé devait permettre plusieurs traductions possibles en registre vectoriel et comporter une question pour laquelle on entraîne les élèves au lycée à utiliser les vecteurs. Nous présentons ci-dessous l'exercice choisi, qui est celui utilisé dans les entretiens en classe de Première S :

Soit ABC un triangle quelconque et I le milieu de [AB]. Soient J et K deux points de [BC], tel que BJ = JK = KC et L le milieu de [IC]. On veut démontrer que les points A, L et K sont alignés.



Le choix de l'exercice et stratégies possible

Les détails du choix de cet exercice ainsi que deux solutions (une géométrique et une vectorielle) dont donnés dans le paragraphe 3.2.4. Nous rappelons qu'au niveau de l'énoncé, cet exercice nous convenait car il permet la traduction en registre vectoriel des principaux résultats qu'on connaît, à savoir : milieu d'un segment, proportionnalités des distances et alignement de points. L'exercice est donc susceptible de favoriser un démarrage dans le registre vectoriel.

Au niveau des solutions, il comporte entre autres, une solution par le calcul vectoriel qui se réduit à l'utilisation de la relation de Chasles et une solution par les configurations avec le théorème des milieux. Au niveau du DEUG nous pouvions aussi penser à une stratégie en utilisant un repère, que nous écrivons ci-dessous :

Considérons le repère $(B ; \vec{BA} ; \vec{BC})$

J(1/3 ; 0) K(2/3 ; 0) C(1 ; 0) I(0 ; 1/2) A(0 ; 1) $\vec{CI}$ (-1 ; 1/2) $\vec{CL}$ (-1/2 ; 1/4)

A partir des coordonnées de $\vec{CL}$ et de C on calcule les coordonnées de L

Alors on a L(1/2 ; 1/4), $\vec{AL}$ (1/2 ; - 3/4) et $\vec{LK}$ (1/6 ; - 1/4)

Et on conclut que $\vec{AL} = 3\,\vec{LK}$ et que les points A, L et K sont alignés.

L'énoncé fourni aux étudiants

Cet exercice est déjà présenté dans un langage qui ne met pas en évidence le vectoriel, ce qui ne nous a pas obligé à faire des changements dans l'énoncé qui est fourni aux étudiants. La question n'a pas été changée et nous voulions voir si les étudiants essayeraient une solution vectorielle. Finalement, l'énoncé fournit aux étudiants est le suivant :

Soit ABC un triangle quelconque et I le milieu de [AB].
Soient J et K deux points de [BC], tel que BJ=JK=KC et L le milieu de [IC].
On veut démontrer que les points A, L et K sont alignés.

4.4.2 - Phase B.1 - Résultats obtenus

Nous donnons d'abord un tableau, en mettant en évidence les registres et les outils utilisés avant et après la communication. Ensuite ces données sont analysées du point de vue de la disponibilité et de l'efficacité de l'outil vectoriel.

Nous avons eu au départ 16 volontaires pour cette phase, qui ont été repartis en 8 binômes ; mais dans deux binômes l'un des étudiants était absent et l'autre étant venu nous avons formé un trinôme. Finalement, nous avons eu 4 binômes et 2 trinômes, ce qui fait un total de 14 étudiants observés.

		Avant communication			Après communication			réussite
Étudiant		RSV	RSG	Outils	RSV	RSG	Outils	
	1		X	triangle ABC		X	repère, coef direct, droites parallèles	X
	2	X	X	repère, coordonées		X	"	X
	3		X	dessin	X		colinéar., Chasles	
	4	X		colinéar., Chasles	X		"	
	5	X		Chasles, "mesure"	X		colinéar., Chasles	
	11	X		colinéar., Chasles	X		"	
	12	X		"	X		"	
	8	X		Chasles	X		Chasles	
	9		X	dessin	X		Chasles, décomp.	
	20		X	dessin	X		"	
	10	X		colinéar., Chasles		X	Thalès, théorème des milieux	X
	15		X	**solution** avec théor. milieux				X
	13		X	dessin	X		colinéar.	
	14	X(2)	X(1)	colinéar., Chasles	X		colinéar.	

Avant la communication avec le pair

Parmi les 14 étudiants observés dans cette phase du dispositif expérimental, 8 ont utilisé le registre symbolique vectoriel (quelque fois mélangé au registre symbolique géométrique), et 7 ont utilisé seulement le registre symbolique géométrique. Un étudiant (n°14) a commencé par utiliser le RSG puis il a rayé ce qu'il avait écrit et a recommencé avec les vecteurs. Dans cette phase seulement un étudiant (n°15) a trouvé une résolution du problème : une résolution par configuration sans aucune utilisation du RSV.

La communication

La communication est plutôt restée au niveau de ce que chacun avait fait ou voulait faire. Il n'y a pas eu de discussion à propos de la fonctionnalité de l'outil choisi, par exemple.

Après la communication

Parmi les 14 étudiants observés dans cette phase, 5 n'ont fait que le dessin avant la communication. Après la communication 4 de ces étudiants ont fait appel à l'outil vectoriel et 1 à l'outil géométrique ; tous les 5 ont fait le changement pour adopter la stratégie de leur partenaire.

Par rapport à la phase antérieure à la communication, 1 seul étudiant a changé le registre dans lequel il cherchait une solution, du RSV au RSG, il s'agit de l'étudiant n°10. Il l'a fait sous l'influence de la discussion avec son camarade qui avait déjà obtenu une solution avec l'outil géométrique (l'étudiant n°15). Après la communication l'étudiant n°10 fournit la même solution que son partenaire car ils n'avaient pas vraiment de stratégie a priori à mettre en oeuvre

L'étudiant n° 2 n'est pas classé comme ayant pratiqué un changement de registres car dans la première phase (avant communication) il a utilisé le registre vectoriel seulement pour désigner le repère qu'il utilisait (et ce avec des erreurs car il a écrit C , $\vec{A}$, $\vec{B}$) mais sa solution ne comportait pas de registre vectoriel. En effet il faisait appel à l'outil géométrique. De même, l'étudiant n°14 est classé par nous comme ayant essayé une solution vectorielle car il a seulement utilisé le registre géométrique pour traduire l'énoncé de l'exercice, ensuite il commence à utiliser la relation de Chasles pour montrer l'alignement des trois points.

L'outil vectoriel a été envisagé après la communication comme un outil possible de solution et a été utilisé par 4 groupes d'étudiants (10 étudiants au total) mais n'a pas abouti.

Au total, 12/14 étudiants ont utilisé les vecteurs à un moment ou à un autre ; 2/14 n'ont jamais fait appel aux vecteurs. Ces 2 étudiants ne travaillaient pas ensemble et ils ont réussi l'exercice (n°1 et n°15).

Les outils de solution ...

repère, coefficient directeur de droite --> 2/14
colinéarité, Chasles --> 10/14
Thalès et théorème des milieux --> 2/14

Les réussites

Réussite totale --> 4/20 (avec le registre symbolique géométrique)
2/20 --> avec repère et coefficient directeur d'une droite
1/20 --> théorème de Thalès et théorème des milieux
1/20 --> théorème des milieux (et théorème de Thalès implicitement)

Le taux de réussite à cet exercice a été très faible, 4 étudiants sur 14, et ces réussites sont associées à des solutions non-vectorielles. Si nous analysons les stratégies adoptées après la phase de communication, nous observons que les quatre étudiants qui ont utilisé l'outil géométrique ont réussi l'exercice et aucun des 10 étudiants ayant choisi l'outil vectoriel n'a réussi. Ci-dessous nous analysons les échecs avec le vectoriel pour essayer de les comprendre, mais avant cela nous donnons un tableau résumé des résultats obtenus :

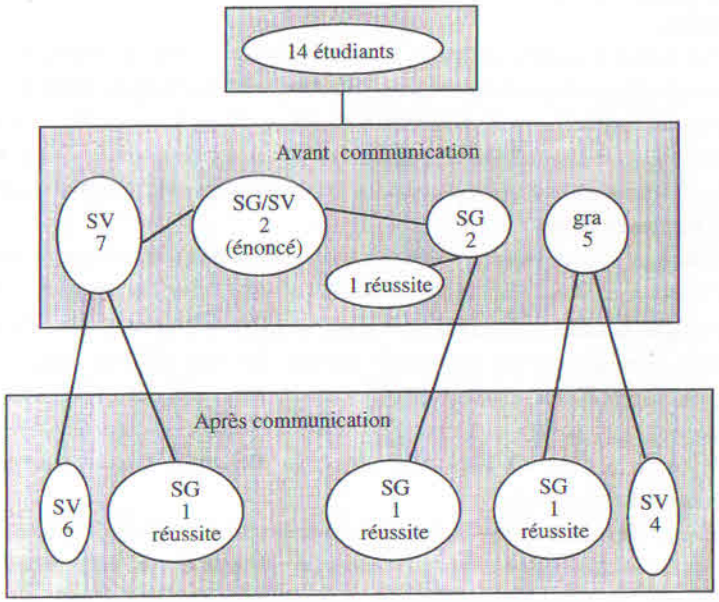


Tableau 5 : Phase B.1 - DEUG

Les impasses avec le vectoriel

Nous présentons surtout les démarches des étudiants qui ont travaillé avec l'outil vectoriel que ce soit avant ou après la communication.

Sautriau (3) - Avant la communication il ne fait qu'un dessin. Après il écrit la relation $\overrightarrow{AL} = x\ \overrightarrow{AK}$, il utilise la relation de Chasles plusieurs fois en cherchant le nombre x qui satisfait l'égalité ci-dessus, mais n'aboutit pas à la solution.

Rebecca (4) - Elle commence avec les vecteurs en traduisant les données et la question en langage vectoriel. Ensuite elle utilise la relation de Chasles mais sans succès.

Après la communication elle continue à essayer d'utiliser la relation de Chasles mais n'aboutit pas à une solution.

Ariane (5) - Elle commence par expliciter la question : "*On veut* $\overrightarrow{AL} = 2/3\ \overrightarrow{AK}$" ; ensuite elle utilise la relation de Chasles, fait des manipulations mais n'aboutit pas à une solution. Elle écrit : "*On écrit la démonstration en partant de la fin (qui est censée être évidente)*"

Joëlle (11) - Elle commence par écrire la relation $\overrightarrow{AL} = 2/3\ \overrightarrow{AK}$, procède à des manipulations de cette écriture , n'arrive pas à une résolution et écrit finalement : "*Je ne trouve pas*".

Véronique (12) - Une fois la question $\overrightarrow{AL} = 2/3\ \overrightarrow{AK}$ explicitée, elle utilise la relation de Chasles à plusieurs reprises, mais n'arrive pas à solution, elle écrit alors : "*Je tourne en rond donc je ne peux pas arriver à une solution*".

Alexandra (8) - Elle fait quelques manipulations avec la relation de Chasles sans rien écrire de plus.

Priscilla (9) - Dans le travail individuel elle ne produit qu'un dessin ; après la communication elle fait plusieurs manipulations avec la relation de Chasles sans arriver à une solution.

Marjorie (20) - Avant la communication elle ne fait qu'un dessin, et après elle fait quelques manipulations avec la relation de Chasles sans aboutir à une solution.

Mélanie (10) - Avant la communication elle commence en registre vectoriel, en partant de $\overrightarrow{AL} = x\ \overrightarrow{AK}$ et elle applique trois fois la relation de Chasles. Après l'échange elle travaille avec l'outil géométrique car son camarade avait déjà trouvé la solution, en utilisant cet outil et il lui a montré sa solution. Finalement elle aussi réussit son exercice par la manière géométrique.

Xavier (13) - Au départ il n'a fait qu'un dessin. Après l'échange il traduit deux données en registre vectoriel sans rien faire d'autre.

Julie (14) - Elle utilise la relation de Chasles trois fois sans succès.

Il nous semble que l'indication de trouver une solution vectorielle est insuffisante pour leur permettre d'aboutir. L'outil vectoriel se montre inefficace, contrairement à la solution géométrique et à la solution par repère. La solution vectorielle indique un usage de la relation de Chasles et de la colinéarité mais la méthode à suivre n'est pas indiquée, tandis que la solution par coefficient directeur contient la méthode.

4.4.3 - Conclusion de la phase B.1

Ce troisième exercice proposé aux étudiants confirme notre hypothèse que, même disponible, l'outil ne se montre pas efficace. Bien que la conclusion à obtenir soit explicitée

en registre vectoriel par certains étudiants, et qu'ils savent où ils doivent arriver, ils utilisent la relation de Chasles sans déboucher.

On pourrait dire que Ariane (5), semble avoir une "méthode" qu'elle explicite sur sa copie et qui consiste à partir de la fin (de la question à montrer) pour arriver à l'hypothèse, mais cette méthode ne s'est pas avérée efficace pour elle car elle n'aboutit pas une solution.

Comme nous avons montré dans le chapitre B2, la notion de base représente un vide didactique (Bronner, 1997) dans l'enseignement secondaire. Elle est introduite de la façon suivante : "deux vecteurs non-colinéaires forment une base", mais nous constatons un manque de méthode de décomposition d'un vecteur dans une base. C'est le manque de cette méthode, de savoir que tout vecteur peut être écrit comme combinaison linéaire de deux vecteurs non-colinéaires qui pourrait fournir une méthode sûre de résolution des problèmes avec les vecteurs et la relation de Chasles. Après avoir étudié les résolutions fournies par les élèves (étudiants), et en particulier les échecs dans l'outil vectoriel nous pouvons avancer qu'il nous semble qu'un travail fait autour de cette notion pourrait éviter plusieurs substitutions que les élèves font sans savoir exactement où ils veulent arriver. Nous reviendrons sur ce point après l'entretien mené avec les étudiants.

Finalement nous pouvons dire que l'outil s'est montré disponible pour des problèmes d'alignement standard, car la plupart des étudiants y ont fait appel, mais ne s'est pas montré efficace.

4.5 - Phase B.2 - entretien individuel

Pour cette phase de notre dispositif expérimental, nous avons disposé d'environ 15 à 20 minutes pour interviewer chaque étudiant qui s'est porté volontaire. L'entretien portait sur la résolution fourni par l'étudiant à l'exercice n°1 de la première phase de l'expérimentation. Nos questions posées suivaient le même fil conducteur que celui explicité dans l'expérimentation réalisée en classe de Première S.

4.5.1 - Déroulement de l'entretien

Nous nous sommes inspirée du travail de Coppé (1993) sur les composantes privées et publics du travail de l'élève en situation de devoir surveillé. Les questions que nous avons posées étaient du type suivant :

"Je veux comprendre les pas que tu as fait...comment tu as obtenu ceci ....et alors....cette égalité tu l'as tirée d'où...???? Qu'est-ce qui n'a pas marché ?..."

Les questions posées aux étudiants étaient guidées par la résolution qu'ils avaient fournie à l'exercice 1, phase A du dispositif expérimental. Les points principaux devaient être : ne pas demander "pourquoi" et ne pas porter de jugement.

Les entretiens ont eu lieu avec les 14 étudiants. Des extraits de chaque interview sont donnés suivis d'une brève analyse.

Rebecca (4) : Des problèmes de magnétoscope nous obligent à n'utiliser que les notes écrites prises pendant l'entretien.

Rebecca dit qu'elle cherchait à vérifier l'égalité $\overrightarrow{AE} = k\ \overrightarrow{AC}$ (elle a réussi sa copie avec les vecteurs). Elle a commencé par l'addition vectorielle $\overrightarrow{AE} = 1/2\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IE}$; ensuite elle fait des décompositions (Chasles) jusqu'à ce qu'elle obtienne $\overrightarrow{AE} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$. "*comme ils sont colinéaires, les points sont alignés*".

Commentaire : Elle fait plusieurs manipulations avec la relation de Chasles et finalement réussi l'exercice. Nous notons qu'elle est guidée par le résultat à montrer : il faut montrer que les vecteurs sont colinéaires, et il paraît qu'elle essaie d'écrire $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$.

Sautriau (3) :

"[...] en fait $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ils étaient colinéaires...quoi...il y avait un coefficient entre les deux. Et j'ai un peu tourné en rond...."

Qu'est-ce que veut dire "tu as tourné en rond" ?

"Bah, ça veut dire que, en fait, je suis parti d'une égalité, $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AE}$, pour arriver à une autre ($\overrightarrow{AE} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$) et j'arrivais toujours à la même égalité ou pas à quelque chose qui se simplifiait facilement et du coup j'arrivais pas à conclure ..."

Commentaire : Sautriau n'a pas réussi l'exercice : il a utilisé la relation de Chasles plusieurs fois sans arriver à une relation entre le vecteur $\overrightarrow{AE}$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$. Il a écrit "*l'idée est d'utiliser les vecteurs je pense*", pour finalement conclure qu'il tournait en rond.

Julie (14) :

"Donc, la question c'était montrer que le point E appartient au segment [AC]....mais...donc, ça c'est ce qu'on veut montrer mais...pour pouvoir utiliser les vecteurs il faut d'abord que je montre que E est sur la droite (AC)[16]."

16 C'est nous qui soulignons.

"[...] Bon le plus dur avec les vecteurs c'est trouver un départ, par où partir...mais euh...donc, l'égalité en fait c'est par le dessin."

Commentaire : D'après ce que Julie avait écrit sur sa copie, pour parler de colinéarité de vecteurs, il faut d'abord montrer l'alignement des trois points, autrement dit, pour elle la colinéarité ne veut pas dire nécessairement alignement : elle a donc séparé son problème en deux parties : la première qu'elle comptait faire par Thalès, mais elle n'y arrive pas ; la deuxième où elle utilise les vecteurs.

Xavier (13) :

"Bah, il faut essayer de démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est égale à 1/3 de $\overrightarrow{AC}$. Enfin, il faut montrer que les deux vecteurs sont colinéaires."

"[...] mais je sais pas du tout comment partir donc j'essaye n'importe comment quoi et...des fois ça marche et des fois ça marche pas, il faut essayer d'autres choses".

Commentaire : Xavier connaît la relation qu'il faut montrer , il la traduit par la colinéarité vectorielle. Son problème est d'y arriver : sa méthode à lui est d'essayer "*n'importe comment*", et il sait que cela peut marcher ou non. Dans son discours il est clair qu'il manque d'une méthode à suivre qui donne la certitude d'arriver à une solution.

Jean-Christophe (1) : Il a essayé de montrer que l'alignement des trois points en utilisant les coordonnées (droites parallèles) mais il n'a pas abouti, ensuite avec le théorème de Thalès il réussit la partie B de l'exercice.

"Je cherchais un repère dans lequel faudrait avoir facilement les coordonnées des ponts et ensuite j'ai voulu calculer les coefficients de droites pour montrer que ces trois points étaient alignés ..."

Commentaire : Jean-Christophe a tenté une solution géométrique, divisée en deux parties ; avec les coordonnées il a fait quelques erreurs et n'arrive pas à montrer l'alignement des points et il réussi la deuxième partie de l'exercice. En aucun moment il n'a pensé à utiliser le registre vectoriel.

Jérôme (2) :

"J'ai simplement, avec les données de l'énoncé, j'ai essayé de déduire le plus de choses quoi... surtout de la figure. C'est un peu partir dans tous les sens parce que j'arrivais pas vraiment à,..voir par quel chemin passer pour montrer que E appartient à [AC]".

Commentaire : Jérôme a utilisé le registre vectoriel pour traduire quelques données de l'exercice, et il a ensuite essayé de résoudre en utilisant les médianes : il n'a pas eu de réussite.

Alexandra (8) : Elle a utilisé une propriété géométrique erronée (dans un trapèze les diagonales sont coupées en leur tiers).

Commentaire : Alexandra a utilisé le registre vectoriel mais il s'agit d'une solution géométrique : elle ne réussit pas son exercice et énonce une fausse propriété géométrique.

Priscilla (9) :

"Bon, d'abord j'ai pris toutes les données...alors j'ai écrit...euh....au fur et à mesure que je les utilisais, j'ai écrit les données. Et...ensuite...euh...j'ai voulu voir ce qu'on pouvait faire avec ces données. J'ai commencé avec...en pensant que ce qu'il fallait montrer c'est que...c'est quelque chose avec A et C en faisant intervenir E dedans...Alors j'ai pris le vecteur $\overrightarrow{AC}$, j'ai fait intervenir E selon la relation de Chasles, j'ai continué et..."

Commentaire : Priscilla sait qu'il faut faire intervenir le point E, alors elle a utilisé Chasles plusieurs fois et elle réussit l'exercice. Mais ce qui attire notre attention est que même si elle sait quel point il faut faire intervenir elle aussi cherche un peu au hasard la solution car ça ne suffit pas de savoir quel point il faut faire intervenir. La seule méthode dont elle dispose est introduire E dans $\overrightarrow{AC}$, ce qu'elle fait très tôt, dans la première manipulation avec la relation de Chasles, et après 9 autres manipulations elle aboutit à la solution.

Marjorie (20) : Elle a essayé une solution géométrique.

"[...] ça m'a fait penser à Thalès du fait qu'il y avait des droites parallèles et ... la plupart du temps dans un exercice de géométrie quand je vois des droites parallèles j'y pense quoi."

Commentaire : Marjorie a utilisé le registre vectoriel pour traduire la donnée sur la distance du point I au point E et le registre géométrique pour le parallélisme entre les droites (AI) et (DC). Au niveau de la résolution, elle pensait résoudre le problème par Thalès mais elle écrit sur sa feuille qu'il fallait pour cela considérer le fait que E appartenait à (AC). Pendant l'entretien elle a expliqué qu'elle savait qu'il fallait montrer d'abord l'appartenance pour ensuite utilise Thalès et elle n'avait pas d'idée de comment le faire. Elle n'a pas songé à utiliser l'outil vectoriel, même si elle avait utilisé ce registre lors de la traduction d'une donnée du problème. Pendant l'entretien l'intervenant lui demande comment elle peut montrer que trois points sont alignés (puisque c'est ce qu'il lui manquait dans son exercice) et Marjorie réponds : "Eh, bah, par les vecteurs ..." Mais dans sa copie elle n'a pas pensé à les utiliser.

Ariane (5) :

"Bah, j'ai déjà regardé les relations entre les vecteurs qu'on avait dans l'énoncé, et après, avec des relations de Chasles et en utilisant ces relations j'ai transformé pour arriver à ce que...ce que je voulais."

"[...] Et puis...je suis tombée sur le résultat un peu au hasard, quand même."

Commentaire : Pour Ariane, la méthode du type "je sais où je veux arriver, et j'utilise la relation de Chasles pour cela", a bien marché, mais ce n'est pas une méthode qui donne la solution de façon sûre.

Joëlle (11) :

"Eh bah, on m'a toujours dit que pour que trois points soient alignés, il faut que les vecteurs soient colinéaires, donc....j'ai fait $\overrightarrow{AE} = k\ \overrightarrow{AC}$. Eh...puis après j'ai essayé de faire..."

"[...] Après j'ai pris la relation de Chasles. Je suis partie d'un vecteur....pour essayer de trouver ça...sinon on peut partir de ça et essayer de trouver la fin..."

Commentaire : Joëlle utilise la relation de à Chasles plusieurs reprises pour obtenir la relation qu'elle cherche (la colinéarité). Elle a fait 17 pas pour résoudre le problème. Sur sa copie elle a écrit : "on fait tout avec la relation de Chasles"

Véronique (12) : Véronique a proposé deux solutions, toutes les deux correctes. Une solution vectorielle avec la relation de Chasles en partant du vecteur $\overrightarrow{AC}$ et une solution géométrique en utilisant le centre de gravité d'un triangle. Nous nous intéressons ici à voir ce qu'elle dit de sa solution vectorielle.

"Je suis partie dans les vecteurs..."

Intervenant : "Tu es partie des vecteurs ... Tu as écrit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$ ..."

"Puis après j'ai décomposé de façon à trouver euh...ce que je voudrais quoi..."

Commentaire : Sa solution vectorielle est très claire : il semble qu'elle sait où elle veut arriver. Sa solution vectorielle comporte 9 pas.

Mélanie (10) :

"Bah je suis partie de la fin... du résultat qu'on devait obtenir, c'est-à-dire $\overrightarrow{AE} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$. Parce que sinon je m'embrouille dans les vecteurs et comme ça...j'ai essayé de remonter à mon hypothèse, donc j'ai introduit les lettres dont j'avais besoin pour mon hypothèse...voilà...mais j'aurais pu faire autrement."

"[...] J'ai pensé que, dans les vecteurs, tout de suite je m'embrouillais donc qu'il fallait que je parte de la fin..."

Commentaire : Mélanie est persuadée d'avoir une "méthode" qui marche : elle part de la fin, elle fait des calculs corrects et arrive à l'une des hypothèses. Alors elle conclut qu'il suffit de lire la démonstration dans le sens inverse et on arrive à l'égalité recherchée.

Marc (15) :

"Je voulais partir avec des égalités de vecteurs et puis essayer d'arriver au résultat... à $\overrightarrow{AE} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$. Mais je voyais que j'arrive pas au bout d'un moment..."

"Bah, je crois que j'ai tourné en rond, il me semblait que je tournais en rond...mais je ne suis pas très à l'aise non plus là dedans, quoi...dans les vecteurs, introduire des points avec la relation de Chasles et tout ça...j'aime pas trop...après je suis partie avec une autre idée...Alors je remarque qu'on demande un tiers de la distance...et comme j'ai marqué là, ça me fait penser au centre de gravité d'un triangle...eh....voilà..."

Commentaire : Après avoir abandonné le calcul vectoriel il a réussi son exercice en utilisant le centre de gravité avec une notation vectorielle.

4.5.2 - Analyse des entretiens

Rappelons que l'entretien avec les étudiants a été centré sur la discussion de la résolution fournie à l'exercice proposé à la classe entière dans la phase A. L'objectif de cette partie était d'analyser la composante privée du travail des étudiants, ce qu'ils n'ont pas écrit. Nous cherchions à mieux comprendre les raisons de leurs choix et de leurs échecs.

Tout d'abord nous pouvons constater qu'il y a une reconnaissance générale de la difficulté à travailler avec les vecteurs : même s'ils ont un but à poursuivre, les étudiants n'ont pas de méthode pour l'atteindre. La difficulté repose sur le fait qu'ils ne savent pas quel point ils doivent faire intervenir dans la relation de Chasles pour obtenir le résultat cherché. Dans le cas d'Ariane (5), sa conclusion est frappante : "*...je suis tombée sur le résultat un peu au hasard ...*". Autrement dit, elle avait un objectif, elle utilise plusieurs fois la relation de Chasles et ... elle arrive à la fin. En fait, il est clair pour elle que la méthode n'est pas sûre ; il peut arriver qu'on ne débouche pas sur la solution. Cela nous conduit à confirmer notre hypothèse selon laquelle la difficulté des étudiants provient d'un manque de méthode disponible.

L'analyse des données expérimentales nous permet ainsi de conclure que les étudiants connaissent la relation de Chasles, savent l'énoncer, savent ce qu'il faut montrer (la colinéarité), mais il ne savent pas comment faire pour arriver à montrer le résultat recherché. Il semblerait bien qu'ils n'ont pas de méthodes fiable à leur disposition. C'est justement sur le manque de méthode que nous voulons centrer notre attention, en démarrant avec une recherche menée par Vogel (1994).

La méthode (ou le manque de méthode)

> "La première difficulté de l'activité de démonstration est la compréhension du contrat, de la règle du jeu. [...] Ensuite, le problème essentiel est d'imaginer une stratégie a priori, de la tester et de la modifier jusqu'à ce qu'elle réussisse" (Vogel, 1994, p. 83).

Vogel fait l'hypothèse que la réussite d'un élève dépend fortement de son anticipation d'une stratégie. Elle a analysé quelques exercices résolus des manuels de Seconde pour comprendre la "méthode" proposée par les auteurs de manuel ; pour cela elle a choisi l'outil vectoriel et plus particulièrement la relation de Chasles. Vogel affirme le besoin d'une méthode pour utiliser avec succès la relation de Chasles et constate le manque de méthode à ce propos dans les manuels.

Pour essayer de faire progresser les élèves, Vogel a alors élaboré trois fiches qu'elle a proposé à ses élèves où elle leur fait travailler la relation de Chasles dans des démonstrations. Le plan proposé par l'auteur consiste essentiellement à : démarrer par l'analyse du dessin, mettre en couleur les vecteurs de la configuration, appliquer la relation de Chasles pour exprimer les vecteurs que l'on cherche à montrer une colinéarité. Si après ces pas, on n'aboutit pas à une solution, on doit choisir une paire de vecteurs non-colinéaires et décomposer les deux vecteurs de la question en fonction de cette paire de vecteurs (en fait une base). Ainsi la méthode proposée par Vogel, dans le cas où l'on n'est pas arrivé à une solution, consiste à faire des décompositions dans une base. Mais il faut noter que cela n'est pas un objectif à poursuivre à partir du début de la résolution de l'exercice et que cela n'est pas non plus explicite.

De toutes manières la proposition faite par Vogel vient confirmer notre hypothèse sur l'importance du travail sur la notion de décomposition dans une base en tant qu'un outil à l'intérieur de l'outil vectoriel pour résoudre un problème. Avec cette notion nous pouvons trouver plus facilement une résolution aux exercices proposés. Citons l'exemple du premier exercice proposé lors de notre expérimentation en Première S et DEUG[17]. Ci-dessous une solution possible à cet exercice :

Il faut montrer que $\overrightarrow{AE} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$;
Comme tout vecteur du plan peut être écrit comme une combinaison linéaire de deux vecteurs quelconques du plan, non-colinéaires, et comme on a

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$,

je sais que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, que $\overrightarrow{AB} = 2\ \overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}$ alors il faut décomposer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{IE}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\ \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} = 3\ \overrightarrow{AI} + 3\ \overrightarrow{IE} = 3\ (\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IE})$

Et nous arrivons à $\overrightarrow{AE} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$.

[17] Rappelons l'énoncé de cet exercice :
Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E un point situé sur le segment [ID] de telle façon que la distance du point I au point E soit égale au tiers de la distance du point I au point D. Montrer que le point E appartient au segment [AC] et que la distance de A à E est égale au tiers de la distance de A à C.

Cette solution nous paraît plus claire par rapport au but à poursuivre. En effet, on sait qu'il faut arriver à écrire les deux vecteurs en fonction d'une même paire de vecteurs et, le plus important, on sait que cela est tout à fait possible. Notre analyse a priori de cet exercice donne plusieurs solutions possibles autour de la décomposition dans une base. Il est vrai que pour cet exemple nous n'avons pas choisi deux vecteurs quelconques pour décomposer $\overrightarrow{AC}$, ce choix a été fait en fonction des données du problème, ce qui peut paraître un peu magique pour les élèves et poser des problèmes face à d'autres exercices à résoudre. Mais ce qui est important dans cette méthode est le fait de savoir que même si on choisit une autre paire des vecteurs, on aboutit à une solution car il est toujours possible de décomposer un vecteur en fonction de deux autres non-colinéaires.

Il nous semble donc que pour avoir une méthode qui "marche", il est nécessaire de savoir (que l'on peut) écrire n'importe quel vecteur du plan en fonction de deux autres vecteurs non-colinéaires et non-nuls. Cependant, cela ne fait pas partie des objets à enseigner dans le secondaire. La base n'est présentée que pour parler de repère, et est ensuite oubliée ; la décomposition dans une base ne fait pas partie des objets à enseigner. Notre question est alors la suivante : puisque ce qu'on veut est résoudre des problèmes de géométrie par le biais du calcul vectoriel, et cela par la relation de Chasles qui représente, en fait, la décomposition, pourquoi ne pas parler de décomposition dans l'enseignement secondaire ? Il nous semble que la réponse peut se trouver dans l'intention explicitée dans les programmes de ne pas faire de l'axiomatique des espaces vectoriels dans l'enseignement secondaire. En effet, la notion de décomposition dans une base relève des notions de combinaison linéaire et d'ensemble générateur. Autrement dit, pour ne pas trop impliquer la théorie des espaces vectoriels dans l'enseignement secondaire, on ne présente pas la notion de décomposition dans une base. Cela représente un paradoxe de l'enseignement car nous avons montré qu'il s'agit d'une notion clé pour que les élèves s'approprient une méthode efficace pour la résolution des problèmes de géométrie.

5 - Conclusion du chapitre

Les analyses des données des expérimentations de Première S et de DEUG section scientifique première année avaient pour objectif de répondre à la question suivante :

> Pour un problème de géométrie énoncé dans le cadre géométrique, sans utiliser le registre vectoriel, dont les vecteurs fournissent une solution (optimale ou non), l'élève va-t-il faire appel aux vecteurs ? Et si oui, le fait-il de façon efficace ?

Si la question posée mentionne explicitement l'alignement de trois points, une traduction en registre symbolique vectoriel sera faite par la majorité des élèves ou étudiants. Cela se justifie par les habitudes de l'enseignement secondaire. En revanche si le problème s'éloigne un peu de la formulation traditionnelle, la baisse des traductions en registre vectoriel est considérable.

Nous avons élaboré une liste de traductions possibles qu'on attend des élèves en fin de Seconde (cf. chapitre B2). Nos expérimentations montrent que les élèves sont capables de faire des traduction attendues mais que le fait de savoir faire une traduction n'implique pas la disponibilité de l'outil vectoriel, c'est-à-dire l'entrée par l'élève dans la manipulation et traitement des relations vectorielles (même si cela ne conduit pas à la réussite). Une traduction d'emblée de l'énoncé peut être due à l'usage dans l'enseignement sans pour autant vouloir dire qu'ils pensent à l'utiliser. En reprenant le terme de conversion (Duval), nous pouvons conclure que les élèves de Première S et de DEUG sont capables d'effectuer quelques conversions entre le registre géométrique et le registre vectoriel mais cela ne signifie pas pour autant que l'outil vectoriel soit véritablement **disponible** pour eux.

Nous avons aussi montré que certains élèves pratiquent un changement de point de vue (du point de vue appartenance au point de vue alignement), qui implique un changement de registre, qui, a son tour, induit une résolution de l'exercice dans la géométrie vectorielle, donc un changement de cadres. Ceci peut être représenté par le schéma suivant :

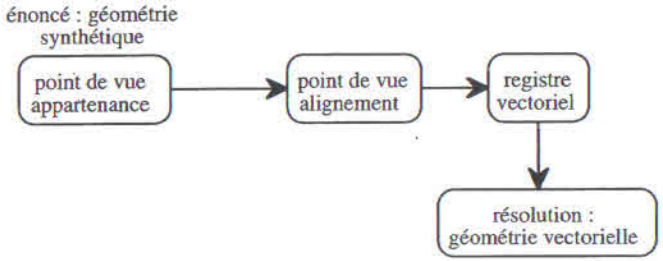


Schéma 2

Ces changements ont pu être favorisés, d'une part parce que la question était posée en termes d'un problème d'appartenance et aussi de proportion de distance, ce qui l'approche d'un problème d'alignement, et d'autre part parce que la configuration donnée ne favorisait pas l'utilisation d'un autre outil, comme c'était le cas quand nous avons proposé un exercice où la configuration de Thalès paraissait sauter aux yeux. Autrement dit, nous pouvons dire que sous certaines conditions les élèves peuvent pratiquer des changements de points de vue, de registres et même de cadres.

Parmi les élèves ou étudiants qui font appel à l'outil vectoriel, nous ne pouvons pas affirmer que celui-ci se présente d'une façon efficace. En effet, nous rappelons qu'en classe de Première S, 4 élèves sur les 14 ayant choisi l'outil vectoriel ont réussi l'exercice ; en DEUG la proportion augmente mais n'est pas encore suffisante pour affirmer que l'outil se montre efficace car 6 étudiants sur les 11 ayant choisi l'outil vectoriel ont réussi l'exercice.

Ainsi, concernant l'**efficacité** de l'utilisation de l'outil vectoriel, nous avons montré que la majorité des élèves et étudiants observés ont une importante difficulté à utiliser l'outil vectoriel de façon efficace. Cette difficulté n'est pas due à l'incertitude à propos du résultat à obtenir. Pour un grand nombre d'entre eux, ils savent ce qu'il faut faire mais ils se "perdent" dans les substitutions pendant la résolution.

Nous nous sommes ainsi intéressée à étudier de plus près ces difficultés des élèves et après l'analyse détaillée des exercices résolus par les élèves (et étudiants) et les interviews, nous pouvons conclure que la difficulté réside plutôt dans l'absence dans l'enseignement du résultat selon lequel tout vecteur du plan peut être décomposé en une combinaison de deux vecteurs quelconques non-colinéaires et non-nuls du plan. Ainsi une difficulté des élèves, qui peut être naïvement interprétée comme une difficulté de manipulation de la relation de Chasles, relève en fait d'une difficulté autour de l'absence d'une connaissance importante qui garantit une réussite. Nous interprétons cela comme un paradoxe de l'enseignement : des problèmes sont proposés aux élèves et pour mener à bien leur résolution il faut décomposer les vecteurs en deux vecteurs non-colinéaires ; mais la notion de décomposition ne fait pas partie des objets d'enseignement. Certes, dans les programmes et manuels, on peut trouver une note sur ce qu'est qu'une base mais ce n'est qu'une définition et aucun travail systématique n'est fait là dessus.

Dans le chapitre B2 nous avons montré que l'enseignement des vecteurs dans le secondaire a pour objectif de fournir un outil pour étudier des problèmes de configuration et que, avec l'introduction de la notion de vecteurs, quatre "géométries" coexistent en classe de Seconde. L'expérimentation menée dans ce chapitre nous a permis de montrer que les élèves peuvent effectuer des changements de registres, de changements de point de vue et de changements de cadres sans pour autant réussir l'exercice.

L'analyse de manuels a encore permis de montrer que les principaux résultats à utiliser pour résoudre les exercices proposés sont : l'égalité vectorielle, l'addition vectorielle (règle du parallélogramme et la relation de Chasles) et le produit par un réel. Et nous avons montré, dans ce chapitre C, que la difficulté majeure des élèves (étudiants) à réussir un exercice en utilisant l'outil vectoriel, concerne la relation de Chasles car cette relation relève directement de la notion de décomposition dans une base, notion absente de l'enseignement secondaire.

Nous avons alors pu conclure que les causes de la non réussite chez les élèves ayant choisi de travailler à l'intérieur du cadre géométrique vectoriel réside dans le manque de la notion de décomposition dans une base.

Rappelons encore que nous avons pu montrer que les erreurs faites dans l'usage de l'outil vectoriel sont beaucoup moins significatives que celles faite dans l'usage de l'outil géométrique, où les élèves vont même jusqu'à énoncer des propriétés erronées.

CHAPITRE D

LES VECTEURS EN TANT QU'OBJET : UNE EXPÉRIENCE EN CLASSE DE SECONDE

Dans les chapitres précédents nous avons montré, d'une part que les vecteurs sont présents dans l'enseignement essentiellement dans leur fonction d'outil pour résoudre des problèmes de géométrie (cf. chapitres B1 et B2) et, d'autre part que cet outil ne se montre pas efficace chez les élèves quand ils sont confrontés à un problème à résoudre (cf. chapitre C).

L'objectif central dans ce chapitre est l'étude du vecteur en tant qu'objet et des difficultés des élèves dans l'apprentissage de cette notion. Pour étudier ces difficultés, nous avons élaboré une liste de théorèmes-en-acte (Vergnaud, 1990a) à partir de notre analyse des manuels et d'une pré-expérimentation. Leur présence et leur résistance chez les élèves sont analysées.

Pour cela nous discutons et étudions l'utilisation d'un nouvel instrument pour l'enseignement des vecteurs dans une classe de Seconde : le logiciel Cabri-géomètre II qui permet, entre autres, de travailler, davantage qu'en papier crayon, l'aspect objet du vecteur, ce qui favorise l'étude des difficultés des élèves dans l'apprentissage de la notion de vecteur.

INTRODUCTION

Dans un enseignement habituel, l'étude des vecteurs en tant qu'objet n'a guère de place : on définit un vecteur, ensuite quelques propriétés vectorielles sont énoncées (et non démontrées) et finalement l'attention est centrée sur l'utilisation des vecteurs pour résoudre des problèmes de géométrie, comme nous l'avons montré dans les chapitres B1 et B2. Du côté des élèves, des recherches ont déjà dégagé quelques difficultés relatives en particulier à la définition d'un vecteur et l'égalité vectorielle ; ces difficultés ont été étudiées dans un enseignement ordinaire dans l'environnement papier crayon (cf. chapitre A).

Notre objectif dans cette partie de notre travail est d'approfondir et d'élargir l'étude de ces difficultés et ce dans un milieu constitué autour d'un environnement informatique. Ainsi

nous avons établi deux hypothèses de travail sur lesquelles s'appuie notre étude sur les vecteurs en tant qu'objets, et que nous rappelons ci-dessous :

"**HT2** - L'utilisation d'un environnement informatique satisfaisant certains critères, permet de travailler des aspects objet du vecteur habituellement plus cachés dans l'environnement papier crayon."

"**HT3** - L'utilisation dans l'enseignement d'un environnement informatique satisfaisant certains critères doit permettre de mettre en évidence et d'étudier des invariants construits par les élèves."

Nous avons suivi de près l'élaboration et la mise en place d'un scénario[1] pour l'enseignement des vecteurs en classe de Seconde utilisant le logiciel Cabri-géomètre II, qui est inclus dans la calculatrice TI-92. Le poids accordé à l'aspect objet du vecteur dans la séquence d'enseignement proposée dans le scénario "vecteurs" n'est pas le même que dans un enseignement ordinaire. Nous avons travaillé en concertation avec l'enseignant responsable de l'élaboration et de l'application du scénario "vecteurs", pour suggérer des activités qui favorisaient l'étude des difficultés des élèves sur l'apprentissage de la notion de vecteur et leur dépassement.

A partir de notre analyse des manuels et d'une pré-expérimentation réalisée dans une classe de Seconde, nous formulons une liste d'invariants qui sont mis à l'épreuve et leur résistance est étudiée dans la séquence proposée pour cette Seconde que nous appellerons "Seconde Spéciale".

Avant de détailler la méthodologie de recherche pour mener cette étude, nous rappelons ci-dessous l'hypothèse de recherche mise à l'épreuve dans ce chapitre, ainsi que les deux questions principales auxquelles nous cherchons à répondre :

[1] Le scénario consiste en une séquence d'enseignement sur les vecteurs. Nous donnerons plus de détails dans le paragraphe 3.

• Quels sont effectivement les invariants relatifs aux vecteurs, erronés ou non, que les élèves construisent ?

"HR2 - Les caractéristiques géométriques attachées aux vecteurs contribuent à créer la difficulté rencontrée par les élèves pour construire des invariants qui ne dépendent pas de ces caractéristiques."

• Quelles sont les conditions didactiques susceptibles de déstabiliser un invariant, et de permettre de développer de nouvelles règles d'action en situation, voire construire des nouveaux invariants (adaptables localement peut être globalement) ?

En résumé, du côté de l'enseignement l'objectif du scénario est de fournir une séquence d'enseignement sur les vecteurs en utilisant un nouvel outil, le logiciel Cabri-géomètre II. Du côté de la recherche, nous nous sommes servie du fait que, dans Cabri-géomètre II, on peut travailler davantage qu'en papier crayon l'aspect objet du vecteur, pour étudier les difficultés rencontrées par les élèves dans leur apprentissage.

1 - Méthodologie de recherche

Nous présentons maintenant les étapes de notre travail dans l'observation de cette classe de Seconde, en explicitant à chaque fois nos objectifs de recherche.

I) Pour cerner ce que c'est qu'un vecteur en classe de Seconde, nous adoptons la notion de concept développée par Vergnaud (1990a), en portant l'attention sur les invariants dont on vise l'acquisition par les élèves à ce niveau.

Pour cela nous dégageons de notre analyse des manuels, des types de problèmes que les élèves doivent résoudre et qui relèvent explicitement ou implicitement des notions de classe d'équivalence, d'égalité vectorielle et de représentant d'une classe. Cela nous permettra ensuite de faire notre étude de situations et de lister quelques invariants mathématiquement corrects dont on vise la construction par les élèves (explicitement ou implicitement).

Notre liste d'invariants est enrichie de quelques invariants erronés qui peuvent être construits par les élèves et qui sont issus de notre analyse des manuels et d'une observation antérieure dans une classe de Seconde dont nous donnerons les résultats dans ce chapitre. Ces invariants erronés sont donc des hypothèses que nous cherchons encore à mettre à l'épreuve au cours de la séquence qui sera mise en place.

En résumé, pour dresser la liste d'invariants, nous nous posons principalement les questions suivantes :

i) Quels sont les objectifs d'enseignement attachés aux vecteurs en termes d'invariants ?

ii) Quels invariants les élèves sont-ils susceptibles de construire ?

Cette liste d'invariants nous sert de guide pour la préparation de quelques activités pour la séquence. Nous rappelons qu'ayant eu la possibilité de travailler en concertation avec l'enseignant responsable du scénario et de la classe, nous avons pu proposer quelques activités dont le but était d'analyser la présence de certains invariants chez les élèves.

Nous avons montré dans le chapitre B2, que dans l'enseignement des vecteurs dans le secondaire, les types de problèmes, et par conséquent les invariants opératoires, sont en étroite liaison avec les registres de représentation sémiotiques utilisés. Ainsi nous parlerons de situations et d'invariants en mettant en évidence le "jeu" entre les différents registres utilisés à chaque fois. Nous rappelons que, dans ce travail, pour étudier le système de signifiants nous nous restreindrons à l'ensemble de registres de représentation sémiotique (cf. chapitre A).

II) Présentation de la séquence

Une fois présentés les trois ensembles (situations-problèmes, invariant, signifiant) qui définissent le concept de vecteur en classe de Seconde, nous passons à la description du scénario.

Nous donnons l'objectif du scénario, l'organisation de la classe, les interactions enseignant/chercheur, notre participation en classe et l'objectif de l'enseignant. Les intentions de l'enseignant sont analysées par ce qu'il dit dans le document scénario et par un entretien avec lui.

Finalement nous présentons de façon résumée les objectifs des activités proposées par nous et insérées dans le scénario.

Notre objectif est donc ici de situer le lecteur par rapport au scénario et par rapport au type d'observation menée auprès des élèves.

III) Mise en œuvre de la séquence : étude des invariants dont on vise l'acquisition par les élèves et de ceux que l'on cherche à déstabiliser.

Dans l'analyse de la mise en œuvre de la séquence nous voulons, d'une part, confirmer chez les élèves la présence des invariants qu'ils sont susceptibles de construire et, d'autre part, déstabiliser (ou du moins perturber) des invariants erronés pour tester leur résistance chez les élèves. Le fait de tester la résistance des invariants erronés chez les élèves doit nous aider à modéliser leurs difficultés. Nous pouvons aussi modéliser des variations des invariants que nous avions prévus ainsi que de nouveaux invariants.

En résumé dans l'analyse de la séquence, nous cherchons à répondre aux questions suivantes :

- Quels sont les invariants effectivement construits par les élèves ?

En d'autres termes, quels invariants peut-on repérer dans les conduites des élèves pendant la réalisation de la séquence ? De plus nous testerons la résistance de quelques invariants erronés chez les élèves et proposerons des activités qui favorisent la déstabilisation de ces invariants et la création de nouvelles règles d'action.

- Ces invariants, sont-ils les mêmes que ceux repérés en papier crayon ?

Comme nous avons élaboré une liste basée sur l'enseignement en l'environnement papier crayon, il est naturel de penser qu'un enseignement constitué autour d'un nouvel environnement, en l'occurrence Cabri-géomètre II, fasse apparaître d'autres invariants (ou d'autres formes d'invariants) que nous n'avions pas repérés en papier crayon.

- Comment les changements de registres sont-ils pratiqués par les élèves ? Les élèves sont-ils capables de pratiquer le changement de registres, ou de travailler dans plusieurs registres ? Y a-t-il des résultats qui sont favorisés pour cela ?

Parmi les objectifs d'enseignement (implicites), l'élève doit être capable d'interpréter un même résultat sur des dessins et dans une écriture symbolique (géométrique et vectorielle), et de l'utiliser sur une configuration ou dans la géométrie analytique. Il s'agit de faire des aller-retours entre ce qu'on trouve dans les manuels comme étant de "différents domaines". L'étude des changements de registres n'est pas l'objet central du travail que nous présentons dans ce chapitre, mais les invariants et les types de problèmes étant liés aux registres de représentation sémiotiques, nous pourrons avoir des éléments de réponse à cette question lors de notre expérimentation.

- Quelles sont les attentes de l'enseignant par rapport à l'apprentissage des élèves concernant les vecteurs, avec un nouvel instrument ?

Dans la partie II, décrite ci-dessus nous cherchons à repérer les attentes de l'enseignant par le biais d'un entretien fait avec lui et de ce qui est écrit dans le document scénario. Nous avons ainsi accès à ce que l'enseignant avait l'intention de faire. De plus, dans la mise en œuvre de la séquence, nous essayons d'analyser ce qu'il dit effectivement aux élèves ou ce qu'il met en évidence, par exemple en écrivant au tableau.

IV) État des choses après la séquence

L'étape III accomplie, nous voulons faire une évaluation des connaissances des élèves quelque temps après la réalisation du scénario. Cette évaluation porte toujours sur les invariants repérés avant et pendant la séquence, et nous voulons tester leur résistance chez les élèves. Pour cela des interviews sont menées auprès de quelques élèves pour essayer de répondre aux questions suivantes :

- Quels sont les invariants erronés qui subsistent ? Et quels invariants ont disparu ?

- Y a-t-il des invariants qui une fois acquis servent de structure de contrôle à d'autres invariants ?

Dans le milieu papier crayon l'élève n'a guère de moyen de contrôle de ses actions, et Cabri-géomètre II offre cette possibilité du moins partiellement. Nous voulons donc savoir si l'élève incorpore cette nouvelle donnée et l'utilise pour valider ses réponses, et la question que nous retenons est la suivante :

- Les élèves utilisent-ils Cabri II pour décider de la validité d'une affirmation ou d'un résultat ?

Schéma Résumé de la Méthodologie

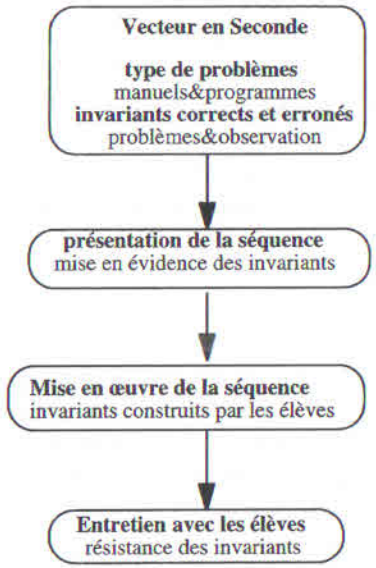


Schéma 1

2 - Etude a priori des situations attachées aux vecteurs en classe de Seconde

Cette étude n'est pas à confondre avec l'analyse des programmes et manuels (chapitres B1 et B2) qui portent sur la transposition didactique. Il s'agit ici :

- d'identifier les différentes tâches mettant en jeu des vecteurs, que des élèves de Seconde doivent être capables de réaliser ;

- et de se donner des éléments d'analyse de tâches en termes de compétences du sujet, c'est-à-dire en termes de situations, d'invariants et de signifiants. (Vergnaud, 1994)

2.1 - Ensemble de situations

Selon Vergnaud (1990b) "le savoir se forme à partir de problèmes à résoudre, c'est-à-dire de situations à maîtriser. [...] Par "problème" il faut entendre, dans le sens large que lui donne le psychologue, toute situation dans laquelle il faut découvrir des relations, développer des activités d'exploration, d'hypothèse et de vérification, pour produire une solution" (p. 52) D'où l'importance pour le didacticien de procéder à une étude la plus exhaustive possible des situations qui peuvent contribuer à donner du sens à un concept.

Dans le cadre de ce travail, nous centrons cette étude sur l'aspect objet du vecteur. Notre objectif est d'étudier les difficultés des élèves dans l'apprentissage de vecteur, à partir de l'utilisation d'un nouvel environnement pour l'enseignement des vecteurs, en particulier pour la classe de Seconde. Nous avons donc décidé de restreindre l'étude des situations autour des types de problèmes qu'on cherche à faire faire aux élèves de la classe de Quatrième à celle de Seconde. Cette étude est faite sur la base des manuels les plus répandus de l'enseignement à l'heure actuelle.

Dans l'enseignement des vecteurs en classe de Seconde, on peut distinguer deux grandes catégories d'exercices proposés aux élèves : celle dont l'objectif est d'entraîner les élèves aux notions vectorielles vues dans la partie cours du manuel et celle pour lesquelles le vecteur est un outil de résolution des problèmes de géométrie.

Pour l'étude de situations, nous nous intéressons davantage à étudier la première catégorie d'exercices, centrée sur l'apprentissage de la notion de vecteur en tant qu'objet. Pour la deuxième catégorie, nous étudions ce qui relève de la notion du vecteur en tant qu'objet en laissant de côté son rôle d'outil pour la résolution du problème. Nous nous intéressons à la phase dans laquelle l'élève a déjà décidé d'utiliser le vecteur : une fois qu'il a choisi l'outil de résolution, comment le manie-t-il ? Si un problème d'alignement de trois points est traduit en un problème du calcul vectoriel, que fait-il ensuite ? Sait-il que deux

droites parallèles ont même vecteur directeur, ou qu'un même vecteur peut être le vecteur directeur de tout un faisceau de droites parallèles ?

Ainsi notre attention est centrée sur les définitions et les propriétés qui renvoient à la notion de classe d'équivalence, et cela aussi bien dans la partie cours des manuels que dans les exercices proposés. Il est clair que la notion de classe d'équivalence ne fait partie de cet ensemble de problèmes qu'implicitement, et surtout au travers de la notion d'égalité vectorielle. De même, l'introduction de la notation vectorielle $\vec{u}$ laisse la place à un discours possible de l'enseignant concernant l'idée du vecteur comme un représentant d'une classe.

Nous avons montré dans notre analyse des manuels que dans l'enseignement des vecteurs, il existe un rapport très fort entre les problèmes et les registres de représentation sémiotiques qui sont en jeu lors de la résolution de l'exercice. L'étude décrite dans ce chapitre met en évidence le fait que ce lien existe aussi au niveau des actions qui doivent être engagées par les élèves pour résoudre les problèmes proposés.

Ces considérations faites, et prenant comme point d'appui notre analyse des manuels et des programmes en vigueur, nous passons maintenant à la description et l'analyse des types de problèmes proposés aux élèves. En résumé, dans notre étude la question principale qui nous guide dans cette recherche de problèmes est : quels sont les objectifs (implicites ou explicites) d'enseignement attachés aux vecteurs en termes de propriétés ou en termes d'invariants ? qu'est-ce qui doit être mis en œuvre pour résoudre les problèmes proposés ? quelles actions doivent être engagées par les élèves ?

Avant de démarrer l'étude des situations, nous énonçons un invariant sur lequel se base l'enseignement des vecteurs dans le secondaire.

Un vecteur est défini par direction, sens et longueur.

Cet invariant n'est pas explicité dans les manuels, mais il est sous-jacent aux définitions données. Ainsi dans l'étude qui suit, cet invariant n'apparaît pas de façon explicite mais nous pensons qu'il est sous-jacent aux productions d'élèves dans toutes les activités sur les vecteurs.

Notre étude des situations sera faite autour des quatre axes suivants : identifier ou construire des vecteurs égaux ; effectuer l'addition de deux vecteurs donnés ; effectuer le produit d'un vecteur par un réel et colinéarité de deux vecteurs ; déterminer les coordonnées d'un vecteur.

2.1.1 - Identifier ou construire des vecteurs égaux

Identifier des vecteurs égaux veut dire que dans une configuration donnée, il faut lire des propriétés permettant de conclure à l'égalité vectorielle. En effet, comme nous l'avons montré dans le chapitre B2, la plupart des exercices résolus et proposés dans les manuels

utilisent les vecteurs pour résoudre un problème de configuration : les données sont sur le dessin et on doit d'abord reconnaître sur ce dessin des vecteurs égaux[2].

Les exercices qui demandent de construire des vecteurs égaux ont pour objectif de familiariser les élèves avec la notion d'égalité et ils sont moins nombreux que les exercices d'identification de vecteurs égaux. De plus, les exercices de construction ne demandent pas explicitement d'utiliser la règle et le compas ; nous rappelons que dans la plupart des cas les élèves ont un cahier dont les feuilles sont quadrillées ce qui facilite la construction "au jugé".

Il y a une distinction entre savoir *identifier* deux vecteurs égaux et savoir *construire* un vecteur qui soit égal à un autre. Prenons le cas où l'élève doit construire un représentant d'un vecteur donné. Dans ce cas, l'élève doit d'abord connaître les conditions d'égalité de deux vecteurs puis il doit être capable de construire deux vecteurs égaux. Savoir identifier deux vecteurs comme égaux n'implique pas de savoir effectuer la construction comme nous pourrons le vérifier dans la réalisation du TD n°5. Dans les manuels on demande de construire un représentant d'un vecteur mais il n'est pas précisé s'il s'agit d'une construction au sens strict ou s'il faut juste dessiner en essayant de respecter perceptivement les propriétés à conserver. Cela peut être dû au fait que l'institution (ici les auteurs des manuels) suppose que l'élève sait que pour construire des vecteurs égaux il faut construire des parallélogrammes et cette construction est considérée comme étant déjà acquise par les élèves dans les années précédentes.

Les exercices qui portent exclusivement sur l'égalité vectorielle ne demandent en général pas de construire un représentant du vecteur donné ; ce type de tâche peut apparaître quand les élèves ont à construire l'addition de deux vecteurs donnés comme nous le verrons dans l'item b).

Ces remarques faites, nous passons maintenant à la description des types de situations autour de l'égalité vectorielle. D'après notre analyse de manuels (cf. chapitre B2), nous constatons que l'égalité vectorielle est traitée à plusieurs reprises dans des domaines variés. Commençons par indiquer la façon dont les manuels introduisent l'égalité vectorielle : soit par les propriétés direction-sens-longueur, et en occurrence le parallélogramme, soit par la translation[3]. Ces deux formes de présentation de l'égalité vectorielle sont présentes dans chacun des manuels.

(i) par les **propriétés** : direction, sens et longueur.

Quand on définit l'égalité vectorielle on utilise la notation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on se sert de ses trois propriétés et on souhaite que l'élève construise l'invariant suivant :

[2] Du point mathématique il serait plus correcte de dire "des représentants de deux vecteurs égaux", mais nous avons décidé d'utiliser ici les termes tels qu'ils sont utilisés dans les manuels.

[3] Dans l'étude que nous faisons maintenant les méthodes sont présentées sans spécifier de quel manuel s'agit-il ni de quel niveau.

♦ *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même longueur.*

Avoir même direction veut dire (AB) et (CD) parallèles. Pour le sens, il n'y a aucune explication au niveau géométrique et on doit le lire sur la figure ou choisir sur un dessin un "sens" qui rejoigne l'idée de "sens de parcours" présentée de façon explicite dans les années 40-60 (cf. chapitre B1). Finalement la longueur est définie comme la longueur d'un segment, AB=CD.

Ces propriétés sont ainsi présentées de façon mélangée dans des registres de représentation sémiotiques différents : langage naturel, écriture symbolique géométrique, écriture symbolique vectorielle et graphique. Le langage naturel a ici un rôle fondamental qui sera aussi générateur de confusion chez les élèves, surtout quand ceux-ci prennent les termes comme direction et sens et l'interprètent au sens du langage courant, comme nous le montrerons lors de l'analyse de la mise en place du scénario. Dans le langage courant, le terme "sens" peut être utilisé pour désigner une région (*la banque est dans ce sens ...*), c'est pourquoi nous pensons que l'invariant erroné suivant sur les notions de direction et sens d'un vecteur peut être construit par les élèves :

♦ *Le sens d'un vecteur peut être déterminé indépendamment de sa direction. Si les dessins de deux vecteurs pointent vers la même zone, ces vecteurs ont même sens.*[4]

Dans ce cas l'élève peut dire que les deux vecteurs représentés ci-dessous ont même sens :



Les manuels qui définissent l'égalité vectorielle par les propriétés de direction, sens et longueur font le lien immédiat avec le parallélogramme, de la façon suivante :

• Si ABDC un parallélogramme alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Ce passage entre le géométrique et le vectoriel est ici donné par la traduction d'une propriété énoncée en langage naturel en écriture symbolique vectorielle, déduite à partir de l'analyse d'un dessin (car le dessin accompagne l'énoncé), c'est-à-dire en utilisant le registre graphique. L'objectif de l'enseignement est alors d'amener l'élève à s'approprier de l'invariant suivant :

♦ *ABCD parallélogramme* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

(ii) par la **translation**

Après qu'ait été défini un vecteur, le lien entre translation et vecteur est fait, et l'invariant suivant doit être acquis par l'élève et utilisé lorsqu'il a à identifier des vecteurs égaux sur une configuration construite en utilisant une translation :

[4] Cet invariant converge avec la stratégie "Sens" décrite par Lê Thi (1997, page 204).

♦ *Si* $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D$ *alors* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Rappelons que l'affirmation réciproque n'est pas un objet d'enseignement.

Dans ce cas il n'y a pas de changement de registres, on est toujours dans le registre de l'écriture symbolique vectorielle et on opère des transformations à l'intérieur de ce registre. Cette définition est aussi accompagnée d'un dessin.

Après avoir défini l'égalité vectorielle, les auteurs des manuels la reprennent pour l'étude des configurations et pour résoudre des problèmes de la géométrie analytique :

(iii) par la **géométrie** (synthétique) :

Dans l'étude de configurations, à chaque fois que l'élève doit identifier des vecteurs égaux, il doit identifier l'égalité vectorielle sur une configuration par les propriétés de direction, sens et longueur qui sont tirées des propriétés géométriques de la figure ou lues sur le dessin. Ces propriétés peuvent, bien sûr, être données dans l'énoncé de l'exercice et alors il peut s'agir d'une propriété donnée autour de la translation, mais qui se traduit toujours par la lecture des propriétés géométriques sur la configuration donnée. Cette lecture des propriétés sur une configuration se résume essentiellement à identifier des sous-figures (parallélogrammes) dans la configuration donnée.

(iv) par la géométrie **analytique**

En classe de Troisième, on définit les coordonnées d'un vecteur et on énonce le résultat selon lequel deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont même coordonnées et réciproquement. A ce moment le résultat suivant doit être acquis par les élèves et utilisé dans des exercices d'entraînement :

♦ *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coordonnées.*

En classe de Seconde, lorsqu'on est dans le chapitre sur la géométrie analytique, ce résultat est rappelé et il doit alors être mis en œuvre lors de la résolution des problèmes.

Nous constatons qu'il y a un jeu provoqué entre les différents registres de représentation sémiotiques présents dans l'enseignement secondaire, à savoir : écriture symbolique géométrique, écriture symbolique vectorielle et graphique. Cela rejoint le résultat de l'analyse du chapitre B2, selon lequel l'enseignement de vecteurs dans le secondaire consiste à entraîner les élèves à faire des aller-retours entre plusieurs registres.

2.1.2 - Effectuer l'addition de deux vecteurs donnés

Dans la partie cours des manuels, l'addition de deux vecteurs se fait sur des vecteurs avec les deux notations vectorielles $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$. Pour faire l'addition vectorielle, l'élève peut utiliser la

relation de Chasles (mise bout-à-bout) ou le parallélogramme (deux vecteurs ayant même origine), et les deux invariants suivants doivent être acquis par les élèves :

♦ *ABCD parallélogramme* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

♦ *A, B, C trois points quelconques* $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Ce dernier invariant a deux usages courants dans l'enseignement secondaire : d'une part on peut le lire sur un dessin (mise bout-à-bout) et d'autre part il peut s'appliquer de façon tout à fait algébrique, c'est-à-dire qu'on n'a pas besoin du dessin et la relation de Chasles devient alors opérationnelle.

L'élève doit être capable d'identifier la somme vectorielle sur une configuration donnée pour montrer, par exemple que trois points (de cette configuration) sont alignés. Dans les exercices d'entraînement des définitions et propriétés vues en cours, il existe des exercices qui demandent par exemple, de construire des points qui obéissent à une certaine relation vectorielle (par exemple, les points A, B et C donnés, construire M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$), et à ce moment l'élève doit savoir utiliser la somme vectorielle pour effecteur la construction demandée.

La partie cours des manuels laisse croire qu'il faut que l'élève sache construire des représentants de deux vecteurs[5], mais il n'y a pas une méthode institutionnalisée pour construire des vecteurs égaux ; la façon de le faire n'est pas explicitée et dans l'enseignement habituel, dont le milieu est constitué autour du papier crayon, l'élève peut dessiner chaque représentant tout en conservant au jugé la direction, le sens et la longueur.

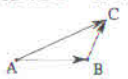
Dans la collection Terracher, on trouve ce qui pourrait être une idée de comment tracer le représentant d'un vecteur quand les auteurs définissent représentation[6] d'un vecteur :

"Soit O un point fixé du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$ il existe un point M unique tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ (lorsque $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, M est le quatrième sommet du parallélogramme OABM)". (Terracher, p.281)

[5] L'extrait suivant du manuel Terracher (p. 282) permet de mieux comprendre ce qui est habituellement institutionnalisé :

Relation de Chasles

Quels que soient les points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Cette relation fonctionne :

• *Du point de vue géométrique (dessin)*

Pour construire $\vec{u} + \vec{v}$ à l'aide de représentants $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ de $\vec{v}$ disposés "bout à bout"

• *Du point de vue algébrique (calcul)*

Pour *simplifier* une somme ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ se réduit à $\overrightarrow{AC}$) ou *décomposer* un vecteur en une somme (pour tout point M, $\overrightarrow{AB}$ peut se décomposer sous la forme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$).

[6] Nous utilisons le terme trouvé dans le manuel.

Cette mention figure dans la partie "cours" et on ne trouve pas d'exercices pouvant faire appel directement à ce résultat. Dans les exercices, il n'y a pas de questions dans lesquelles l'élève doit dessiner des représentants de deux vecteurs donnés : il s'agit toujours de faire l'addition de vecteurs géométriques déjà présents dans la figure ou d'appliquer la relation de Chasles pour simplifier une écriture algébrique, c'est pourquoi nous avons appelé ce dernier type d'exercice "algébrique".

Il est vrai que, lorsqu'on demande de construire des points qui obéissent à une relation vectorielle, habituellement cela débouche sur la construction, par exemple, d'un point D tel que $\overrightarrow{CD}$ soit égal à $\overrightarrow{AB}$, les points A, B et C étant des points données. En d'autres termes, l'élève est en train de construire un représentant d'un vecteur donné, mais nous n'avons pas d'indice pour pourvoir affirmer que cela n'est pas fait de façon implicite. A notre avis, il existe une différence entre ce type d'exercice et un exercice où on demande à l'élève explicitement de construire un représentant d'un vecteur donné, comme nous le verrons d'ailleurs dans l'analyse de la mise en œuvre de la séquence.

2.1.3 - Effectuer le produit d'un vecteur par un réel et colinéarité de deux vecteurs.

Dans les manuels pour définir la multiplication d'un vecteur par un scalaire on part d'un vecteur $\vec{u}$ et d'un scalaire k et on définit le produit k x $\vec{u}$[7]. Mais dès la définition donnée, il est fait appel à des vecteurs géométriques (de notation $\overrightarrow{AB}$) pour rendre ce produit opérationnel. Ainsi dans la construction de $k\vec{u}$, un vecteur $\vec{u}$ et un scalaire k étant donnés il est dit qu'il faut prendre un représentant $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ et construire k $\overrightarrow{AB}$. Dans la plupart des cas, le scalaire k est un nombre entier ou une fraction du type 2/3 ou 3/2, ce qui facilite la construction et l'élève peut toujours se servir des points du papier quadrillé.

Les vecteurs colinéaires sont majoritairement donnés dans les manuels ayant même sens, ce qui peut contribuer à la construction de l'invariant erroné suivant :

♦ *Deux vecteurs sont colinéaires si ils ont même sens et même direction.*

Nous pouvons en inférer que l'un des objectifs implicites de l'enseignement est bien d'entraîner les élèves à opérer avec des vecteurs géométriques, qui le plus souvent sont déjà présents sur le dessin. Le rôle central joué par la multiplication d'un vecteur par un scalaire n'est pas tant l'introduction d'une opération très différente de celles connues des élèves mais de fournir un nouvel outil pour résoudre des problèmes de géométrie.

Les problèmes qui traitent du produit par un réel sont posés soit avec l'objectif d'entraîner les élèves à cette nouvelle opération, soit de fournir un outil pour résoudre des

[7] Les définitions données dans les manuels sont données in extenso dans le chapitre B2.

problèmes de géométrie. Dans le premier cas il s'agit surtout de construction de points définis par des relations vectorielles, et dans le second cas, le produit par un scalaire permet de définir la colinéarité et fournit ainsi un nouvel outil de résolution des problèmes d'alignement ou de direction de droites est alors disponible. Ainsi l'élève doit connaître et savoir utiliser la relation suivante :

♦ *A, B, C alignés* $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Dans les problèmes autour de la colinéarité vectorielle, l'idée de classe d'équivalence apparaît quand la définition du vecteur directeur d'une droite est donnée. En effet, il faut que l'élève sache, par exemple, qu'un vecteur directeur d'une droite le sera aussi pour tout un faisceau de droites parallèles et que ce vecteur peut être tracé à n'importe quel endroit du plan, et non forcément SUR la droite. En effet, dans les manuels on place d'abord un vecteur sur la droite pour ensuite le mettre ailleurs, ce qui peut contribuer à la construction de l'invariant erroné suivant chez les élèves :

♦ *Si* $\vec{u}$ *est un vecteur directeur d'une droite* $\mathcal{D}$*, alors* $\vec{u}$ *n'a que des représentants "tracés" sur la droite.*

Lors de la pré-expérimentation réalisée en "Seconde H" nous avons pu confirmer la présence de cet invariant chez certains élèves.

2.1.4 - Déterminer les coordonnées d'un vecteur

En **analytique,** l'élève doit être capable de donner les coordonnées d'un vecteur à partir des coordonnées de ses extrémités, ce qui implique qu'il doit distinguer les coordonnées d'un point de celles d'un vecteur. Les coordonnées d'un point qui change de position dans le plan sont modifiées tandis que pour un vecteur il ne suffit pas de changer sa position par translation, car dans ce cas les coordonnées de ses extrémités changent mais ses coordonnées restent constantes. Pour modifier les coordonnées d'un vecteur, il faut changer sa direction, son sens ou sa longueur.

Cette "indépendance" des coordonnées d'un représentant d'un vecteur par rapport à sa positon dans le plan ne fait pas partie explicitement des objets d'enseignement et c'est justement à partir de l'analyse des manuels, et de l'observation que nous avons faite dans la "Seconde H", que nous avons dégagé l'hypothèse que les élèves peuvent confondre le "comportement" des coordonnées d'un vecteur avec le "comportement" des coordonnées d'un point . Donnons ci-dessous l'énoncé de cet invariant :

♦ *Si un vecteur est situé dans le premier quadrant alors il a des coordonnées positives, dans le troisième quadrant ses coordonnées sont négatives et dans les autres cas elles ont des signes différents. Autrement dit, les coordonnées du représentant d'un vecteur dépendent de sa position dans le plan.*

Nous donnons ci-dessous une liste des **types de problèmes** pour lesquels on utilise les coordonnées d'un vecteur :

- étudier une figure dans un repère donné ;
- trouver l'équation d'une droite qui passe par un point donné, en connaissant sa direction (un vecteur directeur) ;
- donner la caractérisation vectorielle d'une droite ;
- discuter des positions relatives de deux droites (parallélisme, orthogonalité, ou simple concourance) en utilisant les résultats donnés dans la partie cours des manuels.

Concernant ce derniers type de problèmes, les invariants suivants doivent être acquis par les élèves :

♦ $\vec{u}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}'$. Si $\mathcal{D}//\mathcal{D}'$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou $\vec{u} = k\vec{v}$.

♦ Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites parallèles et si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$.

♦ $\vec{u}$ (x , y) et $\vec{v}$ (x', y') colinéaires, équivaut à xy' - x'y = 0

♦ $\vec{u}$ (x , y) et $\vec{v}$ (x', y') orthogonales, équivaut à xx' + yy' = 0.

- résoudre des problèmes de géométrie tels que : en connaissant les coordonnées de deux points A et B, trouver les coordonnées de deux points C et D de tel façon que ABCD soit un carré.

Nous avons vu que la décomposition d'un vecteur dans une base n'est pas objet d'enseignement dans le chapitre sur les vecteurs, en revanche dans le chapitre sur la géométrie analytique et les vecteurs les théorèmes suivants sont énoncés :

Soit $(\vec{i} ; \vec{j})$ une base :

♦ *Pour tout point M, il existe un unique couple (x,y) de réels tels que* $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

♦ *Pour tout vecteur* $\vec{u}$, *il existe un unique couple (x,y) de réels tels que* $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Ces théorèmes sont énoncés dans l'objectif d'introduire les conditions analytiques de colinéarité et d'orthogonalité ; il n'y a pas d'exercices demandant de mettre en œuvre cette décomposition.

Pour cerner et compléter notre étude des situations, nous présentons les **actions exigibles des élèves**[8], que nous pouvons résumer en trois grandes catégories :

[8] Pour l'instant nous allons parler des actions exigibles que nous avons repérés dans l'analyse de manuels et qu'on travaille en papier crayon. Nous citerons les actions qui peuvent apparaître lors de l'utilisation de Cabri-géomètre II, au moment de leur apparition. Dans les programmes, ou manuels, on peut aussi trouver le mot "compétence" à la place "d'actions exigibles".

1 - il faut savoir reconnaître que deux vecteurs sont égaux :

Il s'agit ici d'identifier sur des configurations données des vecteurs égaux ; le dessin permet de vérifier la direction et la longueur et ensuite de choisir un sens de façon que les conditions direction-sens-longueur soient satisfaites pour qu'on ait l'égalité vectorielle.

2 - il faut identifier, sur une configuration, les opérations définies dans la partie "cours" :

Cela signifie effectuer, ou identifier, sur une configuration une addition vectorielle (par le parallélogramme ou la relation de Chasles) ou un produit d'un vecteur par un scalaire. Par exemple, une configuration est donnée et on demande de montrer une relation vectorielle, ou de montrer l'alignement de trois points.

3 - il faut savoir utiliser les conditions analytiques de parallélisme et d'orthogonalité :

Pour cela, il faut savoir calculer les coordonnées d'un vecteur à partir de ses extrémités et appliquer les conditions de parallélisme et d'orthogonalité sur des configurations (étude des figures dans un repère) ou pour résoudre des problèmes relatifs à l'équation d'une droite ou de deux droites données. Par exemple, déterminer l'équation d'une droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée.

Il est fort probable qu'en utilisant un autre environnement que le papier crayon, il y ait d'autres actions qui soient exigibles des élèves que celles repérées dans les manuels. La mise en évidence de ces actions nous aidera non seulement à cerner l'objet vecteur dans l'enseignement en classe de Seconde, mais aussi à approfondir notre étude sur les difficultés des élèves. Nous reviendrons sur cette question au fur et à mesure que nous procéderons à l'analyse de la réalisation de l'expérimentation.

2.2 - Les invariants

Nous donnons maintenant une liste des invariants que nous avons dégagés tout au long de cette étude des situations décrite ci-dessus[9], en notant entre parenthèses s'il s'agit d'un résultat vrai ou faux. Rappelons que même si l'invariant a été énoncé dans le cours, l'élève n'explicite pas ce qu'il est énoncé ou comme il est énoncé. Il s'agit d'une modélisation faite par nous.

Pour faciliter la lecture, nous allons les regrouper en invariants tirés des manuels, qu'ils soient explicites ou sous-jacents au cours, et en invariants susceptibles d'être construits par les élèves.

[9] Malgré notre volonté de donner des noms à chaque invariant pour faciliter la lecture qui suivra, nous n'avons pas pu le faire. Ainsi nous nous réfererons aux invariants par leur numéro et nous rappelerons à chaque fois le contenu de l'invariant en question.

A) Invariants dégagés des manuels

Explicites

i) Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même longueur. (vrai)

ii) ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (vrai)

iii) Si $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = D$ alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (vrai)

iv) ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (vrai)

v) A, B, C trois points quelconques $\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (vrai)

vi) A, B, C alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ (vrai)

vi) Représentation d'un vecteur : Soit O un point fixé du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M unique tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. (vrai)

viii) Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coordonnées. (vrai)

ix) $\vec{u}$ (x , y) et $\vec{v}$ (x', y') colinéaires, équivaut à xy' - x'y = 0. (vrai)

x) $\vec{u}$ (x , y) et $\vec{v}$ (x', y') orthogonales, équivaut à xx' + yy' = 0. (vrai)

xi) Décomposition :

Soit $(\vec{i} ; \vec{j})$ une base

Pour tout point M, il existe un unique couple (x,y) de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$. (vrai)

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple (x,y) de réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. (vrai)

Non-explicites

xii) Un vecteur est défini par direction, sens et longueur. (vrai)

xiii) Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites parallèles et si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$. (vrai)

xiv) $\vec{u}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}'$. Si $\mathcal{D}//\mathcal{D}'$ alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou $\vec{u} = k\vec{v}$. (vrai)

B) Invariants susceptibles d'être construits par les élèves[10]

xv) Le sens d'un vecteur peut être déterminé indépendamment de sa direction. Si les dessins de deux vecteurs "pointent" vers la même zone, ces vecteurs ont même sens. (faux)

xvi) Deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont même sens et même direction. (faux)

xvii) Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$, alors $\vec{u}$ n'a que des représentants "tracés" sur la droite. (faux)

xviii) Si un vecteur est situé dans le premier quadrant alors il a des coordonnées positives, dans le troisième quadrant ses coordonnées sont négatives et dans les autres cas

[10] Nous incluons ici les invariants dégagés lors d'une pré-expérimentation réalisée pendant l'année 96/97. L'expérimentation ainsi que le compte rendu, sont donnés dans les annexes du chapitre D.

elles ont des signes différents. Autrement dit, les coordonnées d'un représentant d'un vecteur dépendent de sa position dans le plan. (faux)

Notons que les invariants xiii) et xvii) sont incompatibles, ou encore que les invariants xvi) et vi) ne sont compatibles que si k est toujours un nombre positif, car dans ce cas les vecteurs ont même direction et aussi même sens.

Certains invariants peuvent avoir un rôle de structure de contrôle pour d'autres invariants. Citons notamment l'invariant viii) qui peut fonctionner comme structure de contrôle pour l'invariant xviii). Dans l'analyse de la mise en place du scénario nous chercherons à repérer les invariants utilisés par les élèves pour valider ou infirmer leurs conjectures.

Rappelons que si dans notre liste d'invariants un théorème au sens mathématique est énoncé, cela ne veut pas dire que nous espérons que l'élève puisse l'expliciter, au contraire. Citons l'invariant vi) sur la représentation d'un vecteur : nous pensons que ce qu'on peut espérer est l'élève utilise en action le résultat selon lequel tout vecteur du plan à un représentant à l'origine, qui correspond au théorème vi) énoncé dans le cours.

Notons finalement que les invariants listés ci-dessus sont formulés principalement à partir de l'analyse de types de problèmes à résoudre dans l'environnement papier crayon. Il est assez naturel d'espérer que dans un autre environnement on puisse modéliser d'autres formes d'invariants.

2.3 - Systèmes de signifiants

Pour étudier les systèmes de signifiants nous nous limiterons au sous-ensemble formé par les registres de représentations sémiotiques utilisés dans l'enseignement secondaire autour de la notion de vecteur. Ces différents registres ont été repérés lors de l'analyse des manuels et dans l'étude des situations.

i) Registre symbolique vectoriel (RSV), ou langage vectoriel qui donne lieu à deux types d'écritures : $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$, à partir desquelles sont exprimées les opérations (somme et produit par un scalaire) et les relations vectorielles d'égalités.

ii) Registre symbolique géométrique (RSG) - il s'agit ici du langage géométrique "pur" sans mélange avec le vectoriel, comme par exemple : AB//CD.

iii) Le registre de la langue naturelle, ou le registre discursif.

iv) Registre graphique - il s'agit ici d'un dessin ou d'une configuration.

v) Registre numérique - par exemple quand on fait des calculs sur les coordonnées d'un vecteur, comme la condition analytique d'orthogonalité de deux vecteurs xx'+yy'=0.

3 - Présentation de la séquence

Pour cette partie du travail, nous allons d'abord décrire brièvement en quoi consiste cette séquence d'enseignement appelée "scénario vecteurs", en expliquant les objectifs de la séquence et la construction du scénario, tout en portant notre attention sur les invariants que nous cherchons à mettre en place ou a déstabiliser.

3.1 - Quel scénario ?

Un projet pour la construction des scénarios utilisant la calculatrice TI-92, et plus particulièrement le logiciel Cabri-géomètre II, a été soutenu par la région Rhône-Alpes et l'INRP. Ainsi pour la rentrée 96/97, l'élaboration d'un scénario pour l'enseignement des vecteurs en classe de Seconde est démarrée, ayant comme enseignant responsable du scénario et de la classe, l'enseignant désigné ici sous le nom de Fernando. L'objectif est d'écrire une séquence d'enseignement sur les vecteurs en utilisant le logiciel Cabri-géomètre II :

> " ... Il s'agit d'utiliser les possibilités de Cabri pour l'étude de la notion de vecteur au niveau Seconde. [...] Cabri apporte ainsi une meilleure compréhension des invariants associés à un vecteur. [...] On peut espérer, entre autres, une meilleure perception de notions comme celles de coordonnées d'un vecteur, de somme de deux vecteurs ou de multiplication d'un vecteur par un nombre." (extrait du document scénario, p. 29)

Cet extrait du document montre que l'un des objectifs du scénario est de faire travailler aux élèves le vecteur en tant qu'objet et des notions telles que coordonnées d'un vecteur, l'addition vectorielle et le produit par un scalaire.

Écrire le scénario signifie produire un document dans lequel figurent une organisation de séquences d'enseignement avec les documents qui sont destinés aux élèves, les documents destinés aux enseignants et une synthèse de ce qui doit être dans le cahier des élèves (partie cours)[11]. Comme il s'agit d'une trace écrite donnée par l'enseignant ces documents nous permettront de mieux cerner les attentes de l'enseignant et d'avoir ainsi une explicitation de la part de l'enseignant du contenu à enseigner dans cette classe concernant les vecteurs.

3.2 - Organisation de la classe

Les élèves ont eu deux séances de TD d'une heure par semaine. Pour les TD la classe est divisée en deux groupes de 16 et 17 élèves chacun. En alternance avec les TD ils ont eu une

[11] Une copie de cette synthèse est founie dans les annexes du chapitre D.

heure et une heure et demi de cours (respectivement). Ainsi, l'enseignement de mathématiques en classe de Seconde comporte au total deux heures de TD et deux heures et demi de cours.

Dans les travaux dirigés (TD) les élèves travaillent côte à côte, ils échangent entre eux, avec l'enseignant et avec nous. Chaque élève a une calculatrice qu'il garde pendant toute la durée de l'année scolaire. L'enseignant dispose aussi d'une tablette retroprojetable, qui permet aux élèves une visualisation plus facile de ce qui se passe pour l'exercice et que l'enseignant utilise aussi dans des moments d'institutionnalisation.

3.3 - Les interactions enseignant/chercheur

Nous avons travaillé en concertation avec l'enseignant responsable du scénario pour suggérer des activités qui permettent de vérifier la présence ou l'absence de certains invariants ou pour confronter les élèves à des invariants erronés.

Nous avons pu discuter avec l'enseignant des réactions des élèves à l'utilisation de la TI-92 et de leurs difficultés en ce qui concerne la notion de vecteur. Au fur et à mesure que nous décrirons chaque application de TD proposée qui concernait des questions que nous voulions vérifier, nous donnerons si nécessaire des esquisses des discussions avec l'enseignant.

3.4 - Notre participation en classe

Nous avons observé tous les TD et toutes les séances "cours" de cette classe. Pendant la réalisation des TD, nous avions le droit de nous déplacer en classe et de répondre aux questions des élèves. L'enseignant leur a expliqué que nous faisions une recherche sur l'enseignement de vecteurs et sur l'utilisation de la TI-92. Nous avons photocopié leurs TD, et les travaux d'évaluation, c'est-à-dire les DM (devoir à la maison) et les DS (devoir surveillé). Nous avons aussi comme donnée de notre analyse le rapport de ce qui se passait dans la classe car nous avons assisté à toutes les séances et avons constitué un "cahier" comprenant le cours et les TD, en écrivant non seulement ce que l'enseignant disait aux élèves d'écrire mais aussi les commentaires des élèves, de l'enseignant et quelques constatations que nous faisions au cours de l'observation. Ceci sera utile pour l'analyse des intentions de l'enseignant et des difficultés des élèves.

3.5 - Objectifs de l'enseignant

Fernando a joué à la fois le rôle de producteur d'un scénario et celui d'enseignant. C'est pourquoi nous lui avons demandé d'expliciter ses objectifs en tant qu'enseignant (car les objectifs du scénario sont déjà décrits ci-dessus) et de faire une évaluation du scénario. Dans ce qui suit des extraits de l'entretien mené avec Fernando sont donnés suivis d'une brève analyse.

3.5.1 - A propos du scénario

C'est une recherche dans la dynamique [...] les scénarios qu'on a produit en concertation , ils ont dû être ajustés en fonction des références qu'on a prises. [...] Dans un premier temps on fait un scénario vecteur mais on passe dans la classe et on fait un ajustement [...] j'ai arrêté la TI-92 et j'ai repris le papier ; en fait, j'ai régulé en fonction de la réaction de la classe. Je l'ai fait par rapport à demande de la part des élèves. [...] en fonction de ce qui s'est passé, j'ai dégagé un scénario que j'ai envie d'expérimenter.[...] j'avais du mal à me faire des idées par rapport au transfert de fichiers ... En fait je croyais à une situation qui était assez éloignée d'une situation habituelle.

Les élèves ont eu du mal à travailler avec la calculatrice entre autres parce que c'était la première fois qu'ils la manipulaient et ils ne connaissaient pas non plus le logiciel Cabri-géomètre II. Cela retardait un peu le travail et les élèves ne voyaient pas en quoi l'utilisation de la TI-92 allait les aider à résoudre les exercices, comme ils l'ont expliqué à l'enseignant lors d'une "séance-évaluation" de l'utilisation de la calculatrice : "les exercices qu'on doit résoudre, ça n'a rien à voir avec ce qu'on fait avec la calculatrice". Vue la réaction des élèves l'enseignant a décidé d'arrêter pour un certain temps le travail avec la calculatrice et le reprendre plus tard (voir description des résultats obtenus)[12].

Nous constatons aussi que l'enseignant a conscience des différences entre une situation habituelle et la séquence qui est proposée aux élèves. C'est encore plus clair quand il parle de ses objectifs ci-dessous.

3.5.2 - Objectif en tant qu'enseignant

C'est l'idée qu'un vecteur c'était, sans le dire, caractérisé par direction, sens et longueur mais que je pense c'était une classe d'équivalence de représentants ... cette idée qu'un vecteur c'est pas quelque chose qui est dessiné ... c'est un ensemble de couples et mon idée aussi est de pouvoir rapprocher la notion de vecteur, c'est toujours pareil sans le dire aussi, mais de la notion du graphe d'une translation. J'ai une translation, si je

[12] A la fin de la réalisation du scénario, une évaluation de l'utilisation de la calculatrice a eu lieu. Cette évaluation a été préparée par les participants du groupe du scénario et l'un des résultats semble être que les élèves ont fini par bien s'adapter au nouvel outil.

prends tous les couples, un point et son image eh bien, l'ensemble de ces couples là constituent un vecteur voulu.
Il me semble qu'on est plus proche dans l'environnement Cabri du vecteur que ce qu'on est avec papier crayon. Avec cette idée qu'on se préoccupait non pas d'un objet mais d'une classe d'objets ... comme pour la géométrie (les dessins et etc.). ... Donc l'objet est plus proche de l'objet mathématique ... Si tu veux j'ai un peu l'idée qu'il y a l'élève avec ses conceptions, son environnement et il y a l'enseignant qui fait un peu le médiateur entre le savoir savant et puis l'élève qui est dans son environnement. Il me semble qu'en proposant l'environnement Cabri je peux prendre l'élève un peu par la main ... [...] ça rend plus réel cette histoire de représentant d'un vecteur.

L'enseignant veut faire passer aux élèves l'idée qu'un vecteur est une classe d'équivalence, et qu'un vecteur ne doit pas être confondu avec son représentant. Ce qui dans les manuels apparaît de façon tout à fait implicite est ici explicité par l'enseignant : pour lui, il est fondamental que les élèves comprennent qu'un vecteur représente toute une classe d'équivalence (sans utiliser ce terme).

Pour lui la notion de vecteur est très liée à celle de translation ; si, dans le savoir à enseigner (manuel et programme) un vecteur sert à définir une translation, qui a son tour sert à justifier l'addition "bout-à-bout", pour Fernando une translation sert à caractériser un vecteur. Cela est bien visible dans la première activité du premier TD, soit le TD n°5 (voir analyse des TD ci-dessous).

Un autre point qui attire notre attention dans le discours de l'enseignant, est son "hypothèse" selon laquelle la notion de vecteur est complexe à faire apprendre aux élèves, surtout en ce qui concerne l'idée de représentant d'une classe de vecteurs équivalents. Pour lui, Cabri II doit rendre cette notion plus réelle pour les élèves et aussi plus proche de l'objet mathématique.

Il est vrai que dans Cabri-géomètre II les élèves ont accès à l'idée de représentant d'une classe pour un vecteur géométrique. En effet le vecteur est défini à partir de deux points, ce qui est géométrique et de plus, l'effet de la visualisation est très fort : l'élève voit un vecteur qui bouge, qui se déplace, qui tourne. Ce même effet de visualisation contribue à ce que l'élève puisse voir le vecteur comme un ensemble d'éléments ayant même direction, même sens et même longueur. Ainsi l'un des avantages de travailler dans cet environnement est que, pour un vecteur géométrique, on peut approcher la notion de classe d'équivalence.

Au fur et à mesure que nous analyserons la mise en place du scénario, nous reviendrons sur le discours de l'enseignant en essayant d'y repérer des différences entre le travail avec papier crayon et le travail avec Cabri.

Le scénario a été produit aussi en concertation avec d'autres enseignants et a été modifié au fur et à mesure de son application. Il s'agit surtout de changements qui prennent en compte le temps de réalisation de la séquence et la difficulté des élèves avec la machine. Sur le fond ou sur l'objectif de la séquence, il n'y a pas eu de changements. Nous donnons dans

les annexes D, une copie du scénario tel qu'il a été réalisé dans cette classe de Seconde. Pour le scénario "document final", avec les modifications nous indiquons (Laborde at al, 1998).

3.6 - Vue d'ensemble des activités proposées par nous

Le scénario "vecteurs" est constitué de 12 TD (TD n°5 à TD n°16 - cf. annexes D) qui ont été distribués tout au long de deux mois et demi, du 21/10/96 au 10/01/97.

Durant cette étape du cours il y a eu 3 DM (devoir à la maison) et 3 DS (devoir surveillé). Ces deux types de devoirs ne font pas partie d'une production du scénario et étaient préparés seulement par l'enseignant. Dans les DM, il y a parfois des activités avec Cabri-géomètre II, tandis que les DS étaient composés uniquement par des activités en papier crayon.

Des activités ont été préparées par nous et insérées dans les TD ayant pour objectif d'étudier quelques uns des invariants antérieurement listés. D'une manière générale ces activités visent à l'étude de difficultés des élèves lors de l'enseignement et apprentissage de la notion de vecteur en tant que représentant d'une classe d'équivalence. Donnons ci-dessous les titres de ces activités et les objectifs généraux de chacune d'entre elles ; le texte exacte de chaque activité ainsi qu'une analyse des exercices et du rôle de la machine dans les activités sont donnés dans le paragraphe 4.

1) représentant d'un vecteur

La construction par l'élève d'une macro-construction qui fournit un représentant d'un vecteur donné d'origine un point quelconque du plan, doit lui permettre d'approcher l'idée du vecteur comme représentant d'un "ensemble de vecteurs égaux" (en fait le représentant d'une classe d'équivalence). La construction de la macro peut exiger la mise en œuvre de plusieurs invariants, tels que : un vecteur est défini par direction, sens et longueur ; deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même longueur ; ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

2) coordonnées d'un vecteur

Notre objectif ici est d'étudier les réactions des élèves face à des activités mettant en œuvre les liens entre coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur. Nous voulons d'un côté confirmer la présence de l'invariant xviii[13] et d'un autre côté proposer des activités

[13] invariant xviii) : Si un vecteur est situé dans le premier quadrant alors il a des coordonnées positives, dans le troisième quadrant ses coordonnées sont négatives et dans les autres cas elles ont des signes différents. Autrement dit, les coordonnées d'un représentant d'un vecteur dépendent de sa position dans le plan et changent si le représentant change de quadrant.

qui puissent permettre de le déstabiliser et de contribuer ainsi à la formation de nouveaux théorèmes-en-acte cette fois vrais.

3) équation de droite et vecteur directeur.

Nous sommes intéressée plus particulièrement à travailler l'indépendance du représentant d'un vecteur directeur par rapport à la position de la droite dans le plan et le fait que la direction d'une droite est donnée pour tout un ensemble de vecteurs colinéaires. Notre intérêt dans cette activité porte essentiellement sur la confirmation et déstabilisation de l'invariant erroné xii : Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$, alors $\vec{u}$ n'a que des représentants "tracés" sur la droite.

D'autres activités, élaborées conjointement avec l'enseignant et que nous intéressent à analyser lors de la réalisation en classe, seront citées dans le paragraphe qui suit.

4 - Mise en place de la séquence

Dans ce qui suit nous donnons à chaque fois des extraits du texte des activités qui nous intéressent. Pour le texte complet de chaque TD, tel qu'il a été appliqué dans l'année 96/97, nous renvoyons aux annexes du chapitre D.

4.1 - TD n°5 - Aller/retour entre translation et vecteur - représentant d'un vecteur.

Ce TD est le premier autour de la notion de vecteur, mais les élèves étaient déjà familiarisés avec la calculatrice TI-92 et le logiciel Cabri-géomètre II car ils l'avaient déjà utilisé pour d'autres activités.

Les connaissances des élèves sur les vecteurs étaient celles acquises au collège. Ainsi les deux premières activités de ce TD portent sur la définition d'un vecteur à partir d'une translation et vice-versa. La troisième activité vise à fournir la macro-construction "représentant d'un vecteur".

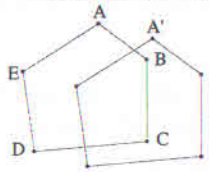
4.1.1 - Première activité proposée aux élèves

Avec cette activité l'enseignant visait à caractériser un vecteur par une direction, un sens et une longueur ainsi que le lier à une translation. Notre intérêt dans la réalisation de cette activité porte sur les observations des élèves sur la direction et le sens d'un vecteur. Dans les

manuels les notions de direction et de sens sont données comme "naturelles" et relevant d'un vocabulaire courant chez les élèves. La discussion qui a eu lieu lors de la réalisation de la première activité du scénario, nous a permis de confirmer que ces notions ne sont pas de tout aussi claires qu'elles devraient l'être chez les élèves. Ils ont du mal à distinguer direction et sens. En effet, ils pensent souvent soit qu'il s'agit de la même chose, soit que l'une n'a rien à voir avec l'autre et ils peuvent dire ainsi que deux vecteurs qui n'ont pas la même direction, ont le même sens. Mais donnons d'abord l'énoncé de la première activité proposée aux élèves, puis la discussion qui a eu lieu en classe :

1°) Ouvrir le fichier "TD1E1". A l'écran apparaît un quadrilatère ABCD, un point A' et l'image du quadrilatère par translation de A vers A'.
Déplacer le quadrilatère ABCD. Déplacer les points A, B, C et D. Déplacer le point A'.
Que peut-on constater ?
Pour différentes dispositions des éléments de l'écran, comparer la direction, le sens et la longueur du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ avec ceux des vecteurs ayant pour origine un sommet du quadrilatère ABCD et pour extrémité le sommet correspondant du quadrilatère image.

dessin qui apparaît à l'écran



Les élèves ont d'abord travaillé sans intervention directe de l'enseignant ; ils discutaient entre eux et avec l'enseignant. Ce dernier ne donnait pas d'indices pour les réponses mais pour l'usage de Cabri-géomètre II. Le caractère dynamique de Cabri-géomètre II permet à l'élève de déplacer les sommets du polygone ou le polygone lui-même et de faire des conjectures en observant ce qui se passe. Notons que ce type d'activité n'a pas de sens dans l'environnement papier crayon.

Suite au travail individuel des élèves, l'enseignant a procédé à un bilan de cette première activité. Avec la tablette retroprojetable il réalisait l'activité pour tous les élèves et leur posait les questions de l'énoncé. Suite à la question "Que peut-on constater?", les notions de direction et de sens ont été mises en discussion. Les élèves disaient que quand on déplace le quadrilatère, la direction, le sens, la longueur, le parallélisme ne changent pas. Au début ils parlaient de direction, sens et longueur sans spécifier l'objet dont dépendent direction, sens et longueur ; alors l'enseignant leur a demandé d'expliquer de quoi ils parlaient et quelques élèves ont dit : "des segments AA', BB', ... " et d'autres élèves ont explicité "des vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, ..."

Parce que les élèves semblent ne pas savoir ce que signifient direction et sens, l'enseignant a décidé de faire le point sur ces notions. Pour cela il a utilisé le dessin de deux vecteurs sans fixer leurs extrémités et sans les nommer. Il s'agit de vecteurs définis spatio-graphiquement et non par des propriétés géométriques. Nous transcrivons ci-dessous ce qui s'est passé dans la classe :

Enseignant : qu'est-ce que le "sens" ?
Les élèves : Si on met des flèches on voit !
L'enseignant dessine au tableau :



Les élèves : Ils ont même sens !
Enseignant : Et ceux-ci ?

(* Silence !)

Pour les élèves qui ont répondu que les vecteurs de la première paire ont même sens, il peut s'agir de la confirmation de la présence de l'invariant xv) : "Le sens d'un vecteur peut être déterminé indépendamment de sa direction. Si les dessins des vecteurs "pointent" vers la même zone, ces vecteurs ont même sens." L'enseignant a essayé de régler ce problème en disant qu'on ne parle de sens que si les vecteurs ont même direction.

Nous confirmons ainsi l'hypothèse que le sens, pour les élèves, a un rapport avec un certain *régionnement* du plan : il s'agit de "quelque chose vers le haut ou vers la droite ou vers la gauche". En analysant la deuxième paire de vecteurs proposée par l'enseignant et les réactions des élèves, nous pouvons même dire qu'il s'agit surtout de "vers la droite" ou "vers la gauche".

Pendant tout le cours sur les vecteurs qui a suivi, nous avons pu observer que, pour certains élèves, direction et sens n'étaient pas encore des notions acquises. Par exemple, quelques jours plus tard, dans une séance de classe entière pour introduire le vecteur nul, nous avons rencontré la situation suivante :

L'enseignant : Qu'est-ce qu'un vecteur nul ?

Un élève : La somme d'un vecteur et son opposé $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$

L'enseignant au tableau : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \ldots$ s'appelle vecteur nul. On le note $\overrightarrow{o}$.

L'enseignant : $\overrightarrow{AA}$ n'a pas de direction. Pourquoi ?
Un élève (le même qu'avant) : Parce qu'on a qu'un point et **la direction va d'un point vers un autre**.

En effet, quand l'élève dit que la direction va d'un point vers un autre, nous pouvons dire qu'il existe une confusion chez lui entre les notions de direction et de sens. L'idée de direction est ici liée à ce qu'on retrouvait dans les années 40 à 50 pour la définition du sens d'un vecteur ; nous rappelons que pendant cette période on parlait d'un sens de parcours (cf. chapitre B1).

Dans notre analyse des manuels, nous avons vu que la notion de sens d'un vecteur n'est pas définie, il s'agit habituellement de choisir un sens sur un dessin, ce qui ne doit pas poser de problèmes aux élèves. Mais si cela ne représente pas un problème au sens mathématique, nous pouvons dire qu'il y a tout de même un problème de compréhension de cette notion chez les élèves. Après la réalisation de ce TD par le premier groupe, nous avons discuté avec l'enseignant qui avait, lui aussi, senti que les élèves ont du mal à distinguer le sens de la direction ou à les lier quand il le faut. L'enseignant a donc essayé de repérer la signification que les élèves accordent au sens par l'intermédiaire du dessin : il s'agit d'une extériorisation d'un invariant dans le registre sémiotique graphique.

Dans le deuxième groupe l'enseignant a posé les questions de manière un peu différente, car il se doutait de ce qui allait se passer s'il répétait la même situation, et il voulait leur faire expliciter leurs idées à propos du sens d'un vecteur. Voici un extrait du dialogue collectif en classe, lors de la réalisation de l'activité n°1 :

L'enseignant : Qu'est-ce qu'un vecteur ?
Quelques élèves : La longueur, la direction, sens, parallélisme ...
L'enseignant demande à un élève de dessiner deux vecteurs de même direction :



L'enseignant vers tout le groupe : ils ont même direction ?
Quelques élèves : Non, parce qu'ils n'ont pas le même sens !
E' : Ils ont même direction mais pas même sens.
L'enseignant : Donc direction implique parallélisme, (et il dessine au tableau) :



L'enseignant : Ils ont même sens ?
Quelques élèves : Non ... oui ... ni l'un ni l'autre.
E' : Ils n'ont pas même direction.

Les élèves utilisent direction et parallélisme comme s'ils avaient des signifiés différents. Dans le premier groupe, nous avons constaté la même chose. Comme les notions de direction et de sens sont données aux élèves de façon intuitive sans une définition mathématique, la notion de vecteur, elle aussi, possède un caractère intuitif ou perceptif, et les élèves retiennent donc une série de mots et de concepts que leurs rappelle cette notion.

Les vecteurs dessinés par l'enseignant ont la particularité d'être perceptiblement colinéaires, ce qui rend l'analyse des réponses des élèves plus difficile. Pour les élèves qui ont dit que les deux premiers vecteurs n'ont pas même direction car ils n'ont pas même sens, deux invariants peuvent le justifier : "pour avoir même direction il faut que les vecteurs aient même sens" ou encore "deux vecteurs (colinéaires) ont même direction s'ils ont même sens". Nous n'avons pas beaucoup d'éléments permettant de conclure à la présence de ces invariants chez les élèves. En effet, les réactions auraient pu être différentes si les vecteurs n'avaient pas été visuellement colinéaires. Il aurait fallu dessiner deux vecteurs non-colinéaires, comme ceux dessinés ci-dessous et étudier les réactions des élèves.



Fig. 1

La deuxième paire de vecteurs dessinée par l'enseignant ne représente pas de vecteurs colinéaires, mais la rupture avec la première paire est trop grande : on passe de deux vecteurs colinéaires et perceptivement de même longueur à deux vecteurs qui ont des directions différentes et ne pointent pas vers la droite ou la gauche (comme pour le premier groupe de TD).

Même si les vecteurs de la deuxième paire choisie par l'enseignant ne pointaient pas vers la même "région", la réponse fournie par les élèves ne vient pas immédiatement ; ce qui nous laisse penser que si l'enseignant avait fourni deux vecteurs qui pointaient vers le haut, par exemple, il y aurait de réponses semblables à celles vues dans le premier groupe.

D'après les verbalisations des élèves, E' paraît être le seul pour qui les notions de direction et sens ne posent pas de problème.

Pour résumer nous pouvons dire qu'avec cette activité nous avons pu constater la présence de l'invariant spatio-graphique xv) : "Le sens d'un vecteur peut être déterminé indépendamment de sa direction : si les dessins des vecteurs pointent vers la même zone, ils ont même sens". De plus, nous pouvons faire l'hypothèse que les invariants suivants peuvent être construits par les élèves : "pour avoir même direction il faut que les vecteurs aient même sens" ou encore "deux vecteurs (colinéaires) ont même direction si ils ont même sens". Relativement aux rétroactions du milieu, nous avons constaté que le milieu constitué de Cabri-géomètre II a permis aux élèves de travailler perceptiblement les notions de direction et de sens.

La notation $\vec{u}$ a été introduite à la suite de cette première activité. L'enseignant a dit que "*Pour éviter d'écrire* $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$, ... *on écrit* $\vec{u}$": il s'agit donc d'une notation commode mais il n'y a pas eu de discussions plus approfondies.

Dans la classe l'enseignant a eu le temps de travailler seulement le premier exercice, laissant ainsi la **deuxième activité** comme travail à la maison. Nous la transcrivons ci-dessous pour que le lecteur puisse comprendre la suite du travail.

> 2°) Créer le fichier [F8 3:New] appelé TD1E2. Créer un quadrilatère ABCD et un vecteur $\overrightarrow{MN}$; construire l'image du quadrilatère ABCD par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$ en utilisant l'article translation [F5 1:Translation].
> a) Déplacer le point N. Que peut-on constater ?
> b) Déplacer le point A, le point B, ... Que peut-on constater ?
> c) Déplacer le vecteur $\overrightarrow{MN}$. Pourquoi le quadrilatère image ne bouge-t-il pas ?

4.1.2 - La macro-construction représentant d'un vecteur.

La troisième activité du TD 5 a comme objectif la création d'une macro-construction qui fournit un représentant d'un vecteur. Cette macro devrait permettre aux élèves de comprendre que : "*pour tout vecteur et pour tout point du plan, il existe un représentant du vecteur ayant pour origine le point considéré. Il est possible là aussi d'illustrer le fait que le représentant du vecteur n'est pas modifié si le déplacement ne modifie ni la direction, ni la longueur et ni le sens.*" (document scénario, p. 33). Pour construire cette macro, il faut que l'élève sache construire deux vecteurs égaux. Ainsi nous transcrivons ci-dessous l'énoncé de cette activité et ensuite nous faisons une analyse à priori des stratégies possibles chez les élèves lors de la construction de deux vecteurs égaux :

> 3°) Créer le fichier TD1E3. Créer un vecteur $\vec{u}$ et un point A. Construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
> À partir de la construction précédente, créer une macro-construction qui, étant donné un vecteur $\vec{u}$ et un point A, produit le représentant de $\vec{u}$ d'origine A. Pour créer cette macro, il faut :
> • désigner comme objets initiaux le vecteur $\vec{u}$ et le point A [F4 6:Macro Construction 2:Initial Objects] ;
> • désigner comme objet final le vecteur $\overrightarrow{AB}$ [F4 6:Macro Construction 3:Final Objects] ;
> • définir la macro en lui donnant un nom (on prendra "représentant") [F4 6:Macro Construction 4:Define Macro] ;
> • on désignera l'objet par "repvecteur" et on sauvegardera la macro sous le nom "represen".

4.1.2.1 - Les stratégies

S1) Translation - La translation a déjà été vue en Seconde, et avec l'item Translation du menu Cabri, on indique "le point A" et le vecteur "$\vec{u}$", et l'image B de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ est construite. Ensuite il reste juste à faire le vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'extrémités A et B. Cette stratégie fonctionne même si le point A est sur le support de $\vec{u}$.

Cette stratégie s'avère économique au niveau nombre d'opérations (et par conséquent au niveau temps), et comme la translation a été définie par rapport aux vecteurs, il nous semble qu'il est probable qu'elle apparaisse.

S2) Parallélogramme

S2.A) Parallèles - construire le parallélogramme par l'outil "droite parallèle" semble être la possibilité la plus standard et qui ressemble à ce qui est fait en papier crayon. Si le point A est sur le support de $\vec{u}$, cette stratégie ne fonctionne plus car le parallélogramme sera aplati.

S2.B) Symétrie centrale - On crée $\vec{u}$, et par symétrie centrale par rapport au milieu de A et de l'extrémité de $\vec{u}$ on obtient le point B. On désigne ensuite le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

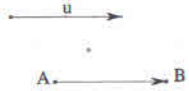


Fig. 2

Cette stratégie qui consiste à construire un parallélogramme fonctionne pour n'importe quelle position du point A, mais elle est n'est pas très probable car il ne s'agit pas d'une méthode institutionnalisée dans l'enseignement pour construire des parallélogrammes.

S3) Report de mesure - on construit une droite parallèle à $\vec{u}$, passant par A, ensuite une demi droite sur la droite construite qui ait le même sens que le vecteur $\vec{u}$ et finalement on fait un report de mesure.

Cette stratégie est peu probable car il faut construire la demi-droite sur la droite ce qui est une exigence due au logiciel et inexistante en papier crayon. Elle fonctionne même si le point A est sur le support de $\vec{u}$.

S4) Compas - On trace une droite parallèle à $\vec{u}$ passant par A, ensuite on utilise "compas" pour construire un cercle de centre A et rayon la longueur de $\vec{u}$[14]. On a ainsi deux points d'intersection et il faut choisir perceptivement le "bon" point, c'est-à-dire celui que donne un vecteur $\overrightarrow{AB}$ le même sens du vecteur $\vec{u}$.

[14] Pour construire le cercle on utilise l'outil "compas" et on montre les extrémités du vecteur $\vec{u}$ qui déterminent le rayon du cercle puis le point A qui est le centre du cercle à construire.

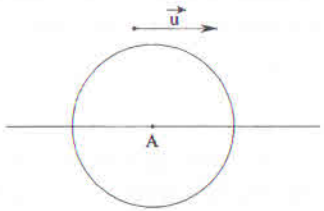


Fig. 3

Stratégie probable dans le cas où on ne pense pas au parallélogramme ; elle fonctionne pour n'importe quelle position du point A.

Ce TD a pour objectif l'invariant vi (représentation d'un vecteur[15]) et pour réussir les activités l'élève doit mettre en œuvre d'autres invariants, à savoir : le concept-en-acte xii, qui donne la définition d'un vecteur par direction, sens et longueur et le théorème-en-acte i, deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même longueur. Les élèves peuvent encore faire appel au théorème-en-acte ii, qui donne l'égalité vectorielle par le parallélogramme, dans le cas où ils décident de construire un représentant en utilisant un parallélogramme. De plus certains invariants peuvent fonctionner comme invariants de contrôle au moment de valider la construction effectuée. En effet, le représentant d'un vecteur est un vecteur qui lui est égal ce qui signifie que l'élève doit mettre en œuvre un invariant sur l'égalité vectorielle pour décider de la validité de sa construction. Dans la réalisation de l'activité, nous chercherons à revenir sur cette question.

Dans cette activité, Cabri-géomètre II offre aux élèves la possibilité de valider leurs constructions, ce qui fait d'ailleurs partie des objectifs de l'enseignant. L'environnement informatique offre une rétroaction au niveau visuel.

4.1.2.2 - Réalisation de l'activité

Tout d'abord l'enseignant a laissé du temps aux élèves pour qu'ils essaient de construire seuls la macro-construction. Pendant ce temps nous avons circulé entre les élèves pour repérer les stratégies qu'ils utilisaient.

Dans le déroulement de la séance, l'enseignant disait à ceux qui avaient finit la macro de vérifier si elle était "résistante" quand on déplaçait le vecteur donné. A ce moment l'invariant i, "deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même longueur", a joué le rôle d'un invariant de contrôle des actions des élèves. Le représentant ne doit changer que si on change la longueur du vecteur donné (avec l'outil "Pointer"), ou

[15] Théorème-en-acte vi) : Soit O un point fixé du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M unique tel que $\vec{u}=\vec{OM}$.

encore la direction et le sens (avec l'outil "Rotate"). Dans la séance de classe entière, l'enseignant testait avec la tablette chaque proposition des élèves pour vérifier si leurs constructions résistaient au déplacement, ensuite il institutionnalisait les procédures correctes. Seul un élève a proposé d'utiliser la translation pour construire un représentant de $\vec{u}$; les autres élèves ont suggéré la construction d'un parallélogramme. La plupart d'entre eux a utilisé la stratégie S2.A), et un petit nombre s'est servi de la symétrie centrale, (stratégie S2.B). Enfin, l'enseignant a aussi évoqué la possibilité d'utiliser le compas.

Nous avons pu observer que l'utilisation de Cabri-géomètre II impose aux élèves des changements sur la façon de voir les objets ; Cabri les oblige à une explicitation des propriétés et définitions. En papier crayon, l'élève peut dessiner deux vecteurs égaux sans être obligé d'expliciter les trois propriétés : direction, sens et longueur. Dans le nouvel environnement, on passe du spatio-graphique au géométrique : pour qu'une construction soit "correcte" dans Cabri, il faut que les propriétés de la figure restent vraies quand on déplace les objets. Autrement dit, si on ne construit pas de façon géométrique le représentant d'un vecteur, c'est-à-dire sur une droite parallèle dans le même sens et de même longueur (pas au hasard ou au jugé) que le vecteur donné, alors quand on modifie la longueur du vecteur $\vec{u}$, par exemple en déplaçant l'une de ses extrémités, son représentant perdra cette propriété. Par exemple, si un élève trace une parallèle au vecteur donné et ensuite, sur cette parallèle il fait au jugé la longueur, quand on bougera le vecteur donné le représentant aura toujours la même longueur, fixée au départ. Donnons un dessin pour faciliter la visualisation de la construction telle que nous la décrivons :

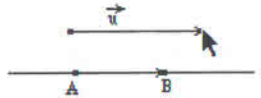


Fig. 4

Dans la figure ci-dessus, avec l'outil "Pointer" nous avons déplacé l'extrémité du vecteur $\vec{u}$, modifiant ainsi sa longueur. Comme le point B a été marqué au jugé, la longueur de $\vec{AB}$ reste inchangée.

Nous avons pu constater que quelques élèves utilisaient cette "procédure", erronée du point de vue Cabri-géomètre II, mais qui en papier crayon, pourrait être acceptée. Elle pourrait être acceptée car l'enseignant n'a pas les moyens de vérifier si l'élève à fait le représentant au jugé ou s'il a utilisé des instruments de construction tels que la règle et le compas. En d'autres termes, il n'a pas de moyens de contrôle des actions des élèves dans le milieu papier crayon pour ce type d'activité.

Si nous revenons aux "actions exigibles des élèves" nous pouvons dire que dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II, on ne demande pas à l'élève d'identifier si les dessins des deux vecteurs sont égaux mais de construire géométriquement un vecteur qui

soit égal à un autre vecteur donné. L'égalité vectorielle par direction, sens et longueur ne pose pas de problèmes aux élèves : si on leur demande ce que signifie l'égalité de deux vecteurs, ils le disent, mais ils ne savent pas comment faire pour construire un vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui soit égal à un vecteur $\vec{u}$ donné. Citons pour cela un élève face à cette activité, le premier jour du travail sur le scénario (il avait déjà effectué les deux premières activités) :

L'élève : Monsieur ? Comment on fait pour construire un vecteur égal à l'autre ?

Comme l'enseignant n'était pas disponible, l'élève nous a appelé et il nous a posé la même question. Nous lui avons d'abord demandé comment il reconnaissait deux vecteurs égaux et il a bien répondu, en expliquant qu'ils devaient avoir même direction, même sens et même longueur. Il savait donc vérifier si deux vecteurs sont égaux, mais il ne savait pas comment faire pour construire un vecteur égal à un autre, et la tâche qui était posée l'obligeait à affronter cette difficulté, tandis qu'en papier crayon cela n'est pas un objet d'enseignement, comme nous l'avons dit dans les objectifs de l'enseignement lors de l'exemple de l'addition vectorielle, partie I et dans les actions exigibles des élèves.

Cela nous permet donc aussi de repérer une différence au niveau des exigences, entre le travail en papier crayon et celui fait avec Cabri-géomètre II : dans le premier cas on peut faire au jugé un dessin du représentant tandis que dans le deuxième cas l'élève doit effectivement construire un vecteur égal à un autre vecteur donné.

Suite à ce TD, il y a eu lieu une séance en classe entière dans laquelle l'enseignant a repris les activités du TD. Son objectif était de faire un bilan sur le contenu de vecteurs vu en Quatrième et Troisième, à savoir :

- définition d'un vecteur,
- égalité vectorielle,
- représentant d'un vecteur.

La tablette a été utilisée pour reprendre chaque activité de façon à ce que les élèves suivent ce que l'enseignant faisait.

Après l'institutionnalisation de l'égalité vectorielle (dans quelles conditions peut-on dire que deux vecteurs sont égaux), l'enseignant institutionnalise la nouvelle notation $\vec{u}$ pour un vecteur (qu'il avait introduit lors de la première activité en TD), et il dit :

"On peut dessiner un représentant d'un vecteur à partir de n'importe quel point. A cause de ça, ça peut être intéressant d'avoir une notation qui ne dépend pas des points A *et* B".
Et il écrit au tableau : *notation* $\vec{u}$ "

Les élèves travaillaient dans cette séance en papier crayon : l'enseignant disait ce qu'il fallait mettre sur le cahier de cours. Il n'y a pas des différences par rapport à ce qu'on trouve

dans les manuels, ce qui change est la façon selon laquelle ces concepts ont été introduits avant d'être institutionnalisés.

Il est probable, par exemple, qu'un élève de cette classe pense différemment d'autres élèves d'une classe ordinaire quand il aura à construire des vecteurs égaux, ou à vérifier qu'un vecteur est un représentant d'un autre vecteur donné. Le travail fait avec cette classe laisse croire que les élèves de cette Seconde penseront davantage à construire au sens strict un vecteur égal à l'autre que les élèves d'une classe ordinaire. Nous reviendrons à cette question lors des entretiens car l'un de nos objectifs est de vérifier si l'utilisation d'un environnement informatique peut modifier les attitudes des élèves concernant les vecteurs.(cf. paragraphe 6)

4.2 - TD n° 6 - Coordonnées d'un point - d'un vecteur

Pour ce TD nous avons travaillé en concertation avec l'enseignant, et lui avons suggéré d'insérer des questions qui puissent nous permettre d'étudier en particulier la présence ou non de l'invariant xviii, à savoir : "si un vecteur est situé dans le premier quadrant alors il a des coordonnées positives, dans le troisième ses coordonnées sont négatives etc.".

La première activité de ce TD fait travailler aux élèves les coordonnées d'un point : il s'agit par exemple de placer un point A de telle façon que son abscisse soit nulle. Pour le texte de cette activité nous renvoyons aux annexes du chapitre D.

La deuxième activité de ce TD vise la construction d'une macro qui donne les coordonnées d'un vecteur. Rappelons que les coordonnées d'un vecteur ont été introduites en classe de Troisième. Après la création de cette macro, sont posées deux questions pour lesquelles les élèves doivent prévoir une réponse et ensuite valider avec Cabri II leurs réponses. Suite à cette deuxième activité deux autres exercices ont été proposés pour tester, chez les élèves, la résistance de l'invariant cité ci-dessus. Donnons d'abord l'énoncé des ces activités suivi d'une analyse a priori, pour ensuite discuter des résultats obtenus lors de la réalisation du TD.

4.2.1 - Des activités autour des coordonnées d'un vecteur

L'objectif de ce TD est de faire comprendre aux élèves que les coordonnées d'un vecteur sont calculées à partir des coordonnées de ses points extrémités mais que ce qu'on calcule sont des distances entre les abscisses et les ordonnées et que ces distances restent inchangées si on déplace le vecteur sans modifier ni sa direction, ni son sens et ni sa longueur.

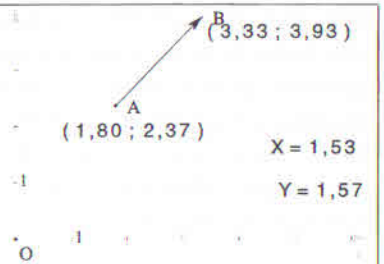
4.2.1.1 -Activité 2° - macro "coordonnées d'un vecteur"

2°) Coordonnées d'un vecteur

Créer un point B et le vecteur $\overrightarrow{AB}$; afficher les coordonnées de B. Calculer [F_6 6:Calculate], en sélectionnant les différentes coordonnées puis afficher les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

Créer une macro qui, à partir de deux points A et B, produise les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

(pour créer cette macro, il faut désigner comme objets initiaux le vecteur et les axes et comme objets finaux les deux coordonnées calculées). On appellera cette macro "coordvect".



Remarque : Sur la TI 92, les deux coordonnées s'affichent l'une sur l'autre. Pour rendre la lecture possible, il est nécessaire de décaler l'un des nombres à l'aide de F_1. On le fera systématiquement à chaque utilisation de la macro.

a) Prévoir ce que deviennent les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ lorsqu'on déplace $\overrightarrow{AB}$ à l'aide de [F_1 1:Pointer]. Écrire cette prévision sur le cahier.
Vérifier avec la machine et en cas d'erreur, expliquer l'observation ou appeler le professeur.

b) Prévoir ce que deviennent les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ lorsqu'on fait tourner $\overrightarrow{AB}$ à l'aide de [F_1 2:Rotate]. Écrire cette prévision sur le cahier.
Vérifier avec la machine et en cas d'erreur, expliquer l'observation faite ou appeler le professeur.

Avec les questions a) et b) de l'activité 2°, nous voulions confirmer ou infirmer la présence d'un invariant du type de l'invariant xviii), en ayant une trace écrite de la prévision de l'élève. Le fait de demander à l'élève de déplacer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ pour valider, ou non, sa réponse, permet de confronter l'élève à l'invariant construit par lui (si c'est le cas). En effet, étudions quelques possibilités de réponses des élèves :

(i) pour la question a) l'élève peut prévoir que :

- les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ ne changent pas quand on déplace ce vecteur à l'aide de l'outil "pointer", ce qui peut signifier qu'il a compris que les coordonnées d'un vecteur ne dépendent pas de la position du représentant dans le plan, ainsi quand on le déplace en conservant toutes ses caractéristiques il ne se passe rien avec ses coordonnées.

- les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ changent quand on le déplace dans le plan et dans ce cas nous pouvons dire que pour cet élève le vecteur est un objet strictement géométrique, ayant des propriétés affines comme le point : si on déplace un point dans le plan ses coordonnées changent ... alors pour un vecteur c'est pareil. Il s'agit ainsi d'un invariant du moins proche

de celui que nous avons énoncé (l'invariant xviii), mais il faut analyser les réponses des élèves pour en affirmer avec exactitude des invariants construits par les élèves.

Notons que les possibilités décrites ci-dessus sont valables dans l'environnement Cabri-géomètre II, il est ainsi naturel de supposer que nous pourrons modéliser d'autres formes de l'invariant xviii) liées à cet environnement.

Avant de passer à la question b) l'élève doit valider avec la TI 92 sa réponse ; ainsi quand il passe à la question suivante, a priori il sait que en déplaçant un vecteur avec l'outil "ponter" rien ne se passe aux coordonnées du vecteur.

(ii) pour la question b) l'élève peut prévoir que :

- les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ ne changent pas quand on le fait tourner, ce qui peut être entre autres une conséquence du résultat vu pour la question antérieure : rien n'a changé avant, rien ne change maintenant. Dans ce cas il n'a pas pris en compte le fait que cette fois la longueur du vecteur ne change pas mais sa direction change, ce qui provoque un changement sur les coordonnées du vecteur.

- les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ changent quand on le fait tourner, ce qui peut signifier que l'élève a compris qu'avec l'outil "tourner" on change la direction du vecteur.

Cette activité est une première approche pour traiter les coordonnées d'un vecteur et l'invariance de ses coordonnées par rapport à la position du représentant dans le plan. Des activités supplémentaires sont nécessaires pour confirmer ou infirmer l'acquisition de cet invariant par les élèves. En effet, pour la question a), par exemple, l'élève a déplacé le vecteur, et il peut penser alors qu'il s'agissait du même vecteur, et dans ce cas il peut être naturel de supposer que les coordonnées ne changent pas, sans pour autant vouloir dire qu'il a compris qu'à chaque fois qu'on déplace le vecteur, on a en fait des représentant du vecteur et les coordonnées des représentants d'un même vecteur sont toujours égales. Ainsi deux autres activités sont élaborées pour déstabiliser ce type d'invariant chez l'élève et lui permettre de créer des nouveaux invariants, cette fois corrects, sur la distinction : coordonnées d'un point/coordonnées d'un vecteur.

4.2.1.2 - Activité 3°

3°) Exercice
a) Sur le cahier, fixer un repère d'origine O ; dessiner un vecteur ayant les coordonnées positives et un autre ayant les coordonnées négatives. Avec la machine, vérifier si c'est bien le cas.

b) Préciser dans quels cas le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a des coordonnées :
- toutes les deux positives ;
- toutes les deux négatives ;
- de signes contraires

c) Dans quels cas, l'une des coordonnées est-elle nulle ?
d) Dans quels cas, les coordonnées du vecteur coïncident-elles avec celles d'une de ces extrémités ?

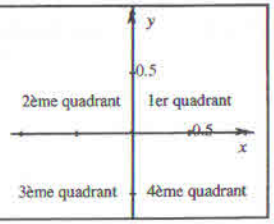
e) Construire le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Comparer les coordonnées de M et de $\overrightarrow{AB}$.

Dans l'activité antérieure l'élève partait d'un vecteur déjà dessiné sur papier crayon et il faisait alors de prévisions. A présent il part de ce qu'il doit obtenir, un vecteur de coordonnées positives (ou négatives), et il doit produire un vecteur satisfaisant à cette condition. D'après la pré-expérimentation que nous avons menée, et prenant en compte l'invariant erroné xviii, construit par les élèves, il peut avoir une tendance à placer un vecteur dans le premier quadrant pour obtenir un vecteur de coordonnées positives, dans le troisième pour obtenir un vecteur de coordonnées négatives et ainsi de suite. C'est pourquoi cette activité est suggérée. Après avoir tracé les vecteurs, l'élève utilise la machine pour valider ou non sa réponse, ce qui doit permettre de déstabiliser l'invariant erroné (dans le cas où il soit construit par l'élève). La question a) (jointe à la première activité) doit permettre à l'élève d'émettre des conjectures pour les questions b) et c).

4.2.1.3 - Activité 4°

4°) Exercice
a) Est-il possible de dessiner un vecteur $\overrightarrow{RS}$ ayant ses coordonnées négatives avec les points R et S dans le 1er quadrant ?
b) Est-il possible de dessiner un vecteur $\overrightarrow{AB}$ ayant ses coordonnées positives avec les points R et S tous les deux dans le 3ème quadrant ?



En demandant aux élèves de la possibilité de construire un vecteur (en fait un représentant d'un vecteur) ayant ses coordonnées négatives (ou positives) dont les extrémités appartiennent au premier quadrant (ou troisième), nous visons encore à analyser les

invariants construits par les élèves autour du lien entre coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur.

Enfin l'ensemble de ces activités vise à permettre aux élèves de construire l'invariant global selon lequel les coordonnées d'un vecteur ne dépendent pas de la position du vecteur dans le plan.

4.2.1.4 - Le rôle de Cabri-géomètre II dans les activités

Le milieu constitué autour de Cabri-géomètre II offre une rétroaction à l'élève : des conjectures sont élaborées par eux dans l'environnement papier crayon et ensuite validées, ou non, en utilisant l'environnement informatique. C'est justement ce type de rétroaction qui pourra aider à déstabiliser les invariants erronés éventuellement construits par les élèves. En papier crayon l'élève dessine un vecteur qui est supposé avoir des coordonnées positives (par exemple) mais il n'a pas de moyen de contrôle de cette action.

Les rétroactions offertes par Cabri sont ici de deux types : perceptif ou visuelle (l'élève voit l'effet du déplacement, les propriétés qui sont conservées) et géométrique-numérique (l'élève lit les coordonnées d'un vecteur qui sont affichées).

4.2.2 - Réalisation des activités et résultats obtenus

4.2.2.1 - Activité 2°

Nous ne discuterons pas ici de tout ce qui s'est passé lors de la réalisation de cette activité, comme par exemple la construction de la macro. Nous centrons l'attention sur les questions a) et b).

Pour l'item a) la plupart des élèves a répondu que les coordonnées ne changeaient pas ; nous en avons rencontré trois (parmi ceux qui ont écrit une prévision sur le cahier et ne l'ont pas effacée ensuite[16]) qui ont prévu que les coordonnées allaient changer. Ce type de réponse peut être justifié par l'invariant suivant, qui est une variation de l'invariant xviii :

- les coordonnées d'un vecteur dépendent des coordonnées de ses extrémités : si on déplace le vecteur $\overrightarrow{AB}$, les coordonnées des points A et B changent alors les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ changent aussi.

16 L'enseignant avait demandé aux élèves d'écrire leurs prévisions sur le cahier et si les réponses n'étaient pas bonnes, ils devraient écrire la bonne réponse avec un stylo de couleur différente et ne pas effacer ce qu'ils avaient fait. Cette consigne a été donnée pour toutes les activités, mais les élèves ont eu du mal à laisser sur le cahier une notation qui ne correspondait pas à ce que voulait l'enseignant. Nous avons ainsi perdu parfois ce qu'ils pensaient en début d'une activité.

Cet invariant est lié au caractère dynamique de Cabri-géomètre II, et donc il s'agit d'un invariant pouvant exister dans cet environnement. Mais dans le fond il relève de la même conception que l'invariant global xi. En effet, tout les deux attachent les coordonnées d'un vecteur à celle de ses points extrémités.

L'invariant viii a servi comme *structure de contrôle* pour l'invalidation de la réponse fournie à la question a). En effet, après avoir fait les prévisions en papier crayon, les élèves traçaient le vecteur dans Cabri, puis affichait ses coordonnées avec la macro "coordvecteur". Ensuite il déplaçait le vecteur en vérifiant que les coordonnées du représentant du vecteur ne changeaient pas.

Pour la question b), l'ensemble des élèves a répondu que les coordonnées allaient changer, ce qui est assez normal parce qu'ils avaient déjà vérifié dans Cabri II la réponse donnée par un déplacement et à ce moment l'enseignant a mis l'accent sur le fait qu'il ne se passait rien car on déplace le vecteur avec l'outil "Pointer".

D'après cette activité nous aurions pu conclure que les élèves avaient commencé à comprendre que les coordonnées d'un vecteur dépendent de sa direction, de son sens et de sa longueur et non de sa position dans le plan ce que, d'ailleurs, ils ont écrit comme conclusion dans leur cahier. Et pourtant la réalisation de l'activité suivante, qui a comme objectif de traiter encore la présence de l'invariant xviii (rappelé ci-dessus), montre que, dans sa globalité, l'invariant résiste toujours.

4.2.2.2 - Activité 3°

3°) Exercice
a) Sur le cahier, fixer un repère d'origine O ; dessiner un vecteur ayant les coordonnées positives et un autre ayant les coordonnées négatives. Avec la machine, vérifier si c'est bien le cas.

b) Préciser dans quels cas le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a des coordonnées :
- toutes les deux positives ;
- toutes les deux négatives ;
- de signes contraires

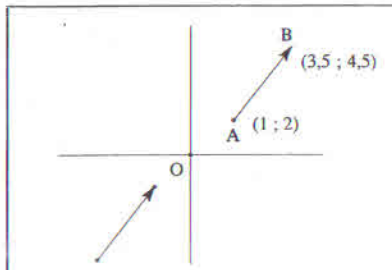
c) Dans quels cas, l'une des coordonnées est-elle nulle ?
d) Dans quels cas, les coordonnées du vecteur coïncident-elles avec celles d'une de ces extrémités ?

e) Construire le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Comparer les coordonnées de M et de $\overrightarrow{AB}$.

En ce qui concerne les questions a) et b), approximativement un quart des élèves a fourni un vecteur de coordonnées positives dans le premier quadrant et un vecteur de coordonnées négatives dans le troisième quadrant. Parmi ces élèves nous avons trouvé

essentiellement deux types de procédures : quelques fois il s'agissait d'un représentant du même vecteur qui était tout simplement dessiné dans l'autre quadrant (figure 1, ci-dessous[17]) ; d'autres fois il s'agissait de dessiner des vecteurs différents entre eux, mais qui n'avaient pas de coordonnées positives ou négatives, comme il était demandé (figure 2).



*lorsqu'elles se trouvent positives, elles sont dans le quart en haut à droite
*lorsqu'elles se trouvent négatives, elles sont dans le quart en bas à gauche

figure 1

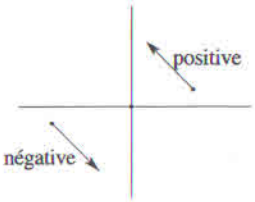


figure 2

Les réponses fournies par les élèves lors de la réalisation de cette activité peuvent être justifiées par la mise en œuvre d'un invariant lié à l'invariant xviii, qui est un invariant global qui traite de la dépendance des coordonnées d'un vecteur aux coordonnées d'un point. Nous les formulons de la manière suivante :

- *les coordonnées d'un vecteur dépendent des coordonnées de ses extrémités : si on déplace le vecteur $\overrightarrow{AB}$, les coordonnées des points A et B changent alors les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ changent aussi.* (figure 1)

- *les coordonnées d'un vecteur dépendent des coordonnées de ses extrémités : pour qu'un vecteur ait des coordonnées positives, il faut que les coordonnées de ses extrémités soient positives, pour qu'il ait des coordonnées négatives il faut que ses extrémités aient des coordonnées négatives.* (figures 1 et 2)

D'autres élèves ont dessiné correctement, mais toujours un vecteur de coordonnées positives dans le premier quadrant et un vecteur de coordonnées négatives dans le troisième quadrant. Cela veut dire que même s'ils savent faire la distinction entre coordonnées d'un

[17] Nous donnons le dessin et le texte tel que l'élève a mis sur son cahier.

vecteur et celles d'un point, ils sont réticents à faire un vecteur de coordonnées négatives dans le premier quadrant.

Au fur et à mesure que les élèves voyaient que leurs réponses étaient incorrectes, au lieu de vérifier ce qui n'était pas vrai dans leur réponse, ils essayaient d'adapter ces réponses de façon à ce qu'elles soient justes. Malheureusement (pour nous) les élèves ne laissent presque jamais des traces des réponses données et ajustées ensuite : normalement la réponse erronée est effacée et la bonne réponse, d'habitude celle institutionnalisée par l'enseignant, est mise à la place de la première. Mais nous avons eu tout de même quelques bons exemples d'ajustements de réponses fournies par les élèves. Citons celui d'un élève qui a constaté qu'il ne suffit pas de mettre un vecteur dans le premier quadrant pour garantir que ses coordonnées soient positives. Il a alors essayé d'ajuster sa réponse :

> Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a des coordonnées positives lorsqu'il est sur le 1er quadrant /[18] lorsque le point A soit plus grand que le point B ;
>
> Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a des coordonnées négatives lorsqu'il est sur le 3ème quadrant / lorsque le point A soit plus petit que le point B ;
>
> Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a des coordonnées contraires lorsqu'il est sur le 2ème et 4ème quadrant / mais il faudra faire attention au sens du vecteur.

Nous ne discutons pas de la réponse finale donnée par l'élève, correcte ou non, mais du processus engagé par lui pour arriver à cette réponse. L'élève ne remet pas en cause l'invariant global construit qui ne fonctionne pas dans la situation présente. Au contraire, au lieu de construire un nouvel invariant dont le domaine de validité soi plus large il procède à des adaptations locales de sa réponse qui correspondent encore à l'invariant antérieurement construit (il faut noter que ceci est une interprétation que nous faisons, basée sur les réponses fournies par l'élève). Nous constatons donc un processus d'accommodation et d'adaptation.

Un autre argument utilisé par les élèves pour expliquer qu'un vecteur a des coordonnées positives ou négatives est exprimé en langue naturelle par les expressions "vers le haut" ou "vers le bas" ; une telle expression est répandue dans la classe et lorsque les élèves se rendaient compte que ces seuls arguments ne suffisaient pas pour bien déterminer les signes des coordonnées d'un vecteur, ils ajoutaient des termes tels que : "vers le haut à droite", "dans le quart en bas", "à gauche vers le bas" ...

[18] Nous mettons ce symbole pour séparer la première réponse donnée par l'élève de ce qu'il a ajouté par la suite.

Les contrôles faits par les élèves

Comme au début du TD les élèves avaient construit une macro-construction "coordonnées d'un vecteur", ils pouvaient vérifier si leur prédiction faite en papier crayon était vraie (en faisant la même chose sur Cabri II et en demandant leurs coordonnées). Une fois de plus, nous pouvons dire que le caractère dynamique de Cabri-géomètre II lié à la possibilité de faire la macro-construction "coordvect" permet à l'élève de vérifier des propriétés que l'environnement papier crayon ne le permet pas. Par exemple, on déplace le vecteur $\vec{u}$ et on voit que ses coordonnées restent inchangées (si on ne fait pas "Tourner" !), même s'il est dans un autre quadrant.

Suite à l'invalidation de leurs réponses sur Cabri, les élèves essaient de voir ce qui n'a pas marché ; l'enseignant est alors intervenu pour leur expliquer que les coordonnées d'un vecteur dépendent de sa direction, de son sens et de sa longueur, ce qui leur a permis de chercher à formuler des conjectures pour déterminer le signe des coordonnées d'un vecteur dans le plan.

Nous avons donc pu largement observer dans cette activité la présence de l'invariant xi sous différentes "expressions" ainsi que l'utilisation de Cabri comme moyen de contrôle et de validation des actions des élèves.

En papier crayon pour valider les réponses données, il faudrait calculer les coordonnées des extrémités de chaque vecteur (si possible) et calculer ensuite les coordonnées du vecteur pour pouvoir conclure s'ils sont égaux ou non. Le coût de ces opérations et le fait que cela n'est possible que pour quelques cas particuliers, (c'est-à-dire, on ne peut pas prendre deux vecteurs quelconques et calculer leurs coordonnées), rend la possibilité de valider le résultat très faible. En revanche, avec Cabri-géomètre II, en utilisant la macro-construction "coordonnée d'un vecteur" la rétroaction est immédiate et ne dépend pas du vecteur choisi, on peut prendre n'importe quel vecteur et demander ses coordonnées, on les a tout de suite. De cette façon quand l'élève dessinait deux représentants d'un même vecteur dans le premier et troisième quadrant en croyant que cela suffirait pour que leurs coordonnées soient respectivement positives et négatives, il utilisait ensuite la macro "coordvec" et vérifiait qu'en fait les coordonnées des deux représentants étaient égales, alors il s'agissait de deux vecteurs égaux.

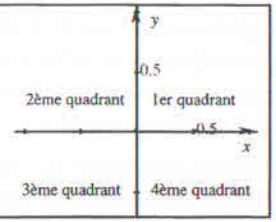
Nous avons ainsi pu vérifier la présence de l'invariant x, "deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même coordonnées", qui a joué un rôle de *structure de contrôle* pour les élèves, notamment pour ceux qui ont donné un représentant d'un même vecteur dans le premier et troisième quadrant. En effet, ils utilisaient la macro "coordvec" pour confirmer leur prédiction et constataient ainsi que les deux vecteurs sont égaux car ils ont mêmes coordonnées.

4.2.2.3 - *Activité 4°*

4°) Exercice

a) Est-il possible de dessiner un vecteur $\overrightarrow{RS}$ ayant ses coordonnées négatives avec les points R et S dans le 1er quadrant ?

b) Est-il possible de dessiner un vecteur $\overrightarrow{AB}$ ayant ses coordonnées positives avec les points R et S tous les deux dans le 3ème quadrant ?



Nous n'avons pas de données quantitatives sur le résultat de cette activité car les élèves ont écrit leurs réponses sur leur cahiers après discussion avec l'enseignant. Mais pendant le temps qui leur a été accordé pour étudier cette question, nous avons fait le "tour" de classe et nous avons pu voir des élèves qui répondaient "NON" à l'item a). C'est-à-dire que, pour ces élèves, le théorème-en-acte erroné selon lequel un vecteur dessiné dans le premier quadrant doit nécessairement avoir des coordonnées positives, est encore résistant. Ci-dessous l'exemple d'une réponse prévue par un élève.

> Non, ce n'est pas possible de dessiner un vecteur $\overrightarrow{RS}$ ayant ses coordonnées négatives (car ses coordonnées sont positives).

Au moment de faire le point sur l'exercice, l'enseignant a montré avec la tablette retroprojetable un représentant d'un vecteur dans le premier quadrant ayant des coordonnées négatives et un représentant d'un autre vecteur dans le troisième quadrant ayant des coordonnées positives.

4.2.3 - Lien entre points et vecteurs du plan

La cinquième activité de ce TD visait à montrer qu'à chaque couple (x;y) donné, il est toujours possible d'associer un vecteur $\overrightarrow{u}$ ayant comme coordonnées (x;y). Il s'agit d'une variation de l'invariant xiii[19]. L'analyse de ce TD nous intéresse car pendant les entretiens nous allons retravailler les invariants apparus ici. Donnons ci-dessous l'énoncé de cette activité :

[19] "Pour tout point M, il existe un unique couple (x,y) de réels tels que $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique couple (x,y) de réels tels que $\overrightarrow{u} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$."

5°) Vecteur de coordonnées données
Créer le fichier TD2E2 et afficher les axes
Éditer un nombre x [F7 6:Numerical Edit] (prendre pour valeur 1.32)
Éditer un nombre y (prendre pour valeur –1.5)
Construire le point de l'axe des abscisses ayant pour abscisse x (ici 1,32) [F4 9:Mesurement Transfer] (pour cela, désigner le nombre puis l'axe)
Construire le point de l'axe des ordonnées ayant pour ordonnée y (ici –1,5)
Construire géométriquement le point M ayant pour coordonnées (x ; y) ; créer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ et construire avec la macro "representant", un représentant de $\overrightarrow{OM}$ d'origine quelconque (si la macro n'est pas disponible avec F4 6:Macro Construction 1:Execute Macro, il est nécessaire de la charger [F1 1:Open] en précisant le type macro au lieu de figure).

Avec la macro "coordvec", afficher les coordonnées du représentant de $\overrightarrow{OM}$.
Modifier les valeurs des nombres x et y et observer les modifications entraînées. Noter les remarques.
Pour ceux qui ont le temps : à partir de la construction précédente, il est possible de créer une macro qui à partir de deux nombres x et y et d'un point ; crée le représentant d'origine ce point, du vecteur ayant pour coordonnées (x ; y). Pour définir cette macro, il faut désigner comme objets initiaux : un des axes, les deux nombres et le point et comme objet final : le représentant obtenu. On pourra l'appeler "Vectxy".

Pour effecteur l'activité, l'élève doit associer à un point M de coordonnées (x;y) un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x;y) ; comme dit explicitement dans l'énoncé. Cette étape accomplie, l'élève doit ensuite construire, à l'aide de la macro représentant, un vecteur d'origine quelconque qui soit représentant de $\overrightarrow{OM}$. En fait, la macro représentant ne permet pas de construire un vecteur $\overrightarrow{u}$ quelconque mais un vecteur géométrique car on doit indiquer l'origine du vecteur : cette dernière peut être n'importe où, mais il faut l'indiquer.

Une fois que les élèves ont construit le vecteur $\overrightarrow{u}$ représentant de $\overrightarrow{OM}$ et qu'ils ont modifié les valeurs des nombres x et y, ils ont pu observer que le vecteur $\overrightarrow{OM}$ changeait ainsi que le représentant $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{OM}$ et leurs coordonnées (qui sont en fait (x ; y)).

Il faut attirer l'attention ici sur le fait que ce type de problème ne fait pas partie des objets d'enseignement dans une situation ordinaire et c'est l'environnement utilisé qui donne la possibilité de le travailler donnant ainsi lieu à un problème intéressant.

Cette activité met en œuvre deux nouveaux invariants :

- *Dans un repère fixé à chaque paire de deux nombres x et y donnée on peut associer un vecteur $\overrightarrow{OM}$[20] de coordonnées (x;y)* (cet invariant apparaîtra à nouveau dans une séance d'institutionnalisation) ;

- *Pour tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x;y) il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x;y) et d'origine quelconque.*

[20] Le point O est l'origine du repère.

L'invariant suivant, lié à la macro construction est une généralisation des deux invariants décrits ci-dessus :

- On donne un repère, deux nombres x et y et un point O quelconque. Puis on construit un point M, un vecteur $\overrightarrow{OM}$ et un représentant $\vec{u}$ tous les deux d'origine quelconques et de coordonnées (x , y).

L'objectif de l'enseignant dans cette activité était d'apprendre aux élèves à construire un vecteur ayant pour coordonnées deux nombres donnés (qui peuvent être les coordonnées d'un point) et de construire ensuite un représentant de ce vecteur d'origine à un point quelconque du plan. La correspondance entre points du plan et vecteurs du plan n'était pas en jeu dans l'activité le jour de la réalisation du TD. Cela a été un objet d'étude quelques jours plus tard, dans une séance de classe entière lors de l'institutionnalisation du contenu déjà vu en TD (en fait il s'agissait de rappels de Quatrième et Troisième). Donnons ci-dessous un extrait de cette séance :

L'enseignant : Comment on peut faire pour trouver les coordonnées de $\vec{u}$[21] sans la macro ?
Un élève : Si on fait les carreaux[22].
L'enseignant : Et si on n'a pas le cahier ? Sur Cabri ?
(*Silence)
L'enseignant : Avec le représentant on ne peut rien faire ?
Un élève : On fait en partant de O (origine).
L'enseignant écrit au tableau : Si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ alors les coordonnées de M sont aussi les coordonnées de $\vec{u}$.

L'enseignant a supprimé la macro coordonnées d'un vecteur pour obliger les élèves à placer un représentant de $\vec{u}$ en partant de l'origine et il suffisait alors de demander les coordonnées du point M.

Les élèves ont très peu réagi car l'activité faite dans le TD ne leur donnait pas les moyens pour s'en sortir. En effet, l'activité apprend aux élèves à construire un vecteur à partir de deux nombres x et y et ensuite on construit un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x ; y) puis un représentant $\vec{u}$ de $\overrightarrow{OM}$, et ce que veut l'enseignant constitue la démarche contraire.

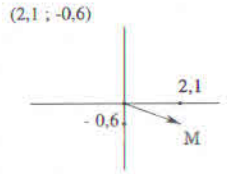
Avec cet activité l'enseignant institutionnalise le fait que pour trouver les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ quelconque, on trace un représentant de ce vecteur à partir de l'origine et on demande les coordonnées du point M. On traite ici de la représentation d'un vecteur sous une forme analytique pour trouver les coordonnées d'un vecteur sans utiliser la macro-

21 Le représentant du vecteur $\overrightarrow{OM}$ a été nomé $\vec{u}$ par l'enseignant.
22 Les élèves sont habitués à travailler en utilisant du papier quadrillé et ils comptent les carreaux pour calculer les coordonnées d'un vecteur.

construction "coordvec". L'enseignant a fait donc apparaître une nouvelle forme de l'invariant xii, sur la représentation d'un vecteur.

Face aux non-réponses des élèves, l'enseignant décide de changer la question et demande aux élèves si on peut trouver un vecteur à partir de deux nombres donnés. Ci-dessous l'extrait de la séance :

L'enseignant : Est-ce que si on donne deux nombres on peut trouver un vecteur ayant pour coordonnées ces deux nombres ?
Avec la tablette :



L'enseignant : Comme ça on a construit un vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui a pour coordonnées (2,1 ; -0,6).
L'enseignant change les nombres et le vecteur se déplace. Et il confirme le résultat avec la macro qui donne les coordonnées vecteur.
L'enseignant écrit au tableau : Étant donné un couple (x ; y), il existe un seul vecteur $\vec{u}$(x;y).

Le nouvel invariant listé ci-dessus, apparaît ainsi dans cette séance ; cette fois l'enseignant l'institutionnalise en utilisant un vecteur $\vec{u}$: à chaque point du plan de coordonnées (x;y) on associe un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x;y). Cet invariant fait correspondre à chaque point du plan un vecteur qui a pour coordonnées celles du point donné ; autrement dit il s'agit de la correspondance points du plan et vecteur du plan, sous une forme analytique, ce qui ne fait pas partie des objets d'enseignement.

L'analyse de la réalisation de ce TD ne nous fournit pas encore assez d'indices de l'acquisition de cet invariant ; les élèves n'étaient pas obligés de noter quoique ce soit sur leurs cahier de cours à propos de cet invariant[23]. Nous reviendrons à cette question lors des entretiens avec les élèves pour vérifier si ils vont réagir à la présence de cet invariant qui doit contribuer à caractériser la possibilité d'un changement de "domaines", du domaine de la géométrie vectorielle (car on prend un vecteur quelconque dans le plan) à la géométrie analytique vectorielle (on s'intéresse aux coordonnées du vecteur et des points du plan).

23 L'enseignant avait pour habitude de préciser ce qui devrait être écrit dans sur le cahier de cours.

4.3 - TD n° 7 - Somme de deux vecteurs

Nous n'avions pas d'invariants particuliers à analyser dans la mise en œuvre de ce TD, mais l'analyse de la réalisation du TD fournit des éléments intéressants pour compléter notre étude sur le rôle de Cabri comme fournisseur de rétroactions aux élèves et aussi pour confirmer quelques hypothèses dégagées de notre analyse des manuels autour de la relation de Chasles. Ainsi, pour ce TD, nous analysons l'activité pour laquelle Cabri-géomètre II agit comme un moyen de validation des propriétés vues en papier crayon. Dans un enseignement ordinaire, l'addition vectorielle est justifiée par la composition de deux translations. Cabri-géomètre II permet une observation dynamique de l'effet de l'addition des vecteurs sur les coordonnées. En effet, avec Cabri II nous avons la possibilité de construire géométriquement la somme de deux vecteurs et de la "valider" en utilisant l'article "somme vecteurs". On peut aussi déplacer les vecteurs et vérifier ce qui se passe avec le vecteur somme et déplacer le vecteur somme et observer l'effet sur les deux premiers vecteurs. De plus, dans l'environnement papier crayon l'attention est centrée autour de la lecture de l'addition vectorielle sur une configuration donnée ou sur une construction où il faut utiliser l'addition de deux vecteurs. Dans le scénario "vecteurs" l'attention est centrée autour de l'aspect opération, comme il est explicité dans cet extrait du document scénario :

> Cabri-géomètre II permet de centrer le travail sur l'aspect opération de la somme de deux vecteurs. En effet, on obtient directement la somme de deux vecteurs simplement en désignant les deux vecteurs et un point qui sera l'origine du représentant du vecteur somme. On n'a pas à se poser de problèmes de construction. (document scénario, p. 39)

Ci-dessous l'énoncé des deux premières activités de ce TD :

1°) Créer un nouveau fichier. Créer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) Construire la somme $\vec{u}+\vec{v}$ en utilisant [F4 7:Vector Sum] .

b) À partir d'un point M, construire la somme $\vec{u}+\vec{v}$ sans utiliser cette fois [F4 7:Vector Sum] ; expliquer puis vérifier la construction.

c) Quelle(s) disposition(s) des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ permet(tent) d'obtenir pour vecteur somme le vecteur nul ? le vecteur $\vec{u}$? le vecteur $\vec{v}$?

d) Créer un nouveau fichier. Créer trois points A, B et C et construire S tel que $\vec{AS} = \vec{AB} + \vec{AC}$ sans utiliser [F4 7:Vector Sum]. Expliquer et vérifier la construction.

2°) Créer un nouveau fichier. Créer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{s}$.

Construire le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{s} = \vec{u}+\vec{w}$ sans utiliser [F4 7:Vector Sum]. Expliquer puis vérifier la construction.

Nous sommes plus particulièrement intéressée par les questions pour lesquelles l'élève ne doit pas utiliser directement l'outil "Somme de vecteurs". Dans cette activité nous avons observé que les élèves utilisent surtout la technique du "bout-à-bout" pour trouver la somme de deux vecteurs (l'enseignant aussi). Cette différence peut être due au nouvel environnement car avec Cabri II et la macro "représentant d'un vecteur" il est peut-être plus facile de faire la mise "bout-à-bout" pour obtenir le vecteur somme. Dans l'énoncé des exercices, il n'y a aucun indice à propos de l'utilisation du parallélogramme ; il apparaît implicitement dans la troisième activité qui est la suivante :

3°) Exercice : Créer deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. Construire le milieu I de [BC] [F4 3:Midpoint] puis le symétrique S de A par rapport à I [F5 5:Symmetry].

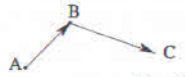
a) Vérifier que $\vec{AS} = \vec{AB} + \vec{AC}$

b) Justifier ce résultat par des propriétés géométriques

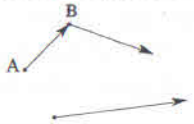
Cette absence du parallélogramme nous a frappé car dans notre analyse de manuels nous avons constaté la très grande importance qui lui est accordée, surtout dans les exercices de la classe de Quatrième qui entraînent les élèves à l'égalité vectorielle puis en Troisième où le lien entre le parallélogramme et la somme vectorielle est fortement mis accentué.(cf. chapitre B2). Avec l'environnement informatique et la macro "représentant d'un vecteur" ce qui change est qu'on peut facilement construire l'addition par "bout-à-bout", la symétrie, le parallélogramme comme l'a institutionnalisé l'enseignant dans une séance de classe entière. En réalité, dans Cabri-géomètre II cela est inutile car il suffit de choisir l'outil "Somme de vecteurs", et d'indiquer ensuite les deux vecteurs dont on veut faire l'addition pour que le logiciel fournisse tout de suite le vecteur somme.

En effet, dans la suite de ce TD, l'enseignant a institutionnalisé l'addition vectorielle. Pour cela il a utilisé la TI-92 pour rappeler comment effectuer en papier crayon cette opération (la technique de mise "bout-à-bout" et pour illustrer l'indépendance du résultat par rapport au représentant du vecteur. Nous rappelons que nous avons constaté dans notre analyse de manuels qu'il n'y a pas de travail concernant l'indépendance des opérations faites avec les vecteurs par rapport au représentant choisi. De la même façon que l'environnement informatique a permis de vérifier les propriétés des coordonnées d'un vecteur dans l'addition par exemple, au moment de procéder l'institutionnalisation de cette opération, l'enseignant a utilisé Cabri-géomètre II pour illustrer l'invariance de l'addition par rapport au représentant choisi, ce qui n'est pas un objet d'enseignement dans les manuels. Nous transcrivons ci-dessous cette partie de la séance collective :

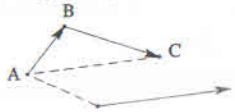
Avec la tablette, l'enseignant place deux vecteurs "bout-à-bout" :



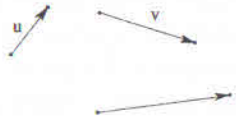
L'enseignant obtient ensuite vecteur somme avec l'outil correspondant de Cabri :



L'enseignant déplace le vecteur somme jusqu'au point A pour montrer qu'il coïncide avec ce qu'on obtient en papier crayon :



L'enseignant : Si j'ai deux vecteurs quelconques, $\vec{u}$ et $\vec{v}$, comment je trouve $\vec{u} + \vec{v}$? (les élèves indiquent comment le faire dans Cabri II) :



L'enseignant : Et si je déplace $\vec{u}$?
Les élèves : Le vecteur somme bouge ...
D'autres élèves : Non, ne bouge pas ...

L'enseignant montre en déplaçant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ que le résultat ne change pas.



Cette approche faite par l'enseignant, contribue une fois de plus à faire passer aux élèves, implicitement, l'idée du vecteur comme représentant d'une classe d'équivalence. L'utilisation de Cabri-géomètre II lui a permis de mettre en place un nouvel invariant qui ne fait pas partie des objets d'enseignement mais qui contribue à l'appréhension de la notion de vecteur en tant que représentant d'une classe d'équivalence :

"La somme de deux vecteurs ne dépend pas des représentants choisis."

L'idée de l'enseignant était aussi de ramener au cas papier crayon. Les élèves connaissaient déjà l'addition "bout-à-bout" en papier crayon et il voulait leur montrer que Cabri II donne bien la somme en renvoyant à un cas connu. Ainsi il construit le représentant

de la somme en un point quelconque, il se fonde sur le fait que si on déplace un vecteur dans Cabri le représentant ne change pas et enfin il montre qu'on obtient le même résultat.

L'enseignant revient sur l'addition vectorielle en séance de classe entière et il demande à ses élèves comment faire pour trouver $\vec{u} + \vec{v}$. Nous transcrivons ci-dessous le débat qui a eu lieu en classe suite à cette question :



Comment je fais la somme ?

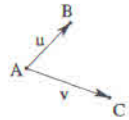


Il y a une autre façon ? Et si je fais



?

Un élève : On fait le parallélogramme.
L'enseignant : Comment on fait avec Cabri ?
Il nomme alors les points et les vecteurs sur le dessin de la façon suivante :



Un élève E_1 : On peut construire S à l'aide de deux parallèles.
L'enseignant : Quel est l'inconvénient de cette méthode ?
Un élève E_2: Quand B est sur AC, ça marche pas.
Un élève E_3: Dans ce cas les vecteurs ont même direction.
L'enseignant : Comment on fait ? (et ensuite il écrit au tableau) :
* On peut construire S à l'aide de parallèles et à l'aide du compas en reportant les longueurs AB et AC ;
* Par l'image de la translation de vecteur $\vec{v}$ du point B ;
* S est l'image par translation de vecteur $\vec{u}$ du point C ;
* S est l'image de A par symétrie par rapport à I milieu de [BC]

En résumé, en faisant le lien entre les deux environnements, l'enseignant a institutionnalisé les techniques suivantes :

- "bout-à-bout" ;
- parallélogramme ;
- translation ;
- symétrique du milieu du segment [BC] pour additionner $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ (dans l'analyse de manuels nous n'avons pas rencontré cette méthode) .

Concernant cette dernière méthode il faut remarquer que dans Cabri la symétrie est un outil direct de construction ce qui n'est pas le cas en papier crayon.

L'enseignant montre qu'avec Cabri-géomètre II il y a plusieurs possibilités pour faire la somme (si on ne veut pas utiliser directement l'outil "Somme"), tandis qu'en papier crayon on a seulement le "bout-à-bout" et le parallélogramme. En effet, en papier crayon les autres techniques apparaissent non pour ajouter deux vecteurs mais inversement, pour identifier une addition vectorielle dans une configuration vectorielle. On doit passer d'une transformation, d'une symétrie, d'un parallélogramme à une écriture vectorielle : en papier crayon c'est le vecteur qui permet d'exprimer les propriétés géométriques, il constitue un outil pour l'étude de configurations. Alors que dans cette situation l'enseignant demande la partie construction et ce dans Cabri-géomètre II. La géométrie va être alors un outil qui permet d'obtenir un signifiant, un dessin du vecteur.

4.4 - TD n° 8 - Quelques exercices d'entraînement avec les vecteurs

Dans les activités de ce TD, réalisées en papier crayon : *"les exercices 1 et 2 sont proposés dans l'environnement papier crayon assurant ainsi une autre contextualisation"* (document scénario, p. 41). Nous ne rencontrons pas de question à propos des invariants qui nous intéressent directement dans la réalisation du scénario, mais présentons tout de même un aperçu général du déroulement que permet de confirmer notre hypothèse à propos de l'absence d'opérationnalité de la relation de Chasles (cf. chapitre C).

Les deux premiers exercices de ce TD traitent de l'identification sur un dessin de l'égalité et de la somme vectorielle[24]. Notre intérêt porte ici sur le troisième exercice proposé qui fait travailler aux élèves la relation de Chasles 1ère forme ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$) et 2ème forme ($\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MN}$). Voici l'énoncé de cet exercice :

> Exercice 3
> 1°) Considérons quatre points A, B, C, D. Établir que :
> a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ c) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$
> 2°) Simplifier les expressions :
> a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ d) $\overrightarrow{FD} - \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{CB}$

Il s'agit de deux types d'exercices "algébriques" qu'on propose aux élèves pour les entraîner à l'usage de la relation de Chasles :

- le premier type est d'établir la vérité d'une expression et pour cela on doit introduire un point intermédiaire ; l'élève doit décomposer un vecteur en deux autres, en fonction d'un point qui dans la plupart des cas fait partie des points déjà donnés dans l'expression.

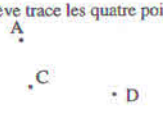
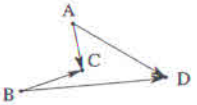
[24] Pour les énoncés de ces deux exercices nous renvoyons aux annexes du chapitre D.

- le deuxième type est de simplifier une expression et à ce moment là on doit utiliser la relation de Chasles dans l'autre sens, c'est-à-dire qu'on ne doit pas introduire un troisième point mais identifier par exemple que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Puisque nous nous sommes intéressée à analyser le travail des élèves en papier crayon sur la relation de Chasles après l'utilisation de Cabri II, qui constitue un milieu essentiellement géométrique, nous voulons aussi étudier le rôle du dessin dans ces deux types de situations.

Réalisation de l'activité

Pour la partie 1°) la plupart des élèves a démarré avec un dessin, ce qui est assez naturel car dans l'énoncé il est dit *"considérons quatre points A, B, C, D ..."*, ce qui caractérise l'énoncé d'un problème du type géométrique. Une fois fait le dessin de quatre points quelconques, ils se sont bloqués sur la question, ce qui est normal aussi car le dessin ne donne aucune indication sur la façon de montrer l'égalité demandée. Donnons un exemple d'une situation rencontrée en classe :

Tout d'abord l'élève trace les quatre points	Puis il unit les points pour obtenir les vecteurs de l'énoncé.
	

L'élève sait reconnaître une somme vectorielle sur un dessin donné, mais il ne s'agit pas de cela. En effet, le dessin construit ne lui donne pas le chemin à suivre pour établir l'égalité demandée et il reste bloqué.

L'enseignant a alors précisé, qu'il fallait utiliser la relation de Chasles. Les élèves la connaissaient mais ils ne savaient pas comment l'utiliser. En fait pour eux, établir un rapport entre l'énoncé de Chasles, "Si A, B, C quelconques alors $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$" et l'égalité à montrer ne va pas de soi.

L'enseignant a alors décidé de faire le tour de la classe pour aider les élèves à débloquer. Son discours a été du type suivant :

> "Qu'est-ce que tu veux monter ? Où tu veux arriver ? Donc, si tu veux montrer que ça c'est égal à ça (première question, item a), il faut faire apparaître ça (les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$)."

Son discours traite de la méthode pour résoudre des problèmes dans lesquels on doit montrer l'égalité de deux expressions : on part d'un terme de l'égalité, on utilise des propriétés vraies et on arrive à l'autre terme de l'égalité. L'enseignant croit qu'une fois que l'on sait qu'il faut utiliser la relation de Chasles et que l'on sait qu'il faut partir d'un côté de l'égalité pour arriver à l'autre côté on doit être capable de résoudre l'exercice. Mais ce qui paraît facile à voir pour l'enseignant ne l'est pas pour les élèves. En effet, après l'intervention de l'enseignant dans les groupes, très peu d'élèves sont arrivés à une solution. Le restant des élèves restant bloqués, l'enseignant est alors intervenu cette fois pour la classe entière. Donnons un extrait de son intervention et des solutions proposées par des élèves :

L'enseignant écrit au tableau : On doit établir que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = ?$

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = ?$

(Pour aider les élèves il écrit quelques possibilités de décomposition du vecteur $\overrightarrow{AC}$)

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XC}$

(Après cela l'enseignant invite un élève, quelconque, à venir au tableau et proposer une solution)

E_1 écrit : $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

L'enseignant parle à toute la classe et dit que n'allait pas partir de ça (remplacer $\overrightarrow{AC}$ par $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$), mais il allait mettre le point D car il veut y arriver. Et il écrit au tableau :

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

Ensuite un autre élève vient écrire sa solution au tableau :

E_2 écrit : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$.

La solution fournie par E_1 consiste tout simplement à substituer le vecteur $\overrightarrow{AC}$ par $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et à faire ensuite la simplification pour obtenir ce qui lui est demandé, tandis que l'enseignant veut d'abord savoir **où** on veut arriver pour savoir **comment** on doit partir. D'après le discours de l'enseignant et des décompositions qu'il a écrit au tableau pour le vecteur $\overrightarrow{AC}$, nous pensons qu'il voulait que les élèves utilisent $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ où le point D apparaît dès le début.

Le raisonnement de l'élève peut être expliqué par le fait qu'à chaque fois qu'on voit la relation de Chasles dans les manuels c'est écrit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. L'élève peut donc penser qu'une fois que l'enseignant a dit qu'il faut appliquer Chasles et qu'il a le vecteur $\overrightarrow{AC}$, il

suffit de faire la substitution dans l'expression, et cela marche bien! Nous avons demandé à cet élève de nous expliquer ce qu'il avait fait :

> Comme $\overrightarrow{AC}$ est égale à $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, j'ai remplacé et puis ... j'ai vu que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ est égale à $\overrightarrow{AD}$ ...

Pour l'item 2°) les élèves n'ont pas essayé de faire de dessin ; le corrigé fait par l'enseignant de l'activité 1°) a favorisé la prise de conscience de ce qu'il faut arriver à se détacher du dessin pour réussir ce type d'exercice. Il a aussi contribué à ce que les élèves comprennent ce que veut dire simplifier une expression et ils n'ont pas eu du mal à utiliser la relation de Chasles pour le faire.

L'analyse des difficultés des élèves à résoudre les exercices qui portent sur la relation de Chasles montre qu'il s'agit d'une règle qui n'a pas de sens pour eux - dans la mesure où ils ne comprennent pas que cette relation représente en réalité la possibilité de décomposition - et par conséquent, ils ne savent pas comment l'utiliser ou comment choisir le troisième point à insérer dans leur résolution. En plus, comme l'étude des vecteurs est essentiellement basée sur la géométrie, même lorsque les élèves ont à résoudre un problème pour lequel un dessin ne s'avère pas nécessaire ils en font un. Le dessin fonctionne comme un point d'appui pour les élèves. Et pourtant en cas d'utilisation pure et simple de la relation de Chasles, ce dessin n'apporte aucune aide. Au contraire, le fait de fixer l'attention sur un dessin ne favorise pas le déblocage, et risque de faire empirer les choses car il faut que les élèves arrivent à se détacher du dessin.

A propos des TD 9 à 14 ...

Les TD n° 9 et 10 traitent le produit d'un vecteur par un nombre. Une fois de plus les notions de direction et sens sont mis en discussion ainsi que la notion de représentant d'un vecteur. Comme nous n'étions pas particulièrement intéressée par les invariants mis en œuvre dans ces TD nous ne les analysons pas dans le corpus de la thèse, mais une analyse abrégée est donnée dans les annexes du chapitre D.

Nous n'allons pas analyser les TD n° 11, 12, 13 et 14 , d'abord parce que l'enseignant a travaillé en papier crayon et aussi parce que dans ces activités on ne travaille pas directement avec les invariants que nous avons listés. Nous étions présente, mais nous n'avons pu recueillir de données affinant notre analyse des invariants liés à la définition de vecteur et à la notion de représentant d'une classe. Nous donnons tout de même ci-dessous le titre de

chaque TD pour aider le lecteur à se situer par rapport à la séquence ; ces TD se trouvent aussi dans les annexes D[25].

TD n° 11 - quelques exercices d'application (en papier crayon)
TD n° 12 - base ; repère ; coordonnées (en papier crayon)
TD n° 13 - colinéarité ; équation d'une droite (en papier crayon)
TD n° 14 - exercices d'application : vecteurs ; équation de droite (en papier crayon)

4.5 - TD n° 15 - Équation de droite avec Cabri

Donnons d'abord l'énoncé de l'exercice 1, étudions-le et ensuite analysons quelques réponses fournies par les élèves.

> Exercice 1. Avec la TI 92, dans l'environnement Cabri (Geometry), créer le fichier TD15e1.
> a) Créer un vecteur et un point A quelconque. Construire la droite qui passe par A et qui admet comme vecteur directeur le vecteur donné. Afficher l'équation de cette droite [F6 5:Equation & Coordinates]. Il est possible de choisir dans [F8 9:Format] la forme de l'équation.
> b) Essayer d'abord de prévoir si l'équation de la droite est modifiée ou non lorsqu'on déplace le représentant du vecteur. Noter votre prévision sur le cahier puis vérifier sur la machine en utilisant le pointeur [F1 1:Pointer], . Expliquer l'observation.
> c) Que se passera-t-il pour la droite et pour son équation si on modifie la norme du vecteur sans changer sa direction ? Noter votre prévision sur le cahier puis vérifier avec le pointeur [F1 3:Dilate]. Expliquer l'observation.
> d) Que se passera-t-il pour la droite et pour son équation si on modifie la direction du vecteur ? Noter votre prévision puis vérifier avec le pointeur [F1 2:Rotate].
> e) Que se passera-t-il pour la droite et pour son équation si on déplace le point A ? Noter votre prévision puis vérifier en déplaçant le point A. Observer les conséquences pour l'équation et noter les remarques.

Il s'agit de faire travailler aux élèves la notion d'équation d'une droite et celle de vecteur directeur, en utilisant Cabri II comme un outil de vérification de leurs conjectures.

Dans la pré-expérimentation que nous avons faite dans la "Seconde H" (cf. annexes chapitre D), nous avons pu confirmer la présence de l'invariant suivant :

"Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$, alors $\vec{u}$ n'a que des représentants "tracés" sur la droite."

Pour ce TD nous avons voulu travailler sur l'indépendance du représentant d'un vecteur directeur par rapport à la position de la droite dans le plan. Le fait de commencer l'activité pour faire tracer un vecteur et un point A quelconque doit obliger l'élève à utiliser la définition d'un vecteur directeur : il donne la direction de la droite, alors il faut tracer une droite parallèle au vecteur passant par le point A. Le fait que le point A ne soit pas placé sur le représentant du vecteur doit contribuer à déstabilisation de l'invariant cité ci-dessus, mais cela ne garantit pas que pour l'élève ce vecteur ne soit pas "attaché" à cette droite et qu'à

[25] Pour les mêmes raisons nous n'analyserons aps le TD n° 16, sur l'orthogonalité de deux vecteurs.

chaque fois que l'on modifie ce vecteur (en le déplaçant, en modifiant sa longueur, ...) la droite subira des modifications seulement si la direction du vecteur est changée. Ainsi les questions b), c) et d) sont formulées pour permettre à l'élève de travailler les relations (de dépendance et d'indépendance) entre un vecteur directeur d'une droite et la droite.

Les prévisions des élèves pour la question b) peuvent être que l'équation de la droite va changer quand on déplace le représentant du vecteur, mais en utilisant Cabri pour valider cette conjecture il doit se rendre compte que la droite reste inchangée et par conséquent son équation aussi et cela car le déplacement du représentant du vecteur préserve la direction.

Pour la question c) ils nous semble que beaucoup d'élèves seront susceptibles de penser que l'équation de la droite change lorsqu'on change la longueur du représentant du vecteur, car dans ce cas le vecteur n'est plus le même : on oublie que ce qui compte est sa direction !

Finalement la question d) vise à permettre de clore cette discussion : la droite (et son équation) ne change que si la direction du vecteur directeur est modifiée.

Réalisation de l'activité

Comme les élèves n'utilisaient pas la calculatrice dans les derniers TD, la plupart d'entre eux n'ont pas apporté leur TI-92. Par conséquent l'enseignant a dû travailler avec la tablette, ce qui n'a pas favorisé les prévisions des élèves : d'une manière générale ils ont attendu que l'enseignant fasse l'exercice devant la classe. Nous aurions voulu pouvoir observer plus en détail leurs réponses mais cela n'ayant pas été possible, nous ne pouvons en tirer que quelques remarques. Parmi le très petit nombre d'élèves qui a essayé de faire des prévisions, on trouve des réponses telles que :

> réponse à l'item b) : Quand on déplace le représentant du vecteur, la droite n'est pas modifiée mais elle se déplacera comme le vecteur directeur.
> réponse à l'item d) : Il ne va rien se passer.

Pour cet élève, déplacer le représentant du vecteur directeur ne provoque pas de changements sur la droite mais elle se déplace avec le vecteur ce qui veut dire que le vecteur est "attaché" à la droite. Cela, lié à la réponse fournit pour l'item d) nous permet de faire l'hypothèse qu'il n'a pas acquis la définition de la direction : la confondrait-il avec le sens ?

Nous avons aussi trouvé un élève qui a répondu juste pour les items a), b) et d) et faux pour l'item c). Voyons sa réponse :

> c) Si je modifie la norme, l'équation change.

Si on suppose que l'élève a résolu l'exercice sans utiliser la machine et qu'il l'a fait "dans sa tête", on peut penser que le vecteur directeur et l'invariance de l'équation par

rapport au représentant choisi est acquise par l'élève, mais en revanche quand on change la norme, il ne s'agit plus d'un représentant d'un vecteur, donc cela doit forcément changer quelque chose pour la droite. Il était habitué à penser que, par exemple, l'addition est invariante par rapport au représentant choisi et, si on change la longueur du vecteur, l'addition change aussi, autrement dit qu'il n'y a pas d'invariance quand on change la longueur du vecteur.

Finalement nous donnons la réponse fournie par une élève qui a répondu correctement aux items a), b), c) et d) et de façon erronée à l'item e) :

> Si on déplace le point A, la droite restera de même direction que le vecteur et son équation restera la même.

Elle a rajouté après, avec un crayon à papier, la phrase suivante :

> "Faux. Le C de l'équation seulement change".

Cette réponse laisse la place à une interprétation à propos du lien affine/vectoriel : c'est-à-dire de la distinction entre une droite et ses caractéristiques, et un vecteur. Si pour ce dernier ce qui le détermine est une direction, un sens et une longueur, pour une droite affine on a besoin du point pour préciser sa position dans l'espace. Cette distinction n'est pas un objet d'enseignement et ne fait pas partie des objectifs de la séquence proposée (du moins il n'y a pas eu d'explicitation de part de l'enseignant).

5 - Conclusion

Dans l'analyse de la réalisation de la séquence, à partir des réponses fournies par les élèves, nous avons pu dégager la présence chez eux de quelques invariants qui ne faisaient pas partie de la liste élaborée au début de ce chapitre. Certains invariants ont été construits par les élèves et d'autres mis en œuvre par l'enseignant. Ces changements, par rapport aux objectifs de l'enseignant, sont dus à son rapport à l'objet vecteur et à l'utilisation du nouvel outil.

Listons donc ci-dessous les nouveaux invariants ou les nouvelles formes d'invariants formulés par nous à partir de l'analyse des réactions des élèves lors de la réalisation du scénario. Nous n'allons pas parler des moments où ces invariants sont apparus et pour quel type de tâche car cela a déjà été explicité dans l'analyse de la réalisation de la séquence.

a) Pour avoir même direction il faut que les vecteurs aient même sens.

b) deux vecteurs colinéaires ont même direction si ils ont même sens

c) Les coordonnées d'un vecteur dépendent des coordonnées de ses extrémités : pour qu'un vecteur ait ses coordonnées positives il faut que les coordonnées de ses extrémités soient positives, pour qu'il ait des coordonnées négatives, il faut que ses extrémités aient des coordonnées négatives.

d) Les coordonnées d'un vecteur dépendent des coordonnées de ses extrémités : si on déplace le vecteur $\overrightarrow{AB}$, les coordonnées des points A et B changent alors les coordonnés de $\overrightarrow{AB}$ changent aussi.

e) A chaque paire de deux nombres x et y donnée, on peut associer un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x;y) ;

f) Pour tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x;y) il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x;y).

f) A chaque point du plan de coordonnées (x;y), on associe un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x;y).

g) La somme de deux vecteurs ne dépend pas des représentants choisis.

h) Le produit par un scalaire est invariant par rapport au représentant choisi [26]

i) Dans un repère fixé à chaque paire de deux nombres x et y donnée on peut associer un vecteur $\overrightarrow{OM}$ [27] *de coordonnées (x;y) ;*

j) Pour tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x;y) il existe un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (x;y) et d'origine quelconque.

L'invariant suivant, lié à la macro construction est une généralisation des deux invariants décrits ci-dessus :

k) On donne un repère, deux nombres x et y et un point O quelconque. Puis on construit un point M, un vecteur $\overrightarrow{OM}$ et un représentant $\overrightarrow{u}$ tout les deux d'origine quelconques et de coordonnées (x , y).

Les invariants listés ci-dessus sont une interprétation des réponses des élèves et non une explicitation faite par eux. Toutefois dans les activités concernant les coordonnées d'un vecteur, nous avons eu quelques cas d'explicitation faite par l'élève. Citons les ajustements locaux explicités par un élève.

> Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a des coordonnées positives lorsqu'il est sur le 1er quadrant / et lorsque le point A soit plus grand que le point B ;
>
> Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a des coordonnées négatives lorsqu'il est sur le 3ème quadrant / et lorsque le point A soit plus petit que le point B ;

[26] Cet invariant apparaît lors des séances sur le produit d'un vecteur par un nombre. La réalisation de cette activité se trouve dans les annexes du chapitre D.

[27] Le point O est l'origine du repère.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a des coordonnées contraires lorsqu'il est sur le 2ème et 4ème quadrant / mais il faudra faire attention au sens du vecteur.

L'ajustement a été fait par l'élève quand il a vu, en utilisant le logiciel, que sa réponse n'était pas juste. Comme nous l'avons dit, le schème habituel de l'élève - lier les signes des coordonnées du vecteur aux signes des coordonnées des ses points extrémités - n'a pas été détruit, au contraire il l'a adapté pour avoir une réponse correcte (localement). La réalisation de l'activité a permis de perturber l'invariant construit par l'élève sans pour autant le déstabiliser.

A propos des invariants de contrôle

Dans l'analyse de la réalisation du scénario, nous avons repéré les invariants suivants qui ont servi de structure de contrôle pour certaines actions des élèves :

- *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont même direction, même sens et même longueur.*

  Cet invariant a servi de contrôle lors de la construction de la macro construction "représentant d'un vecteur".

- *Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coordonnées.*

  Cet invariant a servi de contrôle pour valider les conjectures faites en papier crayon sur les signes des coordonnées d'un vecteur.

A propos des égalités vectorielles ...

Dans la théorie des espaces vectoriels, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie l'égalité en termes de deux représentants d'une même classe d'équivalence. Dans l'enseignement secondaire, les élèves utilisent cette égalité en termes géométriques : les deux vecteurs qui sont définis par les points A, B, C et D sont égaux. Ainsi, nous avons $\overrightarrow{AB} =_{rep} \overrightarrow{CD}$ pour la première égalité et chez les élèves du secondaire, le théorème-en-acte construit, est, en effet, en termes géométriques : $\overrightarrow{AB} =_{géo} \overrightarrow{CD}$. De ce fait, nous pouvons faire une relecture des théorèmes-en-acte que nous avons formulés en début de ce chapitre et substituer les égalités, qui devraient être du type $égalité_{rep}$ par des égalités du type $égalité_{géo}$. Autrement dit, chez les élèves l'égalité entre deux vecteurs signifie deux segments parallèles, de même longueur et sur lesquels on a choisi le même sens de parcours. Il s'agit d'un ensemble d'éléments égaux qu'on peut lire sur le dessin, cela signifie qu'il s'agit d'un ensemble *fini* de vecteurs.

Actions exigibles des élèves

Au niveau des actions exigibles des élèves nous avons repéré deux actions différentes de celles exigées en papier crayon :

a) Savoir construire un représentant d'un vecteur donné,

b) Utiliser de façon opératoire la bijection entre les points et les vecteurs du plan.

De plus, les actions que nous avions repérées dans notre analyse, ne sont pas toutes apparues lors du travail avec Cabri-géomètre II, ce qui est normal car elles ont été repérés d'après notre analyse d'une situation ordinaire, c'est-à-dire dans le milieu papier crayon.

Résistance des invariants

Nous avons proposé des activités pour confronter les élèves à quelques théorèmes-en-acte erronés construits par eux, et essayer de perturber voire déstabiliser ces invariants, pour favoriser ainsi la création de nouvelles règles d'actions, voire de nouveaux invariants. L'analyse des résultats des activités du scénario, a montré que les réponses fournies par les élèves étaient incorrectes, mais cela n'a pas été suffisant pour déstabiliser les invariants erronés qui sont à la base des erreurs des élèves. En effet, en examinant les DM et les DS, nous observons que certains théorèmes résistent toujours[28]. Citons l'exercice 3 du DM 3 :

3
Dans un repère du plan,
- Construire un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ dont les coordonnées sont (2;5).
- Construire un représentant d'un vecteur $\vec{v}$ dont les coordonnées sont (-3;2).
- Construire un représentant d'un vecteur $\vec{w}$ dont les coordonnées sont (5;-3).
- Construire un représentant d'un vecteur $\vec{m}$ dans le quatrième quadrant et dont les coordonnées sont toutes les deux négatives.

Les résultats obtenus sont les suivants :

- 18 élèves sur 33 ont mis le vecteur $\vec{u}$ dans le premier quadrant, le vecteur $\vec{v}$ dans le deuxième quadrant et le vecteur $\vec{w}$ dans le quatrième quadrant, c'est-à-dire que même après le travail, surtout celui du TD n° 6, les élèves sont toujours amenés à faire une relation coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur, l'invariant xviii[29]. Quelques élèves ont mis le vecteur $\vec{m}$ dans le troisième quadrant ; peut-être parce que c'était le seul quadrant qui n'avait pas été utilisé (puisqu'ils ont suivi le raisonnement décrit ci-dessus).

28 Nous n'allons pas analyser chaque DM et DS car cela serait trop long et ne fais pas partie de nos objectifs. Nous prenons en particulier ce DM, car il atteste de la résistance de l'invariant X chez les élèves.

29 Invariant XI : "Si un vecteur est situé dans le premier quadrant alors il a les coordonnées positives, dans le troisième quadrant ses coordonnées sont négatives et dans les autres cas elles ont des signes différents. Autrement dit, les coordonnées d'un vecteur dépendent de sa position dans le plan".

• Parmi les 18 élèves cités ci-dessus, 3 élèves ont dessiné des vecteurs partant de l'origine des axes ce qui est assez naturel et plus facile à faire, et c'est aussi un indice qu'ils ont fait la correspondance point du plan et vecteur.

• 3 élèves ont dessiné un vecteur et ensuite un représentant de ce vecteur. A notre avis cela est dû au fait que, dans l'énoncé, il est dit de construire un représentant d'un vecteur ... ; l'élève a donc, fait un vecteur avec les coordonnées demandées et ensuite il a fait un représentant de ce vecteur. Y aurait-il pour lui une distinction entre un vecteur et un représentant de ce vecteur ?

Le rôle du logiciel

Nous avons vu que peu d'invariants ont fonctionné comme structure de contrôle pour valider les actions des élèves ; ce rôle a aussi été joué par l'environnement informatique qui a permis une confrontation des conjectures des élèves avec ce qui est représenté à l'écran. Cabri-géomètre II a ainsi fonctionné comme un moyen de contrôle et de validation dans des activités où l'on demandait d'abord d'émettre des conjectures en papier crayon, puis de les valider ou invalider avec Cabri-géomètre II. Ces rétroactions étaient de deux types : perceptives et numérique-géométrique.

6 - Les entretiens

6.1 - Préparation

Les entretiens étaient individuels, ils ont concerné environ un tiers des élèves de la classe et ont duré entre 50 à 60 minutes, une seule rencontre étant possible. Nous avons proposé aux élèves de venir travailler avec nous et avons ainsi interviewé ceux qui se sont portés volontaires. Ils étaient partagés entre ceux qui s'en sortaient bien avec le logiciel et ceux qui avaient ou non manifesté des difficultés dans l'apprentissage de la notion de vecteur.

Notre objectif était d'évaluer l'état des connaissances des élèves après la séquence d'enseignement sur les vecteurs. Certaines questions devaient être traitées sans utiliser la calculatrice car nous voulions regarder, entre autres, l'influence de Cabri sur l'apprentissage des élèves. Pour d'autres questions, nous avons fait appel à Cabri, soit en y faisant référence soit en utilisant la calculatrice pour confirmer des hypothèses.

Nous ne pouvions pas tester la présence ou l'absence de tous les invariants, ce qui nous a amené à choisir ceux qui ont été objet d'étude dans la séquence et qui semblaient poser des problèmes aux élèves. Relativement aux invariants, les questions auxquelles nous cherchons à répondre sont les suivantes :

1°) Les élèves confondent-ils toujours les notions de direction et de sens ? Ont-ils établi une distinction entre direction et sens, et en quoi consiste-t-elle ?

2°) L'invariance de l'addition vectorielle quels que soient les représentants choisis est-elle acquise par les élèves ?

Nous cherchons aussi à vérifier la présence des invariants suivants (que nous n'avons pas vu apparaître dans la séquence proposée) :

3°) Le vecteur directeur d'une droite est attaché "géométriquement" à la droite (il est *sur* la droite).

4°) Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites parallèles et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$.

5°) Le travail sur les invariants relatifs à la correspondance vecteur du plan et point du plan, a-t-il permis l'acquisition des invariants suivants ?

* Pour chaque vecteur du plan, il existe un représentant d'origine un point quelconque du plan.

** A chaque vecteur du plan de coordonnées (x;y), on peut associer un point M de coordonnées (x;y) et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ aura lui aussi (x;y) comme coordonnées (et

réciproquement, c'est-à-dire qu'à chaque point M du plan de coordonnées (x,y) on peut associer un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x,y).

6.2 - Les activités et analyse a priori

Notre objectif n'était pas de proposer aux élèves des activités *difficiles*, au contraire, nous visions à leur proposer des activités simples et claires pour tester la présence ou l'absence des invariants sous-jacents à leurs productions cités ci-dessus ; il s'agit d'exercices dans lesquels le vecteur apparaît comme objet et non comme outil de résolution pour les problèmes de géométrie.

6.2.1 - Activité n°1

Donnons d'abord l'énoncé de l'activité suivi de nos objectifs pour chaque question, puis des stratégies possibles.

Activité n°1 - (papier crayon)
Dans cette question, vous devez vous décider par "Vrai ou Faux" et ensuite vous devez justifier vos réponses :
a) Les vecteurs représentés ci-dessous ont même sens



b) Les vecteurs représentés ci-dessous ont même direction



c) Les vecteurs représentés ci-dessous ont même direction



d) Deux vecteurs colinéaires et de même norme sont égaux.

Dans cette activité, les items **a**, **b** et **c** visent à tester la résistance des invariants erronés qui concernent la direction et le sens du vecteur. Pour les items **a** et **b** nous avons choisi de représenter deux vecteurs qui "pointent vers la même zone" et dans une position qui peut satisfaire les élèves qui parlent de zone, ou de "vers le haut à gauche". Notre objectif étant de vérifier s'ils continuaient à parler de sens pour des vecteurs qui n'ont pas même direction ou à confondre les mots direction et sens comme dans le langage courant. Ce sera testé avec la réponse à l'item **c**.

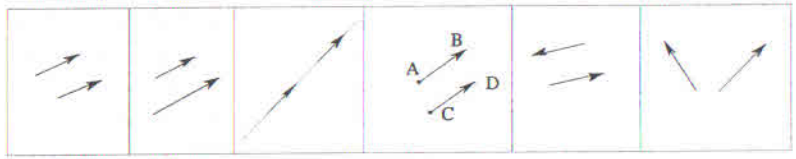
Nous avons choisi de donner les vecteurs par un dessin et non par leurs coordonnées, parce que nous voulons étudier la présence ou l'absence de l'invariant spatial chez les élèves ; si les vecteurs sont donnés par leurs coordonnées, ils pourraient par exemple les comparer et vérifier que les vecteurs ne sont pas égaux et cela n'apporterait aucun indice sur

l'absence de confusion de direction et sens d'un vecteur. De même nous avons décidé de ne pas dessiner les vecteurs dans une figure géométrique où ils pouvaient aussi conclure à l'inégalité des vecteurs à partir d'une étude de cette figure, sans entrer dans la discussion sur le sens ou la direction du vecteur. Nous avons ainsi voulu présenter des vecteurs de façon tout à fait détachée de leurs points extrémités ou du contexte d'une figure.

L'item **d** visait à repérer la prise de conscience chez l'élève de l'existence de deux vecteurs colinéaires de même norme opposés. Tout d'abord, nous voulions voir comment ils font la traduction de l'énoncé de l'exercice. Utilisaient-ils un dessin ou l'écriture symbolique vectorielle ? S'ils faisaient un dessin, le faisaient-ils avec deux points A et B (ce qui représente un vecteur géométrique), ou sans nommer les extrémités du vecteur (ce qui représente un vecteur dans le spatio-graphique) ? Les vecteurs sont-ils dessinés sur une même droite ?

Relativement au registre graphique nous croyons que des vecteurs colinéaires seront toujours dessinés avec le même sens. Enfin il se peut aussi que l'élève lise l'énoncé à partir de la fin et commence par dessiner deux vecteurs qui sont égaux ou deux vecteurs qui sont différents ; ensuite il en tirerait une conclusion à propos de la colinéarité.

Pour une meilleure compréhension des types des dessins susceptibles d'apparaître dans la question d), voici un tableau résumant quelques une de ces possibilités :



Cette activité nous permettra de savoir aussi ce que les élèves entendent par vecteurs différents : pensent-ils à des vecteurs qui n'ont pas même direction, comme la dernière paire de vecteurs que nous avons représentée ci-dessus ? Ce type de question peut apparaître par exemple si l'élève commence à résoudre le problème dans le sens inverse (ce qui est très peu probable), car il essaierait de dire ce que sont des vecteurs égaux.

Les **stratégies** de solutions possibles sont alors :

(i) Faire un dessin et en tirer des conclusions. Dans ce cas l'élève s'appuie sur le perceptif pour résoudre le problème ;

(ii) Faire un dessin, ensuite écrire $\vec{u} = k\,\vec{v}$ et ensuite en tirer des conclusions. Même si l'élève écrit l'égalité vectorielle, qui signifie colinéarité, il s'appuie sur un dessin.

(iii) Écrire directement $\vec{u} = k\,\vec{v}$, et en tirer des conclusions. Dans ce cas l'élève traduit de façon algébrique l'énoncé du problème et le résout en passant seulement par l'algèbre sans ressentir le besoin de faire des dessins.

Nous remarquons encore que la relation entre $\|k\vec{v}\|$ et $\|\vec{v}\|$ n'a pas été institutionnalisée ; l'enseignant l'a travaillé de façon implicite lorsqu'il a parlé du produit d'un vecteur par un scalaire.

Le fait de commencer l'exercice par un dessin peut empêcher l'élève de penser à d'autres possibilités car une fois qu'on a choisi un cas de figure il est difficile d'en imaginer un autre, sauf si en pensée on fait tourner un vecteur en conservant sa norme. Mais, en papier crayon, il est peu probable que l'élève ait une pensée qui ne soit pas statique, surtout sans disposer de Cabri.

6.2.2 - Activité n°2

Activité n°2 - (papier crayon)
Dessiner dans une feuille deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Puis, représenter la somme $\vec{u} + \vec{v}$.

L'objectif de cette activité est de vérifier comment les élèves obtiennent la somme vectorielle : font-ils au jugé un représentant de chaque vecteur à partir d'un point fixe ou font-ils une construction géométrique d'un représentant de $\vec{u}$ et d'un représentant de $\vec{v}$? S'ils font au jugé, nous leur demanderons comment ils peuvent être sûrs de leur résultat. Cela vise à connaître l'influence de Cabri sur leurs actions, puisque normalement en papier crayon ils font au jugé des représentants et ensuite ils font l'addition vectorielle. Nous cherchons à trouver des traces de la "pensée Cabri" dans leurs actions.

Une possibilité "économique" pour la construction au jugé, ou non, de l'addition vectorielle, est de conserver, par exemple, le vecteur $\vec{u}$ là où il a été construit et, à partir de son origine, ou de son extrémité, de faire un représentant de $\vec{v}$; ensuite le résultat est obtenu en utilisant directement Chasles ou le parallélogramme. Cette procédure, si on peut l'appeler ainsi, fait appel à deux types d'écriture de vecteurs à savoir, un vecteur quelconque $\vec{u}$ et un vecteur géométrique $\overrightarrow{AB}$ représentant de $\vec{v}$.

Cette activité permet aussi de vérifier si les élèves font l'addition bout-à-bout ou par le parallélogramme.

6.2.3 - Activité n°3

Donnons ci-dessous l'énoncé de l'activité 3 suivi d'une analyse des stratégies possibles qui sera liée au type d'invariant en jeu à chaque fois. Seuls les invariants qui nous intéressent sont listés ; il ne s'agit pas d'une liste exhaustive de tous les invariants en jeu pour chaque question.

Activité n°3 - (Cabri-géomètre II)
i) tracer une droite $\mathcal{D}$ quelconque et ensuite représenter un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$;
ii) donner les coordonnées de $\vec{u}$;
iii) tracer une droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$;
iv) tracer un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ et donner ses coordonnées.

Dans ce cas, nous supprimons la macro-construction "coordvec" du menu Cabri et la macro "représentant d'un vecteur" reste disponible.

Stratégies possibles :

Pour la droite $\mathcal{D}$ l'élève peut :

1) Dessiner $\vec{u}$ sur la droite, demander les coordonnées des points extrémités et calculer (avec la calculette ou en papier crayon) les coordonnées du vecteur $\vec{u}$;

invariant en jeu - Le vecteur directeur d'une droite est attaché "géométriquement" à la droite (il est *sur* la droite).

2) Dessiner $\vec{u}$ sur la droite, faire un représentant $\overrightarrow{OM}$ de $\vec{u}$ en partant de l'origine du plan et demander coordonnées du point extrémité M. Ensuite dire que les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont les mêmes que celles de M.

invariants en jeu - * Pour chaque vecteur du plan, il existe un représentant d'origine un point quelconque du plan.

** A chaque vecteur du plan de coordonnées (x;y), on peut associer un point M de coordonnées (x;y) et le vecteur $\overrightarrow{OM}$ aura lui aussi (x;y) comme coordonnées (et réciproquement, c'est-à-dire qu'à chaque point M du plan de coordonnées (x,y) on peut associer un vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x,y)).

3) Dessiner $\vec{u}$ sur la droite, demander l'équation de la droite et donner les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ en prenant les coefficients de $\mathcal{D}$. Dans ce cas nous allons interroger l'élève pour savoir quelles sont les coordonnées de $\vec{u}$.

invariant en jeu - Si $\mathcal{D}$ a pour équation $ax + by + c = 0$ alors le vecteur directeur de $\mathcal{D}$ a pour coordonnées $(-b, a)$.

4) Tracer la droite $\mathcal{D}$ et dessiner un vecteur $\vec{u}$, parallèle à la droite mais d'origine O, ensuite demander les coordonnées du point M extrémité du vecteur d'origine O et les

identifier comme étant les coordonnées du vecteur $\vec{u}$. Reste la question de savoir si le vecteur $\overrightarrow{OM}$ construit par l'élève aura même longueur que le vecteur $\vec{u}$.

invariants en jeu - Le vecteur directeur d'une droite est attaché "géométriquement" à la droite (il est *sur* la droite).

- Pour tout vecteur $\overrightarrow{OM}$ de coordonnées (x;y) il existe un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x;y) et d'origine quelconque.

Pour la droite $\mathcal{D}$' l'élève peut :

5) dessiner la droite et un vecteur $\vec{v}$ sur cette droite. Ensuite les possibilités sont les suivantes :

invariant en jeu - Le vecteur directeur d'une droite est attaché "géométriquement" à la droite (il est *sur* la droite).

5.1) demander les coordonnées des points extrémités du vecteur et calculer les coordonnées du vecteur $\vec{v}$

invariant en jeu - Si $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, $A(x_1 ; y_1)$ et $B(x_2 ; y_2)$ alors $\vec{v}$ $(x_2 - x_1 ; y_2 - y_1)$.

5.2) faire un représentant $\overrightarrow{ON}$ du vecteur directeur en partant de l'origine, demander les coordonnées du point N et les identifier à celles du vecteur $\vec{u}$. Cette stratégie est attendue dans le cas où l'élève à utilisé la stratégie 4) pour la question ii). Dans ce cas l'élève se rendra-t-il compte que les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ sont proportionnelles ? quelle interprétation donnera-t-il de ce fait ?

invariants en jeu - Le vecteur directeur d'une droite est attaché "géométriquement" à la droite (il est *sur* la droite).

- $\vec{u}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$'. Si $\mathcal{D} // \mathcal{D}$' alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou $\vec{u} = k\vec{v}$.

5.3) refaire la procédure 3, cette fois pour la droite $\mathcal{D}$' ;

invariant en jeu - Si $\mathcal{D}$ a pour équation $ax + by + c = 0$ alors le vecteur directeur de $\mathcal{D}$ a pour coordonnées (-b, a).

5.4) l'élève dit que, les droites étant parallèles, les vecteurs directeurs sont colinéaires et comme il connaît les coordonnées de $\vec{u}$, il essaye de faire des *ajustements* (du type diminuer ou augmenter la longueur du vecteur $\vec{v}$) pour arriver à ce que le vecteur $\vec{v}$ soit égal à $\vec{u}$.

invariant en jeu - Il s'agit d'une variation de l'invariant suivant : Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' sont deux droites parallèles et si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$'.

6) Dessiner la droite $\mathcal{D}$' parallèle à $\mathcal{D}$ et dire que comme elles sont parallèles, leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Ensuite il crée un représentant $\vec{v}$ de $\vec{u}$ sur la droite $\mathcal{D}$'

et donne les coordonnées de $\vec{v}$ comme celles de $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{u}$ peut être sur la droite $\mathcal{D}$ ou positionné à l'origine si l'élève a utilisé la stratégie 4 pour la première partie de l'exercice.

invariant en jeu - Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' sont deux droites parallèles et si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$'.

7) Dessiner la droite $\mathcal{D}$' parallèle à $\mathcal{D}$ et dire que comme elles sont parallèles, $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$'.

invariant en jeu - Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' sont deux droites parallèles et si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$'.

Cette dernière solution serait la solution "optimale" du point de vue de nombre d'étapes faites et cela nous indiquerait aussi que l'élève à compris le signifié qu'a le vecteur directeur d'une droite et les relations entre vecteurs directeurs de droites parallèles.

Au moment de dessiner le vecteur directeur, l'élève peut le placer sur la droite. Il se détachera peut-être de cette droite quand on lui demandera de donner les coordonnées du vecteur directeur, parce qu'à ce moment il pourra faire un représentant de ce vecteur directeur à l'origine. Cela veut dire qu'il s'agit d'un invariant spatio-graphique, au départ ils ne sont pas du côté vectoriel mais géométrique car le tracé du vecteur est attaché à la droite.

En résumé, nos objectifs sont :

(i) d'abord voir s'ils tracent le vecteur directeur sur la droite $\mathcal{D}$, ce qui veut dire que le vecteur directeur est attaché à la droite ;

(ii) ensuite, face au calcul des coordonnées d'un vecteur, nous voulons savoir s'ils pensent à placer ce vecteur en O, l'origine du plan, et tout simplement à demander les coordonnées du point extrémité du vecteur. Le fait de tracer le représentant à l'origine est un intermédiaire qui permet de détacher le vecteur de la droite.

Cela nous permet de vérifier si les élèves font la correspondance vecteur du plan/point du plan, en associant à un vecteur $\vec{u}$ un représentant $\overrightarrow{OM}$, en lisant ensuite les coordonnées du point M et les interprétant comme celles du vecteur $\vec{u}$.

(iii) finalement nous voulons vérifier la présence ou l'absence de l'invariant xiii : "si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$' sont deux droites parallèles et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$'". Et la question que nous nous posons est la suivante : "Les élèves penseront-ils à utiliser le vecteur $\vec{u}$ comme un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$' ?"

L'item (i) peut être vérifié facilement, en revanche pour les deux autres items cela n'est pas sûr. Pour la question (ii), l'élève n'est pas obligé de placer un représentant du vecteur directeur à l'origine O du plan. Même si on le supprime la macro "coordvec", il peut tout simplement demander les coordonnées des points extrémités du vecteur (qui est sur la droite, par exemple) et calculer ensuite ses coordonnées avec la calculette ou en papier crayon.

Certes, cette procédure est plus longue mais il est tout à fait possible qu'elle apparaisse car les élèves savent comment calculer les coordonnées d'un vecteur à partir de ses points extrémités, d'ailleurs ils peuvent penser que nous sommes en train de tester s'ils savent le faire !

Pour trouver les coordonnées d'un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$, l'élève peut aussi refaire la même procédure, c'est-à-dire, demander au logiciel les coordonnées de ses points extrémités et calculer ensuite les coordonnées du vecteur.

Comme nous voulons vérifier si l'élève arrive à opérationnaliser le fait qu'un vecteur directeur d'une droite peut être n'importe où, et que deux droites parallèles peuvent avoir le même vecteur directeur, nous proposons une autre activité à ceux qui n'ont pas explicité ces deux invariants dans l'exercice 3, proposé ci-dessus. En fait, nous leur proposons la même activité mais cette fois avec une nouvelle contrainte : ils ne peuvent utiliser les coordonnées d'un point qu'une seule fois. De cette façon ils doivent être un peu plus *induits* à placer le vecteur à l'origine du plan et à utiliser le même vecteur directeur pour les deux droites. Ils peuvent aussi demander l'équation de la droite et à partir de cela donner les coordonnées d'un vecteur directeur. Reste la question de savoir si les coordonnées du vecteur directeur données par les coefficients de la droite sont les mêmes que celles du vecteur qu'ils ont dessiné. L'adoption de cette stratégie indique une absence des invariants décrits ci-dessus.

Si cela fonctionne, nous pourrons en conclure que ces invariants ne sont peut être pas disponibles chez eux de façon spontanée mais sous certaines conditions ils sont capables de les mobiliser s'il le faut.

Nous donnons ci-dessous l'activité n°3 avec la nouvelle contrainte :

Activité n°3' - (Cabri-géomètre II)
En utilisant seulement une fois "coordonnées d'un point" du menu Cabri, vous devez refaire les questions suivantes :

i) tracer une droite $\mathcal{D}$ quelconque et ensuite représenter un vecteur directeur $\vec{u}$ de $\mathcal{D}$;

ii) donner les coordonnées de $\vec{u}$;

iii) tracer une droite $\mathcal{D}'$ parallèle à $\mathcal{D}$;

iv) tracer un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$ et donner ses coordonnées.

6.2.4 - Activité n°4

Dans le même sens que l'item d de la première activité proposée, nous leur poserons la question suivante :

Activité n°4 - (papier crayon)
"Vrai ou Faux" ? Justifier votre réponse :
Deux droites qui ont des vecteurs directeurs différents sont sécantes.

Cette question est inspirée d'une question de vrai et faux trouvé dans le manuel Terracher ; cependant les auteurs de ce manuel utilisent le mot "distincts" à la place de "différents". Nous avons décidé de changer de mot car "distincts" nous paraît un piège : le signifié du mot "distinct" n'est pas clair pour nous. Les élèves peuvent par exemple voir deux représentations d'un même vecteur sur une feuille de papier et dire qu'ils sont distincts sans pour autant vouloir dire qu'ils ne sont pas égaux.

Relativement à l'égalité vectorielle, les vecteurs du plan peuvent être classés en deux groupes : vecteurs égaux entre eux et vecteurs différents. Mais pour résoudre un problème de parallélisme de deux droites il faut distinguer les vecteurs différents en deux "sous-classes" :

- celle dont les vecteurs ont même direction mais la longueur et/ou le sens sont différents, qui donnent des droites parallèles car les vecteurs sont colinéaires ;
- celle dont les vecteurs n'ont pas même direction, qui donnent des droites sécantes car les vecteur sont non-colinéaires.

Ces questions peuvent apparaître surtout si l'élève lit l'énoncé à partir de la fin, c'est-à-dire s'il fait deux droites sécantes et ensuite en conclut que les vecteurs sont différents. Alors il va falloir que nous intervenions. Comme les interviews sont individuels, nous pouvons intervenir sur ce que les élèves font, comme nous l'avons déjà dit. Dans cette phase finale de l'entretien, nous comptons aussi leur poser des questions du type :

Si les coordonnées du vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ sont (a;b), est-ce que le vecteur (-4a;-4b) est lui aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}$?
Ou encore :
Soit $\vec{u}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{v}$ vecteur directeur de $\mathcal{D}'$. Si $\vec{u} = k\vec{u}$, les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles parallèles ?

Nous voulons vérifier si les élèves mobilisent le résultat selon lequel une droite possède une infinité de vecteurs directeurs. Ce résultat n'est pas donné de façon explicite dans le cours mais on dit par exemple que tout vecteur colinéaire à un vecteur directeur d'une droite est lui aussi un vecteur directeur de cette droite.

En fait, la classe d'équivalence des vecteurs égaux est moins "large" que la classe d'équivalence des vecteurs directeurs d'une droite ; pour ces derniers il s'agit de tous les vecteurs qui sont colinéaires à un vecteur donné.

Cet exercice permet donc, d'une part de tester l'invariant "classe d'équivalence d'un vecteur", et d'autre part celui du vecteur directeur des droites parallèles.

6.3 - Les entretiens

Nous présentons maintenant les résultats obtenus dans les interviews que nous avons réalisés avec 11 élèves qui se sont portés volontaires. Pour cela nous présentons les résultats obtenus pour chaque activité et l'analysons tout de suite.

6.3.1 - Activité n° 1

Pour mieux analyser les résultats obtenus pour l'activité n° 1, donnons un tableau avec des réponses fournies par les élèves.

Pour l'item **a)**, nous adoptons les symboles suivants ;

(i) F_p - faux, il faut d'abord que les vecteurs soient parallèles ;

(ii) V_r - vrai, car ils pointent vers la même zone ou région (l'invariant de régionnement) ;

(iii) V_o - vrai, sans justification.

Pour l'item **b)**, nous distinguons deux types de réponses :

(i) F_p - faux, car les vecteurs ne sont pas parallèles ;

(ii) F_r - faux, car il y un qui "monte".

Pour l'item **c)**, nous classons les réponses des élèves de la façon suivante :

(i) V_p - vrai, car ils sont parallèles

(ii) $F_{s/d}$ - faux, confusion entre sens et direction.

Finalement concernant l'item **d)**, nous utilisons les symboles suivants :

(i) F_s - faux, car ils doivent avoir même sens ;

(ii) $V_{s/d/l}$ - vrai, car ils ont même direction, même sens et même longueur ;

(iii) $V_{s/d}$ - vrai car ils ont même direction et même sens.

	Ge (1)	Aure (2)	Jero (3)	Naou (4)	Aman (5)	My (6)	Laur (7)	Caro (8)	Kari (9)	Ludo (10)	Maga (11)	Total
a	F_p	V_r	V_r	V_o	F_p	F_p	V_r	V_o	V_r	* peut pas dire	V_r	$3F_p$ - $5V_r$ - $2V_o$
b	F_p	F_p	F_r	F_p	F_p	F_p	F_p	F_r	F_p	F_p	F_p	$9F_p$ - $2F_r$
c	$F_{s/d}$	V_p	sais pas	V_p	V_o	V_p	V_p	$F_{s/d}$	V_p	V_p	V_p	$2F_{s/d}$ - $7V_p$ - $1V_o$
d	V_o	F_s	$V_{s/d/l}$	$V_{s/d}$	F_s	$V_{d/l}$	F_s	–	$V_{s/d/l}$	$V_{s/d/l}$	F_s	$1V_o$ - $4F_s$ - $3V_{s/d/l}$ - $1V_{s/d}$ - $1V_{d/l}$

Item a) : $F_p \mapsto 3$; $V_r \mapsto 5$; $V_o \mapsto 2$

L'élève Ludo (10), n'a pas choisi entre vrai et faux mais sa réponse est correcte, il dit qu'on ne peut pas dire s'ils ont même sens car ils n'ont pas même direction.

Pour cet item, 7 élèves ont dit que c'était vrai. Parmi eux, 5 ont mis en oeuvre l'invariant erroné "deux vecteurs qui pointent vers la même zone ont même sens". Nous constatons ainsi, que cet invariant est assez fort chez ces élèves ; il s'agit d'un invariant qui résiste toujours.

Item b) : $F_p \mapsto 9$; $F_r \mapsto 2$

Les réponses données à cet exercice montrent que la majorité des élèves prend la notion de direction d'un vecteur au sens mathématique. En effet, nous avons eu 9 élèves qui ont répondu que les vecteurs n'ont pas même direction car ils ne sont pas parallèles. Les deux autres élèves, qui ont aussi mis "faux", ont donnés des réponses qui ont aussi un rapport avec le "régionnement" , car ils parlent d'un vecteur qui monte, ou qui pointe dans une autre région. Pour ces deux élèves nous ne pouvons pas savoir s'ils utilisent le langage courant pour dire qu'ils n'ont pas même direction, ou s'ils confondent direction et sens.

Item c) : $F_{s/d} \mapsto 2$; $V_p \mapsto 7$; $V_o \mapsto 1$; Un élève a dit "je ne sais pas".

Nous confirmons ici le fait que la notion de direction prête moins à de confusion, car il y a eu 7 élèves qui ont répondu correctement et un qui n'a pas justifié sa réponse. Nous avons ici deux élèves qui confondent direction et sens

Item d) : $F_s \mapsto 4$; $V_{s/d/l} \mapsto 3$; $V_{d/l} \mapsto 1$; $V_o \mapsto 1$; $V_{s/d} \mapsto 1$; Un élève n'a pas répondu la question.

Nous avons 3 élèves ($V_{s/d/l}$) qui tiennent compte des trois propriétés de l'égalité vectorielle, mais ils pensent que colinéarité veut dire que les vecteurs ont même direction et même sens. Ces élèves l'ont explicité, c'est pourquoi nous les distinguons de l'élève My (6), qui n'a rien écrit sur le sens des vecteurs. L'élève Naou (4) peut être classé avec les trois premiers car pour lui aussi la colinéarité signifie même direction et même sens ; mais Naou ne parle pas de la norme des vecteurs (peut être parce que cela est clair dans l'énoncé de l'exercice). Seulement 4 élèves ont répondu correctement la question en disant que les vecteurs devraient aussi avoir même sens. Il nous semble qu'il s'agit des seuls élèves qui ont bien acqui la notion de vecteurs colinéaires.

En conclusion ...

Seul l'élève Aman (5) a répondu correctement à toutes les questions ; cela veut dire qu'il ne confond pas les notions de direction et de sens et à chaque fois il explicitait sa réponse. En revanche, on trouve des élèves qui sont incohérents dans leurs réponses, comme l'élève Ge (1). Il a répondu correctement à l'item a) ce qui nous a amené à penser qu'il sait ce qu'est le sens d'un vecteur. Dans la suite, à l'item b), où nous présentons la même paire des vecteurs, il dit qu'ils ont même sens mais pas même direction.

Nous avons pu vérifier que l'invariant erroné "deux vecteurs qui pointent vers la même zone ont même sens" subsiste toujours chez une bonne partie des élèves. Cela signifie qu'il est très fort chez eux, car il résiste même après le travail fait dans la séquence pour le déstabiliser. En revanche la notion de direction semble être correctement identifiée sur un dessin pour la plupart des élèves.

6.3.2 - Activité n° 2

Pour cette activité tous les élèves ont voulu tracer un représentant de la somme vectorielle avec une règle ; ceux qui n'en avaient pas disaient qu'ils ne pouvaient pas le tracer car il leur manquait une règle. Le procédé adopté pour tracer la somme a été la mise bout-à-bout des deux vecteurs. Les seules différences observées étaient que certains dessinaient un représentant du vecteur $\vec{v}$ à partir de l'extrémité du vecteur $\vec{u}$, tandis que d'autres dessinaient un représentant de $\vec{u}$ d'origine un autre point du plan et ensuite un représentant de $\vec{v}$ à partir de l'extrémité du représentant du vecteur $\vec{u}$. Cela peut être dû au fait que dans l'enseignement, à chaque fois qu'ils doivent construire la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ils font des représentants $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ de ces vecteurs.

La réalisation de cette activité montre que pour construire le représentant d'un vecteur, les élèves cherchent à le faire en respectant les propriétés et non pas au jugé ; il y a une préoccupation explicite avec la construction des représentants. De plus ils préfèrent la mise bout-à-bout au parallélogramme.

Pour mieux conclure de l'influence de Cabri-géomètre II, il aurait fallu proposer ce même type d'activité à un groupe d'élèves n'ayant pas utilisé l'environnement informatique. Ceci n'est pas notre objectif dans le cadre de ce travail ; il nous semble que ce type de question peut donner lieu à une autre recherche.

6.3.3 - Activité n° 3

Nous fournissons d'abord les résultats obtenus sous forme d'un tableau, où nous mettons les réponses fournies aux items i), ii), iii) et iv) de façon résumée. Pour l'item i) nous indiquons où l'élève a placé le vecteur directeur de la droite ; pour les items ii) et iv) nous indiquons la méthode utilisée par l'élève pour trouver les coordonnées de $\vec{u}$ et celles de $\vec{v}$. Pour que le lecteur puisse bien comprendre la séquence de la résolution faite par l'élève nous fournissons aussi dans ce tableau l'item iii), quand l'élève trace la droite $\mathcal{D}'$ parallèle à la droite $\mathcal{D}$.

	Ge (1)	Aure (2)	Jero (3)	Naou (4)	Aman (5)	My (6)	Laur (7)	Caro (8)	Kari (9)	Ludo (10)	Maga (11)	Total
i	$u \notin \mathcal{D}$	$u \in \mathcal{D}$	$u \in \mathcal{D}$	$u \in \mathcal{D}$	$u \notin \mathcal{D}$	$u \in \mathcal{D}$	$u \in \mathcal{D}$	dessin faux	$u \notin \mathcal{D}$ $u \in \mathcal{D}$	$u \in \mathcal{D}$	$u \in \mathcal{D}$ $u \notin \mathcal{D}$	$6u \in \mathcal{D}$ $4u \notin \mathcal{D}$
ii	coord A,B	coord A,B	coord A,B	coord A,B	coord A,B	coord A,B	coord A,B	longueur u	coord A,B	coord A,B	coord A,B	11 coord A,B
iii	$\mathcal{D}'//\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'//\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'//\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'//\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'//\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'//\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'//\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'//\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'//\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'//\mathcal{D}$	$\mathcal{D}'//\mathcal{D}$	
iv	même vecteur	$v \in \mathcal{D}'$ coord	$v \in \mathcal{D}'$ coord	$v \in \mathcal{D}'$ coord	$v \in \mathcal{D}'$ coord	$v \in \mathcal{D}'$ coord	$v \in \mathcal{D}'$ coord	longueur v	$v \in \mathcal{D}'$ coord	$v \in \mathcal{D}'$ coord	$v \in \mathcal{D}'$ coord	$9v \in \mathcal{D}'$ 1v=u

Pour l'item i), 6 élèves ont mis directement et uniquement le vecteur $\vec{u}$ sur la droite $\mathcal{D}$; un élève, Maga (11), l'a mis sur la droite et puis a fait un représentant de ce vecteur a côté de la droite $\mathcal{D}$. Un autre élève, Kari (9), a d'abord fait un dessin sur une feuille de papier, et là le vecteur directeur n'est pas représenté sur la droite. Quand nous lui avons demandé de le faire en Cabri, le vecteur directeur a été tracé sur la droite. Enfin il y a eu seulement deux élèves qui ont représenté le vecteur à l'extérieur de la droite. Rappelons que, dans le scénario, pour certaines activités le vecteur directeur était placé en dehors de la droite.

Concernant la façon de trouver les coordonnées du vecteur $\vec{u}$, à part l'élève Caro (8) tous les autres l'ont calculé en utilisant les coordonnées des deux points extrémités du vecteur. Caro a calculé la longueur du segment [AB] et a indiqué ce résultat comme étant les coordonnées de $\vec{u}$.

Les élèves ont, pour la plupart, fait le même raisonnement pour la deuxième partie de l'exercice. À part l'élève Ge (1), qui a dit qu'il s'agissait en fait du même vecteur, pour les autres nous pouvons constater l'absence de l'invariant selon lequel le vecteur directeur d'une droite l'est aussi pour une autre droite qui lui soit parallèle. Autrement dit, ils ont résolu l'exercice sans faire aucun rapport entre les deux parties.

En conclusion ...

D'après l'analyse des résultats obtenus dans cette activité, nous pouvons conclure que dans une situation où il n'y a pas de contraintes, les élèves pensent toujours à placer un vecteur directeur d'une droite sur cette droite. Nous pouvons aussi dire qu'a priori l'invariant selon lequel deux droites parallèles peuvent avoir un même vecteur directeur n'est pas disponible chez les élèves de façon spontanée. Même s'il est plus coûteux de tracer deux vecteurs et de calculer leurs coordonnées à chaque fois, ils le font sans établir le lien entre les droites et les vecteurs directeurs, mis à part l'élève Ge (1) qui dit que l'on peut prendre le même vecteur. De plus aucun élève n'a placé un représentant du vecteur colinéaire à l'origine pour calculer ses coordonnées.

6.3.4 - Activité n° 3'

Les résultats obtenus pour l'activité 3' seront placés d'abord sous forme d'un tableau où se distingue le fait d'utiliser ou non l'équation de la droite pour trouver les coordonnées d'un vecteur directeur et le tracé à l'origine d'un représentant d'un vecteur directeur de la droite. Ensuite nous indiquons le procédé adopté par les élèves pour fournir un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ parallèle à la droite $\mathcal{D}$.

	Ge (1)	Aure (2)	Jero (3)	Naou (4)	Aman (5)	My (6)	Laur (7)	Caro (8)	Kari (9)	Ludo (10)	Maga (11)
i)	$u \in \mathcal{D}$ y=ax+b	$u \in \mathcal{D}$ y=ax+b	$u \in \mathcal{D}$ $u' \notin \mathcal{D}$	$u \in \mathcal{D}$	$u \notin \mathcal{D}$	$u \in \mathcal{D}$	$u \in \mathcal{D}$	--	$u \in \mathcal{D}$	$u \in \mathcal{D}$	$u \in \mathcal{D}$ $u' \notin \mathcal{D}$
ii)	bloqué	(-b,a)	u d'origine (0,2)	bloqué	déplace u vers origine	rep origine	longueur	--	y=ax+b (-b,a)	rep origine	rep origine
iii)	! !	même	repr u sur $\mathcal{D}'$ avec	! !			$\mathcal{D}'$	--	même	$\mathcal{D}'$	pas le
iv)	! !	procédé	parallélogramme	! !	même vecteur	même vecteur	$v \in \mathcal{D}'$ longueur	--	procédé ***	rep de u sur $\mathcal{D}'$	temps

Aucun élève n'a pensé spontanément à placer un représentant de $\vec{u}$ à l'origine. Nous avons ainsi décidé de "forcer" un peu la situation et 4 élèves ont fini pour comprendre qu'il fallait placer un représentant de $\vec{u}$ à l'origine ou ont déplacé $\vec{u}$ à l'origine. Parmi ces 4 élèves, deux ont répondu aux questions suivantes en disant qu'il est possible de prendre le même vecteur directeur pour la deuxième droite, un élève a fait un représentant de $\vec{u}$ sur la droite $\mathcal{D}'$ et le quatrième élève n'a pas eu le temps de finir l'exercice. Nous pouvons en conclure que la contrainte posée a induit la présence de l'invariant "Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites parallèles et $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$."

Examinons la réponse fournie par Jero (3), qui n'a pas placé $\vec{u}$ ou un représentant de $\vec{u}$ à l'origine mais sur un point dont les coordonnées étaient (0, 2). De cette façon il n'avait qu'à demander les coordonnées de l'autre extrémité du vecteur pour avoir les coordonnées du vecteur. Pour le vecteur directeur de la deuxième droite, Jero a fait un représentant de $\vec{u}$ sur $\mathcal{D}'$ en utilisant un parallélogramme.

Les élèves ayant demandé l'équation de la droite, ont donné les coordonnées du vecteur directeur qu'ils avaient tracé sur la droite comme étant (-b, a). Interrogés si ces coordonnées étaient bien celles du vecteur $\vec{u}$, ils semblaient avoir des doutes mais ne savaient pas comment s'en sortir. Kari (9) s'est montrée étonnée aussi quand elle a vu que les coordonnées du vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ étaient différentes de celle du vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

En conclusion ...

Cette activité permet ainsi de vérifier que le résultat selon lequel un vecteur directeur à une droite peut être "n'importe où", et par conséquent il peut être placé à l'endroit qui soit le plus convenable du point de vue de l'exercice, n'est pas disponible chez les élèves. De plus il y a une confusion entre les vecteurs de coordonnées (-b,a) et le vecteur tracé par les élèves. Souvent ils ont tendance à croire que comme (-b,a) représente un vecteur directeur de la droite et qu'ils ont tracé un vecteur directeur, les coordonnées doivent être les mêmes. Si on leur demande s'ils sont sûrs s'il s'agit bien des coordonnées du vecteur tracé par eux, ils se rendent compte qu'il y a un problème mais ils ne savent pas comment l'expliquer.

6.3.5 - Activité n° 4

Ge (1)	(2, -3), ces deux droites ont même vecteur directeur. **Vrai** ; ça dépend.
Aur (2)	**Faux**. Elles sont seulement sécantes si leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.
Jero (3)	**Faux**. (il justifie avec le dessin de deux vecteurs opposés).
Naou (4)	**Faux**, car elles peuvent être parallèles mais avoir des vecteurs différents (par ex. opposés).
Aman (5)	**Faux**. Les vecteurs peuvent avoir même direction mais pas le même sens et les droites ne seront pas sécantes.
My (6)	**C'est ni vrai ni faux**. (elle explique qu'il faut que les vecteurs soient colinéaires).
Laur (7)	**Vrai**, puisque des vecteurs directeurs d'une même droite ne sont pas différents et les vecteurs directeurs de deux droites // ne sont pas différents.
Caro (8)	**Vrai** parce que s'ils avaient les mêmes vecteurs directeurs ils seraient parallèles.
Kari (9)	**Vrai**, (vecteurs égaux ⇒ même direction ; mais ils sont différents ⇒ direction différente)
Ludo (10)	**Vrai**, elles sont sécantes car elles n'ont pas même direction.
Maga (11)	**Vrai**, car si elles ont des vecteurs directeurs différents elles ne sont pas parallèles ou confondues alors elles sont sécantes.

Nous avons 5 réponses que nous considérons correctes (**Faux**), où les élèves ont pris en considération le fait qu'il faut que les vecteurs ne soient pas colinéaires pour que les droites soient sécantes. Ces élèves ont bien explicité leur réponse. Ils semblent avoir acquis les invariants suivants : "les vecteurs directeurs de deux droites parallèles sont colinéaires" et "deux vecteurs sont colinéaires s'ils ont même direction".

Les six autres élèves ont dit que c'était "Vrai". Pour eux, il semblerait que si deux vecteurs sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur alors deux vecteurs différents n'ont pas même direction. Autrement dit, deux vecteurs différents ont forcément des directions différentes ce qui veut dire qu'ils ne sont pas colinéaires et par conséquent les droites ne sont ni parallèles ni confondues.

6.4 - En guise de conclusion ...

L'examen des résultats obtenus lors des interviews montre qu'il existe des invariants qui sont très forts chez les élèves. Nous avons pu les perturber localement mais ils n'ont pas été

déstabilisés. Nous citons d'abord les invariants qui induisent les élèves à confondre les notions de direction et de sens et à prendre la notion de sens avec une signification de "région". Cette résistance est assez justifiable dans le mesure où, d'un côté dans l'enseignement secondaire, il n'y a pas de définition autour de cette notion et, dans le langage courant, le terme "sens" peut être utilisé à la place de direction ainsi que pour indiquer toute une région.

Nous avons pu confirmer la présence de l'invariant suivant chez les élèves : "Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite $\mathcal{D}$, alors $\vec{u}$ n'a que des représentants "tracés" sur la droite".

De plus, nous avons vu que chez 10 élèves l'invariant suivant n'est pas disponible de façon spontanée, et sous certaines contraintes il a été mis en œuvre par 2 élèves parmi les 11 que nous avons interviewés : "Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux droites parallèles et si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ alors $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathcal{D}'$." Rappelons qu'un seul élève a utilisé ce résultat de façon spontanée dans l'activité 3.

De même, l'invariant suivant semble ne pas être acquis par les élèves : "Soit O un point fixé du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M unique tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$". Pendant la réalisation de l'activité 3', nous avons "forcé" la situation et alors 4 élèves l'ont mis en place pour répondre l'exercice. Cela signifie que la correspondance entre points du plan et vecteurs du plan n'est pas spontanée chez les élèves, ou en d'autres mots elle n'est pas disponible.

7 - Conclusion du chapitre

La constitution d'un nouveau milieu permettant de travailler davantage le vecteur en tant qu'objet nous a permis de mettre en évidence les difficultés des élèves autour de la notion de vecteur et d'essayer de les déstabiliser. Des activités de prédiction en papier crayon ont été demandée aux élèves, qui devaient confirmer les conjectures en utilisant Cabri-géomètre II. L'environnement informatique a ainsi permis une confrontation chez les élèves des contradictions dues aux invariants erronés construits par eux, favorisant la perturbation de ces invariants erronés.

Dans un milieu constitué de papier crayon, les moyens de contrôle des actions des élèves concernant les vecteurs sont très réduits tandis que, dans le scénario, Cabri-géomètre II a fourni un moyen de contrôle (pragmatique) et de validation pour certaines conjectures des élèves. Les rétroactions ont été du type perceptible, car on "voit" ce qui se passe à l'écran, et du type numérique-géométrique, en utilisant la macro "coordonnées d'un vecteur".

Retour sur nos questions et l'hypothèse de recherche

La première question à laquelle nous avons cherché à répondre dans ce travail est :

> • Quels sont effectivement les invariants relatifs aux vecteurs, erronés ou non, que les élèves construisent ?

La réponse a cette question a été donnée dans le corpus de ce chapitre, et dans la conclusion de l'analyse de la réalisation du scénario. Nous ne reviendrons pas là dessus ; nous voulons juste attirer l'attention sur quelques points particuliers.

La constitution d'un milieu autre que papier crayon a permis d'étudier la présence de certains invariants dégagés de notre analyse des manuels et de repérer d'autres invariants qui dans une situation ordinaire, sont plus cachés. Nous citons en particulier l'invariant xviii) et ses variations[30] :

xviii) *Si un vecteur est situé dans le premier quadrant alors il a des coordonnées positives, dans le troisième quadrant ses coordonnées sont négatives et dans les deux autres cas elles ont signes différents ; autrement dit, les coordonnées d'un vecteur dépendent de sa position dans le plan .*

Les coordonnées d'un vecteur sont calculées en fonction des coordonnées de ses points extrémités, ce qui a favorisé la création, chez les élèves, de deux autres formes de cet invariant :

[30] Une liste complète des nouvelles formes d'invariants relévées lors de l'application du scénario a été donnée dans la conclusion de l'analyse du scénario.

xviii') Pour qu'un vecteur ait des coordonnées positives, il faut que les coordonnées de ses extrémités soient positives, pour qu'il ait des coordonnées négatives il faut que ses extrémités aient des coordonnées négatives.

xviii'') Si l'on déplace le vecteur $\overrightarrow{AB}$, les coordonnées des points A et B changent alors les coordonnés de $\overrightarrow{AB}$ changent aussi.

Ces théorèmes-en-acte erronés sont très fortement ancrés chez les élèves, et contribuent à ce que l'élève ne construise pas d'invariants qui ne dépendent pas des caractéristiques géométriques du vecteur. Ce qui confirme en partie, notre hypothèse de recherche 2 :

HR2 - Les caractéristiques géométriques attachées aux vecteurs contribuent à créer la difficulté rencontrée par les élèves pour construire des invariants qui ne dépendent pas de ces caractéristiques

En d'autres termes, avec la confirmation de cette hypothèse, nous pouvons dire que cet invariant pourra constituer un obstacle pour les étudiants lorsqu'ils auront affaire à des vecteurs définis dans une structure vectorielle : ils devront passer de l'affine au vectoriel.

La deuxième question à laquelle nous cherchions à répondre est la suivante :

• Quelles sont les conditions didactiques susceptibles de déstabiliser un invariant, c'est-à-dire susceptibles de permettre de développer de nouvelles règles d'action en situation, voire construire des nouveaux invariants (adaptables localement, peut-être globalement) ?

Pour déstabiliser un invariant chez les élèves, nous avons cherché à les mettre dans une situation où ils étaient confrontés à des contradictions originaires de ce faux théorème-en-acte. Pour cela, la constitution d'un nouveau milieu pour l'enseignement des vecteurs a été fondamental. En effet, en utilisant Cabri-géomètre II, les élèves avaient un moyen de contrôle et de validation pour certaines de ses actions, et voyant que leur schéma habituel ne fonctionnait pas dans la situation à laquelle ils étaient affrontés, ils ont alors essayé d'ajuster leur conduite pour arriver à formuler une réponse correcte (du moins localement). Cependant les activités proposées et les validations faites par les élèves ont permis seulement de perturber des théorèmes-en-acte erronés construits par les élèves. Il semble alors que d'autres situations doivent être élaborées visant encore à perturber et déstabiliser ces théorèmes-en-acte erronés.

A propos de la méthodologie adoptée...

Finalement, nous voudrions revenir sur la méthodologie adoptée pour ce travail en classe de Seconde. Comme il a été dit dans la problématique (cf. chapitre A), l'expérimentation réalisée dans cette Seconde se situe entre une observation d'une classe ordinaire et l'élaboration et la réalisation d'une ingénierie didactique dont l'objectif principal est l'apprentissage de la notion de vecteur.

Dans une ingénierie didactique il importe d'effecteur des évaluations internes, par confrontation des résultats obtenus avec l'analyse a priori, et externes, qui comprend une évaluation de l'état de connaissance des élèves après l'application de l'ingénierie. Il nous semble que, dans notre expérimentation, l'évaluation interne, plus particulièrement faite sur la tâche de construction d'un représentant et les évaluations externes réalisées par l'intermédiaire des interviews, nous ait fourni des réponses aux questions posées dans notre problématique.

En outre, il nous semble aussi que ce travail peut représenter un pas vers la direction de l'élaboration d'une ingénierie didactique pour l'enseignement des vecteurs dans le secondaire. Nous reviendrons sur cette discussion dans la conclusion de la thèse.

Annexes

Table des Matières

Annexes Chapitre B1 371
QUATRIEME - Le programme de 1994, réimpression 1997 373
TROISIEME - Le programme de 1994, réimpression 1997 373
SECONDE - Le programme de 1996 373
PREMIERES S et E - Le programme de 1991 378
TERMINALE C et E - Le programme de 1991 383

Annexes Chapitre B2 389
Extraits des manuels 391
Tableau résumé de 73 exercices proposés dans Terracher 403

Annexes Chapitre C 405
Pré-expérimentation en Première S 407
Enoncé des exercices proposés *407*
Exercice n°1 - Résultats obtenus *408*
Exercice n°2 - Résultats obtenus *409*
Expérimentation en Première S 410
Enoncé des exercices proposés *410*
Copies d'élèves *411*
Expérimentation en DEUG 420
Phase A - Enoncé des exercices proposés *420*
Copies d'étudiants *421*
Phase B - Entretien DEUG 438
Copies des étudiants et entretien *438*

Annexes Chapitre D 465
Menu disponible dans Cabri-géomètre II 467
Expérimentation en classe de Seconde "H" 469
Synthèse de l'observation "Seconde H" *469*
Présentation des activités 469
Les objectifs visés dans les activités proposées 470
Les résultats obtenus 471
Compte-rendu des observateurs *471*
Groupe n°1 471
Groupe n°2 472
Groupe n°3 475
Scénario Vecteurs - Les activités 477
TD n° 5 - Des vecteurs avec Cabri *477*
TP n°6 - Coordonnées d'un point, d'un vecteur *477*
TD n°7 - Somme de deux vecteurs *479*
TD n°8 - Quelques exercices d'entraînement avec les vecteurs *480*
TD n°9 - Vers une nouvelle opération avec les vecteurs *482*
TD n°10 - Multiplication d'un vecteur par un nombre réel *483*
TD n°11 - Quelques exercices d'applications *485*
TD n°12 - Base - repère - coordonnées *487*
TD n°13 - Colinéarité, Équation de droite *488*
TD n°14 - Exercices d'application - vecteurs *489*
TD n°15 - Équation de droite avec Cabri *490*
TD n°16 - Orthogonalité et vecteurs *491*
Analyse de la réalisation des TD 9 et 10 493
Synthèse vecteurs 496

Annexes Chapitre B1

QUATRIEME - Le programme de 1994, réimpression 1997

" Les vecteurs sont introduits "naïvement" par direction, sens et longueur. A toute translation on associe son vecteur. Si, dans une translation, A' est l'image de A et B' celle de B, on écrit : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$".

TROISIEME - Le programme de 1994, réimpression 1997

"Translation et vecteurs. Égalité vectorielle. Dans le plan rapporté à un repère, effet d'un déplacement par translation sur les coordonnées d'un point ; coordonnées d'un vecteur. Addition vectorielle."

SECONDE - Le programme de 1996

V - Géométrie
En géométrie plane comme en géométrie dans l'espace, ***tout point de vue axiomatique est exclu***. La pratique des figures doit tenir une place centrale, car elle joue un rôle décisif pour la maîtrise des notions mathématiques mises en jeu. De même, l'exploitation des écrans graphiques d'ordinateur peut aider efficacement les élèves à développer leur perception des objets du plan et de l'espace. Il est rappelé que toute reprise systématique des notions vues au collège est exclue.

Le programme comporte deux objectifs essentiels :

- Poursuivre *conjointement* l'étude, déjà engagée au collège, des *configurations usuelles du plan et de l'espace.*

- Mettre en place et exploiter quelques éléments de *calcul vectoriel dans le plan*, en relation avec l'étude des configurations et des transformations et avec l'enseignement de la physique.

1. Géométrie plane

Il s'agit d'entraîner les élèves à résoudre des *problèmes concernant des configurations*, alignement, concours, parallélisme, orthogonalité, calculs de distances, d'angles, d'aires. A cet effet, on utilise les acquis du collège sur les *configurations de base et leurs symétries* (cf. capacités exigibles indiquées dans les textes de compléments) et on exploite de nouveaux outils, notamment le ***calcul vectoriel*** et sur des exemples *très* simples, *l'action des transformations*. On pourra aussi étudier quelques exemples très simples de problèmes de lieux géométriques et de construction, mais l'étude systématique de tels problèmes est en dehors des objectifs du programme.

A. Calcul vectoriel

- Les *vecteurs* ont été introduits au collège (par direction, sens et longueur), on n'y reviendra pas et on conservera le même point de vue pour étudier les opérations sur des vecteurs (le programme de troisième ne comporte qu'une initiation à la somme).

- La *mise en oeuvre des vecteurs sur les configurations et les transformations* joue un rôle essentiel, aussi bien pour la compréhension de la notion de vecteurs que pour la résolution des problèmes de géométrie ; le calcul vectoriel ne doit donc pas constituer un terrain d'activités purement algébriques. À travers quelques exemples issus de la *mécanique* et de la *physique*, on soulignera le fait que l'intérêt de la notion de vecteur ne se limite pas à la géométrie.

- Le programme comporte la notion de *repère* (quelconque) du plan. Pour certaines questions (tracé de courbes, diagrammes...), il peut être commode d'utiliser des repères orthogonaux non nécessairement orthonormaux ; le recours à un tel repère n'est qu'un outil parmi d'autres, il relève de seules considérations de commodité et d'efficacité.

- En relation avec l'introduction des fonctions circulaires, le programme comporte une *initiation à la mesure des angles orientés*. On s'appuiera sur des observations concernant le *cercle trigonométrique* (mesure d'arcs, mouvement circulaire uniforme). Tout développement théorique est exclu et l'emploi des angles orientés en géométrie plane est hors programme.

a) Opérations sur les vecteurs - Représentation géométrique d'un vecteur $\vec{u}$; interprétation géométrique de l'égalité $\vec{u} = \vec{v}$. Norme d'un vecteur.	La notation $\vec{u}$ et le vecteur nul n'ont pas été introduits au collège.
- Addition des vecteurs, opposé d'un vecteur ; relation de Chasles; représentation géométrique des vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$, $-\vec{u}$ et $\vec{u} - \vec{v}$. Pour une translation, relation $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.	Les élèves doivent connaître et savoir utiliser les relations entre le parallélogramme, la translation, l'égalité et l'addition des vecteurs, entre l'opposé et la symétrie centrale. Le fait que la relation $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$. caractérise les translations est hors programme. Les élèves doivent savoir utiliser la colinéarité pour caractériser le parallélisme de deux droites, l'alignement de trois points, l'appartenance à une droite définie par deux points ou par un point et un vecteur directeur.
- Multiplication d'un vecteur par un nombre, représentation géométrique de $\lambda\vec{u}$. Vecteurs colinéaires.	La notion générale de barycentre est hors programme.
- Caractérisation vectorielle du milieu d'un segment, du centre du gravité d'un triangle. - Configuration de Thalès : si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$. Réciproque dans le cas particulier où A'=A.	Dans le cas du triangle, on fera le lien avec l'énoncé vu en classe de troisième. Le lien avec les projections n'est pas un objectif du programme.

- Homothétie (définie par $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$) ; relation $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$, application au triangle.	Pour introduire l'homothétie, on s'appuiera sur des situations portant sur les agrandissements et les réductions, dont l'étude a été engagé en classe de troisième. L'étude de l'unicité du centre est hors programme. Il en est de même pour le fait que la relation $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$ caractérise les homothéties.
b) Bases, repères - Repères d'une droite du plan ; abscisse d'un point, mesure algébrique.	La mesure algébrique $\overline{AB}$ d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est une notation commode. En dehors de la relation de Chasles, aucun usage de cette notation n'est au programme.
- Bases, repères du plan : coordonnées d'un vecteur dans une base, d'un point dans un repère, coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ et de $\lambda\vec{u}$. Condition de colinéarité de deux vecteurs.	On indiquera à ce propos l'effet d'une projection sur une égalité vectorielle : si A, B, C, D satisfont à la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors leurs images A', B', C', D' satisfont à la relation $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$.
Un repère étant fixé, équation cartésienne $ux + vy + w = 0$ d'une droite.	On reliera la notion de coefficient directement à celle de vecteur directeur ; pour l'équation cartésienne d'une droite, on fera le lien avec les formes $y = ax + b$ et $x = b$ vues au collège. En vue de l'étude des inéquations à deux inconnues, les élèves doivent connaître le régionnement du plan défini par une droite.
c) Orthogonalité, mesure des angles orientés - Vecteurs orthogonaux. Bases orthonormales ; repères orthonormaux (ou orthonormés)	Le produit scalaire est hors programme ainsi que l'étude des propriétés de la norme.
Dans un repère orthonormal, expression de la distance et de la norme : condition d'orthogonalité de deux vecteurs, de deux droites.	On fera le lien avec la condition d'orthogonalité de deux droites portant sur les coefficients directeurs vue en troisième.

- Cercle trigonométrique ; mesures de l'angle orienté de deux vecteurs unitaires, mesure principale. - Définition du cosinus et du sinus, relation $\cos 2x + \sin 2x = 1$. Définition de la tangente par $\tan x = \sin x / \cos x$. Valeurs remarquables du cosinus, du sinus et de la tangente.	L'unité d'angle est le radian ; la mesure principale appartient à $]-\Pi, \Pi]$. On fera le lien avec le degré décimal et les angles aigus non orientés, employés au collège. On assurera que les élèves maîtrisent les relations trigonométriques dans le triangle rectangle. Aucune connaissance sur les opérations sur les angles orientés (relation de Chasles...) n'est exigible des élèves.

B. Transformations et configurations

- L'objectif est que les élèves connaissent de façon solide *un petit nombre de propriétés essentielles* et sachent les *mettre en oeuvre sur des configurations simples*. L'étude des transformations ne doit donc pas être considérée comme une fin en soi. A travers les activités, on s'assurera que les élèves connaissent les symétries des configurations de base étudiées au collège (rectangle, losange, parallélogramme...) ; l'étude de quelques configurations liées au cercle enrichit les outils disponibles.

- Dans l'esprit des programmes de collège, on fera d'abord agir les transformations sur des figures, puis on dégagera l'idée essentielle qu'une transformation associe à tout point du plan un point du plan bien déterminé. La bijectivité des transformations, les notions de transformation composée et de transformation réciproque sont en dehors du programme.

a) Effet d'une réflexion, d'une rotation, d'une translation ou d'une homothétie sur le parallélisme, l'alignement, les distances, les angles et les aires. - Image d'une droite, d'un segment, d'un cercle. Image du milieu d'un segment, d'un parallélogramme.	On évitera des reprises systématiques se répétant sur chaque type de transformation. Pour les rotations, on se limitera aux quelques exemples abordés au collège (quart de tour...) ; l'étude générale des rotations est hors programme.
b) Symétries du cercle : tangentes à un cercle de direction donnée ou issues d'un point donné.	On s'assurera que les élèves connaissent et savent utiliser les propriétés de la configuration formée par une droite et un cercle.
- Axes de symétrie d'une bande. Ensemble des points situés à une distance donnée d'une droite. - Axes de symétrie de la configuration formée par deux droites concourantes. Ensemble des points équidistants de deux droites concourantes.	On reliera ces questions à la recherche de cercles tangents à deux droites sécantes.

2. Géométrie dans l'espace

- Les objets usuels étudiés au collège (cubes, parallélépipèdes rectangles, prismes droits, pyramides, sphères, cylindre et cône de révolution) constituent un terrain privilégié pour les activités.

- L'objectif est triple :

• A partir de l'étude de ces objets, dégager progressivement *quelques énoncés concernant les droites et les plans de l'espace* et mettre en valeur leur spécificité par rapport au cas de la géométrie plane.

• Apprendre aux élèves à *combiner ces énoncés avec des théorèmes de géométrie plane* pour établir des propriétés géométriques des configurations simples de l'espace ou effectuer des calculs portant sur ces configurations.

• Mettre en oeuvre les outils ainsi construits pour renforcer et élargir l'étude d'objets usuels de l'espace.

- Dans une telle perspective, la géométrie dans l'espace est utilisée durant toute l'année comme terrain pour mobiliser des acquis d'algèbre, d'analyse et de géométrie plane.

- Les activités exploiteront conjointement des *maquettes* des objets étudiés et des *représentations* de ces objets effectuées, selon les problèmes posés, à main levée ou à l'aide des instruments de dessin. Dans l'espace, les notions de vecteur et de repère sont hors programme.

a) Propriétés usuelles (admises) du parallélisme de deux droites, de deux plans, d'une droite à un plan. Projection sur un plan selon une direction de droite. b) Propriétés usuelles (admises) de l'orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan. Plan médiateur. Projection orthogonale sur un plan.	C'est à travers l'étude des objets usuels de l'espace que ces propriétés doivent être mises en évidence et mises en oeuvre. Elles ne doivent donc pas faire l'objet d'une étude en soi. Le théorème des trois perpendiculaires et la projection d'un angle droit sont hors programme.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de configurations planes à l'aide de différents outils (configurations de base, calcul vectoriel, outil numérique, transformations).	Pour ce qui est de l'emploi de transformations on se limitera à des situations très simples, et, pour les travaux non encadrés par le professeur, la transformation utilisée sera indiquée.
Exemples d'étude d'un objet usuel de l'espace (parallélisme, alignement, orthogonalité...).	La recherche de sections planes de solides doit se limiter à des cas très simples.
Exemples de calculs de distances, d'aires et de volumes, dans les configurations usuelles du plan et de l'espace.	On mettra en oeuvre les formules vues au collège concernant les objets usuels du plan et de l'espace. On prendra le plus souvent appui sur des situations concrètes (topographie, objets techniques...).

Exemples simples de mise en oeuvre des propriétés d'une réflexion, d'une rotation, d'une translation ou d'une homothétie pour la construction d'images de configurations planes.	
Exemples de recherche et d'emploi de réflexions, de symétries centrales et de rotations laissant invariante une configuration plane simple (rectangle, carré, triangle équilatéral, cercle, configuration formée par deux cercles...)	Il n'y a pas lieu de soulever le problème de l'exhaustivité de la liste de transformations ainsi repérées.

PREMIERES S et E - Le programme de 1991

IV - GÉOMÉTRIE

En géométrie plane comme en géométrie dans l'espace, **tout point de vue axiomatique est exclu**. La **pratique des figures** doit tenir une place centrale, car elle joue un rôle décisif pour la maîtrise des notions mathématiques mises en jeu. De même, l'exploitation des écrans graphiques d'ordinateur peut aider efficacement les élèves à développer leur perception des objets du plan et de l'espace.

Le programme comporte trois objectifs essentiels :
- La poursuite de l'étude du **calcul vectoriel** dans le plan et sa mise en place dans l'espace, en relation avec l'étude de la **géométrie** et avec l'enseignement de la **physique** ;
- La poursuite de l'étude des **configurations du plan** et de l'effet des transformations sur celles-ci ;
- La poursuite de l'étude des **configurations simples de l'espace**.

En ce qui concerne les configurations du plan et de l'espace, l'objectif principal est d'entraîner les élèves à résoudre des problèmes d'alignement, de concours, de parallélisme, d'orthogonalité et à calculer des distances, des angles, des aires, des volumes. À cet effet, on exploite différents outils **: propriétés des configurations de base, calcul vectoriel,** emploi d'un **repère orthonormal** adéquat et, sur des exemples **simples** de géométrie plane, effet des **transformations**. Le programme comporte l'étude de quelques problèmes de **lieux géométriques plans**, et notamment la recherche de **lignes de niveau**. On pourra aussi étudier **quelques** exemples **simples** de problèmes d'optimisation et de construction, mais aucune connaissance spécifique sur ces questions n'est exigible.
Comme en Seconde, **la géométrie dans l'espace** est utilisée pendant toute l'année comme terrain pour mobiliser des acquis d'algèbre, d'analyse et de géométrie plane.

1. Calcul vectoriel et configurations

- Les règles du calcul vectoriel dans le plan ont été mises en place en Seconde ; en Première, le programme comporte la mise en place du **produit scalaire** et de quelques notions sur les **barycentres**, et leur exploitation, sur des exemples **très simples**, pour l'étude des configurations. Il comporte aussi une **brève extension du calcul vectoriel à l'espace**.

- La **traduction vectorielle des propriétés des configurations et des transformations** joue un rôle essentiel, aussi bien pour la compréhension de la notion que pour la résolution des problèmes de géométrie ; le calcul vectoriel ne doit donc pas constituer un terrain d'activités purement algébriques. À travers quelques exemples issus de la

mécanique et de la **physique**, on montrera que l'intérêt du calcul vectoriel ne se limite pas à la géométrie.

- Comme en seconde, pour la résolution de problèmes de géométrie, on se limite à l'emploi de repères **orthonormaux** ; le recours à un tel repère n'est qu'un outil parmi d'autres : il relève de seules considérations de commodité et d'efficacité.

a) Vecteurs et configurations dans le plan	
Barycentre de deux points pondérés :	Les élèves doivent savoir que le barycentre de deux points appartient à la droite définie par ces points ; la réciproque est hors programme.
Étude de $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$; réduction dans le cas où $\alpha+\beta\neq 0$.	L'emploi des barycentres en géométrie ne porte que sur des **exemples numériques**, où le calcul vectoriel permet, de façon très simple, **d'associer des points** pour obtenir des propriétés d'alignement ou de concours ; tout énoncé général concernant l'associativité de la barycentration est hors programme. **On ne multipliera pas les exercices de recherche et de construction de barycentres.**
Caractérisation du barycentre par $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$.	
Extension à un système de trois ou quatre points.	
Produit scalaire : expressions du produit scalaire :	La notion de forme bilinéaire symétrique est hors programme.
$2\,\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$;	Le texte ci-contre suggère une démarche pour l'introduction du produit scalaire : on s'appuie sur la caractérisation (vue en seconde) de l'orthogonalité de deux vecteurs par $\|\vec{u}+\vec{v}\|=\|\vec{u}\|2+\|\vec{v}\|2$ ou encore par $xx'+yy'=0$, ce qui amène aux deux premières expressions du produit scalaire indiquées ci-contre. Le professeur peut adopter un autre choix. Quel que soit ce choix, les quatre expressions doivent être mises en valeur et exploitées sur **quelques** exemples simples.
$\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$;	
$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overline{OA}\,\overline{OH}$;	
$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\theta$	
Propriétés du produit scalaire : symétrie, linéarité.	
La projection orthogonale d'un vecteur $\vec{v}$ sur un axe Δ muni d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ est $(\vec{u}\cdot\vec{v})\vec{u}$. En particulier, les coordonnées x et y de $\vec{v}$ dans une base orthonormale $(\vec{i},\vec{j})$ sont $x=\vec{i}\cdot\vec{v}$ et $y=\vec{j}\cdot\vec{v}$	On habituera les élèves à traduire vectoriellement des propriétés géométriques portant sur des distances et des angles à l'aide du produit scalaire, et, inversement, interpréter géométriquement des résultats vectoriels. Ainsi les propriétés du losange et du triangle isocèle sont à relier au fait que $\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}+\vec{v}$ et $\vec{u}-\vec{v}$ sont orthogonaux ; de même, les théorèmes de la médiane sont à relier au calcul de la somme et de la différence de $\|\vec{u}+\vec{v}\|2$ et de la différence $\|\vec{u}-\vec{v}\|2$.

Caractérisation d'une droite par $\vec{k}.\overrightarrow{AM}=0$.	Les élèves doivent savoir déterminer un vecteur normal à une droite donnée par une équation.
Equation d'un cercle de centre et de rayon donnés.	Les élèves doivent savoir déterminer le centre et le rayon d'un cercle donné par son équation cartésienne.
b) Vecteurs et configurations dans l'espace	
Extension à l'espace du calcul vectoriel (admise).	Aucune construction théorique du calcul vectoriel dans l'espace n'est au programme ; toute construction des propriétés d'incidence à partir du calcul vectoriel est exclue. L'étude de la translation et de l'homothétie n'est pas un objectif du programme.
Vecteurs colinéaires, vecteurs coplanaires. Bases, repères ; coordonnées d'un vecteur, d'un point. Coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ et de $\lambda\vec{u}$.	Les élèves doivent savoir utiliser ces notions pour caractériser le parallélisme de droites et de plans, l'appartenance d'un point à une droite ou à un plan. La notion de représentation paramétrique d'une droite, d'équation cartésienne d'un plan est hors programme.
Extension à l'espace de la notion de barycentre.	Tout exposé général est exclu ; le but est d'exploiter cette notion pour étudier quelques configurations simples (tétraèdre, cube...).
Norme d'un vecteur, vecteurs orthogonaux. Bases orthonormales ; repères orthonormaux. Expression de la distance et de la norme ; condition d'orthogonalité de deux vecteurs.	Le produit scalaire dans l'espace est hors programme.

2. Transformations et configurations dans le plan

- Pour les **angles orientés**, on conserve le point de vue intuitif adopté en Seconde ; le plan est orienté à partir du choix d'un sens de parcours sur un cercle. Les résultats figurant au programme permettent d'établir quelques propriétés de base de **fonctions circulaires** et de poursuivre l'étude des **rotations**.

- Pour les **transformations**, comme dans les classes précédentes, l'objectif est que les élèves connaissent un **petit nombre de propriétés essentielles** et sachent les **mettre en œuvre sur des configurations simples**. L'étude des transformations ne doit donc pas être considérée comme une fin en soi. Sur **quelques** exemples simples, on montrera aussi leur utilité pour la recherche de lieux géométriques et on mettra en valeur l'intérêt de leur bijectivité pour ce type de problèmes.

a) Angles orientés dans le plan, rotations	
Orientation du plan ; mesures de l'angle orienté d'un couple de vecteurs dans le plan orienté. Bases orthonormales directes, indirectes. Etant donné un vecteur unitaire $\vec{u}$, il existe un vecteur unitaire $\vec{v}$ et un seul tel que $(\vec{u},\vec{v})$ soit une base orthonormale directe.	Les élèves doivent connaître et savoir utiliser les résultats suivants (admis) : - Un angle orienté possède une mesure principale appartenant à $]\pi,\pi]$ les autres mesures s'en déduisent par addition de $2k\pi$; - Inversement, tout nombre réel définit un angle orienté et un seul admettant ce nombre pour mesure ;
Cosinus et sinus de l'angle orienté d'un couple de vecteurs. - Les mesures des angles orientés satisfont à la relation de Chasles ; en particulier, si θ est une mesure de $(\vec{u},\vec{v})$, alors $-\theta$ est une mesure de $(\vec{v},\vec{u})$ et $\theta+\pi$ est une mesure de $(\vec{u},-\vec{v})$. - Toutes les mesures d'un angle ont un cosinus (respectivement un sinus) commun, qui est le cosinus (respectivement le sinus) de l'angle.	On fera l'abus de langage et de notations usuels : confusion d'écriture entre un angle et une de ses mesures, telle que $(\vec{u},\vec{v})=\frac{\pi}{3}$, ou $(Ox,Ox')=\pi$, ou encore, pour un angle non orienté, $A\hat{O}B=\frac{\pi}{2}$.
Rotations du plan orienté. La rotation de centre O et d'angle θ fixe O et associe à tout point M distinct de O le point M' tel que $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM'}$ et $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})=\theta$. Pour tout couple de points A et B distincts, ayant pour images respectives A' et B', $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'B'})=\theta$.	On mettra en valeur et on exploitera l'écriture vectorielle d'une rotation : pour tout point M, ayant M' pour image, $\overrightarrow{OM'}=\cos\theta\overrightarrow{OM}+\sin\theta\overrightarrow{ON}$, où N est l'image de M par le quart de tour direct de centre O.
Formules d'addition pour les fonctions cosinus et sinus ; formules de duplication.	Les formules de conversion de sommes en produits et de produits en sommes ne sont pas au programme ; il en est de même de la linéarisation des puissances autres que $\cos^2x$ et $\sin^2x$.
b) Transformations	
Composée de deux translations, de deux rotations de même centre, de deux homothéties de même centre. Composée de deux réflexions. Transformation réciproque d'une translation, d'une réflexion, d'une rotation, d'une homothétie.	Il ne s'agit que d'une étude de **quelques** exemples de base ; on dégagera à ce propos la bijectivité des transformations étudiées. Toute autre étude de composition de transformations est hors programme, ainsi que la décomposition d'une rotation ou d'une translation en produit de deux réflexions.

Image d'une droite, d'un segment, d'un cercle par une réflexion, une rotation, une translation ou une homothétie. Conservation du parallélisme de deux droites, du contact d'une droite et d'un cercle, ou de deux cercles. Image du milieu d'un segment. Effet sur les angles (orientés ou non orientés).	Sur **quelques** exemples, on montrera comment la bijectivité d'une telle transformation permet d'établir très simplement la bijectivité de son effet sur une droite, un cercle...

Travaux pratiques

Exemples d'étude de configurations plans (alignement, concours orthogonalité,...) à l'aide de différents outils (configurations de base, calcul vectoriel, outil numérique).	
Exemples d'étude de problèmes d'alignement et de concours dans les tétraèdres et les parallélépipèdes à l'aide de différents outils (configurations de base, calcul vectoriel).	Comme dans les classes antérieures, pour l'ensemble des activités sur les configurations de l'espace, les éléments doivent être entraînés à l'emploi fréquent de croquis perspectifs avec ponctuation.
Exemples simples de recherche et de représentation (en perspective ou en vraie grandeur) de sections planes (sections de prismes et de pyramides par des plans parallèles au plan de base ; méridiennes et parallèles de surfaces de révolution...).	On s'assurera qu'ils ont une bonne pratique des règles permettant la réalisation de tels croquis, mais tout exposé sur la perspective cavalière est exclu.
Exemples de calculs de distances, d'angles, d'aires et de volumes, dans des configurations usuelles du plan et de l'espace.	Pour les polygones réguliers on se limitera à des cas simples tels que : triangle et hexagone, carré et octogone, éventuellement pentagone et décagone. Toute technicité particulière doit être évitée dans l'étude des triangles ; les seules connaissances exigibles des élèves sont les suivants : $A+B+C=\pi$. $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$, $S=\frac{1}{2}bc\sin A$, $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$. On observera que ces relations permettent de caractériser simplement les triangles isométriques et les triangles semblables.
Exemples de recherche de translations, d'homothéties, de réflexions et de rotations transformant une configuration en une autre (segments, cercles,...) ; exemples d'applications à l'étude de problèmes d'alignement, d'orthogonalité,...	L'objectif est ici de mettre en valeur une idée : étudier un problème en introduisant une transformation adéquate. On se limitera à quelques situations simples et on donnera des indications sur la transformation à utiliser.

Exemples simples de recherche de lieux géométriques dans le plan (conditions de distances et d'angles, lignes de niveau, points liés à une configuration mobile). Lignes de niveau de $M \mapsto \vec{k}.\overrightarrow{AM}$. Transformations des expressions MA^2+MB^2, MA^2-MB^2, et $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ à l'aide du milieu du segment AB ; application aux lignes de niveaux correspondantes.	Pour les lignes de niveau, on exploitera d'abord des situations simples (issues de la géométrie et d'autres sciences) permettant aux élèves de se familiariser avec cette notion. Les élèves doivent savoir caractériser les points M du cercle de diamètre AB par la relation \o(MA;\s\up7(→)).\o(MB;\s\up7(→))=0.

TERMINALE C et E - Le programme de 1991

IV - GÉOMÉTRIE

Le programme comporte trois objectifs essentiels :
• Poursuivre l'étude du **calcul vectoriel** en relation avec l'enseignement de la **géométrie** et de la physique : le programme met en place de produit scalaire dans l'espace et le produit vectoriel.
• Approfondir la géométrie du plan et de l'espace à travers l'étude de **configurations** et de l'action de **transformations sur ces configurations**.
• Développer une **vision géométrique des problèmes** grâce à la mise en œuvre systématique d'activités graphiques (figures, tracés de courbes, croquis perspectifs, schémas...) permettant de représenter les objets mathématiques étudiés dans les différentes parties du programme.

- **En géométrie plane**, le champ des objets étudiés est enrichi (coniques, exemples simples de courbes paramétrées) et celui des transformations est élargi et réorganisé à travers l'étude plus systématique de la **composition des transformations** élémentaires et de la recherche d'invariants associés, ce qui conduit à exploiter les **isométries**, les **déplacements** et, sur des exemples **très** simples, les similitudes directes. Cet approfondissement de la géométrie plane passe par une **bonne pratique des outils** fournis par le programme (propriétés des configurations de base, effet de transformations, calcul vectoriel, calcul de distances et d'angles, emploi d'un repère orthonormal adéquat, emploi des nombres complexes).

- **En géométrie de l'espace**, l'objectif, plus modeste mais tout aussi essentiel, est de développer la maîtrise des **objets usuels de l'espace** étudiés dans les classes précédentes et de quelques **transformations élémentaires** opérant sur ceux-ci. Ce développement doit être mené en **interaction étroite** avec celui de la géométrie plane.

A propos de l'étude des projections et des transformations, la **linéarité des applications vectorielles associées** doit être mise en évidence et exploitée, mais l'étude systématique des applications linéaires, et a fortiori des applications affines, n'est pas au programme : les transformations vectorielles fournissent un outil pour l'étude des configurations et des transformations ponctuelles, elles ne constituent pas un objet d'étude en soi.

Le programme comporte l'étude de **lieux géométriques** variés. On étudiera aussi **quelques** problèmes simples d'**optimalisation** et de **construction**, mais aucune connaissance spécifique sur ces questions n'est exigible des élèves.

1. Calcul vectoriel et configurations (plan et espace)

Il s'agit ici de compléter les outils étudiés en Première. Il n'y a pas à revenir sur les fondements du calcul vectoriel ; la notion générale d'espace vectoriel est hors programme.

a) Barycentres ; réduction d'une somme $\sum\alpha_i . \overrightarrow{MA_i}$ dans chacun des cas $\sum\alpha_i \neq 0$ et $\sum\alpha_i = 0$.	Les élèves doivent connaître et savoir utiliser l'associativité de la barycentration.
b) Caractérisation vectorielle d'une droite, d'une demi-droite, d'un segment ($\overrightarrow{MA} = t\overrightarrow{AB}$, $0 \leq t \leq 1$) ; traduction dans un repère.	Dans le cas d'une projection sur une droite, les élèves doivent savoir que si $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$ et savoir appliquer à la configuration de Thalès.
c) Projection ponctuelle, projection vectorielle associée; linéarité d'une projection vectorielle, conservation des barycentres par une projection ponctuelle.	Dans le cas d'une projection sur un plan, les élèves doivent connaître et savoir exploiter la conservation de l'alignement et du parallélisme. Ces résultats sont à relier aux règles relatives aux croquis perspectifs, déjà pratiquées dans les classes antérieures.
d) Produit scalaire dans l'espace ; expression dans une base orthonormale. Projection orthogonale sur une droite, sur un plan. Projection de deux droites orthogonales.	Les élèves doivent savoir caractériser vectoriellement l'orthogonalité de deux droites, d'une droite et d'un plan ; ils doivent connaître et savoir utiliser la notion de plans perpendiculaires.
Caractérisation d'un plan par $\vec{k} . \overrightarrow{AM} = 0$; équation d'un plan dans un repère orthonormal. Équation d'une sphère de centre et de rayon donnés.	Les élèves doivent savoir déterminer un vecteur normal à un plan donné par une équation.
e) Dans l'espace orienté : bases (ou repères) orthonormales directes, indirectes.	Aucune théorie de l'orientation ne figure au programme, on s'appuiera sur les conventions physiques usuelles.
Produit vectoriel, notation $\vec{u} \times \vec{v}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v}$; expression d'une base orthonormale directe.	Les élèves doivent connaître et savoir utiliser les formules : $\vec{u} . \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \sin\theta$, et savoir traduire la colinéarité des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par la relation $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Travaux pratiques

Calculs de distances, d'angles, d'aires et de volumes dans les configurations usuelles du plan (polygones, cercles, coniques...) et de l'espace (prismes, pyramides, sphères, cylindres, cônes...)	Les élèves doivent être capables de calculer la distance d'un point à une droite dans le plan, ou d'un point à un plan dans l'espace.

Exemples de recherche de lieux géométriques dans le plan (conditions de distances et d'angles, lignes de niveau, points liés à une configuration mobile). Réduction et lignes de niveau de $\sum\alpha_i MA_i^2$; cas de deux points : lignes de niveau de $M \to \frac{MA}{MB}$.	Pour les lignes de niveau, on exploitera notamment des situations issues des sciences physiques.
Ensemble de points M du plan tels que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$ modulo π , ou modulo 2π .	Les élèves doivent connaître la condition de cocyclicité de quatre points qui en résulte.
Exemples d'emploi des nombres complexes pour l'étude d'une configuration plane.	Les élèves doivent savoir déterminer l'affixe d'un barycentre, évaluer un angle à l'aide de l'argument d'un quotient et traduire l'orthogonalité ou la colinéarité de deux vecteurs. Toute autre formulation de propriétés géométriques à l'aide des nombres complexes doit faire l'objet d'indications.
Exemples d'emploi d'un repère orthonormal dans le plan ou dans l'espace.	
Changement (de base ou) de repère orthonormal direct dans le plan.	
Expression analytique d'une translation, d'une homothétie, d'une rotation plane.	La reconnaissance d'une rotation plane à partir de son expression analytique n'est pas exigible des élèves.

2. Courbes planes

L'introduction de **quelques notions** sur les **courbes paramétrées** est motivée par l'étude de situations géométriques, mécaniques ou physiques ; on évitera donc de multiplier les exemples posés a priori. On se gardera aussi de toute technicité ; en particulier l'étude des branches infinies et des points où le vecteur dérivé s'annule, la recherche des points multiples et l'emploi de coordonnées polaires sont hors programme. Pour l'obtention de périodicités et de symétries, toutes les indications utiles doivent être fournies.

a) **Notions sur les courbes paramétrées du plan**	
Courbe définie en repère orthonormal par $t \to \overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$. Vecteur dérivé, interprétation cinématique (vecteur vitesse), tangente.	L'étude des fonctions vectorielles (limites, continuité, calcul différentiel...) est hors programme. Le vecteur dérivé est défini par ses coordonnées x'(t), y'(t) ; pour la notion de tangente on se limitera au cas où ce vecteur n'est pas nul. Les élèves doivent savoir dresser un tableau de variations coordonnées des fonctions x et y et l'utiliser pour le tracé de la courbe.

b) **Coniques**

Définition par foyer et directrice (lignes de niveau du rapport $\frac{MF}{MH}$), excentricité ; équation cartésienne dans un repère orthonormal adapté, équation réduite : cas d'une parabole, cas d'une conique à centre.	La génération bifocale de l'ellipse et de l'hyperbole pourra faire l'objet d'une activité, mais aucune connaissance n'est exigible des élèves à ce propos.
Mise en place d'une parabole ou d'une conique à centre à partir d'une équation de la forme $y^2=2px$ ou $\alpha x^2+\beta y^2=\gamma$.	
Représentation paramétrique t –> (a cost, b sint) d'une ellipse. Projection d'un cercle sur un plan.	Les élèves doivent connaître le lien que cette représentation permet d'établir entre le cercle et l'ellipse par affinité orthogonale plane. Mis à part ce cas, aucune connaissance sur l'affinité n'est exigible.

Travaux pratiques

Exemples d'étude de lieux géométriques à l'aide d'un paramétrage.	Ma méthode à suivre pour l'obtention d'un tel paramétrage doit être indiquée.
Exemples d'obtention et d'emploi de représentations paramétriques de coniques (détermination de la tangente en un point...)	Mis à part le paramétrage t –> (a cost, b sint) de l'ellipse, aucune connaissance spécifique n'est exigible des élèves sur les paramétrages des coniques.
Exemples d'étude de situations issues de la géométrie, de la mécanique et de la physique menant à des coniques.	

3. Transformations et configurations

En géométrie plane, il s'agit d'approfondir et de réorganiser les acquis des classes antérieures dans le cadre des **isométries** et des **déplacements**, grâce à une étude plus systématique de la **composition des transformations** et de leur **effet sur les configurations** et à l'exploitation des **transformations vectorielles** associées. Il ne convient donc pas de reprendre l'étude des isométries à partir de zéro : on s'appuiera sur les résultats acquis antérieurement concernant les translations, les réflexions et les rotations. Le programme comporte aussi **quelques** notions sur les **similitudes directes** ; les objectifs sont très **modestes** : on se borne à exploiter leur écriture complexe.

En géométrie de l'espace, on étudie **l'action des transformations élémentaires** sur les configurations usuelles mais l'étude systématique de transformations composées est hors programme, ainsi que la notion de transformation vectorielle associée.

a) **Isométries du plan** (bijections conservant la distance).	En s'appuyant sur les exemples étudiés en Première, on observera que la conservation de la distance est valable non seulement pour les réflexions, les translations et les rotations, mais aussi pour leurs composées, ce qui amène à introduire les isométries.
La composée de deux isométries est une isométrie, la réciproque d'une isométrie est une isométrie.	
Décomposition d'une translation ou d'une rotation en produit de deux réflexions.	
Toute isométrie fixant un point O est, soit une réflexion, soit une rotation.	
Étant donné un point O, une isométrie f se décompose de manière unique en f=t∘u, où u est une isométrie fixant O et t une translation.	Les élèves doivent connaître et savoir utiliser le fait que les isométries transforment les droites en droites, les cercles en cercles, les coniques en coniques, le parallélisme et le contact étant conservés ; il en est de même pour leur effet sur les barycentres, les angles et les aires.
Déplacements (isométries conservant les angles orientés) ; composé de deux déplacements, réciproque d'un déplacement. Tout déplacement est soit une translation, soit une rotation.	La notion d'antidéplacement est hors programme.
Etant donné des points A, B, A', B' tels que A'B'=AB≠0, il existe un déplacement et un seul transformant A en A', B en B'.	Les élèves doivent savoir déterminer ce déplacement et, dans le cas d'une rotation, construire son centre.
Transformation vectorielle associée à une isométrie du plan ; cas d'une translation, d'une réflexion, d'une rotation. Linéarité, conservation du produit scalaire, effet sur le déterminant. Caractérisation des déplacements. La transformation vectorielle associée à une composée g∘f est la composée des transformations vectorielles associées à g et à f. La transformation vectorielle associée à la réciproque de f est la réciproque de la transformation vectorielle associée à f.	Il s'agit ici de mettre en place un outil efficace pour la résolution de nombreux problèmes concernant les transformations ponctuelles. En revanche, la reconstitution des propriétés fondamentales des isométries ponctuelles à partir de celles des isométries vectorielles est hors programme. La donnée d'un point O permet d'identifier les isométries fixant O et les isométries vectorielles, ce qui permet d'obtenir simplement les propriétés des isométries vectorielles.

b) Notions sur les similitudes directes du plan	
Composée d'une homothétie de rapport positif et d'une rotation de même centre ; effet sur les distances, conservation des angles orientés. Écriture complexe. Similitude directes (bijections transformant les distances dans un rapport donné et conservant les angles orientés). Écriture complexe z –> az+b ; application à l'obtention d'une forme réduite : rapport, centre et angle d'une similitude directe quand a ≠ 1, c'est-à-dire quand elle n'est pas une translation.	L'étude générale des similitudes (bijections transformant les distances dans un rapport donné) est hors programme. Il en est de même pour la composition des similitudes directes et pour la notion de transformation vectorielle associée à une telle similitude. Les élèves doivent savoir que les similitudes directes transforment les droites en droites, les cercles en cercles, les coniques en coniques, le parallélisme ou le contact étant conservés. Ils doivent connaître leur effet sur les barycentres et les aires.
c) Notions sur les transformations élémentaires de l'espace	
Translation. Homothétie, symétrie centrale. Réflexion (symétrie orthogonale par rapport à un plan). Rotation définie par son axe et son angle, demi-tour ; rotation induite dans un plan orthogonal à l'axe. Composée de deux réflexions ; décomposition d'une translation ou d'une rotation en produit de deux réflexions.	Les élèves doivent savoir que les transformations considérées transforment les droites en droites, les plans en plans, les sphères en sphères et conservent le parallélisme ; ils doivent connaître leur effet sur les barycentres, les distances, les aires planes et les volumes. Sur des exemples simples, ils doivent savoir utiliser ces résultats pour l'étude de configurations de l'espace.
Travaux pratiques	
Exemples d'emploi des transformations planes pour l'étude de configurations et de lieux géométriques.	Des indications doivent être fournies sur la transformations à utiliser ; en outre, pour l'emploi de similitudes directes, on e limitera à **quelques** exemples **très** simples.
Exemples d'étude des isométries laissant invariant une configuration du plan.	
Exemples de recherche et d'emploi d'isométries ou d'homothéties planes transformant une configuration donnée en une autre (segments, triangles, rectangles, cercles...).	La recherche de similitudes directes transformant une configuration en une autre n'est pas un objectif du programme.
Exemples de recherche de symétries ou de rotations laissant invariant un solide usuel donné (tétraèdre, cube, octaèdre...).	

Annexes Chapitre B2

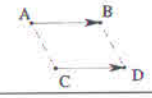
Extraits des manuels

TERRACHER - 1995

Égalité

Chacune des propriétés suivantes signifie que : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même **direction**, même **sens** et les **longueurs** AB et CD sont égales.
- ABCD est un **parallélogramme** (ou encore [AD] et [BC] ont même milieu).
- C'est la même *translation* qui amène A sur B et C sur D.



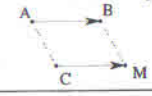
La notation $\vec{u}$

- Devant des égalités du type $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = ...$, on peut noter ce vecteur par *une* lettre $\vec{u}$ $= \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = ...$ ($\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, ... sont alors des représentants du vecteur $\vec{u}$).
- Pour des raisons calculatoires (cf. paragraphe suivant), le vecteur $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = ...$ est appelé vecteur nul et noté $\vec{o}$.

De ce fait, l'égalité $\overrightarrow{AB} = \vec{o}$ ne se produit que lorsque A=B.

Représentation d'un vecteur

Soit O un point fixé du plan. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un point M unique tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ (lorsque $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, M est le quatrième sommet du parallélogramme OABM).



Norme d'un vecteur

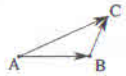
On appelle norme de $\vec{u}$, notée $\|\vec{u}\|$, la *longueur* AB où $\overrightarrow{AB}$ est un représentant quelconque de $\vec{u}$; $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. Ainsi $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$. Notons alors que l'égalité $\vec{u} = \vec{v}$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant non nuls) se traduit par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont **même direction, même sens et même norme**

Addition

On sait associer à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, un vecteur nommé $\vec{u} + \vec{v}$ (appelé **somme** de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$), suivant les règles fondamentales décrites ci-après :

Relation de Chasles

Quels que soient les points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



Cette relation fonctionne :
Du point de vue géométrique (dessin)

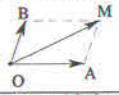
Pour construire $\vec{u} + \vec{v}$ à l'aide de représentants $\overrightarrow{AB}$ de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{BC}$ de $\vec{v}$ disposés "bout à bout"

Du point de vue algébrique (calcul)

Pour simplifier une somme ($\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ se réduit à $\overrightarrow{AC}$) ou décomposer un vecteur en une somme (pour tout point M, $\overrightarrow{AB}$ peut se décomposer sous la forme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$).

La règle du parallélogramme

La somme $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}$ est le vecteur $\overrightarrow{OM}$ tel que **AOBM** est un **parallélogramme**.



Propriétés algébriques de l'addition
L'application de la règle du parallélogramme et de la relation de Chasles rend immédiates les propriétés suivantes :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

♦ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; ♦ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$;

♦ $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$: une telle somme peut être notée $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

Opposé d'un vecteur, différence de deux vecteurs

♦Tout vecteur $\vec{u}$ admet un opposé noté $-\vec{u}$ et l'on a $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ pour tous points A et B du plan

♦La différence $\vec{u} - \vec{v}$ est égale (par définition) à $\vec{u} + (-\vec{v})$ et l'on a $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ pour tous points A, B et C du plan.

Configurations de base

Représentations de $\vec{u} + \vec{v}$, $-\vec{u}$ et $\vec{u} - \vec{v}$.

Multiplication d'un vecteur par un réel

A un vecteur $\vec{u}$ et à un réel x, on associe un **vecteur** appelé **produit de $\vec{u}$ par x**, noté $x\vec{u}$, de façon que :

♦Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$, le vecteur $x\vec{u}$ est nul : $x\vec{0} = \vec{0}$.

♦Lorsque \o(u;\s\up7(→)) ≠ \o(o;\s\up7(→)) et \o(u;\s\up7(→)) = \o(AB;\s\up7(→)) (A et B distincts), le vecteur $x\vec{u}$ est le vecteur $\overrightarrow{AM}$: **$x\vec{u} = \overrightarrow{AM}$, où M est le point de la droite (AB) d'abscisse x dans le repère (A,B).**

Propriétés algébriques

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tous réels x et y :

♦$(x+y)\vec{u} = x\vec{u} + y\vec{u}$ ♦$(x-y)\vec{u} = x\vec{u} - y\vec{u}$;

♦$x(\vec{u} + \vec{v}) = x\vec{u} + x\vec{v}$; ♦$x(\vec{u} - \vec{v}) = x\vec{u} - y\vec{v}$

Vecteurs et configurations
La colinéarité - ***Définition***

Etant donnés deux vecteurs *non nuls* $\vec{u}$ et $\vec{v}$, il revient au même de dire :

♦ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont **même direction** ;

♦**l'un est le produit de l'autre par un réel** non nul (par exemple, il existe a réel, a≠O tel que $\vec{v} = a\vec{u}$).

On décrit une telle situation en disant que **$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires**.

Parallélisme et alignement
La colinéarité permet de *traduire* simplement dans le domaine des vecteurs les propriétés géométriques telles que le parallélisme et l'alignement :

♦Les droites (AB) et (CD) sont parallèles se traduit par : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

♦Les points A, B et C sont alignés se traduit par : les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Avec les milieux

♦Soit A, B et I trois points du plan. Chacune des relations suivantes caractérise le fait que I est le milieu de [AB] :

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{AI} = 1/2\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

♦Lorsque I est le milieu de [AB], on a pour tout point M du plan : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

Théorème des milieux

Soit ABC un triangle, I et J les milieux respectifs de [AB] et [AC], alors : $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IJ}$.

Centre de gravité d'un triangle
Soit un triangle ABC et G un point du plan.
Le fait que G soit le centre de gravité du triangle ABC est caractérisé par l'égalité :

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Le théorème de la projection
Considérons deux droites distinctes D et D' et :
- A, B et C trois points de D ;
- A', B' et C' trois points de D'.
Traduisons les alignements précédents : il existe des réels x et y tels que :

$\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = y\overrightarrow{A'B'}$.

Nous admettrons le résultat suivant concernant cette configuration.
Théorème
Si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont **parallèles**, alors x=y.
Le théorème de Thalès

♦Lorsque les droites **(AB) et (A'B') sont parallèles**, alors **x=y**.

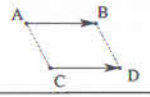
On a en prime $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{AB}$.

♦*Réciproquement*, si **x=y**, alors les droites **(AB) et (A'B') sont parallèles**

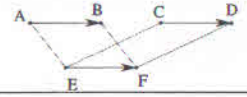
DIMATHEME - 1990

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux lorsque B et D sont les images respectives de A et C par la même translation.

Pour A, B, C et D non alignés



Pour A, B, C et D alignés

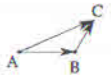


Égalité - Dans les exemples précédents $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ désignent le même vecteur. Pour simplifier l'écriture, on utilise la notation $\vec{u}$, avec $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Norme - La norme du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est la distance de A à B. On note $\|\vec{u}\| = AB$.

Somme vectorielle - Soit u et v deux vecteurs. Constructions de la somme $\vec{u} + \vec{v}$:

i) si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$



ii) si $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$ alors $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OP}$. OMPN est un parallélogramme.



Relation de Chasles - Pour trois points A, B et C quelconques du plan : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Produit d'un vecteur par un réel

a) ***Définition*** - Un vecteur $\vec{u}$ et un réel k sont donnés. Prenons A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On appelle C le point de la droite (AB) tel que :
- $AC = |k|AB$
- B et C sont du même côté de A si $k>0$;
- B et C sont de part et d'autre de A si $k<0$.

Par définition : $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$.

Exemples : $\overrightarrow{AC} = 1{,}5\ \overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{AC} = -1/3\overrightarrow{AB}$

b) Cas particuliers

- **k=0**, on obtient C=A ; D'où $\overrightarrow{AA} = 0.\overrightarrow{AB}$, on note $\overrightarrow{AA} = \vec{o}$

Propriété du vecteur nul $\vec{o}$: $\vec{u} + \vec{o} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{u}$

- **k=1** ; On a alors C=B donc : $1\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$.

- **k=-1** ; On a alors $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA}$, d'où :

Pour deux points quelconques A et B du plan : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

Conséquence : pour trois points quelconques O, A et B, on a

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$

Propriétés

Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ quelconques et deux réels a et b quelconques, on a:

$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$; $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$; $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$.

Milieu

- Soient A et B deux points et I le milieu de [AB].

Pour tout point M du plan, on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

- Réciproquement, si : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, alors I est le milieu de [AB].

Centre de gravité

- Soient A, B et C trois points non alignés et G le centre de gravité de ABC,

on a : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{o}$.

- Réciproquement, si G vérifie : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{o}$, alors G est le centre de gravité de ABC.

Vecteurs colinéaires et points alignés

Définition - Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires lorsque les points A, B et C sont alignés.

- Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ n'étant pas nuls, $\overrightarrow{AB}$ est colinéaire à $\overrightarrow{CD}$ si et seulement si (AB) et (CD) sont parallèles.

Propriété - Un vecteur $\vec{v}$ est colinéaire à un vecteur $\vec{u}$ non nul si et seulement s'il existe un réel k tel que : $\vec{v} = k\vec{u}$.

Conséquence : soient deux points A et B distincts. Un point C est situé sur (AB) si et seulement si il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Mesure algébrique

Définition - On appelle mesure algébrique de $\overrightarrow{AB}$, et on note $\overline{AB}$, le nombre : $\overline{AB} = x_B - x_A$ (=abscisse de B - abscisse de A).

Propriétés

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés : $\overline{AB} = -\overline{BA}$

- $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\ \vec{i}$
- Relation de Chasles

Pour trois points quelconques A, B, C de la droite graduée Δ : $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Propriété de Thalès - Soit un triangle ABC. Si une parallèle à (BC) coupe la droite (AB) en D et la droite (AC) en E, alors : $\overline{AD}/\overline{AB} = \overline{AE}/\overline{AC}$.
- Réciproque de la propriété de Thalès dans le triangle
- Propriété de Thalès dans le trapèze

Projection sur une droite

On donne dans un plan P, une droite D et une droite Δ non parallèle à D.

Définition

"Le point M du plan P a pour image m dans la projection sur D, parallèlement à Δ" signifie que :

m est l'intersection de D et de la parallèle à Δ menée par M.

•Notation : p(M)=m

$$p : P \rightarrow D$$
$$M \rightarrow m$$

•Projection orthogonale sur une droite D

•Projection de trois points alignés

Propriété

Soient trois points alignés A, B et C tels que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$. Leurs projetés a, b et c sur une droite D, parallèlement à une droite Δ, vérifient : $\overrightarrow{ac} = k\overrightarrow{ab}$

Projection d'un parallèlogramme

Propriété

Quatre points M, Q, N et P tels $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$, se projettent sur une droite D en quatre points m, q, n et p vérifiant : $\overrightarrow{mq} = \overrightarrow{np}$.

TERRACHER - 1995 - GEOMETRIE ANALYTIQUE

Théorème 1 - Soit deux axes distincts de même origine O :

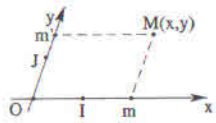
♦(Ox) muni du repère (O,I) ;

♦(Oy) muni du repère (O,J).

Les deux phrases suivantes ont la même signification :

1. M a pour coordonnées (x,y) dans le repère (Oxy).

2. $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI}+y\overrightarrow{OJ}$.



Base, repère

Définition

On appelle **base** tout couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs **non-colinéaires**.

Un repère du plan est un triplet $(O, \vec{i}, \vec{j})$, où O est un point du plan (appelé *origine* du repère) et $(\vec{i}, \vec{j})$ une base.

Théorème 2 (unicité)

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.

Pour tout point M, il existe un unique couple (x,y) de réels tels que $\overrightarrow{OM}= x\vec{i} +y\vec{j}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique couple (x,y) de réels tels que $\vec{u} =x\vec{i} +y\vec{j}$.

Les réels x et y tels que $\vec{u} =x\vec{i} +y\vec{j}$ sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la **base** $(\vec{i}, \vec{j})$.

COORDONNEES

(x,y) sont les coordonnées de M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ signifie $\overrightarrow{OM}=x\vec{i} +y\vec{j}$.

(x,y) sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ signifie $\vec{u} =x\vec{i} +y\vec{j}$.

Propriétés des coordonnées

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base, $\vec{u}$(x,y) et $\vec{v}$(x',y') deux vecteurs. Alors :

♦ $\vec{u}=\vec{o}$ équivaut à **x=O et y=O** ;

♦ $\vec{u}=\vec{v}$ équivaut à **x=x' et y=y'** ;

♦ $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées **(x+x', y+y')** ;

♦ $\propto\vec{u}$ ($\propto$ réel) a pour coordonnées **($\propto$x, $\propto$y).**

Théorème

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et deux points $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$.

♦Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (x_B-x_A,y_B-y_A).

♦Le milieu I de $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \; ; \; y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$$

COLINÉARITÉ

Condition analytique de colinéarité

Théorème

Soit deux vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$.

La condition $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont colinéaires** équivaut à **xy'-yx'=O**.

♦L'expression xy'-yx' est appelée déterminant de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

Elle est notée $\det(\vec{u},\vec{v})$ et se mémorise aisément à l'aide d'un tableau où les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ sont inscrites en colonnes : $\det(\vec{u},\vec{v})=$ $=xy'-yx'$

Remarques : Nous aborderons les problèmes de parallélisme avec le même point de vue : (AB) parallèle à (CD) équivaut à $\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=0$

DROITES DU PLAN

Vecteurs directeurs d'une droite

•Considérons une droite d et deux points distincts A et B de d. Il est clair que d est l'ensemble des points M du plan tels que M, A et B sont alignés ou encore $\overrightarrow{AM}$ **et** $\overrightarrow{AB}$ **sont colinéaires.** Nous dirons alors que $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de la droite d.

•Maintenant, donnons-nous un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires est la droite d=(AB) où B est défini par $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$.

Nous dirons que d est la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ (ou définie par A et le vecteur $\vec{u}$).

Noter que tout vecteur non nul colinéaire à $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de cette droite.

Equations cartésiennes d'une droite

Théorème

1. Toute droite du plan admet une *équation* de la forme ax+by+c=O où l'un au moins des nombres *a ou b n'est pas nul.*

2. "Inversement", soit a, b, et c trois nombres réels tels que *a ou b soit non nul*. L'ensemble des points M(x,y) vérifiant ax+by+c=O est une droite dont un *vecteur directeur* est $\vec{u}(-b,a)$.

Détermination pratique d'une équation cartésienne

On se ramène à une droite d définie par un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$. Le schéma de résolution s'engage alors de la manière suivante : M(x,y) appartient à d équivaut à $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires (traduction vectorielle) qui, à son tour, équivaut à $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$ (traduction analytique).
Cette dernière condition fournit une relation entre x et y : l'équation cherchée.

Condition de parallélisme

Soit deux droites D et D' d'équations : D : ax+by+c=O ; D' : a'x+b'y+c'=O.

La condition D **parallèle** à D' s'exprime par la relation **ab'-ba'=O**.

NORME ET ORTHOGONALITÉ

Définitions

Vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs (non nuls) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de directions orthogonales sont appelés vecteurs orthogonaux et l'on écrit $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Base orthogonale, base orthonormale.

♦Une base $(\vec{i},\vec{j})$ (un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$) est orthogonale si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux.

♦Une base $(\vec{i},\vec{j})$ (un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est orthonormale si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont orthogonaux et de norme 1.

Les résultats analytiques

Théorème

Le plan muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.*Expression analytique de la norme et de la distance*

♦Avec $\vec{u}(x,y)$, on a $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

♦Avec $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$, on a $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

2. *Condition analytique d'orthogonalité*

Soit $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$. Alors, $\vec{u}\perp\vec{v}$ équivaut à xx'+yy'=O.

Théorème

Soit deux droites D et D', D : ax+by+c=O et D' : a'x+b'y+c=O.

La condition D⊥D' équivaut à **aa'+bb'=O**.

Dans le cas d'*équations réduites*, D : y=mx+p et D' : y=m'x+p' :

D⊥D' se traduit par **mm'=-1**.

DIMATHEME - 1990 - REPERES ET BASES

Coordonnées d'un point et d'un vecteur

On considère un repère (O,I,J) du plan. On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$
Soit M un point du plan, H et K ses projetés respectifs parallèlement aux axes sur l'axe des abscisses et sur l'axe des ordonnées.

H étant sur l'axe des abscisses; il existe un unique réel x tel que $\overrightarrow{OH} = x\,\vec{i}$.

K étant sur l'axe des ordonnées, il existe un unique réel y tel que $\overrightarrow{OK} = y\,\vec{j}$.

On en déduit que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

On dit que (x,y) est le couple des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.

On dit aussi que le couple (x,y) représente les coordonnées de M dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Quelques propriétés sur les coordonnées de vecteurs

Soit deux vecteurs $\vec{u}$ (x,y) et $\vec{u'}$ (x',y') dans une base $(\vec{i},\vec{j})$

♦ Egalité de vecteurs

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées. $\vec{u} = \vec{u'} \Leftrightarrow$ x=x' et y=y'

♦ Somme de deux vecteurs - Pour la somme de deux vecteurs, on ajoute leurs coordonnées.

♦ Produit d'un vecteur par un nombre k - Si on multiplie un vecteur par k, ses coordonnées sont multipliées par k.

Condition de colinéarité de 2 vecteurs

Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires si et seulement si xy'-x'y=O.

Equation de droites

Vecteurs directeurs

Définition

On appelle vecteur directeur d'une droite tout vecteur *non nul* défini par un couple de points de D.

Théorème

Toute droite du plan a une équation du type ux+vy+w=O. Réciproquement, l'ensemble des points M(x,y) dont les coordonnées vérifient ux+vy+w=O avec $(u,v)\neq(O,O)$ est une droite dont un vecteur directeur a pour coordonnées (-v,u).

Droites parallèles

Propriété

Soit d la droite d'équation ux+vy+w=O et d' la droite d'équation u'x+v'y+w'=O.
d et d' sont parallèles si et seulement si uv'-vu'=O.

ORTHOGONALITE DANS LE PLAN

Théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

Réciproque du théorème de Pythagore

Si les longueurs AB, AC et BC d'un triangle vérifient la relation $BC^2=AB^2+AC^2$, alors le triangle ABC est un triangle rectangle d'hypoténuse [BC].

Norme d'un vecteur. Vecteurs orthogonaux

Définition

Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ la distance AB et on note : $\|\vec{u}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Définition

Un vecteur $\vec{u}$ est unitaire si $\|\vec{u}\| = 1$.

Vecteurs orthogonaux

Définition

1°Soient deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et des points A, B, C et D tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux lorsque les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

2°Par convention, le vecteur $\vec{o}$ est dit orthogonal à tout vecteur.

Géométrie analytique

Expression analytique de la norme d'un vecteur. Distance de deux points

Théorème

$(\vec{i},\vec{j})$ étant une base orthonormale, la norme du vecteur $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ est :

$$\|u\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Théorème

$(O,\vec{i},\vec{j})$ étant un repère orthonormale la distance entre les points $A(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$ est :

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

Condition d'orthogonalité de deux vecteurs

Théorème

La base $(\vec{i},\vec{j})$ étant orthonormale, les vecteurs $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\,\vec{i} + y'\,\vec{j}$ sont orthogonaux si et seulement si xx'+yy'=O.

Condition d'orthogonalité de deux droites

Théorème

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, deux droites non parallèles aux axes sont perpendiculaires si et seulement si le produit de leurs coefficients directeurs est égal à -1.

LES TRANSFORMATIONS

TERRACHER - 1995 - TRANSFORMATIONS
Objectifs
L'emploi des transformations usuelles dans la résolution de problèmes de Géométrie.
CONNAISSANCES MISES EN JEU :
Transformations
Définition de transformations usuelles, propriétés essentielles.
Configurations
Connaissances élémentaires sur les configurations usuelles : triangle isocèle, rectangle, équilatéral,...carré, rectangle, losange, parallélogramme..., cercle, médiatrice, etc.
Vecteurs
Pour l'essentiel, relations vectorielles caractéristiques du parallélogramme, du milieu et du centre de gravité d'un triangle.
HOMOTHÉTIE
Objectifs
L'emploi des homothéties dans la résolution de problèmes de Géométrie.
Connaissances mises en jeu
Configurations
La configuration de Thalès est incontournable, mais d'autres aussi : droites remarquables dans le triangle, points particuliers (centre de gravité...), etc.
Vecteurs
Tout. Et surtout "savoir exprimer l'alignement des points A, B, et C par une relation de colinéarité, du type $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$". C'est l'aubaine du chapitre...

DIMATHÈME 1990 - TRANSFORMATIONS
Translation
Définition
Soit $\vec{u}$ un vecteur. L'image d'un point M par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
Propriétés
- Points invariants
- Image d'une droite

Homothétie
Définition
Soit I un point de p et k un nombre réel non nul.
L'image d'un point M de p par l'homothétie de centre I et de rapport k est le point M' tel que : $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$.
Images de figures usuelles

Tableau résumé de 73 exercices proposés dans Terracher

L'analyse des exercices proposés dans le chapitre sur les vecteurs est présentée ici sous forme d'un tableau, où la première colonne correspond au numéro de l'exercice et les autres colonnes mentionnent les registres utilisés, le cadre de l'exercice et les outils mis en œuvre pour la résolution. Ainsi, chaque colonne est classée de la façon suivante :

(i) Dans la deuxième colonne figurent les outils pour la résolution ;

(ii) Dans la troisième colonne est indiquée la place du dessin dans l'exercice (dessin donné dans l'énoncé ou à faire).

(iii) La quatrième colonne mentionne les registres présents dans l'énoncé.

(iv) La cinquième colonne donne le registre de la résolution attendue (trouvée dans le livre du maître).

(v) La sixième colonne signale si les vecteurs sont objet ou outil et, dans le cas où il s'agit d'un outil de résolution, signale aussi si l'utilisation du vectoriel est nécessaire pour l'exercice (outil nécessaire ou outil non-nécessaire).

Rappelons notre classification concernant les registres de représentation sémiotiques présents dans l'énoncé et la résolution de l'exercice (cette résolution conste dans le livre du maître).

géométrique - numérique (**gnum**) - quand il faut faire des calculs tels que donner la norme d'un vecteur ;

symbolique géométrique (**G**) - quand il s'agit d'une écriture symbolique à propos d'une propriété géométrique, par exemple les droites (AB)//(CD) ;

langue naturelle (**LN**) - quand il s'agit d'informations données de façon discursive, comme "soit ABC un triangle rectangle en A....." ;

symbolique vectoriel (**V**) - quand il s'agit d'utiliser des relations et/ou notations vectorielles ;

graphique (**gra**) - quand a un dessin est donné ou à faire.

ex	Outils pour la résolution	Dessin	Rdépart	Rsol.	
1	EV (d/s/l) + caractérisation du milieu d'un segment	donné	gra/G	V/G	objet
2	EV(d/s/l + parallé)/symétrique d'un point	à faire	LN/V	gra/V	outil (non-néc)
3	aller-retour entre EV et parallélogramme	à faire	LN/V	gra/G/V	
4	diag parallél coupent milieu/triangle isocèle	à faire	LN/V	gra/G	
5	définition de norme		LN/V	gnum	objet
6	représentation d'un vecteur/norme	donné	V/gra	gnum/gra	
7	égalité (dir/sens/longueur) ; norme		V/gnum	LN	
8	Pythagore/définition d'un rectangle/norme	à faire	gnum/V	num/gra	
9	relation de Chasles ; règle du parallél	donné	gra/V	gra/V	objet
10	rel Chasles/règle du parallélogramme/EV	à faire	LN/V	gra/V	objet
11	relation Chasles (différence)/milieu vectoriel	à faire	gra/V	gra/V	
12	relation Chasles/vecteur nul		V	V/LN	objet
13	addition vectorielle(Chasles et parallél)	donné	gra/V	V	objet
14	EV(paral)/point symétrique/vecteur opposé	à faire	V	V/gra	
15	AdditionVect(parallé)/angles d'un rectangle	à faire	V	gra/V/G	
16	colinéarité/opposé	donné	gra/V	gra/gnum	objet
17	colinéarité/opposé	à faire	LN/V	gra	objet
18	colinéarité/symétrique d'un point		V/G	V	
19	propriétés de l'addition vectorielle		V	V	objet
20	propriétés de l'addition vectorielle		V	V	objet
21	règle du parallè/Chasles(différence)	donné	gra/V	gra	objet
22	relation Chasles/colinéarité/EV(parallél)		LN/V	V/gra	
23	rel Chasles/colinéarité	à faire	G/V	gra/V	
24	théorème des milieux/EV(parallélogramme)	à faire	G/V	gra/V	outil (non-néc)

25	théor milieux/demi-parallélogramme[1]	à faire	G/V	gra/V	
26	centre de gravité/parallélogramme/Chasles	donné	LN/gra	V	outil (non-néc)
27	Thalès vectoriel	donné	gra/V	V	
28	Chasles (différence)		V	V	objet
29	addition vectorielle (règle du parallél)	donné	gra/V	gra	objet
30	propriétés géom. triangle isocèle/EV(d/s/l)		LN/V	LN	objet
31	produit par un réel négatif		V	V	objet
32	Parallélogramme		V	V	objet
33	colinéarité - dessin : point d'appui	donné	gra/V	V/gnum	objet
34	colinéarité - dessin : point d'appui	donné	gra/V	V/gnum	objet
35	colinéarité - dessin : point d'appui	donné	gra/V	V/gnum	objet
36	définition colinéarité		LN	LN	objet
37	demi-parallélogramme		LN/V	LN	objet
38	colinéarité/parallélisme de droites	à faire	V	gra	
39	colinéarité	à faire	LN/V	V/gra	
40	propriétés parallél/rel Chasles	à faire	LN/V	gra/V	
41	addition vect (parallél)/norme	donné	gra/V	gnum/V	
42	projection orthogonale/norme	donné	gra/V	G/V	
43	colinéarité/calcul vectoriel		V	gnum/V	
44	rel Chasles/colinéarité	à faire	LN/V	V	
45	centre de gravité/Chasles	donné	gra/V	V	
46	EV(parallélogramme)/projection	donné	G/V/gra	V	
47	rel Chasles/colinéarité	donné	gra/V	V	
48	colinéarité	à faire	V	gra	objet
49	colinéarité	à faire	V	gra	objet
50	colinéarité	à faire	V	gra	objet
51	AV (règle du parallél)/demi-parallél	à faire	V	V/gra	
52	AV (règle du parallél)	à faire	V	V/gra	
53	rel Chasles (différence)/colinéarité	à faire	LN/V	V	
54	demi-parallélogramme	donné	gra/V	V	
55	alignement de points/EV(parallél)	à faire	LN	V	outil (non-néc)
56	colinéarité/Thalès	donné	gra/G	V	outil (non-néc)
57	rel Chasles/colinéarité	à faire	LN/V	gra/V	
58	trigonométrie	à faire	LN/G	gnum/gra	
59	colinéarité/EV(parallél)/milieu d'un segment		LN/V	V	
60	rel Chasles/colinéarité	à faire	LN/V	V	
61	rel Chasles/parallélogramme	à faire	LN/V	V/gra	
62	propriétés parallélogramme/milieux	donné	LN/gra	V	outil (non-néc)
63	AV(Chasles et règle parallé)/Chasles (différence)/produit par un réel	à faire	LN/V	gra/V/LN	
64	projection/milieux	donné	LN/gra[2]	V	outil (non-néc)
65	Thalès	à faire	LN[3]	gnum/LN	
66	projection/colinéarité	donné	LN/gra[4]	V	outil (non-néc)
67	Thalès/EV(parallél)/orthocentre du triangle	à faire	LN/V	V/LN	outil (non-néc)
68	Thalès/colinéarité	donné	LN/G	V	outil (non-néc)
69	Thalès/colinéarité/réciproque de Thalès	donné	gra/V	G/V	outil (non-néc)
70	demi-parallél/rel Chasles (différence)	donné	LN/gra	V	outil (non-néc)
71	demi-parallél/colinéarité/Chasles (différence)	donné	LN/gra/V	V	
72	colinéarité/Thalès	donné	gra/LN/V	V	outil (non-néc)
73	colinéarité/orthocentre	à faire	G/V	V/LN	

[1] Nous appellons "demi-parallélogramme" la propriété suivante "Lorsque I est le milieu de [AB], on a pour tout point M du plan : $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$."

[2] Le registre vectoriel n'apparaît pas dans le corpus de l'énoncé mais les auteurs du manuel suggèrent de l'utiliser.

[3] Note des auteurs : "On peut se dispenser entièrement des vecteurs !"

[4] L'utilisation du registre vectoriel est suggérée par les auteurs du manuel.

Annexes Chapitre C

Pré-expérimentation en Première S
Lycée Pablo Neruda

Enoncé des exercices proposés[5]

Lycée Pablo Neruda
Première S
Nom et Prénom : _____

LA CONSIGNE

"Ce travail fait partie d'une recherche et ne sera pas utilisé pour vous évaluer. Ne vous censurez donc pas.

Nous voudrions que vous écriviez tout ce que vous pensez même si cela ne donne pas la solution. N'utilisez pas de brouillon ! Vous pouvez tout écrire sans vous censurer et sans effacer ou gommer. Rayez ce qui vous pensez être faux mais de façon à ce que ce soit encore lisible.

Le travail doit être fait individuellement.

Vous ne devez utiliser que le matériel qui vous est fourni. Tout doit être rendu aux observateurs."

1) Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E un point situé sur le segment [ID] de telle façon que la distance du point I au point E soit égale à $\frac{1}{3}$ de la distance du point I au point D.
Montrer que le point E se trouve sur le segment défini par les points A et C et que la distance de A à E est égale à $\frac{1}{3}$ de la distance de A à C

2) Soit un triangle quelconque ABC. On note I, J et K les milieux des côtés [AB], [AC] et [BC] respectivement.
Soit par ailleurs, un point M quelconque, on note P, Q et R respectivement ses symétriques par rapport à I, J et K.
Montrer que les segments [AR] , [BQ] et [CP] ont le même milieu.

[5] Cinq feuilles ont été fournies aux élèves : les trois premières contenaient la consigne, le premier exercice et le deuxième (un par page) et puis les deux dernières feuilles les élèves pouvaient utiliser pour écrire ce qu'ils voulaient. Les cinq feuilles nous ont été rendu a la fin de l'expérimentation.

Exercice n°1 - Résultats obtenus

Élèves	EV	AV	Chasles	Colinéarité	Milieu	Gravité	Médianes	Fautes	E∈ [AC]	Dessin	Registres	solution	autres/ suggestions
1 (R)			X	X	X				X	X	SV	X	
2							X	X		X	SV		
3 (R)			X		X					X	SV (TI*)		
4 (R)			X		X			X		X	SV		BA+DC=O
5			X	X	X					X	SV (TI)	X	
6			X	X	X			X		X	SV	X	Thalès
7						X	X	X		X	SV		
8	X		X		X					X	SV	X	
9		X			X					X	SV		
10								X		X	SV		Homothétie (vect->géom)
11		X					X(1)	X	X(1)	X	Disc(1)/SV		
12						X	X		X	X	Disc		
13						X	X	X		X	Disc		
14						X	X		X	X	Disc:num(géomé)	X	
15						X	X		X	X	Disc-SG		
16								X		X	SV-Num		Repère/Thalès/déterminant
17 (R)	X		X		X			X	X	X	SV		
18			X							X	SV		
19										X	SV(trad vect énoncé)		repère
20										X			"il faut utiliser les vecteurs "
21										X	Disc		hauteur?
22				X	X			X	X	X	Disc-Num(analytique)-Sv		epère(coord, deter, colinéarité) Thalès
23				X					X	X	Disc/SV/ Numérique		repère(coord, deter, colinéarité) Thalès
24 (R)		X	X	X					X	X	SV - Disc	X	
25										X	SV - SG		Homothétie - gravité

(TI) - traduction immédiate

Exercice n°2 - Résultats obtenus

Élèves	Propriétés vector.	propriétés géomét.	Transformations	autres	dessin	registres	M∉ ABC
1 (R)					X		X
2					X		X
3 (R)	Chasles P1				X	SV	X
4 (R)	PAS		LE			TEMPS	
5					X	SV-Disc-SG	X
6				Théor.milieux/ Rotation	X	discursif	X
7			symétrie		X	discursif	X
8				il a pensé aux vecteurs	X		X
9			Homothétie	centre gravité	X		
10	Chasles et Addi vect				X	SV	X
11				Thalès ou vecteurs (juste cité)	X		X
12			Symétrie	théor milieux	X	disc-SG	X
13				centre gravité	X	discursif	X
14		diagonales coupent mileu	Homothétie translation ?		X	discursif	X
15			Symétrie (il a pensé)		X	discursif	X
16					X	discursif	X
17 (R)					X		X
18					X	SV (en brouillon)	X
19					X		X
20					X		X
21					X	discursif	X
22		P2 (fautes)			X		X
23					X		X
24 (R)		diagonales coupent milieu	Homothétie	Thalès	X	discursif - SG -SV(en brouillon)	X
25					X		X

Expérimentation en Première S
Lycée Pierre du Terrail

Enoncé des exercices proposés[6]

Lycée Pierre du Terrail
Nom et Prénom : _____

LA CONSIGNE

"Ce travail fait partie d'une recherche et ne sera pas utilisé pour vous évaluer. Ne vous censurez donc pas.

Nous voudrions que vous écriviez tout ce que vous pensez même si cela ne donne pas la solution. N'utilisez pas de brouillon ! Vous pouvez tout écrire sans vous censurer et sans effacer ou gommer. Rayez ce qui vous pensez être faux mais de façon à ce que ce soit encore lisible.

Le travail doit être fait individuellement.

Vous ne devez utiliser que le matériel qui vous est fourni. Tout doit être rendu aux observateurs."

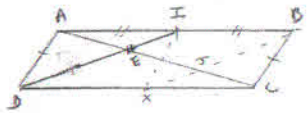
1) Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E un point situé sur le segment [ID] de telle façon que la distance du point I au point E soit égale au tiers de la distance du point I au point D. Montrer que le point E appartient au segment [AC] et que la distance de A à E est égale au tiers de la distance de A à C.

2) Soit un triangle quelconque ABC. On note respectivement I, J et K les milieux des côtés [AB], [AC] et [BC] .
Soit par ailleurs, un point M quelconque à l'intérieur du triangle ABC, on note P, Q et R respectivement ses symétriques par rapport à I, J et K.
Parmi les segments qui ont pour extrémités les points A, P, B, R, C, Q et M, nommer ceux qui sont parallèles et justifier pourquoi. Montrer ensuite que les segments [AR] , [CP] et [BQ] ont même milieu.

[6] Nous avons fourni cinq feuilles aux élèves : les trois premières contenaient la consigne, le premier exercice et le deuxième (un par page) et puis les deux dernières feuilles les élèves pouvaient utiliser pour écrire ce qu'ils voulaient. Les cinq feuilles nous ont été rendu a la fin de l'expérimentation.

Copies d'élèves

Exo 1 : Stele (n°2)

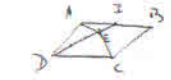


E est au $\frac{2}{3}$ de [DI].
I milieu de [AB]
~~Le triangle ADI est le même que BIC~~

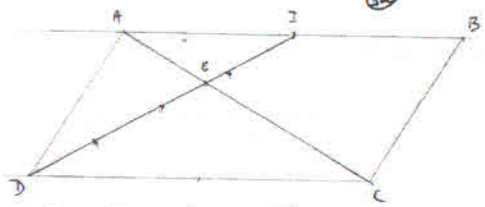
E appartient à [AC] qui est la diagonale du parallélogramme ABCD
Le triangle AIE est isocèle en E.
$IE = EA = \frac{1}{3}$
De même pour KJ et CJ. $KJ = CJ$
$JC = \frac{1}{3}$
Donc E est au tiers de [AC].

Exo 1 : Loïc (n°12)

(12)



Mq $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AC}$



Hypothèses : $\vec{AB} = \vec{BC}$ ~~$\vec{BC} = \vec{AD}$~~ $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$

$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$

$\vec{IE} = \frac{1}{3}\vec{ID}$

$\vec{ID} = \frac{1}{1}(\vec{AB} + \vec{AD})$ ✗

~~$\vec{IE} = \frac{1}{3}$ $2\vec{IE}$~~

$3\vec{IE} = \vec{ID} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}$

$\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BD} = \vec{AB} +$

* $\vec{AE} = \vec{AI} + \vec{IE} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{ID}$

~~$\vec{EE}$~~

$3\vec{AE} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{ID}$

$= \frac{3}{2}\vec{AB} + \vec{IA} + \vec{AD}$

$= \frac{3}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{BA} + \vec{AD}$

$= \vec{AB} + \vec{AD}$

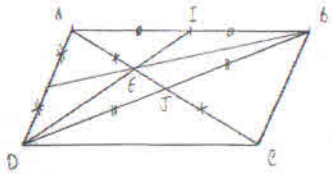
donc $3\vec{AE} = \vec{AC}$

donc $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AC}$

~~donc AE~~

Exo 1 : Laurent (n°19)

(19)



* Hypothèses :

. ABCD parallélogramme donc (AB) // (CD) et (AD) // (BC)

. I milieu de [AB] donc [AI] = [IB]

. E ∈ [ID] ; $IE = \frac{1}{3}ID$

* J milieu de DB : point d'interception des diagonales

[DI] médiane de ABD

[AJ] médiane de ABD

→ point d'interception : E : centre de gravité

nous savons que $2\vec{EJ} = \vec{AE}$ et que $2\vec{EI} = \vec{DE}$

donc $3\vec{EJ} = \vec{AJ} \Leftrightarrow \vec{EJ} = \frac{1}{3}\vec{AJ}$

$3\vec{EI} = \vec{DI} \Leftrightarrow \vec{EI} = \frac{1}{3}\vec{DI}$

→ E est donc au tiers de la distance du point I au point D et au tiers de la distance du point J au point A

→ J milieu de AC donc $2\vec{AJ} = \vec{AC}$

donc $\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

donc $3\vec{EJ} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

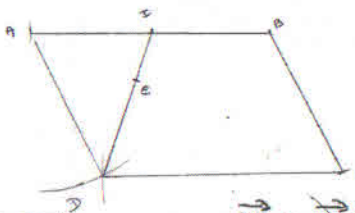
donc $6\vec{EJ} = \vec{AC}$

donc $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AC}$

Exo 1 : Delphine (n°23)

(23)

$IE = \frac{1}{3} ID$



$\vec{IE} = \vec{IA} + \vec{AE}$
$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}$
$= \vec{IC} + \vec{CA} + \vec{AE}$
$= \vec{IC} + \vec{CE}$
$= \frac{1}{3}\vec{ID}$.

$\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE}$
$\vec{AD} + \frac{2}{3}\vec{DI}$ $\vec{EC} + \vec{CD}$
$\vec{AC} + \vec{CD} + \frac{2}{3}\vec{DI}$
$\vec{AC} + 2\vec{CD} + \vec{EC}$
$\vec{AE} \; \vec{EC} + 2$

$\vec{AE} + \vec{EC} = \vec{AC}$

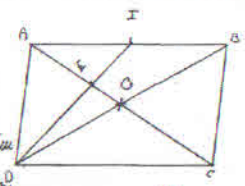
$\vec{AE} = \vec{AI} + \vec{IE}$
$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{ID}$
$= \vec{AC} + \vec{CI} + \frac{1}{3}\vec{ID}$.
$= \vec{AC} + \frac{2}{3}\vec{AC}$
$= \frac{1}{3}\vec{AC}$

donc $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AC}$.

Exo 1 : Jullien (n°25)

(25)

$[IE] = \frac{1}{3}$ de $[ID]$
médiane $\Rightarrow \frac{2}{3}$ de la hauteur



dans le triangle ABD, I milieu de $[AB]$ d'où $[ID]$ est médiane.

AC est diagonale du parallélogramme, elle croisent donc $[DB]$ en son milieu. dans ABC (AC) est une autre médiane. Le point au croisement des 2 droites est le centre de gravité et est situé aux $\frac{2}{3}$ de la hauteur en partant du sommet $\Rightarrow$ à $\frac{1}{3}$ du milieu du côté opposé, E est le centre de gravité et est sur (AC) et (ID).

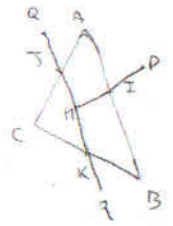
puisque (AO) médiane de ABC, ~~$[OE] = \frac{1}{3}$ de $[AO]$ or O centre des diagonales d'où $2AO = AC$~~ $[AE] = \frac{2}{3}[AO]$ or O centre des médianes $\Rightarrow 2AO = AC$

~~$OE = \frac{2}{3}AC$~~

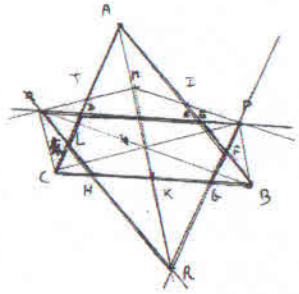
$AE = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} AC$

$AE = \frac{1}{3} AC$

Exo 2 : Loïc (n°12)



(12)



Triangle MPQ : d'après le Thm des milieux (QP) // (IJ)
donc dans ABC, [QP] // [CB] car (IJ) // (CB)
Pour la même raison [PR] // [CA] et [QR] // [AB]

Donc, AFRL est un parallélogramme, ainsi que QHBE et DPGC

$\overrightarrow{DP} \neq \overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DP}$

$\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HR} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EP}$

$\overrightarrow{QE} = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB}$

~~$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EP}$~~

$\overrightarrow{QD} = \overrightarrow{EP}$

~~$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{QD}$~~

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EP}$

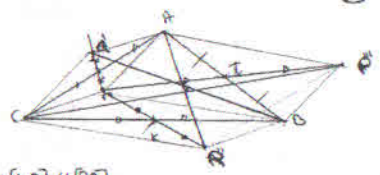
$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{DE} - \overrightarrow{EP}$

$= \overrightarrow{QD} - \overrightarrow{GP}$

$= \overrightarrow{QD} + \overrightarrow{PE}$

Exo 2 : Emilie (n°15)

(15)



- [AB] // [IC] ainsi que [AI] // [BC].
car les diagonales d'un parallélo. se coupent en leurs milieux.
ici AI = IB
et BC = ID.
Donc AIBD est un parallélo. et donc ses côtés sont égaux 2 à 2.

- même raison pour le parallélo. QCNA.
[QA] // [CN] et [QC] // [AN]

même raison pour le parallélo. NQRC
[NQ] // [CR] et [NC] // [QR]

[AD] // [CR] et [AC] // [DR].

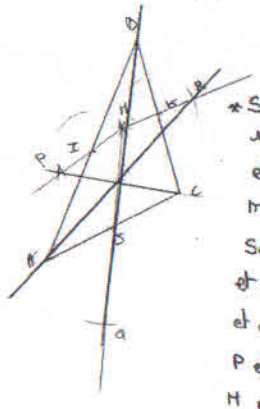
NBRC est un parallélo
donc $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CR}$

et AIDN est un parallélo
donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{NB}$

Donc $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CR}$

Donc AIRC est un parallélo.

Exo 2 : Delphine (n°23)



(23)

~~(AB)//(HQ)~~ (PQ)//(BC)

(PR)//(AC) (RQ)//(BA)

* Sachant que I et K milieu respectif de [AB] et [BC] et d'après le théorème des milieux (IK)//AC.

Sachant que $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{IH}$ et que $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{KR}$ et que (IK)//(AC) donc puisque P et R sont le symétrique de H par rapport à I et K donc (PR)//(AC).

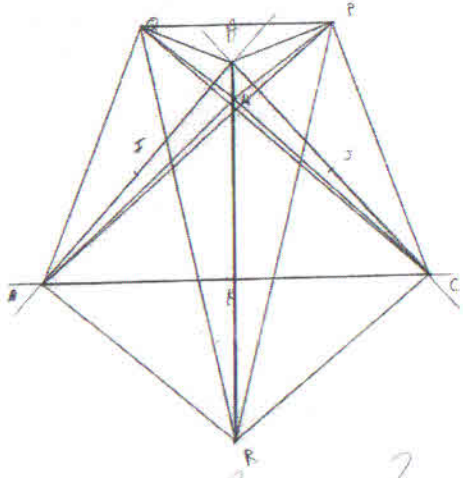
De même pour (PQ)//(BC)

~~$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AQ}$~~

$=$

Exo 2 : Olivier (n°26)

(26)



(PQ)//(BC)

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PC}$ or $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MQ}$ et $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PC}$ or $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MC}$ or $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CK}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE}$

$2\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{BQ} + 2\overrightarrow{QP} + 2\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{CK}$

$0 = 2\overrightarrow{BQ} - \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{MQ} + 2\overrightarrow{QP} + 2\overrightarrow{PC} + 2\overrightarrow{CK} - 2\overrightarrow{BE}$

$2\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{BK} - \overrightarrow{MP} - 2\overrightarrow{BC}$

$2\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{BE} - 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{MP}$

$2\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PM}$

Expérimentation en DEUG

Phase A - Enoncé des exercices proposés[7]

DEUG
Nom et Prénom : _____

LA CONSIGNE

"Ce travail fait partie d'une recherche et ne sera pas utilisé pour vous évaluer. Ne vous censurez donc pas.

Nous voudrions que vous écriviez tout ce que vous pensez même si cela ne donne pas la solution. N'utilisez pas de brouillon ! Vous pouvez tout écrire sans vous censurer et sans effacer ou gommer. Rayez ce qui vous pensez être faux mais de façon à ce que ce soit encore lisible.

Le travail doit être fait individuellement.

Vous ne devez utiliser que le matériel qui vous est fourni. Tout doit être rendu aux observateurs."

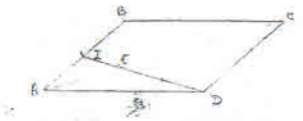
1) Soit un parallélogramme ABCD, I le milieu de [AB] et E un point situé sur le segment [ID] de telle façon que la distance du point I au point E soit égale au tiers de la distance du point I au point D. Montrer que le point E appartient au segment [AC] et que la distance de A à E est égale au tiers de la distance de A à C.

2) Dans le plan on considère le parallélogramme KMLN et le point O d'intersection de ses diagonales.
Soit A un point de la droite (KN) distinct de K et de N.
P est le projeté de A parallèlement à la droite (MN) sur la droite (KM).
Soit I le milieu du segment [AP].
Montrer que I appartient à droite (KL).

[7] Cinq feuilles ont été fournies aux élèves : les trois premières contenaient la consigne, le premier exercice et le deuxième (un par page) et puis les deux dernières feuilles les élèves pouvaient utiliser pour écrire ce qu'ils voulaient. Les cinq feuilles nous ont été rendu a la fin de l'expérimentation.

Copies d'étudiants

Exo 1 : Jean-Christophe (n°1)



3 IE = ID

IE = ID/3

Montrons que E ∈ [AC]

Utilisons Thalès ⇔ IE/ID = IA/DC alors E appartient à AC car alors IE/ID = AC/EC

Dans le référentiel ABC

. E a pour coordonnée (1, 1/2)

la droite (AE) passe par A qui est l'origine

Donc dans ABC l'equation de (AE) est y = x/2

la pente est de 1/2

. Calculons la pente de la droite (EC)

E a pour coordonnée (1, 1/2)

C a pour coordonnée (

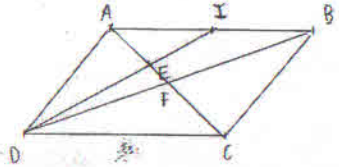
Dans le référentiel IBD

. E a pour coordonnée (1/3, 0) (1,0)

A a pour coordonnée (0, -1/2) (0,-1) y = -x - (1)

l'equation de (AE) est y = (1/3 - 0)/(0 - 1/2) x + (-1/2) = -2/3 x - 1/2

Exo 1 : Jérôme (n°2)



$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

I milieu de [AB] donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

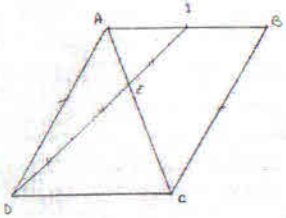
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

AICD est un trapèze car $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

Dans le triangle ADB :
I est le milieu de [AB] et $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$
Donc (DI) est une médiane du triangle.
Soit F le centre de ABCD.
Dans le triangle ~~DIC~~ DBC : F est le milieu de [DB] donc
(FC) est une médiane du triangle.
~~(CE) (AF)~~

Je n'arrive pas à montrer que (AF) est médiane du triangle ADB.

Exo 1 : Mathieu (n°3)



on veut démontrer que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $E \in [AC]$

I milieu de [AB] $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{BA}\right)$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

comme ABCD est un parallélogramme : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DC}\right) + \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right)$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

Idée est d'utiliser les vecteurs de même.

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CA}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{-2\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB}}{6} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$

Je trouve ce rond ça me semble

$E \in ID$ et $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

$\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IA}$

$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AD}\right) - IA$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} + 1\,\frac{1}{6}\overrightarrow{IA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

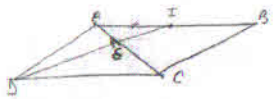
$\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

1) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{6}\overrightarrow{AE}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}$

Et si on le fait avec $\frac{1}{2}$ ça donne plus conclue ?

Exo 1 : Rebecca (n°4)



$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$?

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} =$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ ($\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{IA}$)

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI}$ or $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ or $\overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$

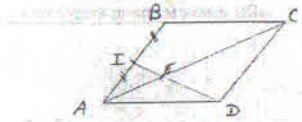
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}\right) + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$= \frac{1}{6}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \left(\frac{3}{6} - \frac{1}{6}\right)\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{6}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaire $\Rightarrow$ AEC alignés E est $\frac{1}{3}$ de A / à AC

Exo 1 : Ariane (n°5)



$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ (*) $\longrightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$

$= \overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID}\right) + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ ↓ car $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

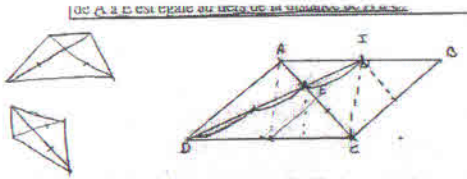
$= \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}\right)$ ↓ car $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

$\boxed{\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$

Donc $I \in (AC)$

Exo 1 : Alexandra (n°8)



⑧

$E \in [ID]$

$d(I,E) = \frac{1}{3} d(I,D)$

$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

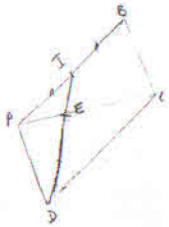
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ car parallélogramme

* $E \in [AC]$?
$E \in [ID]$ $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

AICD est un trapèze (donc (AI)//(DC)) dont AC et ID sont les diagonales. Dans un trapèze, les diagonales sont coupées en leur tier donc $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EC}$ car $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DI}$

* $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$!

Exo 1 : Priscilla (n°9)



I est le milieu de AB $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$
comme ABCD est un parallélogramme
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
et $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$

$E \in [ID]$.

$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

et $\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{ID}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{AC} = \frac{3}{6}\overrightarrow{DC} + \frac{2}{6}\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}\overrightarrow{DC} + \frac{2}{6}\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{EC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}) + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{EC}$

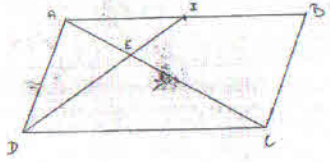
$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID} + (\frac{1}{2}+1)\overrightarrow{EC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{ID} + \frac{1}{6}\overrightarrow{ID} + \frac{3}{2}\overrightarrow{EC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$

Exo 1 : Mélanie (n°10)



$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ (I milieu de [AB])

$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

Si $E \in [AC]$ alors

$\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$. Le résultat.

ou $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{EC}$.

$\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD}$

Partons du résultat :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AI})$ $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ puisque ABCD est un parallélogramme.

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$

$-\frac{1}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{IE}$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) - \overrightarrow{IE}$

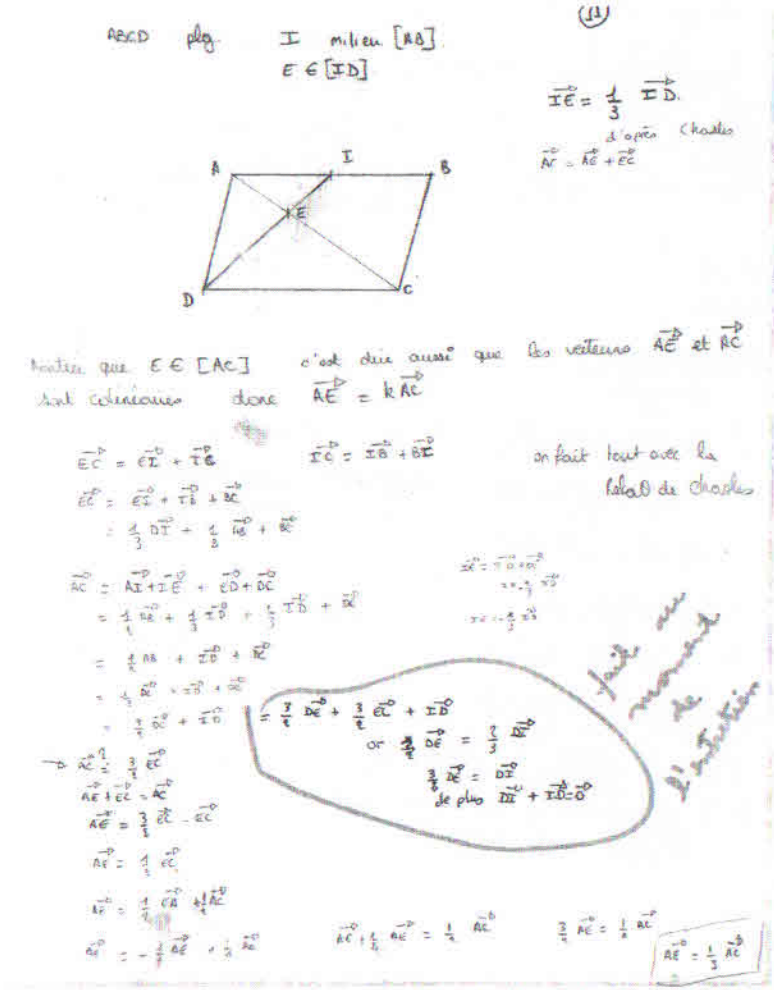
$\frac{1}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IE}$

d'où $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ (hypothèse).

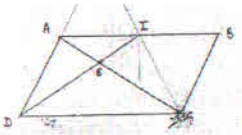
On fait la démonstration en sens inverse et on arrive à :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $E \in [AC]$

Exo 1 : Joëlle (n°11)



Exo 1 : Véronique (n°12)



$IE = \frac{ID}{3}$

$3\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{ID}$

1) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$
$= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{ED}$
$= \frac{3}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{ED}$
$= \frac{3}{2}\overrightarrow{EC}$

$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC}$
$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{EC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{EC}$
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}$ $\quad \boxed{\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}}$

Soit O le point de rencontre de (AD) et (IC)

Vu que (AI) // (DC) et $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ (D'après Thalès)

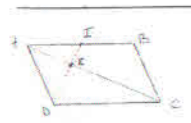
A milieu de [OD], I milieu de [OC]

Donc la droite (ID) et (AC) sont concourantes et se coupent au lic de gravité G du triangle ODC.

G se situe au $\frac{2}{3}$ du sommet donc $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$ (ou $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$)

donc G = E et E ∈ (AB)

Exo 1 : Xavier (n°13)



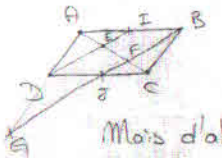
Il faut montrer que E ∈ [AC]...

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}$
$= \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DC}$.

$AC = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + DC$.

Conclusion ?

Exo 1 : Julie (n°14)



$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$.

On veut montrer $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Mais d'abord on veut montrer que $E \in [AC]$.

On peut le montrer par ~~la réciproque de~~ Thalès dans le triangle ABF :

Car I milieu de [AB] et (BF) // (IE) donc (construction)

Comme on a $\overrightarrow{IE} \overset{?}{=} \overrightarrow{IF}$ alors $E \in [AF]$ donc à (AC)

Car F est l'intersection de (BJ) et (AC) par construction (personnelle)

Je montre l'autre partie, vectoriellement.

$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{AE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BI} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IA}$

or $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IA}$

D'où $\overrightarrow{AE} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

(Car en fait, il faut savoir "officiellement" que $E \in \overrightarrow{AC}$ pour écrire cela.

$\overrightarrow{AE}$ et $k\overrightarrow{AC}$ ⇒ A, E, C colinéaires ?

Exo 1 : Marc (n°15)



$\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{ED} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EE}$

$\overrightarrow{AE} \neq \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Soit O le centre du parallélogramme

or définition, E est le centre de gravité du triangle ABD.

donc E est sur (AO) donc aussi sur la droite (AC).

Donc $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$

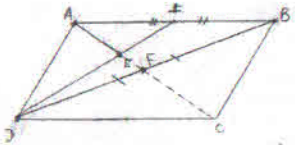
$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AO}$ (définition du centre de gravité)

et $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Exo 1 : Laurent (n°18)



2/3

produit scal : $\vec{AE} \cdot \vec{AC} = \alpha$?

$\vec{AE} \cdot \vec{AC} = \|\vec{AE}\| \times \|\vec{AC}\| \times \cos(\vec{AE}, \vec{AC})$

hypothèse : $\vec{IE} = \frac{1}{3}\vec{ID}$

$\vec{ED} = \frac{2}{3}\vec{ID}$

$\vec{AI} = \vec{IB} = \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{DC}$

$\vec{AE} = \vec{AI} + \vec{IE} = \vec{AI} + \frac{1}{3}\vec{ID}$

$\vec{AE} \cdot \vec{AC} = (\vec{AI} + \frac{1}{3}\vec{ID}) \cdot \vec{AC}$

$\vec{AC} = \vec{AE} + \vec{EC}$

$\vec{AE} \cdot \vec{AC} = \vec{AE} \cdot (\vec{AE} + \vec{EC})$

$= \vec{AE}^2 + \vec{AE} \cdot \vec{EC}$

~~nouvelle méthode~~

~~$\vec{AE} = \vec{AD} + \vec{DE}$~~

~~$\vec{AE} \wedge \vec{AC} = 0$? $\|\vec{AE}\| \times \|\vec{AC}\| \times \sin(\vec{AE}, \vec{AC}) = 0$?~~

1) Soit dans le triangle ADB ; on a $\vec{IE} = \frac{1}{3}\vec{ID}$, donc ce triangle (ED) est bien une des 3 médianes donc E est le centre de gravité du triangle, donc A, E et le milieu de [DB] sont alignés, donc A, E et C sont alignés ([DB] étant une diagonale du ||gr).

2) $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AF}$ (F milieu de DB) donc ici F est milieu de [AC] $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AC}$

~~$\vec{AF} = \vec{AE} + \vec{EF}$~~

~~$= \vec{AE} + \vec{EF} = (\frac{2}{3}\vec{AE} + \vec{FC}) + \vec{CF}$~~

~~$= \frac{2}{3}(\vec{AE} + \vec{FE}) = \frac{2}{3}\vec{AE} +$~~

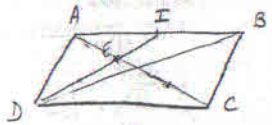
~~$\vec{AC} = \vec{AE} + \vec{EC} = \frac{2}{3}\vec{AE} + \frac{1}{3}\vec{EF} + \vec{FC} = \frac{2}{3}\vec{AF} + \frac{1}{3}\vec{EF} + \vec{AF}$~~

~~$= \frac{8}{3}\vec{AF} + \frac{1}{3}\vec{EF}$~~

Ah bon ? $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{AC}$?

$\frac{1}{3}\vec{AC} = \frac{1}{3}(\vec{AE} + \vec{EC}) = \frac{1}{3}(\vec{AE} + \vec{EF} + \vec{FC}) =$

Exo 1 : Marjorie (n°20)

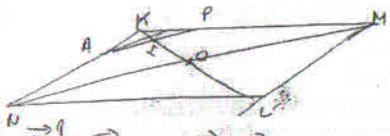


$\vec{IE} = \frac{1}{3}\vec{ID}$ | hypothèses.

$(AI) \parallel (DC)$

$\Rightarrow$ Je pense à Thalès, mais si j'utilise Thalès, il faut que je prenne # de suite en compte le fait que $E \in (AC)$.

Exo 2 : Rebecca (n°4)



Thalès $\frac{KP}{KM} = \frac{KA}{KN}$ O ∈ de MN, O ∈ de ML

$\overrightarrow{KI} = k\overrightarrow{KL}$ $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KL}$

$= k\overrightarrow{KO}$ $\overrightarrow{KN} = \overrightarrow{KC}$

P proj // à MN

$\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{NM}$ $\overrightarrow{KI} = k\overrightarrow{KO}$?

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IP}$

$\overrightarrow{KA} = k\overrightarrow{KN}$

$\overrightarrow{KA} = k\overrightarrow{KN}$

$\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PA}$ $\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{KN}$

$\overrightarrow{KP} + k'\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{KN}$

$\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IP} = k\overrightarrow{KN} + k'\overrightarrow{NM}$

$\overrightarrow{KI} = k\overrightarrow{KN} + k'\overrightarrow{NM} + \overrightarrow{PI}$

$= k\overrightarrow{KN} + k'\overrightarrow{NM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{ON}$

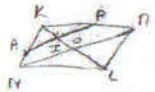
$\overrightarrow{KI} = k\overrightarrow{KN} + k'\overrightarrow{NM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

$= k\overrightarrow{KO} + k\overrightarrow{ON} + k'\overrightarrow{NO} + k'\overrightarrow{OM} + \frac{1}{2}\overrightarrow{MO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ON}$

$= k\overrightarrow{KO} + k\overrightarrow{ON} - k'\overrightarrow{ON} - k'\overrightarrow{ON} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ON} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ON}$

$= k\overrightarrow{KO} + \overrightarrow{ON}(k - 2k' + 1)$

Exo 2 : Esther (n°7)



$\overrightarrow{AI} = I\overrightarrow{P}$

$\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP} =$

Si $I \in (KL)$

alors $\overrightarrow{KI} = k\overrightarrow{KL}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{IP} = \overrightarrow{IL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MP}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{NL} + \overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MP}$

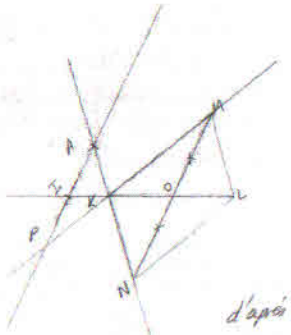
$= \overrightarrow{KL} + \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{LP}$

Je veux retrouver grâce à la relation de Chasles ou autre ici

$\overrightarrow{KI} = k.\overrightarrow{IL}$

$\overrightarrow{KI} = k\overrightarrow{KL}$

Exo 2 : Priscilla (n°9)



Orientons la droite PA de P vers A.
KL de K vers L
AN de A vers N

d'après Thalès
$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KN}} = \frac{\overrightarrow{KA}}{\overrightarrow{NK}} = \frac{\overrightarrow{KP}}{}$

d'après Thalès.

$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KN}} = \frac{\overrightarrow{PK}}{\overrightarrow{KM}} = \frac{\overrightarrow{PA}}{\overrightarrow{NM}}$

$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KN}} = \frac{\overrightarrow{PI} + \overrightarrow{IA}}{\overrightarrow{NM}}$

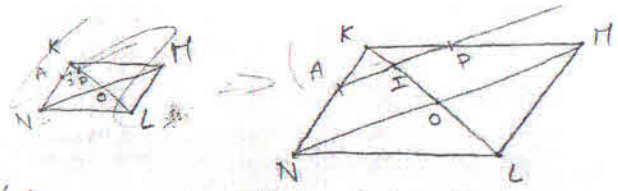
$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KN}} = \frac{\overrightarrow{PI}}{\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OM}} + \frac{\overrightarrow{IA}}{\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OP}}$

$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KN}} = \frac{\overrightarrow{PI}}{\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OM}} + \frac{\overrightarrow{PI}}{\overrightarrow{NO}+\overrightarrow{OM}}$

$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KN}} = 2\frac{\overrightarrow{PI}}{\overrightarrow{NO}}$

par conséquence Thalès marche aussi dans les triangles PIK et KMO ? donc I et K et O sont alignés donc $I \in (KL)$

Exo 2 : Julie (n°14)



(Je pense utiliser Thalès vectoriel).

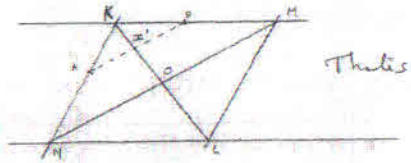
Dans le triangle K M N avec $\overrightarrow{KA} = k\overrightarrow{KN}$.
$k \in \mathbb{R}$.
Comme (MN) // (AP), par construct°, alors d'après Thalès on a aussi $\overrightarrow{KP} = k\overrightarrow{KM}$
et $\overrightarrow{AP} = k\overrightarrow{NM}$

De la même façon dans le triangle.
(Pas besoin de cela, je peux poursuivre ma démo vectorielle je pense.

On a $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$.
Donc on a $2\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{NM}$
Or O est milieu de [NM] donc on a $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NO}$
Donc on obtient $2\overrightarrow{AI} = k \times 2\overrightarrow{NO}$
D'où $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{NO}$ (super.) Je ne sais pas si je suis bien plus avancée !

Je dois obtenir $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NO}$
Je peux utiliser Thalès vectoriel dans KNO. Non car cela supposerait que $I \in (KL)$.

Exo 2 : Marc (n°15)



Thalès

Dans le triangle KNM, (AP) // (MN)

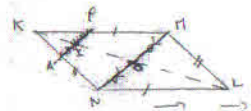
$\overrightarrow{KN} = k\overrightarrow{KM}$
$\overrightarrow{KM} = k\overrightarrow{KP}$
$\overrightarrow{MN} = k\overrightarrow{AP}$??
$\overrightarrow{KO} = k\overrightarrow{KI'}$ I' intersect° de (AP) et (KL)
$\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{AI'}$??
or $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MN}$

$2\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{AP}$

?

I' = I

Exo 2 : Laurent (n°18)



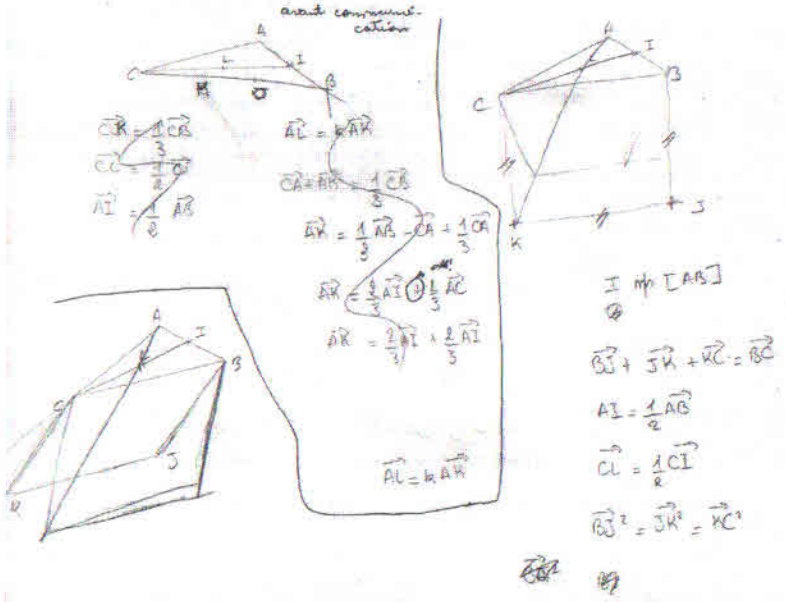
D'après thalès on a : $\frac{\overrightarrow{KP}}{\overrightarrow{KM}} = \frac{\overrightarrow{KA}}{\overrightarrow{KN}} = \frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{NM}}$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IP}$
$\left(\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{NM}} = \frac{\overrightarrow{AI}}{\overrightarrow{NB}} + \frac{\overrightarrow{IP}}{\overrightarrow{NM}}\right)$
$\overrightarrow{AP}$ admet pour projeté (// à $\overrightarrow{KN}$) $\overrightarrow{KN}$.

Phase B - Entretien DEUG
Copies des étudiants et entretien[8]

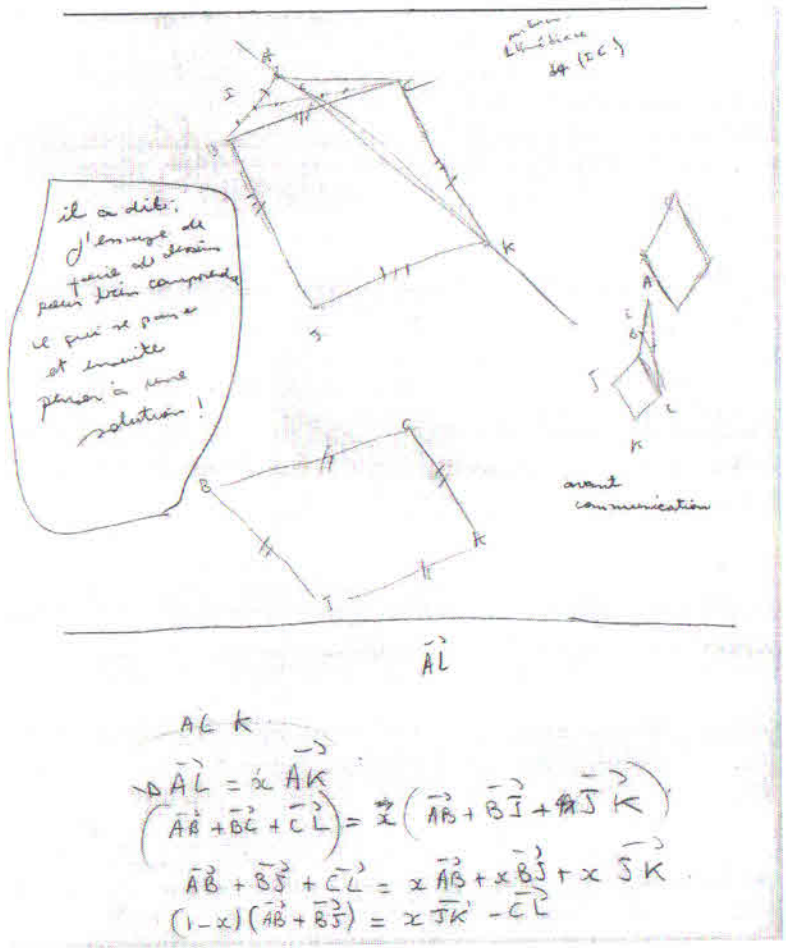
Binôme n° 1 - Rebecca (4) & Mathieu (3)

Rebecca (n°4)



[8] Nous donnons ici d'abord les copies des étudiants faites pendant cette phase, suivies de l'entretien. Rappelons que l'entretien porte sur la copie de la première phase de l'expérimentation.

Mathieu (n°3)



Les 10 premiers minutes :

Rebecca essaie avec les vecteurs. Elle fait d'abord le dessin, ensuite elle traduit les données en langage vectoriel et la question aussi. Elle utilise la relation de Chasles mais sans succès.

Mathieu essaye de faire des dessins pour bien comprendre ce qui se passe pour, ensuite penser à une solution. Avant la communication il ne fait que des dessins.

La communication :

La communication ne se déroule pas très bien. Ils ne savent pas quoi échanger. Je étais obligée d'intervenir et leur dire qu'ils peuvent essayer de savoir ce qui l'autre a pensé, qu'ils peuvent discuter à propos de ce qu'ils veulent sur l'exercice.

Sautriau a mal interprété l'énoncé : il met B et J en dehors du segment [BC]. De cette façon il obtient toujours un losange. Mais il ne se rend pas compte de son erreur.

Après la communication :

Rebecca refait le dessin et elle fait la même erreur que Sautriau. Ensuite elle se met à ressayer d'arriver à la question. Pas de succès.

Mathieu écrit l'égalité $\overrightarrow{AL} = x\ \overrightarrow{AK}$. Il utilise Chasles plusieurs fois mais il n'arrive à la solution. Son idée est de trouver un nombre x qui satisfait l'égalité qu'il s'est mise au départ.

Les entretiens [9]**:**

(i) Rebecca

Nous commençons l'interview par l'analyse de la copie qu'elle avait produit dans la classe entière.

Je lui ai dit que je voulais comprendre mieux ce qu'elle avait fait. Elle reprend sa copie, la relit et commence à me expliquer.

Elle a traduit toutes les données en langage vectoriel et aussi la question. Elle explique qu'elle cherchait à vérifier l'égalité $\overrightarrow{AE} = k\ \overrightarrow{AC}$. Elle a commencé par l'addition vectorielle $\overrightarrow{AL} = x\ \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{IE}$; ensuite elle fait des décompositions (Chasles) jusqu'à ce qu'elle obtient $\overrightarrow{AE} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$.

"comme ils sont colinéaires, les points sont alignés". Je lui demande si la colinéarité implique toujours en alignement (j'ai écrit $\overrightarrow{AB} = x\ \overrightarrow{CD}$). Elle dit que dans ce cas c'est pas vrai parce qu'il faut que les vecteurs aient la même origine.

Pour le deuxième exercice, "c'est pas possible de faire par les vecteurs, c'est pas pareil" (notre objectif n'était pas de discuter du deuxième exercice, donc on s'est arrêté là avec la copie et nous passons à dernière partie de l'interview.

Fin d'interview.

(ii) Mathieu

Je lui donne sa copie pour lire et se rappeler de ce qu'il avait fait.

"En gros, ah, j'ai utilisé les vecteurs...Comme on avait des choses qu'on me disait là...donc, entre autres que I était le milieu de [AB] et puis on savait que E était au tiers du segment [ID], après j'ai essayé de ...(incompréhensible) avec ça pour démontrer que...en fait $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ ils étaient colinéaires...quoi...il y avait un coefficient entre les deux. Et j'ai un peu tourné en rond...."

[9] Nous ne transcrivons pas l'entretien sous forme de dialogue car nous avons eu des problèmes avec l'enregistrement et nous nous sommes servie des notes prises pendant l'entretien.

Qu'est-ce que veut dire que tu as tourné en rond ?

"Bah, ça veut dire que en fait, je suis parti d'une égalité pour arriver à une autre et j'arrivais toujours à la même égalité ou pas à quelque chose qui simplifiait facilement et du coup j'arrivais pas à conclure ..." Tu avais écrit où tu voulais arriver ?

"Oui, j'avais écrit...en partant de $\overrightarrow{AE}$ si on arrive à démontrer que c'est égal à 1/3 de $\overrightarrow{AC}$ et bah, on a démontré ce qu'on cherchait. Donc, là j'avais trouvé une autre chose...j'ai pas pu conclure"

Tu as pensé à utiliser un autre outil?

"Non, pas pour cet exercice."

Fin d'interview.

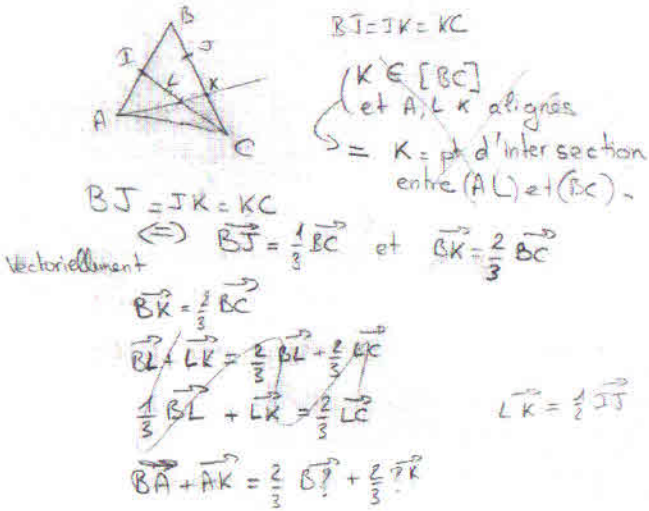
OBS :

a) Il a demandé de faire un dessin parce que c'est plus simple à expliquer ;

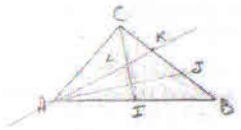
b) C'est moi que lui ai demandée d'écrire la définition d'égalité de deux vecteurs.

Binôme n° 2 - Julie (14) & Xavier (13)

Julie (n°14)



Xavier (n°13)



$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Les 10 premiers minutes :

Xavier fait le dessin.

Julie fait le dessin et commence à écrire les hypothèses en utilisant le langage symbolique géométrique BJ=JK=KC ; K ∈ [BC] et A, L, K alignés implique en K : point d'intersection entre (AL) et (BC). Ensuite elle raye ces affirmations et recommence en traduisant les égalités entre les segments par des égalités vectorielles et elle commence à appliquer Chasles.

La communication :

Julie :Il a fait un dessin...Un joli dessin d'ailleurs!

J'intervient en disant qu'ils peuvent expliquer l'un à l'autre ce qu'ils avaient pensé utiliser.

Xavier : Moi, j'ai pas pensé sinon j'aurais marqué quelque chose...

Julie : T'as pas pensé ?

Xavier : Si j'ai pensé, mais j'ai rien trouvé. Avec les médianes j'ai tenté de voir.

Julie : Moi, j'ai tenté de commencer le triangle parce que....Bah, en fait j'avais commencé par...on sait que BJ=JK=KC d'après l'énoncé, et puis, ensuite j'ai pensé développer un truc avec les vecteurs...Je sais pas. Il suffit de faire intervenir AK et AL, c'est tout. En fait ce qu'il faut obtenir c'est AK en fonction de AL...Un truc de ce genre, quoi !

Ils s'arrêtent un peu là. Je demande à Xavier s'il n'avait pas pensé à quelque chose d'autre.

Xavier : Oui, j'avais regardé si on ne pouvait pas faire avec une rotation là, de centre C, voire d'expliquer que le segment CI et CJ et après en déduire...comme une rotation les distances correspondent... Mais c'est plus facile avec les vecteurs.

Julie : Disons que...je vois pas trop comment tu veux faire quoi! Avec des rotations, c'est-à-dire des homothéties, des trucs comme ça ?

Xavier : Avec une rotation.

Xavier : Ça marche pas les homothéties ?

Julie : Moi, je veux pas comment tu veux faire.

Julie : Parce que là ce que tu as...tu sais, avec ton triangle ... attends, que je dise pas de bêtise....B, A, K...T'as la droite KA qui est parallèle à JH. Regarde si tu fais comme ça tu peux démontrer que cette longueur là... Avec les trucs de l'énoncé tu peux démontrer que cette droite là...

Xavier : Avec la droite de milieu ?

Julie :Oui.

Xavier : Bah...c'est pas facile.

Julie : Non, c'est pas facile. Mais si tu veux partir comme ça, c'est sûr que c'est comme ça.

Fin de la phase de communication.

Après la communication :

Xavier adopte (apparemment) la stratégie de Julie et écrit : $\overrightarrow{BJ} = 1/3\ \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BK} = 2/3\ \overrightarrow{BC}$.

Il en reste là.

Julie continue avec les vecteurs elle avait déjà écrit les égalités suivantes :

$\overrightarrow{BJ} = 1/3\ \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BK} = 2/3\ \overrightarrow{BC}$.

Elle utilise reprend $\overrightarrow{BK} = 2/3\ \overrightarrow{BC}$, applique Chasles, mais sans succès. Elle décompose trois fois, et s'arrête là.

Les entretiens :

(i) Julie

Je lui montre la solution qu'elle avait proposé pour l'exercice n°1.

(nous rappelons qu'elle a utilisé Thalès pour montrer l'alignement et pour la distance elle a utilisé la colinéarité des vecteurs).

Intervenant : Tu as fait le dessin...et ensuite....?

Julie :Qu'est-ce que j'ai fait...???? J'ai développé mes hypothèses et... (elle a écrit $\overrightarrow{IE} = 1/3\ \overrightarrow{ID}$ et ensuite on veut montrer que $\overrightarrow{AE} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$ mais d'abord on veut montrer que E ∈[AC])

Intervenant : Je voudrais bien comprendre ce passage là, *"mais d'abord on veut ...."*

Julie : Donc, la question c'était montrer que le point E appartient au segment [AC]....mais...donc, ça c'est ce qu'on veut montrer mais...pour pouvoir utiliser les vecteur il faut d'abord que je montre que E est sur la droite (AC).

Intervenant : Et donc ?

Julie : Euh...donc...c'est pour ça que j'ai mis ça...mais c'est pas....Ensuite j'ai essayé de chercher visuellement avec la figure comment on pouvais y aller. Alors comme j'étais partie sur les vecteurs et puis en général dans un parallélogramme, avec des droites parallèles...euh...on peut trouver des triangles, j'ai pensé que Thalès serait possible d'utiliser...Et puis...j'ai mis $\overrightarrow{IF}$ mais c'est $\overrightarrow{JF}$ que je voulais dire... Et puis.. je ne sais pas trop quoi...

Intervenant : Tu dis *"je montre l'autre partie vectoriellement..."*. Ça veut dire ???

Julie : Ça veut dire que j'essaye de montrer ça $\overrightarrow{IE} = 1/3\ \overrightarrow{ID}$.En fait, quand j'ai fait mon calcul vectoriel j'ai admit que *E ∈[AC]* en fait. J'ai du mettre quelque part là.

Intervenant : Où ?

Julie : Alors j'essaye de chercher justement...Bah, je sais pas Je n'avais peut-être pas besoin finalement...Chais pas....

Intervenant : Il me semble que tu as partagé ton problème en deux parties...

Julie : Oui, en fait au départ j'ai pensé effectivement en faire un une partie mais...euh...Comme l'énoncé, en fait il le propose en deux parties , c'est-à-dire montrer que le point E appartient au segment, d'une part et que la distance de A à E est égale au tiers de la distance de A à C. Donc, effectivement...là il y a effectivement deux parties. Alors j'aurais voulu faire exactement ce qui est demandé quoi, c'est-à-dire montrer d'abord que E appartient au segment et puis ensuite pour la distance. Mais...je me suis en peu mélangée, quoi ! En général, de toute façon je ne marque pas tout ça quand je suis sur une copie, c'est mes hypothèses, ce que je me dis, en fait. Je me dis assez rapidement, euh...Bon là il fallait écrire. Quand on écrit tout en général de fois on revient sur ce qu'on dit...et puis...

Intervenant : D'accord. Qu'est-ce que ça veut dire, quand tu écris une égalité comme celle là :

$\overrightarrow{AE} = 1/3\,\overrightarrow{AC}$?

Julie : Bah...Je pense que c'est assez fort comme démonstration, c'est-à-dire que pour moi c'est suffisamment rigoureux pour être démontré parfaitement et...et puis c'est intéressant parce que c'est vrai que c'est maniable. Bon le plus dure avec les vecteurs c'est trouver un départ, par où partir...mais euh...donc, l'égalité en fait c'est par le dessin. Enfin, même par les hypothèses...non...enfin, par ce qu'il y a à démontrer que c'était...je voulais voir le but que j'ai avais à obtenir, ce que je visais. Pour pouvoir justement savoir d'où partir.

Fin d'interview.

(ii) Xavier

Intervenant : Xavier, je voulais comprendre comment tu as essayé ton exercice.

Xavier : Bah...d'abord j'ai fait la figure pour savoir à quoi ça rassemblait et puis...euh....J'ai essayé de voir de quelle manière on pourrais arriver au bout...Moi, j'ai un peu tout essayé, j'ai essayé avec les vecteurs...j'ai essayé de savoir si ça marchait avec les symétries ou avec les...rotations...

Intervenant : Tu as essayé avec les symétries aussi ?

Xavier : Oui, mais j'ai pas tout marqué. J'ai écris pas beaucoup moi, donc...J'ai essayé souvent de visualiser pour voir si ça marche et....

Intervenant :D'habitude tu essaye d'abord de penser et après tu commences à écrire ? Et ce que tu a écrit là, tu peux m'expliquer....

Xavier : Bon, bah, j'ai essayé de décomposer avec les vecteurs pour voir si.....Il faut qu'on démontre que E est sur le segment, enfin, sur [AC] déjà et qui c'est au 2/3, donc...le premier truc était d'essayer de montrer que le point E appartenait à [AC].

(Dans sa copie il a fait deux décompositions du vecteur $\overrightarrow{AC}$ et ensuite il a écrit : Conclusion ? et il s'est arrêté là. Pour en tirer quelques idées de plus l'intervenant lui pose d'autres questions.)

Intervenant : Comment tu peux démontrer en utilisant les vecteurs que trois points sont alignés ? Où tu voulais arriver ?

Xavier : Bah, il faut essayer de démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AE}$ est égale à 1/3 de $\overrightarrow{AC}$. Enfin, il faut montrer que les deux vecteurs sont colinéaires."

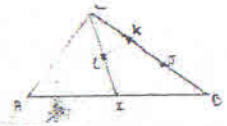
Intervenant : "Eh...donc, si tu arrivais à montrer cet égalité...

Xavier : Oui, mais je sais pas du tout comment partir donc j'essaye n'importe comment quoi et...des fois ça marche et de fois ça marche, il faut essayer d'autres choses.

Fin d'interview.

Binôme n° 3 - Jean-Christophe (1) & Jérôme (2)

Jean-Christophe (1)



Montrons que A, L et K sont alignés

on considère le triangle ABC.

On prend (CA, CB) comme repère avec C comme origine.

coordonnée de A : (1, 0)
——— B : (0, 2)
——— I : $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ [car I milieu [AD]]
——— L : $(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$ [car L milieu [CI]]
——— K : (0, 1)

• on calcule le coeff directeur de (AL).

$a_1 = \frac{\frac{3}{5}-0}{\frac{1}{5}-1} = \frac{3/5}{-3/5} = -1$

$\frac{y_L - y_A}{x_L - x_A} = a$ (Formule pour trouver la pente de la droite)

$\frac{1}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{3}{5}$ avec L(x_L, y_L) A(x_A, y_A)

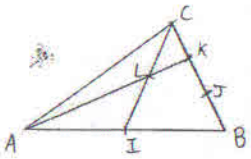
• on calcule le coeff directeur a_2 de (AK)

$a_2 = \frac{1-0}{0-1} = -1$

Conclusion:
Les 2 coefficients directeurs sont identiques et les droites ont un point commun A

Donc les point A L K sont alignés.

Jérôme (2)



Dans le repère C, $\vec{A}$, $\vec{B}$:

C(0,0)
A(1,0)
B(0,1)
K(0, $\frac{1}{3}$)
I($\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$)
L($\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$)

(AK) : $y = ax + b$
pour A : $0 = a + b$ } $a = -\frac{1}{3}$
pour K : $\frac{1}{3} = b$ } $b = \frac{1}{3}$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

(LK) : pour L : $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}a + b$ } $\frac{1}{4}a = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{-1}{12}$
pour K : $\frac{1}{3} = b$ } $a = \frac{-1}{12} \times 4 = -\frac{1}{3}$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

(AK) et (LK) ont même coefficient directeur et ont un point en commun donc A, L, K alignés

Les 10 premiers minutes :

Jean-Christophe a fait le dessin et ensuite il écrit : montrons que A, L et K sont alignés, on considère le triangle ABC. Et il s'arrête là.

Jérôme fait le dessin et commence avec un repère. Il donne les coordonnées des points C, A, B, K, I et L dans ce repère et il s'arrête là.

La communication :

Jean-Christophe - Ok, bah, en fait [BC] est divisé en trois segments égaux, quoi...2/3[BC]...(incompréhensible)...j'ai essayé les médianes pour montrer que...

(Ils parlent très bas. Ils relisent l'énoncé...ils sont bloqués sur l'idée que Jean-Christophe pouvait avoir.)

Jean-Christophe - Toi, tu as pensé à quoi ?

Jérôme : Moi, j'ai fait un repère...c'est chiant...je veux écrire le point K dans le repère...

.....IMPASSE ! Ils ne savent pas quoi faire ni quoi dire.

Jérôme : Tu prends un repère C, $\vec{A}$, $\vec{B}$, L est le milieu de...I tu peux l'exprimer facilement en C, $\vec{A}$, $\vec{B}$ ...

Jean-Christophe : Ouais.

Jérôme : Bon...L c'est la moitié de [CI]...et donc tu peux le trouver facilement...

Jean-Christophe : Et K.

Jérôme : Et K c'est le ...un tiers de...

Jean-Christophe : De [CB] là.

Jérôme : Ouais. Alors tu as...

Jérôme vers l'observateur : On peut travailler là...pendant qu'on discute ?

Observateur : Oui, mais c'est fini le temps.

Après la communication :

Jean-Christophe recommence son exercice en utilisant cette fois un repère. Ensuite il calcule le coefficient directeur de (AL) et de (AK). Et il conclut que comme les coefficients sont identiques et les droites ont un point commun donc, les points A, L et K sont alignés.

Jérôme fait aussi la même chose.

Les entretiens :

(i) Jean-Christophe

Jean-Christophe : D'abord j'ai voulu travailler avec Thalès, mais je me suis vite aperçu que ça marchait pas...je n'arrivais pas à tirer des conclusions....et ensuite je me suis dit que j'allais ramené ça à un problème que j'avais l'habitude de faire les coordonnées....Je sais pas comment on dit ça, l'analyse.

Intervenant : L'analytique

Jean-Christophe : Enfin, bref, je cherchais un repère dans lequel faudrait avoir facilement les coordonnées des points et ensuite j'ai voulu calculer les coefficients des droites pour montrer que ces trois points étaient alignés. Donc, j'ai calculé séparément une première droite avec deux points. Une seconde ...enfin une pente...une autre droite...et si je trouvais la même chose et qui elles avaient un point commun les trois point étaient alignés. Mais...bon, je sais pas trop ce qui s'est pas passé j'ai pas réussi à montrer que...que les pentes étaient égales parce que j'ai pas pris les bonnes coordonnées ...[incompréhensible]...et là j'ai pas réussi...voilà...Bon, bah, c'est....j'ai savais que comme ça je pouvais montrer facilement, j'ai persisté...mais...Bon, bah, finalement, comme je n'avais plus le temps et j'ai fait la question 2 qui était facile si on supposait que 1 était fait. ensuite j'ai voulu commencer l'exercice 2.

Intervenant : Oui, mais pour l'instant je m'intéresse encore pour l'exercice 1. Tu as écrit question 2, ensuite tu as mit E ∈ [AC] et....

Jean-Christophe : Supposant que la première question était résolue.

Intervenant : La première question est l'appartenance du point E au segment [AC] ?

Jean-Christophe : Ouais, que les trois points étaient alignés.

Intervenant :Ensuite...

Jean-Christophe : Bah, ensuite si les trois points sont alignés...bah,...là je crois...je crois qui c'était une question de distance ? Bah, on applique Thalès tout bêtement et on arrive au résultat.

Intervenant :Encore une question. Tu commence en utilisant Thalès pour montrer que E appartient à [AC] et alors...tu as dit que ça n'a pas marché. Je n'ai pas compris...

Jean-Christophe : Eh, bah, en fait c'était...bon bah...pour commencer...bon...je sais pas grande chose en géométrie donc je me suis dit je vais appliquer ce que je sais comme il faut et...je vais vois si ça marche. Donc, ça c'était une première idée...T'avais dit de tout marqué alors j'ai marqué pour voir si comme ça ça pouvais marché mais bon, j'ai vu que c'était pas bon.

Intervenant : Je voulais comprendre un peu mieux cela. Comment cela n'a pas marché ? Qu'est-ce qui n'a pas marché?

Jean-Christophe : Eh bah....en fait...je vois pas très bien pourquoi mais...à mon avis j'arrive, en utilisant Thalès, à des relations mais bon j'arrive pas à rien sortir.

Fin d'interview.

(ii) Jérôme

Intervenant : Je voulais que tu m'explique ce que tu as fait.

Jérôme :Qu'est-ce que j'ai fait...Bon, en fait j'ai pas fait grande chose...J'ai simplement avec les données de l'énoncé j'ai essayé de déduire les plus de choses quoi... surtout de la figure. C'est un peu partir dans tous les sens parce que j'ai arrivais pas vraiment à...voir par quel chemin passer pour montrer que E appartient à [AC].

Intervenant :Tu as commencé comment ?

Jérôme : J'ai commencé par dire que....$\overrightarrow{IE} = 1/3\ \overrightarrow{ID}$ ...comme ça. après j'ai mis que I milieu de [AB] donc $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ et c'était la moitié du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Après comme ABCD c'était un parallélogramme, je suis passé aussi par les vecteurs et j'ai dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est égale au vecteur $\overrightarrow{DC}$ et pareil pour les opposés. Après j'ai dit que AICD est un trapèze...je sais pas pourquoi...

Intervenant :Tu as écrit : "*car...*"

Jérôme : Car $\overrightarrow{AI} = 1/2\ \overrightarrow{DC}$. Donc, j'ai dit que I est le milieu de [AB]...Donc, j'ai rassemblé un peu ce que j'avait dit au début...$\overrightarrow{IE} = 1/3\ \overrightarrow{ID}$, donc j'ai en déduit que (DI) c'était une médiane du triangle ADB. Après je suis passé par le centre du parallélogramme que j'ai appelé F. Eh...J'ai que F était donc, le milieu de [DB]...Et j'en déduis que FC était une médiane du triangle DBC...ouais, parce qu'il passe par le milieu du segment...et après donc j'ai voulu montrer que (AF) était une médiane du triangle ADB et je suis pas arrivé à montrer ça...

Intervenant :Tu voulais montrer que (AF) est une médiane de ADB et ensuite...en supposant que tu y arrives...tu voulais dire quoi?

Jérôme :Que...bah....ces droites se coupaient avec [DI]...en E...Pour montrer que E appartient à [AC]...donc...

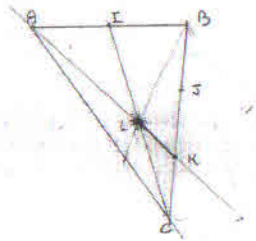
Intervenant :Donc, c'était pour montrer que E appartient à [AC]. Et en ce qui concerne la deuxième partie de la question, tu avais une idée ?

Jérôme : Donc, que AE=1/3AC ? ...Eh...ouais...parce qu'en fait je me disais qu'avec des questions de 1/3, 2/3 ça me faisais penser aux médianes...donc, en ayant montré que (AC) était une médiane du triangle j'aurais déduit AE=1/3AC.

Fin d'interview.

Trinôme n° 4 - Alexandra (8) & Priscilla (9) & Marjorie (20)

Alexandra (n°8)



$\overrightarrow{IL} = \overrightarrow{LC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$ $\quad \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{JK} = \overrightarrow{KC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

I milieu de [IC]

$\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IL}$ $\quad \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{BI}$

$\overrightarrow{IL} - \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{AI} = +\overrightarrow{IB}$

$+\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AI}$

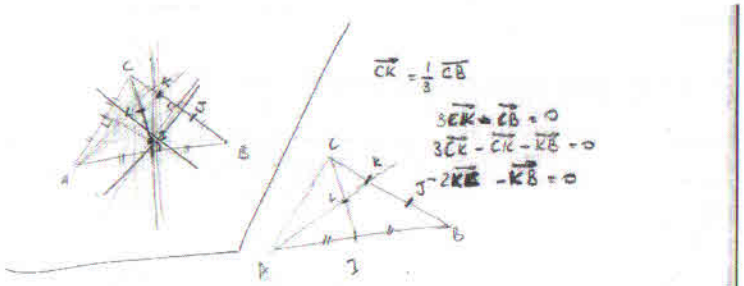
$-\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AL} + 2\overrightarrow{AI}$

$= \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KL}$

$\overrightarrow{BK} + \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{AL} - \overrightarrow{AB}$

Priscilla (n°9)



$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$3\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{CB} = 0$

$3\overrightarrow{CK} - \overrightarrow{CK} - \overrightarrow{KB} = 0$

$2\overrightarrow{KC} - \overrightarrow{KB} = 0$

$\overrightarrow{CL} + \overrightarrow{LK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

~~$\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$~~

$\overrightarrow{AL} + \overrightarrow{CL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{AL} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{AL} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{LK} - \overrightarrow{LA} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{LK} - \overrightarrow{LA} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{LK} - \overrightarrow{LA} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CB} + \frac{3}{6}\overrightarrow{AC}$

~~$\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{LA} = \frac{5}{3}$~~

$\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{AL} - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CI} + \overrightarrow{IB})$

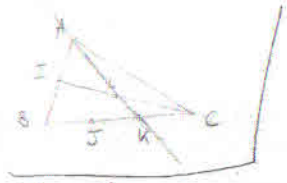
$\overrightarrow{LK} + \overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CI} + \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AL} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}) + \frac{11}{6}\overrightarrow{AI}$

$= \frac{1}{6}\overrightarrow{AL} - \frac{1}{12}(2\overrightarrow{AI}) + \frac{11}{6}\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{LK} = -\frac{5}{6}\overrightarrow{AL} + \frac{5}{3}\overrightarrow{AI}$

Marjorie (n°20)



$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK}$

$= 2\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BK}$

$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CK}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{IC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{IC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

Les 10 premiers minutes :

Alexandra a fait le dessin et a traduit les données en langage vectoriel.

Priscilla a fait un faux dessin.

Marjorie fait un dessin.

La communication :

L'observateur leur demande de se présenter.

Priscilla : Je suis Priscilla et je viens de me rendre compte que je me suis plantée avec mon dessin et...je sais pas ce que j'ai fait.

Les autres se présentent.

Priscilla : Je pense que ça doit être avec les vecteurs parce que ... il y a pas mal de choses...(incompréhensible)...

Priscilla : Alexandra I est barycentre de A et B.

(elles parlent d'alignement et de barycentre mais c'est incompréhensible).

Alexandra : D'abord j'ai pensé que I est le barycentre du triangle, mais non....il faudrait que K soit milieu de [BC].

Priscilla : Avec les vecteurs...là ...les colinéaires...parce que les vecteurs sont colinéaires forcément les points sont alignés.

Marjorie n'a rien dit jusqu'à maintenant.

Marjorie : Si tu cherches à définir AK...

????? : On cherche a intervenir les points...

Priscilla : Tu peux faire intervenir des points.

Alexandra : Le triangle ABC qu'on travaillait là-bas...Non...je crois pas que...Mais tu peux pas dire que I est barycentre de AK.

Priscilla : Ouais, mais...tu fais intervenir la relation de Chasles...

(Marjorie écrit des choses de son côté, ce qui dit Priscilla. Priscilla essaye de trouver des relations entre les vecteurs. Les autres la suivent "plus au moins")

Alexandra : C'est pas un résultat qu'on a vu l'année dernière ?

(Marjorie semble être bloquée et joue avec son stylo.)

Après la communication :

Alexandra elle continue avec les vecteurs ; elle applique la relation de Chasles quelques fois mais sans succès.

Priscilla elle aussi continue avec les vecteurs et fait la décomposition pour essayer d'arriver à la solution mais elle n'arrive qu'à $\overrightarrow{LK} = -5/6\ \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AI}$.

Marjorie écrit \o(AI;\s\up7(→)) = 1/2 \o(AB;\s\up7(→)), ensuite, \o(BK;\s\up7(→)) = 2/3 $\overrightarrow{BC}$ et finalement elle décompose $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK}$; elle substitue $\overrightarrow{AB}$ et s'arrête là. Elle recommence avec $\overrightarrow{AK}$, fait deux décompositions et désiste.

Les entretiens :

(i) Alexandra

Intervenant : J'essaye de comprendre un peu ce que tu as fait...

Alexandra : Bon bah...déjà la géométrie n'est pas trop mon truc, je préfère le calcul...et puis là j'avais pensé déjà aux vecteurs...mais je voyais pas trop comment m'en sortir....

Intervenant : Tu as démarré comment ?

Alexandra : Bah, déjà au début je voulais...enfin j'ai écrit tout le temps ce qu'il y a dans l'énoncé...et en fait là je voyais pas trop...le rapport...entre ce qu'il y avait quoi.

Intervenant : Entre ce qu'il y avait dans l'énoncé et la question posée ?

Alexandra : Ouais, je voyais pas comment le trouver.

Intervenant : Donc là tu as écrit : AICD est un trapèze...

Alexandra : Mais là j'étais pas trop sûre de ce que je disais quoi.

Intervenant : Et cela (je montre l'égalité AE=1/3AC), qu'est-ce que c'est ?

Alexandra : En fait, au début je voulais séparer les deux et puis je me suis aperçue que si arrivais à me servir de ça, je pouvais les montrer en même temps.

Intervenant : D'accord, tu voulais donc montrer que E appartenait à [AC] et que AE=1/3AC, et avec les diagonales du trapèze tu croyais pouvoir s'en sortir.

Alexandra : Ouais.

Intervenant : Supposons que tu arrives à montrer que A=1/3AC, qu'est-ce que tu aurais montré à ce moment là ?

Alexandra : J'aurais montré bon...j'aurais pu me servir du bary...non...j'allais dire barycentre mais non...

Intervenant : Mais là, si tu montres...(l'intervenant montre l'égalité AE=1/3AC).

Alexandra : Je montre que E est là où elles se coupent les diagonales. Mais de toute façon cette formule, je ne suis pas tout à fait sûre...donc...je suis pas sûre de tout.

Intervenant : Ok, maintenant j'ai compris les résultats que tu as fournie. Ce que je veux est comprendre ce que veut dire pour toi cette égalité...

Alexandra : ça veut dire que la distance entre A et E est trois fois plus petite que la distance entre A et C.

Intervenant : Et il y en a d'autres choses ?

Alexandra : Non.

Intervenant : Il y en a que ça .

Alexandra : Oui.

Intervenant : Et quand tu as écrit cela, c'était pas pour montrer que E appartenait à [AC] mais la proportionnalité des distances ?

Alexandra : Oui.

Fin d'interview.

(ii) Priscilla

Intervenant : Priscilla, je voudrais que tu m'explique ce que tu as fait dans ton exercice, enfin que tu me racontes un peu ce que tu as fait (je lui montre sa copie).

Priscilla :Bon, d'abord j'ai pris toutes les données...alors j'ai écris...euh....au fur et à mesure que je les utilisais j'ai écrit les données. Et...ensuite...euh...j'ai voulu voir ce qu'on pouvait faire avec ces données. J'ai commencé avec...en pensant que ce qu'il fallait montrer c'est que...c'est quelque chose avec A et C en faisant intervenir E dedans...Alors j'ai pris le vecteur $\overrightarrow{AC}$, j'ai fait intervenir E selon la relation de Chasles, j'ai continué et...ah...bon, on savait que I c'était le milieu de (AB) et que...Donc, j'ai fait intervenir I dans $\overrightarrow{AE}$. Et je voulais faire euh...parce que...en fait je voulais utiliser tout parce que je me suis dit que si ils nous ont donné toutes ces choses c'est pas pour rien. Alors j'ai commencé avec I en sachant que comme ça je ferais apparaître un $\overrightarrow{AB}$, puisqu'on savait que $\overrightarrow{AI}$ est égale à un-demi de $\overrightarrow{AB}$ ...Ah...Ensuite j'ai fait apparaître...euh...comme c'était un parallélogramme on pouvait dire que 1/2 $\overrightarrow{AB}$ c'était aussi 1/2 de $\overrightarrow{DC}$ et... on savait que $\overrightarrow{IE}$ c'est un tiers de $\overrightarrow{ID}$. Et...ensuite j'ai regardé...et là je me suis dit, on va mettre tout ça ensemble...seulement ça n'a rien donné de bon...alors j'ai arrêté là...et j'ai continué avec...là, cette expression là (*il s'agit d'une partie qu'elle a laissé en crayon papier, voir copie*). Donc, dans mon expression là j'ai fait intervenir E pour...dans la suite...et ça s'est trouvé que ça marchait bien. Ensuite j'avais plusieurs $\overrightarrow{EC}$ ...alors je les ai mis en facteur...et j'ai gardé mes $\overrightarrow{ID}$ pareils et avec ça ah...j'avais...on savait que...un tiers...un demie de $\overrightarrow{DE}$ c'était égale à...comme on avait divisé en trois pour trouver E, 1/2$\overrightarrow{DE}$ c'était égale à 1/3$\overrightarrow{ID}$ après on trouvait que ça ça annulait...donc...on trouve que $\overrightarrow{AC}$ = 3/2 $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{CE}$ = 2/3 $\overrightarrow{CA}$ ...

Intervenant :Donc...tu as conclut ton exercice...ou il y avait d'autres choses à montrer ?

Priscilla :Bon, en fait je me suis rendu compte que j'ai pas exactement montré que c'était égale au tiers mais...là j'ai montré que cette distance là c'était égale à deux tiers de....

Intervenant :"Et la question de montrer que le point E appartient au segment [AC]...?

Priscilla : Eh...bah, tiens...j'ai même pas fait attention. Mais c'est pareil parce que comme...$\overrightarrow{CE}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ ils sont forcément alignés les points A, C et E...

Intervenant :Cela veut dire que si on a deux vecteurs colinéaires ses points extrémités sont toujours alignés ?

Priscilla :Si on a cela et cela (elle fait un dessin dans lequel les vecteurs ont une extrémité commun) ça veut dire que les points sont colinéaires et sur la même droites donc ils sont forcément alignés.

Fin d'interview.

(iii) Marjorie

Intervenant : Je te demande, s'il te plaît, de m'expliquer un peu ce que tu as fait dans ton exercice n°1.

Marjorie : Bon bah, déjà j'ai fait le dessin et je note ce que je peux tirer euh...enfin, les hypothèses quoi, ce qu'on m'a donné au départ et...donc, ça m'a fait penser à Thalès du fait qu'il y avait des droites parallèles et...

Intervenant : Du fait qu'il y avait des droites parallèles...j'ai pas très bien compris. Cela veut dire que des droites parallèles te font penser à Thalès ?

Marjorie : Ouais, la plupart du temps dans un exercice de géométrie quand je vois des droites parallèles j'y pense quoi. Parce qu'en collège on faisait beaucoup de géométrie et c'était ça alors qu'après on en fait moins et....mais...mon réflexe c'est ça.

Intervenant : Ensuite ?

Marjorie : Je me suis un petit peu embrouillée parce que j'ai pensais que pour l'utiliser il fallait que j'utilise justement le fait que E appartenait à (AC), alors que c'était ce que je voudrais montrer donc je pouvais pas utiliser, ça me servait à rien.

Intervenant : Et alors tu es bloquée là ? T'as pas pu continuer ? tu étais donc bloquée sur le fait qu'il fallait montrer que E appartenait à (AC). Après donc tu allais utiliser Thalès pour....pour montrer quelle partie de l'exercice ?

Marjorie : Pour montrer justement qu'il appartenait mais en fait non, je pouvais pas...je pouvais démontrer.

Intervenant : Comment tu vois...qu'est-ce qu'il faut montrer, qu'est-ce qui est demandé dans l'énoncé ?

Marjorie : Bah, que E appartient à la droite et que...enfin, on aurait pu...enfin, on pouvait montrer par le fait que A, E et C étaient alignés. Et donc...moi, sur le coup j'ai pensé...enfin, j'ai cru qu'il y avait le rapport de Thalès dans le triangle comme ça qui était croisé. Et...bon...voilà !

Intervenant : Thalès pour montrer le rapport ?

Marjorie : Ouais.

Intervenant : Et...en laissant un peu cette question...comment tu dis que trois points sont alignés ? C'est-à-dire, comment tu peux montrer ça ?

Marjorie : Eh bah, par les vecteurs.

Intervenant : Par les vecteurs. Comment ?

Marjorie : Bah...si on a...bah, on utilise par rapport à d'autres points. Enfin, moi je pense.

Intervenant : Tu peux me l'écrire là ?

Marjorie : Si on a le point A, le point B et par rapport à d'autres points on a trouvé qu'il y avait le point C et on veux montrer qu'il est sur la droite. C'est tout par rapport aux autres points, parce que le point C on a définit par rapport à d'autres points, par rapport à d'autres choses...et pour montrer, moi j'utilise ces deux choses justement, pour montrer que...après avoir un rapport comme $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{AC}$. Par rapport à d'autres points autour et...

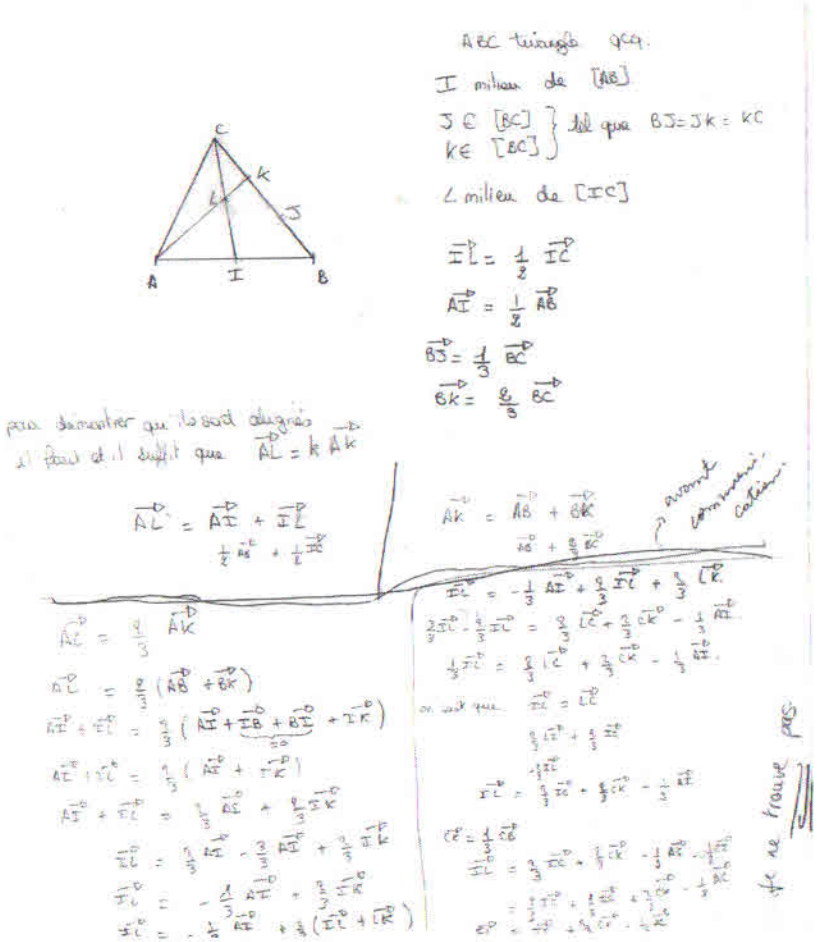
Intervenant : Pour ta copie t'as pas pensé aux vecteurs...

Marjorie : Non.

Fin d'interview.

Trinôme n° 5 - Ariane (5) & Joëlle (11) & Véronique (12)

Joëlle (n°11)



Véronique (n°12)



I milieu de [AB]
L milieu de [IC]
K milieu de [CI]

$\overrightarrow{AL} = k\overrightarrow{AK}$
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CL}$
$= \overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$
$= \overrightarrow{AK} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC})$
$\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$

Avant communication

$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$
$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CK})$
$\frac{3}{2}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CI}$

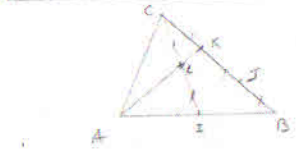
$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$
$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CK})$
$\frac{3}{2}\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$
$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
$\frac{3}{2}\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AL}$
$\frac{1}{k}\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL}$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CL}$
$= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CI}$
$= \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA})$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AK} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Je tourne en rond donc je ne peux pas arriver au résultat.

Ariane (n°5)



$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LK}$
$= \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CB}$
$= \overrightarrow{AL} + \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$
$\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$
$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK})$
$\overrightarrow{AL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BK}$
$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{IB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{IK}$
$\frac{1}{3}\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IK} - \overrightarrow{IL}$

$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{IK} + \overrightarrow{LI}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{LI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{IK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{LI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{LK}$

$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{LI} + 2\overrightarrow{LK}$
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CL} + 2\overrightarrow{LK}$
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{LK}$
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CK}$
$\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{LC}$
$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$
$\overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{IC}$ c'est faux
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$

On écrit la démonstration en partant de la fin (qui est censée être évidente)

Les 10 premiers minutes :

Ariane - fait le dessin, traduit les hypothèses en langage vectoriel décompose $\overrightarrow{AK}$. Ensuite elle écrite $\overrightarrow{AL} = 2/3\ \overrightarrow{AK}$ et à partir de là elle effectue de décompositions en utilisant Chasles. Elle n'arrive pas à une solution.

Joëlle - fait le dessin, ensuite elle traduit les données en langage symbolique géométrique et à partir de L milieu de [IC] elle passe au langage vectoriel. Ensuite elle traduit la question en langage vectoriel et juste avant la communication elle avait écrit : $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + 2/3\ \overrightarrow{BC}$.

Véronique - fait le dessin, écrit I milieu de [AB] (et la même chose pour L et K), ensuite elle écrit : $\overrightarrow{AL} = k\ \overrightarrow{AK}$. Elle fait des décompositions en utilisant Chasles. Elle n'arrive pas à une solution avant la communication.

La communication :

Véronique - Moi, je suis parti des vecteurs comme d'habitude et puis je tourne en rond.

Ariane - Moi, je suis parti...j'ai déjà mesuré pour voir ce qu'on trouve...comme rapport entre AI et AK...

Joëlle - Et puis...tu trouves ?

Ariane - Que AI...Ahhhh...je suis partie de la conclusion et puis j'essaye de trouver quelque chose qu'on connaît mais...j'arrive pas encore....

Joëlle - Qu'est-ce que tu as mis là ?

Ariane - Que AL = 2/3 de AK.

Joëlle - Ouais...mais...on ne peut rien dire à partir d'un dessin. Je suis désolée mais on ne peut s'en servir....ça prouve rien...je suis désolée...

Ariane - Oui, d'accord...(incompréhensible). Mais...si je me suis plantée, je me suis plantée. Mais...à peu près...

Elles font une discussion sur ce que Ariane avait écrit. Elle explique les décompositions qu'elle a fait. Ariane renforce encore le fait qu'elle est partie de la conclusion pour voir si elle arrivait à quelque part.

Joëlle : Et tu arrives où ?

Ariane : A rien de tout.

Joëlle vers Véronique : Et toi, tu as fait quoi ?

Véronique : J'ai écrit Al mais...c'est...non...c'est pas bon...

.....IMPASSE, elles essayent de réécrire les égalités, les décompositions. En fait elles commencent à essayer l'exercice ensemble. L'intervenant donne pour finie cette partie et elles sont à nouveau mises séparément pour finir la rédaction de l'exercice.

Après la communication :

Ariane continue son exercice en faisant encore des décompositions mais elle n'arrive pas à une solution. Pour finir elle écrit : "On écrit la démonstration en partant de la fin (qui est censée être évidente."

Joëlle recommence en partant de $\overrightarrow{AL} = 2/3\ \overrightarrow{AK}$.Ensuite elle applique Chasles plusieurs fois, elle met des choses en facteur, elle revient à ses hypothèses mais elle ne trouve pas ce qu'elle cherche. Et elle écrit : "Je ne trouve pas."

Véronique recommence par $\overrightarrow{AL} = 2/3\ \overrightarrow{AK}$, elle applique Chasles : ensuite elle raye ce qu'elle avait écrit. Elle recommence encore par $\overrightarrow{AL} = 2/3\ \overrightarrow{AK}$, rapplique Chasles, fait de substitutions mais...Elle raye à nouveau ce qu'elle a écrit. Elle recommence encore une fois et arrive à $\overrightarrow{AK} = k/2\ (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (la même chose qu'elle avait les autres fois). Et finalement elle écrit : "Je tourne en rond donc je ne peux pas arriver au résultat."

Les entretiens :

(i) Ariane

Intervenant : Je te sonne ta copie de l'autre jour pour que tu regarde l'exercice et la solution que tu avais proposé. Ensuite je voudrais que tu me racontes un peu ce que tu as fait.

Ariane : Bah, j'ai déjà regardé les relations entre les vecteurs qu'on avait dans l'énoncé, et après, avec des relations de Chasles et en utilisant ces relations j'ai transformé pour arriver à ce que...ce que je voulais.

Intervenant : Tu as écrit $\overrightarrow{IE} = 1/3\ \overrightarrow{ID}$...

Ariane :Ouais...d'où j'ai tiré ça ?...(elle lit l'énoncé). Ah, ouais, car la distance est à un tiers de...

Intervenant : Ensuite ?

Ariane : Ensuite je suis partie de la relation de Chasles et après ...j'ai écrit $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE}$. J'ai remplacé $\overrightarrow{IE}$ par ce que j'avais trouvé...et j'ai encore mis une relation de Chasles...encore j'ai mis...C'est quoi là ? Ah...oui, j'avais groupé deux vecteurs pour...avec une relation de Chasles. Après il me reste des coefficients...là je dis...la propriété doit être dans l'énoncé ça, je pense. Bah...I milieu de [AB] donc j'ai dis que $\overrightarrow{AI} = 1/2\ \overrightarrow{AB}$, j'ai remplacé ici pour avoir des vecteurs en fonction des points qui étaient autour...et ....enfin, j'utilise les relations dans un parallélogramme....Et puis...je suis tombée sur le résultat un peu au hasard, quand même.

Intervenant : Qu'est-ce que tu peux dire de la relation : $\overrightarrow{AE} = 1/3\ \overrightarrow{AC}$?

Ariane : Bah...que les deux vecteurs sont proportionnels...et comme le coefficient est positif ils ont les mêmes directions et norme égale à un tiers près et puis même sens...on peut même dire...oui...c'est ça.

Intervenant : Tu voulais montrer que le point E appartenait au segment [AC]. Est-ce que maintenant tu peux l'affirmer ?

Ariane : Ah, ouais, comme c'est entre zéro et un...(elle rit) j'en ai oublié la moitié de l'exercice), comme c'est compris entre zéro et un, bon, le point E est au milieu.

Fin d'interview.

(ii) Joëlle

(Au début elle avait demandé de ne pas enregistrer. Elle est gênée par le magnétophone. Mais elle accepte.)

Joëlle : Eh bah, on m'a toujours dit que pour que trois points soient alignés il faut que les vecteurs soient colinéaires, donc....j'ai fait $\overrightarrow{AE} = k\ \overrightarrow{AC}$. Eh...puis après j'ai essayé de faire...(incompréhensible).

Intervenant : Et tu voulais montrer...quoi ?

Joëlle : Que $\overrightarrow{AE} = k\ \overrightarrow{AC}$. Après j'ai pris la relation de Chasles. Je suis partie d'un vecteur....pour essayer de trouver ça...sinon on peut partir de ça et essayer de trouver la fin...

Intervenant : Je n'ai pas compris cette relation ici ($\overrightarrow{AC} = 3/2\ \overrightarrow{EC}$), d'où tu as tiré cela ?

Joëlle : Bah...ça fait trois semaines déjà...je sais plus....J'ai mis 3/2 de $\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}$, après j'ai mis que ...(au début elle ne se rappelle pas trop de comment elle avait fait mais ensuite elle explique ce qu'elle avait pensé. Et elle l'écrit sur sa copie).

Fin d'interview.

(iii) Véronique

Véronique : Chais pas moi...j'ai battu mon dessin par rapport à l'énoncé...au fur et à mesure...après je vérifie si déjà ce qu'on me demande est vrai sur ma figure...puis après...bah...

Intervenant : Cet une méthode que tu t'en sers toujours ?

Véronique : C'est une méthode...non...c'est que si je trouve ça me permet déjà de trouver un moyen de...de plus facilement visualiser une solution pour le trouver et puis bah...après...après je suis partie dans les vecteurs...

Intervenant : Tu es partie des vecteurs...tu as écrit $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}$...

Véronique : Puis après j'ai décomposé de façon à trouver euh...ce que je voudrais quoi...

Intervenant : Oui, et en arrivant ici (la relation de colinéarité) qu'est-ce que tu conclut ?

Véronique : Eh, bah...que les trois points sont alignés.

Intervenant : Et ...quoi d'autre. C'est tout ?

Véronique : Non, bah...que E est le centre de gravité du triangle, que....

Intervenant : Par rapport à la question...c'était quoi la question ?

Véronique : Qu'est-ce qu'on voulait ?...On voulait montrer que E appartenait à [AC], donc là on conclut que E appartenait au segment et que la distance est égale au tiers de la distance. Et voilà.

(elle a réussi son exercice, mais elle a aussi fourni une autre solution.)

Intervenant : Et là, qu'est-ce que c'est ?

Véronique : Ça...C'est quoi ? Ça devrait être une autre méthode...je sais plus...oui, ça doit être une autre méthode...avec Thalès...ouais, c'est une deuxième méthode que j'ai fait...Thalès au début et puis après...des propriétés...

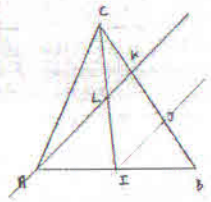
Intervenant : Thalès pour montrer quoi ?

Véronique : Que AI est égale à 1/2 de DC, ce qui me permettait après de dire que...que A était le milieu de ça, que I était le milieu de ça, donc que ces deux...que si on traçait (AC) et (ID), c'était...les deux droites c'était les médianes du triangle...donc, qu'elles se rencontraient déjà, qu'elles se coupaient en un point, qu'elle étaient pas parallèles.

Fin d'interview.

Binôme n° 6 - Mélanie (10) & Marc (15)

Mélanie (10)



Données : $BJ = JK = KC$

$\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

Résultat :

$\overrightarrow{AL} = 2\overrightarrow{AK}$

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IL} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BK}$

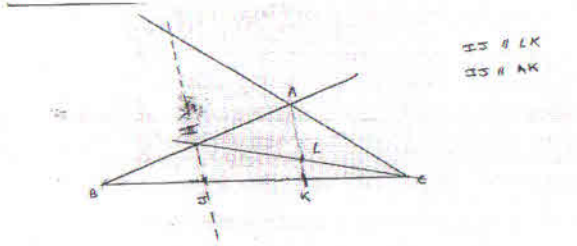
$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{AB} + 2\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

$\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} = 2\frac{2}{3}$

* Dans le triangle AKB
  I milieu de [AB]
  J milieu de [BK]
  D'après le théorème de Thalès (IJ) // (AK) (1)
* Dans le triangle CIJ
  L Milieu de [CI]
  K Milieu de [CJ]
  D'après Thalès (LK) // (IJ) (2)
  donc (1) et (2) => (LK) // (AK)

Comme K ∈ aux 2 droites (AK) et (LK) on en déduit que A, L, K sont alignés

Marc (15)



* En considérant le triangle CIJ :
  on démontre avant que K milieu de [JC] (facile).
  L milieu de [IC]
  donc (IJ) // (LK)
* En considérant le triangle AKB
  on démontre avant que J milieu de [BK] (facile)
  I milieu de [AB]
  donc (IJ) // (AK)
* donc (AK) // (LK)
  donc A, L, K alignés.

Les 10 premiers minutes :

Mélanie fait le dessin, elle traduit les données en langage vectoriel et le résultat aussi ($\overrightarrow{AL}$ = x $\overrightarrow{AK}$. Ensuite à partir du résultat elle applique Chasles et substitue ses hypothèses mais sans succès.

Marc a fourni la solution complète dans les 7 premiers minutes. Il a fait par configuration.

La communication :

Marc : Tu es partie vectoriellement ? Je suis pas parti vectoriellement, je...je fais géométrique.

Mélanie : Tu as fait des droites parallèles ?

Marc : J'ai coupé les triangles, j'ai considéré celui là, AKB, j'ai démontré que ça c'est parallèle à ça ((IJ)//(LK)). Après j'ai considéré le triangle CIJ...j'ai démontré que (IJ)//(AK)...

Mélanie : Que (IJ) est parallèle à (AK) et pas (LK).

Marc : Ouais...et dans l'autre je démontre que c'est (LK) et après comme il y a un point ...(incompréhensible). Il y a un seul truc que j'ai pas démontré c'est que K est le milieu de [JC]. Bon, ça c'est clair...

Mélanie : Oui parce que tu as BK=2/3BJ.

Marc : Et puis la même chose que J est le milieu de [BK].

Marc vers l'observateur : Après on doit la rédiger au propre ?

Après la communication :

Mélanie reprend sont problème avec l'idée de Marc et écrit une solution. Mais elle parle de Thalès au lieu de théorème des milieux.

Marc ne fait rien puisqu'il avait déjà fini son exercice.

Les entretiens :

(i) Mélanie

Mélanie : Bah je suis partie de la fin...du résultat qu'on devait obtenir, c'est-à-dire $\overrightarrow{AE}$ = 1/3 $\overrightarrow{AC}$. Parce que sinon je m'embrouille dans les vecteurs et comme ça...j'ai essayé de remonter à mon hypothèse, donc j'ai introduit les lettres dont j'avais besoin pour mon hypothèse...voilà...mais j'aurais pu faire autrement.

Intervenant : Ensuite ?

Mélanie : Ensuite je suis arrivée à mon hypothèse donc...je l'ai lu en sens inverse et...

Intervenant : Tu dis que tu as lu en sens inverse et là tu as écrit, $\overrightarrow{AE}$ = 1/3 $\overrightarrow{AC}$ donc E ∈ [AC]. Est-ce que si j'ai $\overrightarrow{AB}$ = k $\overrightarrow{CD}$ et ...

Mélanie : Mais $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ n'ont pas les mêmes lettres, mais là ils sont forcément parallèles et donc ils sont forcément sur la même droite.

Intervenant : Tu as pensé à quelque chose d'autre pour cet exercice ?

Mélanie : J'ai pensé que dans les vecteurs tout de suite je m'embrouillais donc qu'il fallait que je parte de la fin...

Fin d'interview.

(ii) Marc

Marc : Je voulais partir avec des égalités de vecteurs et puis essayer d'arriver au résultat...à $\overrightarrow{AE}$ = 1/3 $\overrightarrow{AC}$. Mais je voyais que j'arrive pas au bout d'un moment...

Intervenant : Qu'est-ce que t'empêche ?

Marc : Bah, je crois que j'ai tourné en rond, il me semblait que je tournait en rond...mais je ne suis pas très à l'aise non plus là dedans, quoi...dans les vecteurs, introduire des points avec la relation de Chasles et tout ça...j'aime pas trop...après je suis partie avec une autre idée...Alors je remarque qu'on demande un tiers de la distance...et comme j'ai marqué là, ça me fait penser au centre de gravité d'un triangle...eh....voilà...

Intervenant : Tu as écrit O le centre du parallélogramme, par définition E est le centre de gravité du triangle ADB, donc E est sur (AO). Je n'ai pas compris là...

Marc : E est sur (AO)...oui, parce que O est le milieu du segment [BD] et le centre de gravité c'est l'intersection de trois médianes...donc, voilà, E est sur (AO).

Intervenant : Ensuite tu es passé aux vecteurs ?

Marc : Ouais...je me rappelle pas...ah, oui...comme O appartient à droite (AC) et que O appartient à droite (AO), j'ai déduit que O appartient à droite (AC) et donc, qu'il y a un coefficient entre les vecteurs et donc après je vais déterminer ce coefficient...enfin, je vais essayer de prouver que ce coefficient c'est un tiers pour répondre à la question. En fait ça j'étais pas obligé de le faire je crois...Donc là j'ai traduit...en fait j'ai traduit que E est le centre de gravité du triangle ABD avec le point O, là...après...après j'ai traduit que O est le milieu du segment [AC] et puis après je remplace...je remplace $\overrightarrow{AO}$ dans l'égalité et puis...voilà.

Intervenant : Est-ce que avec le centre de gravité tu ne peux pas montrer la question sur la distance sans passer par les vecteurs ?

Marc : Peut-être.

Intervenant : Qu'est-ce qu'on a avec le centre de gravité ?

Marc : .....

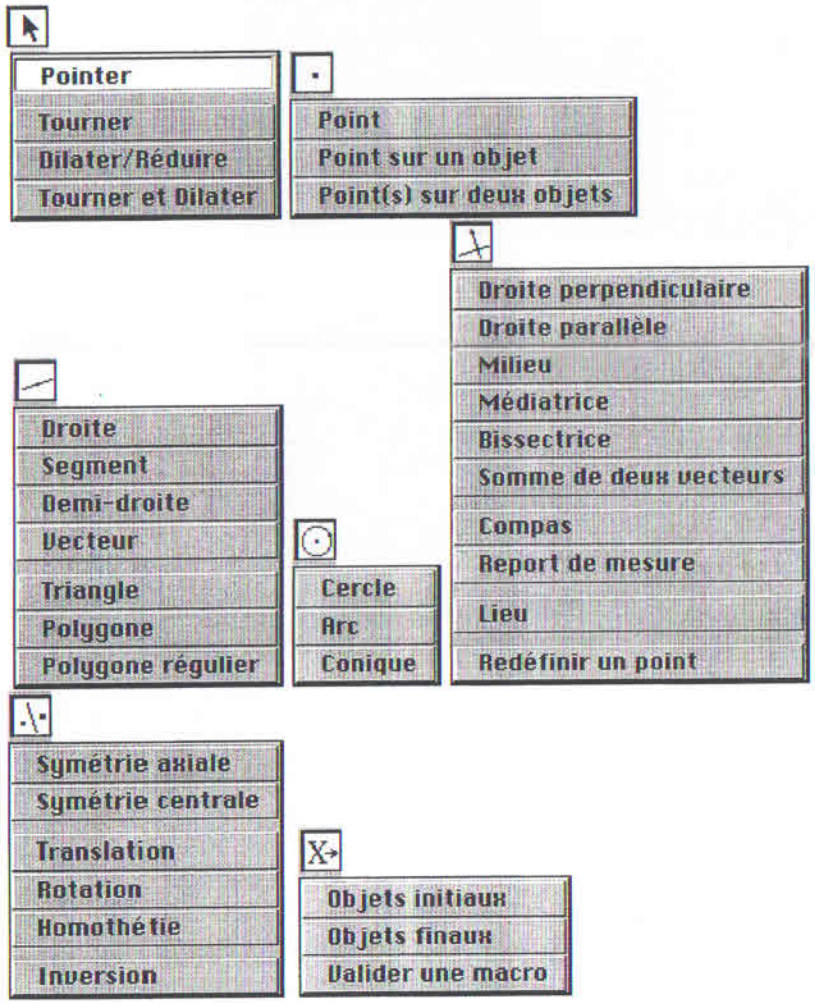
Intervenant : Tu dis : par définition E est le centre du gravité du triangle...

Marc : En fait c'est une propriété....Si dans un triangle ABD, O est le milieu de BD, enfin, le vecteur $\overrightarrow{AE} = 2/3\ \overrightarrow{AO}$.

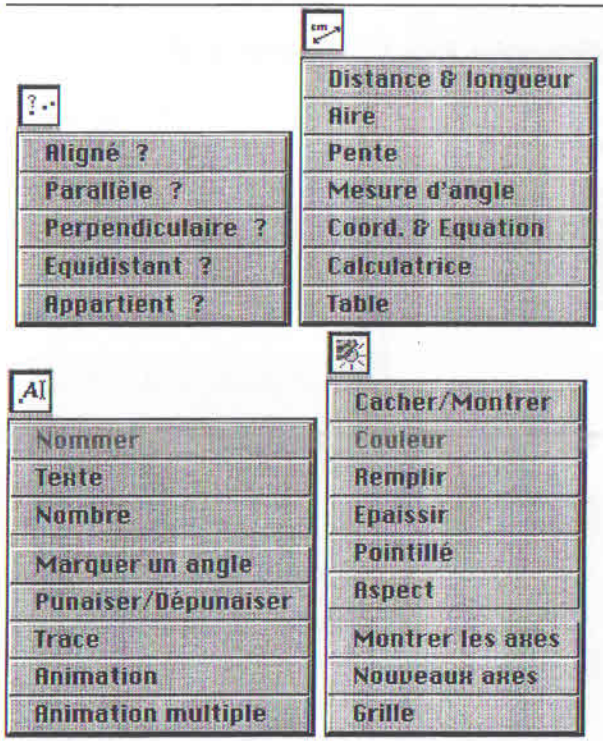
Fin d'interview.

Annexes Chapitre D

Menus disponibles dans Cabri-géomètre II[10]



[10] Il s'agit ici des menus disponibles dans la version Macintosh.



Expérimentation en classe de Seconde "H"

Synthèse de l'observation "Seconde H"

La pré-expérimentation a eu lieu en Mars 96, dans une classe de Seconde où l'enseignant faisait quelques séances avec la calculatrice TI-92, et en particulier avec le logiciel Cabri-géomètre II.

Pour cette "Seconde H", les élèves devaient apprendre à utiliser Cabri-géomètre II d'une manière générale et sur quelques notions en particulier. Nous cherchions à identifier des difficultés des élèves relatives à l'enseignement et l'apprentissage des vecteurs, et pour cela nous avons élaboré, en concertation avec l'enseignant responsable de la classe, une séance d'environ 50 minutes sur la géométrie analytique et les vecteurs. Le choix du sujet à traiter dans la séance répond à notre objectif d'étudier quelques aspects du rapport affine/vectoriel chez les élèves, comme par exemple le fait qu'un vecteur directeur d'une droite peut être "n'importe où" dans le plan, il suffit qu'il ait la même direction que la droite.

Les objectifs visés par chaque activité sont décrits ci-dessous. Les activités ont été proposées à un groupe de 18 élèves. Nous avons observé trois groupes composés de trois élèves chacun. Ces groupes ont travaillé sur ordinateur pour faciliter notre observation.

Présentation des activités

Nous avons enregistré deux macro-constructions à être utilisées par les élèves ; l'une qui fournit les coordonnées d'un vecteur à partir des coordonnées de ses points extrémités et l'autre qui donne le déterminant de deux vecteurs dans un repère donné. Avant de présenter nos objectifs dans cette observation, nous donnons ci-dessous les activités proposées aux élèves.

SÉANCE AVEC CABRI II

I) PREMIERE PARTIE

1) Afficher un repère ;
2) Prendre un point A ;
3) Demander les coordonnées du point A ;
4) Déplacer le point A ;
5) Examiner quelques cas particuliers ;
6) Tracer une droite et demander son équation ;
7) Déplacer la droite ;
8) Dans le menu "Préférences", changer "Format d'équation" ;
9) Tracer un vecteur et demander ses coordonnés ;
10) Déplacer le vecteur.

II) DEUXIEME PARTIE

1) Prendre une droite quelconque ;
2) Donner l'équation de la droite dans le repère affiché ;
3) Représenter un vecteur directeur de cette droite ;
4) Déplacer la droite et vérifier que le vecteur représenté reste encore un vecteur directeur de cette droite.

III) TROISIEME PARTIE

A)

1) Tracer un vecteur $\vec{u}$ et un vecteur $\overrightarrow{AM}$;

2) Faire afficher grâce au menu, le déterminant de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$;
3) Déplacer le point M. Est-il possible que le déterminant reste constant ?

B)

1) Tracer un vecteur, quelconque ;
2) Prendre un point A fixe et un autre point B ;
3) Construire une droite D parallèle à $\vec{u}$ passant par B ;
4) Placer un point M sur la droite D ;
5) Demander, par le menu, le déterminant de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$;
6) a) Déplacer M sur D ; vérifier le déterminant de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$;

b) Déplacer la droite D ; vérifier le déterminant de $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$;
7) Quelle doit être la position de la droite pour que le déterminant soit égal a zéro ?

Les objectifs visés dans les activités proposées

L'objectif de la première partie de la séance était de donner à voir aux élèves que :
- lorsqu'on déplace un vecteur dans le plan, ses coordonnées ne changent pas contrairement à ce qui se passe pour le déplacement d'un point
- lorsqu'on déplace une droite d'équation $y = ax + b$, le coefficient directeur a ne change pas mais b change.

Dans la deuxième partie, nous voulions savoir si l'élève allait placer le vecteur directeur sur la droite ou non. Pour représenter un vecteur directeur de la droite l'élève pouvait placer deux points quelconques sur la droite et ensuite désigner un vecteur d'extrémités ces deux points, ou encore tracer un vecteur dont les points extrémités n'appartenaient pas à la droite.

Dans ce cas, l'élève pouvait utiliser l'outil "droite parallèle" du menu pour tracer une parallèle à la droite donnée passant par un point qui serait l'origine du vecteur cherché[11].

Notre deuxième objectif avec cette activité était de faire travailler aux élèves l'invariance du vecteur directeur par rapport à une droite donnée : si on la déplace selon une translation le vecteur directeur reste inchangé.

La troisième activité proposée, avait pour objectif d'introduire les élèves à la condition analytique de colinéarité. Pour l'item 3) partie A), l'élève devait vérifier que le déterminant reste constant (égal à zéro) si on déplace M de façon à ce que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ reste colinéaire au vecteur $\vec{u}$. Pour l'item 7) l'élève devait répondre que le déterminant entre $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AM}$ est égal à zéro si la droite (AM) est parallèle au vecteur $\vec{u}$.

Les résultats obtenus[12]

À part quelques mises au point que l'enseignant a dû faire à propos du menu du logiciel, l'utilisation de Cabri-géomètre II n'a pas posé de problèmes aux élèves. Dans l'analyse de l'observation de la deuxième partie, nous retenons en particulier la présence de deux invariants chez les élèves que nous formulons comme suit :

(i) *Les coordonnées d'un vecteur se comportent comme celles d'un point. Si un vecteur est situé dans le premier quadrant alors il a des coordonnées positives, dans le troisième quadrant ses coordonnées sont négatives et dans les autres cas elles ont des signes différents. Autrement dit, les coordonnées du représentant d'un vecteur dépendent de sa position dans le plan.*

(ii) *Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur d'une droite D, alors $\vec{u}$ n'a que des représentants "tracés" sur D.*

Il s'agit ainsi de deux théorèmes-en-acte erronés que nous avons que nous avons pu modéliser d'après l'analyse des comportements des élèves de cette "Seconde H".

Relativement à la troisième activité nous n'avons pas obtenu de données car le temps était limité et les élèves n'ont travaillé que les deux premières parties. Cette activité devrait être faite par les élèves à la maison et nous n'avons pas eu accès aux résultats.

Compte-rendu des observateurs

Groupe n°1

H = enseignant ; Observateur = O ; Élèves = E_1, E_2, E_3

H : L'objectif est faire la géométrie analytique avec le logiciel.
Première chose : fixer 2 axes. Parcourir les menus pour trouver l'option : « montrer les axes ».
E_1: On cherche.....
E_2: Symétrie axiale, non ?
(Es - abandonnent) Elles trouvent et l'utilisent facilement
E_1 : Il donne le système.....

11 Une analyse a priori plus détaillée des stratégies possibles pour construire un vecteur directeur d'une droite sera donnée dans l'analyse des activités proposées dans l'entretien.

12 Les protocoles sont donnés dans la suite de cette analyse.

H : Maintenant, on va créer un point quelconque. Point A (il dessine au tableau).
° Manipulation très lente, difficultés pour les déplacements.
H : Affichez les coordonnées de ce point A.
° Pas de problème.
H : Créer un point d'abscisse O.
E_2 : Sur l'axe y!
Elles trouvent pas l'option vecteur.
O : Dans le menu « droite », deuxième icône après la flèche.
E_1 : Mais qu'est-ce qu'il faut ?
E_2, E_3 : On montre la direction, la distance et la norme.
E_2 : On montre la droite.
H : .....pour un vecteur 2 points qui s'appellent extrémités.
O : Il y a toujours un message d'aide. Vous pouvez consulter et en général il dit ce qu'il faut faire pour s'en servir.
E : Ah ! D'accord.
° Elles bavardent tout le temps. Il faut souvent répéter les renseignements ou les tâches.
H : Construire un vecteur directeur de cette droite.
E_1 : On fait comment ?
E_1 : Sur la droite !
E_2 : Non, on prend la même direction. Il faut qu'il soit parallèle.
E_3 : Il peut être confondu ! Ça donne le sens de la droite.
E_1 : Mais c'est quoi un vecteur directeur ?
E_2 : Vecteur directeur - même sens que la droite.
E_2, E_3 : Ça donne le sens ! La droite, elle suit le sens du vecteur.
O : Et quel est le sens d'une droite ?
E_2 : Elle en a deux ! (Longue discussion. Elles confondent sens et direction et essayent d'expliquer à l'observateur)
E_1 : On fait un vecteur sur la droite.
H : Ça va ? Vous êtes d'accord ?
E_2 : Ça peut être parallèle, non ?
H : Je ne sais pas, allez-y travaillez !
E_2 : On va faire un vecteur sur une droite parallèle.
° Elles ont un peu de mal à manipuler (trop lent). Elles utilisent « cacher/montrer » plusieurs fois.
E_1 : Où est la gomme ?
E_2 : Je veux effacer la droite. Voilà.
° On passe à l'autre activité. (vecteurs égaux)
E_1, E_2 : Ils sont pas égaux parce qu'ils n'ont pas la même direction.
E_3 : Il faut rester parallèle quand on bouge.
° Elles ont placé...(incompréhensible)
° Elles refont la construction en faisant la droite parallèle.
E_2 : Ils sont pas égaux parce qu'on n'a pas réglé la taille !
E_1 : Si on bouge le vecteur l'autre ne bouge pas !
E_2 : Si, si, il bouge !
E_1, E_3 : Mais pas la taille, regarde.

FIN ! Elles se sont arrêtées.

Groupe n°2

Géométrie analytique / ordinateur / trois élèves par ordinateur / Enseignant présente / 3 acteurs

Géométrie analytique avec ce logiciel.
On appelle un repère 2 axes à partir du menu
icône ...(incompréhensible)
Dans chaque icône on peut faire plusieurs choses : droite // droite, droite ⊥ droite.

Parcourir le menu pour afficher les axes.
° Mon binôme trouve grâce à moi !
H : Placer un point A quelconque. Vous le nommez en suite.
° Mon binôme ne sait pas bien comment faire.
H : A l'aide du menu demander les coordonnées dans ce repère.
Vous allez trouver équation et coordonnées.
° Elles trouvent un peu difficilement, coordonnées et équations. Montrent le point.
F : Maintenant il faut trouver l'équation. Elles ont du mal à bouger le point et s'est très long.
H : Essayez de le déplacer de cette droite que abscisse = 0.
° Trouvent de suite.
H : Sur la même fenêtre, une droite quelconque.
F : Parallèle à quoi ?
H : Non, quelconque.
° F a tracé la droite.
° H demande l'équation de la droite.
H : Cette équation de la forme.
F_1 : ax+b.
F_2 : C'est la même chose.
H : On va demander au logiciel d'afficher sous une forme non réduite, c'est-à-dire.....
F : ax+by+c=0
H : ax+by+c=0. Allez dans le menu préférences.
H : Vous avez .....et à côté équation. Vous choisissez la forme non réduite. Vous mettez « appliquer ».
H : Tracer une droite et demander son équation.
H : On peut représenter vecteurs avec ... (incompréhensible)
Cherchez dans menu vecteur.
Comment on fait.
F : Montre la direction, le sens.
F : Trace un vecteur. Fixe une extrémité. Bouge la seconde et la fixe.
H : Pour caractériser un vecteur on a besoin de 2 points. Vous choisissez par la direction, le sens, la longueur.
H : Pour coordonnées s'est spécial.
° 1 fille étonnée car abscisse est positive.
Explicite règle :
vecteur dans 1° quadrant : 2 coordonnées positives ;
vecteur dans 2° quadrant : 1° coord < 0, 2° coord. >0.
Nouvelle fenêtre
° H fait bouger le vecteur. Coordonnées ne changent pas.
F_1 : Ça a rien a voir avec fonction point...(incompréhensible)
F_2 : Si tu le mets dans.....xb-xa
F_1 : Non, car 1 positive, l'autre négative.
Ça va faire neg. neg. (- -) ca va faire pos. pos.(+ +).
H : Nouvelle fenêtre.
Afficher
On montre les axes.
Droite D quelconque
Représenter
F :
H : Placer un vecteur directeur de cette droite.
F_1 : Faut coordonnées de droite. Quand tu as coordonnées de la droite tu as coordonnées du vecteur directeur.
F_2 : Ça existe vecteur directeur...(° Elle veut dire dans cabri.)
H : Non.
F_1 : Équation d'une droite 2,3x+1,17y+10=0.
F_1 : Faut calculer vecteurs directeur (cherche un crayon et un papier)
F_2 : (-1,17 ; 2,3). C'est facile là.
F_1 : Faudrait...(incompréhensible) quand on met coord, on arrive à faire vecteurs.
H : Comment.....

F_1 : parallèle à droite.
H : Je vous demande de faire.
F_1 : On va faire droite parallèle
le fait
F_1 : Maintenant transforme droite en vecteur
F_2 : Comment tu sais que vecteur directeur ?
F_1 : Ah, ben...faut qu'il soit parallèle à droite
directeur, ça montre la direction
H : Qu'est-ce que c'est vecteur directeur?
F_1 : Vecteur colinéaire à droite
F? : même sens, même direction.
° A moi :
F_2 : Là on a montré un vecteur directeur ?(un peu sceptique)
Oui, beaucoup !
F_2 : Tous ceux qui sont parallèles.
H : Afficher équation de la droite
coordonnées de ce vecteur
afficher les coordonnés
(2,5 ; -5,10)
° F_2 ne comprend toujours pas.
F_1 : C'est xb-xa, yb-ya
H : demande de représenter un point qui... (incompréhensible)xb.
F2 : B est là.
A____
Abscisse -1n ordonnée -1
H = On prend ce point B
Si je veux...(incompréhensible) coordonnées
comment faire
(incompréhensible) comment tu fais sur feuille papier/crayon
Demande comment elle a fait pour trouver coordonnées de B.
F_2 : On prolonge...ah, non
F_2 : Droite perpendiculaire
H : Pourquoi on peut prendre ⊥
F_3 : Repère orthonormé
H : Voilà ... (incompréhensible) on prend // (F1 ou F2 avait dit //).
ça va faire x3
H : xA
H : xB-xA > 0 ou < 0
F_1 : < 0, non > 0
F_2 : xB-xA ça va faire -1.
H : D'accord, alors y s'en va
F_2 : Fait ⊥ issue de B à Oy
H : Comment on fait
F_3 : yB-yA (1-3)
F_2 : negatif ah, oui
H : représenter un vecteur
F_1 : Mais je l'ai vu.
F_2 : oui, voir ça suffit pas. Moi, je l'ai expliqué.
H : Appeler un axe, un vecteur quelconque.
Construire un vecteur v tel que v soit égal à u, tel que (incompréhensible)
F_1 : Tracer une droite // passant par 0
F1 : Maintenant vecteur
F_2 : (incompréhensible) même longueur
F_2 : sens opposé? Ah, non
F_1 : (mesure avec doigts écartés et reporte sur le vecteur qu'elle a construit.)
On va nommer u=AB, v=CD

Comme origine de v est O, vecteur v=OD
Le problème est de construire D.
F_1 cherche dans menus report de mesure, montre le premier vecteur, le 2° ...(incompréhensible)
F_3 : Si t'avait montré les points
F_2 : Faut marquer la mesure
F_1 : C'est égaux là.....
F_2 : C'est égaux comme ça (mais pas toujours)
afficher coordonnées u et OP
F_1 : Afficher les coordonnées des 2 vecteurs mais pas les mêmes
H : Demande afficher coordonnées point extrémités de v.
2,57 ; 5,00
Même chose que la droite
H : Équation de droite, non de vecteur
H : équation d'un vecteur
F_2 : ça ne dit pas
H : Un vecteur, on dit....
F2 : Vecteur directeur
H : Ce qui est affiché ...(incompréhensible)
F_1 : Coordonnés du vecteur
F_1 : Pour prendre coordonnées, ils prennent coordonnées de flèche (incompréhensible)
F_2 : ça passe parce que c'est O.
donc c'est normal.

Groupe n°3

H : L'enseignant
E_1, E_2 et E_3 : élèves
O : Observateur
° : Commentaire fait par l'observateur.

H: L'objectif est de faire de la géométrie analytique avec CABRI.
H: Afficher les axes. Chercher dans le menu l'option : « montrer les axes ».
° Les élèves ne le trouvent pas tout de suite ; il faut les aider.
H : Prendre un point de base A.
H : Demander les coordonnés de ce point.
Les élèves cherchent un peu partout et ne le trouvent pas. J'intervient pour leur montrer où ce trouve l'option « équation&coordonnés ».
E_1 : Ah, c'est bon. (le fait).
H : Déplacer A de tel façon que l'abscisse soit égal à zéro.
° H rappelle au tableau que x=0. Il y a une petite confusion entre abscisse et ordonnée.
E_1 : Ah, voilà ! (ils ont trouvé A (0,00 ; 3,70))
H : Tracer une droite quelconque.
° E_1 cherche dans le menu et le fait.
H : Afficher l'équation de cette droite.
° E_1 cherche dans le menu. Ils avaient encore oublié. Son équation est : y= 2,1x-7,19.
H : Allez dans le menu « préférences ». Choisissez, format d'équation. Prendre la forme réduite. Cliquez sur « appliquer ».
° Tâche facile a faire pour les élèves)
H : Tracer un vecteur et demander les coordonnées.
E1 : Où on trouve un vecteur dans le menu ?
J'interviens pour montrer comment on le fait
H : Pour construire un vecteur il faut donner un point d'origine et une extrémité.
H : Demander les coordonnées de ce vecteur.
E_2 : Et les coordonnées ?
E_1 : Regarde, on va chercher là. (il cherche dans le menu)
° H explique où on trouve les coordonnées d'un vecteur.

H : Déplacer ce vecteur.
E_1: Voilà, c'est fait !
H : Maintenant vous allez prendre une nouvelle fenêtre.
Prendre une droite quelconque. Demander l'équation de cette droite.
H : Représenter un vecteur directeur de cette droite.
E_1: Un ....quoi ? Un vecteur directeur.....
° Ils discutent vite fait entre eux, et E_1 trace le vecteur sur la droite.
H : Demander les coordonnées de ce vecteur.
° E_1 le fait. Il m'appelle pour savoir comment on fait pour calculer les coordonnées d'un vecteur.
E_1 : Comment on calcule ? Je veux confirmer que c'est vraiment ça (les coordonnées données par le logiciel).
° Je lui rappelle comment on calcule les coordonnées d'un vecteur.
° Je les ai demandé si le vecteur directeur doit être toujours sur la droite ; s'il y en a un ou plusieurs.
E_1 : Bah.....non, on peut faire un vecteur ailleurs.
°O : Comment peut-on le faire ?
E1 : Attends, je vais voir.....ça doit être parallèle à la droite.....
Il n'y a pas vecteur colinéaire ?(il veux dire dans le menu)
°O : Non, il faut que tu le construise.
° E_2 et E_3 regardent et attendent que E1 le fasse.
E_1 : C'est bon. Je trace une parallèle à la droite donnée et puis je fait un vecteur sur la droite! Après, est-ce que je peux effacer la droite ?
° O : Oui, tu peux le faire.
° Je lui montre.
E_1 : Ça y est. On a fini !

FIN : le temps est fini et ils partent.

Scénario Vecteurs - Les activités

TD n° 5 - Des vecteurs avec Cabri

1°) Ouvrir le fichier "quadri". A l'écran apparaît un quadrilatère ABCD, un point A' et l'image du quadrilatère par translation de A vers A'.
Déplacer le quadrilatère ABCD. Déplacer les points A, B, C et D. Déplacer le point A'. Que peut-on constater ?
Pour différentes dispositions des éléments de l'écran, comparer la direction, le sens et la longueur du vecteur $\overrightarrow{AA'}$ avec ceux des vecteurs ayant pour origine un sommet du quadrilatère ABCD et pour extrémité le sommet correspondant du quadrilatère image.

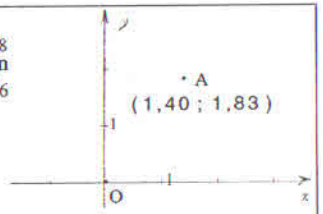
2°) Créer un nouveau fichier [F_8 3:New]. Créer un quadrilatère ABCD et un vecteur $\overrightarrow{MN}$; construire l'image du quadrilatère ABCD par la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$ en utilisant l'article translation [F_5 1:Translation].
a) Déplacer le point N. Que peut-on constater ?
b) Déplacer le point A, le point B, ... Que peut-on constater ?
c) Déplacer le vecteur $\overrightarrow{MN}$. Pourquoi le quadrilatère image ne bouge-t-il pas ?

3°) Créer un nouveau fichier. Créer un vecteur $\vec{u}$ et un point A. Construire le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$.
A partir de la construction précédente, créer une macro-construction qui, étant donné un vecteur $\vec{u}$ et un point A, produit le représentant de $\vec{u}$ d'origine A. Pour créer cette macro, il faut :

- désigner comme objets initiaux le vecteur $\vec{u}$ et le point A [F_4 6:Macro Construction 2:Initial Objects] ;
- désigner comme objet final le vecteur $\overrightarrow{AB}$ [F_4 6:Macro Construction 3:Final Objects] ;
- définir la macro en lui donnant un nom (on prendra "representant") [F_4 6:Macro Construction 4:Define Macro] ;
- on désignera l'objet par "repvecteur" et on sauvegardera la macro sous le nom "represen" ;
- la macro sera disponible [F_4 6:Macro Construction 1:Execute Macro].

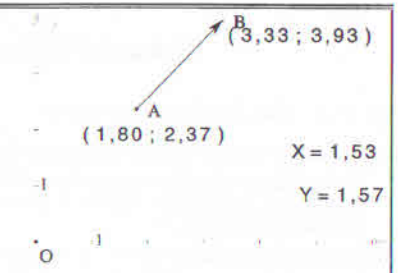
TP n°6 - Coordonnées d'un point, d'un vecteur

1°) Coordonnées d'un point
Ouvrir un nouveau fichier ; montrer les axes [F_8 9:Format Coordinates Axes 2:Rectangular] ; créer un point A ; afficher les coordonnées du point A [F_6 5:Equation Coordinates].
Où placer le point A pour que
- l'abscisse de A soit nulle ;
- l'ordonnée de A soit nulle ;
- une des coordonnées soit négative ;
- les deux coordonnées soient négatives.



2°) Coordonnées d'un vecteur

Créer un point B et le vecteur $\vec{AB}$; afficher les coordonnées de B. Calculer [F_6 6:Calculate], en sélectionnant les différentes coordonnées puis afficher les coordonnées de $\vec{AB}$.



Créer une macro qui, à partir de deux points A et B, produise les coordonnées du vecteur $\vec{AB}$

(pour créer cette macro, il faut désigner comme objets initiaux le vecteur et les axes et comme objets finaux les deux coordonnées calculées).

On appellera cette macro "coordvect".

Remarque : Sur la Ti 92, les deux coordonnées s'affichent l'une sur l'autre. Pour rendre la lecture possible, il est nécessaire de décaler l'un des nombres à l'aide de F_1. On le fera systématiquement à chaque utilisation de la macro.

a) Prévoir ce que deviennent les coordonnées de $\vec{AB}$ lorsqu'on déplace $\vec{AB}$ à l'aide de [F_1 1:Pointer]. Écrire cette prévision sur le cahier.
Vérifier avec la machine et en cas d'erreur, expliquer l'observation ou appeler le professeur.

b) Prévoir ce que deviennent les coordonnées de $\vec{AB}$ lorsqu'on fait tourner $\vec{AB}$ à l'aide de [F_1 2:Rotate]. Écrire cette prévision sur le cahier.
Vérifier avec la machine et en cas d'erreur, expliquer l'observation faite ou appeler le professeur.

3°) Exercice

a) Sur le cahier, fixer un repère d'origine O ; dessiner un vecteur ayant les coordonnées positives et un autre ayant les coordonnées négatives. Avec la machine, vérifier si c'est bien le cas.

b) Préciser dans quels cas le vecteur $\vec{AB}$ a des coordonnées :
- toutes les deux positives ;
- toutes les deux négatives ;
- de signes contraires

c) Dans quels cas, l'une des coordonnées est-elle nulle ?

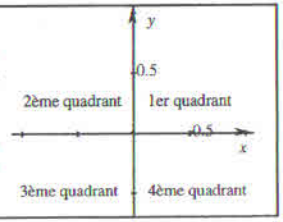
d) Dans quels cas, les coordonnées du vecteur coïncident-elles avec celles d'une de ces extrémités ?

e) Construire le point M tel que $\vec{OM} = \vec{AB}$. Comparer les coordonnées de M et de $\vec{AB}$.

4°) Exercice

a) Est-il possible de dessiner un vecteur $\vec{RS}$ ayant ses coordonnées négatives avec les points R et S dans le 1er quadrant ?

b) Est-il possible de dessiner un vecteur $\vec{AB}$ ayant ses coordonnées positives avec les points R et S tous les deux dans le 3ème quadrant ?



5°) Vecteur de coordonnées données

Créer un nouveau fichier et afficher les axes
Éditer un nombre x [F7 6:Numerical Edit] (prendre pour valeur 1.32)
Éditer un nombre y (prendre pour valeur –1.5)
Construire le point de l'axe des abscisses ayant pour abscisse x (ici 1,32) [F_4 9:Mesurement Transfer] (pour cela, désigner le nombre puis l'axe)
Construire le point de l'axe des ordonnées ayant pour ordonnée y (ici –1,5)
Construire géométriquement le point M ayant pour coordonnées (x ; y) ; créer le vecteur $\vec{OM}$ et construire avec la macro "representant", un représentant de $\vec{OM}$ d'origine quelconque (si la macro n'est pas disponible avec F_4 6:Macro Construction 1:Execute Macro, il est nécessaire de la charger [F_1 1:Open] en précisant le type macro au lieu de figure.
Avec la macro "coordvec", afficher les coordonnées du représentant de $\vec{OM}$.
Modifier les valeurs des nombres x et y et observer les modifications entraînées. Noter les remarques.

Pour ceux qui ont le temps : à partir de la construction précédente, il est possible de créer une macro qui à partir de deux nombres x et y et d'un point ; crée le représentant d'origine ce point du vecteur ayant pour coordonnées (x ; y). Pour définir cette macro, il faut désigner comme objets initiaux : un des axes, les deux nombres et le point et comme objet final : le représentant obtenu. On pourra l'appeler "Vectxy".

TD n°7 - Somme de deux vecteurs

1°) Créer un nouveau fichier. Créer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) Construire la somme $\vec{u}+\vec{v}$ en utilisant [F_4 7:Vector Sum] .

b) À partir d'un point M, construire la somme $\vec{u}+\vec{v}$ sans utiliser cette fois [F_4 7:Vector Sum] ; expliquer puis vérifier la construction.

c) Quelle(s) disposition(s) des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ permet(tent) d'obtenir pour vecteur somme le vecteur nul ? le vecteur $\vec{u}$? le vecteur $\vec{v}$?

d) Créer un nouveau fichier. Créer trois points A, B et C et construire S tel que $\vec{AS} = \vec{AB} + \vec{AC}$ sans utiliser [F_4 7:Vector Sum]. Expliquer et vérifier la construction.

2°) Créer un nouveau fichier. Créer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{s}$.

Construire le vecteur $\vec{w}$ tel que $\vec{s} = \vec{u}+\vec{w}$ sans utiliser [F_4 7:Vector Sum]. Expliquer puis vérifier la construction.

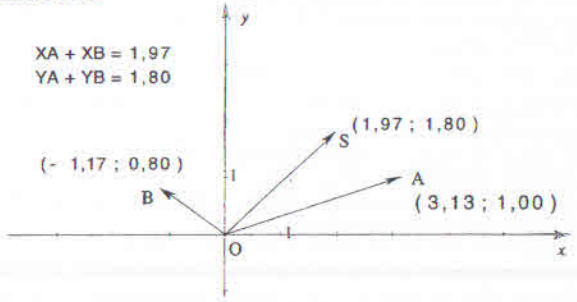
3°) Exercice : Créer deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. Construire le milieu I de [BC] [F_4 3:Midpoint] puis le symétrique S de A par rapport à I [F_5 5:Symmetry].

a) Vérifier que $\vec{AS} = \vec{AB} + \vec{AC}$

b) Justifier ce résultat par des propriétés géométriques

4°) Coordonnées du vecteur somme de deux vecteurs

a) Créer un nouveau fichier. Montrer les axes. Créer deux points A et B et les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$; construire le point S tel que $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Quelles sont les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OS}$? Vérifier que la somme des coordonnées de A et de B est égale aux coordonnées de S.



b) Ouvrir un nouveau fichier. Montrer les axes. Créer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et construire le vecteur somme en utilisant [F4 7:Vector Sum] . Afficher (en utilisant la macro "coordvect") les coordonnées des trois vecteurs puis comparer ces coordonnées.

4°) (Pour ceux qui ont du temps) Différence de deux vecteurs

a) Ouvrir un nouveau fichier et montrer les axes. Créer deux points A et B et $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.

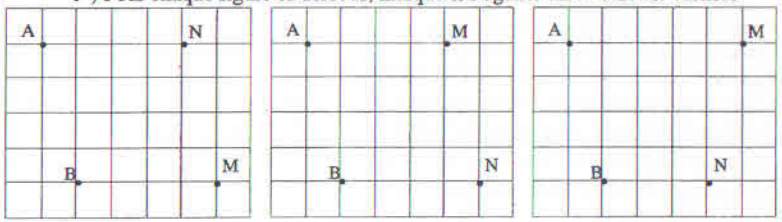
Construire un vecteur $\vec{d}$ représentant $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

b) Comparer les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$, de $\overrightarrow{OB}$ et de $\vec{d}$. Vérifier que les coordonnées de $\vec{d}$ sont bien $(X_B - X_A ; Y_B - Y_A)$.

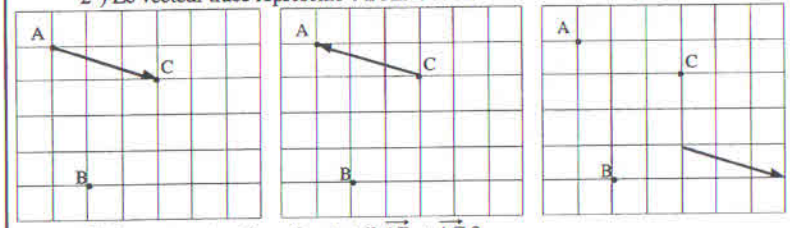
TD n°8 - Quelques exercices d'entraînement avec les vecteurs

Exercice 1

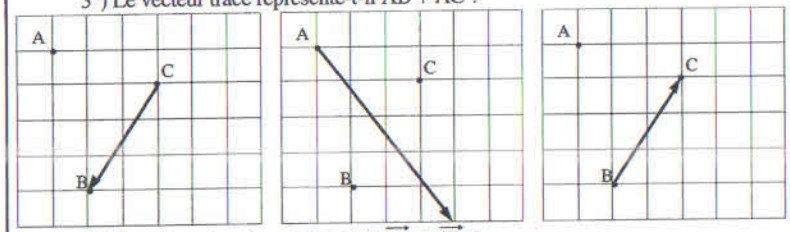
1°) Pour chaque figure ci-dessous, indique si l'égalité $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ est vérifiée.



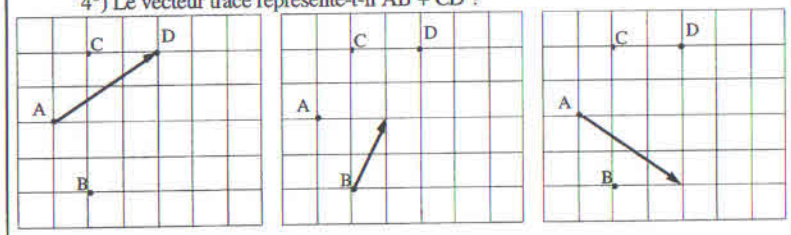
2°) Le vecteur tracé représente-t-il $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$?



3°) Le vecteur tracé représente-t-il $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$?

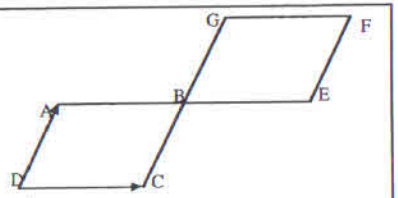


4°) Le vecteur tracé représente-t-il $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$?



Exercice 2

ABCD est un parallélogramme. Les points G, F et E sont les symétriques respectifs des points C, D et A par rapport au point B.



1°) On pose $\overrightarrow{DA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{DC} = \vec{v}$. Trouver les vecteurs de la figure égaux au vecteur $\vec{u}$, puis ceux égaux au vecteur $\vec{v}$.

2°) Compléter les égalités vectorielles suivantes :

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{D...}$; $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{A...}$; $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{C...}$

$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{E...}$; $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{C...}$; $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{C...}$

3°) Justifier l'égalilté $\overrightarrow{DB} = \vec{u} + \vec{v}$, puis exprimer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{BF}$

Exercice 3

1°) Considérons quatre points A, B, C, D. Établir que :

a) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

b) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

c) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD}$

2°) Simplifier les expressions

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$

c) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{ED}$

d) $\overrightarrow{FD} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{CB}$

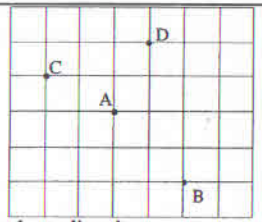
En guise d'entraînement pour ceux qui ont le temps

(Terracher p.279) Activité 1 et 2

TD n°9 - Vers une nouvelle opération avec les vecteurs

Exercice 1

Dessiner sur le cahier les points A, B, C et D dans la même disposition.



1°) Construire le point M tel que

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$

(on écrit aussi $\overrightarrow{AM} = 3\,\overrightarrow{AB}$)

2°) Construire le point N tel que $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$.

Comment noter $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$?

Comparer les normes de ces deux vecteurs et leurs directions.

3°) Dessiner sur le cahier un point E quelconque (à une intersection du quadrillage).

Construire P tel que $\overrightarrow{EP} = 2\,\overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{CD}$.

Exercice 2

Faire un nouveau dessin des points A, B, C et D dans la même disposition.

1°) Construire le point R tel que $\overrightarrow{AR} = -\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CD}$. Quelle notation proposer ?

2°) Construire le point S tel que $\overrightarrow{CS} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}$.. Quelle notation proposer pour $\overrightarrow{CS}$?

3°) Marquer un point F quelconque et construire T tel que $\overrightarrow{FT} = 2\,\overrightarrow{AB} - 3\,\overrightarrow{CD}$.

Exercice 3 Les questions de cet exercice doivent être traitées d'abord sans Cabri puis avec Cabri.

Marquer trois points M, N et P.

1°) Construire le point U tel que $\overrightarrow{PU} = 3\,\overrightarrow{MN}$. Comparer les longueurs PU et MN.

2°) Marquer un point quelconque X et construire T tel que $\overrightarrow{XT} = 3\,\overrightarrow{MN}$. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{XT}$ et $\overrightarrow{PU}$.

3°) Dessiner un représentant d'un vecteur $\vec{u}$ quelconque puis un représentant de $3\,\vec{u}$. Décrire la méthode de construction.

Exercice 4 Faire la figure sur le cahier puis dans Cabri

Marquer deux points A et B. Soit $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

1°) Construire le symétrique C de A autour de B ;
le symétrique D de B autour de C ;
le symétrique E de C autour de D ;
le symétrique F de D autour de E.

2°) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\vec{v}$.

3°) Calculer $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{CA}$ en fonction de $\vec{v}$.

Exercice 5 Faire la figure sur le cahier puis dans Cabri

Marquer deux points M et N. Soit $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$.

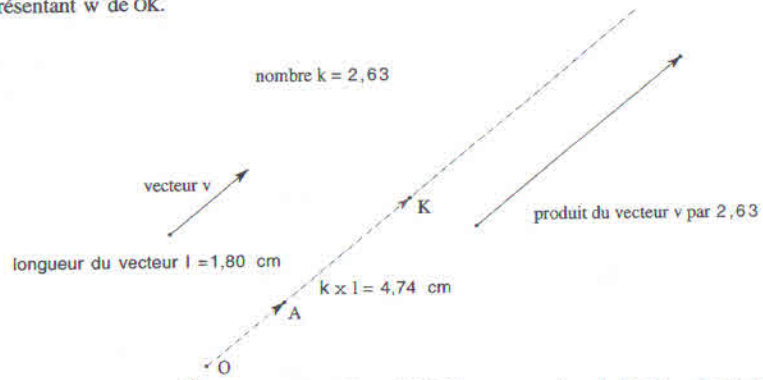
1°) Construire le symétrique P de M autour de N, le symétrique Q de N autour de P et le symétrique R de P autour de Q ; construire le milieu I de [MN], le milieu J de [PQ] et le milieu K de [PJ].

2°) Quelle égalité peut-on écrire entre $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MI}$? Proposer une écriture de $\overrightarrow{MI}$ en fonction de $\overrightarrow{MN}$ puis de $\overrightarrow{PK}$, $\overrightarrow{NJ}$, $\overrightarrow{MJ}$, $\overrightarrow{MK}$ et $\overrightarrow{IK}$ toujours en fonction de $\overrightarrow{MN}$.

TD n°10 - Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

1. Produit d'un vecteur par un nombre

Créer un nouveau fichier. Créer un vecteur $\vec{v}$ et un point O. Construire A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$. Créer la demi-droite [OA). Éditer le nombre 2,63 [F_7 6:Numerical Edit]. Afficher la longueur OA [F_6 1:Distance&Length] et calculer [F_6 6:Calculate] le produit de OA par le nombre 2,63. À l'aide de [F_4 9:Mesurement Transfer], construire le point de la demi-droite [OA) ayant pour abscisse ce résultat. Nommer K le point obtenu. Construire le vecteur $\overrightarrow{OK}$ puis un représentant $\vec{w}$ de $\overrightarrow{OK}$.



a) • Déplacer le vecteur $\vec{v}$. Le point K est-il modifié ? La construction de K dépend-elle du choix du représentant du vecteur $\vec{v}$? Justifier.

• Faire tourner le vecteur $\vec{v}$ à l'aide de [F_1 2:Rotate]. Comment la demi-droite [OA) et le vecteur $\vec{w}$ sont-ils modifiés ? Justifier.

• Modifier le vecteur $\vec{v}$ en déplaçant l'origine ou l'extrémité. Comment la demi-droite [OA), le point K et le vecteur $\vec{w}$ sont-ils modifiés ? Justifier.

b) Déplacer le point O. La longueur, la direction et le sens de $\overrightarrow{OK}$ sont-ils modifiés ? Justifier.

c) Comment justifier le fait que le vecteur $\overrightarrow{OK}$ soit désigné par la notation $2{,}63\vec{v}$?
d) Modifier le nombre 2,63 et observer les modifications pour le point K. Prendre aussi des valeurs négatives. Noter les remarques faites. Que se passe-t-il avec le nombre 0 ?
e) Rédiger une définition du vecteur $k\vec{v}$ dans le cas où k est positif puis dans le cas où k est négatif.

2. Une nouvelle opération

Définir la macro-construction (l'appeler "kfoisVec") qui, à partir de la donnée d'un nombre k, d'un vecteur $\vec{v}$ et d'un point O, construit le représentant du vecteur $k\vec{v}$ d'origine O.

Pour définir cette macro, désigner $\vec{v}$, k et O comme objets initiaux et le vecteur $\overrightarrow{OK}$ comme objet final

3. Les coordonnées de $k\vec{v}$

Ouvrir un nouveau fichier. Montrer les axes. Éditer un nombre k (prendre une valeur pour k).

Créer un vecteur $\vec{v}$ et construire le vecteur $k\vec{v}$ (avec la macro "kfoisVec") . Afficher les coordonnées de $\vec{v}$ et de $k\vec{v}$ (avec la macro "coordVec").

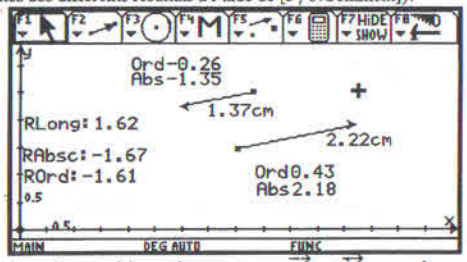
Vérifier que les coordonnées de $k\vec{v}$ sont proportionnelles à celles de $\vec{v}$.

4. Observation de quelques propriétés du produit d'un vecteur par un nombre

a) Ouvrir un nouveau fichier. Éditer un nombre r (prendre une valeur pour r) ; créer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; construire la somme $\vec{u}+\vec{v}$. À l'aide de la macro-construction "kfoisVec", construire $r\vec{u}$, $r\vec{v}$ et $r(\vec{u}+\vec{v})$
Vérifier que l'on a bien $r\vec{u}+r\vec{v}=r(\vec{u}+\vec{v})$ pour différentes valeurs de r et quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
b) Créer un nouveau fichier. Éditer deux nombres n et r (prendre des valeurs pour n et r) ; créer un vecteur $\vec{u}$. Construire à l'aide de la macro "kfoisVec" le vecteur $r\vec{u}$ puis le vecteur $n(r\vec{u})$. À l'aide de la calculatrice, afficher le produit $n \times r$ puis vérifier que $(n \times r)\vec{u}$.

5. Colinéarité

a) Créer un nouveau fichier. Montrer les axes et placer l'origine vers le bord de l'écran pour ne pas gêner l'affichage. Créer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; afficher les coordonnées des deux vecteurs ainsi que leur longueur. Calculer le rapport des abscisses, des ordonnées et des longueurs
(attention à ne pas confondre les différentes coordonnées et les différents résultats ; pour cela, placer ou modifier les étiquettes des différents résultats à l'aide de [F7 5:Comment]).



Chercher si il existe des positions des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ pour lesquelles le rapport des abscisses est égal au rapport des ordonnées. Penser aussi à faire tourner les vecteurs à l'aide de [F_1 2:Rotate].

b) Créer un nouveau fichier. Montrer les axes et placer l'origine vers le bord de l'écran. Créer un vecteur $\vec{u}$; à partir d'un point quelconque, créer une droite ayant même direction que le vecteur $\vec{u}$; créer un vecteur $\vec{v}$ de même direction que le vecteur $\vec{u}$ (pour cela, on utilisera le point X et un point situé sur la droite tracée). Afficher les longueurs et les coordonnées des vecteurs et calculer le rapport des longueurs, celui des abscisses et celui des ordonnées. Déplacer les points ayant servi à définir les deux vecteurs. Que peut-on constater ?
Soit r le rapport des abscisses. Utiliser ce nombre pour construire le vecteur $r\vec{u}$ ou le vecteur $r\vec{v}$ (selon le rapport qui a été calculé). Comparer le vecteur obtenu avec les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$
c) Comment peut-on envisager, à partir des coordonnées de deux vecteurs, de reconnaître si ces deux vecteurs ont même direction ?
d) Envisager certains cas particuliers comme par exemple le cas de coordonnée nulle. Que se passe-t-il alors ? Essayer de préciser le plus possible en recherchant différents cas limites.

TD n°11 - Quelques exercices d'applications

Exercice 1 Soit ABC un triangle.

a) Construire le point D tel que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$.

b) Construire le point E tel que $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{BC}$.
c) Vérifier que le point E obtenu semble être sur la droite (AC) et que C est le milieu de [AE].

Établir que C est bien le milieu de [AE] en calculant $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.

Exercice 2 Soit ABC un triangle

a) Construire les points D, E et F définis pas $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AC}$.
b) Établir que E est le milieu de [DF]

Exercice 3
Soit ABCD un parallélogramme, I le milieu du segment [AB] , E le point du segment [ID] tel que $IE = \frac{1}{3}ID$.

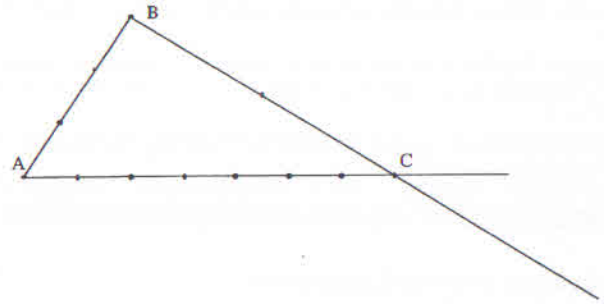
1°) Faire une figure illustrant cet énoncé et placer soigneusement le point E. Vérifie sur le dessin la conjecture d'alignement.

2°) Calculer $\overrightarrow{ID}$ puis $\overrightarrow{IE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

3°) Calculer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

4°) Calculer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$.Comparer les directions des droites (AE) et (AC). Que peut-on en conclure pour les points A, E et C ?

Exercice 4 Soit A, B et C trois points non alignés.



1°) Placer les points P, Q et R définis par : $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AR} = \frac{6}{7}\overrightarrow{AC}$.

2°) Calculer $\overrightarrow{BQ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ puis de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$.

3°) a) Calculer $\overrightarrow{PR}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$;

b) Calculer $\overrightarrow{PQ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}$;

c) Que peut-on en déduire pour P, Q et R ?

4°) Soit I le milieu de [BC] et A' le symétrique de A autour de C.

a) Placer les points I et A' ;

b) Calculer $\overrightarrow{PI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{BC}$ puis de $\overrightarrow{AC}$ et de $\overrightarrow{AB}$;

c) Que peut-on en déduire pour P, I et A'. Préciser la position de I sur le segment [PA'].

Exercice 5 Soit ABCD un parallélogramme et I le milieu de [BC]

a) Construire J tel que $\overrightarrow{AJ} = 2\overrightarrow{AI}$ et établir que C est le milieu de [JD]

b) Construire K tel que $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{ID}$.

c) Établir que $\overrightarrow{JK} = 4\overrightarrow{CD}$.

Exercice 6

1°) Montrer que si A, B, C, D et E vérifient $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE}$ alors BCDE est un parallélogramme.

2°) Montrer que si MNPQ est un parallélogramme alors $\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{RQ}$

Sur le livre, pour s'entraîner p. 295 n° 14, 15, 19, 22, 23

TD n°12 - Base - repère - coordonnées

1. Repère (O, I, J) ou $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ou $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$

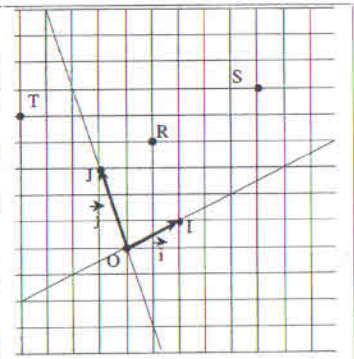
1°) Reproduire sur une feuille à petits carreaux le repère (O, I, J) et les points dans la même disposition. Quelles sont les coordonnées de R, S et T ?

2°) Placer les points A(3 ; 0) et B(0 ; –1). Calculer $\overrightarrow{OA}$ à l'aide de $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OB}$ à l'aide de $\vec{j}$.

3°) Placer le point C(3 ; –1) puis calculer $\overrightarrow{OC}$ à l'aide de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$.

4°) Construire le point D tel que $\overrightarrow{OD} = 3\vec{i} - \vec{j}$. Quelles sont les coordonnées de D dans le repère (O, I, J).

5°) Placer les points E(–3 ; 1), F(4 ; 2) et G(1 ; –1,5). Calculer $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ et $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$. En déduire $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{EG}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



6°) Dessine un vecteur $\vec{v}$ d'origine O quelconque. Expliquer comment on peut trouver deux nombres x et y tel que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. On dira que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base pour les vecteurs du plan.

2. COORDONNÉES D'UN VECTEUR (d'après 4 p.316 Terracher)

Dans le plan rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ que l'on choisira commode

1°) placer les points A(0 ; 3), B(1 ; –3), C(2 ; 4) et D(0 ; 5) ;

2°) calculer $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

3°) En remarquant que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, calculer $\overrightarrow{AB}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$. En déduire les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$

4°) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CD}$.

5°) Plus généralement, soit $M(x_M ; y_M)$ et $N(x_N ; y_N)$; calculer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et en déduire les coordonnées de $\overrightarrow{MN}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

3. CALCUL DE COORDONNÉES

Dans le plan muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit A(1 ; 5), B(–2 ; 3), C(–1;0).

1°)Calculer $4\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$

2°) En déduire les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

3°) Calculer les coordonnées du point N défini par $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$. Voir aussi 5p.316

4. COORDONNÉES DU MILIEU D'UN SEGMENT.

Dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°) placer M(2 ; 3) et N(–1 ; –2) et essayer de prévoir les coordonnées du point R milieu de [MN].

2°) Calculer $\overrightarrow{OR}$ en fonction de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ puis en déduire par le calcul, les coordonnées de R.

3°) Plus généralement, soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ et I le milieu de [AB]; calculer $\overrightarrow{OI}$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$ et en déduire les coordonnées de I

4°) Appliquer ces résultats pour résoudre l'exercice 6 p.316 du livre.

5. PARALLÉLOGRAMME. Dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°) placer les points A(1 ; 2), B(–2 ; 1) et C(–1 ; –3) et essayer de prévoir les coordonnées du point M tel que ABCM est un parallélogramme.

2°) Soit M(x ; y). calculer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de x et y. Quelles doivent être les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}$ pour que ABCM soit un parallélogramme ? En déduire par le calcul vectoriel et non par la lecture graphique les coordonnées de M.

3°) Calculer les coordonnées du point N tel que ACBN soit un parallélogramme.

4°) Vérifier que A est le milieu de [MN].

5°) Faire l'exercice 8 p. 316

TD n°13 - Colinéarité, Équation de droite

1. Vecteurs colinéaires

Soit $(\vec{i} ; \vec{j})$ une base. Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées (2 ; –5) dans cette base.

a) Avec l'aide éventuelle d'un dessin, trouver les coordonnées de 5 vecteurs, tous différents, colinéaire à $\vec{u}$.

b) Soit $\vec{w}$ (1 ; b). Est-il possible de trouver b pour que $\vec{w}$ soit colinéaire à $\vec{u}$? Y a-t-il une ou plusieurs solutions ?

c) Soit $\vec{t}$ (a ; 1). Est-il possible de trouver a pour que $\vec{t}$ soit colinéaire à $\vec{i}$? Y a-t-il une ou plusieurs solutions ?

2. Condition de colinéarité

Soit $(\vec{i} ; \vec{j})$ une base. Soit $\vec{u}$(x ; y) et $\vec{v}$(x' ; y'). Soit k un nombre réel.

1°) Quelles sont les coordonnées de $2\vec{u}$? de $-5\vec{u}$? de $k\vec{u}$?

2°) Montrer que si $\vec{u} = k\vec{v}$ alors xy' – x'y = 0.

3°) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs non nuls. On suppose de plus que $x \neq 0$. Montrer dans ces conditions que si xy' – yx' = 0 alors $\vec{u} = k\vec{v}$.
Ce résultat se généralise et xy' – yx' = 0 est appelée condition de colinéarité des vecteurs de coordonnées (x ; y) et (x' ; y').

3. Vecteur directeur d'une droite. Détermination vectorielle d'une droite.

Dans le plan rapporté au repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, soit $\vec{v}$(2 ; 5) et A(–2 ; 1).

1°) Dessiner une droite (d) ayant pour vecteur directeur $\vec{v}$. Y a-t-il une seule possibilité ?

2°) Dessiner une droite (e) ayant pour vecteur directeur $\vec{w}$(1 ; 2,5). Y a-t-il une seule possibilité ? Que constate-t-on ?

3°) Dessiner une droite (f) ayant pour vecteur directeur $\vec{v}$ et qui passe par A. Y a-t-il une seule possibilité ?

4°) Dessiner la droite (e) ayant pour vecteur directeur $3\vec{v}$ et qui passe par A.

5°) Où se trouve la droite de vecteur directeur le vecteur de coordonnées (0 ; 5) et qui passe par O ? Celle de vecteur directeur le vecteur de coordonnées (0 ; –2) et qui passe par A ?

6°) Où se trouve la droite de vecteur directeur le vecteur de coordonnées (3 ; 0) et qui passe par O ? Celle de vecteur directeur le vecteur de coordonnées (–3 ; 0) et qui passe par C(2 ; 5) ?

4. Équation de droite

Dans le plan rapporté au repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, soit (d) la droite d'équation y = 2x – 1.

1°) A(0 ; –1) et B(1 ; 1) sont-ils des points situés sur la droite ? Comment peut-on le vérifier par le calcul ?

2°) Expliquer comment on peut marquer le point de (d) d'abscisse –3. Pourquoi n'y a-t-il qu'une seule possibilité ? Soit C(–3 ; y). Retrouver y par le calcul.
Expliquer comment on peut marquer le point de (d) d'ordonnée –3. Pourquoi n'y a-t-il qu'une seule possibilité ? Soit D(x ; 7). Retrouver x par le calcul.

3°) Montrer que $\vec{CD}$ et $\vec{AB}$ ont même direction.

4°) Soit M(x ; y).
a) Quelle relation doit vérifier x et y pour que les points A, B et M soient alignés ?
b) Vérifier que l'on trouve la même relation vérifiée par x et y pour que les points C, D et M soient alignés ou pour que B, D et M soient alignés.

5. Équation de droite

Dans le plan rapporté au repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, soit les points R(–2 ; 3) et S(1 ; –2).

1°) Trouver l'équation de la droite (RS).

2°) Combien y a-t-il de points de la droite (RS) ayant pour abscisse –1 ? Justifier la réponse. Déterminer son ordonnée si possible.

3°) Combien y a-t-il de points de la droite (RS) ayant pour ordonnée 0 ? Justifier la réponse. Déterminer son abscisse si possible.

4°) Y a-t-il un point de la droite (RS) d'abscisse 100 ? Justifier la réponse.

5°) Soit M(x ; y). Écrire la condition de colinéarité pour que $\vec{RM}$ soit colinéaire à $\vec{RS}$. Retrouver ainsi l'équation de la droite (RS).

TD n°14 - Exercices d'application - vecteurs ; équation de droite

Exercice 1. Soit trois points A, B et C non alignés.

1°) Soit M un point tel que $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. Calculer $\vec{AM}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$. En déduire les coordonnées de M dans le repère $(A ; \vec{AB} ; \vec{AC})$.

2°) Soit N tel que $2\,\overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NB} + 3\,\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.
Calculer les coordonnées de N dans le repère $(A ; \vec{AB} ; \vec{AC})$.

Exercice 2. Dans le plan muni du repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, soit A(–2 ; 5), B(1 ; –3) et C(2 ; 2)

1°) Calculer les coordonnées de $\vec{AB}$ et de $\vec{AC}$.

2°) Calculer les coordonnées du milieu I de [BC]. Vérifier que $2\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{AC}$.

3°) Calculer les coordonnées de D tel que $\vec{BD} = \vec{AC}$.

4°) Soit M(x ; y). Calculer $\vec{AM}$ en fonction de x et y puis établir l'équation de la droite (AB).

5°) Trouver une équation de la droite parallèle à la droite (AB) qui passe par C.

Exercice 3. Dans le plan muni d'un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, soit $\vec{v}$(2 ; –1), A(–2 ; 3), B(1 ; 3) et C(3 ; –1).

1°) Trouver une équation de la droite (d) qui passe par A et de vecteur directeur $\vec{v}$. Quel est son coefficient directeur ? son équation réduite ?

2°) Établir une équation de la droite (BC).

3°) Calculer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (BC).

4°) Donner une équation de chacune des droites suivantes :
- (d_1) passant par A et parallèle à l'axe des abscisses
- (d_2) passant par A et parallèle à l'axe des ordonnées
- (d_3) passant par A et parallèle à la droite (BC)
- (OA).

Exercice 4. Soit ABCD un carré ; E le milieu de [AB] et F le milieu de [AD] ; I le point d'intersection des droites (BF) et (CE). Pour toute la suite, on considère le repère $(A ; \vec{AB} ; \vec{AD})$.

1°) Calculer les coordonnées de $\vec{BF}$ et de $\vec{CE}$.

2°) Justifier le fait que l'on puisse poser $\vec{BI} = k\,\vec{BF}$. Calculer les coordonnées de $\vec{BI}$ en fonction de k. En déduire les coordonnées de I en fonction de k.

3°) Calculer les coordonnées de $\vec{CI}$ en fonction de k.

4°) En utilisant le fait que les point C, I et E sont alignés, trouver la valeur de k puis en déduire les coordonnées de I.

Exercice 5. Soit $(O, \vec{i} ; \vec{j})$ un repère orthonormal et les points A(–2 ; 3), B(2 ; 1) et C(–5 ; –1). Soit D le point tel que $\vec{CD} = 2\,\vec{AB}$. Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

1°) a) Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ? (jusifier)
b) Calculer les coordonnées des points D, I et J.
c) Établir une équation de la droite (IJ)

2°) Soit E le point d'intersection des droites (AC) et (BD).
a) Déterminer par le calcul les coordonnées de E.
b) Établir que le point E est un point de la droite (IJ).

3°) Soit F le point d'intersection des droites (AD) et (BC).
a) Déterminer par le calcul, les coordonnées de F.
b) Établir que le point F est un point de la droite (IJ).

TD n°15 - Équation de droite avec Cabri.

Exercice 1 Avec la Ti 92, dans l'environnement Cabri (Geometry), créer le fichier TD15e1.

a) Créer un vecteur et un point A quelconque. Construire la droite qui passe par A et qui admet comme vecteur directeur le vecteur donné. Afficher l'équation de cette droite [F_6 5:Equation & Coordinates]. Il est possible de choisir dans [F_8 9:Format] la forme de l'équation.

b) Essayer d'abord de prévoir si l'équation de la droite est modifiée ou non lorsqu'on déplace le représentant du vecteur. Noter votre prévision sur le cahier puis vérifier sur la machine en utilisant le pointeur [F_1 1:Pointer], . Expliquer l'observation.

c) Que se passera-t-il pour la droite et pour son équation si on modifie la norme du vecteur sans changer sa direction ? Noter votre prévision sur le cahier puis vérifier avec le pointeur [F_1 3:Dilate]. Expliquer l'observation.

d) Que se passera-t-il pour la droite et pour son équation si on modifie la direction du vecteur ? Noter votre prévision puis vérifier avec le pointeur [F_1 2:Rotate].

e) Que se passera-t-il pour la droite et pour son équation si on déplace le point A ? Noter votre prévision puis vérifier en déplaçant le point A. Observer les conséquences pour l'équation et noter les remarques.

Exercice 2 Avec la Ti 92, créer le fichier TD15e2. Montrer les axes et la grille [F_8 9:Format Coordinates axes (rectangular) Grid (on)].

1°) En utilisant les points de la grille, créer un vecteur $\vec{RS}(1,5 ; 1)$ et le point A(1 ; –0,5) puis construire la droite (d) qui passe par A ayant $\vec{RS}$ pour vecteur directeur.

2°) Déterminer l'équation de la droite (d) et comparer avec l'équation donnée dans Cabri.

3°) Déplacer le point A sur la grille et observer l'équation donnée par la machine. Modifier aussi les points R et S sur la grille et observer les différentes formes de l'équation de (RS).

Exercice 3 Avec la Ti 92, créer le fichier TD15e3. Montrer les axes et la grille.

1°) Créer le point A(–1 ; 0,5) et le point B(1,5 ; –0,5) en utilisant la grille. Construire la droite (AB).

2°) Déterminer l'équation de la droite (AB) et comparer avec l'équation donnée dans Cabri.

Exercices du livre p.316 et suivantes : nos 9 ; 11 b) ; 14 ; 15 ; 17 ; 24 ; 68

TD n°16 - Orthogonalité et vecteurs.

Pour ce qui suit, on considère le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Norme d'un vecteur

Soit $\vec{u}$ (x ; y), le point A tel que $\vec{OA} = \vec{u}$ et H la projection orthogonale de A sur l'axe des abscisses.

1°) Faire une figure illustrant cette situation. A-t-on OH = x ? $OH^2 = x^2$? HA = y ? $HA^2 = y^2$?

2°) Calculer OA^2 à l'aide de x et de y en justifiant. En déduire que $\| \vec{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3°) Le résultat précédent reste-t-il valable si le repère n'est pas orthonormal ? Argumenter la réponse.

4°) Application : a) dessiner un représentant de $\vec{u}$ (4 ; 3) ; calculer $\| \vec{u} \|$.
b) soit A(1 ; 5) et B(–2 ; 1) ; calculer les coordonnées de $\vec{AB}$ puis AB.

2. Condition d'orthogonalité pour les vecteurs

Soit $\vec{u}$ (2 ; 3) et $\vec{v}$ (–3 ; 2). Placer les point A et B tels que $\vec{OA} = \vec{u}$ et $\vec{OB} = \vec{v}$.

1°) Quelles sont les coordonnées de $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ et $\vec{AB}$? En déduire OA, OB et AB.

2°) Établir si le triangle OAB est rectangle en O.

3°) Plus généralement, soit $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y') deux vecteurs non nuls.

a) Placer les point M et N tels que \o(OM;\s\up7(⟶))=\o(u;\s\up7(→)) et \o(ON;\s\up7(⟶))=$\vec{v}$. Quelles sont les coordonnées de $\vec{OM}$, $\vec{ON}$ et $\vec{MN}$? En déduire OM, ON et MN en fonction de x, y, x' et y'.

b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si les droites (OM) et (ON) sont perpendiculaires c'est à dire si le triangle OMN est rectangle en O. En écrivant la condition pour laquelle le triangle OMN est rectangle en O, montrer que les droites (OM) et (ON) sont orthogonales si xx' + yy' = 0.

À retenir : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si l'un d'eux est le vecteur nul ou bien si leurs directions sont perpendiculaires.
Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, soit $\vec{u}$ (x ; y) et $\vec{v}$ (x' ; y')) ;
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si x x' + y y' = 0.

3. Applications

Soit $\vec{u}$ (2 ; –1), $\vec{v}$ (1,5 ; 3) et $\vec{w}$ (2 ; 5).

a) Déterminer par le calcul si parmi ces vecteurs, certains sont orthogonaux.

b) Soit $\vec{r}$ (2 ; y). Déterminer y sachant que $\vec{r}$ est orthogonal à $\vec{u}$.

c) Soit A(1 ; –1), B(2 ; 1) et C(–5 ; 2). Établir par le calcul que le triangle ABC est rectangle en A.

d) Soit D(x ; y). Calculer les coordonnées de $\vec{AD}$ en fonction de x et y puis en écrivant la condition d'orthogonalité entre $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ et la condition AB = AD, déterminer les coordonnées de D tel que DAB soit un triangle rectangle isocèle en A.

4. CONDITION D'ORTHOGONALITÉ DE DEUX DROITES DÉTERMINÉES PAR LEURS ÉQUATIONS.

1°) Soit (d) la droite d'équation $4x + 3y - 1 = 0$; soit (d') celle d'équation $1{,}5x - 2y + 3 = 0$. Pour chacune des droites, déterminer un vecteur directeur. Établir par le calcul que les deux droites (d) et (d') sont orthogonales.

2°) Soit H(–2 ; 3). Déterminer une équation de la droite (p) perpendiculaire à (d) qui passe par H.

3°) Soit K(2 ; 1). Déterminer les coordonnées du milieu de [HK] puis une équation de la médiatrice de [HK].

4°) Plus généralement, soit (d) la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ et (d') la droite d'équation cartésienne $a'x + b'y + c' = 0$. Écrire en fonction des coefficients a et b la condition d'orthogonalité des deux droites (d) et (d'). Comparer la direction du vecteur $\vec{n}$ (a ; b) et la direction de la droite (d).

5°) Soit (d) la droite d'équation réduite $y = mx + p$ et (d') la droite d'équation réduite $y = m'x + p'$. Donner en fonction de m les coordonnées d'un vecteur directeur de (d). Donner en fonction de m les coordonnées d'un vecteur directeur de (d'). Écrire la condition d'orthogonalité et retrouver ainsi la condition sur les coefficients directeurs.

5. Exercice. Soit les points A(4 ; 2) , B(–1 ; 3), C(–4 ; 1), D(–5 ; –4) et E(0 ; –5).

1°) Placer les points en prenant comme unité graphique le carreau ou le cm.

2°) Trouver un quadrilatère dont les sommets sont parmi A, B, C, D et E qui semble être un parallélogramme. Établir à l'aide du calcul vectoriel que c'est bien un parallélogramme.

3°) Mêmes questions pour un triangle isocèle. 4°) un rectangle non isocèle. 5°) un rectangle et isocèle.

6°) un trapèze isocèle.

Analyse de la réalisation des TD 9 et 10

TD n° 9 - Vers une nouvelle opération avec les vecteurs

L'objectif de ce TD était de préparer les élèves à l'opération produit d'un vecteur par un scalaire. Les deux premières activités devraient être faites en papier crayon et les trois dernières d'abord en papier crayon, puis avec Cabri, qui fonctionne ici comme un outil de vérification des conjectures des élèves, mais la contrainte temps n'a pas rendu possible la réalisation du TD et l'enseignant a laissé comme devoir à la maison. Pour que le lecteur puisse comprendre le type d'activités proposées, nous en transcrivons ci-dessous un exemple :

Exercice 4 : Faire la figure sur le cahier puis dans Cabri

Marquer deux points A et B. Soit $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$.

1°) Construire le symétrique C de A autour de B ;
le symétrique D de B autour de C ;
le symétrique E de C autour de D ;
le symétrique F de D autour de E.

2°) Calculer les vecteurs $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EF}$ en fonction de $\vec{v}$.

3°) Calculer $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{FA}$ et $\overrightarrow{CA}$ en fonction de $\vec{v}$.

L'objectif de ce TD est de permettre à l'élève de commencer à déduire seul des propriétés autour du produit par un réel, et ce dans un cas bien particulier car il s'agit à chaque fois d'un nombre entier. En effet, pour l'exemple donné ci-dessus l'élève doit produire des réponses telles que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{EF}$. Avec la machine l'élève peut déplacer le point A (par exemple) et vérifier que l'égalité obtenue est toujours vraie.

TD n° 10 - Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Dans l'environnement papier crayon pour construire un vecteur qui soit le produit d'un vecteur donné par une constante k, il faut tout d'abord passer par un vecteur géométrique $\overrightarrow{AB}$ et puis faire $k \times \overrightarrow{AB}$. Et encore cela n'est possible que si k a des valeurs particulières : comment construire par exemple $2{,}32 \times \vec{u}$? Et même pour des valeurs qui ne devraient pas poser de problèmes telles que k=2/3, cela n'est pas de tout évident que les élèves sachent le faire, au contraire. En effet, nous avons pu constater en classe que les élèves ne savent pas construire le tiers d'un segment donné (voir l'analyse de l'activité 1 ci-dessous). En revanche dans l'environnement Cabri-géomètre II, on peut construire une macro-construction qui permette d'obtenir un vecteur $k \times \vec{u}$ sans passer par le vecteur géométrique $\overrightarrow{AB}$ et pour n'importe quelle valeur de k, comme nous le verrons ci-dessous, dans la première activité de ce TD.

Avant la construction de cette macro, l'enseignant a proposé une activité pour introduire et préparer le produit par un scalaire. Il s'agit de l'activité 1, dont l'énoncé a déjà été donné dans les annexes.

L'idée de l'enseignant de demander un représentant $\vec{w}$ de $\overrightarrow{OK}$ est de se détacher du vecteur géométrique pour observer l'effet sur $\vec{w}$ des déplacements du vecteur $\vec{v}$ et des

changements de la valeur de k. Les élèves devaient en quelque sorte oublier les étapes intermédiaires pour obtenir $\vec{w}$. Ce qui attire notre attention est le fait qu'à chaque fois qu'on va parler de représentant, on utilise la notation vectorielle, soit ici $\vec{w}$. Il nous semble que cela est une règle implicite dans les manuels pour donner l'idée d'une généralisation et/ou d'une certaine abstraction, qui doit exister quand on parle d'un représentant d'une classe de vecteurs définis dans une structure vectorielle quelconque. Dans les manuels on utilise le mot "représentant" quand on parle de $\vec{u}$ et sinon on parle d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$.

La construction de k fois $\vec{v}$, et les questions qui suivent, ont incité les élèves à manipuler les éléments qu'ils avaient sur l'écran de leur calculatrice. Ils ont vu que k n'était pas lié au vecteur $\vec{v}$ ni au choix du représentant, ce qui a fait apparaître un nouvel invariant : l'invariance du produit par rapport au représentant choisi. Cela fait encore appel, implicitement, aux vecteurs comme classes d'équivalence. L'objectif est de montrer aux élèves que si l'on déplace le vecteur $\vec{v}$, le produit par un scalaire n'est pas modifié, car on n'a changé ni sa direction, ni son sens, ni sa longueur. En revanche si on le fait tourner, le vecteur $\vec{w}$ tourne aussi, en conservant ainsi la même direction et le même sens que le vecteur $\vec{v}$.

Un autre objectif de l'activité est de montrer que la norme de $\vec{w}$ et son sens par rapport au vecteur $\vec{v}$ dépendent de k.

Dans cette activité, Cabri-géomètre II aide les élèves à émettre des conjectures pour définir le produit d'un vecteur par un scalaire. Par l'observation de ce qui se passe sur leurs écrans, ils doivent arriver à définir, ou du moins à ébaucher la définition de cette nouvelle opération. L'enseignant leur a demandé d'écrire la définition de produit par un scalaire comme devoir à la maison.

Il est vrai que pour effectuer l'activité 1, l'élève doit passer par le vecteur géométrique $\overrightarrow{OA}$, puis par le vecteur $\overrightarrow{OK}$ et finalement arriver au vecteur $\vec{w}$, mais cela lui permet d'essayer d'expliquer les résultats qu'il obtient et une fois cette étape accomplie il arrive enfin à construire, dans Cabri II une macro-construction qui ne dépend que de k, de $\vec{v}$ et d'un point O qui doit être l'origine du vecteur $\vec{w}$. Au moment d'institutionnaliser cette nouvelle opération, l'enseignant a dit que le produit par un scalaire ne dépend pas du point O et que dans Cabri-géomètre II, il faut ce point pour construire le vecteur.

2. Une nouvelle opération
Définir la macro-construction (l'appeler "kfoisVec") qui, à partir de la donnée d'un nombre k, d'un vecteur $\vec{v}$ et d'un point O, construit le représentant du vecteur $k\vec{v}$ d'origine O.

Pour définir cette macro, désigner $\vec{v}$, k et O comme objets initiaux et le vecteur $\overrightarrow{OK}$ comme objet final

Cette macro peut finalement être utilisée pour n'importe quel vecteur du plan et pour n'importe quel réel k.

Dans la deuxième séance de ce TD, un élève a demandé à l'enseignant comment partager un segment en exactement trois parties égales. L'enseignant a renvoyé cette question à toute la classe mais aucun élève ne savait comment faire, ce qui confirme la remarque que nous avons mis ci-dessus à propos du nombre très réduit de possibilités dont disposent les élèves pour construire, dans l'environnement papier crayon, un vecteur qui soit le produit d'un autre vecteur par un réel "particulier".

Les élèves ayant déjà une macro-construction donnant les coordonnées d'un vecteur, ils pouvaient vérifier dans Cabri II l'effet du produit par un scalaire sur les coordonnées d'un vecteur. Avant de commencer l'activité 3, l'enseignant leur a demandé ce qui devrait se passer avec les coordonnées de $k\vec{v}$ et un élève a répondu que si les coordonnées de $\vec{v}$ sont (x ; y) alors les coordonnées de $k\vec{v}$ sont (kx ; ky). Maintenant, en utilisant la macro-construction "coordonnées d'un vecteur" et "produit par un réel" ils peuvent vérifier cette "conjecture".

Enfin on passe à la construction d'une macro-construction qui fournit les coordonnées de $k\vec{v}$.

3. Les coordonnées de $k\vec{v}$
Créer le fichier TD5E2. Montrer les axes. Éditer un nombre k (prendre une valeur pour k). Créer un vecteur $\vec{v}$ et construire le vecteur $k\vec{v}$ (avec la macro "kfoisVec"). Afficher les coordonnées de $\vec{v}$ et de $k\vec{v}$ (avec la macro "coordVec").

Dans ce TD, Cabri a eu un rôle important de mise en évidence de l'invariance du produit d'un vecteur quelque soit le représentant choisi et pour vérifier des propriétés (activité 4, ci-dessous) pour lesquelles, en papier crayon et dans un enseignement ordinaire, on ne trouve pas de justification, comme nous l'avons signalé lors de l'analyse des manuels. Les élèves ont ici la possibilité de manipuler des vecteurs et donc le résultat de l'addition et du produit par un scalaire, et de voir sur l'écran l'effet de leurs manipulations.

4. Observation de quelques propriétés du produit d'un vecteur par un nombre
a) Ouvrir un nouveau fichier. Éditer un nombre r (prendre une valeur pour r) ; créer deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; construire la somme $\vec{u} + \vec{v}$. À l'aide de la macro-construction "kfoisVec", construire $r\vec{u}$, $r\vec{v}$ et $r(\vec{u} + \vec{v})$

Vérifier que l'on a bien $r\vec{u} + r\vec{v} = r(\vec{u} + \vec{v})$ pour différentes valeurs de r et quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
a) b) Créer un nouveau fichier. Éditer deux nombres n et r (prendre des valeurs pour n et r) ; créer un vecteur $\vec{u}$. Construire à l'aide de la macro "kfoisVec" le vecteur $r\vec{u}$ puis le vecteur $n(r\vec{u})$. À l'aide de la calculatrice, afficher le produit $n \times r$ puis vérifier que $(n \times r)\vec{u} = n \times (r\vec{u})$

Ce TD ne traite pas directement des invariants auxquels nous nous sommes intéressée. Cependant, en parlant de l'invariance d'un produit par rapport au représentant choisi, on travaille une fois de plus les notions de direction, de sens et de longueur : on doit observer que si l'on multiplie un vecteur par un nombre positive, le vecteur produit aura même direction et sens que le premier vecteur et que si l'on multiplie un vecteur par un nombre négatif on obtient un vecteur de même direction que le premier mais de sens opposé.

Synthèse vecteurs

Document founi aux élèves[13]

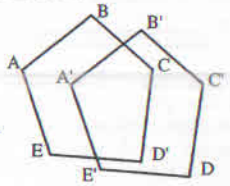
Vecteurs

§ I. Activités préliminaires
voir TD n°5

§ II. Notion de vecteur (rappel)

1. Caractérisation d'un vecteur
   • Si on déplace une figure par translation (c'est à dire en conservant distance, direction et sens) on définit un vecteur.

voir TD n°5 1°



$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \ldots$

   • Un vecteur (c'est à dire une direction, un sens et une longueur) définit une translation.

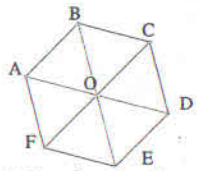
On dit par exemple la translation $\overrightarrow{AA'}$.

   • $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ si AA'=BB', (AA') // (BB') et $\overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BB'}$ ont même sens ;
   • $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ si ABB'A' est un parallélogramme ; (voir TD n°5 3°)
   • $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$ si [AB'] et [A'B] ont même milieu. (voir TD n°5 3°)

   • En tout point A, il existe un représentant $\overrightarrow{AB}$ d'un vecteur donné. (voir TD n°5 3°)

Notation : Un vecteur est défini par sa direction, son sens et sa longueur. Pour marquer qu'on s'intéresse essentiellement à ces trois éléments, on note parfois un vecteur $\vec{u}$ sans utiliser les noms des points d'un de ses représentants.

Exercice : Trouver des vecteurs égaux à $\overrightarrow{OD}$



2. Coordonnées d'un vecteur (TD n°5 : 3° 4° 5°)

Dans le plan rapporté au repère (O, I, J), soit $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ deux points

   • Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère (O, I, J) sont : $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ voir TD n°6 2°

[13] Ce document a été produit par l'enseignant responsable de la classe.

   • Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont bien les mêmes coordonnées.
   • Le signe des coordonnées du vecteur dépend de la direction du vecteur et non de la position d'un représentant de ce vecteur. (voir TD n°6 3° et 4°)
   • Étant donné un couple (x ; y) de nombres, il existe un seul vecteur ayant pour coordonnées (x ; y) dans le repère (O, I, J). (voir TD n°6 5°)

3. Vecteur nul

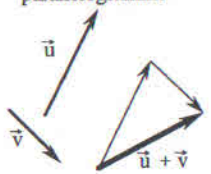
On note $\vec{0}$ le vecteur $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}$, ...
Ce vecteur est appelé vecteur nul et sa notation se justifie par suite des propriétés de calcul.

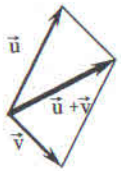
4. Norme d'un vecteur

   • AB est aussi appelé norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
   • On note $\| \vec{u} \|$ la norme du vecteur $\vec{u}$.
   • Si $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ alors $\| \vec{u} \| = MN$.
   • $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

§ III. Addition de deux vecteurs (voir TD n°7)

   • Soit A, B et C trois points. On a $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
   • Soit A, B et C trois points ; $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AS}$, S étant le point tel que ABSC soit un parallélogramme







   • Propriétés de l'addition des vecteurs

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,

l'addition des vecteurs ne dépend pas de l'ordre des termes : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

l'addition des vecteurs est associative : $(\vec{u} + \vec{v}) \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

on note cette somme $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$.

tout vecteur $\vec{u}$ admet un opposé noté $-\vec{u}$; si $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ alors $-\vec{u} = \overrightarrow{NM}$

§IV. Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

1. Définition (voir TD n°9 et TD n°10 1°) 2°) 3°))

À un vecteur $\vec{v}$ et à un nombre réel k, on associe le vecteur $\overrightarrow{OK}$ défini de la façon suivante :

   • si $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$, O et A étant distincts, on construit le point K d'abscisse k × OA sur la droite (OA) graduée à partir de O dans le sens de O vers A. Si k est positif, K est donc par rapport à O, du même côté que A et si k est négatif, K est du côté opposé à A ;

• si $\vec{v} = \vec{0}$ on prend $\overrightarrow{OK} = \vec{0}$.

Ce vecteur $\overrightarrow{OK}$ ne dépend que du nombre k et du vecteur $\vec{v}$ c'est pourquoi on peut le noter $k\vec{v}$

2. Propriétés algébriques (voir TD n°8 4°))

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour tous réels k et l , on a :

• $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

• $(k + l)\vec{v} = k\vec{v} + l\vec{v}$

• $0\vec{v} = \vec{0}$

• $k\vec{0} = \vec{0}$

Ces propriétés justifient qu'on utilise la même notation que celle de la multiplication des nombres.

3. Colinéarité de deux vecteurs

• Définition (TD n°10 5°): Soit $\vec{u}$ et $\vec{u}$ deux vecteurs.

$\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont dits COLINÉAIRES si l'un des vecteurs est nul ou bien s'ils ont même direction.

• Propriété : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ ou $\vec{v} = k\vec{u}$

• Vecteur directeur d'une droite : On appelle vecteur directeur d'une droite, tout vecteur ayant même direction que la droite.

• Utilisation de la colinéarité de vecteurs
  – pour montrer que deux droites sont parallèles, il suffit de montrer que deux vecteurs directeurs de ces droites sont colinéaires ;
  – pour montrer que trois points M, N et P sont alignés il suffit de montrer que les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ par exemple sont colinéaires.

4. Vecteur et milieu

I est le milieu de [AB] si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

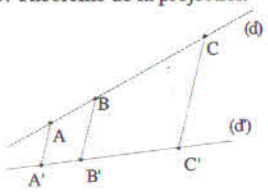
$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = 2\vec{0}$

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$

Soit ABC un triangle ; Si I et J sont les milieux de [AB] et [AC] alors $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BC}$

5. Théorème de la projection



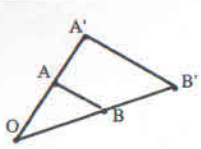
Soit A, B et C trois points d'une droite (d) ;
A', B' et C' trois points d'une droite (d').

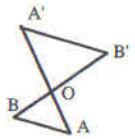
Soit le nombre x tel que $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC}$

le nombre y tel que $\overrightarrow{A'B'} = y\overrightarrow{A'C'}$

Si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles alors x = y
et réciproquement, si (AA') // (BB') et si x = y alors (CC') // (AA')

6. Énoncé du théorème de Thalès avec les vecteurs

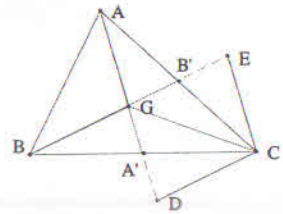




Soit O, A, A', B et B' tels que $\overrightarrow{OA'} = x\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB'} = y\overrightarrow{OB}$

Si (AB)//(A'B') alors x = y et $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{AB}$ et réciproquement
Si x = y alors (AB) // (A'B')

7. Application : caractérisation vectorielle du centre de gravité



Géométrie analytique

§I. Coordonnées et vecteurs

1. Interprétation vectorielle des coordonnées

Soit O, I, J trois points non alignés. (O, I, J) constitue un repère du plan et M est un point du plan.

Si (x ; y) sont les coordonnées de M dans le repère (O, I, J), on a $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.

2. Base, repère

Soit $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non colinéaires

Pour tout vecteur $\vec{v}$, il existe deux nombres réels x et y tels que $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$. (x ; y) est appelé couple de coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i} ; \vec{j})$.

Si deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v'}$ sont égaux, ils ont même couple de coordonées.

Si (x ; y) sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans le repère (O, I, J), on a : $\vec{v} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$.

Réciproquement, si $\vec{v} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$ alors (x ; y) sont les coordonnées de $\vec{v}$ dans le repère (O, I, J).

3. Coordonnées d'un vecteur dans une base
4. Propriétés algébriques et coordonnées
5. Coordonnées du milieu
6. Condition de colinéarités

§II. Droites du plan et vecteurs

1. Caractérisation vectorielle d'une droite
2. Équations d'une droite

§III. Norme et orthogonalité

1. Vecteurs orthogonaux
2. Base orthogonale, orthonormale
3. Principaux résultats

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Si M(x ; y) alors $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si $\vec{u}$ (x ; y) alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Si $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ alors $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

$OA \perp OB$ si et seulement si $x_A x_B + y_A y_B = 0$

Soit $\vec{u}(x ; y)$ et $\vec{u'}(x' ; y')$ $\vec{u} \perp \vec{u'}$ si et seulement si $x x' + y y' = 0$

Les vecteurs dans l'enseignement secondaire

- Aspects outil et objet dans les manuels

- Etude de difficultés d'élèves dans deux environnements : papier crayon et Cabri-géomètre II

Résumé de la thèse

Cette recherche porte sur l'enseignement des vecteurs dans le secondaire. Elle vise d'une part à analyser la notion de vecteur, telle qu'elle est introduite et utilisée dans l'enseignement de la classe de Quatrième à celle de Seconde, et d'autre part à étudier quelques difficultés d'élèves dans l'apprentissage de cette notion. Cette recherche se place dans un cadre théorique de référence qui fait appel à la théorie des champs conceptuels, aux registres de représentations sémiotiques et aux concepts d'outil et d'objet.

Une première partie est consacrée à l'étude de quelques recherches sur l'enseignement des vecteurs à l'université et dans le secondaire. A partir de cette étude la problématique de recherche est définie, ainsi que les choix méthodologiques adoptés pour répondre aux questions et valider les hypothèses posées dans la problématique.

Une deuxième partie est consacrée d'abord à l'étude de l'évolution de l'enseignement des vecteurs dans le secondaire depuis 1930, puis à une analyse détaillée de manuels actuels. Cette analyse permet de repérer des caractéristiques du savoir à enseigner. L'attention est centrée sur la place et la fonction des différents registres de représentations sémiotiques dans l'enseignement des vecteurs et sur la fonction des vecteurs dans la résolution des problèmes de géométrie.

La troisième partie de ce travail comporte deux sortes de dispositifs expérimentaux mis en place pour étudier de difficultés d'élèves dans l'apprentissage de la notion de vecteur en tant qu'outil de résolution d'un problème de géométrie et en tant qu'objet d'étude. Le premier dispositif, réalisé en classes de Première S et de DEUG première année, vise à analyser des difficultés d'élèves lorsqu'ils ont à résoudre un problème de géométrie pour lequel les vecteurs apparaissent (dans l'enseignement) comme constituant un outil efficace pour leur résolution. Le deuxième dispositif concerne l'étude d'une séquence d'enseignement construite autour d'un environnement informatique : le logiciel Cabri-géomètre II. L'attention est alors portée sur les difficultés d'élèves relatives aux notions de représentant d'un vecteur. Cette analyse, faite en termes de champs conceptuels, vise à identifier la persistance et/ou la perturbation de certains théorèmes-en-acte construits par les élèves.

Mots clés

Vecteur, géométrie, didactique, enseignement des mathématiques, apprentissage, outil/objet, registre, figure, point de vue, champs conceptuels, invariants, théorème-en-acte, manuels, environnement informatique, Cabri-géomètre, papier crayon.